UM PROBLEMA ABSTRATO DE CAUCHY-GOURSAT

REINALDO SALVITTI

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. DOMINGOS PISANELLI

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNP_q - 14745/71, BNDE e Finep-79/75.

Junho de 1975
São Paulo

A G R A D E C I M E N T O S

À Renate Watanabe e Ofélia Teresa Alas pelo incentivo que me deram como meus professores no início de minha formação.

Aos professores Raymundo Luiz de Alencar, Hamilton Luiz Guidorizzi, Roberto Romano, Tadao Yoshioka e Eduardo Sebastiani pelas valiosas discussões e sugestões.

Ao meu orientador DOMINGOS PISANELLI pela sugestão do tema e pelo constante e paciente trabalho de orientação.

Í N D I C E

Notações e Nomenclatura 5

Introdução 6

CAP.0 - FUNÇÃO HOLOMORFA DE VÁRIAS VARIÁVEIS 8

§1. Definição 8

§2. Fórmula de Cauchy 9

§3. Desigualdade de Cauchy e série de Taylor 9

CAP.I - APLICAÇÕES G-ANALÍTICAS E APLICAÇÕES ANALÍTICAS DE ESPAÇOS DE BANACH EM BANACH 12

§1. Definição 12

§2. Multinearidade das diferenciais 14

§3. Desenvolvimento de uma aplicação G-analítica em série 15

§4. Desigualdade fundamental 18

§5. Aplicações analíticas de Banach em Banach 19

CAP.II- UM PROBLEMA NÃO-LINEAR ABSTRATO DE GOURSAT 23

§1. O problema de Goursat 23

§2. Condições equivalentes ao problema de Goursat 31

§3. Observações 34

CAP.III- ESPAÇOS DE BANACH DE SÉRIES FORMAIS E APLICAÇÕES 36

§1. O espaço H_Δ 36

§2. O espaço H_η 39

§3. O espaço $H_{\eta,\Delta}$ 40

§4. Exemplos 40

§5. Soluções do problema de Goursat em função das condições iniciais 44

§6. Aplicação a um sistema não linear de Cauchy-Goursat 48

§7. Observações 50

APÊNDICE 53

BIBLIOGRAFIA 56

NOTAÇÕES E NOMENCLATURA

- $\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
- X , Y : indicam sempre espaços de Banach
- Ω : é um conjunto aberto do espaço que estiver contido
- $\overset{\circ}{A}$: interior do conjunto A
- $B(x_o,R)$: bola aberta de centro x_o e raio R
- $\overline{B(x_o,R)}$: bola fechada de centro x_o e raio R
- $B_s(0,R)$: bolas de uma família de espaços indexados por s.
- X^p : produto cartesiano p vezes do conjunto X
- Para uma N-upla de inteiros $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$

  D^α : indica a derivada mixta $D_1^{\alpha_1}\ldots D_N^{\alpha_N}$

  $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_N$

  $m(\alpha) = \min\{\alpha_i,\ 1\le i\le N\}$

  $\theta \ge \alpha \iff \theta_i \ge \alpha_i \ ; \ i=1,\ldots,N$

  $\alpha^2 = \alpha_1^2\ldots\alpha_N^2$

  $u = 0(t^\alpha) \iff D_j^k\, u = 0$, quando $t_j = 0$, $0\le k<\alpha_j$ para cada j, $1\le j\le N$
- As palavras holomorfa e analítica são usadas como sinônimos
- $v^n \rightrightarrows v$: indica convergência uniforme das funções v^n para v
- A frase "círculo um pouco maior que 1" significa uma bola de raio maior que 1 de mesmo centro e contida no mesmo aberto à da bola de raio 1 em questão.

I N T R O D U Ç Ã O

Em 1970 F. Treves [7] generalizou o Teorema de Yamanaka - Ovcyannicov que procura soluções do problema de Cauchy

$$\frac{du}{dt} = F(u,t)$$

$$u(0) = u^o$$

dando uma versão não-linear abstrata onde $F(u,t)$ toma valores numa escala de espaços de Banach.

Motivado na Teoria de Grupos de Lie infinito D.Pisanelli [4];[5], quando procurava parametrizar um sub-grupo dado por uma equação a derivadas parciais, enunciou hipóteses equivalentes às de Treves, utilizando sua desigualdade fundamental, que será tratada no Cap.I. Isso trouxe as seguintes vantagens:

(a) verificar de maneira fácil as hipóteses no segundo membro de uma equação do tipo Cauchy-Kovalevsky

(b) evitar o processo de quase-linearização usado por outros autores (Treves-Niremberg).

Nesse trabalho, tratamos do problema de Goursat

$$D_t^{\alpha} u(t) = F(u,t) \qquad t \in C^N$$

$$u - u^o = O(t^{\alpha})$$

dando uma versão não-linear abstrata onde $F(u,t)$ toma valores numa escala de espaços de Banach. Cabe salientar que esse problema foi tratado por P. Duchateau [8] todavia sua demonstração não nos satisfez como é mostrado nas Observações do Cap. III. Assim, no teorema 1 do Cap.II, enunciamos e demonstramos condições suficientes, que F(u,t) deve obedecer, para que exista uma única solução u(t) analítica numa bola de C^N com valores na escala de Banach. Ainda no Cap. II mostramos que existem hipóteses equivalentes àquelas do Teorema 1; como foi feito no §6 do Cap.III, isso traz vantagens na verificação das hipóteses do segundo membro de algumas equações de Cauchy - Goursat e evita-se o processo de quase-linearização usado por P.Duchateau [8] .

No Cap. III construímos os espaços de Banach H_Δ, H_η e $H_{\eta,\Delta}$ para examinar qual a dependência que a solução do problema de Goursat tem da condição inicial u^o. Isso é também aplicado nas equações de Cauchy-Goursat tratadas no § 6.

O Cap.0 é apenas a apresentação de resultados de funções analíticas de várias variáveis que serão usados nos capítulos posteriores; da mesma forma o Cap. I trata de funções G-analíticas de espaços de Banach em espaços de Banach com algumas demonstrações.

No Apêndice estão colocadas algumas desigualdades numéricas não usuais usadas na demonstração de certos teoremas.

Tanto os problemas de Cauchy-Kovalevsky tratado por Treves [7] quanto o uso que D. Pisanelli [4] fez com suas novas hipóteses estão contidas aqui como casos particulares.

C A P Í T U L O 0

FUNÇÃO HOLOMORFA DE VÁRIAS VARIÁVEIS COMPLEXAS

§1 - *Definição 1* - Seja $f(z_1,\ldots,z_n)$ uma função definida num aberto $\Omega \subset C^n$ e com valores num espaço Y de Banach. Dizemos que f é uma função parcialmente holomorfa ou que tem derivada parcial em relação a z_j ($\forall j,\ 1 \le j \le n$) num ponto $(z_1^o,\ldots,z_n^o) \in \Omega$ se a função $f(z_1^o,\ldots,z_j,\ldots,z_n^o)$, da variável z_j, for holomorfa ([1] ,pag52) no ponto z_j^o. Quando f for parcialmente holomorfa em relação a z_j ($\forall j,\ 1 \le j \le n$) em todo ponto de Ω dizemos que f é holomorfa.

A derivada parcial de f em relação a z_j é denotada por:

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \lim_{\alpha_j \to 0} \frac{f(z_1,\ldots,z_j+\alpha_j,\ldots,z_n) - f(z_1,\ldots,z_n)}{\alpha_j}$$

Teorema 1 - ([1] , pag 63) - Seja $f(z_1,\ldots,z_n)$ uma função holomorfa de um aberto $\Omega \subset C^n$ num espaço de Banach Y, com $0 \in \Omega$. Então:

(a) f tem derivadas parciais de todas as ordens e derivadas parciais mistas independentes da ordem diferenciação.

(b) f é contínua e limitada em todo conjunto compacto de Ω.

(c) se $||f(x)|| \le M$, para $||x|| \le R$ e $\rho < R$, então para $||x|| < \rho$ temos

$$||f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_k})_o \, x_k|| \leq \frac{M}{R(R-\rho)} ||x||^2$$

§2 - Fórmulas de Cauchy para funções holomorfas de n variáveis complexas ([2], pág 20)

Seja $f(z_1,\ldots,z_n)$ uma função holomorfa de um aberto $\Omega \subset C^n$ num espaço de Banach Y. Como para as funções de uma variável complexa, demonstra-se que:

$$(0.1)\quad f(z_1^o,\ldots,z_n^o) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1\times\ldots\times\Gamma_n} \frac{f(t_1,\ldots,t_n)}{(t_1-z_1^o)\ldots(t_n-z_n^o)} dt_1\ldots dt_n$$

onde $\Gamma_j\,(1\leq j\leq n)$ é uma curva de Jordan fechada, retificável, orientada positivamente e que limita um conjunto D_j tal que;

$$D_1\times\ldots\times D_n \subset \Omega \quad e \quad (z_1^o,\ldots,z_n^o) \in D_1^o\times\ldots\times D_n^o$$

Ainda vale que

$$(0.2)\quad \frac{\partial^m f(z_1^o,\ldots,z_n^o)}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}} = \frac{m_1!\ldots m_n!}{(2\pi i)^m} \int_{\Gamma_1\times\ldots\times\Gamma_m} \frac{f(t_1,\ldots,t_n)}{(t_1-z_1^o)^{m_1+1}\ldots(t_n-z_n^o)^{m_n+1}} dt_1\ldots dt_n$$

onde $m = m_1+\ldots+m_n$ e $\Gamma_j\,(1\leq j\leq n)$ tem o mesmo significado mencionado acima.

§3 - Desigualdade de Cauchy e série de Taylor ([6], pág 222)

Tomando-se uma função f como no §2 teremos

$$\frac{1}{m_1!\ldots m_n!} \left|\left|\frac{\partial^m f(z_1^o\ldots z_n^o)}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}}\right|\right| \leq \frac{M}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_1\ldots\gamma_n}{d_1^{m_1+1}\ldots d_n^{m_n+1}}$$

onde γ_j é o comprimento de Γ_j $(1 \le j \le n)$ e d_j é a distância de z_j^o a Γ_j;

$$M = \sup_{t \in \Gamma} ||f(t)|| \qquad t = (t_1, \ldots, t_n)$$
$$\Gamma = \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n$$

No caso de Γ_j ser um círculo de raio r_j $(1 \le j \le n)$ temos a expressão usual,

$$(0.3) \qquad \frac{1}{m_1! \ldots m_n!} \left|\left| \frac{\partial^m f(z_1^o, \ldots, z_n^o)}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} \right|\right| \le M \cdot \frac{1}{r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}}$$

Como consequência a série múltipla:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \frac{1}{m_1! \ldots m_n!} \cdot \frac{\partial^m f(z_1^o, \ldots, z_n^o)}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} (z_1 - z_1^o)^{m_1} \ldots (z_n - z_n^o)^{m_n}$$

é absolutamente convergente no polidisco D,

$$D = \{z \in C^n \; ; \; |z_j - z_j^o| < r_j \; , \; 1 \le j \le n\}$$

Segue-se então a série de Taylor,

$$(0.4) \qquad f(z_1, \ldots, z_n) =$$

$$= \sum_{m=0} \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \frac{1}{m_1! \ldots m_n!} \frac{\partial^m f(z_1^o, \ldots, z_n^o)}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} (z_1 - z_1^o)^{m_1} \ldots (z_1 - z_n^o)^{m_n}$$

onde $z \in D$.

Definição 2 - Chama-se polinômio m-homogêneo ou polinômio homogêneo de grau m de um espaço de Banach X num espaço de Banach Y a restrição à diagonal de uma aplicação m-linear simétrica de X^m em Y.

Teorema 2 - ([1], pág 64) - Seja $\{P_n(z_1,z_2)\}_{n\geq 0}$ uma sucessão de polinômios homogêneos definidos em C^2,

$$P_n(z_1,z_2) = \sum_{j=0}^{n} a_{n_j} z_1^j z_2^{n-j} \qquad (a_{n_j} \in Y \; ; \; 1\leq j\leq n)$$

com valores em Y e seja um aberto $\Omega \subset C^2$. Então as seguintes proposições são equivalentes:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n$ é convergente em Ω

(b) os termos P_n são uniformemente limitados em cada vizinhança limitada Ω_o, com $\overline{\Omega_o} \subset \Omega$.

(c) cada ponto de Ω tem uma vizinhança Ω_1, $\Omega_1 \subset \Omega$, tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\Omega_1} ||P_n(z_1,z_2)|| < \infty$$

C A P Í T U L O   I

APLICAÇÕES G-ANALÍTICAS E APLICAÇÕES ANALÍTICAS DE ESPAÇOS DE BANACH EM ESPAÇOS DE BANACH

§1 - Aplicações G-analíticas

Definição 1 - Sejam X e Y espaços de Banach e $f(x)$ uma aplicação definida num aberto $\Omega \subset X$ a valores em Y. Essa aplicação é chamada G-diferenciável ou diferenciável segundo Gâteaux ou <u>G-analítica</u> se em cada ponto $x \in \Omega$ existir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon}, \quad \forall h \in X$$

Esse limite é chamado diferencial de f no ponto x relativo ao acréscimo h e será denotado por

$$\delta_x^h f \quad \text{ou} \quad \delta f(x,h)$$

Dado um aberto Ω, $\Omega \subset X$, $x \in \Omega$ e $h \in X$ representaremos por

$$D(x,h) = \{\alpha \in C \mid (x+\alpha h) \in \Omega\}$$

Lema - O conjunto $D(x,h)$ é aberto em C.

De fato isso é verdade porque as aplicações produto por um escalar e as translações são contínuas.

Teorema 1 - A aplicação $f(x)$ de um aberto Ω, $\Omega \subset X$, em Y, com X e Y espaços de Banach, é G-analítica se e somente se a aplicação $f(x+\alpha h)$ for holomorfa em $D(x,h)$ para todo $x \in \Omega$ e $h \in X$.

De fato se $f(x)$ é G-analítica

$$\delta f(x+\varepsilon_o h, h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon_o h+\varepsilon h) - f(x+\varepsilon_o h)}{\varepsilon}$$

logo $f(x+\alpha h)$ é holomorfa em $D(x,h)$. Para a condição suficiente basta observar que

$$\left(\frac{df(x+\alpha h)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} = \delta f(x,h)$$

Corolário - A função f é G-analítica em Ω se e somente se $f(x+\alpha_1 h_1+\ldots+\alpha_n h_n)$ é holomorfa em $D(x;h_1,\ldots,h_n) = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in C^n$ tal que $(x+\alpha_1 h_1+\ldots+\alpha_n h_n) \in \Omega\}$ para todo $h_1,\ldots,h_n$ de X e x de Ω.

De fato isso é evidente pela definição 1 do cap.0.

Teorema 2 - Se $f(x)$ é uma função G-analítica então fixado $h_1 \in X$ a função $\delta_x^{h_1} f = \delta f(x,h_1)$ de Ω em Y é G-analítica.

Pelo corolário anterior como f é G-analítica então $f(x+\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2)$ é holomorfa em $D(x;h_1,h_2)$

$$D(x;h_1,h_2) = \{(\alpha_1,\alpha_2) \in C^2 \ ; \ (x+\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2) \in \Omega\}$$

para todo $h_1,h_2 \in X$ e $x \in \Omega$. Logo

$$\delta_x^{h_2} \delta_x^{h_1} = \delta_x^{h_2} \left[\frac{d}{d\alpha_1} f(x+\alpha_1 h_1)\right]_{\alpha_1=0} =$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} f(x+\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2)\right]_{\alpha_1=0}\right\}_{\alpha_2=0} =$$

$$= \left\{\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \, \partial \alpha_1} f(x+\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2)\right\}_{\alpha_1=\alpha_2=0}$$

Definição 2 - (a) $\delta^o f(x,h) = f(x)$

(b) $\delta^1 f(x,h) = \delta f(x,h)$

(c) $\delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n) =$

$$= \delta_x^{h_n}\ \delta^{n-1}\ f(x;h_1,\ldots,h_{n-1}) \quad , \ n\geq 0$$

(d) denotamos

$$\delta^n f(x,h) = \delta^n f(x;h\ ,\ldots,h)$$

Teorema 3 - Seja $f(x)$ uma função G-analítica de um aberto Ω, $\Omega \subset X$, em Y, com X e Y espaços de Banach. Então:

(a) $\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1} f(x+\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2)\}_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \delta f(x,h_1)$

(b) $\{\frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_n} f(x+\alpha_1 h_1+\ldots+\alpha_n h_n)\}_{\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0} =$

$$= \delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n)$$

(c) $\{\frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_n} f(x+\alpha_1 h+\ldots\alpha_n h)\}_{\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0} =$

$$= \{\frac{d^n}{d\alpha^n} f(x+\alpha h)\}_{\alpha=0}$$

A demonstração dessas igualdades é evidente em vista da definição anterior.

§2 - *Multilinearidade das diferenciais*

Teorema 4 - A diferencial $\delta f(x;h)$ é linear em h.

De fato

(a) $\delta f(x;kh) = 0$ para $k = 0$

Para $k \neq 0$

$$\delta f(x;kh) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x+\alpha kh)-f(x)}{\alpha} = k\cdot\lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x+\alpha kh)-f(x)}{\alpha k} = k\cdot\delta f(x;h)$$

(b) A função $f(x+\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2)$ é holomorfa em $D(x;h_1,h_2)$ então pelo Teorema 1 do cap.0 temos:

$$f(x+\alpha_1 h_1+\alpha_2) = f(x) + \alpha_1 (\frac{\partial f}{\partial \alpha_1})_o + \alpha_2 (\frac{\partial f}{\partial \alpha_2})_o + o(||\alpha||)$$

onde $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$, $||\alpha|| = \text{máx}\ \{|\alpha_1|,|\alpha_2|\}$.

Tomando $\alpha_1 = \alpha_2$ temos $o(||\alpha||) = o(|\alpha_1|)$ e portanto $\delta f(x;h_1+h_2) = \lim\limits_{\alpha_1 \to 0} \frac{1}{\alpha_1} \{f[x+\alpha_1(h_1+h_2)]-f(x)\} =$

$= \delta f(x;h_1) + \delta f(x;h_2)$.

Teorema 5 - (a) $\delta^n f(x;h_1,\dots,h_n)$ é uma aplicação n-linear simétrica em $h_1,\dots,h_n$.

(b) $\delta^n f(x;h)$ é um polinômio homogêneo de grau n em h.

A simetria de $\delta^n f(x;h_1,\dots,h_n)$ segue da parte (b) do teorema 3 deste cap. e da parte (a) do teorema 1 do cap.0. A multilinearidade vem da parte (c) da definição 2 e da linearidade de $\delta_x^{h_n} f$.

Como $\delta^n f(x;h) = \delta f(x;h,\dots,h)$ então temos um polinômio homogêneo de grau n em h.

§3 - Desenvolvimento de uma aplicação G-analítica em série.

Definição 3 - (a) Diz-se que um subconjunto A de X é estrelado se $\alpha x \in A$, para $x \in A$ e $|\alpha| \le 1$, isto é, $\alpha A \subset A$, $\forall \alpha \in C$, $|\alpha| \le 1$.

(b) Uma estrela de $x_o \in X$ em X é um conjunto que pode ser descrito por $x_o + A$ onde A é um conjunto estrelado de X.

Seja $f(x)$ uma aplicação G-analítica de $\Omega \subset X$ em Y. Então $f(x+\alpha h)$ é holomorfa no aberto $D(x,h)$. Para $x \in \Omega$ e $x+h$ numa estrela de x em Ω temos $\overline{B(0,1)} \subset D(x,h)$. Para a função $f(x+\alpha h)$ temos o desenvolvimento de Taylor num círculo de raio um pouco maior que 1:

$$f(x+\alpha h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left[\frac{d^n f}{d\varepsilon^n}(x+\varepsilon h)\right]_{\varepsilon=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \delta^n f(x;h)$$

Para $\alpha = 1$ temos o desenvolvimento de Taylor

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n f(x;h) \tag{1.1}$$

Da fórmula de Cauchy temos

$$\delta^n f(x;h) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(x+\alpha h)}{\alpha^{n+1}} d\alpha$$

onde Γ é a circunferência de centro 0 e raio 1.

Supondo que para qualquer estrela E de x_o em Ω, que contenha x_o e x_o+h, tivermos $||f(x)|| \leq M$, $x \in E$ ainda resultará a desigualdade de Cauchy

$$||\delta^n f(x,h)|| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot M = n!\, M \tag{1.2}$$

Teorema 6 - Seja $P_n(x)$ uma sequência de polinômios homogêneos de grau $n \geq 0$ definidos em X e com valores em Y. Supondo que D é o campo de convergência de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ e $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$ teremos:

(a) $\overset{\circ}{D}$ é estrelado

(b) $f(x)$ é G-analítico em $\overset{\circ}{D}$

(c) $\delta^n f(0,h) = n!\, P_n(h)$

(a) $\overset{\circ}{D}$ é estrelado

Seja $x \in \mathring{D}$. Existe λ_1, $|\lambda_1| > 1$ tal que $\lambda_1 x \in \mathring{D}$, porque $\mathring{D}$ é aberto. Mas

$$||P_n(\lambda_1 x)|| \leq M_x \ , \ \forall n \geq 0 \quad \text{pois} \quad \lambda_1 x \in D \quad e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||P_n(\lambda x)|| = \sum_{n=0} |\lambda|^n \, ||P_n(x)|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{|\lambda_1|^n} \cdot M_x$$

Logo $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda x)$ converge para $|\lambda| < |\lambda_1|$. Segue então que para λx, $|\lambda| \leq 1$, e $x \in \mathring{D}$, $\lambda \mathring{D} \subset D$. Como $\lambda \mathring{D}$ é aberto e as homotetias são homeomorfismos

$$\lambda \mathring{D} \subset \mathring{D} \ , \ |\lambda| \leq 1$$

(b) $f(x)$ é G-analítico em $\mathring{D}$

Seja $x \in \mathring{D}$ e $h \in X$, temos então

$$\{1\} \times D(x,h) \subset \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in C^2 \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2 h) \in \mathring{D}\}$$

Pelo teorema 2 do capítulo 0 teremos a convergência uniforme de $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x+\alpha h)$ numa vizinhança de cada ponto de $D(x,h)$. Tomando x' uma forma linear e contínua de Y temos ainda

$$x'\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x+\alpha h)\right) \quad \text{uniformemente convergente}$$

logo $x' \circ f$ holomorfa em $D(x,h)$. Segue então ([1] pág 52) que $f(x+\alpha h)$ é holomorfa em $D(x,h)$ e portanto G-analítico em $\mathring{D}$.

(c) $\delta^n f(0,h) = n! \, P_n(h)$

Como a série $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x+\alpha h)$ converge uniformemente em cada compacto de $D(x,h)$ podemos derivar termo a termo. Em particular

$$\left\{\frac{d^n}{d\alpha^n} f(\alpha h)\right\}_{\alpha=0} = \delta^n f(0,h) = n!\, P_n(h)$$

§4 - Desigualdade fundamental

Teorema 7 - Seja $f(x)$ uma aplicação G-analítica num aberto $\Omega \subset X$ com valores em Y. Tomemos $x_0 \in \Omega$ e $B(x_0,R) \subset \Omega$. Se $\sup\limits_{x\in B(x_0,R)} ||f(x)|| < \infty$ então para $0<\rho<R$

$$(1.3)\quad ||\delta^n f(x_0;h_1,\ldots,h_n)|| \leq \frac{n^n}{\rho^n} \sup_{x\in B(x_0,R)} ||f(x)|| \cdot ||h_1||\ldots||h_n||$$

Tomemos ρ, $0<\rho<R$, chamemos de D_ρ ao círculo fechado de raio ρ/n de C e de Γ_ρ à circunferência. Vale a inclusão $D_\rho\times\ldots\times D_\rho = D_\rho^n \subset D(x_0;\frac{h_1}{||h_1||},\ldots,\frac{h_n}{||h_n||})$ relativo à bola $B(x_0;R)$ porque tomando-se $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$

$$\varepsilon \in D_\rho^n \Longrightarrow ||\varepsilon_1 \frac{h_1}{||h_1||}+\ldots+\frac{h_n}{||h_n||}\varepsilon_n|| \leq \frac{\rho}{n}+\ldots+\frac{\rho}{n} = \rho<R$$

$$\delta^n f(x;\frac{h_1}{||h_1||},\ldots,\frac{h_n}{||h_n||}) =$$

$$= \left\{\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon_1\ldots\partial\varepsilon_n} f(x+\varepsilon_1\frac{h_1}{||h_1||}+\ldots+\varepsilon_n\frac{h_n}{||h_n||})\right\}_{\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_n=0} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_\rho^n} \frac{f(x+\alpha_1\frac{h_1}{||h_1||}+\ldots+\alpha_n\frac{h_n}{||h_n||})}{\alpha_1^2\ldots\alpha_n^2}\, d\alpha_1\ldots d\alpha_n$$

$$||\delta^n f(x;\frac{h_1}{||h_1||},\ldots,\frac{h_1}{||h_n||})|| \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{(2\pi\frac{\rho}{n})^n}{(\frac{\rho}{n})^2\ldots(\frac{\rho}{n})^2} \sup_{x\in B(x_0,R)} ||f(x)||$$

Como $\delta^n f(x;a_1\ldots a_n)$ é n-linear em $a_1,\ldots,a_n$

$$||\delta^n f(x;h_1,\dots,h_n)|| \le \frac{n^n}{\rho^n} \sup_{x\in B(x_o,R)} ||f(x)||\cdot||h_1||\dots||h_n||$$

Corolário 1 - As diferenciais de uma aplicação $f(x)$ G-analítica e localmente limitada são contínuas em $\Omega\times X^n$, $n\ge 1$

Corolário 2 - As diferenciais de uma aplicação $f(x)$ G-analítica e contínua são contínuas em $\Omega\times X^n$, $n\ge 1$.

§5 - Aplicações analíticas de Espaços de Banach em espaços de Banach

Teorema 8 - Seja uma aplicação $f(x)$ definida em $\Omega\subset X$ com valores em Y. Se $f(x)$ é G-analítico e limitado sobre $\overline{B(x_o,R)}\subset\Omega$ então para $x\in\overline{B(x_o,\frac{R}{2})}$

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{||f(x+h)-f(x)-\delta f(x,h)||}{||h||} = 0$$

Devido à desigualdade de Cauchy (1.2), $||\delta^n f(x_o,h)|| \le n!\, M_{x_o}$, onde $M_{x_o} = \sup_{x\in\overline{B(x_o,R)}} ||f(x)||$ e $(x_o+h)\in\overline{B(x_o,R)}$. Para $||x-x_o||\le\frac{R}{2}$ e $||h||\le\frac{R}{2}$

$$||x+h-x_o|| \le ||x-x_o||+||h|| \le R \Longrightarrow (x+h)\in\overline{B(x_o,R)}$$

Temos então para todo h

$$\bar{h} = \frac{R}{2}\frac{h}{||h||} \Longrightarrow ||\bar{h}|| = \frac{R}{2}$$

Logo $||\delta^n f(x;\bar{h})|| \le n!\, M_{x_o}$, $||x-x_o||\le\frac{R}{2}$. Como $\delta^n f$ é homogênea de grau n vem $||\delta^n f(x;h)|| \le n!\,(\frac{2}{R})^n\,||h||^n\,M_{x_o}$.

O desenvolvimento de Taylor, (1.1), fornece

$$f(x+h) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\delta^n f(x,h).$$

$$||f(x+h)-f(x)|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n! M_{x_o} ||h||^n (\frac{2}{R})^n = M_{x_o} \frac{2||h||}{R-2||h||}$$

$$||f(x+h)-f(x)-\delta f(x,h)|| \leq \frac{4 M_{x_o} ||h||^2}{R(R-2||h||)}$$

Portanto $\lim\limits_{||h||\to 0} \dfrac{||f(x+h)-f(x)-\delta(x,h)||}{||h||} = 0$ com $||x-x_o|| \leq \frac{R}{2}$.

Existem várias definições de aplicações analíticas; as definições que seguem no contexto apresentado, isto é, $f(x)$ aplicação de $\Omega \subset X$ em Y, são todas equivalentes [3]. Serão demonstradas apenas algumas das equivalências.

Definição 4 - Dizemos que $f(x)$ é <u>F-analítica</u> ou tem diferencial de Fréchet em Ω se

(a) $f(x)$ é G-analítica em Ω

(b) $\delta f(x;h)$ é uma função contínua de h, $\forall x \in \Omega$

(c) $\lim\limits_{\substack{||h||\to 0\\ ||h||\neq 0}} \dfrac{||f(x+h)-f(x)-\delta f(x,h)||}{||h||} = 0$ para $x \in \Omega$.

Zorn demonstrou em seu trabalho Derivatives and Fréchet differentials, Bull.Amer.Soc., 52, 1946, que as condições (a) e (b) acarretam (c).

É usual nessa definição incluir que $\delta(x,h)$ deve ser linear mas isso é supérfluo em vista do que foi provado no §2.

É imediato pela própria definição que uma função F-analítica é também G-analítica. O teorema 8 e o Corolário 1 permitem dizer que toda aplicação G-analítica e localmente limitada é F-analítica.

Definição 5 - Dizemos que $f(x)$ é <u>H-analítica</u> ou analítica segundo E.Hille se f é G-analítica e localmente limitada.

Ficou demonstrado então que

$$\text{H-analítica} \iff \text{F-analítica}$$

Definição 6 - Dizemos que f é <u>LF-analítica</u> ou analítica segundo L.Fantappiè se para toda aplicação $\alpha \to g(\alpha)$ holomorfa de $\alpha \in C$ com valores em Ω, a aplicação $\alpha \to f(g(\alpha))$ é holomorfa.

Definição 7 - Dizemos que $f(x)$ é <u>T-analítica</u> ou analítica segundo A.Taylor se f é G-analítica e contínua.

Definição 8 - Dizemos que $f(x)$ é <u>W-analítica</u> ou analítica no sentido de Weierstrass se para cada ponto $x \in \Omega$ podemos associar uma sequência $(P_n)_{n\geq 0}$ de polinômios n-homogêneos e contínuos de X em Y tal que $\sum_{n\geq 0} P_n(h)$ converge uniformemente para a aplicação $f(x+h)$ em alguma bola $B(x,\rho) \subset \Omega$.

Sabemos que uma aplicação $f(x)$ G-analítica tem desenvolvimento de Taylor

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n f(x;h)$$

Além disso se $f(x)$ é localmente limitada, do Teorema 7, segue a convergência uniforme de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n f(x;h)$ numa bola $B(x,\rho) \subset \Omega$ e, do Corolário 1, $\delta^n f(x;h)$ são polinomios n-homogêneos contínuos. Logo

$$f \text{ H-analítica} \iff f \text{ W-analítica}$$

Em tudo que segue uma aplicação $f(x)$ de $\Omega \subset X$ em Y é analítica se obedece a qualquer das definições 4, 5, 6, 7 ou 8.

C A P Í T U L O II

UM PROBLEMA NÃO-LINEAR ABSTRATO DE GOURSAT

§2 . O Problema de Goursat

Definição - Chama-se escala de espaços de Banach a uma família de espaços de Banach $X_s (0 < s \leq 1)$ tal que:

(a) se $s' \leq s$ então X_s é um subespaço vetorial de $X_{s'}$,

(b) a injeção $X_s \longrightarrow X_{s'}$ é contínua e tem norma ≤ 1.

A norma em X_s será representada por $\| \ \|_s$.

Portanto $\| \ \|_{s'} \leq \| \ \|_s$ com $0 < s' \leq s \leq 1$.

Seja $\{X_s\}_{0<s\leq 1}$ uma escala de espaços de Banach. Para t em C^N e α uma N-upla de inteiros $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, com $\alpha_i \geq 1$, considere o problema de Goursat,

$$(2.1) \qquad \begin{cases} D_t^\alpha \, u(t) = F(u,t) \\ \qquad u = 0(t^\alpha) \end{cases}$$

onde $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots\ldots D_N^{\alpha_N}$ e $u = 0(t^\alpha)$ se e somente se $D_j^k \, u = 0$ quando $t_j = 0$ se $0 \leq k < \alpha_j$ para cada j, $1 \leq j \leq N$.

Procuramos uma solução $u(t)$ que seja analítica em t e tome valores na escala de espaços de Banach dada. A função F é analítica em t e u no seguinte sentido que segue:

$$(2.2) \quad F(u,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\lambda \geq 0} \tilde{F}_{p,\lambda}(u) t^\lambda \quad , \text{ onde}$$

(a) $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ é uma N-upla de inteiros com $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, N$ e p é um número inteiro.

(b) $t^\lambda = t_1^{\lambda_1} \ldots\ldots t_N^{\lambda_N}$

(c) $\hat{F}_{p,\lambda}(h) = F_{p,\lambda}(h,\ldots,h)$ e para cada par de números s , s' tal que $0<s'<s\leq 1$ $F_{p,\lambda}$ representa uma aplicação p-linear

$$F_{p,\lambda} : X_s^p \to X_{s'}$$

Em particular para $p = 0$ e todo λ $F_{o,\lambda} \in X_{s'}$, com $0<s'<1$.

(2.3) Existem constantes $C,r,\eta > 0$ tais que para cada s , s' $(0<s<s'\leq 1)$ e todo $u_1,\ldots,u_p \in X_s$ temos

$$||F_{p,\lambda}(u_1,\ldots,u_p)||_{s'} \leq \frac{C}{(s-s')^{m(\alpha)}} r^{-p} \eta^{-|\lambda|} ||u_1||_s \ldots ||u_p||_s$$

com $m(\alpha) = \min(\alpha_i ; i=1,\ldots,N)$ e $|\lambda| = \lambda_1+\ldots+\lambda_N$

No caso $p = 0$ temos

$$||F_{o,\lambda}||_{s'} \leq \frac{C}{(1-s')^{m(\alpha)}} \cdot \eta^{-|\lambda|}$$

Então devido a (2.3) a série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\lambda\geq 0} \hat{F}_{p,\lambda}(u) t^{\lambda}$$

converge em $X_{s'}$, uniformemente nos conjuntos abertos da forma

$$\{u \in X_s \ ; \ ||u|| < r'\} \times \{t \in C \ ; \ |t| < \eta'\}$$

com $r' < r$ e $\eta' < \eta$.

Teorema 1 - Suponha que $F(u,t)$ seja como definido em (2.2) e que (2.3) esteja verificada. Então existe uma única $u(t)$ e um número Δ, $0<\Delta<\eta$, tal que para qualquer s, $0<s<1$, $u(t)$ é a única solução de (2.1) que é analítica em t, $|t| < \Delta(1-s)$ e toma valores no espaço X_s.

Demonstração - Comecemos por denotar

(2.4) $$u(t) = \sum_{\theta\geq\alpha} u_\theta t^\theta$$

$$D_t^\alpha\, t^j = j_1(j_1-1)\ldots(j_1-\alpha_1+1)\ldots j_N(j_N-1)\ldots(j_N-\alpha_N+1)\, t_1^{j_1-\alpha_1}\ldots t_N^{j_N-\alpha_N} =$$

$$= \frac{j_1!}{(j_1-\alpha_1)!}\cdots\frac{j_N!}{(j_N-\alpha_N)!}\cdot t^{j-\alpha} = \frac{j!}{(j-\alpha)!}\, t^{j-\alpha}$$

onde $j! = j_1!\ldots j_N!$

Fazendo $j-\alpha = \theta$ $\quad D_t^\alpha\, t^j = \frac{(\theta+\alpha)!}{\theta!}\, t^\theta$

Procedendo formalmente com (2.4)

$$D_t^\alpha\, u(t) = \sum_{\theta\geq 0} \frac{(\theta+\alpha)!}{\theta!}\, u_{\theta+\alpha}\, t^\theta$$

Rearranjando (2.2)

$$F(u,t) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{\beta\geq 0} \hat{F}_{p,\beta}(u)\, t^\beta =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{\beta\geq 0} F_{p,\beta}(u,\ldots,u)\, t^\beta =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{\beta\geq 0} F_{p,\beta}\Big(\sum_{\lambda^1\geq\alpha} u_{\lambda^1}\, t^{\lambda^1},\ldots \sum_{\lambda^p\geq\alpha} u_{\lambda^p}\, t^{\lambda^p}\Big)\, t^\beta =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{\beta\geq 0}\sum_{\lambda^1\geq\alpha}\cdots\sum_{\lambda^p\geq\alpha} F_{p,\beta}(u_{\lambda^1},\ldots,u_{\lambda^p})\, t^{\beta+\lambda^1+\ldots+\lambda^p} =$$

$$= \sum_{\theta\geq 0} t^\theta \sum_{\beta+\lambda^1+\ldots+\lambda^p=\theta} F_{p,\beta}(u_{\lambda^1},\ldots,u_{\lambda^p})$$

onde $0\leq p\leq m(\theta)$; isso porque $\lambda^1,\ldots,\lambda^p \geq \alpha$ e então $\lambda_1^i,\ldots,\lambda_N^i \geq 1$ para $i = 1,\ldots,p$.

Logo

$$D_t^\alpha\, u(t) = \sum_{\theta\geq 0} \frac{(\theta+\alpha)!}{\theta!}\, u_{\theta+\alpha} =$$

$$= \sum_{\theta\geq 0} t^{\theta} \sum_{\beta+\lambda^1+\ldots+\lambda^p=\theta} F_{p,\beta}(u_{\lambda^1},\ldots,u_{\lambda^p}) = F(u,t)$$

Comparando-se os coeficientes de t^{θ} obtemos

$$(2.5)\qquad \begin{cases} u_{\theta+\alpha} = \dfrac{\theta!}{(\theta+\alpha)!} \displaystyle\sum_{\beta+\lambda^1+\ldots+\lambda^p=\theta} F_{p,\beta}(u_{\lambda^1},\ldots,u_{\lambda^p}) \\ u_{\alpha} = \dfrac{F_{o,o}}{\alpha!} \end{cases}$$

Notamos então que (2.5) determina os possíveis coeficientes u_{θ}, $\theta\geq\alpha$ de $u(t)$.

A expressão recorrente dos u_{θ} dá portanto a unicidade de $u(t)$.

Existência

(2.6) Para todo λ, $\lambda\geq\alpha$ e todo s, $0<s<1$ provemos por indução que

$$||u_{\lambda}||_s \leq \frac{r}{(8S)^N}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\cdot\left(\frac{A}{1-s}\right)^{|\lambda|}$$

onde $S = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$, $\lambda^2 = \lambda_1^2 \ldots \lambda_N^2$ e A é uma constante a determinar mais tarde, independente de s e de λ.

Para $\lambda = \alpha$ temos

$$||u_{\alpha}||_s = \frac{1}{\alpha!}||F_{o,o}||_s \leq \frac{1}{\alpha!}\,\frac{C}{(1-s)^{m(\alpha)}}$$

Então (2.6) é verdadeiro para $A^{|\alpha|} \geq \frac{(8S)^N C}{r}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha!}$ onde $\alpha^2 = \alpha_1^2\ldots\alpha_N^2$.

Agora para qualquer inteiro k, existe somente um número finito de multi-inteiros λ tais que $|\lambda| \leq k$. Podemos então ordenar o conjunto dos multi-inteiros λ, com

$|\lambda| \leq k$, e realizar uma indução sobre k. Seja k um inteiro positivo, $k > |\alpha|$, e suponha que (2.6) valha para todo λ tal que $|\lambda| < k$. Mostraremos que (2.6) deve valer também para todos os multi-inteiros λ tais que $|\lambda| \leq k$.

Seja λ um multi-inteiro tal que $|\lambda| = k$. Então por (2.5)

$$||u_\lambda||_s \leq \frac{(\lambda-\alpha)!}{\lambda!} \sum_{\beta+\lambda^1 \ldots +\lambda^p=\lambda-\alpha} ||F_{p,\beta}(u_{\lambda^1},\ldots,u_{\lambda^p})||_s$$

De (2.3) vem para $0<s<s+\varepsilon\leq 1$, $\varepsilon>0$

$$\sum_{\beta+\lambda^1+\ldots+\lambda^p=\lambda-\alpha} ||F_{p,\beta}(u_{\lambda^1},\ldots,u_{\lambda^p}||_s \leq$$

$$\leq \sum_{\beta+\lambda^1+\ldots+\lambda^p=\lambda-\alpha} \frac{C}{\varepsilon^{m(\alpha)}} r^{-p} \eta^{-|\beta|} ||u_{\lambda^1}||_{s+\varepsilon}\ldots||u_{\lambda^p}||_{s+\varepsilon}$$

Pela hipótese de indução

$$||u_{\lambda^1}||_{s+\varepsilon}\ldots||u_{\lambda^p}||_{s+\varepsilon} \leq$$

$$\leq \frac{r^p}{(8S)^{Np}}\cdot\frac{1}{(\lambda_1^1\ldots\lambda_N^1)^2}\cdots\frac{1}{(\lambda_1^p\ldots\lambda_N^p)^2}\cdot\left(\frac{A}{1-s-\varepsilon}\right)^{|\lambda^1|}\ldots\left(\frac{A}{1-s-\varepsilon}\right)^{|\lambda^p|}$$

Rearranjando essa última desigualdade vem

$$||u_{\lambda^1}||_{s+\varepsilon}\ldots||u_{\lambda^p}||_{s+\varepsilon} \leq$$

$$\leq r^p\left[\frac{1}{(8S)^p}\cdot\frac{1}{(\lambda_1^1\ldots\lambda_1^p)^2}\cdot\left(\frac{A}{1-s-\varepsilon}\right)^{\lambda_1^1+\ldots+\lambda_1^p}\right]\ldots$$

$$\ldots\left[\frac{1}{(8S)^p}\cdot\frac{1}{(\lambda_N^1\ldots\lambda_N^p)^2}\cdot\left(\frac{A}{1-s-\varepsilon}\right)^{\lambda_N^1+\ldots+\lambda_N^p}\right]$$

Portanto obtemos

$$||u_\lambda||_s \leq \frac{(\lambda-\alpha)!}{\lambda!} \sum_{\beta+\lambda^1+\ldots+\lambda^p=\lambda-\alpha} \frac{C}{\varepsilon^{m(\alpha)}} \cdot \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{(8S)^p} \cdot \frac{\eta^{-\beta_i}}{(\lambda_i^1 \ldots \lambda_i^p)^2} \left(\frac{A}{1-s-\varepsilon}\right)^{\lambda_i^1+\ldots+\lambda_i^p}\right]$$

Escolhamos um ε que depende de β. Denotaremos por ε_β. Isso só é possível se $0<s<s+\varepsilon_\beta\leq 1$ e, devido a condição (b) da definição de escala de Banach, ε_β deve crescer com β.

Seja $\varepsilon_\beta = \dfrac{1-s}{(\lambda_1-\alpha_1-\beta_1+1)\ldots(\lambda_N-\alpha_N-\beta_N+1)}$.

Chamemos por conveniência $\varepsilon_{\beta_i} = \dfrac{1-s}{(\lambda_i-\alpha_i-\beta_i+1)}$; $i = 1,\ldots,N$.

Portanto

$$\varepsilon_\beta \leq \varepsilon_{\beta_i} \Longrightarrow 1-s-\varepsilon_\beta \geq 1-s-\varepsilon_{\beta_i} \Longrightarrow \frac{1}{1-s-\varepsilon_\beta} \leq \frac{1}{1-s-\varepsilon_{\beta_i}}$$

$$\varepsilon_\beta^{-m(\alpha)} = \frac{(\lambda_1-\alpha_1-\beta_1+1)^{m(\alpha)}\ldots(\lambda_N-\alpha_N-\beta_N+1)^{m(\alpha)}}{(1-s)^{m(\alpha)}} \leq$$

$$\leq \frac{(\lambda_1-\alpha_1-\beta_1+1)^{\alpha_1}\ldots(\lambda_N-\alpha_N-\beta_N+1)^{\alpha_N}}{(1-s)^{\alpha_1}\ldots(1-s)^{\alpha_N}}$$

$$\varepsilon_\beta^{-m(\alpha)} \leq \varepsilon_{\beta_1}^{-\alpha_1}\ldots\varepsilon_{\beta_N}^{-\alpha_N}$$

Obtemos então

$$||u_\lambda||_s \leq$$

$$\leq \frac{(\lambda-\alpha)!C}{\lambda!} \sum_{\substack{\beta_i+\lambda_i^1+\ldots+\lambda_i^p=\lambda_i-\alpha_i \\ i=1,\ldots,N}} \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{(8S)^p} \cdot \frac{\varepsilon_{\beta_i}^{-\alpha_i}\,\eta^{-\beta_i}}{(\lambda_i^1\ldots\lambda_1^p)^2} \cdot \left(\frac{A}{1-s-\varepsilon_{\beta_i}}\right)^{\lambda_i^1+\ldots+\lambda_i^p}\right]$$

Podemos observar que a desigualdade acima tem no segundo membro um produto de N séries.

Tomemos apenas uma delas,

$$\sum_i = \sum_{\beta_i+\lambda_i^1+\dots+\lambda_i^p=\lambda_i-\alpha_i} \frac{1}{(8S)^p} \cdot \frac{\varepsilon_{\beta_i}^{-\alpha_i}\,\eta^{-\beta_i}}{(\lambda_i^1\dots\lambda_i^p)^2} \cdot \left(\frac{A}{1-s-\varepsilon_{\beta_i}}\right)^{\lambda_i^1+\dots+\lambda_i^p} =$$

$$= \sum_{\beta_i\le\lambda_i-\alpha_i} \varepsilon_{\beta_i}^{-\alpha_i}\,\eta^{-\beta_i}\left(\frac{A}{1-s-\varepsilon_{\beta_i}}\right)^{\lambda_i-\alpha_i-\beta_i} \cdot \sum_{\lambda_i^1+\dots+\lambda_i^p=\lambda_i-\alpha_i-\beta_i} \frac{1}{(8S)^p}\cdot\frac{1}{(\lambda_i^1\dots\lambda_i^p)^2}$$

Pelo Lema 3 do apêndice

$$\sum_i \le \sum_{\beta_i\le\lambda_i-\alpha_i} \varepsilon_{\beta_i}^{-\alpha_i}\,\eta^{-\beta_i}\left(\frac{A}{1-s-\varepsilon_{\beta_i}}\right)^{\lambda_i-\alpha_i-\beta_i} \cdot \frac{1}{S(\lambda_i-\alpha_i-\beta_i+1)^2}$$

$$\varepsilon_{\beta_i}^{-\alpha_i} = \frac{(\lambda_i-\alpha_i-\beta_i+1)^{\alpha_i}}{(1-s)^{\alpha_i}} \le \frac{(\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-1}}{(1-s)^{\alpha_i}}\cdot(\lambda_i-\alpha_i-\beta_i+1)$$

$$\left(\frac{1}{1-s-\varepsilon_{\beta_i}}\right)^{\lambda_i-\alpha_i-\beta_i} = \frac{1}{(1-s)^{\lambda_i-\alpha_i-\beta_i}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\lambda_i-\alpha_i-\beta_i+1}\right)^{\lambda_i-\alpha_i-\beta_i}}$$

Chamando $\lambda_i-\alpha_i-\beta_i = n$

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

Logo $\left(\frac{1}{1-s-\varepsilon_{\beta_i}}\right)^{\lambda_i-\alpha_i-\beta_i} < \frac{e}{(1-s)^{\lambda_i-\alpha_i}}$.

Portanto

$$\sum_i \le \frac{eA^{\lambda_i-\alpha_i}}{S}\cdot\frac{(\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-1}}{(1-s)^{\lambda_i}} \sum_{\beta_i\le\lambda_i-\alpha_i} (\eta A)^{-\beta_i}\cdot\frac{1}{(\lambda_i-\alpha_i-\beta_i+1)}$$

Tomando-se A tal que $\eta A \ge 2$ então

$$\sum_i \le \frac{eA}{S}^{\lambda_i-\alpha_i} \cdot \frac{(\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-1}}{(1-s)^{\lambda_i}} \sum_{\beta_i \le \lambda_i-\alpha_i} 2^{-\beta_i} \cdot \frac{1}{(\lambda_i-\alpha_i-\beta_i+1)} =$$

$$= \frac{e\ A}{S}^{\lambda_i-\alpha_i} \cdot \frac{(\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-1}}{(1-s)^{\lambda_i}}\ 2^{\lambda_i-\alpha_i+1} \sum_{\beta_i \le \lambda_i-\alpha_i} \frac{2^{\lambda_i-\alpha_i-\beta_i+1}}{(\lambda_i-\alpha_i-\beta_i+1)}$$

Pelo Lema 4 do apêndice

$$\sum_i \le \frac{eA}{S}^{\lambda_i-\alpha_i} \cdot \frac{(\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-1}}{(1-s)^{\lambda_i}} \cdot \frac{4}{(\lambda_i-\alpha_i+1)} = \frac{4e}{S} \cdot A^{\lambda_i-\alpha_i} \frac{(\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-2}}{(1-s)^{\lambda_i}}$$

Finalmente

$$||u_\lambda||_s \le \frac{(\lambda-\alpha)!}{\lambda!}\ C \cdot \frac{(4e)^N}{S^N}\ \frac{A^{|\lambda|-|\alpha|}}{(1-s)^{|\lambda|}} (\lambda_1-\alpha_1+1)^{\alpha_1-2} \cdots (\lambda_N-\alpha_N+1)^{\alpha_N-2}$$

Logo A deve ser tal que

$$\frac{(\lambda-\alpha)!}{\lambda!}\ C\ \frac{(4e)^N}{S^N}\ \frac{A^{|\lambda|-|\alpha|}}{(1-s)^{|\lambda|}} \prod_{i=1}^{N} (\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-2} \le \frac{r}{(8S)^N} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{A}{1-s}\right)^{|\lambda|}$$

$$A^{|\alpha|} \ge \frac{(32e)^N \cdot C}{r}\ \frac{(\lambda-\alpha)!}{\lambda!}\ \lambda^2 \cdot \prod_{i=1}^{N} (\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-2}$$

Provemos que $\frac{(\lambda-\alpha)!}{\lambda!}\ \lambda^2 \prod_{i=1}^{N} (\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-2}$ é limitado para qualquer λ.

$$\frac{(\lambda-\alpha)!}{\lambda!}\ \lambda^2 \prod_{i=1}^{N} (\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-2} = \prod_{i=1}^{N} \frac{(\lambda_i-\alpha_i)!}{\lambda_i!}\ \lambda_i^2 (\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-2}$$

$$\frac{(\lambda_i-\alpha_i)!}{\lambda_i!}\ \lambda_i^2 (\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-2} =$$

$$= \frac{1}{(\lambda_i-\alpha_i+1)\cdots\lambda_i} \cdot (\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\alpha_i+1}\right)^2 \le \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\alpha_i+1}\right)^2 \le \alpha_i^2$$

Portanto

$$\frac{(\lambda-\alpha)!}{\lambda!}\,\lambda^2 \prod_{i=1}^{N} (\lambda_i-\alpha_i+1)^{\alpha_i-2} \leq \alpha^2$$

Finalmente

$$A^{|\alpha|} \geq \frac{(32e)^N C}{r}\,\alpha^2$$

Tomando-se $\Delta = \min(\frac{\eta}{2}\ ,\ \sqrt[|\alpha|]{\frac{r}{C(32e)^N \alpha^2}}\ )$

A série $\sum\limits_{\theta\geq\alpha} u_\theta t^\theta$ é uniformemente convergente no disco $|t| < \Delta(1-s)$ e para cada t toma valores no disco de raio r de X_s. De fato,

$$\|\sum_{\theta\geq\alpha} u_\theta t^\theta\|_s \leq \sum_{\theta\geq\alpha} \|u_\theta\|_s\ |t|^{|\theta|} =$$

$$= \sum_{\theta\geq\alpha} \frac{r}{(8S)^N}\circ\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{A|t|}{1-s}\right)^{|\theta|} \leq \frac{r}{(8S)^N}\cdot\sum_{\theta\geq\alpha}\frac{1}{\theta^2} \leq \frac{r}{(8S)^N}\circ S^N = \frac{r}{8^N} < r$$

Portanto para cada t, $u(t) = \sum\limits_{\theta\geq\alpha} u_\theta t^\theta$, com $|t| < \Delta(1-s)$, toma valores na bola de centro 0 e raio r de X_s.

§2 - Condições equivalentes ao problema de Goursat

Enunciaremos e demonstraremos hipóteses equivalentes àquelas do Teorema 1 deste capítulo o que permitirá posteriormente aplicar em alguns exemplos sem usar processos de "quase" linearização usados por outros autores.

Teorema 2 - Sejam as constantes η_1 , R e C_1 tais que $0<\eta_1<\eta$, $0<R<r$ e $C_1 = C(1 - \frac{\eta_1}{\eta})^{-N}(1 - \frac{R}{r})^{-1}$.

Sejam também

(a) $F(u,t)$ função definida em $U(0,R)\times(|t|<\eta_1)$ com valores em $X = \bigcup_{0<s\leq 1} X_s$ onde $U(0,R) = \bigcup_{0<s\leq 1} B_s(0,R)$

$$B_s(0,R) = \{u \; ; \; ||u||_s < R\}$$

(b) $F(u,t)$ função G-analítica em $B_s(0,R)\times(|t|<\eta_1)$ com valores em $X_{s'}$, para todo s', $0<s'<s\leq 1$.

(c) $$||F(u,t)||_{s'} \leq \frac{C_1}{(s-s')^{m(\alpha)}}$$

para $B_s(0,R)\times(|t|<\eta_1)$ e todo s', $0<s'<s\leq 1$.

Então essas condições são equivalentes às hipóteses do Teorema 1.

De fato é imediato que (2.2) e (2.3) acarretam a hipótese (a). O teorema 6 do capítulo 1 implica a hipótese (b). Agora,

$$||F(u,t)||_{s'} \leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\lambda\geq 0} ||\hat{F}_{p,\lambda}(u)||_{s'} |t^\lambda| =$$

$$= \sum_{\lambda\geq 0} ||F_{o,\lambda}||_{s'} |t^\lambda| + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\lambda\geq 0} ||\hat{F}_{p,\lambda}(u)||_{s'} |t^\lambda|$$

Majorando a primeira parcela,

$$\sum_{\lambda\geq 0} ||F_{o,\lambda}||_{s'} |t^\lambda| \leq \sum_{\lambda\geq 0} \frac{C}{(1-s')^{m(\alpha)}} \left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^{|\lambda|} =$$

$$= \frac{C}{(1-s')^{m(\alpha)}} \sum_{\lambda\geq 0} \left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^{|\lambda|} = \frac{C}{(1-s')^{m(\alpha)}} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{\eta_1}{\eta}}\right)^N$$

$$\sum_{\lambda\geq 0} ||F_{o,\lambda}||_{s'} |t^\lambda| \leq \frac{C}{(1-s')^{m(\alpha)}} \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta}\right)^{-N}$$

Majorando a segunda parcela,

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\lambda\geq 0} ||\hat{F}_{p,\lambda}(u)||_{s'} |t^\lambda| \leq \frac{C}{(s-s')^{m(\alpha)}} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^p \sum_{\lambda\geq 0} \left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^{|\lambda|} =$$

$$= \frac{C}{(s-s')^{m(\alpha)}} \cdot \frac{R/r}{1-R/r} \cdot \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta}\right)^{-N}$$

Portanto

$$||F(u,t)||_{s'} \le \frac{C}{(s-s')^{m(\alpha)}} \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta}\right)^{-N} \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} \le \frac{C_1}{(s-s')^{m(\alpha)}}$$

Isso significa que (2.3) implica a hipotese (c).

Provemos agora que as hipóteses (a), (b) e (c) acarretam as hipóteses do teorema 1 fazendo-se

$$C = C_1 \;, \quad \eta = \eta_1 \quad e \quad r = \frac{R}{e}$$

Do fato da função $F(u,t)$ ser G-analítica em $B_s(0,R) \times (|t| < \eta_1)$ com valores em $X_{s'}$, para todo s', $0 < s' < s \le 1$, e de (1.1) vem:

$$F(u,t) = F[(0,0)+(u,t)] = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\lambda \ge 0} \frac{1}{p!} \cdot \frac{1}{\lambda!} \, \delta_u^p \, \delta_t^\lambda \, F[(0,0);(u,t)]$$

onde $t = (t_1, \ldots, t_N)$ $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ e

$$\delta_t^\lambda = \delta_{t_1}^{\lambda_1} \cdots \delta_{t_N}^{\lambda_N}$$

O teorema 5 do capítulo I diz que as diferenciais são aplicações multilineares, logo

$$F(u,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\lambda \ge 0} \frac{1}{p!} \, \frac{1}{\lambda!} \, t_1^{\lambda_1} \cdots t_N^{\lambda_N} \, \delta_u^p \, \delta_t^\lambda \, F[(0,0);(u;1,\ldots,1)]$$

Chamando a aplicação p-linear

$\frac{1}{p!} \frac{1}{\lambda!} \delta_u^p \, \delta_t^\lambda \, F[(0,0);(u;1,\ldots,1)]$ na variável u de $\hat{F}_{p,\lambda}(u)$ teremos

$$F(u,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\lambda \ge 0} \hat{F}_{p,\lambda}(u) \, t^\lambda \qquad \text{como}$$

no teorema 1.

Se $||u||_s < R$ e $|t| < \eta_1$, para todo s', $0<s'<s\leq 1$ vem da desigualdade de Cauchy que:

$$||F_{o,\lambda}||_{s'} = ||\frac{1}{\lambda!}\,\delta_t^{\lambda}\,F[(0,0);(0;1,\dots,1)]||_{s'} \leq \frac{C_1}{(s-s')^{m(\alpha)}}\,\frac{1}{\eta_1^{|\lambda|}}$$

Analogamente se $||h_i||_s < R$, $i = 1,\dots,p$ a desigualdade fundamental (1.3) fornece

$$||F_{p,\lambda}(h_1,\dots,h_p)||_{s'} =$$

$$= ||\frac{1}{p!}\,\frac{1}{\lambda!}\,\delta_u^{p}\,\delta_t^{\lambda}\,F[(0,0);(h_1,\dots,h_p;1,\dots,1)]||_{s'} \leq$$

$$\leq \frac{1}{p!}\,\frac{1}{\eta^{|\lambda|}}\,||\delta_u^{p}\,F[(0;0);(h_1,\dots,h_p;1,\dots,1)||_{s'} \leq$$

$$\leq \frac{1}{p!}\,\frac{1}{\eta^{|\lambda|}}\,\frac{p^p}{R^p}\,\frac{C}{(s-s')^{m(\alpha)}}\,||h_1||_s\dots||h_p||_s$$

isso para s' e s, $0<s'<s\leq 1$.

Pelo Lema 1 do apêndice $\frac{p^p}{p!} \leq e^p$

$$||F_{p,\lambda}(h_1,\dots,h_p)||_{s'} \leq \frac{C}{(s-s')^{m(\alpha)}}\,\eta^{-|\lambda|}\,(\frac{R}{e})^{-p}||h_1||_s\dots||h_p||_s$$

Ficou portanto estabelecido (2.3) concluindo portanto a demonstração.

§3 - Observações

(1) Seja o sistema

$$(2.7)\qquad \begin{cases} D_t^{\alpha}\,u(t) = G(u,t) \\ u(t)-u^{o}(t) = 0(t^{\alpha}) \end{cases}$$

onde $u^o(t)$ é uma função analítica limitada em $D_\eta = \{t \in C^N;\ |t| < \eta\}$ com valores em X_1 , com derivadas

$D_t^{\beta}\, u^o(t)$, $\beta \geq \alpha$, nulas na origem.

Além disso suponhamos que $G(u,t)$ esteja nas condições do Teorema 2 e $\sup\limits_{|t|<\eta} ||u^o(t)||_1 < \rho < R$.

Nessas condições colocando $u(t)-u^o(t) = v(t)$

$$D_t^{\alpha}\, v(t) = D_t^{\alpha}\, u(t)$$

O sitema (2.7) fica então

$$\begin{cases} D_t^{\alpha}\, v(t) = G[v+u^o(t),t] = F(v,t) \\ v(t) = 0(t^{\alpha}) \end{cases}$$

Mas para $||v||_s < R-\rho$ temos

$$||u||_s = ||v+u_o(t)||_s \leq ||v||_s+||u_o(t)||_s \leq ||v||_s+||u_o(t)||_1 < R$$

portanto

$$||F(v,t)||_{s'} \leq ||G(u,t)||_{s'} \leq \frac{C_1}{(s-s')^{m(\alpha)}}$$

Então existe uma única função $u(t)$ analítica em $|t| < \Delta(1-s)$ com valores em X_s solução de (2.7). Os coeficientes u_{θ} do desenvolvimento de $u(t)$ em série, para $\theta \not\geq \alpha$, são dados pela condição inicial $u^o(t)$.

(2) No sistema (2.1) supusemos α tal que $\alpha_i \geq 1$, $i=1,\ldots,N$. Essa hipótese não faz o problema perder em generalidade, porque se algum α_i for nulo a variável t_i pode ser olhada como um parâmetro.

C A P Í T U L O   III

ESPAÇOS DE BANACH DE SÉRIES FORMAIS E APLICAÇÕES

Seja $\{X_s\}_{0<s\leq 1}$ uma escala de espaços de Banach.

Seja H o espaço vetorial sobre C das séries formais

$$\sum_{\theta\geq 0} u_\theta T^\theta \quad \text{onde } u_\theta \in X_s , \ 0<s<1$$

θ é uma N-upla de inteiros.

§ 1. O ESPAÇO H_Δ

Fixado $\Delta > 0$ e α uma N-upla de inteiros não negativos seja

$$H_\Delta = \{v \in H;\ v = \sum_{\theta\geq\alpha} u_\theta T^\theta \ \text{ e } \ \sup_{0<s<1} \ \sup_{|t|<\Delta(1-s)} ||v(t)||_s < \infty\}$$

onde por hipótese a série

$$\sum_{\theta\geq\alpha} ||u_\theta t^\theta||_s < \infty$$

para todo s, $0<s<1$, e todo $t \in D_s = \{t \in C^N;\ |t| < \Delta\ (1 - s)\}$.

Então $v(t)$ é uma função, para cada s, que vai de D_s em X_s expressa pela série

$$v(t) = \sum_{\theta\geq\alpha} u_\theta t^\theta$$

Por construção a função $v(t)$ é então holomorfa.

Denotemos por

$$||v|| = \sup_{0<s<1} \ \sup_{|t|<\Delta(1-s)} ||v(t)||_s \quad , \ v \in H_\Delta$$

(3.1) $\|\quad\|$ é uma norma para H_Δ pois

(a) $$\|v^1 + v^2\| = \sup_{0<s<1} \sup_{|t|<\Delta(1-s)} \|(v^1+v^2)(t)\|_s$$

Como X_s é um espaço de Banach

$$\|(v^1 + v^2)(t)\|_s = \|v^1(t) + v^2(t)\|_s \leq \|v^1(t)\|_s + \|v^2(t)\|_s$$

$$\sup_{|t|<\Delta(1-s)} \|(v^1+v^2)(t)\|_s \leq \sup_{|t|<\Delta(1-s)} \|v^1(t)\|_s + \sup_{|t|<\Delta(1-s)} \|v^2(t)\|_s$$

$$\|v^1 + v^2\|_s \leq \|v^1\|_s + \|v^2\|_s \qquad v^1, v^2 \in H_\Delta$$

(b) $\|kv\| = |k|\ \|v\|$, $k \in C$, $v \in H_\Delta$

(c) se $\|v\| = 0$ então

$$v(t) = \sum_{\theta\geq\alpha} u_\theta t^\theta = 0 \text{ para todo } t,\ |t| < \Delta(1-s)$$
$$0 < s < 1$$

Seja x' um operador linear e contínuo

$$x' : X_s \longrightarrow C$$

$$(x' \circ v)(t) = \sum_{\theta\geq\alpha} x'(u_\theta)t^\theta = 0 \text{ , logo}$$

$x'(u_\theta) = 0$; $\forall x' \in X_s'$, onde x_s' é o dual topológico de X_s . Do teorema de Hahn-Banach([9] , pag 49) vem que

$u_\theta = 0$, $\theta \geq \alpha$ portanto

$$v = 0$$

(3.2) H_Δ é um espaço de Banach

De fato seja $(v^n)_{n\geq1}$ uma sequência de Cauchy em H_Δ. Temos então

$$||v^n(t) - v^m(t)||_s < \varepsilon \qquad \text{para } n,m \geq n_o(\varepsilon) \quad , \quad \varepsilon > 0$$

$$|t| < \Delta\,(1 - s)$$

$$0 < s < 1$$

Portanto, fixado s, como X_s é um espaço de Banach, a sequência $(v^n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente para uma função v_s, holomorfa em D_s a valores em X_s. A holomorfia de v_s decorre do teorema de Weierstrass ([6] , 9.12.1).

Mostremos que os coeficientes de v_s não dependem de s.

Se s' < s, como $v^n \Longrightarrow v_{s'}$ em $D_{s'}$, então $v^n \Longrightarrow v_s$ em D_s com valores em $X_{s'}$ pois $D_s \subset D_{s'}$. Como $X_s \subset X_{s'}$ então $v_s = v_{s'}$ em D_s. Pelo teorema de Hahn-Banach ([9], pag 64) suas séries tem os mesmos coeficientes; isso acarreta $v_s = v_{s'}$ em $D_{s'}$.

Seja então v a série formal cujos coeficientes são os de v_s . Temos

$$||v^n(t) - v(t)||_s < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geq n_o(\varepsilon)$$

$$|t| < \Delta(1 - s)$$

$$0 < s < 1$$

e então

$$||v^n - v|| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq n_o(\varepsilon)$$

Isso prova que $v \in H_\Delta$ e que a sequência $(v^n)_{n\geq 1}$ converge para v.

§2 - O ESPAÇO H_η

Fixado η, $\eta>\Delta$ seja

$$H_\eta = \{u^o \in H \ , \ u^o = \sum_{\theta \not\geq \alpha} u^o_\theta T^\theta \quad e \quad \sup_{|t|<\eta} ||u^o(t)||_1 < \infty\}$$

onde por hipótese $u^o_\theta \in X_1$ e a série

$$\sum_{\theta \not\geq \alpha} ||u^o_\theta t^\theta||_1 < \infty \qquad \text{para cada} \quad t \in D = \{t \in C^N ; |t|<\eta\}$$

Então $u^o(t)$ é uma função que vai de D_η em X_1 expressa pela série

$$u^o(t) = \sum_{\theta \not\geq \alpha} u^o_\theta t^\theta$$

Por construção a função $u^o(t)$ é então holomorfa. Denotemos por

$$||u^o|| = \sup_{|t|<\eta} ||u^o(t)||_1 \ , \ u^o \in H_\eta$$

Analogamente como em (3.1) e (3.2) $||\ \ ||$ é uma norma para o espaço H_η que é também espaço de Banach.

Tomemos agora $u^o(t)$ uma função holomorfa e limitada em D_η, com derivadas $D^\beta_t u^o(t)$ nulas na origem, para $\beta \geq \alpha$, com valores em X_1. Seja então

$$u^o(t) = \sum_{\theta \not\geq \alpha} u^o_\theta t^\theta \ , \ u^o_\theta \in X_1$$

o desenvolvimento de Taylor de $u^o(t)$ em D_η. Da desigualdade de Cauchy temos

$$||u^o_\theta||_1 \leq \frac{M}{\eta^{|\theta|}} \ , \ M = \sup_{|t|<\eta} ||u^o(t)||_1$$

Portanto para cada t, $|t| < \eta$

$$\sum_{\theta \ngeq \alpha} ||u_\theta^o \; t^\theta||_1 < \infty$$

Assim sendo a série formal $u^o = \sum_{\theta \ngeq \alpha} u_\theta \; T^\theta$ pertence a H_η.

§3. O ESPAÇO DE $H_{\eta,\Delta}$

Seja agora o espaço vetorial

$$H_{\eta,\Delta} = H_\eta \oplus H_\Delta$$

$$H_{\eta,\Delta} = \{u, \; u^o + v, u^o \in H_\eta \text{ e } v \in H_\Delta\}$$

Tomando-se como norma

$$||u|| = \max(||u^o||, ||v||)$$

$H_{\eta,\Delta}$ é um espaço de Banach pois o espaço $H_\eta \oplus H_\Delta$ é isomorfo a $H_\eta \times H_\Delta$.

§4. E X E M P L O S

EXEMPLO 1 - Sejam, $z \in C^p$, e $|z| = \max\limits_{1 \leq j \leq p} (|z_j|)$

$\tau \in C^n$ e $|\tau| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} (|\tau_j|)$, $B_s = \{\tau \in C^n : |\tau| < s\}$, $0 < s \leq 1$

Seja, também α uma n-upla de inteiros não negativos com $m(\alpha) \neq 0$. Denotando por

$$X_s = H(B_s, C^p) \quad (0 < s < 1)$$

o espaço de Banach das funções u de n variáveis complexas τ com valores em C^p holomorfas com derivadas D_τ^β u limitadas no disco B_s, com $0 \leq |\beta| \leq m(\alpha)$, onde $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ é uma n-upla de inteiros não negativos; com norma

$$||u||_s = \sup_{\tau \in B_s} \max_{0 \le |\beta| \le m(\alpha)} (|D_\tau^\beta u(\tau)|)$$

Chamemos de H^α ao conjunto das funções $w(t,\tau)$ de $N + n$ variáveis complexas holomorfas a valores em C^P com derivadas $D_\tau^\beta w(t,\tau)$, $0 \le |\beta| \le m(\alpha)$ limitadas em B_Δ,

$$B_\Delta = \{(t,\tau) \in C^N \times C^n \; ; \; \frac{|t|}{\Delta} + |\tau| < 1\}$$

com $D_t^\theta (0,\tau) = 0$, $\theta \not\geq \alpha$. Definamos como norma

$$||w|| = \sup_{B_\Delta} \max_{0 \le |\beta| \le m(\alpha)} (|D_\tau^\beta w(t,\tau)|)$$

<u>O espaço H_Δ contruído à partir de $\{X_s\}_{0<s<1}$ se identifica ao espaço de Banach H^α.</u>

De fato seja $v \in H_\Delta$. Associemos a v a função holomorfa de $N + n$ variáveis complexas

$$v(t,\tau) = \sum_{\theta \ge \alpha} u_\theta (\tau) \, t^\theta$$

definida para t, $|t| < \Delta$ (1-s), e τ, $|\tau| < s$, para todo $0<s<1$ isto é $\frac{|t|}{\Delta} + |\tau| < 1$. Mas

$$|D_\tau^\beta v(t,\tau)| \le ||v(t)||_s \le ||v||$$

em consequência $v \in H^\alpha$.

Reciprocamente seja $w \in H^\alpha$ e tomemos $M > 0$ um limitante de $D_\tau^\beta w(t,\tau)$, $0 \le |\beta| \le m(\alpha)$.

Fixando $|\tau| < 1$ e desenvolvendo w como uma sérieede Taylor, (0.4), vem que

$$w(t,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\theta|=m} \frac{1}{\theta!} D_t^\theta W(0,\tau), \ t^\theta$$

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$

para t tal que $|t| < \Delta(1 - |\tau|)$

Denotando as funções de τ

$$\frac{1}{\theta!} D_t^\theta w(0,\tau) = u_\theta(\tau)$$

temos que u_θ são funções nulas para $\theta \not\geq \alpha$ e para $\theta \geq \alpha$ são funções holomorfas na bola B_1.

Mostremos ainda que $u_\theta(\tau)$ são funções com derivadas limitadas de ordem β, $0 \leq |\beta| \leq m(\alpha)$, com relação a τ, em $|\tau| < s$ $(0 < s < 1)$

$$|u_\theta(\tau)| = \frac{1}{\theta!} |D_t^\theta w(0,\tau)| \leq \frac{M}{[\Delta(1-|\tau|)]^{|\theta|}} \leq \frac{M}{[\Delta(1 - s)]^{|\theta|}}$$

$$|D_\tau^\beta u_\theta(\tau)| = \frac{1}{\theta!} | D_\tau^\beta D_t^\theta w(0,\tau)| \leq \frac{M}{[\Delta(1-|\tau|)]^{|\theta|}} \leq \frac{M}{[\Delta(1-s)]^{|\theta}}$$

para $|\tau|<s$.

Portanto

$$||u||_s \leq \frac{M}{[\Delta(1-s)]^{|\theta|}}, \text{ para } \theta\geq\alpha, \ 0<s<1$$

Temos então que $u_\theta \in X_s$, $0<s<1$, e que a série formal $w = \sum_{\theta\geq\alpha} u_\theta T^\theta$ converge em $|t|<\Delta(1-s)$ com valores em X_s. Como

$$\sup_{0<s<1} \sup_{|t|<\Delta(1-s)} ||w(t)||_s < \infty \quad \text{então} \quad w \in H_\Delta$$

Enfim a aplicação

$$\phi: \begin{array}{l} H_\Delta \to H^\alpha \\ v \to \phi(v) \end{array}$$

$$\phi(v)(t,\tau) = v(t,\tau)$$

é uma isometria porque

$$||v|| = \sup_{0<s<1} \sup_{|t|<\Delta(1-s)} ||v(t)||_s =$$

$$= \sup_{0<s<1} \sup_{|t|<\Delta(1-s)} \sup_{|\tau|<s} \max_{0\leq|\beta|\leq m(\alpha)} (|D_t^\beta v(t)(\tau)|) =$$

$$= \sup_{B_\Delta} \max_{0\leq|\beta|\leq m(\alpha)} (|D_t^\beta v(t)(\tau)|)$$

Exemplo 2 - Seja H_α o conjunto das funções $u^o(t,\tau)$ de N+n variáveis complexas, holomorfas a valores em C^p com derivadas $D_\tau^\beta u^o(t,\tau)$, $0\leq|\beta|\leq m(\alpha)$ limitadas em $(|t|<\eta)\times(|\tau|<1)$ munida da norma

$$||u^o|| = \sup_{(|t|<\eta)\times(|\tau|<1)} \max_{0\leq|\beta|\leq m(\alpha)} (|D_\tau^\beta u^o(t,\tau)|)$$

Além disso $D_t^\theta u^o(0,\tau) = 0$, $\theta\geq\alpha$

O espaço H_η construído à partir de X_1 (definido no exemplo 1) se identifica ao espaço de Banach H_α. A demonstração é análoga àquela do exemplo 1.

Exemplo 3 - O espaço $H_{\eta,\Delta}$ construído à partir da escala $\{X_s\}_{0<s\leq 1}$ (definida no exemplo 1) identifica-se ao espaço de Banach $H_\alpha \times H^\alpha$ com a norma $||u|| = \max(||u^o||, ||v||)$

Exemplo 4 - Seja o sistema de Goursat discutido na Observação 1 do Cap.II,

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = G(u,t) \\ u - u^o = O(t^\alpha) \end{cases}$$

e lembramos que $u^o(t)$ é suposta analítica e limitada em D_η com derivadas $D_t^\beta u^o(t)$ nulas na origem, para $\beta \geq \alpha$, com valores em X_1.

Além disso $\sup_{|t|<\eta} ||u^o(t)||_1 < \rho < R$ e $G(u,t)$ está nas condições do teorema 2 do Cap. II. Nessas condições vimos que existe um número $\Delta > 0$ tal que a função $u(t)$ encontrada é analítica em $|t| < \Delta(1 - s)$, $0 < s < 1$, com valores em X_s.

A série formal $u = \sum_{\theta \not\geq \alpha} u_\theta^o T^\theta + \sum_{\theta \geq \alpha} u_\theta T^\theta$,

onde $u(t)$ é a solução do sistema dado e $u^o(t) = \sum_{\theta \not\geq \alpha} u_\theta^o T^\theta$,

pertence ao espaço $H_{\eta,\Delta}$ definido no §3.

§5. *SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE GOURSAT EM FUNÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS*

Nesse parágrafo utilizaremos os espaços de Banach construídos nos parágrafos anteriores para examinar como a solução $u(t)$ depende da condição inicial $u^o(t)$ no problema abstrato de Goursat.

Seja uma escala de espaços de Banach $\{X_s\}_{0<s\leq 1}$ e o sistema de Goursat

$$(3.3) \qquad \begin{cases} D_t^\alpha u(t) = F(u,t) \\ u - u^o = O(t^\alpha) \end{cases}$$

com as seguintes hipóteses:

(a) $u^o \in H_\eta$, isto é, $u^o(t)$ é uma função analítica e limitada em D_η com valores em X_1 e com derivadas $D_t^\theta u(t)$ nulas na origem, para $\theta \geq \alpha$.

(b) $F : U(0,R) \times D_\eta \longrightarrow X$

$$(u,t) \longrightarrow F(u,t)$$

onde $X = \bigcup_{0<s\leq 1} X_s$ e $U(0,R) = \bigcup_{0<s\leq 1} B_s(0,R)$

(c) $F : B_s(0,R) \times D_\eta \longrightarrow X_{s'}$, é G-analítica para todo s' e s, $0 < s' < s \leq 1$.

(d) $$||F(u,t)|| \leq \frac{C}{(s-s')^{m(\alpha)}}$$

para $||u||_s < R$, $|t| < \eta$, $0 < s' < s \leq 1$

Tomemos u^o na bola

$$B_\rho = \{u^o \in H_\eta ; ||u^o|| < \rho \quad , 0 < \rho < R\}$$

Chamando $u - u^o(t)$ de v e tomando-se $||v||_s < R-\rho$ temos

$$||u||_s = ||u - v + v||_s \leq ||u-v||_s + ||v||_s < \rho+R-\rho=R$$

Estamos, portanto, nas condições do Teorema 2 e na Observação 1 do Cap. II; existe então uma única solução u(t) que encarada como série formal é elemento de $H_{\eta,\Delta}$, como no exemplo 4 onde

$$\Delta = \min \left\{ \frac{\eta}{2} , \sqrt[|\alpha|]{\frac{R - \rho}{C\, e\, \alpha^2 (32e)^N}} \right\}$$

Chamemos de ψ à função que vai de B_ρ em $H_{\eta,\Delta}$ tal que $u(t)$, onde $u = \psi(u^o)$, é a solução do sistema (3.3) com condição inicial u^o.

$$\psi : B_\rho \longrightarrow H_{\eta,\Delta}$$
$$u^o \longrightarrow \psi(u^o) = u = u(u^o)$$

Provemos que <u>ψ é uma aplicação analítica</u>.

De fato a expressão recorrente dos u_θ, coeficientes do desenvolvimento de u em série, dá a G-analiticidade dos mesmos como função de u_λ^o, onde u_λ^o são os coeficientes do desenvolvimento de u^o em série, $\lambda \not\geq \alpha$.

Pela desigualdade de Cauchy,

$$||u_\lambda^o|| \leq \frac{||u^o||}{|\lambda|_n}$$

logo as aplicações $u^o \longrightarrow u_\lambda^o$ são lineares e contínuas.

A aplicação $u^o \longrightarrow u_\lambda(u^o)$ é então G-analítica porque é a composta de uma linear e contínua com uma G-analítica.

As aplicações $u_\lambda\ (u^o)t^\lambda$ são G-analíticas no par (u^o, t) para $|t| < \Delta(1 - s)$. Então $u(u^o, t) = \sum\limits_{\theta \geq 0} u_\theta(u^o)t^\theta$ é G-analítica no par (u^o, t) com valores em X_s, como segue:

devido a (2.6)

$$||u_\theta(u^o)|| \leq \frac{R - \rho}{e(8S)^N} \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{A}{1 - s}\right)^{|\theta|}$$

com $||u^o|| < \rho$

$0 < s < 1$

$\theta \geq \alpha$

isso acarreta

$$||u(u^o, t)||_s \leq ||\sum_{\theta \not\geq \alpha} u_\theta\ t^\theta||_s + ||\sum_{\theta \geq \alpha} u_\theta(u^o)t^\theta||_s \leq$$

$$\leq ||u^o(t)||_1 + \sum_{\theta \geq \alpha} ||u_\theta(u^o)t^\theta||_s <$$

$$< \rho + \sum_{\theta \geq \alpha} \frac{R - \rho}{e(8S)^N} \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{A}{1 - s}\right)^\theta |t^\theta|$$

Tomando-se t tàl que $|t| < \Delta\ (1 - s)$

$$||u(u^o, t)||_s < \rho + \frac{R - \rho}{e(8S)^N} \sum_{\theta \geq \alpha} \frac{1}{\theta^2} \leq \rho + \frac{R - \rho}{e(8S)^N} . S^N < \rho + R - \rho$$

Portanto

$$(3.4) \quad ||u(u^o, t)||_s < R \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} 0 < s < 1 \\ ||u^o|| < \rho \\ |t| < \Delta(1 - s) \end{array}$$

$$(3.5) \quad ||u(u^o)|| < R \qquad \text{para} \, ||u^o|| < \rho$$

De (3.4) e das definições de analiticidade do Cap.I, a função $u(u^o, t)$ é analítica por ser G-analítica e limitada.Do teorema 8 do Cap.I segue que

$$||u(u^o + h, t) - u(u^o, t) - \sum_{\theta \geq 0} \delta\ u_\theta(u^o, h)\, t^\theta||_s \leq R. \sum_{n \geq 2} \left(\frac{2||h||}{\rho - ||u^o||}\right)^r$$

para $0 < s < 1$, $||h|| < \rho - ||u^o||$ e cada t, $|t| < \Delta(1 - s)$

Portanto

$$(3.6) \quad ||u(u^o + h) - u(u^o) - \sum_{\theta \geq 0} \delta\ u_\theta(u_o, h) T^\theta|| = o(||h||)$$

De (3.6) temos então a G-analiticidade de ψ e considerando (3.5) temos a analiticidade de ψ .

Para a função ψ podemos observar ainda que:

(1) é injetora porque porque u só depende dos coeficientes θ, $\theta\not\geq\alpha$, da expressão em série da condição inicial;

(2) a inversa de ψ é contínua por que do §3 $||u|| = \max(||u^o||,||v||)$ onde $u = u^o+v$ com $v = 0(t^\alpha)$ então $||u^o|| \leq ||u||$

(3) a diferencial de ψ é injetora porque,

$$u(u^o) = \sum_{\theta\not\geq\alpha} u_\theta T^\theta + \sum_{\theta\geq\alpha} u_\theta(u^o)T^\theta =$$

$$= u^o + \sum_{\theta\geq\alpha} u_\theta(u^o)T^\theta$$

diferenciando ψ e calculando em $t = 0$ vem $\delta u(u^o,h)\circ 0 = h$, isto significa que se $h_1 \neq h_2$ então $\delta u(u^o,h_1)\circ 0\neq\delta u(u^o,h_2)\circ 0$. Logo $\delta\psi$ é injetora.

§6 - Aplicação a um sistema não linear de Cauchy-Goursat

Vamos agora aplicar os resultados do cap.II e III no sistema de Cauchy-Goursat,

$$(3.7) \quad \begin{cases} D_t^\alpha u(z,t) = f(t,z,D_z^{\beta_1}u,\ldots,D_z^{\beta_p}u) \\ \\ u(z,t)-u^o(z,t) = 0(t^\alpha) \end{cases}$$

onde $t \in C^N$, $z \in C^n$, com $m(\alpha) \neq 0$, $\beta^i = (\beta_1^i,\ldots,\beta_n^i)$ $1\leq i\leq p$, $0 \leq |\beta^i| \leq m(\alpha)$.

A função f é analítica nas variáveis complexas $(t,z_1,\ldots,z_n,w_1,\ldots,w_p) \in C^{N+n+p}$ quando $|t| < \eta$; $|z_j| < 1$, $j = 1,\ldots,n$; $|W_i| < R$, $j = 1,\ldots,p$ limitada por um número $M>0$.

A função $u^o(z,t)$ é analítica no par (z,t) com valores complexos e $D_t^\theta u^o(0,z) = 0$, $\theta \geq \alpha$. Além disso $\sup\limits_{|t|<\eta} ||u^o(t,z)||<R$, para $|z| < 1$.

Chamemos de $X_s = H(B_s, C)$ ao espaço de Banach das funções u com valores em C de n variáveis complexas, holomorfas com derivadas $D_z^\beta u(z)$, $0 \leq |\beta|$ $m(\alpha)$, limitadas, onde

$$B_s = \{z \in C^n \; ; \; |z|<s\}$$

$$z = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|$$

$$||u||_s = \sup_{B_s} \max_{0 \leq |\beta| \leq m(\alpha)} (|D_z^\beta u(z)|) \quad , \quad 0<s<1$$

Seja agora a função $F(u,t)$ tal que:

$F(u,t)(z) = f(t,z,D_z^{\beta_1} u,\ldots,D_z^{\beta_p} u)$ com $||u||_s<R$, $||z||<s$, para $0<s<1$.

Nessas condições

$$|F(u,t)(z)| \leq M < \frac{M}{(s-s')^{m(\alpha)}}$$

e pela desigualdade de Cauchy

$$|D_z^{\beta_i} F(u,t)(z)| \leq \frac{M}{(s-s')^{|\beta^i|}} \leq \frac{M}{(s-s')^{m(\alpha)}}$$

para $||u||_s<R$, $0<|z|<s'<s\leq 1$.

Portanto

$$||F(u,t)||_{s'} \leq \frac{M}{(s-s')^{m(\alpha)}} \quad \text{e} \quad F(u,t) \in X_{s'} \quad , \quad 0<s'<1$$

Usando o teorema 2 do cap.II e o parágrafo anterior temos;

<u>a aplicação que a $||u^o||<\rho$, $0<\rho<R$ associa a solução $u \in (H_\alpha \times H^\alpha)$ (do exemplo 3) é analítica, injetora com inversa contínua e de diferenciável injetora.</u>

§7 - Observações

(A) Na revista Memoirs of American Mathematical Society [8], P. Duchatean abordou o mesmo problema abstrato de Goursat, (2.1), tratado por nós no capítulo II,

$$\begin{cases} D_t^{\alpha}\, u(t) = F(u,t) \\ u-u^{o} = O(t^{\alpha}) \end{cases}$$

com a hipótese distinta àquela apresentada em (2.3), colocando hipóteses mais fracas,

$$||F_{p,\lambda}(h_1,\ldots,h_p)||_{s'} \leq \frac{C}{(s-s')^{|\alpha|}}\, r^{-p}\, \eta^{-|\lambda|}\, ||h_1||_s \ldots ||h_p||_s$$

$$||\hat{F}_{o,\lambda}||_{s'} \leq \frac{C}{(1-s')^{|\alpha|}} \cdot \eta^{-|\lambda|}$$

Com essas hipóteses Duchateau tentou encontrar $u(t)$ analítica em $|t| < \Delta(1-s)$, $0<\Delta<\eta$, com valores no espaço X_s.

Chamando $u(t) = \sum\limits_{\theta\geq 0} u_\theta t^\theta$ encontrou como expressão recorrente

$$\begin{cases} u_\alpha = \dfrac{F_{o,o}}{\alpha!} \\ u_\theta+\alpha = \dfrac{\theta!}{(\theta+\alpha)!} \displaystyle\sum_{|\beta|+|\lambda_1|+\ldots+|\lambda_p|=|\theta|} F_{p,\beta}(u_{\lambda_1},\ldots,u_{\lambda_p}) \;,\; \theta\geq 0 \end{cases}$$

No entanto a expressão é

$$\begin{cases} u_\alpha = \dfrac{F_{o,o}}{\alpha!} \\ u_{\theta+\alpha} = \dfrac{\theta!}{(\theta+\alpha)!} \displaystyle\sum_{\beta+\lambda_1+\ldots+\lambda_p=\theta} F_{p,\beta}(u_{\lambda_1},\ldots,u_{\lambda_p}) \;,\; \theta\geq 0 \end{cases}$$

Por outro lado não valem também as desigualdades:

$$\sum_{|\lambda_1|+\ldots+|\lambda_p|=k_o-|\alpha|-|\beta|} \left(\frac{1}{8S}\right)^p \frac{1}{(|\lambda_1|\ldots|\lambda_p|)^2} \leq \frac{1}{S(k_o-|\alpha|-|\beta|+1)^2}$$

$$\sum_{|\beta|\leq k_o-|\alpha|} 2^{-|\beta|}(k_o-|\alpha|-|\beta|+1)^{|\alpha|-2} \leq 4(k_o-|\alpha|+1)^{|\alpha|-2}$$

isso porque não estão computadas todas as soluções inteiras de $|\lambda_1|+\ldots+|\lambda_p| = k_o-|\alpha|-|\beta|$ e $|\beta| \leq k_o-|\alpha|$ já que $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ e β são multi-índices.

Finalmente a expressão

$$\frac{(\lambda_o-\alpha)!}{\lambda_o!}(k_o-|\alpha|+1)^{|\alpha|-2} k_o^2$$

não é limitada para todo λ_o;

$$\lambda_o = (\lambda_{o_1},\ldots,\lambda_{o_N})$$

$$|\lambda_o| = k_o$$

$$\lambda_o! = \lambda_{o_1}!\ldots\lambda_{o_N}!$$

De fato no caso $N=2$

$$\frac{(\lambda_o-\alpha)!}{\lambda_o!}(k_o-|\alpha|+1)^{|\alpha|-2} k_o^2 = \frac{1}{\lambda_{o_1}(\lambda_{o_1}-1)\ldots(\lambda_{o_1}-\alpha_1+1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\lambda_{o_2}(\lambda_{o_2}-1)\ldots(\lambda_{o_2}-\alpha_1+1)}\cdot(\lambda_{o_1}+\lambda_{o_2}-|\alpha|+1)^{|\alpha|}\cdot\left(\frac{k_o-|\alpha|+1}{k_o}\right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_{o_1}^{\alpha_1}}\cdot\frac{1}{\lambda_{o_1}^{\alpha_2}}\cdot(\lambda_{o_1}+\lambda_{o_2}-|\alpha|+1)^{|\alpha|}\left(\frac{k_o-|\alpha|+1}{k_o}\right)$$

Fazendo λ_{o_1} constante e $\lambda_{o_2}\to\infty$

$$[\frac{(\lambda_o-\alpha)!}{\lambda_o!}(k_o-|\alpha|+1)^{|\alpha|-2}k_o^2] \to \infty$$

Portanto se esse teorema estivesse demonstrado ele englobaria o Teorema 1 do capítulo II já que $m(\alpha) \le |\alpha|$ e portanto

$$\frac{1}{(s-s')^{m(\alpha)}} \le \frac{1}{(s-s')^{|\alpha|}}$$

(B) O teorema 1 do capítulo II por nós enunciado e demonstrado engloba os casos dos sistemas de Cauchy tratado por Treves [7]. Portanto é aplicável em alguns sistemas não lineares abstratos de Cauchy-Kowalevsky.

Os resultados obtidos nos capítulos II e III contém como caso particular àqueles tratado por Pisanelli em [4].

APÊNDICE

Neste apêndice estão as demonstrações de algumas desigualdades usadas na prova dos teoremas dos capítulos anteriores.

Lema 1 - $\frac{p^p}{p!} \leq e^p$

Por indução observamos que

$$\frac{(p+1)^{p+1}}{(p+1)!} = \frac{(p+1)^p(p+1)}{p!\ (p+1)} = \frac{p^p}{p!}\ (1+\frac{1}{p})^p \leq e^p \circ e = e^{p+1}$$

Lema 2 - Seja p um inteiro positivo não nulo. Para todos os índices $i \geq p$, tem-se

$$i^2 \sum_{n_1+\ldots+n_p=i} (n_1 \ldots n_p)^{-2} \leq (4S)^{p-1}$$

onde a soma é extendida a todas as soluções da equação $n_1+\ldots+n_p = i$ e $S = \sum\limits_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$.

Por indução é imediato que para $p=1$ é verdadeira. Tomando $p=2$ tem-se:

$$\sum_{n_1+n_2=i} (\frac{i}{n_1 \circ n_2})^2 = \sum_{n_1=i-n_2} (\frac{i}{n_2(i-n_2)})^2 = \sum_{n_2=1}^{i-1} (\frac{i}{n_2(i-n_2)})^2 =$$

$$= \sum_{n_2=1}^{i=1} (\frac{1}{n_2} + \frac{1}{i-n_2})^2$$

Como $(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{i-n_2})^2 \geq 0$

$$\sum_{n_2=1}^{i-1} (\frac{1}{n_2} + \frac{1}{i-n_2})^2 \leq 2 \sum_{n_2=1}^{i-1} (\frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{(i-n_2)^2}) = 4 \sum_{n_2=1}^{i-1} \frac{1}{n_2^2} \leq 4S$$

para todo $i \geq 2$.

Para $p>2$, usando a indução,

$$\sum_{n_1+\dots+n_p=i} \frac{i^2}{(n_1 \cdot n_2 \dots n_p)^2} =$$

$$= \sum_{n_1+j=i} \left(\frac{i}{n_1 \cdot j}\right)^2 \sum_{n_2+n_3+\dots+n_p=j} \left(\frac{j}{n_2 \dots n_p}\right)^2 \leq (4s)^{p-2}\, 4S =$$

$$= (4S)^{p-1}$$

Lema 3 - Para cada $j = 1,2,\dots,$ $B_j \leq \dfrac{1}{S(j+1)^2}$

onde $B_j = \displaystyle\sum_{n_1+\dots+n_p=j} \left(\frac{1}{8S}\right)^p \frac{1}{(n_1 \dots n_p)^2}$

onde p assume todos os valores possíveis $\leq j$.

De fato para

$$B_1 = \sum_{n_1=1} \frac{1}{8S} = \frac{1}{8S} \leq \frac{1}{4S}$$

$$B_2 = \sum_{p=1}^{2} \sum_{n_1+\dots+n_p=2} \left(\frac{1}{8S}\right)^p \frac{1}{(n_1 \dots n_p)^2} = \frac{1}{8S\ 2^2} + \left(\frac{1}{8S}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{8S}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8S}\right) \leq \frac{1}{S(1+2)^2} = \frac{1}{9S}$$

Para $j>2$

$$B_j = \sum_{p=1}^{j} \sum_{n_1+\dots+n_p=j} \left(\frac{1}{8S}\right) \frac{1}{(n_1 \dots n_p)^2} =$$

$$= \frac{1}{j^2} \sum_{p=1}^{j} \left(\frac{1}{8S}\right)^p \sum_{n_1+\dots+n_p=j} \frac{j^2}{(n_1 \dots n_p)^2}$$

Pelo lema anterior vem

$$B_j \leq \frac{1}{j^2} \sum_{p=1}^{j} \left(\frac{1}{8S}\right)^p (4S)^{p-1} = \frac{1}{j^2 4S} \sum_{p=1}^{j} \frac{1}{2^p} \leq \frac{1}{j^2 2S}$$

Mas

$$(j+1)^2 B_j = (j^2+2j+1) B_j = j^2 (1+\frac{2}{j}+\frac{1}{j^2}) B_j$$

Como $j>2$

$$(j+1)^2 B_j \leq j^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{j^2 2S}$$

$$B_j \leq \frac{1}{(j+1)^2 S}$$

Lema 4 - Para todo $m = 1,2,\ldots$ tem-se

$$S_m = m\, 2^{-m} \sum_{n=1}^{m} \frac{2^n}{n} \leq 4$$

De fato

$$S_m = m\, 2^{-m} \sum_{n=1}^{m} \frac{2^n}{n} = m\, 2^{-m}[\frac{2^m}{m} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{2^n}{n}] = 1 + \frac{1}{2}\, \frac{m}{m-1}\, S_{m-1}$$

Para $m>2$, $\frac{m}{m-1} \leq \frac{3}{2}$

$$S_m \leq 1 + \frac{3}{4} S_{m-1}$$

Usando indução; $S_{m-1} \leq 4$ logo $S_m \leq 4$ já que $S_1 = 1$ e $S_2 = 2$.

Bibliografia

[1] *Hille, E.* - "Funcional Analysis and Semi-groups" American Mathematical Society Colloquium Publications Vol XXXI - 1948

[2] *Pisanelli, D.* - Contribuição ao estudo dos Operadores A-nalíticos - Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo - Vol 16 - 1961

[3] ―――――― - Applications Analytiques en Dimension Infinite - Bull Sc. Math, 2ª série, 96, 1972

[4] ―――――― - Soluções de um sistema não-linear de Cauchy-Kovalewsky abstrato como variedade analítica de Banach local - Atas do Colóquio de Análise,1974, Campinas - S. Paulo.

[5] ―――――― - Théorèmes d'Ovcyannicov, Frobenius et d'inversion et groupes de Lie locaux dans les échel-les d'espaces de Banach C.R.A.S. t.277 (12, nov. 1973)

[6] *Dieudonné* - "Foundations of Modern Analysis" Academic Press - New York and London - 1960

[7] *Treves, J.F.* - An abstract non linear Cauchy - Kovalewsky theorem - Trans. A.M.S. Vol 150, 1970, pp 77-92

[8] *Duchateau, P.* - The Cauchy Goursat Problem Mem. Amer. Math. Soc. 118, 60p. (1972)

[9] *Horváth, J.* - "Topological Vector Spaces and Distributions I" - Addison Wesley, 1966

[10] *Goursat, E.* - "Cours D'analyse mathématique" Tome III Gauthiers-Villars et C^{ie} - 1923 - troisième édition