AS TRANSFORMAÇÕES CONFORMES DO $\mathbb{R}^n$

Carlos Alberto Knudsen

TESE APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, CUMPRINDO PARTE DAS EXIGÊNCIAS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Augusto Martins Rodrigues

Durante a realização deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da CAPES e da FINEP.

Março de 1977.

SÃO PAULO

Aos Professores Jacy e Lyra,

com o vazio de uma ausência

e a esperança de um reencontro.

Agradeço,

- aos Srs. Manoel Peres Garcia e João B. B. Oliveira pelo paciente trabalho de datilografia.

- ao Sr. José Bonfim pelo trabalho de impressão.

- aos professores e amigos do IME-USP, com quem compartilho este pequeno trabalho.

- ao professor Alexandre, por nossos estimulantes "tête à tête" matemáticos em que tão bem souberam primar o lazer, o prazer e a vibração intelectual.

INTRODUÇÃO

Essas notas apresentam alguns aspectos algébrico--geométricos de uma teoria de Equações a Derivadas Parciais.

Alguns fatos relevantes da Teoria são apresentados de forma intrínseca, fazendo uso da linguagem dos jatos, das Variedades Fibradas e dos Fibrados Vetoriais. Há, em dados momentos, uma tentativa consciente de nossa parte, de estabelecer liames com aspectos clássicos das equações a derivadas parciais.

Assim, no primeiro capítulo, estabelecemos a linguagem e as definições dos conceitos pertinentes ao nosso objeto de estudo.

Em seguida, no segundo capítulo, apresentamos um Teorema de Existência de Soluções de um Sistema de Equações a Derivadas Parciais.

Finalmente, o terceiro capítulo representa uma tentativa de aplicação das idéias até então desenvolvidas, no tratamento de um Teorema Clássico, devido a Liouville.

O Teorema de Liouville trata das transformações conformes do $\mathbb{R}^3$ e do S^3 .

Tal problema, até onde nos é dado saber, pode ser resolvido por técnicas de Geometria Diferencial, utilizando basicamente o Teorema de Dupin.

O aspecto mais interessante de tal problema é que, ao considerarmos as transformações conformes do $\mathbb{R}^2$, obtemos a classe das funções analíticas. Por outro lado, ao nos colocarmos em $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$, obtemos que as transformações conformes "dependem" de um "número finito" de funções.

Procuramos tratar o problema como um problema de equações a derivadas parciais.

Tentando ser mais explícitos, nossa linha de ação foi a seguinte:

Impondo sobre um difeomorfismo local do $\mathbb{R}^n$ ou do S^n a condição de "conformidade", fomos levados a um S.E.D.P. e, portanto, a indagar sobre as soluções de tal sistema. Linearizando este S.E.D.P., obtivemos um S.E.D.P. abordável pelo instrumental introduzido nos capítulos anteriores, o que nos permitiu caracterizar algebricamente o que ocorre no problema com a mudança de dimensão $n = 2$; $n \geq 3$.

Finalmente, conseguiu-se voltar, na situação $n \geq 3$, do sistema linearizado para o inicial e, em última análise, descrever-lhe as soluções.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

SISTEMA DE EQUAÇÕES A DERIVADAS PARCIAIS

§-1 - VARIEDADE DE JATOS

O nosso primeiro objetivo, é introduzir rapidamente a linguagem, que, independentemente da sua importância em diversos ramos da Geometria, mostrou-se adequada ao estudo geométrico dos Sistemas de Equações a Derivadas Parciais.

No que segue as variedades são supostas de classe C^∞ bem como as aplicações entre elas.

DEFINIÇÃO DE UM JATO DE ORDEM k

Sejam M, N variedades, $x_0 \in M$, $y_0 \in N$, f, g aplicações diferenciáveis definidas em uma vizinhança de x_0 a valores em N tais que $f(x_0) = g(x_0) = y_0$.

Tomemos cartas $(U, X^1, \ldots, X^m)$, $(V, Y^1, \ldots, Y^n)$ tal que $x_0 \in U$, $y_0 \in V$.

As aplicações f e g são então representadas por sistemas de funções numéricas $f^j(X_1,\dots,X_m)$ e $g^j(X_1,\dots,X_m)$ para $j=1,\dots,n$.

DEFINIÇÃO 1 - Dizemos que f e g são equivalentes a ordem k em x_0 se as funções f^j, g^j tem as mesmas derivadas parciais até ordem k, no ponto x_0, para todo $j=1,\dots,n$.

É fácil verificar, que essa definição não depende das cartas utilizadas, bem como é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações definidas em uma vizinhança de x_0 a valores em N tal que $f(x_0)=y_0$.

DEFINIÇÃO 2 - Uma classe de equivalência denomina-se um jato de ordem k de M em N, de fonte x_0 e alvo y_0.

O conjunto dos jatos de ordem k de M em N será denotado por $J^k(M,N)$.

Se f é uma aplicação diferenciável definida em uma vizinhança de x em M, seu jato de ordem k será denotado por $J^k_x f$.

Denotaremos as aplicações, que a um jato $X \in J^k(M,N)$ associa sua fonte e seu alvo por α e β respectivamente

$$\alpha : J^k(M,N) \longrightarrow M: \qquad \beta : J^k(M,N) \longrightarrow N$$
$$X \longrightarrow \alpha(X) \qquad\qquad X \longrightarrow \beta(X)$$

Se $f\colon U \subset M \longrightarrow N$; U aberto, f diferenciável; denotaremos

$$J^k f\colon U \longrightarrow J^k(M,N)\colon J^k f(x) = J^k_x f$$

Temos então $\alpha\circ J^k f = 1_U$; $\beta\circ J^k f = f$.

Se $h,k\in N$: $h \leq k$ podemos construir uma sobrejeção canônica

$$\rho^k_h\colon J^k(M,N) \longrightarrow J^h(M,N)$$

pois se duas aplicações são equivalentes a ordem k elas o são a ordem h. Observemos que $\rho^h_\ell\circ\rho^k_h = \rho^k_\ell$, $\ell \leq h \leq k$.

Podemos agora, dotar $J^k(M,N)$ de uma estrutura de variedade diferenciável.

Consideremos $(U,X^1,\dots,X^m)$; $(V,Y^1,\dots,Y^n)$ cartas de M e N respectivamente.

Seja

$$W^k_{U,V} = \left\{X\in J^k(M,N)\colon \alpha(X)\in U\wedge\beta(X)\in V\right\}$$

Antes de prosseguirmos, uma observação sobre notação.

Para cada $0 \leq \ell \leq k$ $(\ell,k\in N)$ denotaremos por I^ℓ a sequência $(i_1,\dots,i_\ell)$ de naturais tal que $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_\ell \leq m$.

Se $X\in J^k(M,N)$, logo $X = J^k_{\alpha(X)} f$; denotaremos

$$P^j_{I^\ell}(X) = \frac{\partial^\ell f^j}{\partial X^{i_1}\dots\partial X^{i_\ell}}(\alpha(X)),\text{ para } j=1,\dots,n.$$

É claro que $P^j_{I^\ell}(X)$ não depende da função tal que

$$X = J^k_{\alpha(X)} f.$$

Seja r o número de aplicações $P^j_{I^\ell}$ (quando j e I^ℓ variam).

Denotemos por $S^k_{U,V}$ a bijeção

$$S^k_{U,V} \colon W^k_{U,V} \longrightarrow U \times V \times \mathbb{R}^r$$

definida por

$$S^k_{U,V}(X) = (\alpha(X), \beta(X), \ldots, P^j_{I^\ell}(X), \ldots)$$

$\therefore$ $S^k_{U,V} \colon W^k_{U,V} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n+r}$ é injetora, $S^k_{U,V}(W^k_{U,V})$ é aberto em $\mathbb{R}^{m+n+r}$.

Por definição $(W^k_{U,V}; S^k_{U,V})$ é uma carta local de $J^k(M,N)$.

É claro que todas as cartas locais que obtemos desta maneira são duas a duas e^∞-compatíveis e que seus domínios cobrem $J^k(M,N)$. Portanto, temos uma estrutura diferenciável para $J^k(M,N)$.

Verifica-se também, que com essa estrutura as aplicações α, β, ρ^k_h, $J^k f$, anteriormente definidas, são diferenciáveis.

No que segue $J^k(M,N)$ será sempre suposta munida desta estrutura.

Uma outra noção, da qual teremos necessidade é a de variedade fibrada.

DEFINIÇÃO 3 - *Uma variedade fibrada* é uma tripla $\langle M,N,\rho\rangle$ onde M, N são variedades diferenciáveis de dimensão m e n respectivamente e $\rho: M \longrightarrow N$ diferenciável de posto n em todo ponto de M.

Pela Forma Local das Submersões podemos traduzir a definição acima do seguinte modo:

$\forall x \in M$ $\exists$ cartas (U,r); (V,s) de M, N respectivamente, tal que $x \in U$, $\rho(U) = V$ e o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{r} & \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \\ \Big\downarrow \rho & \circlearrowleft & \Big\downarrow \pi \text{ (projeção)} \\ V & \xrightarrow[s]{} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

A variedade N é a base da variedade fibrada $\langle M,N,\rho\rangle$. A aplicação ρ, denominada aplicação fibrada, é aberta. Denotaremos $M_b = \rho^{-1}(b)$ para todo $b \in N$. M_b é uma subvariedade regular e fechada de M de dimensão $m-n$, denominada fibra sobre b.

DEFINIÇÃO 4 - (Secção local) Seja $\langle M,N,\rho\rangle$ uma variedade fibrada; uma secção local de $\langle M,N,\rho\rangle$ é uma aplicação diferenciável $f: V \subset N \longrightarrow M$, V aberto de N tal que $\rho \circ f = 1_V$.

Denotaremos $J^k(M,N,\rho)$ ou mais simplesmente J^kM o o subconjunto de $J^k(N,M)$ dos k jatos das secções locais de $\langle M,N,\rho\rangle$.

PROPOSIÇÃO 1 - $J^k(M,N,\rho)$ é uma sub-variedade de $J^k(N,M)$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $X \in J^kM$. Considere-se uma carta fibrada (U,r) de M cujo domínio contém $x = \alpha(X)$. Existe uma carta (V,s) de N tal que $V = \rho(U)$ e que $s \circ \rho = \pi \circ r$.

Seja agora a carta $(W^k_{V,U}, S^k_{V,U})$ construída a partir de (U,r) e (V,s) como anteriormente. É claro que $X \in W^k_{U,V}$ e que t é o número das aplicações $D^j_{I^\ell}$ quando $j>n$ $S^k_{U,V}(W^k_{V,U} \cap J^kM)$ é uma sub-variedade de $\mathbb{R}^{m+n+r}$ difeomorfa ao aberto $r(U) \times \mathbb{R}^t$ de $\mathbb{R}^{m+t}$.

O difeomorfismo $S^k_{V,U}$: $W^k_{V,U} \longrightarrow r(U) \times \mathbb{R}^t$ não é senão que a restrição $S^k_{V,U}(W^k_{V,U} \cap J^kM)$ da projeção canônica

$$(X_1,\dots X_n, Y_1,\dots Y_m,\dots X^j_{I^\ell}) \longrightarrow (Y_1,\dots Y_m,\dots X^j_{I^\ell},\dots)$$

de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{r-t} \times \mathbb{R}^t$ sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^t$.

Verifica-se que $\langle J^kM,N,\alpha\rangle$ e $\langle J^kM,M,\beta\rangle$ são variedades fibradas, quando J^kM está munida da estrutura diferencial defina acima, assim como $\langle J^kM, J^hM, \rho^k_h\rangle$ onde $\rho^k_h : J^kM \longrightarrow J^hM$ $(h \leq k)$ é a sobrejeção canônica.

Observemos também que J^0M é isomorfo a M e no que segue identificaremos J^0M e M.

Com esta identificação se tem $\rho_0^k = \beta$ $(k \geq 0)$.

Utilizaremos as seguintes convenções:

$$J^{-1}M = N \quad e \quad \rho_{-1}^k = \alpha \quad e \quad \rho_{-1}^{-1} = 1_N.$$

Desta maneira $J^k M$ e ρ_ℓ^k estão definidas para todos inteiros K e ℓ tais que $k \geq \ell \geq -1$.

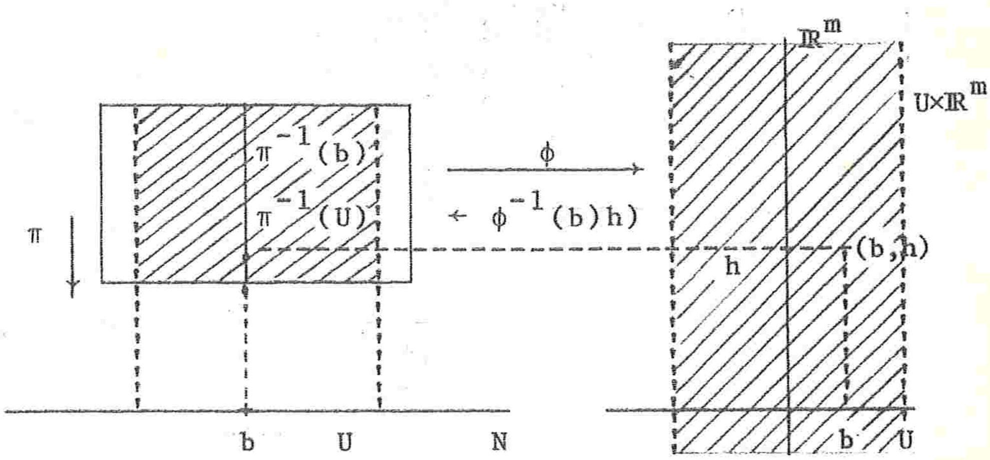
§-2 - FIBRADOS VETORIAIS

Consideremos N uma variedade diferenciável, M um conjunto não vazio e $\pi: M \longrightarrow N$ uma aplicação.

Se $b \in N$, denominaremos $M_b = \pi^{-1}(b)$ de fibra acima de b.

DEFINIÇÃO 1 - *Carta vetorial de dimensão* m *sobre* M - Uma carta vetorial de dimensão m sobre M é um par (U, ϕ) onde U é um aberto de N e $\phi: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m$ uma bijeção tal que

$$\pi(\phi^{-1}(b,h)) = b, \ \forall b \in U, \ \forall h \in \mathbb{R}^m.$$



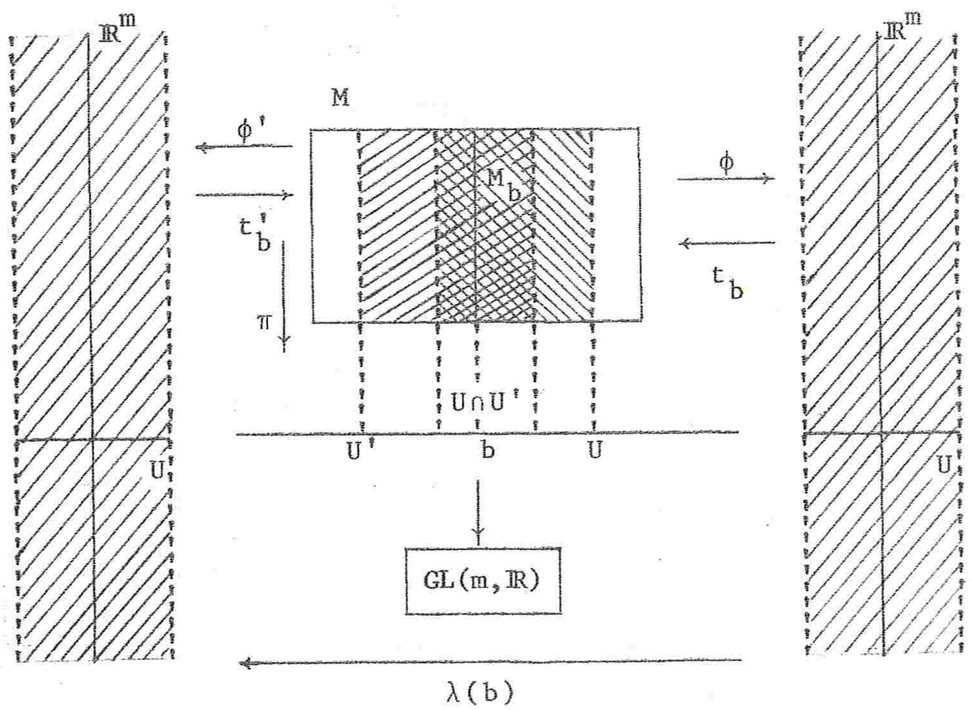
Ou dito de outra forma o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & U\times \mathbb{R}^m \arrow[d, "\text{proj. canônica}"] \\
U \arrow[r, "1U"] & U
\end{tikzcd}$$

Denotemos por t_b a bijeção; $t_b: \mathbb{R}^m \longrightarrow M_b$ tal que $t_b(h) = \phi^{-1}(b,h)$.

<u>DEFINIÇÃO 2</u> -(Compatibilidade das cartas vetoriais) - duas cartas vetorias (U,ϕ); (U',ϕ') sobre M são compatíveis se $\exists$ uma aplicação diferenciável $\lambda: U\cap U' \longrightarrow GL(m,\mathbb{R})$ tal que para todo $b \in U\cap U'$ se tem que $t_b = t'_b \circ \lambda(b)$.

Esboçando tal situação numa figura temos



isto é, temos a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M_b & \\ \mathbb{R}^m \arrow[ur, "t'_b"] & & \mathbb{R}^m \arrow[ul, "t_b"'] \arrow[ll, "\lambda(b)"] \end{tikzcd}$$

Esta comutatividade em particular implica que as estruturas vetoriais transportadas para M_b por t_b e t'_b são as mesmas.

<u>DEFINIÇÃO 3</u> - Um atlas vetorial sobre M é uma família

$$A = \left\{(U_i, \phi_i) : i \in I\right\}$$

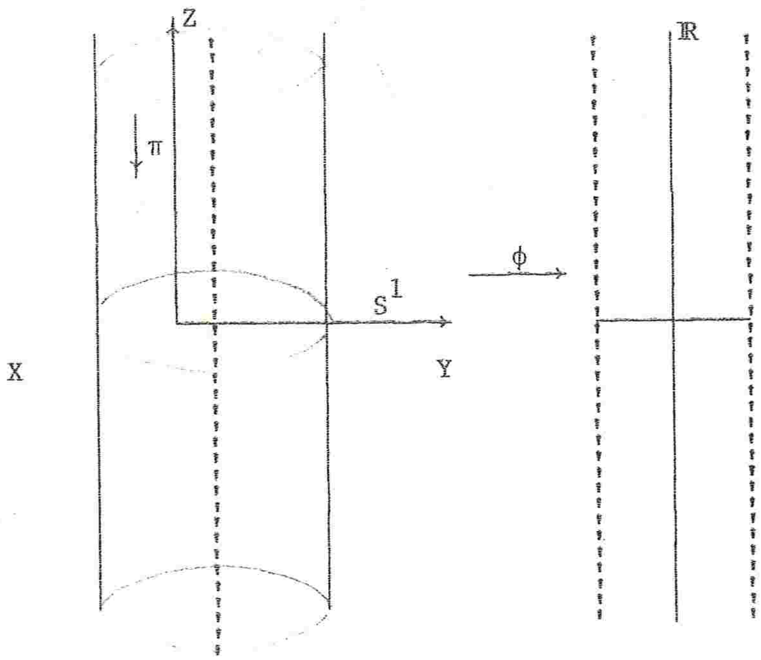
de cartas vetoriais duas a duas compatíveis, tal que

$$\bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i) = M.$$

Dois atlas vetoriais sobre M são equivalentes se sua união é ainda um atlas vetorial sobre M.

Dar uma estrutura de fibrado vetorial sobre M é dar uma classe de equivalência de atlas vetoriais. A variedade N, então, denomina-se base, o conjunto M o espaço fibrado e a aplicação π a projeção da estrutura fibrada.

"Exemplo" - Um exemplo trivial de fibrado vetorial é o cilindro sobre S^1.



Onde ϕ é a aplicação "endireita a calha".

Podemos agora dotar M de uma estrutura de variedade compatível com a estrutura de fibrado.

Tomemos (U,ψ) uma carta de $N(\psi: U \longrightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^n)$ e seja (U,ϕ) uma carta vetorial de M definida sobre o mesmo aberto U.

Definimos $\chi: \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ da seguinte maneira

Seja $X \in \pi^{-1}(U)$ e $b = \pi(X)$ então

$$\chi(X) = (\psi(b), t_b^{-1}(X)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

É claro que χ é bijetora e $\chi(\pi^{-1}(U)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é aberto.

Por definição $(\pi^{-1}(U),\chi)$ é uma carta local sobre M. É claro também que os domínios das cartas construídas deste modo recobrem M.

Só resta portanto mostrar que a mudança de cartas é diferenciável.

Seja portanto $(\pi^{-1}(U),\chi)$; $(\pi^{-1}(\bar{U}),\bar{\chi})$ tal que

$$\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(\bar{U}) \neq \emptyset.$$

Seja $X\in\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(\bar{U})$ e $b=\pi(X)$ $\therefore$ $\chi(x)=(\chi(b),t_b^{-1}(X))$

$$\bar{\chi}(x) = (\bar{\chi}(b),\bar{t}_b^{-1}(X)).$$

A passagem $\chi(b) \longmapsto \bar{\chi}(b)$ é diferenciável pois N é variedade.

Por outro lado $t_b = \bar{t}_b\circ\lambda(b) \therefore t_b^{-1} = \lambda^{-1}(b)\circ\bar{t}_b$.

Mas por hipótese $\lambda\colon U\cap\bar{U} \longrightarrow GL(m,\mathbb{R})$ é diferenciável, como a inversão em $GL(m,\mathbb{R})$ é diferenciável temo que a passagem $t_b^{-1}(X) \longmapsto \bar{t}_b^{-1}(X)$ é diferenciável.

$\therefore$ a passagem $\chi(x) \longmapsto \bar{\chi}(X)$ é diferenciável.

Portanto o conjunto das cartas construído acima é um atlas diferenciável sobre M logo define uma estrutura de variedade diferenciável sobre M.

Verifica-se que, com esta estrutura, a projeção π é diferenciável e que seu posto em todo ponto de M é igual a dimensão de N logo $\langle M,N,\pi\rangle$ é uma variedade fibrada, M_b é uma sub-variedade regular e fechada de M e as aplicações t_b são difeomorfismos.

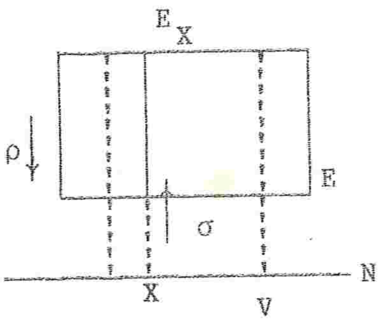
Consideremos agora, um fibrado vetorial $<E,N,\rho>$. Denotemos por n a dimensão de N e por n+m a dimensão de E com a estrutura de variedade defina acima.

PROPOSIÇÃO 1 - Seja J^kE a variedade de jatos de secções de $<E,N,\rho>$.

$<J^kE,N,\alpha>$ possui uma estrutura de fibrado vetorial compatível com a estrutura de variedade de J^kE.

DEMONSTRAÇÃO - Se $b\in N$, denotaremos $J^k_bE = \alpha^{-1}(b)$.

Seja $\sigma: V\subset N \longrightarrow E$ uma secção local de $<E,N,\rho>$.



$\therefore \rho\circ\sigma = 1_V \therefore \sigma(x)\in E_x$

E_x fibra de $<E,N,\rho>$, $\forall x\in V$.

Mas E_x possui uma estrutura de $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Portanto se $(\sigma+\sigma'): V\subset N \longrightarrow E$ são secções locais podemos definir $(\sigma+\sigma'): V\subset N\to E: (\sigma+\sigma')(x) = \sigma(x)+\sigma'(x)$.

Se $\lambda\in\mathbb{R}$ podemos definir

$$(\lambda\sigma): V\subset N \longrightarrow E: (\lambda\sigma)(x) = \lambda\sigma(x).$$

Mas $\rho\circ(\sigma+\sigma') = 1_V \wedge \rho\circ(\lambda\sigma) = 1_V$.

Por outro lado, sejam σ, τ, σ', τ' secções de $<E,N,\rho>$ definidas numa vizinhança de $x\in N$ tal que

$$J^k_x\sigma = J^k_x\sigma' \wedge J^k_x\tau = J^k_x\tau'$$

então

$$J^k_x(\sigma+\tau) = J^k_x(\sigma'+\tau') \wedge J^k_x\lambda\sigma = J^k_x\lambda\sigma' \quad \therefore \quad X = J^k_x\sigma \wedge Y = J^k_x\tau$$

podemos definir

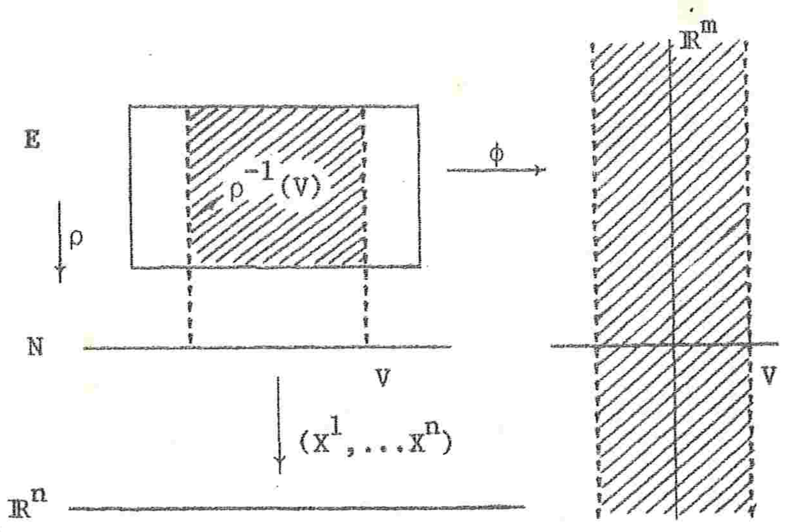
$$X + Y = J^k_x(\sigma+\tau) \wedge \lambda X = J^k_x\lambda\sigma.$$

Portando definimos sobre J^k_xE duas operações.

É fácil ver que com estas operações J^k_xE se torna um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Vamos agora definir um atlas vetorial sobre J^kE.

Sejam $(V,X^1,\ldots X^n)$ uma carta local de N e (V,ϕ) uma carta vetorial de E.



Seja $X \in J^kE$: $X = J^k_{\alpha(X)}\sigma$: $\sigma:V'\subset N \longrightarrow E$, secção local tal que $\alpha(X) \in V$ é V' vizinhança de $\alpha(X)$.

A secção σ fica determinada por m-funções numéricas f^j a n-variáveis de maneira que

$$\phi(\sigma(X')) = (X', f^1(X_1', \dots, X_n'), \dots, f^m(X_1', \dots, X_n')), \quad \forall X' \in V'$$

de coordenadas $(X_1', \dots, X_n')$.

É claro que $\phi(\sigma(X))$ independe da secção σ tal que $X = J_X^k \sigma$.

Seja S o número de sequências $(I^\ell, j) = (i_1, \dots, i_\ell, j)$ tal que $1 \le \ell \le k$, $i_1, \dots, i_\ell, j \in N$, $0 \le i_1 \le \dots \le i_\ell$; $i \le j \le m$.

Se (I^ℓ, j) é uma tal sequência, denotemos

$$P^j_{I^\ell}(X) = \frac{\partial^\ell}{\partial X^{i_1} \dots \partial X^{i_\ell}} f^j(\alpha(X)).$$

É claro que $P^j_{I^\ell}$ independe da secção σ tal que $X = J^k_{\alpha(X)}\sigma$.

É claro também que temos

$$P^j_{I^\ell}(X+Y) = P^j_{I^\ell}(X) + P^j_{I^\ell}(Y)$$

$$P^j_{I^\ell}(\lambda X) = P^j_{I^\ell}(X); \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Definimos então a aplicação

$$\chi\colon \alpha^{-1}(V) \longrightarrow V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^S$$

$$X \in \alpha^{-1}(V): \ X = J^k_{\alpha(X)}\sigma$$

$$\chi(X) = (\phi(\sigma(\alpha(X)), \dots, P^j_{I^\ell}(X), \dots)$$

É fácil verificar que χ é bijetora e que se

$$(a,h)\in V\times\mathbb{R}^{m+s} \quad \alpha\circ\chi^{-1}(a,h) = a$$

logo $(\alpha^{-1}(V),\chi)$ é uma carta vetorial sobre J^kE. Demonstra-se também, sem muitas dificuldades, que todas cartas vetoriais construidas desta maneira são duas a duas compatíveis. Induzimos deste modo uma estrutura de fibrado vetorial sobre J^kE. Verifica-se que esta estrutura de fibrado induz sobre J^kE uma estrutura de variedade que é a mesma definida no §-1.

§-3 - FEIXE DE GERMES DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS SOBRE UMA VARIEDADE

Seja U um aberto de M e denotemos por F(U) a álgebra real das funções diferenciáveis de U em $\mathbb{R}$ e por τ_M a topologia de M.

DEFINIÇÃO 1 - Chamamos feixe Φ de germes de funções diferenciáveis sobre M a uma família de conjuntos, indexada na topologia de M, tal que $\forall U\in\tau_M$ $\phi_U = \phi(U)$ é um sub-conjunto de F(U) satisfazendo os seguintes axiomas:

i) $U,V\in\tau_M\wedge V\subset U \Longrightarrow (\forall f)(f\in\phi(U) \longrightarrow f|V\in\phi(V))$

ii) $U\in\tau_M\wedge U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i : U_i\in\tau_M \longrightarrow (\forall f)(f\in F(U) \wedge$

$\wedge\ f|U_i\in\phi(U_i)\ \forall i\in I \longrightarrow f\in\phi(U))$.

O conjunto $\phi(U)$ é o conjunto das secções sobre U do feixe Φ. Se f é uma secção de Φ diremos que f pertence a ϕ e escreveremos $f\in\Phi$.

DEFINIÇÃO 2 - Se Φ é um feixe de germes de funções diferenciáveis sobre M e se para todo aberto U de M $\phi(U)$ é um ideal de $F(U)$, isto é,

i) $\phi(U)\subset F(U)$ é um subgrupo relativamente a adição em $F(U)$;

ii) $(\forall f)(\forall g)(f\in\phi(U)\wedge g\in F(U) \longrightarrow g\circ f\in\phi(U))$

diremos que ϕ é um feixe de ideais de germes de funções diferenciáveis.

Se por outro lado tivermos também que para todo $a\in M$ $\exists U$ vizinhança de a e $\exists$ $f_1,\ldots,f_s\in\phi(U)$ tal que para todo $b\in U$, para toda f definida numa vizinhança de b, se $\exists$ W vizinhança de b tal que $f|V$ pertence ao ideal gerado por

$$f_1|V,\ldots,f_s|V$$

diremos então que Φ é um feixe de ideais de germes de funções diferenciáveis localmente de tipo finito. As funções $f_1,\ldots,f_s$ formam um sistema de geradores de ϕ sobre U.

EXEMPLO - Seja M uma variedade e N uma sub-variedade regular fechada de M

$$(\forall U)(U\in\tau_M \longrightarrow \phi(U) = \begin{cases} F(U) \text{ se } U\cap N = \phi \\ \\ \{f\in F(U) : f|U\cap N = 0\} \text{ se } U\cap N \neq \phi. \end{cases}$$

Verifica-se facilmente que a família Φ assim constituida é um feixe de ideais de germes de funções diferenciáveis e mais é um feixe de ideais de germes de funções diferenciáveis localmente do tipo finito.

Com efeito, considere-se o seguinte:

<u>LEMA</u> - Seja U um aberto convexo de $\mathbb{R}^m$ e seja $a \in U$.
Seja $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$. Nessas condições existem funções diferenciáveis $g_1, \ldots, g_m: U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in U$ se tem

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{m} (x^i - a^i) \cdot g^i(x).$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - $\forall x \in U$; $[a,x] = \{a+t(x-a):\ 0 \leq t \leq 1\} \subset U$. Seja

$$\phi_x: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}: \phi_x(t) = f(a+t(x-a))$$

ϕ_x é derivável e $\phi_x'(t) = df(a+t(x-a))(x-a)$.

Pelo teorema fundamental do cálculo se tem

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi_x'(t)dt$$

$$\therefore\ f(x) = f(a) + \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} (a+t(x-a)) \cdot (x^i - a^i) \right) dt$$

$$\therefore\ f(x) = f(a) + \sum_{i=0}^{m} (x^i - a^i) \cdot g^i(x)$$

onde

$$g^i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (a+t(x-a)) \cdot dt.$$

\- o -

Voltando ao nosso exemplo, seja $a \in M$ se $a \notin N$ como N é fechado em M $\exists$ um aberto U que contém a e não intercepta N. Seja $f_1 \in \phi(U)$ tal que $f_1 = 1$. Para todo $b \in U$ e para toda função f definida numa vizinhança de b $\exists$ W vizinhança de b (basta tomar o domínio de f interceptado com U) tal que $f|W \in \phi(W)$ e $\exists$ V vizinhança de b (basta tomar $V = W$) tal que $f|V$ pertence ao ideal gerado por $f_1|V$.

Por outro lado, se $a \in N$, como N é sub-variedade regular, $\exists$ uma carta $(U, X^1, \ldots, X^m)$ de M, cujo domínio contém a, $X^1(a) = \ldots = X^m(a) = 0$, tal que $(U \cap N, X^1|U \cap N, \ldots, X^n|(U \cap N)$ é uma carta de N e $X^j|U \cap N = 0$ para $j > n$. Do lema precedente segue que $X^{n+1}, \ldots, X^m$, constituem um sistema de geradores de ϕ sobre U.

- o -

DEFINIÇÃO 3 - Sejam f e g duas funções reais diferenciáveis sobre um aberto U de M. Dizemos que f e g são equivalentes em a se elas coincidem em alguma vizinhança de a.

É fácil verificar que a relação acima é uma relação de equivalência sobre o conjunto das funções reais, definidas e diferenciáveis sobre uma vizinhança de a. A classe de equivalência de uma tal função f, denota-se por $(f)_a$ e denomina-se germe de f em a.

Denotaremos por F_a conjunto de germes em a, de funções reais diferenciáveis sobre uma vizinhança de a. F_a possui uma estrutura natural de $\mathbb{R}$-álgebra.

Seja ϕ um feixe sobre M; denotaremos por ϕ_a o conjunto de germes em a das secções de ϕ definidas sobre uma vi zinhança de a.

PROPOSIÇÃO 1 - As condições seguintes são equivalentes:

1) ϕ é um feixe de ideais de germes de funções diferenciáveis.

2) Para todo $a \in M$ ϕ_a é um ideal de F_a.

PROPOSIÇÃO 2 - As condições seguintes são equivalentes:

1 - ϕ é um feixe de ideais de germes de funções diferenciáveis localmente de tipo finito.

2 - Para todo $a \in M$, as seguintes proposições estão verificadas

i) ϕ_a é um ideal de F_a.

ii) $\exists$ uma vizinhança U_a de a e $f_1, \ldots, f_s \in F(U_a)$ tais que para todo $b \in U_a$ os germes $(f_1)_b, \ldots, (f_s)_b$ geram o ideal ϕ_b.

As demonstrações dessas proposições serão deixadas a cargo do leitor. [Ver 1].

§-4 - SISTEMA DE EQUAÇÕES A DERIVADAS PARCIAIS

Classicamente, entendemos um sistema de equações a derivadas parciais, como por exemplo, relações funcionais do tipo:

$$F_1(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0$$

$$F_2(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0$$

Onde F_1, F_2 são funções diferenciáveis definidas num aberto $U \subset \mathbb{R}^8$. Uma solução de tal sistema seria uma função diferenciável $Z: V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo (x,y) de V se tem que

$$(x, y, z(x,y), z_x(x,y), z_y(x,y), z_{xx}(x,y), z_{xy}(x,y), z_{yy}(x,y)) \in U$$

e

$$F_1(z,y,x,z_x,z_y,z_{xx},z_{xy},z_{yy}) = 0$$

$$F_2(z,y,x,z_x,z_y,z_{xx},z_{xy},z_{yy}) = 0$$

É claro também que se $f;g \in F(U)$, Z é solução de

$$fF_1 + gF_2, \text{ i.é, } fF_1 + gF_2 = 0, \ \forall (x,y) \in \text{Dom } Z.$$

Mudando a notação,

$$F_1(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = 0$$

$$F_2(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = 0$$

é o que comumente surge, na literatura clássica, como denotando um sistema de equações a derivadas parciais de ordem 2, onde $z = z(x,y)$ é uma solução de tal sistema.

Vamos agora, tentar olhar as considerações acima sob um novo ângulo.

Seja $<\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2,\pi>$ a fibração canônica do $\mathbb{R}^2$

$\therefore$ $\sigma: V \longrightarrow \mathbb{R}^3: \sigma(x,y) = (x,y),z(x,y))$ é uma secção local dessa fibração.

Consideremos a variedade $J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ e a sub-variedade $J^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2,\pi)$, dos jatos de ordem 2 das secções locais.

Em particular,

$$J^2\sigma \in J^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2,\pi) \text{ e } J^2_{(X,Y)}\sigma = (x,y,z,z_x,z_y,z_{xx},z_{xy},z_{yy}).$$

Consideremos uma carta $(\mathcal{U},X,Y,Z,U,V,W,P,Q)$ de $J^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2,\pi)$ com $J^2\sigma$ e $\mathcal{U}$. Sem perda de generalidade podemos supor que o contra-domínio da parametrização acima seja o aberto do $\mathbb{R}^8$ onde as funções F_1 F_2 estão definidas. Podemos então "transportar" essas funções para o aberto

$$\mathcal{U} \subset J^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2,\pi).$$

Seja ϕ o feixe de ideais de germes de funções diferenciáveis sobre $\mathcal{U}$, gerado por F_1 F_2.

É claro que ϕ é um feixe de ideais de germes de funções diferenciáveis localmente de tipo finito, sobre $\mathcal{U}$, e que a partir dele recuperamos o sistema dado inicialmente.

Tais considerações "motivam" a seguinte definição intrínseca de sistema de equações a derivadas parciais (em abrevidado S.E.D.P.) de ordem k, assim como a definição de solução de um S.E.D.P.

Seja $<M,N,\rho>$ uma variedade fibrada e seja J^kM a variedade dos jatos de ordem k das secções locais de $<M,N,\rho>$. Seja $\mathcal{U}$ um aberto de J^kM.

<u>DEFINIÇÃO 1</u> - Um S.E.D.P. de ordem k, definido sobre $\mathcal{U}$ é um feixe ϕ de ideais de germes de funções diferenciáveis localmente de tipo finito sobre $\mathcal{U}$.

<u>DEFINIÇÃO 2</u> - Um jato integral de um S.E.D.P. ϕ definido sobre $\mathcal{U}$ é um jato $X \in \mathcal{U}$ tal que para toda função real F definida e diferenciável sobre uma vizinhança de X e pertencente a ϕ se tem $F(X) = 0$. Denotaremos $J\phi$ o conjunto dos jatos integrais de ϕ.

<u>DEFINIÇÃO 3</u> - Uma solução de ϕ é uma secção σ de $<M,N,\rho>$ definida sobre um aberto U de $\alpha(\mathcal{U}) \subset N$ (α: $J^kM \longrightarrow N$: $\alpha(X) = x$ onde $X = J^k_x f$) tal que $J^k_x \sigma \in J\phi$, $\forall x \in U$.

Sejam $F_1,\ldots,F_s$ funções diferenciáveis de $\mathcal{U}$ em $\mathbb{R}$; seja ϕ o feixe de ideais de germes de funções diferenciáveis sobre $\mathcal{U}$ gerado por $F_1,\ldots,F_s$. Portanto ϕ é S.E.D.P.

Se tomarmos coordenadas locais

$$(X^1,\ldots,X^n,Y^1,\ldots,Y^m,\ldots,P^i_{I_\ell}\ldots)$$

então uma secção f de $<M,N,\rho>$ é uma solução de ϕ se e somen te se

$$F_\alpha(X^1,\ldots X^n), f^1(X^1,\ldots X^n),\ldots f^m(X^1,\ldots X^n),\ldots \frac{\partial^\ell \partial^j}{\partial X^{i_1}\ldots\partial X^{i_\ell}}(X^1,\ldots X^n),\ldots) = 0$$

para todo $X \in Dom(f)$ e todo $\alpha = 1,\ldots,s$.

Donde, mais uma vez, a relação entre a "definição" clássica de um S.E.D.P. e a definição do texto.

§-5 - PROLONGAMENTO DE UM S.E.D.P.

Consideremos uma variedade fibrada $\langle M,N,\rho\rangle$. Sejam $(U,X^1,\ldots,X^n)$ uma carta local de N e $\mathcal{U}$ um aberto de J^kM tal que $\alpha(\mathcal{U}) \subset U$.

DEFINIÇÃO 1 - Seja $F \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$; a derivada formal de F relativamente a X^i é a aplicação

$$\partial X^i_\# F : \left(\rho_k^{k+1}\right)^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}:$$

definida por

$$\partial^{X^i}_\# F(X) = \left(\frac{\partial}{\partial X^i} F(J^k_{\alpha(X)} f)_{\alpha(X)}\right.$$

onde $X = J^{k+1}_{\alpha(X)} f$.

Está claro que esta definição não depende da secção f que representa X.

LEMA 1 -

a) $\partial_{\#}^{X^i}(F_1+F_2) = \partial_{\#}^{X^i} F_1 + \partial_{\#}^{X^i} F_2$

b) $\partial_{\#}^{X^i}(F_1F_2) = F_1\partial_{\#}^{X^i} F_2 + F_2\partial_{\#}^{X^i}F_1$

DEMONSTRAÇÃO - $F_1 + F_2 \in F(U)$

$$\partial^{X^i}(F_1+F_2)(X) = \left(\frac{\partial}{\partial X_i}(F_1+F_2)(J_x^k f))\right)_{\alpha(X)}$$

onde $X = J_{\alpha(X)}^{k+1} f$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial X_i}(F_1(J_x^k f)+F_2(J_x^k f))\right)_{\alpha(X)} = \left(\frac{\partial}{\partial X_i}F_1(J_x^k f)\right)_{\alpha(X)} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial X_i}(F_2(J_x^k f))\right)_{\alpha(X)} = \partial_{\#}^{X^i}F_1(X) + \partial_{\#}^{X^i}F_2(X).$$

b) $\partial_{\#}^{X^i}(F_1F_2)(X) = \left(\frac{\partial}{\partial X^i}(F_1F_2)(J_x^k f)\right)_{\alpha(X)} = \left(\frac{\partial}{\partial X^i}(F_1(J_x^k f)F_2(J_x^k f))\right)_{\alpha(X)} =$

$$= \left(F_1(J_X^k f)\frac{\partial}{\partial X^i}(F_2(J_X^k f) + F_2(J_X^k f)\frac{\partial}{\partial X^i}F_1(J_X^k f))\right)_{\alpha(X)} =$$

$$= F_1(X)\left(\partial_{\#}^{X^i} F_2\right)(X) + F_2(X)\left(\partial_{\#}^{X^i} F_1\right)(X).$$

OBSERVAÇÃO - Comportamento relativamente a mudança de cartas

Seja $(\bar{X}^1,\ldots,\bar{X}^n)$ um outro sistema de coordenadas locais sobre U.

Seja $\frac{\partial \bar{X}^j}{\partial X^i} = a_{ij}$ a matriz de mudança de coordenadas

$$\therefore \frac{\partial}{\partial X^i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial \bar{X}^j}$$

$$\therefore \partial_{\#}^{X^i} F = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \partial_{\#}^{\bar{X}^j} F.$$

Agora façamos um pequeno parêntesis:

Vamos supor por um momento, que quizessemos resolver, por exemplo, um S.E.D.P. de ordem 2

$$\begin{cases} F_1(X, Y, Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}) = 0 \\ \\ F_2(X, Y, Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}) = 0 \end{cases}$$

Uma prática clássica heurística, corriqueira, é tentarmos resolver um outro sistema, obtido do anterior derivando. Isto é tentarmos resolver o sistema abaixo o qual denominaremos de prolongado do sistema dado.

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial X}(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial Y}(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial X}(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial Y}(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \end{cases}$$

Vamos dar um exemplo da praticabilidade do método acima.

Seja a seguinte questão:

Quais são os difeomorfismos locais do $\mathbb{R}^2$ cuja diferencial é uma isometria em cada ponto?

$$f: U\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2: \langle df_p h, df_p h\rangle = \langle h,h\rangle,\ \forall p\in U,\ \forall h\in\mathbb{R}^2.$$

Tal questão nos leva imediatamente ao seguinte S.E.D.P.

$$\phi \begin{cases} \left(\dfrac{\partial f^1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f^2}{\partial X_1}\right)^2 = 1 \\ \dfrac{\partial f^1}{\partial X_1}\cdot\dfrac{\partial f^1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial f^2}{\partial X_2}\cdot\dfrac{\partial f^2}{\partial X_2} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial f^1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f^2}{\partial X_2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Se considerarmos o "prolongamento" do sistema acima obteremos o seguinte sistema

$$
p\phi \begin{cases}
\dfrac{\partial X^1}{\partial X_1}\cdot\dfrac{\partial^2 f^1}{\partial X_1 \partial X_1} + \dfrac{\partial f^2}{\partial X_1}\cdot\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial X_1 \partial X_1} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial f^1}{\partial X_1}\cdot\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial X_2 \partial X_1} + \dfrac{\partial f^2}{\partial X_1}\cdot\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial X_2 \partial X_1} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 f^1}{\partial X_1 \partial X_1}\cdot\dfrac{\partial f^1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial f^1}{\partial X_1}\cdot\dfrac{\partial^2 f^1}{\partial X_1 \partial X_2} + \dfrac{\partial^2 f^2}{\partial X_1 \partial X_1}\cdot\dfrac{\partial f^2}{\partial X_2} + \dfrac{\partial f^2}{\partial}\cdot\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial X_1 \partial X_2} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 f^1}{\partial X_2 \partial X_1}\cdot\dfrac{\partial f^1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial f^1}{\partial X_1}\cdot\dfrac{\partial^2 f^1}{\partial X_2 \partial X_2} + \dfrac{\partial^2 f^2}{\partial X_2 \partial X_1}\cdot\dfrac{\partial f^2}{\partial X_2} + \dfrac{\partial f^2}{\partial X_1}\cdot\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial X_2 \partial X_2} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial f^1}{\partial X_2}\cdot\dfrac{\partial f^1}{\partial X_1 \partial X_2} + \dfrac{\partial f^2}{\partial X_2}\cdot\dfrac{\partial f^2}{\partial X_1 \partial X_2} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial f^1}{\partial X_2}\cdot\dfrac{\partial^2 f^1}{\partial X_2 \partial X_2} + \dfrac{\partial f^2}{\partial X_2}\cdot\dfrac{\partial^2 f^2}{\partial X_2 \partial X_2} = 0
\end{cases}
$$

O que nos leva a concluir que

$$\frac{\partial^2 f^1}{\partial X_1 \partial X_1} = \frac{\partial^2 f^1}{\partial X_2 \partial X_2} = \frac{\partial^2 f^2}{\partial X_1 \partial X_1} = \frac{\partial^2 f^2}{\partial X_2 \partial X_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f^1}{\partial X^1 \partial X^2} = - \frac{\partial^2 f^1}{\partial X^2 \partial X_1}; \quad \frac{\partial^2 f^2}{\partial X^1 \partial X^2} = - \frac{\partial^2 f^2}{\partial X^2 \partial X^1}$$

Mas como sabemos, pelo teorema de Shwarz que

$$\frac{\partial^2 f^1}{\partial X^1 \partial X^2} = - \frac{\partial^2 f^1}{\partial X^2 \partial X^1}; \quad \frac{\partial^2 f^2}{\partial X^1 \partial X^2} = - \frac{\partial^2 f^2}{\partial X^2 \partial X^1}$$

Concluímos que f é a restrição de uma isometria afim do $\mathbb{R}^2$.

- 0 -

Tais considerações justificam a definição de derivada formal, dada no início, assim como motivaram a seguinte definição formal de prolongamento de um S.E.P.

Seja ϕ um S.E.D.P. definido sobre um aberto $\mathcal{U} \subset J^k M$. Consideremos $F_1, \ldots, F_s$ um sistema de geradores locais definidos num aberto $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que $\alpha(\mathcal{U}')$ esteja contido num domínio U de uma carta $(U, X^1, \ldots, X^n)$ de N.

Para cada $X \in \left(\rho_k^{k+1}\right)^{-1}(\mathcal{U}')$ denotamos do ψ_X o ideal de F_X gerado por $\left(F_\alpha \circ \rho_k^{k+1}\right)_X, \left(\partial_{\#}^{X^i} F_\alpha\right)_X$ para $\alpha = 1, \ldots, s$; $i = 1, \ldots, n$.

Do que foi visto antes, ψ_X não depende dos geradores locais $F_1, \ldots, F_s$, nem das coordenadas locais $X^1, \ldots, X^n$.

Denotaremos por $p\phi$ a família ψ_X: $X \in \left(\rho_k^{k+1}\right)^{-1}(\mathcal{U}')$.

É imediato que $p\phi$ é um S.E.D.P. de ordem k+1 definido sobre o aberto $\left(\rho_k^{k+1}\right)^{-1}(\mathcal{U}') \subset J_M^{k+1}$.

DEFINIÇÃO 2 - O objeto $p\phi$ acima construído denomina-se prolongamento de ϕ.

OBSERVAÇÃO - Por recorrência definimos $p^{\ell}\phi = P(p^{\ell-1}\phi)$ quando $\ell \geq 2$.

E agora a propriedade que esperaríamos que fosse válida.

PROPOSIÇÃO 1 - Uma secção f de $\langle M,N,\rho\rangle$ é uma solução de ϕ se e somente se é uma solução de $p\phi$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja f secção de $\langle M,N,\rho\rangle$ com f sendo solução de ϕ

$\therefore$ $f: V\subset N \longrightarrow M$ onde V é um aberto de N contido em

$$\alpha(U) \text{ tal que } J^k_x f \in J^k\phi,\ \forall x\in V$$

onde $J^k\phi$ é o conjunto dos jatos integrais de ϕ.

$J^k\phi = \{X\in U$: $\forall F$ definida numa vizinhança de X e pertencente ao feixe ϕ se tem que $F(X) = 0\}$.

$$\text{Seja } f\in\phi \therefore F(J^k_x f) = 0 \therefore \partial^{X^i}_{\#} F(J^{k+1}_x f) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial X^i} F(J^k_x f)\right)_X = 0,\ \forall i=1,\dots,n.$$

Como $p\phi$ é gerado pelas funções $F\circ\rho^{k+1}_k$, $\partial^{X^i}_{\#}F$ quando F percorre ϕ e $i=1,\dots,n$, segue que f é solução de $p\phi$.

Reciprocamente como $\phi\subset p\phi$ é imediato que toda solução de $p\phi$ é solução de ϕ.

$\therefore$ Considerações sobre $p\phi$ poderá nos dar critérios de existência de solução para ϕ.

§-6 - IDENTIFICAÇÃO FUNDAMENTAL

Neste parágrafo, nos tornaremos algo técnico. Introduziremos uma maquinaria algébrica que nos permitirá, mais adiante tratar dos sistemas de equações a derivadas parciais, completamente integráveis. Esta álgebra está ligada a idéia do prolongamento, isto é, "derivar" o sistema.

Introduziremos um prolongamento algébrico e estabeleceremos a conexão entre este novo prolongamento e o prolongamento definido anteriormente. Tal conexão, que poderíamos denominar algébrico-geométrico, será feita por intermédio de uma identificação, por isso mesmo, denominada Identificação Fundamental, entre espaços vetoriais.

Seremos levados também, a construção de um espaço vetorial, no texto denotado por $C_X(\phi)$, que jogará um relevante papel de "controle" de um S.E.D.P.

Consideremos as variedades fibradas

$$\langle M,N,\rho\rangle;\ \langle J^kM, J^{k-1}M, \rho^k_{k-1}\rangle.$$

Seja $X_0 \in J^kM$; denotemos $T_{X_0}J^kM$ o espaço tangente a

J^kM no ponto X_0.

Seja $A^k_{X_0} = (\rho^k_{k-1})^{-1}(\rho^k_{k-1}(X_0))$ a fibra de

$$<J^kM, J^{k-1}M, \rho^k_{k-1}>$$

sobre o ponto X_0 e denotemos $Q^k_{X_0} = T_{X_0}A^k_{X_0}$.

Denotaremos $T_{X_0}J^\ell M$ para $\ell \geq k$ em lugar de $T_YJ^\ell M$ onde $y = \rho^k_\ell(X_0)$. Em particular $T_{X_0}J^0M = T_{\beta(X_0)}M$.

Denotaremos também M_X em vez de $M_{\alpha(X)}$, e se $a\in N$; T_a o espaço tangente a N no ponto a e por T^*_a seu dual.

Se $0 \leq \ell \leq k$ denotaremos $Q^\ell_{X_0}$ o espaço tangente a fibra $(\rho^\ell_{\ell-1})^{-1}(\rho^\ell_{\ell-1}(\rho^k_\ell(X_0)))$ da variedade fibrada

$$<J^\ell M, J^{\ell-1}, \rho^\ell_{\ell-1}>.$$

O nosso objetivo é definir uma injeção canônica τ de $Q^k_{X_0}$ em $T^*_a \otimes Q^{k-1}_{X_0}$ onde $a = \alpha(X_0)$.

PROPOSIÇÃO 1 - Se $k \geq 1$ a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow Q^k_{X_0} \longrightarrow T_{X_0}J^kM \xrightarrow{(d\rho^k_{k-1})_{X_0}} T_{X_0}J^{k-1}M \longrightarrow 0.$$

DEMONSTRAÇÃO - Trivial.

Seja $X \in A^k_{X_0}$ e $f: V \subset N \longrightarrow M$ uma secção local de $<M,N,\rho>$ tal que $a\in V$ e $X = J^k_af$.

Consideremos a aplicação $J^{k-1}f: V \longrightarrow J^{k-1}M$ tal que $J^{k-1}f(x) = J^{k-1}_xf$. Então

$$(dJ^{k-1}f)_a\colon T_a \longrightarrow T_{X_0}J^{k-1}M.$$

Em coordenadas locais temos:

Se $(X^1,\dots,X^n,Y^{n+1},\dots,Y^m,\dots,P^j_{I^\ell},\dots)$ é uma carta local de $J^{k-1}M$, definida numa vizinhança de

$$X' = \rho^k_{k-1}(X_0) = \rho^k_{k-1}(X)$$

a aplicação $J^{k-1}f$ é representada por:

$$X \longrightarrow (X^1,\dots,X^n,f^{n+1}(X^1,\dots X^n),\dots,f^m(X^1,\dots,X^n),\dots,\frac{\partial^\ell f^j(X^1,\dots X^n)}{\partial X^{i_1}\dots\partial X^{i_\ell}},\dots)$$

e sua diferencial em a por

$$(dJ^{k-1}f)_a\left(\frac{\partial}{\partial X^i}\bigg|_a\right) = \left(\frac{\partial}{\partial X^i}\right)_{X'} + \sum_{j=n+1}^{m}\left(\frac{\partial f^j}{\partial X^i}\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial Y^j}\right)_{X'} +$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{m}\sum_{I^\ell}{}' \left(\frac{\partial^{\ell+1} f^j}{\partial X^{i_1}\dots\partial X^{i_\ell}\cdot\partial X^i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial P^j_{I^\ell}}\right)_{X'}$$

onde $\sum'_{I^\ell}$ significa soma relativamente a todos

$$I^\ell = (i_1,\dots,i_\ell) \text{ tal que } 0 \le i_1 \le \dots \le i_\ell \le n \text{ e } 1 \le \ell \le k-1.$$

Portanto, está verificado que $(dJ^{k-1}f)_a$ não depende da secção f tal que $J^k_a f = X$.

Denotaremos $dX = d(J^{k-1}f)_a$

$$\therefore \; X \in A^k_{X_0} \longrightarrow dX \in T^*_a \otimes T_{X_0} J^{k-1} M.$$

Observemos que

$$(dX - dX_0)\left(\frac{\partial}{\partial X^i}\right)_a = \sum_{j=n+1}^{m} \sum_{I^{k-1}}{}' \, [P^j_{I^{k-1},i}(X) - P^j_{I^{k+1},i}(X_0)] \left(\frac{\partial}{\partial P^j_{I^{k-1}}}\right)_{X'}$$

$$\therefore \; dX - dX_0 \in T^*_a \otimes Q^{k-1}_{X_0}.$$

Assim definimos uma aplicação diferenciável

$$\lambda : A^k_{X_0} \longrightarrow T^*_a \otimes Q^{k-1}_{X_0} : \lambda(X) = dX - dX_0.$$

Seja

$$\tau = (d\lambda)_{X_0} : Q^k_{X_0} \longrightarrow T^*_a \otimes Q^{k-1}_{X_0}.$$

Em coordenadas locais temos

$$\lambda(\ldots, P^i_{I^k}(X), \ldots) = \sum_{j=n+1}^{m} \sum_{I^{k-1}}{}' \, P^j_{I^{k-1},i}(X) - P^j_{I^{k-1},i}(X_0) \left(\frac{\partial}{\partial P^j_{I^{k-1}}}\right)_{X'}$$

$$\therefore \; \tau\left(\frac{\partial}{\partial P^j_{I^k}}\right)_{X_0}\left(\frac{\partial}{\partial X^i}\right) = \begin{cases} 0 \text{ se } i \notin I^k \\ \\ \left(\frac{\partial}{\partial P^j_{I^{k-1}}}\right)_{X'} \text{ se } i \in I^k \wedge I^{k-1},_i = I^k \end{cases}$$

Donde concluímos:

$$\tau\left(\frac{\partial}{\partial P^j_{I^k}}\right)_{X_0} = \sum_{i=1}^{n} (dX^i)_a \otimes \left(\frac{\partial}{\partial P^j_{I^{k-1}}}\right)_{X'}.$$

Portanto temos a seguinte

PROPOSIÇÃO 2 - $\tau: Q^k_{X_0} \to T^*_a \otimes Q^{k-1}_{X_0}$ $(k \geq 1)$ acima definida é injetora.

DEFINIÇÃO 1 - A aplicação linear, $\tau: Q^k_{X_0} \to T^*_a \otimes Q^{k-1}_{X_0}$ $(k \geq 1)$ é denominada identificação fundamental.

Iterando o processo acima descrito nós podemos obter uma sequência de identificação

$$Q^k_{X_0} \to T^*_a \otimes Q^{k-1}_{X_0} \to \dots \to \otimes^{\ell} T^*_a \otimes Q^k_{X_0} \to \dots \to \otimes^k T^*_a \otimes Q^0_{X_0}.$$

Onde $\otimes^{\ell} T^*_a$ denota ℓ-cópias tensoriais de T^*_a.

Cada uma dessas identificações será denominada identificação fundamental e não havendo possibilidade de confusão será denotado por τ.

Se ℓ é um inteiro positivo ≥ 1, denotaremos $S^{\ell}T^*_a$, o produto simétrico de ℓ-cópias de T^*_a, isto é, o conjunto das formas ℓ-lineares simétricas sobre T^*_a. Denotaremos a operação produto simétrico por $\odot$.

PROPOSIÇÃO 3 - A imagem de $Q^k_{X_0}$ pela identificação fundamental está contida em $S^{\ell}T^*_a \otimes Q^{k-\ell}_{X_0}$ $(k \geq 1,\ k \geq \ell)$. Se $\ell = k$ a identificação fundamental é um isomorfismo de $Q^k_{X_0}$ em $S^k T^*_a \otimes T_{X_0} M_{X_0}$.

DEMONSTRAÇÃO - Tomemos então a forma

$$\tau(v) \text{ quando } v = \sum_{I^k}{}' \xi'_{I^k} \left(\frac{\partial}{\partial P^j_{I^k}}\right)_{X_0}$$

$$\therefore\ \tau(v) = \sum_{I^{k-\ell}} \xi^j_{I^{k-\ell}, i_1, \ldots, i_\ell} (dX_{i_1})_a \otimes \ldots \otimes (dX_{i_\ell})_a \otimes \left(\frac{\partial}{\partial P^j_{I^{k-\ell}}}\right)_{\rho^k_\ell(X)}.$$

A primeira afirmação segue então do fato que

$\xi^j_{I^{K-\ell}, i_1, \ldots, i_\ell}$ é simétrico relativamente a $i_1, \ldots, i_\ell$.

Logo podemos identificar $\tau(v)$ a

$$\sum_{I^{k-\ell}}{}' \xi^j_{I^{k-\ell}, i_1, \ldots, i_\ell} [(dX_{i_1})_a \otimes \ldots \otimes (dX_{i_\ell})_a] \otimes \left(\frac{\partial}{\partial P^j_{I^{k-\ell}}}\right)_{\rho^k_\ell(X)}$$

Para $\ell = k$ se tem então

$$\tau(v) = \xi^j_{i_1 \ldots i_k} [(dX^{i_1})_a \otimes \ldots \otimes (dX^{i_k})_a] \left(\frac{\partial}{\partial Y^j}\right)_a$$

de onde segue a segunda afirmação.

CASOS PARTICULARES:

I) Seja $\langle E, M, \rho \rangle$ um fibrado vetorial e seja $X \in J^k E$.

Sabemos que a seguinte sequência é exata:

$$0 \longrightarrow Q_X^k \longrightarrow T_X J^k M \xrightarrow{(d\rho_{k-1}^k)_X} T_X J^{k-1} M \longrightarrow 0.$$

Denotemos $a = \alpha(X)$; então a sequência ("induzidas nas fibras")

$$0 \longrightarrow Q_X^k \longrightarrow T_X J_a^k M \longrightarrow T_X J_a^{k-1} M \longrightarrow 0$$

é exata.

Com efeito, isto resulta da comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Q_X^k \arrow[r] \arrow[dr] & T_X J_a^k M \arrow[r, "(d\rho_{k-1}^k)_X"] \arrow[d] & T_X J_a^{k-1} M \arrow[d] \\
 & T_X J^k M \arrow[r, "(d\rho_{k-1}^k)_X"] & T_X J^{k-1} M
\end{tikzcd}$$

Consideremos o caso que $X = 0$ (elemento neutro de $J_a^k E$). Em tal caso, denotaremos A^k em vez de A_X^k. Podemos então identificar canonicamente:

$$T_X J_a^k E \simeq J_a^k E;\; Q_X^k \simeq A^k;\; T_X E \simeq E_a.$$

A identificação fundamental fornece:

$$A^k \longrightarrow T_a^* \otimes A^{k-1}$$

e por outro lado, temos um isomorfismo

$$A^k \longrightarrow S^k(T_a^*)\otimes E_a.$$

Temos então a sequência exata de fibrados vetoriais

$$0 \longrightarrow S^k(T^*)\otimes E \longrightarrow J^k E \longrightarrow J^{k-1}E \longrightarrow 0.$$

II) Suponhamos $k=1$ e seja $X \in J^1 M$.

Denotemos $a=\alpha(X)$ e $X=J_a^1 f$, onde f é uma secção de $<M,N,\rho>$, definida numa vizinhança de a, $\tilde{X}=df_a$

$$\therefore\ \tilde{X}\colon T_a \longrightarrow T_{f(a)}.$$

Por outro lado $\rho\circ f = 1_V \longrightarrow d\rho_{f(a)}\circ df_a = 1_{T_a}$.

Denotemos $b=f(a)$.

Seja $Y \in J'M$ tal que $\rho_0^1(X)=\rho_0^1(Y)$

$$\therefore\ \tilde{Y}-\tilde{X} \in T_a^*\otimes T_b M_a.$$

Portanto a todo par $(X,Y)\in J'M\times J'M$ tal que $\rho_0^1(X) = \rho_0^1(Y)$ associamos $\tilde{Y}-\tilde{X}\in T_a^*\otimes T_b M_a$.

Inversamente, seja $X\in J^1M$, $a=\alpha(X)$ e $b=\beta(X)$. Seja $S\in T_a^*\otimes T_b M_a$. Consideremos a aplicação

$$\tilde{X}+S\colon T_a \longrightarrow T_b M_a;$$

Se tem que $(d\rho)_b(\tilde{X}+S)=1_{T_a}$ logo existe $Y\in J'M$ e é único; tal que $\tilde{Y}=\tilde{X}+S$, com $\alpha(Y)=a$, $\beta(Y)=b$.

Resulta dessas considerações que A_X^1 está canonicamente munido duma estrutura afim sobre $T_a^* \otimes T_b M_a$.

§-7 - SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES A DERIVADAS PARCIAIS

Sejam $\langle E,N,\rho\rangle$ um fibrado vetorial, $\mathcal{U}$ um aberto de $J^k E$ e $F \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.

DEFINIÇÃO 1 - Dizemos que F é linear se para todo $X \in \mathcal{U}$ a restrição de F a fibra $J^k_{\alpha(X)}E$ é linear.

DEFINIÇÃO 2 - Seja ϕ um S.E.D.P. definido sobre $\mathcal{U}$, dizemos que ϕ é um sistema linear se cada secção de ϕ é linear.

Dessas definições e do que procede temos imediatamente a seguinte

PROPOSIÇÃO 1 - ϕ é um S.E.D.P. linear $\longrightarrow$ seu prolongamento $p\phi$ é também linear.

OBSERVAÇÃO - É fácil ver que a definição acima engloba o que "entendemos" classicamente por um S.E.D.P. linear.

§-8 - O ESPAÇO VETORIAL $C_X(\phi)$

Sejam $\langle M,N,\rho\rangle$ uma variedade fibrada, $\mathcal{U} \subset J^k M$ um aberto e ϕ um S.E.D.P.

DEFINIÇÃO 1 - $X \in J^k M \longrightarrow C_X(\phi) = \{v \in Q^k_X \mid vF = 0,\ \forall F \in \phi\}$. Imediatamente temos:

PROPOSIÇÃO 1 - $C_X(\phi)$ é um subespaço vetorial de Q^k_X.

OBSERVAÇÃO 1 - Se $v \in C_X(\phi)$ e $F \in \phi$ então vF não depende se não que dos termos de ordem $\geq k$ de F.

Em coordenadas locais:

Sejam (x,y,p) coordenadas locais numa vizinhança de X em $\mathcal{U}$.

Se $v \in Q_X^k$ então v se escreve como:

$$v = \sum_{I^k}{}' \xi^j_{I^k} \left(\frac{\partial}{\partial p^j_{I^k}}\right)_X .$$

Logo, se $v \in C_X(\phi)$ e $F \in \phi$ temos:

$$vF = \sum_{I^k}{}' \xi^j_{I^k} \left(\frac{\partial F}{\partial p^j_{I^k}}\right)(X) = 0.$$

OBSERVAÇÃO 2 - É claro que estamos tomando como definição de espaço tangente a uma variedade, o conjunto das derivações, [ver 5], e relembramos que Q_X^k é o espaço tangente a variedade de A_X^k, como vimos no parágrafo 6.

PROPOSIÇÃO 2 - Sejam $F_1,\dots,F_p$ um sistema de geradores locais de ϕ, definido numa vizinhança de $X \in J\phi$. Então dizer que $v \in C_X(\phi)$ é equivalente a dizer que $vF_s = 0$ para $s=1\dots p$.

DEMONSTRAÇÃO - É evidente que se $v \in C_X(\phi)$ então $vF_s = 0$; para $s=1\dots p$. Reciprocamente, seja H uma função numérica diferenciável, definida numa vizinhança de X.

Sabemos que:

$$v(HF_s) = H(X)v(F_s) + F_s(X)v(H)$$

(propriedade das derivações [ver 5]).

Como $v(F_s)=0$ e $F_s(X)=0$ segue que $v(HF_s)=0$ para todo $s=1...p$.

Como $F_1,...,F_p$ é um sistema de geradores para ϕ. Temos que $\forall F\in\phi$ $v(F)=0$ $\therefore$ $v\in C_X(\phi)$. □

PROPOSIÇÃO 3 - Se $X\in J\phi$ então existe uma vizinhança W de X em $J\phi$ tal que

$$\dim C_{X'}(\phi) \leq \dim C_X(\phi) \text{ para todo } X'\in W.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja r o posto da matriz

$$\left[\left(\frac{\partial F_s}{\partial P^J_{I^k}}\right)_X\right],$$

onde $F_1,...,F_p$ é um sistema de geradores de ϕ numa vizinhança de X.

Por continuidade da função determinante, existe uma vizinhança W' de X tal que para todo $X'\in W'$ se tem que posto de

$$\left[\left(\frac{\partial F_s}{\partial P^J_{I^k}}\right)_{X'}\right] \geq r.$$

Seja $W=W'\cap J\phi$.

Então é claro que $X' \in W \longrightarrow \dim C_{X'}(\phi) \leq \dim C_X(\phi)$.

PROPOSIÇÃO 4 - Seja $X \in J\phi$ e denotemos por B_X o conjunto dos jatos integrais $\tilde{X}$ de $p\phi$ que se projetam sobre X, isto é,

$$\rho_k^{k+1}(\tilde{X}) = X.$$

Se $B_X \neq \phi$ (ϕ conjunto vazio), então B_X é uma sub-variedade de $J^{k+1}M$, difeomorfa a um espaço euclidiano cuja dimensão é igual a de $C_{\tilde{X}}(p\phi)$

DEMONSTRAÇÃO - Será deixada a cargo do leitor. [Ver 1].

§-9 - UMA DEFINIÇÃO ALGÉBRICA DE PROLONGAMENTO

DEFINIÇÃO 1 - Sejam E,V,W três espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo K e seja j uma injeção de E em $V^* \otimes W$.

Um prolongamento de $\langle E, J, V^* \otimes W \rangle$ é uma tripla $\langle E', j_2, j_3 \rangle$ onde E' é um espaço vetorial sobre K, j_2 é uma injeção de E' em $V^* \otimes E$ e j_3 uma injeção de E' em $S^2(V^*) \otimes W$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "j_3"] \arrow[d, "j_3"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V^* \otimes E \arrow[d, "1_{V^*} \otimes j"] \\
S^2(V^*) \otimes W \arrow[r, "i"] & \overset{2}{\otimes} V^* \otimes W
\end{tikzcd}$$

onde i é a injeção canônica, comute e que

$$[(1_{V^*}\otimes j)\circ j_2)] = [(1_{V^*}\otimes j)(V^*\otimes E)]\cap i(S^2(V^*)\otimes W)$$

OBSERVAÇÃO - Introduzimos a noção abstrata acima, porque em seguida estabeleceremos uma conexão entre ela e a noção de prolongamento de S.E.D.P. introduzida anteriormente.

Tal conexão passará a ter tremenda importância do ponto de vista prático, isto é, "calcular coisas".

Além do mais no capítulo III daremos uma outra definição de prolongamento de espaço vetorial, que não é senão que uma interpretação num caso concreto, no qual estaremos especialmente interessados, da situação acima.

Acreditamos que sem as noções acima, a aludida definição do capítulo III seria não natural e por assim dizer, mágica.

Finalmente observamos que no estabelecimento da dita conexão, jogará papel fundamental a "Identificação Fundamental".

PROPOSIÇÃO 1 - (Unicidade) - Se $\langle F', j_2', j_3'\rangle$ e $\langle E', j_2, j_3\rangle$ são prolongamentos de $\langle E, j, V^*\otimes W\rangle$ então existe um isomorfismo de espaço vetorial, $h: F' \longrightarrow E'$ tal que os seguintes diagramas são comutativos.

$$
\begin{tikzcd}
F' \arrow[rr] \arrow[dr, "j_2'"'] & & E' \arrow[dl, "j_2"] \\
& V^*\otimes F &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F' \arrow[rr] \arrow[dr, "j_3'"'] & & E' \arrow[dl, "j_3"] \\
& S^2(V^*)\otimes W &
\end{tikzcd}
$$

A demonstração será deixada a cargo do leitor.

Esta proposição exprime a unicidade do prolongamento módulo isomorfismo.

PROPOSIÇÃO 2 - Sejam E,V,W,j como na definição 1. Existe o prolongamento de $<E,j,V^*\otimes W>$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja E' o subespaço

$$[(1_{V^*}\ j)(V^*\otimes E)]\cap i S^2(V^*)\otimes W) \quad \text{de} \quad \overset{2}{\otimes} V^*\otimes W.$$

Sejam j_2 e j_3 as injeções de E' em $V^*\otimes E$ e em $S^2(V^*)\otimes W$ respectivamente, definidas por:

$$(1_{V^*}\otimes j)\circ j_2 = 1_{E'} \quad e \quad i\circ j_3 = 1_{E'}.$$

Portanto $<E',j_2,j_3>$ é um prolongamento de $<E,j,V^*\otimes W>$.

Denotaremos por pE o prolongamento de $<E,j,V^*\otimes W>$. Se identificarmos:

$$E \simeq j(E);\ V^*\otimes E \simeq (1_{V^*}\otimes j)(V^*\otimes E)\subset \overset{2}{\otimes} V^*\otimes W$$

$$S^2(V^*)\otimes W \simeq i(S^2(V^*)\otimes W \subset \overset{2}{\otimes} V^*\otimes W.$$

então $pE = (V^*\otimes E)\cap(S^2(V^*)\otimes W)$.

O prolongamento pE é assim identificado a um subespaço de $V^*\otimes E$. (Será dessa forma que daremos a definição no capítulo III).

Se j^1 é a injeção canônica de pE em $V^*\otimes E$, denotaremos p^2E o prolongamento de $\langle pE, j^1, V^*\otimes E\rangle$ e por recorrência define-se p^kE, $k \geq 0$ por

DEFINIÇÃO 2 - $p^0E = E$ e $p^k = p(p^{k-1}E)$

$$\therefore\ k \geq 1 \rightarrow p^kE = (V^*\otimes p^{k-1}E) \cap (S^2(V^*)\otimes p^{k-2}E)$$

onde $p^{-1}E \underset{\text{def}}{=} W$.

PROPOSIÇÃO 3 - Se $k \geq 1$ se tem que

$$p^kE = (S^{k+1}(V^*)\otimes W) \cap \overset{k}{\otimes} V^*\otimes E.$$

(Obs. - $S^k(V)$, V espaço vetorial, denota a k-ésima potência simétrica).

DEMONSTRAÇÃO - Será deixada a cargo do leitor.

Podemos agora enunciar

TEOREMA - (conexão entre as definições de prolongamento).

Seja $X \in J\phi$ e seja $\tilde{X} \in J(p\phi)$ tal que $\rho_k^{k+1}(\tilde{X}) = X$.

Então:

$$C_{\tilde{X}}(P\phi) = T_X^*\otimes C_X(\phi)) \cap (S^2(T_X^*)\otimes Q_X^{k-1})$$

onde $x = \alpha(X)$.

Ou dito de outro modo; tendo em conta as noções acima:

O espaço vetorial $C_{\bar{X}}(p\phi)$ é o prolongamento de

$$<C_X(\phi), \tau, T^*_X \otimes Q^{k-1}_X>$$

onde τ é a identificação fundamental restrita a $C_X(\phi)$.

DEMONSTRAÇÃO - Denotemos por τ^2 a identificação fundamental de Q^{k+1}_X em $S^2(T^*_X)\otimes Q^{k-1}_X$ e por j_3 sua restrição a $C_{\bar{X}}(p\phi)$. Construímos agora uma injeção

$$j_2 : C_{\bar{X}}(p\phi) \longrightarrow T^*_x \times C_X \phi.$$

Para tanto, seja $F_1, \ldots, F_p$ um sistema de geradores de ϕ em uma vizinhança de X.

∴ Temos:

$$\partial^i_{\#} F = \frac{\partial F_s}{\partial X_i} + \sum_j \frac{\partial F_s}{\partial Y^j} p^j_{\{i\}} + \sum_{I^\ell}{}' \frac{\partial F_s}{\partial P^j_{I^\ell}} . p^j_{I^\ell, i}$$

logo $$\frac{\partial}{\partial P^j_{I^{k+1}}}(\partial^i_{\#} F_s) = \begin{cases} 0 \text{ se } i \notin I^{k+1} \\ \dfrac{\partial F_s}{\partial p^j_{I^k}} \text{ se } i \in I^{k+1} \text{ onde } I^k = I^{k+1} - \{i\} \end{cases}$$

Seja $v \in Q^{k+1}_{\bar{X}}$ ∴ $v = \sum_{I^{k+1}}{}' \xi^j_{I^{k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial p^j_{I^{k+1}}}\right)_{X'}$.

Observemos que (de acordo com a proposição 2 do parágrafo 8) $v \in C_{\tilde{X}}(p\phi) \leftrightarrow v(\partial^i_{\#} F_s) = 0$, $s=1,\ldots,p$.

Ora sabemos que a imagem de v em $T^*_x \otimes Q^k_X$ pela identificação fundamental é

$$\tau(v) = \sum_{I^k}{}' \xi^j_{I^k,i} (dX^i)_\alpha \otimes \left(\frac{\partial}{\partial p^j_{I^k}}\right)_X .$$

Logo se $v \in C_{\tilde{X}}(p\phi)$ então, de acordo com a observação acima,

$$v(\partial^i_{\#} F_s) = \sum_{I^k}{}' \xi^j_{I^k,i} \left(\frac{\partial F_s}{\partial p^j_{I^k}}\right) = 0; \; s=1,\ldots,p.$$

logo

$$\sum_{I^k}{}' \xi^j_{I^k,i} \left(\frac{\partial}{\partial p^j_{I^k}}\right) \in C_X(\phi)$$

e por consequência $\tau(v) \in T^*_x \otimes C_X(\phi)$. Tomemos então por j_2 a restrição a $C_{\tilde{X}}(p\phi)$ da identificação fundamental de $Q^{k+1}_{\tilde{X}}$ em $T^*_x \otimes Q^k_X$. Logo pela própria definição de j_2, j_3 temos que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C_{\tilde{X}}(p\phi) \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "j_3"] & T^*_x \otimes C_X(\phi) \arrow[d, "1_{V^*_x} \otimes \tau"] \\
S^2(T^*_x) \otimes Q^{k-1}_X \arrow[r, "i"] & \overset{2}{\otimes} T^*_x \otimes Q^{k-1}_X
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Portanto;

$$i\circ j_3((\tilde{X}(p\phi))\subset 1_{T^*_X}\otimes\tau(T^*_X\otimes C_X(\phi))\cap i(S^2(T^*_X)\otimes Q^{k-1}_X,$$

ou levando-se em conta as identificações feitas, após a proposição 2, mais acima,

$$C_{\tilde{X}}(p\phi)\subset(T^*_X\otimes C_X(\phi))\cap(S^2(T^*_X)\otimes Q^{k-1}_X.$$

Para inclusão contrária, seja

$$v\in 1_{T^*_X}\otimes\tau(T^*_X\otimes C_X(\phi))\cap i(S^2(T^*_X)\otimes Q^{k-1}_X)$$

$$\therefore\ v=\sum_{i_1}\sum_{i_2}\sum_{I^{k-1}}\xi^j_{I^{k-1},i_1,i_2}(dX^{i_1})_\alpha\otimes d(X^{i_2})_\alpha\otimes\left(\frac{\partial}{\partial p^j_{I^{k-1}}}\right)_{X'}$$

onde $X'=\rho^k_{k-1}(X)$ com $\xi^j_{I^{k-1},i_1,i_2}=\xi^j_{I^{k-1},i_2,i_1}$ e

$$\sum_{I^k}\eta^j_{I^k}\left(\frac{\partial}{\partial k^j_{I^k}}\right)_X\in C_X(\phi)$$

para todo i_1 tal que $\eta^j_{I^k}=\xi^j_{I^{k-1},i_2,i_1}$ onde I^{k+1} é a (b+1)-upla ordenada de N^{k+1} formada de i_1,i_2 e de elementos de I^{k-1}.

Consideremos o vetor tangente

$$U = \sum_{I^{k+1}}{}' \xi^j_{I^{k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial p^j_{I^{k+1}}}\right)\tilde{X}$$

de $Q^{k+1}_{\tilde{X}}$.

Portanto,

$$U(\partial^i_{\#} F_s) = \sum_{I^k}{}' \xi^j_{I^k} \left(\frac{\partial F_s}{\partial p^j_{I^k}}\right) = 0$$

posto que

$$\sum_{I^k}{}' \xi^j_{I^k,i} \left(\frac{\partial}{\partial p^j_{I^k}}\right) \in C_X(\phi).$$

Logo (a proposição 2, parágrafo 8) $U \in C_{\tilde{X}}(p\phi)$ e temos por construção mesmo que $i \circ j_3(U) = v$. [Ver 1 ou 3].

<u>OBSERVAÇÃO</u> - A demonstração acima, é algo complicada,mas poderíamos encará-la estritamente do ponto de vista de um problema algébrico, no sentido que, controlados todos os parâmetros, com um pouco mais ou menos de paciência,conseguimos fazer.

Por outro lado, não faremos uso dela, no que segue.

O resultado do teorema, como já ressaltamos, é extremamente importante, importância que é difícil explicitar, e que percebemos na "prática".

Esperamos que alguns aspectos dessa importância,fi que evidenciada no capítulo III.

Se me permitem a analogia, a conexão acima, seria algo similar a conexão entre a definição de derivada do cálculo e as regras de derivação.

- o -

CAPÍTULO II

SISTEMAS COMPLETAMENTE INTEGRÁVEIS

Neste capítulo, apresentaremos uma generalização do teorema clássico de Frobenius e em seguida uma aplicação desta generalização para demonstração de um teorema de existência de soluções de um S.E.D.P. completamente integrável.

§-1 - UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE FROBENIUS

TEOREMA 1 - Sejam $v_1, \ldots, v_a$ formas diferenciáveis de grau 1 sobre uma variedade $\mathcal{U}$ e sejam $G_1, \ldots, G_b$ funções reais, definidas e diferenciáveis sobre $\mathcal{U}$.

Seja U_0 um ponto de $\mathcal{U}$ tal que $G_1(U_0) = \ldots G_b(U_0) = 0$.

Se as seguintes condições estiverem verificadas:

1) $dv_1, \ldots, dv_a$, $dG_1, \ldots, dG_b$, pertencem ao ideal da álgebra exterior sobre $\mathcal{U}$ gerado por $v_1, \ldots, v_a$ e $G_1, \ldots, G_b$.

2) As formas v_σ; $\sigma=1...a$, são linearmente independentes em U_0.

Então existe um único germe de sub-variedade N_1, em U_0, de dimensão $n = \dim \mathcal{U} - a$, tal que as formas diferenciais bem como as funções induzidas sobre N_1 respectivamente pelos $v_1,...,v_a$, $G_1,...,G_b$ se anulam. Além do mais se $X_1,...,X_n$ são funções reais definidas numa vizinhança de U_0 tal que $v_1,...,v_a$, $dX_1,...,dX_n$ são linearmente independentes em U_0, então $X_1,...,X_n$ induzem coordenadas locais sobre N_1 numa vizinhança de U_0.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Será feita em três etapas.

(I) Seja $\langle V,w_1,...,w_a,X_1,...,X_n\rangle$ uma carta local de $\mathcal{U}$, numa vizinhança de U_0 tal que $v_1,...,v_a$, $dX_1,...,dX_n$ sejam linearmente independentes em U_0. Podemos supor $X_i(U_0)=0, i=1,...,n$.

Numa vizinhança de U_0 podemos escrever:

$$v_\alpha = \sum_\tau A_\alpha^\tau dW_\tau + \sum_i B_\sigma^i dX_i$$

onde A_σ^τ e B_σ^i são funções diferenciáveis numa vizinhança de U_0.

Agora, segundo a escolha dos X_i e a condição (a) a mátriz (A_σ^τ) é inversível numa vizinhança de U_0 logo substituindo v_σ por uma combinação linear de v_τ, tendo como coeficientes funções convenientes, podemos supor que v_σ se expri me:

$$(1.1) \qquad v_\sigma = dW_\sigma + \sum_i F^i_\sigma dX_i$$

Calculemos então dv_σ:

$$dv_\sigma = \sum_i dr^i_\sigma \wedge dX_i = \sum_i \left[\sum_\tau \frac{\partial F^i_\sigma}{\partial w_\tau} dw_\tau \wedge dX_i + \sum_j \frac{\partial F^i_\sigma}{\partial X_j} dX_j \wedge dX_i\right]$$

Mas $dw_\tau = v_\tau - \sum_j F^j_\tau dX_j$, portanto temos:

$$dv_\sigma = \sum_i \sum_\tau \frac{\partial F^i_\sigma}{\partial w_\tau} v_\tau \wedge dX_i + \sum_{i<j} \left[-\sum_\tau \left(\frac{\partial F^i_\sigma}{\partial w_\tau} F^j_\tau - \frac{\partial F^i_\sigma}{\partial w_\tau} F^i_\tau\right) + \frac{\partial F^i_\sigma}{\partial X_j} - \frac{\partial F^i_\sigma}{\partial X_i}\right] dX_i \wedge dX_j$$

Observe que $dX_i \wedge dX_j$ não pertence ao ideal gerado pelos v_σ, G_β, logo o $dX_i \wedge dX_j$ $(i<j)$ sendo independentes temos segundo (I).

$$(1.2) \qquad -\sum_\tau \frac{\partial F^i_\sigma}{\partial w_\tau} F^j_\tau + \sum_\tau \frac{\partial F^i_\sigma}{\partial w_\tau} F^i_\tau + \frac{\partial F^i_\sigma}{\partial X_j} - \frac{\partial F^i_\sigma}{\partial X_i} = \sum_\beta A^{ji\beta}_\sigma G_\beta$$

onde $A^{ij\beta}_\sigma$ são funções diferenciáveis.

Analogamente temos:

$$dG_\beta = \sum_\tau \frac{\partial G_\beta}{\partial w_\tau} v_\tau + \sum_i \left(-\sum_\tau \frac{\partial G_\beta}{\partial w_\tau} F^i_\tau + \frac{\partial G_\beta}{\partial X_i}\right) dX_i$$

e

$$(1.3) \qquad -\sum_\tau \frac{\partial G_\beta}{\partial w_\tau} F^i_\tau + \frac{\partial G_\beta}{\partial X_i} = \sum_j B^{ij}_\beta G_j .$$

(II) - Unicidade de N_1

Suponha que exista uma sub-variedade N_1 de dimensão n, de $\mathcal{U}$, contendo U_0 e satisfazendo as condições do enunciado. Existem funções numéricas $X_1,\ldots,X_n$, definidas numa vizinhança de U_0 tais que $v_1,\ldots,v_a,dX_1,\ldots,dX_n$ formam base de $T^*_{U_0}\mathcal{U}$. De acordo com as condições impostas a N_1 e argumentos de dimensão, $dX_1,\ldots,dX_n$ formam uma base $T^*_{U_0}(N_1)$ e por consequência os X_i induzem coordenadas locais em N_1 numa vizinhança de U_0, logo a última afirmação do teorema está demonstrada.

Tomemos agora as funções $W_1,\ldots,W_a$, definidas numa vizinhança de U_0 de modo que $W_1,\ldots,W_a$, $X_1,\ldots,X_n$ formem um sistema de coordenadas locais sobre uma vizinhança V de U_0. A sub-variedade N_1 será então determinada pelas equações

$$W_\sigma = f_\sigma(X);\ \sigma=1,\ldots,a.$$

De acordo com (1.1), $f = \langle f_1,\ldots,f_a\rangle$ deve satisfazer ao S.E.D.P.

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial X_i} = F^i_\sigma(f(X),X). \tag{1.4}$$

Fixemos x e seja $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, suficientemente pequeno.

Seja

$$g_\sigma(t) = f_\sigma(tX)$$

$$\therefore \frac{dg_\sigma}{dt} = \sum_i X_i \frac{\partial f_\sigma(tX)}{\partial X_i} = -\sum_i X_i F^i_\sigma(g_\sigma(t), tX)$$

$$(1.5) \qquad \therefore \begin{cases} \dfrac{dg_\sigma}{dt} + \sum_i X_i F^i_\sigma(g_\sigma(t), TX) = 0 \\ \\ g_\sigma(0) = 0. \end{cases}$$

Mas o sistema (1.5) admite uma única solução numa vizinhança de 0. Logo temos a unicidade de N_1.

(III) Existência de N_1

Seja $f_\sigma(X;t)$ a solução de (1.5), definida numa vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Existe $\varepsilon > 0$ é uma vizinhança W de 0 em $\mathbb{R}^n$ tais que f_σ esteja definida para $x \in W$ e $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Podemos supor, eventualmente reduzindo W, que $\varepsilon = 1$. Definimos uma sub-variedade N_1 de U.

Pelas equações

$$W_\sigma = f_\sigma(X,1).$$

Mostremos que N_1 satisfaz nossas condições.

Seja $h_\beta(t) = G_\beta(f(X,t), tX)$

$$\frac{dh_\beta}{dt}(t) = \sum_\sigma \frac{\partial G_\beta}{\partial w_\sigma}(f(X,t), tX) \frac{\partial f_\sigma}{dt}(X,t) + \sum_i \frac{\partial G_\beta}{\partial X_i}(f(tX), tX) X_i$$

ora

$$\frac{df_\sigma}{dt}(X,t) = \sum_i \frac{\partial f_\sigma}{\partial X_i}\frac{dX_i}{dt} = \sum_i F_\sigma^i(f(X,t),tX)X_i$$

logo

$$\frac{dh_\beta}{dt} = \sum_i \left[-\sum_\sigma F_\sigma^i(f(X,t),tX)\frac{\partial G_\beta}{\partial w_\sigma}(f(X,t),tX) + \frac{\partial G_\beta}{\partial X_i}(f(X,t),tX)\right] =$$

$$= \sum_i \sum_j X_i B_\beta^{ij}(f(X,t),tX)h_j(t).$$

Como $h_\beta(0) = 0$, o sistema precedente tem uma única solução que é $h_\beta = 0$.

Portanto, G_β induz em N_1 a aplicação identicamente nula, para todo β. Tomemos agora

$$k_\sigma^i(t) = \frac{\partial f_\sigma}{\partial X_i}(X,t) + F_\sigma^i(f(X,t),tX).$$

Como $f_\sigma(X,0) = 0$, para todo X, temos de acordo com (1.5)

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial X_i}(X,0) = 0,$$

para todo X, logo $k_\sigma^i(0) = 0$.

Analogamente como para h_β, temos

$$\frac{dk_\sigma^i}{dt}(t) = \sum_\tau c_\sigma^\tau k_\tau^i + \sum_{j,\beta} tX_j A_\sigma^{ji\beta}(f(X,t),tX)G_\beta(f(X,t),tX)$$

onde

$$c_\sigma^\tau(X,t) = - \sum_j X_j \frac{\partial F_\sigma^j}{\partial w_\tau}(f(X,t),tX).$$

Por outro lado, $G_\beta|N_1 = 0$

$$\therefore \frac{dk_\sigma^i}{dt} = \sum_\tau c_\sigma^\tau(t,X)k_\tau^i(t).$$

Por consequência, $k_\sigma^i(t) = 0$, $\sigma=1,\ldots,a$, logo, de acordo com (1.1) os v_σ, $\sigma=1,\ldots,a$, induzem em N_1 as formas nulas.

§-2 - SISTEMAS COMPLETAMENTE INTEGRÁVEIS

Retomemos agora a linguagem do capítulo I.

Denotemos então por ϕ um feixe de ideais de germes de funções diferenciáveis sobre uma variedade $\mathcal{U}$. Denotemos por $j\phi = \{v\in\mathcal{U}|F(v)=0\}$ para toda secção F de ϕ definida numa vizinhança de v.

DEFINIÇÃO 1 - Diremos que o feixe ϕ é completo em $v_0\in j\phi$ se toda função real definida e diferenciável sobre uma vizinhança de v_0 e que se anula na intersecção de seu domínio de definição com $j\phi$ é uma secção de ϕ em uma vizinhança de v_0.

DEFINIÇÃO 2 - Diremos que ϕ é regular em v_0 se existe uma vizinhança U de v_0 e secções $f_1,\ldots,f_n$ de ϕ, definidas em U tais que:

1) $df_1,\dots,df_n$ são independentes em todo ponto de U.

2) $J\phi \cap U$ é o conjunto dos pontos X de U tais que

$$f_1(X) = \dots f_n(X) = 0.$$

Em particular $J\phi \cap U$ é uma sub-variedade de U.

PROPOSIÇÃO 1 - Se ϕ é regular em v_0 então ele é completo em v_0.

LEMA 1 - Seja H o subespaço de $\mathbb{R}^{n+m}$ constituido pelas n+m-uplas $(X_1,\dots,X_{n+m})$ tais que $X_1 = \dots = X_n = 0$.

Seja f uma função diferenciável de $\mathbb{R}^{n+m}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f|H = 0$. Então existem funções diferenciáveis $g_1,\dots,g_n$ de $\mathbb{R}^{n+m}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$f(X_1,\dots,X_{n+m}) = \sum_{i=1}^{n} X_i g_i(X_1,\dots,X_{n+m}).$$

Este é um resultado standard do cálculo.

Voltemos então ao teorema:

Sejam $f_1,\dots,f_n$ funções satisfazendo as condições da definição 2. Existe uma vizinhança V de v_0, sobre a qual as f_i estão definidas e funções diferenciáveis $X_1,\dots,X_m$, onde n+m = dimensão de $\mathcal{U}$, tais que $(V,f_1,\dots,f_n,X_1,\dots,X_m)$ seja uma carta de $\mathcal{U}$ em v_0. Seja $f\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função diferenciável sobre uma vizinhança W de v_0 tal que $f|W\cap J\phi = 0$. Existe uma vizinhança U de v_0, $U \subset V \cap W$, tal que

$$\psi = (f_1,\dots,f_n,X_1,\dots,X_m): U \longrightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

seja um difeomorfismo de U sobre uma bola aberta de $\mathbb{R}^{n+m}$. Podemos supor $\psi(U) = \mathbb{R}^{n+m}$ e cair assim nas condições do lema 1. Logo existem funções $g_i: U \longrightarrow \mathbb{R}$; $i=1,\dots,n$, diferenciáveis, tais que:

$$f|U = \sum_{i=1}^{n} (f_i|U)g_i.$$

Logo $f|U$ é uma secção de ϕ.

<u>DEFINIÇÃO 3</u> - Seja ϕ um S.E.D.P. de ordem k, definido sobre um aberto $\mathcal{U}$ da variedade dos jatos de ordem k, das secções de uma variedade fibrada $\langle M,N,\rho\rangle$.

Diz-se que ϕ é completamente integrável em $X_0 \in J\phi$ se

1) $C_{X_0}(\phi) = \{0\}$

2) A imagem de $J(p\phi)$ por ρ_k^{k+1} é uma vizinhança de X_0 em $J\phi$.

3) ϕ é completo em X_0.

<u>OBSERVAÇÃO 1</u> - Na realidade, deveríamos dizer que um S.E.D.P. ϕ é completamente integrável se $p^{\ell}\phi$ é completamente integrável, segundo a definição acima para algum ℓ, pois na prática, muitos exemplos de sistemas completamente integráveis são obtidos prolongando um dado sistema. Por uma questão de

simplicidade, manteremos a definição acima, e implicitamente adotaremos esta última, na terminologia.

EXEMPLO 1 - O leitor pode facilmente verificar que o S.E.D.P.; $p\phi$, obtido pelo prolongamento do sistema ϕ obtido no problema de saber quais são os difeomorfismos do $\mathbb{R}^2$ cuja diferencial em cada ponto é uma isometria, resolvido no capítulo anterior, é um S.E.D.P. completamente integrável.

§-3 - SOLUÇÕES DE UM S.E.D.P. COMPLETAMENTE INTEGRÁVEL

O objetivo deste parágrafo é demonstrar o seguinte

TEOREMA 1 - Seja ϕ um S.E.D.P., completamente integrável em $X_0 \in J\phi$. Então existe uma solução f de ϕ, em $\alpha(X_0)$. Além disso o germe de f em $\alpha(X_0)$ está unicamente determinado.

Para a demonstração, teremos necessidade das observações seguintes:

Sejam $\langle M,N,\rho\rangle$ uma variedade fibrada e f uma secção de $\langle M,N,\rho\rangle$ definida sobre o aberto U de N. É imediato que f(U) é uma sub-variedade regular de M.

A seguinte propriedade caracteriza todas sub-variedades de M que são da forma f(U), onde $f: U \longrightarrow M$ é uma secção de $\langle M,N,\rho\rangle$.

PROPOSIÇÃO 1 - Seja N_1 uma sub-variedade de M.

Então $N_1 = f(U)$ onde $f\colon U \to M$ é uma secção de $<M,N,\rho>$ se e somente se $\rho\colon N_1 \to N$ é injetora e

$$d\rho_X\colon T_X N_1 \to T_{\rho(X)} N_1$$

é um isomorfismo $\forall X \in N_1$.

DEMONSTRAÇÃO - Trivial. No que segue identificaremos uma secção f com $f(U)$.

PROPOSIÇÃO 2 - Seja F uma secção de $<J^k M,N,\alpha>$ tal que $F \subset \beta^{-1}(V)$ onde V é o domínio de uma carta $<X,Y,p>$ de $J^k M$. As seguintes condições são equivalentes:

1) Existe uma secção f de $<M,N,\rho>$ tal que $F = J^k f$.

2) As formas diferenciais induzidas sobre F por

$$w^j_{I^\ell} = dP^j_{I^\ell} - \sum_i P^j_{I^\ell} dX_i, \quad j=1,\ldots,m;\ \ell=0,\ldots,k-1.$$

são identicamente nulas ($m = \dim M - \dim N$).

DEMONSTRAÇÃO

(1) $\to$ (2) - Seja $\phi\colon F \to J^k M$ a injeção canônica.

Sabemos que F induz um isomorfismo, que denotaremos ainda por F, de um aberto $V \subset N$ em F, logo um isomorfismo $F^*\colon \Lambda^1 F \to \Lambda^1 V$. Se $F = J^k f$, $f\colon V \to M$ uma secção de $<M,N,\rho>$, então

$$F^*\circ\phi^*(w^j_{I^\ell}) = d(P^j_{I^\ell}\circ\phi\circ F) - \sum_i (P^j_{I^\ell,i}\circ\phi\circ F)dX_i =$$

$$= d\left(\frac{\partial f^j}{\partial X^{i_1}\ldots\partial X^{i_\ell}}\right) - \sum_i \frac{\partial^{\ell+1} f^j}{\partial X^{i_1}\ldots\partial X^{i_\ell}\partial X^i}\cdot dX_i = 0$$

$\therefore$ $F^*\circ\rho^*(w^j_{I^\ell}) = 0$, logo $\phi^* w^j_{I^\ell} = 0$.

(2) $\longrightarrow$ (1) - Consideremos a secção $f\colon V \longrightarrow M$, $f = \beta\circ F$, de $\langle M,N,\rho\rangle$. Para todo $X\in V$, $f(X) = \beta(F(X))$ e $df^j = dF^j$ logo $j^1 f = \rho^k_1 F$. Por indução, se admitirmos $J^\ell f = \rho^k_\ell F$, $1 \le \ell < k$. Temos:

$$P^j_{I^\ell}\circ F = \frac{\partial^\ell f^j}{\partial X^{i_1}\ldots\partial X^{i_\ell}} \text{ logo } d(P^j_{I^\ell}\circ f) = d\left(\frac{\partial^\ell f^j}{\partial X^{i_1}\ldots\partial X^{i_\ell}}\right).$$

Por (2) sabemos que

$$d(P^j_{I^\ell}\circ F) = \sum_i (P^j_{I^\ell,i}\circ F)dX_i$$

$$\therefore\ P^j_{I^\ell,i}\circ F = \frac{\partial^{\ell+1} f^j}{\partial X^{i_1}\ldots\partial X^{i_\ell}\partial X^i},\ \forall i,j$$

$$\therefore\ j^{\ell+1} f = \rho^k_{\ell+1}\circ F\ \therefore\ F = j^k f.$$

Postos estes resultados, retomemos o Teorema 1.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> DO TEOREMA 1:

Considere-se $(F_\sigma)_{\sigma\in S}$, um sistema de geradores de ϕ numa vizinhança de X_0 (S conjunto finito).

Pela definição de $C_{X_0}(\phi)$ e da condição (1) da definição (3) do parágrafo (2), o sistema linear

$$\sum_{I^k} \xi^j_{I^k} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p^j_{I^k}}(X_0) = 0, \ \sigma \in S$$

admite uma única solução, a saber $\xi^j_{I^k} = 0$. Portanto a matriz $\left[\frac{\partial_\sigma}{\partial p^j_{I^k}}\right]$ é de posto máximo (igual ao número do $p^j_{I^k}$) em X_0, logo, pelo toerema das funções implícitas, existe um subconjunto $S' \subset S$ tal que o sistema

$$F_\sigma(X,Y,\ldots,p^j_{I^k}) = 0, \ \sigma \in S'$$

admite uma única solução em $p^j_{I^k}$:

$$p^j_{I^k} = \psi^j_{I^k}(X,Y,\ldots,p^j_{I^{k-1}})$$

numa vizinhança de X_0 (observe que $\psi^j_{I^k}$ está definida numa vizinhança V de $\rho^k_{k-1}(X_0)$).

Definamos então

$$\phi^j_{I^k} = p^j_{I^k} - \psi^j_{I^k} \circ \rho^k_{k-1},$$

sobre a vizinhança $U = (\rho^k_{k-1})^{-1}(V)$, de X_0. Os $\phi^j_{I^k}$ se anulam numa vizinhança de X_0 em $J\phi$, logo, ϕ sendo completo, os $\phi^j_{I^k}$ são secções de ϕ (numa vizinhança de X_0.) Por outro lado, seja ψ o feixe de ideais gerado por $\phi^j_{I^k}$ sobre U. É claro que este feixe é regular portanto completo em X_0. Por construção de ψ, as restrições dos F_σ $(\sigma \in S')$ a $J\psi$ são nulas, logo os F_σ, $\sigma \in S'$ são secções de ψ numa vizinhança $\bar{V}$ de X_0. Portanto, sobre $\bar{V}$ os ϕ^j_{Ik} e os F_β $(\beta \in P_S S')$ formam um sistema de geradores de ϕ.

Por outro lado, sobre uma vizinhança de X_0,

$$\partial^i_{\#}\psi^\lambda_{I^{k-1},j} - \partial^j_{\#}\psi^\lambda_{I^{k-1},i}$$

é uma secção de ϕ.

Com efeito:

$$\partial^i_{\#}\phi^\lambda_{I^{k-1},j} - \partial^j_{I^{k-1},i}\phi^\lambda_{I^{k-1},i} = (P^\lambda_{I^{k-1},j,i} - \partial^i_{\#}(\psi^\lambda_{I^{k-1},j} \circ \rho^k_{k-1})) -$$

$$- P^\lambda_{I^{k-1},j,i} - \partial^j_{\#}(\psi^\lambda_{I^{k-1},i} \circ \rho^k_{k-1})) = (\partial^j_{\#}\psi^\lambda_{I^{k-1},j} - \partial^i_{\#}\psi^\lambda_{I^{k-1},j}) \circ \rho^{k+1}_k .$$

Ora

$$\partial^i_{\#}\phi^\lambda_{I^{k-1},j} - \partial^j_{\#}\phi^\lambda_{I^{k-1},i}$$

é uma secção de $p\phi$, logo pela condição (2) da definição (3) do parágrafo 2, a função

$$\partial^j_{\#}\psi^\lambda_{I^{k-1},i} - \partial^i_{\#}\psi^\lambda_{I^{k-1},j}$$

se anula sobre uma vizinhança de X_0 em $J\phi$, logo, ϕ sendo completo em X_0, esta função é uma secção de ϕ numa vizinhança de X_0.

Para $\beta \in \complement_S S'$ (complementar de S' em S) seja ϕ_β a função obtida por $\phi_\beta = F_\beta(X, Y, \ldots, P^j_{I^{k-1}}, X^k_{I^k})$.

Mostra-se de forma análoga a anterior que $\partial^i_{\#}\phi_\beta$ é uma secção de ϕ numa vizinhança de X_0.

Do que procede, resulta que podemos encontrar uma vizinhança $\tilde{V}_0 \subset \tilde{V}$, de X_0, sobre a qual temos:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \partial^i_{\#}\psi^\lambda_{I^{k-1},j} - \partial^j_{\#}\psi^\lambda_{I^{k-1},i} = \sum\limits_\beta A^\lambda_{I^{k-1},i,j} F_\beta \pmod{\phi^k_{I^k}} \\ \\ \\ \partial^i_{\#}\phi_\beta = \sum\limits_\lambda B^{i\lambda}_\beta F_\lambda \pmod{\phi^\alpha_{I^k}}. \end{cases}$$

Seja U a sub-variedade de $\tilde{V}_0$, definida pelas equações

$$P^j_{I^k} - \psi^j_{I^k} \circ \rho^k_{k-1} = 0.$$

Então U tem uma carta $(X, Y, \ldots, P^j_{I^{k-1}})$.

Seja $v^j_{I^\ell}$ ($\ell \leq k-1$) a restrição de $w^j_{I^\ell}$ (conforme proposição 2 anterior) a U, isto é,

$$v^j_{I^{k-1}} = dP^j_{I^{k-1}} - \sum_i (\psi^j_{I^{k-1},i} \circ \rho^k_{k-1}) dX_i$$

$$v^j_{I^\ell} = dP^j_{I^\ell} - \sum_i P^j_{I^\ell,i}\, dX_i \text{ se } \ell \leq k-2.$$

É claro que os $v^i_{I^\ell}(X_0)$ são independentes e temos

$$dv^j_{I^\ell} = -\sum_i dP^j_{I^\ell,i} \wedge dX_i = \sum_i v^j_{I^\ell,i} \wedge dX_i \quad \text{se } \ell \le k-2$$

e

$$dv^j_{I^{k-1}} = \sum_i \sum_\eta \sum_{I^\ell}{}' \frac{\partial \chi^j_{I^{k-1},i}}{\partial P^\eta_{I^\ell}} v^\eta_{I^\ell} \wedge dX_i -$$

$$- \sum_i \sum_\lambda \partial^j_\# \psi^\lambda_{I^{k-1},i} - \partial^i_\# \psi^\lambda_{I^{k-1},j}) dX_j \wedge dX_i$$

Donde se deduz tendo em conta as relações (I) e do fato que ϕ é a restrição de F_β a U, que os $dv^j_{I^\ell}$ pertencem ao ideal de ΛU gerado por $v^j_{I^\ell}$ e ϕ_β.

Calculamos $d\phi_\beta$:

$$d\phi_\beta = \sum_i \frac{\partial \phi_\beta}{\partial X_i} dX_i + \sum_j \sum_{\ell \le k-2} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial P^j_{I^\ell}} dP^j_{I^\ell} + \sum_j \sum_{I^{k-1}}{}' \frac{\partial \phi_\beta}{\partial P^j_{I^{k-1}}} dP^j_{I^{k-1}}$$

$$= \sum_i \frac{\partial \phi_\beta}{\partial X_i} dX_i + \sum_j \sum_{\ell \le k-2} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial P^j_{I^\ell}} v^j_{I^\ell} + \sum_i \sum_j \sum_{\ell \le k-2}{}' \frac{\partial \phi_\beta}{\partial P^j_{I^\ell}} P^j_{I^\ell} dX_i$$

$$= \sum_j \sum_{I^{k-1}}{}' \frac{\partial \phi_\beta}{\partial P^j_{I^{k-1}}} dP^j_{I^{k-1}}.$$

$$\therefore \; d\phi_\beta = \sum_j \sum_{\ell\leq k-2}{}' \frac{\partial\phi_\beta}{\partial P^j_{I^\ell}} v^j_{I^\ell} + \sum_i \left[\frac{\partial\phi_\beta}{\partial X_i} + \sum_j \sum_{\ell\leq k-2} \frac{\partial\phi_\beta}{P^j_{I^\ell}} P^j_{I^\ell,i}\right] dX_i$$

$$+ \sum_j \sum_{I^{k-1}}{}' \frac{\partial\phi_\beta}{\partial P^j_{I^{k-1}}} dP^j_{I^{k-1}}.$$

Mas,

$$\frac{\partial\phi_\beta}{\partial X_i} + \sum_j \sum_{\ell\leq k-2}{}' \frac{\partial\phi_\beta}{\partial P^j_{I^\ell}} P^j_{I^\ell,i} = \partial^i_{\#}\phi_\beta - \sum_j \sum_{I^{k-1}}{}' \frac{\partial\phi_\beta}{\partial P^j_{I^{k-1}}} P^j_{I^{k-1},i}$$

Portanto

$$d\phi_\beta = \sum_j \sum_{\ell\leq k-2}{}' \frac{\partial\phi_\beta}{\partial P^j_{I^\ell}} v^j_{I^\ell} + \sum_i \partial^i_{\#}\phi_\beta +$$

$$+ \sum_{J,I^{k-1}} \frac{\partial\phi_\beta}{\partial P^j_{I^{k-1}}} (dP^j_{I^{k-1}} - \sum_i P^j_{I^{k-1},i} dX_i)$$

Observamos que

$$dP^j_{I^{k-1}} - \sum_i P^j_{I^{k-1},i} dX_i = v^j_{I^{k-1}}.$$

Portanto,

$$d\phi_\beta = \sum_j \sum_{I^\ell}{}' \frac{\partial\phi_\beta}{\partial P^j_{I^\ell}} v^j_{I^\ell} \quad \sum_i \partial^i_{\#}\phi_\beta.$$

Portanto, $d\phi_\beta$ pertence ao ideal de ΛU gerado por ϕ_β e $v^j_{I^\ell}$. Portanto, $v^j_{I^\ell}$ e ϕ_β satisfazem as condições do Teo rema 1, parágrafo anterior (Frobenius).

Existe então um germe de sub-variedade N_1 em X_0 de codimensão igual ao número dos $v^j_{I\ell}$, e um único, sobre o qual os $v^j_{I\ell}$ induzem formas nulas e os ϕ_β funções nulas. Pela proposição 3, existe uma secção f de $<M,N,\rho>$ tal que $N_1 = J^k f$. É imediato que f é uma solução de ϕ em $\alpha(X_0)$. A unicidade de f segue da unicidade de N_1.

COROLÁRIO - Seja ϕ um S.E.D.P., de ordem k, definido sobre um aberto $\mathcal{U}$ de $J^k M$. Suponhamos que

1) $C_X(\phi) = 0$ para todo $X \in J\phi$

2) $\rho^{k+1}_k : J(P\phi) \longrightarrow J\phi$ é sobrejetora

3) ϕ é regular em todo ponto de $J\phi$.

Então para todo $X \in J\phi$ existe um único germe de solução, f_X em $x = d(X)$.

OBSERVAÇÃO 1 - A condição (2) do corolário acima é necessária. Com efeito se $X \in J\phi$ e se f é uma solução de ϕ em $\alpha(X)$ então $X = J^k_{\alpha(X)} f$.

Mas

$$J^{k+1}_{\alpha(X)} f \in J(P\phi) \quad \therefore \quad X = \rho^{k+1}_k (J^{k+1}_{\alpha(X)} f).$$

OBSERVAÇÃO 2 - Seja ϕ o S.E.D.P. de ordem 1 sobre $\mathbb{R}^n$ gerado por

$$P^\lambda_j - F^\lambda_j(X,Y), \quad \lambda=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n$$

isto é, o sistema

$$\frac{\partial Y_\lambda}{\partial X_j} - F_j^\lambda(X_1,\ldots,X_n;Y_1,\ldots,Y_m) = 0.$$

Seja $v \in C_X(\phi)$ onde $X \in J\phi$,

$$v = \sum_j \sum_\lambda \xi_j^\lambda \frac{\partial}{\partial P_j^\lambda} \qquad \xi_j^\lambda = v(p_j^\lambda - F_j^\lambda) = 0, \text{ isto é } v = 0.$$

Logo, para todo $X \in J\phi$ se tem $C_X(\phi) = 0$.

Por outro lado, as funções $P_j^\lambda - F_j^\lambda$ são independentes, logo $J\phi$ é na vizinhança de todo ponto X de $J\phi$ uma subvariedade de $J^1\mathbb{R}^{m+n}$ cuja codimensão é $m-n$, portanto ϕ é regular em todo ponto de $J\phi$. O prolongamento $P\phi$ de ϕ é gerado por

$$P_{i,j}^\lambda - \frac{\partial F_j^\lambda}{\partial X_i} + \sum_n \frac{\partial F_i^\lambda}{\partial Y_n} P_i^n.$$

Se a condição (2) do corolário precedente está verificada então por todo jato integral de ϕ deve haver um jato integral de $P\phi$. Portanto $X \in \rho_1^2(J(P\phi))$ se e somente

$$\frac{\partial F_j^\lambda}{\partial X_i}(X) + \sum_n \frac{\partial F_i^\lambda}{\partial Y_n}(X) P_j^n(X)$$

é simétrico em i e j. Substituindo $P_j^n(X)$ por $F_j^n(\beta(X))$ encontramos uma condição equivalente:

$$\frac{\partial F_j^\lambda}{\partial X_i}(X) + \sum_n \frac{\partial F_i^\lambda}{\partial Y_n}(X) F_j^n(\beta(X)) = \frac{\partial F_i^\lambda}{\partial X_j}(X) + \sum_n \frac{\partial F_j^\lambda}{\partial Y_n}(X) F_i^n(\beta(X)).$$

Donde se deduz o teorema clássico sobre os S.E.D.P. completamente integráveis.

"O S.E.D.P. ϕ tem uma solução e uma única com a condição inicial $Y_\lambda(0) = a_\lambda$ se e somente se

$$\frac{\partial F_i^\lambda}{\partial X_j} + \sum_n F_j^n \frac{\partial F_i^\lambda}{\partial Y_n} = \frac{\partial F_j^\lambda}{\partial X_j} + \sum_n F_i^n \frac{\partial F_j^\lambda}{\partial Y_n}, \ \forall i,j,\lambda".$$

Se esta condição está satisfeita, as soluções de ϕ são obtidas pela integração de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

- o -

CAPÍTULO III

As Transformações Conforme do $\mathbb{R}^n$

§1 - Pseudo-Grupos de Lie

No que segue, as variedades serão supostas C^∞, conexas de dimensão finita.

Seja M uma variedade e f um difeomorfismo local sobre M. Denotaremos o domínio de f por $U(f)$ e seu conjunto de valores por $V(f)$.

Se $W \subset U(f)$ denotaremos a restrição de f a W por $f|W$.

Dado um outro difeomorfismo local g de M diremos que $g \circ f$ está definido se $V(f) \cap U(g) \neq \emptyset$.

Se $g \circ f$ está definido temos por definição

$$g \circ f = (g|U(g) \cap V(f)) \circ (f|f^{-1}(V(f) \cap U(g))) .$$

<u>DEFINIÇÃO 1</u> - Um conjunto Γ de difeomorfismos locais de M, diz-se um pseudo grupo de transformações de M se

1) Se $f, g \in \Gamma$ e $g \circ f$ está definido então $g \circ f \in \Gamma$.

2) $f \in \Gamma \longrightarrow f^{-1} \in \Gamma$.

3) A aplicação idêntica de M está em Γ.

4) Se $f \in \Gamma$ e $W \subset U(f)$ é um aberto então $f|W \in \Gamma$.

5) Dado um difeomorfismo local f de M se para todo ponto $p \in U(f)$ existe uma vizinhança W de p, $W \subset U(f)$ tal que $f|W \in \Gamma$ então $f \in \Gamma$.

DEFINIÇÃO 2 - Um pseudo grupo de transformações Γ diz-se transitivo quando dados $p,q \in M$ existe $f \in \Gamma$ tal que $f(p)=q$.

Uma vez introduzida a noção de pseudo-grupo de transformações estamos interessados em estudar em particular um desses objetos.

O assim chamado pseudo-grupo das transformações conforme do $\mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO 3 - Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, um difeomorfismo.

Dizemos que f é conforme se a diferencial de f em cada ponto p de U é uma semelhança. I.é, $df_p \in G \subset GL(n,\mathbb{R})$ para todo ponto p de U, onde G é o subgrupo de Lie das semelhanças de $GL(n,\mathbb{R})$.

Ou ainda, dito de uma forma mais técnica, existe $\lambda(f): U(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(f)$ diferenciável, t.q. para todo p de $U(f)$ se tem $\langle df_p h, df_p k\rangle = \lambda(f)(p) \langle h,k\rangle$, $h,k \in \mathbb{R}^n$ ($\langle , \rangle$ denota o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$) .

Estabelecida esta definição, denotemos $Dif(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos difeomorfismos locais de $\mathbb{R}^n$. Seja:

$$\Gamma = \{f \in Dif(\mathbb{R}^n) : p \in U(f) \longrightarrow \langle df_p h, df_p h\rangle = \lambda(p)\langle h,h\rangle : h \in \mathbb{R}^n\} .$$

É imediato verificar que Γ assim construído é um pseudo grupo de transformações transitivo.

Por outro lado, analisando a condição $\langle df_p h, df_p h\rangle = \lambda(p)\langle h,h\rangle$; temos:

$h \in \mathbb{R}^n$, $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base canônica de $\mathbb{R}^n$;

$$\therefore \quad h = \sum_j h_j$$

$$\langle df_p h, df_p h\rangle = \lambda(p)\langle h,h\rangle \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} dx_j\Big)^2 = \lambda \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j,k} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x_k} dx_j dx_k\Big) = \lambda \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2 .$$

$$\sum_{j,k} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x_k}\Big) dx_j dx_k = \lambda \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$$

$$\therefore \quad \left.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x_k} = \lambda\, \delta_{jk} \quad \right\} \phi$$

Portanto os elementos de Γ satisfazem um S.E.D.P, ϕ .

Bem, mas esse é exatamente o objeto de estudo da teoria dos Pseudo-grupos de Lie, i.é estudar os pseudo-grupos de transformações cujos elementos são as soluções de um sistema de equações a derivadas parciais.

Para definirmos a noção de pseudo grupo de Lie reto memos algumas noções da teoria dos jatos.

DEFINIÇÃO 4 - Composição de jatos.

Sejam M, N, P três variedades diferenciáveis, sejam $x_0 \in M$, $y_0 \in N$, $z_0 \in P$, sejam f_1, f_2 duas aplicações diferenciáveis de M em N tal que $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$ e sejam enfim g_1 e g_2 duas aplicações diferenciáveis de N em P tais que $g_1(y_0) = g_2(y_0) = z_0$. Se f_1 e f_2 são equivalentes a ordem k em y_0 então $g_1 o f_1$ e $g_2 o f_2$ são equivalentes a ordem k em x_0.

Isso nos permite definir uma lei de composição

$$j^k(M,N) \times j^k(N,P) \longrightarrow j^k(M,P)$$

$$(X,Y) \longrightarrow YX$$

que a todo par $(X,Y) \in j^k(M,N) \times j^k(N,P)$ tal que $\beta(X) = \alpha(Y)$, associa um elemento de $j^k(M,P)$ denotado por YX definido do seguinte modo

$$X = j^k_{\alpha(X)} f; \qquad Y = j^k_{\alpha(Y)} g \longrightarrow XY = j^k_{\alpha(X)}(gf)$$

Esta lei de composição verifica as seguintes propriedades:

1) Se os produtos YX e ZY estão definidos, i.é $\beta(X) = \alpha(Y)$ e $\beta(Y) = \alpha(Z)$ então os produtos $(ZY)X$ e $Z(YX)$ estão definidos e $(ZY)X = Z(YX)$.

2) Se denotarmos I^k_x o jato de ordem k no ponto x da aplicação identidade da variedade a qual x pertence te-

remos as seguintes identidades:

$$X I^k_{\alpha(X)} = X \quad \text{e} \quad I^k_{\beta(X)} X = X .$$

3) Se $k \geq 1$ e se X e Y são jatos de ordem k t.q. o produto YX está definido então

$$\rho^k_1 (YX) = \rho^k_1(Y)\ \rho^k_1(X) .$$

Um jato $X \in j^k(M,N)$ será dito inversível se existir um jato $Y \in j^k(N,M)$ tal que

$$YX = I^k_{\alpha(X)} \quad \text{e} \quad XY = I^k_{\beta(X)}$$

O jato Y denomina-se o inverso de X e é claro que se X é inversível o jato inverso é único. Eventualmente denotaremos o inverso de X por X^{-1}.

Seja $k \geq 1$ e f uma aplicação diferenciável definida sobre um aberto de M a valores em N t.q. $X = j^k_x f$; se X é inversível a fortiori $\rho^k_1(X)$ é inversível logo a matriz jacobiana de f no ponto x é inversível logo f é um difeomorfismo de uma vizinhança de x sobre uma vizinhança de $y = f(x)$.

Reciprocamente, se f é um difeomorfismo de uma vizinhança de x sobre uma vizinhança de y e se $X = j^k_x f$ então X é inversível uma vez que f admite uma inversa g e se colocarmos $Y = j^k_y g$ temos $YX = I^k_x$; $XY = I^k_y$.

Logo temos a seguinte <u>proposição</u>.

<u>PROPOSIÇÃO 1</u> - Para $k \geq 1$ as seguintes afirmações são equivalentes.

1) X é um jato inversível.

2) O jato $\rho_1^k(X)$ é inversível.

3) X é o jato de um difeomorfismo local.

4) Toda aplicação diferenciável f t.q. $X = j_x^k f$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de x.

Já havíamos visto que $j^k(M,M)$, o conjunto dos jatos de ordem k com alvo e fonte em M admite uma estrutura de variedade diferenciável.

Denotemos por $j^k(M) \subset j^k(M,M)$ o conjunto dos k-jatos inversíveis.

É fácil ver que $j^k(M)$ é um aberto de $j^k(M,M)$ (use por exemplo a função determinante) logo uma sub-variedade. Verifica-se também que $<j^k(M), M \times M, \alpha \times \beta>$ é uma variedade fibrada.

Dado um pseudo grupo Γ de transformações, denotaremos $j^k\Gamma$ o conjunto dos k-jatos de elementos de Γ.

<u>DEFINIÇÃO 5</u> - Um subconjunto $G \subset j^k(M)$ diz-se um grupóide diferenciável se:

1) Se $X, Y \in G$ e o produto XY está definido então $XY \in G$.

2) Se $X \in G$ então $X^{-1} \in G$.

3) G admite uma estrutura de sub-variedade de $j^k(M)$ tal que a aplicação $\alpha \times \beta \colon G \longrightarrow M \times M$ é uma fibração.

4) Seja $\Delta(G) \subset G \times G$ a imagem inversa da diagonal de $M \times M$ pela aplicação

$$G \times G \longrightarrow M \times M$$

$$(X, Y) \longrightarrow (\alpha(X), \beta(Y)) .$$

Então $\Delta(G)$ é uma sub variedade regular de $G \times G$ e a aplicação:

$$(X, Y) \in \Delta(G) \longrightarrow XY \in G \quad \text{é diferenciável.}$$

5) A aplicação $X \in G \longrightarrow X^{-1} \in G$ é diferenciável.

Observação: É imediato que $j^k M$ é um grupóide diferenciável.

<u>DEFINIÇÃO 6</u> - Um pseudo grupo transitivo Γ de difeomorfismo locais de M diz-se um pseudo grupo de Lie transitivo de ordem k se:

1) $j^k \Gamma$ é um grupóide diferenciável.

2) $f \in \Gamma \longleftrightarrow \forall\ x \in U(f),\quad j^k_x f \in j^k \Gamma$.

Observemos que (2) diz que o pseudo grupo Γ é o conjunto das soluções de um sistema de equações a derivadas parciais.

Retomemos agora $\Gamma = \{f \in \mathrm{Dif}(\mathbb{R}^n) : \langle df_p h, df_p k\rangle = \lambda(p)\langle h,k\rangle\}$.

PROPOSIÇÃO 2 - Afirmamos que Γ é um pseudo grupo de Lie transitivo de ordem 1.

(Sabemos que Γ é de ordem 1 por que estamos a priori assumindo que Γ é "caracterizado" pelo S.E.D.P.

$$\phi \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x_k} = \lambda\, \delta_{jk} \right.$$

que é de ordem 1).

Demonstremos então, primeiramente que $j^1\Gamma$ é um grupóide diferenciável.

As condições 1) 2) são de verificação imediata.

Seja $G_s = \{T \in GL(n,\mathbb{R}) : T$ é uma semelhança$\}$.

É um fato bem conhecido que G_s é um sub grupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$.

Seja $\phi: j^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times GL(n,\mathbb{R})$ tal que $\phi(X) = (\alpha(X),\beta(X),[T])$ onde $[T]$ é a matriz da aplicação linear pertencente a $L(T_{\alpha(X)}\mathbb{R}^n, T_{\beta(X)}\mathbb{R}^n)$ definida por X.

ϕ é diferenciável pois suas componentes são diferenciáveis.

ϕ é obviamente bijetora.

Em cada ponto $X \in j^1\mathbb{R}^n$ verifica-se facilmente em coordenadas que a matriz jacobiana de ϕ é inversível (matriz identidade).

Portanto ϕ é um difeomorfismo local, em cada ponto, e como é bijetora, um difeomorfismo global.

Por outro lado, $\phi(j^1\Gamma) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G_s$.

1) É claro que $\phi(j^1\Gamma) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G_s$ pela própria definição de Γ.

2) Dado um elemento $(a,b,[T]) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G_s$ ele é a imagem por ϕ do jato de uma transformação afim do $\mathbb{R}^n$ que pertence a Γ.

$$\therefore \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G_s \subset \phi(j^1\Gamma) \; .$$

Podemos então transportar para $J^1\Gamma$ a estrutura de variedade de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G_s$.

Passemos então a considerar $J^1\Gamma$ com esta estrutura de variedade.

$\therefore \quad \phi \mid j^1\Gamma: j^1\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G_s$ é um difeomorfismo

$$\therefore \quad j^1\Gamma \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G_s \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$X \longrightarrow (\alpha(X), \beta(X), [T]) \longrightarrow (\alpha(X), \beta(X))$$

é uma submersão.

$\therefore \quad \alpha \times \beta: j^1\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é uma fibração.

$$X \longrightarrow (\alpha(X), \beta(X)) \; .$$

Consideremos agora $\Delta(j^1\Gamma)$.

$\Delta(j^1\Gamma) = \{(X,Y) \in j^1\Gamma \times j^1\Gamma : \alpha(X) = \beta(Y)\}$.

Logo o produto XY está definido para todo elemento de $\Delta(j^1\Gamma)$.

Por outro lado sabemos que $\Delta(j^1\Gamma)$ é uma subvariedade regular de $j^1\Gamma \times j^1\Gamma$.

A aplicação $\Delta(j^1\Gamma) \longrightarrow j^1\Gamma$

$$(X,Y) \longrightarrow XY$$

é claramente diferenciável.

Em coordenadas:

$$(X,Y) \in \Delta(j^1\Gamma); \quad X = j^1_{\alpha(X)=x} f; \quad Y = j^1_{\alpha(Y)=y} g$$

$$\alpha(X) = x = \beta(Y) = g(y)$$

$$\therefore \quad XY = j^1_y \, fog$$

$$X \longleftrightarrow (\alpha(X),\beta(X),[T]) \longleftrightarrow (x,f(x),[df_x])$$

$$Y \longleftrightarrow (\alpha(Y),\beta(Y),[S]) \longleftrightarrow (y,g(y),[dg_y])$$

$$XY = YX \longleftrightarrow (\alpha(XY),\beta(X,Y),[S]\cdot[T]) \longleftrightarrow (x,gof(x),[d(gof)_x]).$$

De forma análoga a aplicação $j^1\Gamma \longrightarrow j^1\Gamma$

$$X \longrightarrow X^{-1}$$

é diferenciável. Em coordenadas

$$X \longleftrightarrow (\alpha(X),\beta(X),[T])$$
$$\Downarrow$$
$$X = j_{\alpha(X)} f \longrightarrow (x,f(x),[df_x])$$

$$X^{-1} \longleftrightarrow (f(x),x,[df_x]^{-1}) \ .$$

Bem, com isso fica demonstrado que $j^1\Gamma$ é um grupóide diferenciável.

A condição 2) da definição de pseudo-grupo de Lie transitivo é de verificação imediata.

I.e, $f\in\Gamma \longrightarrow \forall\ x\in U(f)\ j^1_x f\in j\ \Gamma$, por definição.

Por outro lado, dado um jato de $j\ \Gamma$ ele é jato de uma transformação afim de Γ.

Logo o pseudo grupo das conformes é um pseudo grupo de Lie transitivo .

<u>DEFINIÇÃO 7</u> - Se $f\in \mathrm{Dif}(\mathbb{R}^n)$, diremos que f é uma transformação conforme própria se f é conforme e preserva a orientação i.e,

$$f\colon U\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow f(U)\subset\mathbb{R}^n \ ;$$

$$p\in U(f) \longrightarrow \langle df_p h, df_p k\rangle = \lambda(f)(p)\langle h,k\rangle \quad \forall\, h,k\in\mathbb{R} \text{ e } \det[df_p] > 0.$$

Denotemos $\Gamma^+ = \{f\in \mathrm{Dif}(\mathbb{R}^n) \mid f$ é conforme própria$\}$.

PROPOSIÇÃO 3 - Γ^+ é um pseudo grupo de Lie transitivo.

Demonstração: É uma repetição da demonstração anterior com a observação que:

$$G_s^+ = \{T \in GL(n,\mathbb{R}) \mid T \text{ é uma semelhança própria}\}$$

é um sub grupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$

$$G_s^+ = G_s \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_{++}) .$$

§2 - Pseudo Grupos de Lie Transitivos Infinitesimais

Associado a um pseudo grupo de Lie transitivo existe um objeto algébrico, denominado pseudo grupo de Lie Infinitesimal, que desempenha na teoria dos pseudos grupos de Lie, papel análogo a aquele da Álgebra de Lie na teoria dos grupos de Lie.

DEFINIÇÃO 1 - Seja M uma variedade e Γ um pseudo grupo de transformações sobre M.

Uma família a 1-parâmetro de elementos de Γ é uma aplicação $f\colon \Omega \longrightarrow M$, onde $\Omega \subset M \times \mathbb{R}$ é um aberto, satisfazendo as seguintes condições:

1) f é diferenciável.

2) $I = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in M \mid (x,f) \in \Omega\}$ é um intervalo aberto contendo o zero.

3) $\forall$ $t \in I$ a aplicação $f_t: U(f_t) \longrightarrow V(f_t)$ tal que $f_t(x) = f(x,t)$ é um elemento de Γ e em particular f_0 é a identidade de $U(f_0)$.

<u>DEFINIÇÃO 2</u> - Seja Γ um pseudo grupo de Lie transitivo de ordem k sobre M. Dizemos que um campo de vetores θ, definido sobre um aberto $U \subset M$ é uma transformação infinitesimal (ou um Γ-campo de vetores) se para todo $x \in U$ existe uma vizinhança W de x $(W \subset U)$, e uma família a 1-parâmetro de elementos de Γ, $(f_t)_{t \in I}$, definida sobre W tal que $\theta|W$ é um campo de vetores deduzido de f_t i.e $\theta(x) = \left(\dfrac{df_x}{dt}\right)_{t=0}$ onde $f_x: j \subset I \longrightarrow M$ tal que $f_x(t) = f(x,t)$.

Denotemos por $\theta(\Gamma)$ o conjunto dos Γ-campos de vetores.

Para a construção do objeto algébrico que estamos interessados, introduziremos a noção de feixe de Álgebras de Lie sobre uma variedade.

<u>DEFINIÇÃO 3</u> - Seja M uma variedade e denotemos por τ_M sua topologia.

Um feixe sobre M é um par $\langle F, \langle R_V^U;\ V \subset U \in \tau_M \rangle\rangle$ satisfazendo:

1) F é uma função com domínio τ_M.

2) $\forall$ $V, U \in \tau_M$, $V \subset U \longrightarrow R_V^U: F(U) \longrightarrow F(V)$

3) $R_U^U = 1_{F(U)}$, $\forall\ U\in\tau_M$.

4) $\forall\ U,V,W\in\tau_M$, $W\subset V\subset U \longrightarrow R_W^U = R_W^V \circ R_V^U$.

5) Se $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ é um recobrimento aberto de $U\in\tau_M$ e se para cada V_α existe um elemento $\sigma_\alpha \in F(V_\alpha)$ tal que $R^{V_\alpha}_{V_\alpha\cap V_\beta}(\sigma_\alpha) = R^{V_\beta}_{V_\alpha\cap V_\beta}(\sigma_\beta)$ quaisquer sejam os elementos $\alpha,\beta\in I$ então existe um único elemento $\sigma\in F(U)$ tal que $R^U_{V_\alpha}(\sigma) = \sigma_\alpha$ para todo $\alpha\in I$.

Exemplo - Feixe de Campo de vetores.

Seja M uma variedade e τ_M sua topologia

$U\in\tau_M \longrightarrow F(U) = \{\theta \mid \theta$ é um campo de vetores em $U\}$

$U,V\in\tau_M$ e $V\subset U \longrightarrow R_V^U: F(U) \longrightarrow F(V) \mid R_V^U(\theta) = \theta|V$.

É imediato que $\langle F, \langle R_V^U;\ V\subset U\in\tau_M\rangle\rangle$ acima definido é um feixe sobre M.

DEFINIÇÃO 4 - Seja $\langle F, \langle R_V^U;\ V\subset U\in\tau_M\rangle\rangle$ um feixe.

Dizemos que esse feixe é feixe de uma estrutura algébrica se:

1) Para cada $U\in\tau_M$, $F(U)$ está munido desta estrutura.

2) Para cada $V,U\in\tau_M : V\subset U$, R_V^U é um homomorfismo desta estrutura.

No exemplo acima cada $F(U)$ é uma álgebra de Lie e cada R_V^U é um homomorfismo de álgebra de Lie.

Tal feixe passa então a ser denominado um feixe de álgebras de Lie.

Passemos a denotar feixe sobre M por $\mathcal{F}$.

<u>DEFINIÇÃO 5</u> - Seja $\mathcal{F}$ um feixe sobre M.

Os elementos de $F(U)$ serão denominados secções do feixe sobre U.

As aplicações R_V^U serão denominadas de restrição a V

$$R_V^U(\sigma) = \sigma | V .$$

<u>DEFINIÇÃO 6</u> - Germes de um feixe. Seja $\mathcal{F}$ um feixe sobre M, $x \in M$, σ_1, σ_2 duas secções definidas numa vizinhança de x.

Dizemos que σ_1 e σ_2 tem o mesmo germe em x se existe $V_x \in \tau_M$ tal que $\sigma_1 | V_x = \sigma_2 | V_x$.

Facilmente se mostra que esta relação é de equivalência em cada ponto $x \in M$. Denotemos por F_x o conjunto das classes de equivalência em x.

Seja $\overline{F} = \bigcup_{x \in M} F_x$ e $p: \overline{F} \longrightarrow M$ a projeção canônica.

$<\overline{F}, p>$ denomina-se fibrado dos germes do feixe.

p denomina-se projeção.

$\mathcal{F}_x = p^{-1}(x)$ denomina-se fibra do feixe, $x \in M$.

Se o feixe está munido de uma estrutura algébrica esta induz no feixe do germes estrutura análoga.

Na definição seguinte, M denota uma variedade TM o fibrado tangente, $\phi: TM \longrightarrow M$ a projeção deste fibrado e $j^k TM$ (ou simplesmente $j^k T$) o fibrado vetorial dos jatos de ordem k de secções locais do fibrado tangente.

<u>DEFINIÇÃO 7</u> - Um pseudo grupo de Lie infinitesimal de ordem k sobre M é um feixe Θ de campos de vetores sobre M satisfazendo:

1) Θ é um feixe de álgebras de Lie.

2) Um campo de vetores θ definido sobre um aberto $U \epsilon M$ é uma secção de Θ $(\theta \epsilon F(U))$ se e somente se $j^k_x \theta \epsilon j^k \Theta$ para todo $x \epsilon U$, onde $j^k \Theta$ é o conjunto dos jatos de ordem k das secções de Θ.

3) $j^k \Theta$ é um sub fibrado vetorial de $j^k TM$.

4) A aplicação $\rho^k: j^k \Theta \longrightarrow TM$ é sobrejetora

$$j^k_x \theta \longrightarrow \theta(x) .$$

<u>DEFINIÇÃO 8</u> - Sejam Γ um pseudo grupo de Lie transitivo de ordem k e $\Theta(\Gamma)$ o conjunto de seus Γ-campos.

Denotemos $E(\Gamma)$ o sub fibrado vetorial de $j^k TM$ associado ao grupóide $j^k \Gamma$. [ver 6] [9]

Dizemos que Γ é regular se $j^k \Theta(\Gamma) = E(\Gamma)$.

PROPOSIÇÃO 1 - Os pseudo grupos de Lie transitivos Γ; Γ^{+} das transformações conformes, e o das conformes próprias respectivamente são regulares.

Demonstração: [ver 6] .

A guisa de comentário, poderiamos dizer que se Γ é um pseudo grupo de Lie transitivo então $\Theta(\Gamma)$ é um feixe de álgebras de Lie. Quando este feixe é um pseudo grupo de Lie infinitesimal? A resposta [6] é quando Γ é regular.

Poderiamos ainda, colocar a pergunta recíproca.

Dado um pseudo grupo de Lie, infinitesimal Θ, existe um pseudo grupo de Lie Γ de modo que $\Theta(\Gamma) = \Theta$?

A resposta é afirmativa, podemos construir o pseudo grupo Γ por um processo de integração (Frobenius), análogo ao da obtenção de um grupo de Lie a partir de sua álgebra [ver 6] [9] .

Por esse processo, podemos estudar os pseudo grupos de Lie transitivos e regulares, estudando seu pseudo grupo de Lie infinitesimal associado.

Voltemos então ao nosso pseudo grupo de Lie Γ de difeomorfismos conformes do $\mathbb{R}^n$.

Seja $\Theta(\Gamma) = \{\theta \mid \theta$ é um Γ-campo de vetores$\}$

$$\therefore \quad \theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \theta^{i}(x) \frac{\partial}{\partial x} .$$

Seja $(f_t)_t$ uma família a um parâmetro de elementos de Γ tal que $\theta^i(x) = \left(\frac{d}{dt} f_t^i(x)\right)_{t=0}$ onde $f_t = \langle f_t^1, \ldots, f_t^n \rangle$; $f_0(x) = x$.

Derivando relativamente a t a relação

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_t^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f_t^i}{\partial x_k} = \lambda_t \delta_{jk}$$

obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_t^i}{\partial x_j}\right)_{t=0} \left(\frac{\partial f_t^i}{\partial x_k}\right)_{t=0} + \left(\frac{\partial f_t^i}{\partial x_j}\right)_{t=0} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_t^i}{\partial x_k}\right)_{t=0} \right] = \left(\frac{d}{dt} \lambda_t\right)_{t=0} \delta_{jk}.$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{d}{dt} f_t^i\right)_{t=0} \delta_{i_k} + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{d}{dt} f_t^i\right)_{t=0} \right] = \alpha \, \delta_{jk}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \theta^i}{\partial x_j} \cdot \delta_{i_k} + \frac{\partial \theta^i}{\partial x_k} \cdot \delta_{ij} \right) = \alpha \, \delta_{jk}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \theta^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta^j}{\partial x_k} = \alpha \, \delta_{jk} \; ,$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta^j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial \theta^k}{\partial x_j} = 0 \qquad (j \neq k) \\[2ex] \dfrac{\partial \theta^1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \theta^2}{\partial x_2} = \ldots = \dfrac{\partial \theta^n}{\partial x_n} \; . \end{cases}$$

Como observamos, pelo cálculo anterior, a construção de $\Theta(\Gamma)$ a partir de Γ é um processo de linearização.

Assim em nosso caso, $\Gamma = \{f \in \mathrm{Dif}(\mathbb{R}^n) : f$ é conforme$\}$,

é regido pelo S.E.D.P. $\phi \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x_k} = \lambda\, \delta_{jk} \right.$.

Linearizando, obtivemos o S.E.D.P.

$$\bar{\phi} \begin{cases} \dfrac{\partial \theta^j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial \theta^k}{\partial x_j} = 0 & j \neq k \\[2ex] \dfrac{\partial \theta^1}{\partial x^1} = \dots = \dfrac{\partial \theta^n}{\partial x^n} & . \end{cases}$$

Por um lado, é claro que todo elemento de $\Theta(\Gamma)$ é uma solução de $\bar{\phi}$. Será que toda solução de $\bar{\phi}$ é um elemento de $\Theta(\Gamma)$? I.e, será que $\bar{\phi}$ determina $\Theta(\Gamma)$? Esta é exatamente uma das condições imbutida na definição de pseudo grupo de Lie infinitesimal transitivo. Neste caso isso é verdade.

Temos a seguinte:

<u>PROPOSIÇÃO 2</u> - Se Γ é o pseudo grupo de Lie das transformações conformes então o conjunto dos Γ-campos $\Theta(\Gamma)$ é um pseudo grupo de Lie transitivo infinitesimal.

<u>Demonstração:</u> [ver 6] [9]. [Γ é regular]

<u>PROPOSIÇAO 3</u> - $\Theta(\Gamma^+)$ é um pseudo grupo de Lie transitivo, infinitesimal.

<u>Demonstração:</u> É o mesmo argumento da proposição 1. [Γ^+ é regular] .

<u>Observação 1</u>: O S.E.D.P $\overline{\phi}$ é muitas vezes denominado a "equação de Lie" de $\Theta(\Gamma)$. Como veremos mais adiante, $\overline{\phi}$ é completamente integrável.

<u>Nomenclatura</u>: Denominaremos $\Theta(\Gamma)$ onde Γ é o pseudo grupo de Lie das conformes, de Pseudo Grupo Infinitesimal Conforme.

§3 - <u>Jatos Infinito de Campos de Vetores</u>
<u>A Álgebra de Lie de Singer-Sternberg</u>

Sejam M uma variedade e $x \in M$. Consideremos então o seguinte conjunto:

$D_x = \{ j_x^\infty \theta \mid \theta$ é um campo de vetores numa vizinhança de $x\}$.

Consideremos agora as seguintes operações sobre D_x:

$$+ : D_x \times D_x \longrightarrow D_x$$

$$(j_x^\infty \theta, j_x^\infty \eta) \longrightarrow j_x^\infty(\theta+\eta) \qquad \text{i.e} \qquad j_x^\infty \theta + j_x^\infty \eta = j_x^\infty(\theta+\eta)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times D_x \longrightarrow D_x$$

$$(\lambda, j_x^\infty \theta) \longrightarrow j_x^\infty \lambda\theta \qquad \text{i.e} \qquad \lambda j_x^\infty \theta = j_x^\infty \lambda\theta.$$

É imediato que $<+,\cdot>$ tornam D_x um $\mathbb{R}_-$ espaço vetorial.

<u>DEFINIÇÃO 1</u> - (Colchete de Lie sobre D_x) .

Sejam $X,Y \in D_x$, logo $X = j_x^{\infty}\theta_1$, $Y = j_x^{\infty}\theta_2$.

$$[X,Y] \underset{def}{=} j_x^{\infty}[\theta_1,\theta_2].$$

É uma verificação imediata que a relação acima está bem definida (independe dos representantes) .

Portanto, tendo-se em conta o que acima está dito, temos:

<u>PROPOSIÇÃO 1</u> - D_x é uma álgebra de Lie.

<u>DEFINIÇÃO 2</u> - $D_x^k \underset{def}{=} \{X \in D_x : X = j_x^{\infty}\theta \wedge j_x^k\theta = 0\}$; $k \in \mathbb{N}$;

$D_x^{-1} \underset{def}{=} D_x$.

<u>PROPOSIÇÃO 2</u> - $\bigcap_{k=-1}^{\infty} D_x^k = \{0\}$; $D_x = D_x^{-1} \supset D_x^0 \supset \ldots \supset D_x^k \supset \ldots$.

(filtração [11]

<u>PROPOSIÇÃO 3</u> - $[D_x^k, D_x^j] \subset D_x^{k+1}$, $k,j \geq -1$. [ver 10.11]

<u>PROPOSIÇÃO 4</u> - $D_x^{-1}/D_x^0 \cong T_xM$ onde T_xM é o espaço tangente a M em x (isomorfismo de espaço vetoriais) .

<u>Demonstração:</u> $\phi: D_x^{-1} \longrightarrow T_xM : \phi(X) = \theta(x)$ onde $X = j_x^{\infty}\theta$.

É claro que essa aplicação independe de representantes e também que

1) $\phi(X + Y) = \phi(X) + \phi(Y)$

2) $\phi(\lambda X) = \lambda \phi(X)$

3) $\phi(X) = 0 \Longleftrightarrow \theta(x) = 0 \Longleftrightarrow j_x^0 \theta = 0 \Longleftrightarrow \theta \epsilon D_x^0$.

Seja $v \epsilon T_x M$ e seja θ um campo tal que $\theta(x) = v$.

Seja $X = j_x^\infty \theta$ $\therefore$ $\phi(X) = v$ $\therefore$ ϕ é sobre

$$\therefore \quad D_x^{-1} \big/_{\mathrm{Ker}\ \phi} = D_x^{-1} \big/_{D_x^0} \approx T_x M .$$

<u>DEFINIÇÃO 3</u> - $g^k \underset{\mathrm{def}}{=} \{ j_x^{k+1} \theta \mid j_x^k \theta = 0 \}$ onde θ é um campo de vetores definido numa vizinhança de $x \epsilon M$. (M-variedade)

É claro que g^k é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

<u>PROPOSIÇÃO 5</u> - $g^k \approx L_s^{k+1}(T_x M, T_x M)$ $(k \geq 0)$ (isomorfismo de espaço vetoriais) onde $L_s^{k+1}(T_x M, T_x M)$ é o conjunto das aplicações k+1-lineares simétricas.

$$g^{-1} \underset{\mathrm{def}}{=} T_x M$$

<u>LEMA 1</u> - Seja $\psi^k : g^k \times T_x M \longrightarrow g^{k-1}$ definida por:

$\psi^k(X,v) = [X,v] = j^k_x[\theta,V]$ onde $X = j^{k+1}_x\theta : j^k_x\theta = 0$ e V é um campo tal que $V(x) = v$. Então ψ^k está bem definida e é bi-linear.

<u>Demonstração</u>: Seja $\langle X_1,\ldots,X_n\rangle$ uma carta de M numa vizinhança de x.

$$\therefore \quad \theta = \sum_{i=1}^{n} \theta^i \frac{\partial}{\partial x_i} \; ; \quad \eta = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$[\theta,\eta] = \sum_j \sum_i \left(\theta^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x_i} - \eta^i \frac{\partial \theta^j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\therefore \quad j^k_x[\theta,\eta] = \sum_j \sum_{i\, i_1 \ldots i_k} \left(- \eta^i(x) \frac{\partial^{k+1}\theta^j}{\partial x^i \partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}}(x)\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x$$

$\therefore$ ψ^k está bem definida (independe dos representantes).

Claramente ψ é bi-linear.

<u>LEMA 2</u> - $g^0 \approx L(T_xM,T_xM)$ (isomorfismo de espaço vetorial)

$$\text{Seja} \quad \phi: g^0 \longrightarrow L(T_xM,T_xM)$$
$$X \longrightarrow \phi(X)$$

tal que a matriz de $\phi(X)$ na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x \right\}_{i=1\ldots n}$

onde $x = \alpha(X)$ é: $[\phi(X)]_{\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}} = [\frac{\partial \theta^i}{\partial x_j}(x)]$

onde $X = j^1_x \theta : j^0_x \theta = \theta(x) = 0.$

Claramente ϕ é linear e injetora.

Por outro lado, ϕ é sobrejetora, pois se $T \in L(T_xM, T_xM)$ temos $[T]_{\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\middle|_x\right\}} = (a_{ij})$; logo basta tomar θ satisfazendo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta^i}{\partial x_j} = a_{ij} \\ \theta^i(x) = 0 . \end{cases}$$

Seja então $X = J^1_x \theta$ logo $\phi(X) = T$.

<u>LEMA 3</u> - Seja $\lambda^k : g^k \longrightarrow L^k(T_xM, g^{k-1})$

$$\lambda^k(X)(v) = \psi^k(X,v)$$

Sendo $\psi^k : g^k \times T_xM \longrightarrow g^{k-1}$ a aplicação definida de acordo com o lema 2.

Então λ^k é um monomorfismo (linear injetora).

<u>Demonstração</u>: Claramente λ^k é linear

Por outro lado:

$$\lambda^k(X) = 0 \longrightarrow \lambda^k(X)(v) = 0 \quad \forall\ v \longrightarrow \left(\sum_{i,i_1\ldots i_k} \left(-\eta^i(x) \frac{\partial^{k+1}\ \theta^j\ (x)}{\partial x^i \partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}}\right)\right)_j = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^{k+1}\theta^j}{\partial x^i \partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_k}}(x) = 0 \quad \forall\ i,j,i_1,\ldots i_k \qquad (*)$$

Como $X = j_x^{k+1}\theta$ e $j_x^k\theta = 0$; (*) nos diz que

$j_x^{k+1}\theta = 0$

$\therefore \quad X = 0 \quad \therefore \quad \lambda^k(X) = 0 \longrightarrow X = 0 \quad \therefore\ \lambda^k$ é injetora.

Demonstração da Proposição 5

Seja $\phi^k : g^k \longrightarrow L^{k+1}(T_xM, T_xM)$ definida do seguinte modo:

$$\phi^k(X)(v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}) = \lambda^0 \ldots \lambda^{k-1}\ \lambda^k(X)(v_1,\ldots v_{k+1})$$

Pelos lemas se tem que ϕ^k está bem definida é linear e injetora e inclusive a expressão algébrica de ϕ^k é a seguinte:

$$\phi^k(X)(v_1,\ldots v_{k+1}) = j_x^0\ [\ldots[\theta\ V_1]\ V_2]\ \ldots\ V_{k+1}]$$

onde $X = j_x^{k+1}\theta$ e $V_1,\ldots V_{k+1}$ são campos tais que:

$$V_j(x) = v_j; \quad j = 1\ldots k+1\ .$$

Agora afirmo que a aplicação:

$$\phi^k(X) : \underbrace{T_xM \times \ldots \times T_xM}_{k+1} \longrightarrow T_xM \ ; \quad \text{é } k+1 \text{ simétrica .}$$

<u>Demonstração</u>: Indução sobre k.

$k = 1$: $\phi^1(X) : T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM$

$$\phi^1(X)(v_1,v_2) = j_x^0\, [[\theta\ V_1]\ V_2]\ .$$

Mas pela <u>identidade de Jacobi</u> temos:

$$[[\theta\ V_1]\ V_2] + [[V_2\ \theta]\ V_1] + [[V_1\ V_2]\ \theta] = 0\ .$$

Mas $[V_1\ V_2] = 0$, pois como independe dos campos podemos supor o seguinte. Seja $\langle U, x^1,\dots x^n\rangle$ uma carta de M tal que $x \in U$. Como $v_1, v_2 \in T_xM$ temos

$$v_1 = \sum_i v_i^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \quad ; \qquad v_2 = \sum_i v_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \ .$$

Se $y \in U$ então $\displaystyle V_1(y) \underset{\text{def}}{=} \sum_i v_i^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_y$

$$V_2(y) \underset{\text{def}}{=} \sum_i v_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_y\ .$$

$\therefore$ tomando V_1, V_2 desse modo temos $[V_1\ V_2] = 0$.

$$[V_2\ \theta] = -[\theta, V_2]\ .$$

$$\therefore\quad [[\theta\ V_1], V_2] = [[\theta\ V_2], V_1]$$

$$\therefore\quad j_x^0\, [[\theta\ V_1]\ V_2] = j_x^0\, [[\theta, V_2]\ V_1]$$

$$\therefore\quad \phi^1(X)(v_1,v_2) = \phi^1(X)(v_2,v_1)\ .$$

Agora suponhamos que

$$[\ \dots\ [[\theta, V_1]\ \dots\ V_i]\ \dots\ V_j]\ \dots\ V_k] =$$

$$= [\ \dots\ [\theta, V_1]\ \dots\ V_j]\ \dots\ V_i]\ \dots\ V_k] \qquad \forall\ i,j \le k\ .$$

Por outro lado

$$[\ \dots\ [\theta\ V_1]\ \dots\ ]\ V_k]\ V_{k+1}] = [[Y\ V_k]\ V_{k+1}] =$$

$$= [[Y, V_{k+1}]\ V_k] = [\ \dots\ [\theta\ V_1]\ \dots\ ]\ V_{k+1}]\ V_k]\ .$$

Logo pela hipótese de indução segue imediatamente que

$$\phi^k(X)(v_1, \dots v_i\ \dots\ v_j, \dots\ v_{k+1}) = \phi^k(X)(v_1, \dots\ v_j \dots v_i, \dots\ v_{k+1})$$

$$\therefore \quad \phi^k(g^k) \hookrightarrow L_s^{k+1}(T_xM, T_xM)\ .$$

Mostremos agora que essa aplicação é sobre $L_s^{k+1}(T_xM, T_xM)$.

Seja $x \in V \subset M$, aberto, $U \subset \mathbb{R}^n$, vizinhança de zero tal que (V,U,ϕ) é uma parametrização com $\phi(x) = 0$.

Denotemos ϕ por $(x_1, \dots x_n)$.

Denotemos por $\{e_1, \dots e_n\}$ a base de T_xM; $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_x\right\}$ segundo a carta acima.

Seja $L \in L_s^{k+1}(T_xM, T_xM)$.

Denotemos

$$L(e_{i_1},\dots e_{i_{k+1}}) = \left(L^1(e_{i_1},\dots e_{i_{k+1}}),\dots L^n(e_{i_1},\dots e_{i_{k+1}})\right)$$

as coordenadas do vetor $L(e_{i_1},\dots e_{i_{k+1}})$ na base $\{e_1,\dots e_n\}$.

Seja $\theta = \sum \theta^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ o campo tal que em coordenadas

$$\theta^i(x_1,\dots x_n) =$$

$$= \sum_{1\leq i_1+\dots+i_{k+1}\leq n} a_{i_1 \dots i_{k+1}} x_{i_1}\dots x_{i_{k+1}} L^i(e_{i_1},\dots e_{i_{k+1}})$$

onde $a_{i_1 \dots i_{k+1}} \in \mathbb{R}$, escolhidos convenientemente.

Seja $X = j_x^{k+1}\theta$. É claro que $j_x^k \theta = 0 \quad \therefore \quad X \in g^k$.

É claro também que com escolhas convenientes dos $a_{i_1\dots i_{k+1}}$ se tem $\phi^k(X) = L$.

$$\therefore \quad g^k = L_s^{k+1}(T_xM, T_xM) .$$

<u>PROPOSIÇÃO 6</u> - $D_x^k / D_x^{k+1} \approx g^k$ (isomorfismo de espaço vetorial).

<u>Demonstração</u>: A seguinte sequência é exata:

$$0 \rightarrowtail D_x^{k+1} \xrightarrow{i} D_x^k \xrightarrow{\pi_k^\infty} g^k \longrightarrow 0$$

onde $\pi_k^\infty(X) = j_x^{k+1}\theta$ e $X = j_x^k\theta$.

$$X \in \mathrm{Ker}\ \pi_k^\infty \longleftrightarrow j_x^{k+1}\theta = 0 \longleftrightarrow X \in D_x^{k+1}$$

$$\therefore \quad D_x^k / D_x^{k+1} \simeq g^k \simeq L_s^{k+1}(T_xM, T_xM).$$

A esta altura, achamos válida, se não necessária a seguinte dúvida do leitor:

Porque foram introduzidos os objetos algébricos acima?

Bem uma maneira de abordar a teoria dos pseudo grupos de Lie infinitesimais transitivos é estudar a álgebra de Lie de Singer-Sternberg [8] [9] que lhe está associada:

Os objetos algébricos acima, estão intimamente ligados a essa álgebra de Lie.

Por outro lado, há uma certa naturalidade no surgimento desses objetos:

Seja $M = \mathbb{R}^n$.

$D_0 = \{j_0^\infty\theta \mid \theta$ é um campo de vetores numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n\}$

$$\therefore \quad \theta = \langle\theta^1, \ldots, \theta^n\rangle; \quad \theta^i : V_0\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad j_0^\infty\theta = (j_0^\infty\theta^1, \ldots j_0^\infty\theta^n)$$

$$j_0^\infty \theta^r \cong$$

$$\cong \left(\theta^r(0),\ \frac{\partial\theta^r}{\partial x_1}(0),\dots,\ \frac{\partial\theta^r}{\partial x_n}(0),\ \left(\frac{\partial^2\theta^r}{\partial x_i\,\partial x_j}(0)\right)_{i,j}\cdots\left(\frac{\partial^k\theta^r}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}\right)_{i_1\dots i_k}\dots\right) .$$

Denotemos: $\quad P^r_{i_1\dots i_k} = \dfrac{\partial^k\theta^r}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}$

$$\therefore \quad j_0^\infty \theta^r =$$

$$= \left(\theta^r(0);\ (P^r_i(0))_i;\ (P^r_{i_j}(0))_{i,j};\ \dots(P^r_{i_1\dots i_k}(0))_{i_1\dots i_k}\dots\right)$$

$$\therefore \quad j_0^\infty \theta \cong$$

$$\cong \left(\theta^r(0)\Big|_{r=1}^{n};\ (P^r_i(0))_i\Big|_{r=1}^{n};\ \dots\ (P^r_{i_1\dots i_k}(0))_{i_1\dots i_k}\Big|_{r=1}^{n}\ \dots\right)$$

$$\therefore \quad j_0^\infty \theta \cong \in \mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^n) \times L_s^2(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L_s^k(\mathbb{R}^n) \times \dots \quad .$$

A primeira vista, não parece claro, que se possa introduzir em $\mathbb{R}^n \times L(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L_s^k(\mathbb{R}^n) \times \dots$ um colchete de Lie, pertinente.

Mas é isso, num certo sentido, que se consegue fazer.

E nesse sentido as proposições anteriores são extremamente importantes.

Esboçando de uma maneira mais geral, seja M uma variedade, $x_0 \in M$, $T_{x_0}M$ o espaço tangente.

Tomemos $S^i(T_{x_0}M)$ a i-ésima potência simétrica de $T_{x_0}M$.

Denotemos $\hat{S}(T_{x_0}M) = \prod_{j=0}^{\infty} S^j(T_{x_0}M)$, demonstra-se que $\hat{S}(T_{x_0}M)$ possui uma estrutura "natural" de $\mathbb{R}$-álgebra unitária comutativa.

$\hat{S}(T_{x_0}M)$ denomina-se álgebra das séries formais do espaço vetorial $T_{x_0}M$.

Seja $T^*_{x_0}M$ o dual de $T_{x_0}M$. Denote-se $D(T_{x_0}M)$ o conjunto de derivações de $\hat{S}(T^*_{x_0}M)$.

Ver [9]; [10] · [11].

$D(T_{x_0}M)$ é uma álgebra de Lie.

Demonstra-se que $D(T_{x_0})$ é isomorfo como espaço vetorial a $T_{x_0}M \otimes \hat{S}(T_{x_0}M)$ ver [9] [10] [11].

Por meio desse isomorfismo induz-se uma estrutura de álgebra de Lie sobre $T_{x_0}M \otimes \hat{S}(T_{x_0}M)$.

Finalmente, demonstra-se que essa álgebra de Lie é isomorfa a D_{x_0}. [9]. [10] [11].

Assim $\prod_{k=-1}^{\infty} g^k$ fica munido de uma estrutura de álgebra de Lie isomorfa a D_{x_0}.

Existe em português um tratamento sistemático das afirmações feitas acima, ver [10].

§4 - Análise da dimensão do Pseudo Grupo Infinitesimal Conforme

Voltemos agora a considerar Θ um pseudo grupo de Lie transitivo, infinitesimal sobre M.

Para cada $x \in M$ consideremos:

1) Θ_x a fibra do feixe Θ.

$\Theta_x = \{$germes de campos de vetores de Θ numa vizinhança de $x\}$.

2) $L_x(\Theta) = \{j_x^{\infty}\theta \mid \theta \in \Theta_x\}$.

Claramente $L_x(\Theta)$ é uma sub-álgebra de Lie de D_x.

PROPOSIÇÃO 1 - Sendo M conexa, se $x, x' \in M$ então $L_x(\Theta) \simeq$ $\simeq L_{x'}(\Theta)$ (isomorfismo de álgebra de Lie) .

Esboço da demonstração:

Seja θ um campo de vetores de Θ, definido numa vizinhança de x tal que θ é deduzido de uma família a 1-parâmetro ϕ_t de Γ, onde Γ é o pseudo grupo de Lie transitivo, gerado por Θ, segundo o teorema de correspondência citado, a guisa de comentário, anteriormente.

Seja $f \in \Gamma$ tal que $f(x) = x'$.

Então o campo de vetores, deduzido da família a 1-parâmetro, $\psi_t = f \circ \phi_t \circ f^{-1}$, coincide com $df(\theta)$ numa vizinhança de x'.

Logo $df(\theta)$ é um campo de vetores de θ e a aplicação $\theta \longrightarrow df(\theta)$ induz um isomorfismo de álgebra de Lie de $L_x(\theta)$ sobre $L_{x'}(\theta)$ [ver 6].

Denotemos $L_x(\theta) = L$; $L_k = L \cap D_x^k$.

Então temos $L_{-1} = L \supset L_0 \supset \dots \quad L_k \supset \dots$.

PROPOSIÇÃO 2 - $L_k/L_{k+1} \overset{\cup}{\hookrightarrow} D_x^k/D_x^{k+1}$ (i.e, L_k/L_{k+1} pode ser identificado a um sub espaço de D_x^k/D_x^{k+1}).

Denotemos: $\tilde{g}^k = L_k/L_{k+1}$

$\therefore \quad \tilde{g}^k \overset{\cup}{\hookrightarrow} L_s^{k+1}(T_xM, T_xM)$.

PROPOSIÇÃO 3 - $L \simeq \prod_{k=-1}^{\infty} \tilde{g}^k$ (isomorfismo de álgebra de Lie) [ver 9] [10] [11] .

DEFINIÇÃO 1 - Seja $V \subset L_s^{k+1}(T_xM, T_xM)$ um sub espaço vetorial. Seja $F \in L_s^{k+2}(T_xM, T_xM)$.

Para cada $v \in T_xM$ denotemos por $F(v)$ a aplicação:

$$F(v): \underbrace{T_xM \ \ldots \ T_xM}_{k+1 \text{ vezes}} \longrightarrow T_xM$$

$$F(v)(v_1, \ldots v_{k+1}) = F(v, v_1, \ldots v_{k+1}) .$$

Entende-se por prolongamento de V, ao espaço vetorial:

$$PV = \{F \in L_s^{k+2}(T_xM, T_xM) \ : \ F(v) \in V \quad \forall \ v \in T_xM\} .$$

Observação: Esta definição pode a primeira vista parecer artificial, mas ela é extremamente "natural" no contêxto, ela é o correspondente algébrico da noção de prolongamento de um S.E.D.P. [ver §9 capítulo I] .

PROPOSIÇÃO 4 - Seja M uma variedade, Θ um pseudo grupo de Lie infinitesimal, transitivo sobre M.

Então $\tilde{g}^{k+1} \subseteq p\tilde{g}^k$

$$\tilde{g}^{k+1} \equiv \{j_x^{k+2}\theta \ : \ j_x^{k+1}\theta = 0 \ : \ \theta \in \Theta_x\}$$

$$\tilde{g}^k \equiv \{j_x^{k+1}\theta \ : \ j_x^k\theta = 0 \ : \ \theta \in \Theta_x\} .$$

Seja $X \in \tilde{g}^{k+1}$; pelo isomorfismo da proposição 5 $X \approx \phi^{k+1}(X)$; tal que

$$\phi^{k+1}(X)(h_1, \ldots h_{k+2}) = j_x^0 \, [\ \ldots \ [\theta, V_1] \ V_2] \ \ldots \ V_{k+2}]$$

onde $X = j_x^{k+2}\theta$; $(\theta \in \Theta_x)$ e $V_1,\dots V_{k+2}$ são campos,

tal que: $V_j(x) = h_j$; $j = 1\dots k+2$

$\therefore$ $h \in T_xM \longrightarrow X(h) \simeq \phi^{k+1}(X)(h)$

onde $\phi^{k+1}(X)(h) : \underbrace{T_xM \times \dots \times T_xM}_{k+1 \text{ vezes}} \longrightarrow T_xM$ tal que

$$\phi^{k+1}(X)(h)(h_1,\dots h_{k+1}) = \phi^{k+1}(X)(h,\dots h_{k+1})$$

$\therefore$ $X(h) \in \tilde{g}^k$ $\forall\, h \in T_xM$ $\therefore$ $X \in p\tilde{g}^k$.

<u>PROPOSIÇÃO 5</u> - Dimensão de L é finita se e somente se $\exists\, k_0$: $\tilde{g}^{k_0} = \{0\}$.

<u>Demonstração</u>:

Se $\tilde{g}^{k_0} = \{0\}$ então $\tilde{g}^k = \{0\}$ $\forall\, k \geq k_0$ pois $\tilde{g}^{k+1} \subseteq p\tilde{g}^k$ e $p\,\tilde{g}^{k_0} = \{0\}$.

Seja $\pi^{k_0}: L \longrightarrow j^{k_0}\Theta_x : \pi^{k_0}(X) = j_x^{k_0}\theta$; $X = j_x^{\infty}\theta$ $\theta \in \Theta_x$; onde $j^{k_0}\Theta_x = \{j_x^{k_0}\theta \mid \theta \in \Theta_x\}$.

É claro que π^{k_0} é um epimorfismo de espaço vetorial.

Por outro lado:

$$\pi^{k_0}(X) = 0 \longrightarrow j_x^{k_0}\theta = 0 \longrightarrow j_x^{k_0+1}\theta \in \tilde{g}^{k_0} \longrightarrow j_x^{k_0+1}\theta = 0 \ .$$

Logo por indução, segue imediatamente que

$$j_x^{k_0+j}\theta \in \tilde{g}^{k_0+j-1} \quad \forall\, j \geq 1 \quad \text{logo} \quad j_x^{k_0+j}\theta = 0 \quad \forall\, j \geq 1$$

$$\therefore \quad j_x^{\infty}\theta = 0 \quad \therefore \quad X = 0 \quad \therefore \quad \pi^{k_0} \text{ é um isomorfismo.}$$

Como $j^{k_0}\theta_x$ é de dimensão finita, L é de dimensão finita.

A recíproca é imediata.

<u>TEOREMA 1</u> - Seja Γ o pseudo grupo das transformações conforme do $\mathbb{R}^n$. Seja $\Theta(\Gamma)$ o pseudo grupo de Lie infinitesimal associado.

Então as fibras do feixe $\Theta(\Gamma)$ são de dimensão finita para todo $n \geq 3$.

<u>LEMA 1</u> - $L(\Theta_0) = L_0$ é de dimensão finita para $n \geq 3$.

$$\Theta_0 = \{\theta \mid \theta \text{ é um } \Gamma\text{-campo numa vizinhança de zero}\} \ .$$

$$L_0 = j^{\infty}\Theta_0 = \{j_0^{\infty}\theta \mid \theta \in \Theta_0\} \ .$$

Façamos a demonstração para $n = 3$.

Já sabemos que as equações de Θ_0 são:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta^j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial\theta^k}{\partial x_j} = 0 \quad (j \neq k) \\ \\ \dfrac{\partial\theta^1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial\theta^2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial\theta^3}{\partial x_3} \end{cases} \qquad \begin{cases} p^i_j + p^j_i = 0 \quad (i \neq j) \\ \\ p^1_1 = p^2_2 = p^3_3 \end{cases}$$

$$\tilde{g}^0 = \{j^1_0\theta \mid \theta\in\Theta_0 \wedge j^0_0\theta = 0\}$$

$$p\tilde{g}^0 = \{T \in L^2_s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \mid T(x) \in \tilde{g}^0 \quad \forall\ x\in\mathbb{R}^3\}$$

$$p(p\tilde{g}^0) = \{T \in L^3_s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \mid T(x) \in p\tilde{g}^0 \quad \forall\ x\in\mathbb{R}^3\}.$$

O nosso objetivo é provar que $p(p\tilde{g}^0) = \{0\}$.

Sejam $\beta = \{e_1,e_2,e_3\}$ base canônica de $\mathbb{R}^3$, $T \in p(p\tilde{g}^0)$.

A idéia é demonstrar que $T(e_i,e_j,e_k) = 0$ $\forall\ i,j,k = 1,2,3$.

Sejam $x,y\in\mathbb{R}^3$ $\therefore$ $T(x)(y): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Sabemos que: $T(x)(y) = T(y)(x)$ e que a matriz de $T(x,y)$ relativamente a base β; $[T(x)(y)]_\beta$, é da forma

$$[T(x)(y)]_\beta = \begin{bmatrix} a & b & c \\ -b & a & d \\ -c & -d & a \end{bmatrix} \qquad \text{ou}$$

$$\langle T(x)(y)(u),v\rangle + \langle u,T(x)(y)(v)\rangle = \alpha(T(x)(y))\langle u,v\rangle$$

onde $<,>$ denota o produto interno usual.

Logo temos:

$$\alpha(T(e_2)(e_3)) = \alpha(T(e_2)(e_3))<e_1,e_1> =$$

$$= <T(e_2)(e_3)(e_1),e_1> + <e_1,T(e_2)(e_3)(e_1)>$$

$$= <T(e_2)(e_3)(e_1),e_1> + <T(e_2)(e_1)(e_1),e_3>$$

$$- <T(e_2)(e_1)(e_1),e_3> + <e_1,T(e_3)(e_1)(e_2)>$$

$$= - <T(e_2)(e_1)(e_1),e_3> + <e_1,T(e_3)(e_1)(e_2)>$$

$$+ <T(e_3)(e_1)(e_1),e_2> - <T(e_3)(e_1)(e_1),e_2>$$

$$= - <T(e_2)(e_1)(e_1),e_3> - <T(e_3)(e_1)(e_1),e_2>$$

$$= - \alpha(T(e_1)(e_1))<e_2,e_3> = 0$$

$$\therefore \quad <e_1,T(e_1)(e_2)(e_3)> = 0 .$$

Analogamente

$$<e_2,T(e_1)(e_2)(e_3)> = <e_3,T(e_1)(e_2)(e_3)> = 0 .$$

Por outro lado, temos as seguintes equações:

$$\mathrm{I} \quad \begin{cases} <T(e_1)(e_1)(e_1),e_1> = \lambda \\ <T(e_1)(e_1)(e_2),e_2> = \lambda \\ <T(e_1)(e_1)(e_3),e_3> = \lambda \end{cases}$$

$$\text{II}\quad\begin{cases} \langle T(e_2)(e_2)(e_1),e_1\rangle = -\lambda \\ \langle T(e_2)(e_2)(e_2),e_2\rangle = -\lambda \\ \langle T(e_2)(e_2)(e_3),e_3\rangle = -\lambda \end{cases}$$

$$\text{III}\quad\begin{cases} \langle T(e_3)(e_3)(e_1),e_1\rangle = -\lambda \\ \langle T(e_3)(e_3)(e_2),e_2\rangle = -\lambda \\ \langle T(e_3)(e_3)(e_3),e_3\rangle = -\lambda \end{cases}$$

$$\text{IV}\quad\begin{cases} \langle T(e_1)(e_2)(e_1),e_1\rangle = 0 \\ \langle T(e_1)(e_2)(e_2),e_2\rangle = 0 \\ \langle T(e_1)(e_2)(e_3),e_3\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\text{V}\quad\begin{cases} \langle T(e_2)(e_3)(e_1),e_1\rangle = 0 \\ \langle T(e_2)(e_3)(e_2),e_2\rangle = 0 \\ \langle T(e_2)(e_3)(e_3),e_3\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\text{VI}\quad\begin{cases} \langle T(e_1)(e_3)(e_1),e_1\rangle = 0 \\ \langle T(e_1)(e_3)(e_2),e_2\rangle = 0 \\ \langle T(e_1)(e_3)(e_3),e_3\rangle = 0 \end{cases}$$

Combinando a 3ª linha de (II) com a segunda linha de (III) temos:

$$<T(e_2)(e_2)(e_3),e_3> + <T(e_3)(e_3)(e_2),e_2> = -2\lambda$$

$\therefore \quad -2\lambda = \alpha<e_2,e_3> = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\lambda = 0}$

$\therefore \quad \text{VII} \left\{ \lambda = 0 \right.$.

Combinando as sete equações acima segue imediatamente que $[T(e_i)(e_j)] = [0] \quad \forall\ i,j = 1,2,3$

$\therefore \quad <T(e_i)(e_j)(e_k),e_\ell> = 0 \quad \forall\ i,j,k,\ell = 1,2,3$

$\therefore \quad T(e_i,e_j,e_k) = 0 \quad \forall\ i,j,k = 1,2,3$

$\therefore \quad T = 0$

$\therefore \quad p(p\tilde{g}^0) = \{0\}$.

Como $\quad \tilde{g}^1 \subset p\tilde{g}^0 \longrightarrow p\tilde{g}^1 \subset p(p\tilde{g}^0)$

$$\tilde{g}^2 \subset p\tilde{g}^1 \subset p(p\tilde{g}^0)$$

$\therefore \quad \tilde{g}^2 = 0$.

Pela proposição anterior, (proposição 5) segue que L_0 é de dimensão finita.

Observamos finalmente que o que foi essencial na demonstração acima, além das propriedades de T, foi podermos contar com $\underline{3}$ vetores ortonormais.

Portanto a demonstração acima pode ser facilmente formalizada para todo $n > 3$.

LEMA 2 - $\boxed{\dim \tilde{g}^0 = \frac{n(n-1)}{2} + 1}$ $(n \geq 3)$.

Demonstração: $\tilde{g}^0 = \{j_0^1\theta \mid \theta\epsilon\Theta_0 \wedge j_0^0\theta = 0\}$

$$j_0^1\theta \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial\theta^1}{\partial x_1} & \frac{\partial\theta^1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\theta^1}{\partial x_n} \\ -\frac{2}{x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial\theta^n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\theta^n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & a & \cdots & b \\ -a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c \\ -b & \cdots & -c & \lambda \end{bmatrix}$$

$\therefore$ as matrizes da forma acima caracterizam $j_0^1\theta$

$\therefore$ $\tilde{g}^0$ é a álgebra de Lie do subgrupo das semelhanças gerado pelo grupo ortogonal juntamente com as homotetias

$\therefore$ $\boxed{\dim \tilde{g}^0 = \frac{n(n-1)}{2} + 1}$ $\square$

LEMA 3 - $\boxed{\dim p\tilde{g}^0 = n}$

Demonstração:

Seja $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \tilde{g}^0) = \{T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \tilde{g}^0 : \text{lineares}\}$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \tilde{g}^0) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$T \longrightarrow \tilde{T}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : \tilde{T}(x,y) = T(x)y \ .$$

Seja $\partial: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \tilde{g}^0) \longrightarrow \mathcal{L}^2_A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$T \longrightarrow \partial T$$

onde $\partial T(x,y) = T(x)y - T(y)x$

onde $\mathcal{L}^2_A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{\text{bi-linear anti-simétrica}\}$.

Consideremos então a seguinte sequência:

(I) $$0 \longrightarrow p\tilde{g}^0 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \tilde{g}^0) \xrightarrow{\partial} \mathcal{L}^2_A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow 0 \ .$$

Afirmamos que é exata:

a) $p\tilde{g}^0 = \operatorname{Ker} \partial$ por definição de $p\tilde{g}^0$

b) $\partial: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \tilde{g}^0) \longrightarrow \mathcal{L}^2_A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é sobrejetora.

Com efeito:

Seja $o(n) = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mid T^t + T = 0\}$

$\therefore \quad \tilde{g}^0 \supset o(n)$

$\therefore \quad L(\mathbb{R}^n, \tilde{g}^0) \supset L(\mathbb{R}^n, o(n))$

$\therefore \quad \partial(L(\mathbb{R}^n, \tilde{g}^0)) \supset \partial(L(\mathbb{R}^n, o(n)))$.

Agora vamos mostrar que:

$\partial\colon L(\mathbb{R}^n, o(n)) \longrightarrow L^2_A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é sobrejetora .

(II) $\quad 0 = p\,o(n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, o(n)) \xrightarrow{\partial} L^2_A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow 0$

é exata.

$p\,o(n) = 0$ — trivial .

$p\,o(n) = \mathrm{Ker}\,\partial$ — definição de $p\,o(n)$.

Mas $\quad \dim L(\mathbb{R}^n, o(n)) = \dfrac{n^2(n-1)}{2}$

$\dim L^2_A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \dim \Lambda^2 \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^n$

$\dim \Lambda^2 \mathbb{R}^{n*} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$\therefore \quad \dim L^2_A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \dfrac{n^2(n-1)}{2}$

$\therefore$ (II) é exata

$\therefore$ (I) é exata .

Mas $\quad \dim L(\mathbb{R}^n, \tilde{g}^0) = \dim \mathrm{Ker}\,\partial + \dim \mathrm{Im}\,\partial$

$$\therefore \quad \dim p\tilde{g}^0 = \dim L(\mathbb{R}^n, \tilde{g}^0) - \dim L^2_A(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$\therefore \quad \dim p\tilde{g}^0 = \frac{n^2(n-1)}{2} + n - \frac{n^2(n-1)}{2} = n$$

$$\therefore \quad \boxed{\dim p\tilde{g}^0 = n}$$

Como $\tilde{g}^1 \subset p\tilde{g}^0$ e $L_0 = \tilde{g}^{-1} \oplus \tilde{g}^0 \oplus g^1$ obtemos

$$\boxed{\dim L_0 \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$$

<u>LEMA 4</u> - A equação de Lie de $\theta(\Gamma)$ é "completamente integrável".

I.e, seja

$$\bar{\phi} = \begin{cases} \dfrac{\partial\theta^i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\theta^j}{\partial x_i} = 0 & (i \neq j) \\[2ex] \dfrac{\partial\theta^1}{\partial x_1} = \dots = \dfrac{\partial\theta^n}{\partial x_n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

a equação de Lie de $\theta(\Gamma)$ então $p\bar{\phi}$ é completamente integrável.

<u>Demonstração</u>: Tendo-se em conta as identificações implícitas, denotemos:

$$\bar{\phi} \simeq j^1\theta(\Gamma) = j^1\theta = E_1 \subset j^1 T\mathbb{R}^n$$

que sabemos ser um sub fibrado vetorial.

(Por simplicidade de notação estamos colocando $\Theta(\Gamma) = \Theta)$.

Consideremos então $pE_1 \subset j^2 T\mathbb{R}^n$ o prolongamento de E_1 .

Afirmamos que pE_1 é um sub fibrado vetorial .

Com efeito:

Seja $\pi_1^2 : j^2\Theta \longrightarrow j^1\Theta \longrightarrow 0$ a projeção canônica.

Como $pE_1 \supset j^2\Theta$ temos que $\pi_1^2 : pE_1 \longrightarrow j^1\Theta \longrightarrow 0$ é exata.

Por outro lado, se $a \in \mathbb{R}^n$ então temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow (p\tilde{g}^0)_a = \mathrm{Ker}\ \pi_1^2 \mid (pE_1)_a \longrightarrow (pE_1)_a \longrightarrow j_a^1\Theta \longrightarrow 0 \ .$$

Logo as fibras tem a mesma dimensão.

$\therefore$ pE_1 é um sub fibrado vetorial .

Por outro lado, seja $\pi_2^3 : j^3\Theta \longrightarrow j^2\Theta \longrightarrow 0$ a projeção canônica.

Como $pE_1 \supset j^3\Theta$ temos que $\pi_2^3 : p^2E_1 \longrightarrow j^2\Theta \longrightarrow 0$ é exata.

Mas, fibra por fibra, p^2E_1 se projeta sobre pE_1.

Seja $\tilde{x}$ um jato integral de pE_1 que se projeta sobre x, jato integral de E_1

$\therefore$ $C_{\tilde{x}}(pE_1) = pC_x(E_1)$.

Mas $\quad C_x E_1 \cong p\tilde{g}^0 \qquad \therefore \quad C_{\tilde{x}}(pE_1) \cong p^2\tilde{g}^0 = \{0\}$

$\therefore \quad pE_1$ é completamente integrável.

Então todo jato de pE_1 é jato de uma única solução além disso $pE_1 = j^2\theta$.

Por outro lado, tendo em conta a sequência exata (I) temos que:

$$\begin{aligned}
\dim (pE_1)_a &= \dim (p\tilde{g}^0)_a + \dim (E_1)_a \\
&= n + \frac{n(n-1)}{2} + 1 + n \\
&= \frac{n^2 - n + 2 + 4n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) \\
&= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{\dim pE_1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)} \quad .$$

<u>LEMA 5</u> - $\quad \theta_0 \approx L_0 \quad$ (isomorfismo de álgebra de Lie) .

<u>Demonstração:</u> Seja $\quad \psi: \theta_0 \longrightarrow L_0 : \psi(\theta) = j_0^\infty \theta$.

É claro que ψ é um homomorfismo de álgebra de Lie.

É claro que ψ é sobrejetor (pela construção de L_0) .

Por outro lado ψ é injetor, pois

$$\psi(\theta) = \psi(\eta) \longrightarrow j_0^\infty \theta = j_0^\infty \eta \longrightarrow j_0^2 \theta = j_0^2 \eta \, .$$

Como pE_1 é completamente integrável e $pE_1 = j^2\theta$ todo jato determina um único germe de solução

$\therefore \quad \theta = \eta \quad$ (germe) .

Por outro lado, $\dim \Theta_0 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Como $\mathbb{R}^n$ é conexo, $\dim \Theta_x = \dim \Theta_0 \quad \forall \, x \in \mathbb{R}^n$.

Logo, faz sentido a seguinte:

<u>DEFINIÇÃO</u> - $\dim \Theta(\Gamma) = \dim \Theta_0$.

Portanto, voltando finalmente ao teorema temos que $\Theta(\Gamma)$ é de "tipo finito" i.e, cada fibra tem dimensão finita.

E mais

$$\boxed{\dim \Theta(\Gamma) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$$

<u>PROPOSIÇÃO 6</u> - Se $n = 2$ $\dim \Theta(\Gamma) = \infty$.

Seja então $\Gamma = \{f \in \mathrm{Dif}(\mathbb{R}^2) \mid f$ é conforme$\}$

$$\Theta(\Gamma) = \{\theta \mid \theta - \Gamma \text{ campo}\} \, .$$

Portanto os S.E.D.P. associados se reduzem a:

$$\phi \left\{ \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x_k} = \lambda\,\delta_{jk} \right. ; \qquad \bar{\phi} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \theta^1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \theta^2}{\partial x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \theta^1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \theta^2}{\partial x_2} \end{array} \right.$$

Assim a equação de Lie de $\Theta(\Gamma)$ se reduz as equações de Cauchy-Riemann. Portanto as soluções de $\bar{\phi}$ são os campos analíticos. Ora, é bem conhecido que os germes de funções analíticas em um ponto do plano complexo formam um espaço vetorial de dimensão infinita.

Portanto obtivemos o surpreendente resultado:

O S.E.D.P. $\phi \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x_k} = \lambda\,\delta_{jk} \right.$ admite infinitas soluções "independentes" para $n = 2$ e apenas um número finito para $n \geq 3$.

O próximo passo, seria tentar encontrar as soluções para dar uma descrição completa das transformações conforme do $\mathbb{R}^n$. $(n \geq 3)$

Portanto daqui para frente admitiremos sempre $n \geq 3$.

§5 - Transformações Geométricas - Inversões no $\mathbb{R}^n$

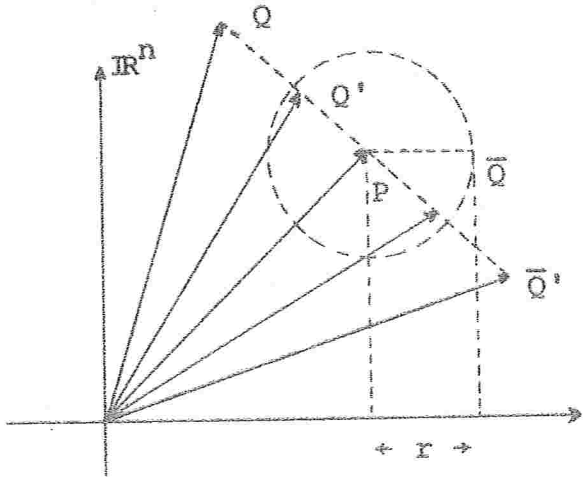
DEFINIÇÃO 1 - Para cada $p \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_{++}$, considere-se a seguinte transformação:

$I_p^r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : I_p^r(Q) = Q'$, sendo Q' caracterizado por:

$$|(Q-P)||Q'-P)| = r^2 \wedge Q' \in \{X : x \in \mathbb{R}^n \wedge X = P + t(Q-P) : t \in \mathbb{R}_{++}\} .$$

Tal transformação denomina-se uma inversão de centro P e raio r .

Figura I



As inversões são transformações com interessantes propriedades geométrica. O leitor interessado poderá por exemplo ver [3] .

Como se observa, as inversões não estão globalmente definidas, i.e, seus centros são pontos singulares.

<u>LEMA 1</u> - Expressão em coordenadas:

Denotemos $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ as coordenadas do ponto P.

Sendo $X = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ então

$$I_p^r(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[x_j + \frac{r^2(x_j - x_j^0)}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2}\right] e_j \ .$$

<u>DEFINIÇÃO 2</u> - Denominaremos, a inversão de centro 0 e raio 1, $I_0^1(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \cdot e_j$ de inversão standard do $\mathbb{R}^n$.

<u>PROPOSIÇÃO 1</u> - Sejam τ_p, H_{r^2}, $I_p^r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

a translação que leva a origem em P

a homotetia de razão r^2

a Inversão de centro P e raio r .

Então $I_p^r = \tau_p \circ H_{r^2} \circ I_0^1 \circ \tau_p^{-1}$.

<u>Demonstração</u>: Trivial.

<u>PROPOSIÇÃO 2</u> - As inversões são transformações conforme locais. Dito de outro modo, as inversões são elementos de Γ .

<u>Demonstração</u>: É um cálculo direto que não reproduziremos aqui.

§6 - <u>A Álgebra de Lie Conforme do $\mathbb{R}^n$</u>

Como havíamos visto anteriormente, o pseudo grupo infinitesimal, conforme $\Theta(\Gamma)$ é um objeto algébrico razoavelmente complicado: um feixe de germes de álgebra de Lie regido pela equação de Lie $\overline{\phi}$. Ora, no parágrafo 4, anterior, obtivemos a informação da finitude da dimensão de $\Theta(\Gamma)$, como também o valor explícito desta dimensão é portanto natural tentar encontrar uma base de uma fibra.

Pesquisando nessa linha, aliás linha de infindáveis cálculos, obtivemos um resultado que consideramos surpreendente. Cada uma das fibras de $\Theta(\Gamma)$ é gerada pela localização de uma mesma base global. Dito de outro modo, a equação de Lie de $\Theta(\Gamma)$;

$$\overline{\phi} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta^i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\theta^j}{\partial x_i} = 0 & i \neq j \\[2ex] \dfrac{\partial\theta^1}{\partial x_1} = \ldots = \dfrac{\partial\theta^n}{\partial x_n} \end{cases}$$

admite $\frac{1}{2}[(n+1)(n+2)]$ soluções globais linearmente independentes.

Portanto, podemos identificar $\Theta(\Gamma)$ a uma álgebra de Lie de Campo de vetores sobre o $\mathbb{R}^n$.

A partir de então batizamos $\Theta(\Gamma)$ de Álgebra de Lie Conforme do $\mathbb{R}^n$.

<u>Observação 1</u>: É claro que já temos $[\frac{n(n+1)}{2} + 1]$ soluções globais de $\overline{\phi}$ $\begin{cases} \dfrac{\partial\theta^i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\theta^j}{\partial x_i} = 0 & i \neq j \\[2ex] \dfrac{\partial\theta^1}{\partial x_1} = \ldots = \dfrac{\partial\theta^n}{\partial x_n} \end{cases}$

que são os "campos de semelhanças" da álgebra de Lie do grupo de Lie das semelhanças próprias, portanto temos necessidade de mais n campos para completar uma base. (É claro que a álgebra de Lie das semelhanças e das semelhanças próprias coincidem)

TEOREMA 1 - Os seguintes n campos C^∞ sobre $\mathbb{R}^n$ são soluções da equação de Lie $\bar{\phi}$.

$$\theta_i = < \theta_1^i, \theta_2^i, \ldots \theta_n^i > ; \quad i = 1 \ldots n$$

$$\theta_1 \begin{cases} \theta_1^1 = 1 + x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 \\ \theta_2^1 = 2x_1x_2 \\ \theta_3^1 = 2x_1x_3 \\ \vdots \\ \theta_n^1 = 2x_1x_n \end{cases}$$

$$\theta_2 \begin{cases} \theta_1^2 = 2x_2x_1 \\ \theta_2^2 = 1 + x_2^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 \\ \theta_3^2 = 2x_2x_3 \\ \vdots \\ \theta_n^2 = 2x_2x_n \end{cases}$$

$$\vdots$$

$\vdots$

$$\theta_{n-1}\begin{cases}\theta_1^{n-1} = 2x_{n-1}\cdot x_1\\ \theta_2^{n-1} = 2x_{n-1}\cdot x_2\\ \vdots\\ \theta_{n-1}^{n-1} = 1 + x_{n-1}^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2\\ \theta_n^{n-1} = 2x_{n-1}\cdot x_n\end{cases}$$

$$\theta_n\begin{cases}\theta_1^n = 2x_nx_1\\ \theta_2^n = 2x_nx_2\\ \vdots\\ \theta_n^n = 1 + x_n^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2 \quad .\end{cases}$$

Ou de forma abreviada:

$$\theta_i = \sum_{j\neq i} 2x_ix_je_j + (1 + x_i^2 - \sum_{k\neq i} x_k^2)e_i \qquad i=1,\ldots n\ .$$

<u>Demonstração</u>: Trivial. Um cálculo direto.

<u>PROPOSIÇÃO 1</u> - A família $(\theta_i)_{i=1..n}$ de campos de vetores acima é linearmente independente.

<u>Demonstração</u>: Trivial.

<u>PROPOSIÇÃO 2</u> - Denotemos $\{L_i\}_{1\le i\le \frac{n(n+1)}{2}+1=\ell}$ uma base da álgebra de Lie de campos de vetores, do grupo de Lie das semelhanças próprias.

Denotemos $\mathcal{L}_s = \left[\{L_i\}_{i=1}^{\ell}\right]$ e $\mathcal{I} = \left[\{\theta_j\}_{j=1}^{n}\right]$.

Denotemos $\mathcal{L}_\Gamma = \left[\{L_i\}_{i=1}^{\ell}, \{\theta_j\}_{j=1}^{n}\right]$.

Onde [ ] é a notação standard de espaço vetorial gerado.

Então $\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{L}_s \oplus \mathcal{I}$.

<u>Demonstração</u>: Trivial.

<u>PROPOSIÇÃO 4</u> - $\mathcal{L}_\Gamma$ identifica-se "canonicamente" a $\Theta(\Gamma)$ no sentido que em cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$, a restrição da base $\{L_i;\ \theta_j;\ 1\le i\le \ell;\ 1\le j\le n\}$ a uma vizinhança de x é uma base de Θ_x e reciprocamente um campo que pertença a Θ_x se exprime como a restrição a uma vizinhança de x de uma combinação linear global de $\{L_i, \theta_j\}$, ou ainda dito de outro modo, todo campo local se estende de maneira única a um campo global.

<u>Demonstração</u>: Trivial (No passo mais delicado, o da extensão, utilize um argumento de analiticidade, observe que os campos $\{L_i, \theta_j\}$ são analíticos).

Observação 2: Tudo o que fizemos anteriormente, vale para $\theta(\Gamma^+)$ e nos leva a:

Observação 3: Poderíamos também na proposição 4 utilizar um argumento de unicidade de solução.

PROPOSIÇÃO 5 - $\theta(\Gamma^+) = \theta(\Gamma)$.

Demonstração: É uma verificação direta.

Observação 3: Denominamos L_Γ de "álgebra de Lie conforme do $\mathbb{R}^n$" e frequentemente não distinguiremos L_Γ e $\theta(\Gamma)$.

§7 - Transformações Conforme do S^n

Observação 1: Olharemos S^n como variedade Riemanniana com a métrica induzida do $\mathbb{R}^{n+1}$ e com sua orientação natural.

DEFINIÇÃO 1 - Seja $f: U(f) \subset S^n \longrightarrow S^n$, um difeomorfismo local. Diremos que f é conforme se sua diferencial em cada ponto é uma semelhança i.e,

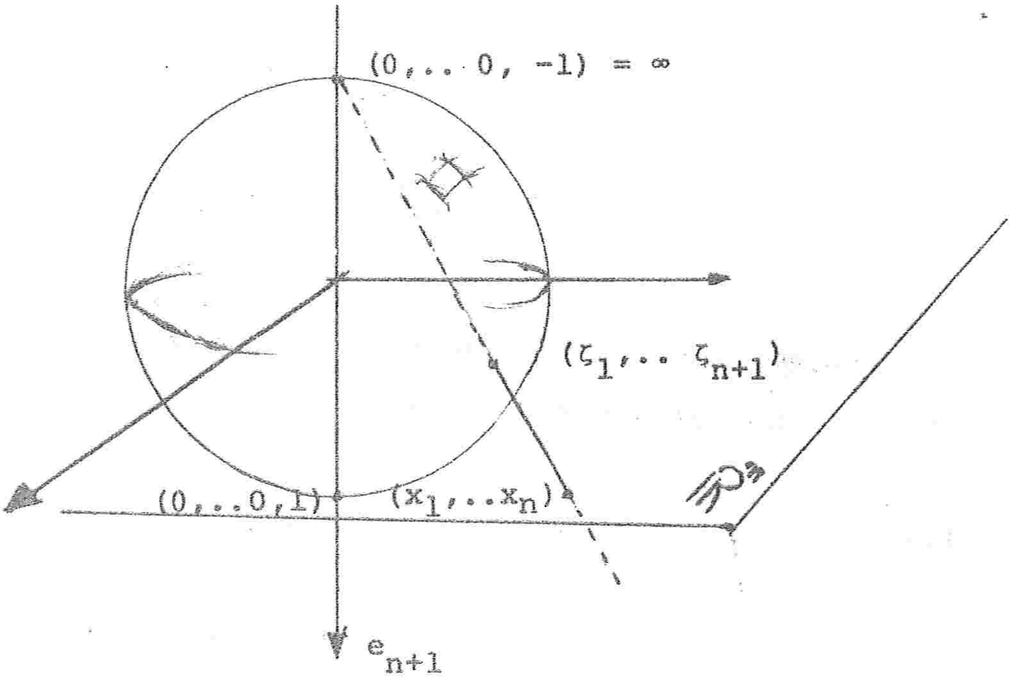
$$\exists \quad \lambda(f): U(f) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{tal que}$$

$$df_p: T_pS^n \longrightarrow T_{f(p)}S^n \longrightarrow \langle df_p h, df_p k\rangle = \lambda(f)(p)\langle h,k\rangle \ .$$

Em particular, diremos que f é uma conforme própria se ela preservar orientação.

Posta esta definição, consideremos a seguinte parametrização de S^n:

Projeção estereográfica



Denotemos $x = (x_1,.. x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\zeta = (\zeta_1,.. \zeta_{n+1}) \in S^n$ por ψ: $x = \psi(\zeta)$; $x^2 = \langle x,x \rangle$.

Portanto temos a parametrização $\langle S^n - \{\infty\}, \psi \rangle$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\zeta_1}{1 + \zeta_{n+1}} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{\zeta_n}{1 + \zeta_{n+1}} \end{cases}$$

Explicitando:

$$\psi^{-1}\begin{cases}\zeta_1 = \dfrac{2\,x_1}{1+x^2}\\ \vdots\\ \zeta_i = \dfrac{2\,x_i}{1+x^2}\\ \vdots\\ \zeta_{n+1} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}\end{cases}$$

Onde $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

<u>Observação 1</u>: Através da projeção estereográfica, identificamos $\mathbb{R}^n$ com um aberto de S^n.

<u>DEFINIÇÃO 2</u> - Denotemos $\infty = (0,\ldots,-1)$; $-\infty = (0,..1) \in S^n$.

$$\text{Seja } I_0^1(\psi): S^n \longrightarrow S^n: \begin{cases}\zeta \neq \pm\infty \longrightarrow I_0^1(\psi) = \psi^{-1} o I_0^1 o \psi\\ I_0^1(\psi)(\infty) = -\infty\\ I_0^1(\psi)(-\infty) = \infty\end{cases}$$

$$\therefore \quad I_0^1(\psi)(\zeta_1,\ldots\,\zeta_{n+1}) = (\zeta_1,\ldots,-\zeta_{n+1}) \; .$$

Em notação matricial:

$$I_0^1(\psi)(\zeta_1,\ldots\,\zeta_{n+1}) = \begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \vdots\\ \zeta_{n+1}\end{bmatrix} \; .$$

Denominamos $I_0^1(\psi): S^n \longrightarrow S^n$ de <u>inversão standard</u> do S^n, subordinada a ψ.

<u>PROPOSIÇÃO 1</u> - A inversão standard do S^n é um difeomorfismo conforme.

<u>Demonstração</u>: Trivial.

<u>DEFINIÇÃO 3</u> - Denominaremos semelhança de S^n a todas aplicações $L^s: S^n \longrightarrow S^n$: $\begin{cases} \zeta \neq \infty \longrightarrow L^s = \psi \circ L_s \circ \psi^{-1} \\ \text{onde } L_s: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ é uma} \\ \text{semelhança} \quad L^s(\infty) = \infty . \end{cases}$

<u>DEFINIÇÃO 4</u> - $L^s: S^n \longrightarrow S^n$ diz-se própria se preserva a orientação.

<u>PROPOSIÇÃO 3</u> - As semelhanças de S^n são transformações conforme.

<u>Demonstração</u>: Trivial.

Denotemos $\begin{cases} \mathrm{Dif}(S^n) \text{ o conjunto dos difeomorfismos locais de } S^n \\ S\Gamma = \{f \in \mathrm{Dif}(S^n) \mid f \text{ é conforme}\} \quad (n \geq 2) \\ S\Gamma^+ = \{f \in \mathrm{Dif}(S^n) \mid f \text{ é conforme própria}\} . \end{cases}$

<u>PROPOSIÇÃO 1</u> - $S\Gamma$; $S\Gamma^+$ são pseudo grupos de Lie transitivos regulares.

Demonstração: Será deixada a cargo do leitor. Observaremos apenas que $S\Gamma$ e $S\Gamma^+$ são "controladas" pelo mesmo S.E.D.P. que Γ. (a projeção estereográfica é conforme). Tomando por parametrizações de S^n a projeção estereográfica, a demonstração é uma repetição da demonstração feita no parágrafo 1 para Γ.

PROPOSIÇÃO 2 - $\Theta(S\Gamma)$; $(\Theta(S\Gamma^+))$ os conjunto dos $S\Gamma$-campos ($S\Gamma^+$ campos) é um pseudo grupo de Lie transitivo infinitesimal.

Demonstração: É o mesmo argumento que $\Theta(\Gamma)$ é um pseudo grupo de Lie infinitesimal.

PROPOSIÇÃO 3 - $(n \geq 3)$ $\Theta(S\Gamma) = \Theta(S\Gamma^+) \approx L_{S\Gamma} = L_{S\Gamma^+} = L_\Gamma \approx \Theta(\Gamma)$

($\approx$ identificação tomada no sentido da proposição 4, parágrafo 6) .

Demonstração: Trivial.

Observação 1: Perceba que toda transformação conforme do $\mathbb{R}^n$, identificando-se seu domínio de definição com um aberto do S^n é uma transformação conforme do S^n, i.e,

$$\Gamma \rightarrow S\Gamma$$

$$\Gamma^+ \rightarrow S\Gamma^+$$

§8 - Um Teorema de Richard Palais

Sejam G um grupo de Lie conexo e M uma variedade C^∞ de dimensão finita. Denotemos por $\underline{e}$ o elemento neutro de G.

<u>DEFINIÇÃO 1</u> - Uma G-transformação global sobre M é uma aplicação diferenciável, ϕ,

$$\phi: G \times M \longrightarrow M,$$

satisfazendo as seguintes condições:

(1) $p \in M \longrightarrow \phi(e,p) = p$ (identidade)

(2) $g,h \in G \wedge p \in M \longrightarrow \phi(gh,p) = \phi(g,\phi(h,p))$ (associatividade)

<u>DEFINIÇÃO 2</u> - Seja $\chi(M)$ um campo de vetores sobre M, de dimensão finita.

Um campo $x \in \chi(M)$ diz-se completo se ele admite um fluxo global. i.e,

$$\exists \quad \phi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, \quad \text{diferenciável, tal que}$$

(1) $\phi(0,p) = p$

(2) $\phi(s+t,p) = \phi(s,\phi(t,p))$

(3) $\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,p) = X(\phi(t,p))$

Denotemos $\mathrm{Dif}^g(M)$ o grupo algébrico de todos difeomorfismos globais de M.

<u>TEOREMA</u> - (Palais) - Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie de campos de vetores sobre M, $\mathcal{L}$ de dimensão finita.

Então as seguintes condições são equivalentes:

(1) Todo $L \in \mathcal{L}$ é completo

(2) O conjunto dos campos $L \in \mathcal{L}$ que são completos geram a álgebra de Lie $\mathcal{L}$.

(3) Existe um grupo de Lie conexo, G e uma G-transformação global sobre M, ϕ tal que:

a) $g \longrightarrow \phi_g$ é um isomorfismo de G sobre sua imagem em $\mathrm{Dif}^g(M)$. Onde

$$\phi_g : M \longrightarrow M$$
$$p \longmapsto \phi(g,p)$$

b) Seja $\mathcal{G}$ a álgebra de Lie de campos invariantes a direita de G.

A aplicação

$$\phi^+ : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{L}$$
$$L \longmapsto \phi^+(L)$$

onde $\phi^+(L)_p = \delta\phi^p(L_e)$

onde $\phi^p : G \longrightarrow M : \phi^p(g) = \phi(g,p)$

é um isomorfismo de álgebra de Lie.

<u>Notação 1</u>: Denotaremos $G(M) \subset \mathrm{Dif}^g(M)$ a imagem de G pelo isomorfismo $g \longmapsto \phi_g$.

Para a demonstração deste Teorema ver [4] .

§9 - Um Teorema de Liouville

O objetivo deste parágrafo é demonstrar um teorema clássico, devido a Liouville.

Primeiramente, observemos que já demonstramos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 1 - Seja $S\Gamma = \{f \in \mathrm{Dif}(S^2) \mid f$ é conforme$\}$.

Então $S\Gamma$ é um pseudo grupo de Lie transitivo e o pseudo grupo de Lie, infinitesimal $\theta(S\Gamma)$ é de dimensão infinita. [prop. 2 §7] [prop. 12 §4].

Analogamente para $S\Gamma^+$.

Examinemos então o caso $n \geq 3$.

Já sabemos que $\theta(S\Gamma^+) = \left[\left\{L_i\right\}_{i=1}^{\ell} ; \left\{\theta_i\right\}_{i=1}^{n}\right]$.

$\left\{L_i\right\}_{i=1}^{\ell}$ é a base dos campos de semelhança sobre S^n

$$\theta_i = \sum_{j \neq i} 2 x_i x_j e_j + (1 + x_i^2 - \sum_{k \neq i} x_k^2)\, e_i \quad .$$

Observação 1: É claro que agora, estamos considerando $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ como as coordenadas da parametrização de S^n pela projeção estereográfica, ψ, introduzida no parágrafo 7.

Chamamos a atenção do leitor, que daqui para frente, utilizaremos esta identificação por ψ indistintamente.

<u>TEOREMA 1</u> - Os campos $L_1, L_2, \ldots L_\ell$ são completos e mais, seus fluxos globais são constituídos de semelhanças próprias do S^n.

A demonstração dessa proposição é simples, faremos apenas um caso e acreditamos que com isso o leitor perceberá o que estamos pensando e provará facilmente os outros casos.

É claro que na escolha concreta de $L_1, \ldots L_\ell$, nós os tomamos da forma mais simples possível.

Assim, seja $L_1 \in L_{S\Gamma}$:

$L_1 \colon S^n \longrightarrow T S^n$ tal que L_1 é representado pela matriz:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\zeta_1, \ldots \zeta_{n+1}) \longrightarrow (-\zeta_2, \zeta_1, 0, \ldots 0) .$$

Seja então $\phi \colon \mathbb{R} \times S^n \longrightarrow S^n$

$$\phi(t,\zeta) = \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t & 0 & \ldots & 0 \\ \operatorname{sen} t & \cos t & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_{n+1} \end{bmatrix}$$

Claramente, ϕ é um grupo a um parâmetro.

Por outro lado:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\zeta) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} t & -\cos t & 0 \ldots 0 \\ \cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 \;\ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ & & \vdots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 \ldots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \zeta_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\zeta) = (-\operatorname{sen} t\zeta_1 - \cos t\zeta_2;\ \cos t\ {}_1 - \operatorname{sen} t\zeta_2,\ 0..0)$$

Por outro lado:

$$L_1(\phi(t,\zeta)) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t\,\zeta_1 - \operatorname{sen} t\,\zeta_2 \\ \operatorname{sen} t\,\zeta_1 + \cos t\,\zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \vdots \\ \zeta_{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= (-\operatorname{sen} t\zeta_1 - \cos t\zeta_2,\ \cos t\zeta_1 - \operatorname{sen} t\zeta_2,\ 0,\ldots 0)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\zeta) = L_1(\phi(t,\zeta))$$

$\therefore$ L_1 é completo e caracterizado por semelhanças do S^n, no sentido que ele é necessariamente deduzido de famílias a 1-parâmetro de semelhanças sobre o S^n.

A demonstração nos outros casos é uma brincadeira análoga. Deixaremos o leitor brincar sozinho.

<u>TEOREMA 2</u> - (Caracterização dos Campos $\theta_1, \dots \theta_n$).

Os campos

$$\theta_i = \sum_{j\neq i} 2x_i x_j e_j + (1 + x_i^2 - \sum_{k\neq i} x_k^2) e_i \qquad (i = 1 \dots n)$$

sobre S^n são completos e seus fluxos globais $(\phi_t^i)_t$ são tais que para $t \neq 0$

$$\phi_t^i = (L_s^i \circ I_0^1(\psi) \circ \bar{L}_s^{-i})_t$$

ou seja um produto cujo os fatores são uma semelhança, a inversão standard, outra semelhança.

<u>Observação 2</u>: Observe que esta última afirmação é o resultado central desse Teorema, i.e, para obtermos os campos $\theta_1, \dots \theta_n$ temos que tomar necessariamente, vetores tangentes a "curvas" toda ela constituída de inversão standard módulo semelhanças.

A priori, já sabemos que todo campo de $\theta(S\Gamma^+)$ é completo pois S^n é compacta.

<u>Demonstração</u>: Procuramos n-fluxos globais

$$\phi^k : \mathbb{R} \times S^n \longrightarrow S^n : \phi^k(t,x) = \langle \phi_1^k(t,x), \dots \phi_n^k(t,x) \rangle; \quad k = 1 \dots n$$

que são soluções dos n-sistemas de equações diferenciais:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\phi_1^k}{dt} &= 2\,\phi_1^k \cdot \phi_k^k \\
\frac{d\phi_2^k}{dt} &= 2\,\phi_2^k \cdot \phi_k^k \\
&\vdots \\
\frac{d\phi_j^k}{dt} &= 2\phi_j^k \cdot \phi_k^k \\
&\vdots \\
\frac{d\phi_k^k}{dt} &= 1 + (\phi_k^k)^2 - \sum_{i\neq k} (\phi_i^k)^2 \\
\phi^k(0,x) &= x\ .
\end{aligned}\right\} \quad k = 1 \dots n$$

Por razões técnicas e psicológicas, mudemos esses sistemas por sistemas equivalentes e também a notação:

Seja: $y^k\colon \mathbb{R} \times S^n \longrightarrow S^n$; $y^k(t,x) = \langle y_1^k(t,x), \dots\ y_n^k(t,x)\rangle$

$$\begin{matrix} k = 1 \dots n \\ \\ (*) \end{matrix} \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dy_1^k}{dt} &= y_1^k \cdot y_k^k \\
&\vdots \\
\frac{dy_j^k}{dt} &= y_j^k \cdot y_k^k \\
&\vdots \\
\frac{dy_k^k}{dt} &= \left[1 + (y_k^k)^2 - \sum_{i\neq k} (y_i^k)^2\right] \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned}\right.$$

Bem, considerações geométricas e a simetria da esfera, permitiram integrar esses sistemas.

<u>LEMA 1</u> - A aplicação $\phi: \mathbb{R} \times S^n \longrightarrow S^n$ tal que:

$$\phi(t,\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & \cos(-t) & -\mathrm{sen}(-t) \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \mathrm{sen}(-t) & \cos(-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_{n+1} \end{bmatrix}$$

tem as seguintes propriedades:

(1) $\phi(o,\zeta) = \zeta$

(2) $\phi(s+t,\zeta) = \phi(s\,,\phi(t,\zeta))$

(3) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t: S^n \longrightarrow S^n : \phi_t(\zeta) = \phi(t,\zeta)$ é uma transformação conforme própria do S^n

(4) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t: S^n \longrightarrow S^n$ se exprime por

$\phi_t = L_s^t \circ I_0^1(\psi) \circ \overline{L_s^t}$.

Demonstração (1), (2), (3) são imediatas

Para provar (4) exprimiremos ϕ_t em coordenadas.

Faremos por simplicidade o cálculo para $n = 3$ e o leitor verificará para n em geral.

Seja então:

$$\phi_t: S^3 \longrightarrow S^3 : \phi_t(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(-t) & -\mathrm{sen}(-t) \\ 0 & 0 & \mathrm{sen}(-t) & \cos(-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_4 \end{bmatrix}$$

Por simplicidade, denotemos $a = \cos(-t)$; $b = \mathrm{sen}(-t)$

$$\therefore \quad \phi(t,\zeta) = (\zeta_1, \zeta_2, a\zeta_3 - b\zeta_4, b\zeta_3 + a\zeta_4) \ .$$

Agora olhemos a expressão de $\phi(t,\zeta)$ em coordenadas

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{2x_1}{1+x^2} \\ \zeta_2 &= \frac{2x_2}{1+x^2} \\ \zeta_3 &= \frac{2x_3}{1+x^2} \\ \zeta_4 &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ x^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\zeta_1}{1+\zeta_4} \\ x_2 &= \frac{\zeta_2}{1+\zeta_4} \\ x_3 &= \frac{\zeta_3}{1+\zeta_4} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \phi(t,\zeta) = \left(\frac{2x_1}{1+x^2}, \frac{2x_2}{1+x^2}, \frac{a\cdot 2x_3}{1+x^2} - \frac{b(1-x^2)}{1+x^2}, \frac{b\cdot 2x_3}{1+x^2} + \frac{a(1-x^2)}{1+x^2}\right)$$

$\therefore$ Voltando para $\mathbb{R}^3$

$$y_1 = \frac{2x_1}{1+x^2+b2x_3+a(1-x^2)}$$

$$y_2 = \frac{2x_2}{1+x^2+b2x_3+a(1-x^2)}$$

$$y_3 = \frac{a2x_3 - b(1-x^2)}{1+x^2+b2x_3+a(1-x^2)} \ .$$

Sabendo que $a^2 + b^2 = 1$ obtemos:

$$y_1 = \frac{2(1+a)}{b} \cdot \frac{bx_1}{b^2x_1^2 + b^2x_2^2 + (bx_3 + (1+a))^2}$$

$$y_2 = \frac{2(1+a)}{b} \cdot \frac{bx_2}{b^2x_1^2 + b^2x_2^2 + (bx_3 + (1+a))^2}$$

$$y_3 = \frac{(1+a)}{b} + \frac{2(1+a)}{b} (-1) \frac{[bx_3 + (1+a)]}{b^2x_1^2 + b^2x_2^2 + (bx_3 + (1+a))^2}$$

Portanto obtivemos:

1) Uma homotetia de razão b

2) Uma <u>inversão</u> de centro $P = (0,0,-(1+a))$ e raio $r = \sqrt{2(1+a)}$

3) Uma reflexão R_{x_3} ao longo do hiperplano $y_3 = 0$

$\therefore$ Tendo-se em conta a proposição 1 do parágrafo 5,

$$\phi_t = H_{\frac{1}{b}} \circ R_{x_3} \circ \tau_p \circ H_{r^2} \circ I_0^1 \circ \tau_p^{-1} \circ H_b .$$

<u>Observação 3</u>: Perceba que há aqui uma sutileza relativamente à orientação, se $b \geq 0$ começamos com a homotetia H_b, se $b \leq 0$ começamos com a homotetia H_{-b}.

Esta mudança de sinais acarretará como o leitor verificará rapidamente uma simetrização do centro da inversão que passará a ser $(0,0,(1+a))$.

Finalmente se $b=0$ é fácil verificar que obteremos a identidade ou a inversão standard composta com uma translação.

Enfim essas observações são também motivadas pelo fato que queremos H_b, $H_{b^{-1}}$ conformes próprias.

<u>LEMA 2</u>: Agora podemos exibir as soluções dos sistemas (*) onde a matriz $\phi(t,\zeta)$ joga um papel de "integrante universal" do sistema.

Seja então $y^k: \mathbb{R} \times S^n \longrightarrow S^n$ tal que em coordenadas:

$$y^k(t,x) = \langle y_1^k(t,x), \ldots \cdot y_n^k(t,x) \rangle$$

$$y_1^k(t,x) = \frac{2x_1}{1+x^2+\text{sen}(-t)\cdot 2x_k + \cos(-t)(1-x^2)}$$

$$y_2^k(t,x) = \frac{2x_2}{1+x^2+\text{sen}(-t)\cdot 2x_k + \cos(-t)(1-x^2)}$$

$$\vdots$$

$$y_{k-1}^k(t,x) = \frac{2x_{k-1}}{1+x^2+\text{sen}(-t)\cdot 2x_k + \cos(-t)(1-x^2)}$$

$$y_k^k(t,x) = \frac{\cos(-t)\cdot 2x_k - \text{sen}(-t)(1-x^2)}{1+x^2+\text{sen}(-t)\cdot 2x_k + \cos(-t)(1-x^2)}$$

$$\vdots$$

$\vdots$

$$y_n^k(t,x) = \frac{2x_n}{1+x^2+\operatorname{sen}(-t)\cdot 2x_k+\cos(-t)(1-x^2)} .$$

$$\therefore \quad y^k(0,x) = (x_1, x_2, \ldots x_n) = x \quad .$$

Por outro lado, se $j \neq k$ então:

$$\frac{dy_j^k}{dt} = \frac{-2x_j(-\cos(-t)\cdot 2x_k+\operatorname{sen}(-t)(1-x^2))}{(1+x^2+\operatorname{sen}(-t)\cdot 2x_k+\cos(-t)(1-x^2))^2} = y_j^k \cdot y_k^k$$

Denotemos: $\boxed{a = 1+x^2+\operatorname{sen}(-t)\cdot 2x_k+\cos(-t)(1-x^2)}$

Então:

$$\frac{dy_k^k}{dt} = \frac{[\operatorname{sen}(-t)\cdot 2x_k+\cos(-t)(1-x^2)]\cdot a}{a^2} +$$

$$+\frac{[\cos(-t)\cdot 2x_k-\operatorname{sen}(-t)(1-x^2)]^2}{a^2} =$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{[\cos(-t)\cdot 2x_k-\operatorname{sen}(-t)(1-x^2)]^2}{a^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{[\cos(-t)\cdot 2x_k-\operatorname{sen}(-t)(1-x^2)]^2}{a^2} +$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(-t)\cdot 2x_k+\operatorname{sen}(-t)\cdot 2x_k\cdot x^2+\operatorname{sen}^2(-t)\cdot 4x_k^2}{a^2} +$$

$$+ \frac{\text{sen}(-t) \cdot 2x_k \ \cos(-t)(1-x^2)}{a^2} +$$

$$+ \frac{\cos(-t)(1-x^2) + \cos(-t)(1-x^2) \cdot x^2}{a^2} +$$

$$+ \frac{\cos(-t)(1-x^2) \ \text{sen}(-t) \cdot 2x_k + \cos(-t)(1-x^2)^2}{a^2} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{[\cos(-t) \cdot 2x_k - \text{sen}(-t)(1-x^2)]^2}{a^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{[\cos^2(-t) \cdot 4x_k^2 + \text{sen}^2(-t) \cdot 4x_k^2]}{a^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{[\text{sen}^2(-t)(1-x^2)^2 + \cos^2(-t)(1-x^2)^2]}{a^2} +$$

$$+ \frac{1}{a^2} [- \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^4 - x^2] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{[\cos(-t) \cdot 2x_k - \text{sen}(-t)(1-x^2)]^2}{a^2} +$$

$$+ \frac{1}{a^2} [2x_k^2 + \frac{1}{2}(1-x^2)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^4 - x^2] .$$

Mas $\quad 2x_k^2 + \frac{1}{2}(1-x^2)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^4 - x^2 =$

$$= 2x_k^2 + \frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^4 - x^2 = 2x_k^2 - 2x^2 \quad .$$

Mas $\quad 2x_k^2 - 2x^2 = \sum_{i\neq k} 2x_i^2$

$$\therefore \quad \frac{dy_k^k}{dt} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{[\cos(-t)\cdot 2x_k - \operatorname{sen}(-t)(1-x^2)]^2 - \sum_{i\neq k} 2x_i^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy_k^k}{dt} = \frac{1}{2}\left[1 + (y_k^k)^2 - \sum_{i\neq k} (y_i^k)^2\right]$$

$\therefore$ $\quad y^k\colon \mathbb{R}\times S^n \longrightarrow S^n$, é a família que procurávamos. Logo o teorema 2 é consequência dos lemas 1; 2.

$\therefore$ $\quad \theta_1, \ldots \theta_n$ são completos e seus fluxos globais são formados da inversão standard composta com semelhanças.

Procuraremos agora estabelecer a terminologia de uma vez por todas.

<u>TEOREMA 3</u> - <u>As transformações conformes elementares</u> do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$

<u>LEMA 1</u> - Sejam $\phi^k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $k = 1 \ldots n$, obtidas no teorema anterior. Denotando $a = \cos(-t)$; $b = \operatorname{sen}(-t)$, ϕ^k se expressa em coordenadas como:

$$\phi^k = \begin{cases} y_1^k = \dfrac{2(1+a)}{b} \cdot \dfrac{bx_1}{\sum\limits_{j\neq k} (bx_j)^2 + (bx_k + (1+a))^2} \\ \vdots \\ y_i^k = \dfrac{2(1+a)}{b} \cdot \dfrac{bx_i}{\sum\limits_{j\neq k} (bx_j)^2 + (bx_k + (1+a))^2} \\ \vdots \\ y_k^k = \dfrac{(1+a)}{b} + \dfrac{2(1+a)}{b} \cdot (-1) \cdot \dfrac{[bx_k + (1+a)]}{\sum\limits_{j\neq k} (bx_j)^2 + (bx_k + (1+a))^2} \\ \vdots \\ y_n^k = \dfrac{2(1+a)}{b} \cdot \dfrac{bx_n}{\sum\limits_{j\neq k} (bx_j)^2 + (bx_k + (1+a))^2} \end{cases}$$

Demonstração: Trivial.

LEMA 2 - (expressão geométrica) $\phi^k = H_{b^{-1}} \circ R_{x_k} \circ I^r_{p_k} \circ H_b$.

(assumindo $b>0$) Onde $p_k = (\underset{1}{0}, \ldots \underset{k}{(-1-a)}, \ldots \underset{,k+1..n}{0})$; $r = \sqrt{2(1+a)}$

$R_{x_k} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$: $R_{x_k}(x_1, \ldots x_k, \ldots x_n) = (x_1 \ldots, -x_k, \ldots x_n)$.

Demonstração: Trivial.

($b < 0$, análogo ver observação 3 anterior)

($b = 0$, " " " " ") .

LEMA 3 - ϕ^k, em coordenadas, é uma transformação conforme própria do $\mathbb{R}^n$, menos no seu ponto singular.

Demonstração: Trivial.

LEMA 4 - Seja $\psi_k = R_{x_k} \circ I^r_{p_k} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Então ψ_k é uma transformação conforme, própria do $\mathbb{R}^n$ menos o seu ponto singular.

Demonstração: Trivial.

LEMA 5 -

$$\psi_k = R_{x_k} \circ I^r_{p_k} = R_{x_k} \circ \tau_{p_k} \circ H_{r^2} \circ I^1_0 \circ \tau^{-1}_{p_k}$$

$$R_{x_k} \tau_{p_k} = \tau_{\overline{p}_k} \circ R_{x_k} ; \quad \overline{p}_k = \underset{1 \;\ldots\; k \;\ldots n}{(0, \ldots (1+a), \ldots)}$$

$$R_{x_k} \circ H_{r^2} = H_{r^2} \circ R_{x_k}$$

$$\therefore \quad \psi_k = \tau_{\overline{p}_k} \circ H_{r^2} \circ R_{x_k} \circ I^1_0 \circ \tau^{-1}_{p_k} .$$

Demonstração: Trivial.

LEMA 6 - Denotemos $S_k = R_{x_k} \circ I^1_0$.

Então S_k é uma transformação conforme própria do $\mathbb{R}^n$ menos seu ponto singular.

Demonstração: Trivial.

DEFINIÇÃO 1 - Denominamos as transformações S_k de Transformações conformes elementares do $\mathbb{R}^n$.

<u>DEFINIÇÃO 2</u> - Manteremos a terminologia quando transportarmos S_k para S^n.

Agora podemos passar às conclusões.

<u>PROPOSIÇÃO 2</u> - A álgebra de Lie $\theta(S\Gamma^+)$ é uma álgebra de Lie de campos de vetores sobre S^n e seu conjunto de geradores é completo.

<u>PROPOSIÇÃO 3</u> - <u>O grupo de Liouville</u>

Existe um grupo de Lie conexo, G e uma G-transformação global sobre S^n, ϕ; tal que

(1) $G \simeq G(S^n) = \{\phi_g \mid \phi_g : S^n \longrightarrow S^n : \phi_g(\zeta) = \phi(g,\zeta)\}$

(2) $G \simeq \theta(S\Gamma^+)$.

A partir de agora, não distinguiremos, como grupos de Lie G e $G(S^n)$. Denominaremos $G(S^n)$ de <u>grupo de Liouville</u>.

Denotemos $\lambda(S\Gamma^+)$ o conjunto dos difeomorfismos $f \in Dif(S^n)$ obtidos pela localização dos difeomorfismos globais que pertencem a $G(S^n)$.

<u>PROPOSIÇÃO 4</u> - $\lambda(S\Gamma^+)$ é um pseudo grupo de Lie transitivo.

Este é um resultado standard da Teoria dos Pseudo Grupos de Lie; i.e, o conjunto dos difeomorfismos sobre uma variedade M, obtidos pela localização da ação transitiva global de um grupo de Lie sobre M é um pseudo grupo de Lie. Ver [7] [10] .

PROPOSIÇÃO 5 - $\theta(\lambda(S\Gamma^+))$ é um pseudo grupo de Lie infinitesimal e $\theta(\lambda(S\Gamma^+)) = \theta(S\Gamma^+)$.

Demonstração: Trivial.

PROPOSIÇÃO 6 - $\lambda(S\Gamma^+) = S\Gamma^+$.

Esta proposição é consequência de um Teorema, não trivial, da teoria dos pseudo grupos de Lie transitivos que relaciona pseudos grupos que possuem o mesmo pseudo grupo infinitesimal.

Também pode ser obtida combinando-se um teorema de Ehresmann e um teorema de Palais [6] [7] [4] [9] .

TEOREMA 4 - O grupo de Liouville é gerado pelas semelhanças próprias e pelas transformações conforme elementares.

Demonstração:

(1) Usaremos todas as identificações naturais, necessárias, feitas anteriormente.

(2) Consideremos a seguinte decomposição de $\theta(S\Gamma^+)$

$$\theta(S\Gamma^+) = [L_1] \oplus \dots + [L_\ell] \oplus [\theta_1] \oplus \dots \oplus [\theta_n] .$$

(3) Consideremos os seguintes grupos a 1-parâmetro:

$$\phi(L_i): \mathbb{R} \times [L_i] \longrightarrow G(S^n) \qquad 1 \le i \le \ell$$

$$\phi(L_i)(t) = \exp t\, L_i$$

$$\phi(\theta_j): \mathbb{R} \times [\theta_j] \longrightarrow G(S^n) \qquad 1 \le j \le n$$

$$\phi(\theta_j)(t) = \exp t\, \theta_j$$

(4) Sabemos que $\phi(L_i)(\mathbb{R}) \subset G(S^n)$ é um sub grupo de Lie constituído de semelhanças próprias.

(5) Sabemos que $\phi(\theta_j)(\mathbb{R}) \subset G(S^n)$ é um sub grupo de Lie constituído de semelhanças próprias e transformações conforme elementares.

(6) Consideremos a seguinte aplicação:

$$\phi: \Theta(S\Gamma^+) \longrightarrow G(S^n) : X \in \Theta(S\Gamma^+) \longrightarrow X = \sum_{i=1}^{\ell} t_i L_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{t}_j \theta_j \longrightarrow \phi(X) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\ell} \exp t_i L_i \cdot \prod_{j=1}^{n} \exp \bar{t}_j \theta_j \ .$$

É um fato bem conhecido que ϕ é diferenciável e

$$d\phi_0: \Theta(S\Gamma^+) \longrightarrow T_e G(S^n) = \Theta(S\Gamma^+); \quad d\phi_0 = 1_{\Theta(S\Gamma^+)} \ .$$

Logo ϕ é um difeomorfismo local; $\phi: V_0 \longrightarrow V_e$

$\therefore$ $g \in V_e \longrightarrow g = \phi(X) = \prod_{i=1}^{\ell} \exp t_i L_i \cdot \prod_{j=1}^{n} \exp \bar{t}_j \theta_j$ para alguma sequência $< t_1, \dots t_\ell, \bar{t}_1, \dots \bar{t}_n >$

$\therefore$ g pertence ao sub grupo de $G(S^n)$ gerado por V_e .

Como $G(S^n)$ é conexo, V_e gera $G(S^n)$.

Portanto $G(S^n)$ é gerado por semelhanças próprias e transformações conforme elementares.

Observação: Para os resultados da teoria de Grupos de Lie utilizados na demonstração acima ver [12] [13] [14] .

Voltemos agora ao nosso problema inicial.

Este problema era na realidade, resolver o S.E.D.P.

$$\phi \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial x_k} = \lambda\, \delta_{jk} \qquad (n \geq 3) \right. .$$

Com a hipótese $\det [\frac{\partial f^i}{\partial x_j}] > 0$ conseguimos achar todas as soluções, que são geradas pelas semelhanças próprias e pelas transformações conforme elementares.

As outras soluções só vão diferir pela orientação.

Logo temos:

Teorema de Liouville - (Uma formulação moderna).

O conjunto das transformações conforme do $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 3)$ é um pseudo grupo de Lie de tipo finito, gerado pelas semelhanças e pela inversão standard.

Teorema de Liouville - O conjunto das transformações conforme do S^n $(n\geq 3)$ é um pseudo grupo de Lie, de tipo finito gerado pelas semelhanças e pela inversão standard.

§10 - As Transformações Conforme do $\mathbb{R}^n$

Resumindo nossos resultados temos:

(1) As transformações conforme do $\mathbb{R}^2$ são homeomorfismos analíticos.

(2) As transformações conforme do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ são as semelhanças afins, a inversão standard e produtos das anteriores em qualquer ordem.

(3) Se f é uma transformação conforme, local do $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 3)$ e se $U(f)$ é conexo então f prolonga-se a todo $\mathbb{R}^n$ e neste caso é linear ou prolonga-se a todo $\mathbb{R}^n$ menos um ponto no qual é singular.

- o -

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] *M. Kuranishi* - Lectures on Involutive Systems of Partial Differential Equations, Publ. Soc. Mat. S.P. 1967

[2] *H. Goldschmidt* - Annals of Math. (1967)

[3] *R. Courant and H. Robbins* - What is Mathematics? Oxford University Press 1963

[4] *R.S. Palais* - A Global Formulation of the Lie Theory of Transformation Groups. Bull. Am. Math. Soc. (1957)

[5] *F.W. Warner* - Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Scott, Foresman and Company 1971

[6] *A.A.M. Rodrigues* - G-Structures et Pseudo Groups de Lie. Notes d'un cours donné en 1967-1968 à l'Université de Grenoble.

[7] *Charles Ehresmann* - Sur les Pseudo Groupes de Lie de type fini. Comptes rendus 246, 1958 p. 360-362

[8] *V. Guillemine - S. Sternberg* - An Algebraic model of Transitive Diff. Geometry. Bull. Am. Math. Soc. (1964)

[9] *I.M. Singer and S. Sternberg* - The Infinite Groups of Lie and Cartan. Part I (the transitive groupes) Journ. d'Analyse Math., Vol. 15, 1965

[10] *J.A. Verderesi* - Classificação dos Pseudo-Grupos de Transformação da reta. Tese de Mestrado - IME-USP

[11] *M. Orellana Chacin* - Sur le Prolongement d'algebres de Lie Filtrees. Tese de doctorat de troisième cycle. Faculte de ciences Université de Grenoble.

[12] *P.M.Cohn* - Lie Groups. Cambridge University press 1961

[13] *Manfredo P. do Carmo* - Notas de Um Curso de Grupos de Lie. IMPA CNPq

[14] *Y. Matsushima* - Pseudo-Groupes de Lie Transitifs. Sēminaire Bourbaki (mai 1955)

[15] *A.A.M. Rodrigues* - Pseudo-Grupos de Lie. V Colōquio Brasileiro de Matemātica, São Paulo, 1965

[16] *A.A.M. Rodrigues* - The first and second fundamental theorems of Lie for Lie pseudo groups. American Journ. Math., vol LXXXIV, nº 2 abril 1962 pp. 265-282

[17] *N. Bourbaki* - Algèbre Commutative.