MÁRIO BARONE JÚNIOR

CLASSIFICAÇÃO DOS CAMPOS QUASE-GENÉRICOS EM VARIEDADES DE DIMENSÃO DOIS

Tese de doutoramento apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

Í N D I C E

§ 1º - Introdução. Classificação dos Campos genéricos.

§ 2º - Definição dos elementos quase-genéricos: singularidades, órbitas fechadas e conexões de selas. Campos quase-genéricos.

§ 3º - Classificação, em variedades orientáveis, dos campos quase-genéricos com uma sela - nó e sem órbitas fechadas.

§ 4º - Classificação, em variedades orientáveis, dos campos quase-genéricos com um foco composto e sem órbitas fechadas.

§ 5º - Classificação, em variedades orientáveis, dos campos quase-genéricos com uma conexão de selas e sem órbitas fechadas.

§ 6º - Classificação, em variedades orientáveis, dos campos quase-genéricos com uma órbita fechada quase-genérica e sem outras órbitas fechadas.

§ 7º - Extensão da classificação, em variedades orientáveis, aos campos quase-genéricos com órbitas fechadas genéricas.

§ 8º - Extensão da classificação aos campos quase-genéricos em variedades não orientáveis.

§ 9º - Bibliografia.

§ 1º - INTRODUÇÃO. CLASSIFICAÇÃO DOS CAMPOS GENÉRICOS

Em [1], foi desenvolvido um método que permitiu classificar os campos estruturalmente estáveis em variedades de dimensão 2. No que segue, vamos aplicar o mesmo método para classificar os campos estudados em [3]; estes campos serão definidos no § 2º. A fim de tornar mais claras as idéias utilizadas, vamos resumir neste § as técnicas elaboradas em [1]. O leitor não familiarizado com sistemas dinâmicos poderá consultar [4], que já é a referência clássica sôbre o assunto, ou ainda [5] que é uma obra mais atual e mais detalhada. M^2 indicará uma variedade diferenciável de classe C^∞, compacta, conexa e de dimensão 2. Neste parágrafo, os campos serão de classe C^r, $r \geq 1$.

Vamos estudar inicialmente, em variedades M^2 <u>orientáveis</u>, campos estruturalmente estáveis que <u>não possuem órbitas fechadas</u>, ou seja, campos em que:

1 - as singularidades são tôdas hiperbólicas (e portanto só há um número finito delas, pois são isoladas e M^2 é compacta);

2 - não há trajetórias conectando selas (ver a definição de conexão de selas no § 2º);

3 - o conjunto α - limite (ω - limite) de qualquer trajetória é formado por uma singularidade.

Tais campos serão denotados por X_g.

Seja $\Omega(X_g)$ o conjunto das singularidades de X_g. Teremos

$$\Omega(X_g) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_s, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_q\}$$

onde os α_i são fontes, os σ_i são selas e os ω_i são poços. O número $p - s + q$ será indicado por $\chi(X_g)$ e é chamado característica de Euler do campo X_g. É claro que se X_g está definido em M^2, devemos ter $\chi(X_g) = \chi(M^2)$, onde $\chi(M^2)$ indica a característica de Euler da variedade M^2 (ver [6], cap. III). Se $x \in \Omega(X_g)$, $W^s(x)$ e $W^u(x)$ indicarão respectivamente as variedades estável e instável de x. Em $\Omega(X_g)$ está definida a seguinte relação de ordem parcial:

$$x \leq y \Longleftrightarrow W^u(x) \cap W^s(y) \neq \emptyset .$$

A um campo X_g associamos um gráfico (complexo celular orientado unidimensional) $G(X_g)$ da seguinte forma: os vértices do gráfico serão os elementos

de $\Omega(X_g)$ e só haverá alguma aresta unindo um vértice x a outro vértice y (orientada de x para y) se $x \leq y$, $x \neq y$ e não existir $z \in \Omega(X_g)$ tal que $z \neq x$, $z \neq y$ e $x \leq z \leq y$; neste caso para determinar o número de arestas unindo x a y, decompomos $W^u(x) - \{x\}$ e $W^s(y) - \{y\}$ em suas componentes conexas:

$$W^u(x) - \{x\} = \bigcup_{j=1}^{C_1} W^u_j(x) \quad , \quad C_1 = 1 \text{ ou } 2$$

$$W^s(y) - \{y\} = \bigcup_{k=1}^{C_2} W^s_k(y) \quad , \quad C_2 = 1 \text{ ou } 2$$

e haverá tantas arestas unindo x a y quantos forem os pares (j, k) com

$$W^u_j(x) \cap W^s_k(y) \neq \emptyset .$$

O gráfico $G(X_g)$ assim obtido é conexo e possue as seguintes propriedades:

Gr_g 1 - não há arestas unindo uma fonte a um poço, a não ser no caso em que X_g é o campo na esfera S^2 cujas únicas singularidades são uma fonte no polo norte e um poço no polo sul e neste caso o gráfico é formado apenas pela aresta que os une.

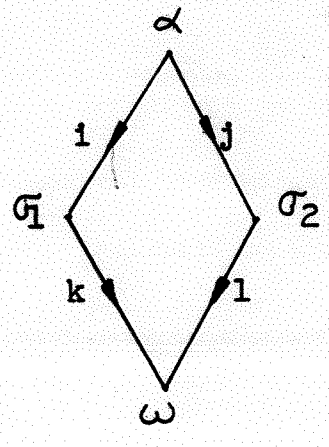
Gr_g 2 - as arestas ou partem de uma fonte e chegam a uma sela, ou partem de uma sela e chegam a um poço (com a exceção já citada em Gr_g 1).

Gr_g 3 - em cada sela há exatamente duas arestas que chegam e duas que partem.

Note-se que, na realidade, o gráfico é formado exclusivamente pelas arestas mencionadas em Gr_g 3, a não ser, evidentemente, no caso do campo polo norte - polo sul na esfera.

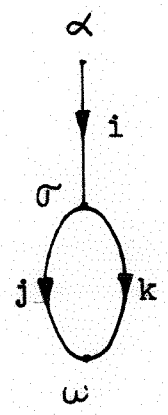
Baseados no que é feito em [2], podemos acrescentar mais informações ao gráfico de um campo X_g, destacando certos subconjuntos, chamados <u>conjuntos distinguidos</u>, que podem ser dos seguintes tipos:

T I P O 1 :



denotado [i, j; k, l]
com a convenção
[i, j; k, l] = [j, i; l, k]

T I P O 2 :

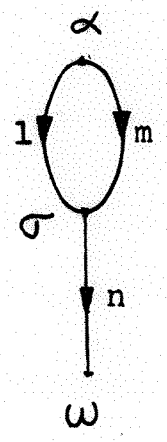


denotado $[i;\ j,\ k]$

com a convenção

$[i;\ j,\ k] = [i;\ k,\ j]$

T I P O 3 :



denotado $[l,\ m;\ n]$

com a convenção

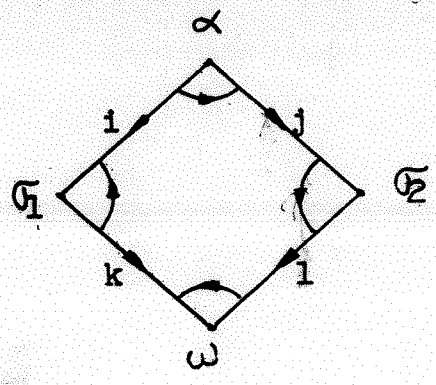
$[l,\ m;\ n] = [m,\ l;\ n]$

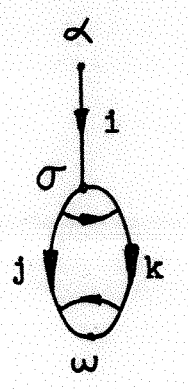
Os conjuntos distinguidos têm uma interpretação geométrica muito importante: eles correspondem às fronteiras das regiões canônicas definidas em [2], que são as componentes conexas do complementar em relação à variedade do conjunto formado pelas singularidades e pelos pontos das variedades invariantes das selas.

Duas arestas de um conjunto distinguido, uma chegando a uma sela e outra partindo da mesma sela são ditas associadas (nesse conjunto). Assim sendo, num conjunto distinguido [i, j; k, l] são associadas as arestas i e k e as arestas j e l; num conjunto [i; j, k] são associadas as arestas i e j e as arestas i e k e num conjunto [l, m; n] são associadas as arestas l e n e as arestas m e n.

Nos conjuntos distinguidos também temos a noção de pares de arestas adjacentes: num conjunto [i, j; k, l] são adjacentes as arestas i e j, j e l, l e k, k e i; num conjunto [i; j, k] são adjacentes j e k e num conjunto [l, m; n] são adjacentes l e m; como vemos, a aresta incidente na fonte num conjunto distinguido do tipo 2 e a aresta incidente no poço num conjunto distinguido do tipo 3 não são levadas em consideração na noção de adjacência de arestas.

Os conjuntos distinguidos devem sempre ser orientados, significando esta orientação que, em cada vértice de um conjunto distinguido devemos ter um sentido de rotação bem definido entre as arestas adjacentes do conjunto que são incidentes nesse vértice; esta orientação é dada, assinalando-se em cada vértice da figura plana que representa o conjunto distinguido o sentido da rotação ao redor desse vértice, de tal forma que ela se realize através da região delimitada pelas arestas do conjunto (num conjunto distinguido do tipo 2 (3) tal região é delimitada apenas pelas arestas que não incidem na fonte (no poço); isto corresponderá, na variedade, a uma rotação realizando-se através da região canônica que deu origem ao conjunto distinguido. Como a rotação só envolverá as arestas adjacentes, devem ser ignoradas, para efeito da orientação, a aresta incidente na fonte num conjunto do tipo 2 e a incidente no poço num conjunto do tipo 3. Exemplos de conjuntos distinguidos orientados:





Como observação final com relação à orientação, notar que, fixado o sentido de rotação em um dos vértices de um conjunto distinguido, automaticamente fica dado o sentido de rotação nos outros vértices.

Utilizando o conceito de conjunto distinguido e as noções a ele ligadas, definimos um <u>gráfico distinguido</u> associado a um campo X_g como sendo ou o gráfico $\alpha\omega$ de S^2 (correspondente ao campo em S^2 que tem uma fonte no polo norte e um poço no polo sul) ou então um gráfico $G\ (X_g)$ juntamente com um certo número de conjuntos distinguidos tais que:

GD_g 1 - Toda aresta de $G\ (X_g)$ pertence a exatamente dois conjuntos distinguidos, com exceção da incidente na fonte em um conjunto distinguido do tipo 2 e da incidente no poço em um conjunto distinguido do tipo 3, que pertencem a um só.

GD_g 2 - A aresta incidente na fonte em qualquer conjunto distinguido do tipo 2 é a única aresta que incide nessa fonte; o mesmo ocorre com a aresta incidente no poço em qualquer conjunto distinguido do tipo 3.

GD_g 3 - Se dois conjuntos distingui

dos têm em comum um par de arestas associadas então eles coincidem.

GD_g 4 - Quando em um vértice incidem vários conjuntos distinguidos, eles podem ser escritos em ordem cíclica

$$D_1, D_2, \ldots, D_{p-1}, D_p$$

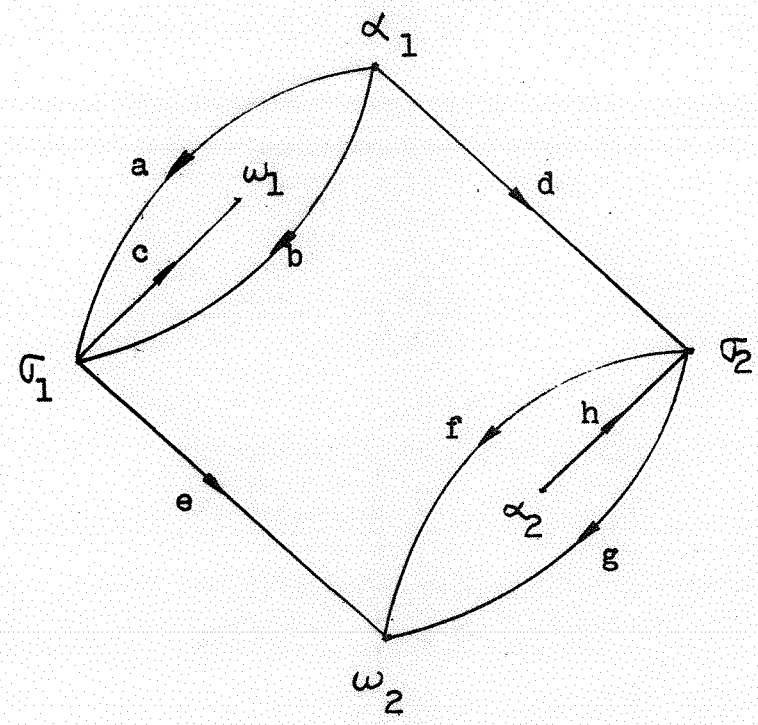
onde D_i tem uma aresta comum com D_{i-1} e outra com D_{i+1} ($D_{p+1} = D_1$, $D_o = D_p$) sendo estas arestas incidentes no vértice em consideração e adjacentes uma à outra como arestas de D_i. Aqui não devem ser consideradas as arestas incidentes na fonte em um conjunto do tipo 2 e no poço em um conjunto do tipo 3.

GD_g 5 - os conjuntos distinguidos podem ser orientados coerentemente, isto é, podem ser orientados de tal forma que, em cada vértice, na situação descrita em GD_g 4, a orientação de cada D_i induz no seu par de arestas adjacentes incidentes no vértice, um sentido de rotação que é o mesmo para i = 1, 2, ..., p.

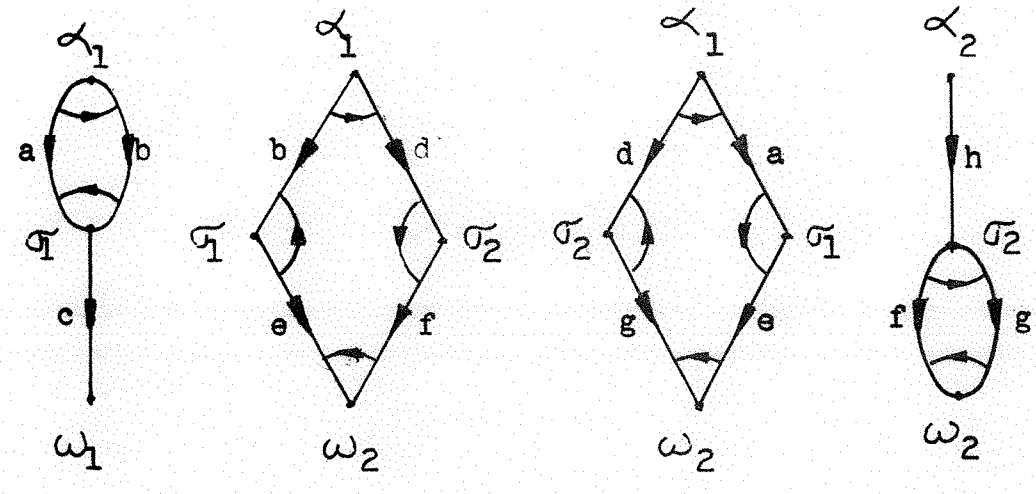
Tendo em vista a interpretação geométrica dos conjuntos distinguidos, dado um campo X_g só há uma forma possível de associar a ele um gráfico dis-

tinguido, o qual será denotado $G^*(X_g)$.

Para ilustrar a noção de gráfico distinguido vamos considerar o seguinte exemplo em S^2:



O gráfico distinguido associado a este campo tem quatro conjuntos distinguidos: [a,b;c], [b, d; e, f], [a, d; e, g] e [h; f, g] que estão representados na figura seguinte com as suas orientações:



Notemos que, por exemplo, no vértice α_1, incidem tres conjuntos distinguidos que podem ser escritos na ordem cíclica $[a, b; c]$, $[b, d; e, f]$, e $[a, d; e, g]$, verificando $GD_g 4$ e que temos as rotações $a \to b$, $b \to d$ e $d \to a$ verificando GD_g 5. Analogamente se pode verificar estas propriedades nos outros vértices.

Dois campos X e Y em M^2 são <u>conjugados</u> quando existe um homeomorfismo de M^2 que leva as trajetórias de X nas trajetórias de Y ($X \sim Y$).

Dois gráficos distinguidos $G^*(X_g)$ e $G^*(Y_g)$ são isomorfos quando forem isomorfos como com-

plexos celulares orientados, devendo o isomorfismo preservar os conjuntos distinguidos $(G^* (X_g) \sim G^* (Y_g))$.

Um teorema importante para a classificação é o seguinte:

$$T_g 1 : \quad X_g \sim Y_g \Longleftrightarrow G^* (X_g) \sim G^* (Y_g)$$

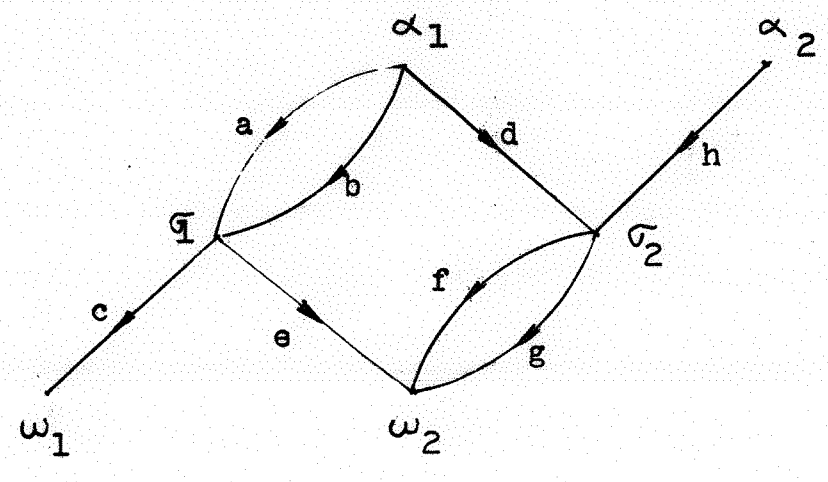
A demonstração deste teorema consiste fundamentalmente na definição do homeomorfismo de M^2 que leva as trajetórias de X_g nas de Y_g e essa definição é análoga à construção do homeomorfismo que é feita em [2], razão pela qual este teorema não é demonstrado em [1].

Uma vez demonstrado este teorema, o problema de classificação dos campos X_g se transforma no problema de classificação dos gráficos distinguidos $G^* (X_g)$.

Resta, no entanto, uma pergunta importante a ser respondida: se construirmos um gráfico distinguido abstratamente, pode-se garantir que êle é o gráfico distinguido associado a algum campo ? Para responder a esta pergunta, damos as seguintes definições:

1_g - <u>Um gráfico distinguido abstrato</u>

Λ_g é um complexo celular orientado unidimensional conexo, com vértices em tres níveis, os do primeiro nível chamados fontes, os do segundo chamados selas e os do terceiro poços, sendo as arestas orientadas de uma fonte para uma sela ou de uma sela para um poço, de tal forma que em cada sela haja duas arestas que chegam e duas que partem (e somente estas quatro), juntamente com um certo número de subconjuntos de Λ_g, dos tipos 1, 2 e 3 já considerados, que serão os conjuntos distinguidos e que devem verificar às condições GD_g 1 a GD_g 5. O gráfico $\alpha\omega$ formado apenas por uma aresta também será considerado um gráfico distinguido abstrato. Por exemplo, o gráfico distinguido abstrato correspondente ao exemplo dado anteriormente será:



juntamente com os mesmos conjuntos distinguidos já citados.

2_g - Se p, q e s são respectivamente os números de fontes, selas e poços de Λ_g, o numero $\chi(\Lambda_g) = p - q + s$ é chamado característica de Euler de Λ_g.

3_g - Um gráfico distinguido abstrato Λ_g é dito <u>realizável</u> em M^2 se existe um campo X_g em M^2 tal que $G^*(X_g) = \Lambda_g$.

O resultado central demonstrado em [1] é o seguinte:

T_g 2: Λ_g é realizável em $M^2 \Leftrightarrow \chi(\Lambda_g) = \chi(M^2)$.

A demonstração deste teorema é feita em [1] por meio de uma série de reduções que transformam a realizabilidade de Λ_g em M^2 na do $\alpha\omega$ em S^2.

Os teoremas 1 e 2 transformam o problema de classificação dos campos no problema de classificação dos gráficos distinguidos abstratos, mas este último problema não oferece nenhuma dificuldade pois há um processo de decisão que permite construir todos os gráficos distinguidos abstratos.

Vamos mostrar agora como pode ser tratado o caso em que M^2 é orientável, mas o campo X pode ter órbitas fechadas hiperbólicas; mais precisamente, trata-se de classificar campos em que:

1 - as singularidades e as órbitas fechadas são todas hiperbólicas (e portanto só há um número finito delas).

2 - não há trajetórias conectando selas.

3 - O conjunto α - limite (ω - limite) de qualquer trajetória ou é formado por uma singularidade ou é uma órbita fechada.

Associamos a estes campos gráficos definidos de maneira semelhante aos gráficos $G(X_g)$ nos quais aparecem também vértices do tipo α^1 correspondentes a órbitas fechadas que são fontes e do tipo ω^1 correspondentes a órbitas fechadas que são poços. Os gráficos conexos obtidos satisfazem as propriedades Gr_g 1, 2 e 3 com relação às arestas que não incidem em um α^1 ou em um ω^1. Em relação a estes novos vértices é preciso acrescentar a seguinte propriedade:

Gr 4 - pode haver arestas de um α^1 para um σ, um ω ou um ω^1 e também de um σ para um ω^1; se há duas arestas entre um α^1 e um ω^1, então trata-se do campo no toro T^2 que não possui outras singularidades ou órbitas fechadas a não ser o α^1 e o ω^1 em questão.

Verifica-se ainda que:

1 - uma aresta $\alpha^1 \omega^1$ significa que, em M^2, α^1 e ω^1 limitam um anel e que toda trajetória contida nesse anel espirala-se de α^1 para ω^1.

2 - uma aresta $\alpha^1\omega$ significa que, em M^2, α^1 limita um disco, sendo ω a única singularidade no seu interior e que tôda trajetória contida nesse disco espirala-se de α^1 para ω; analogamente para uma aresta $\alpha\omega^1$.

3 - como M^2 é orientável, as curvas fechadas em M^2 possuem dois lados; as arestas incidentes em um α^1 (ω^1) podem ser divididas em dois grupos, correspondentes à incidência em cada um dos lados da órbita fechada na variedade; a curva α^1 (ω^1) desconecta M^2

se e somente se, retirando-se do gráfico as arestas (sem os vértices) de cada um dos dois grupos citados (mantendo-se as do outro), obtem-se um novo gráfico desconexo.

Definimos também conjuntos distinguidos, correspondentes às fronteiras das componentes conexas do complementar em relação à variedade do conjunto formado pelas singularidades, pelos pontos das órbitas fechadas e pelos pontos das variedades invariantes das selas. Teremos então:

a) conjuntos distinguidos dos tipos 1, 2 e 3 onde, eventualmente, o α ou o ω ou ambos foram substituidos, respectivamente, por um α^1 ou um ω^1.

b) conjuntos distinguidos reduzidos a uma única aresta $\alpha^1\omega$, $\alpha\omega^1$ ou $\alpha^1\omega^1$.

As cinco propriedades da definição de gráfico distinguido sofrem as seguintes modificações:

GD 1 - incluir todos os novos tipos 2 e 3.

GD 2 - incluir o tipo 2 em que o ω foi substituido por um ω^1 e o tipo 3 em que o α foi substituido por um α^1; não se deve incluir aqui o tipo 2 em que o α foi substituido por um α^1 pois podem ocorrer outras arestas incidentes nesse α^1, correspondentes ao outro lado da curva fechada na variedade; pelo mesmo motivo, não se deve incluir o tipo 3 em que o ω foi substituido por um ω^1.

GD 3 - sem modificações

GD 4 - os conjuntos distinguidos incidentes em um α^1 (ω^1) também podem ser divididos em dois grupos, correspondentes à incidência em cada um dos lados da órbita fechada na variedade (analogamente ao que já foi feito para as arestas) e então em um vértice α^1(ω^1) a ordem cíclica deve ser tomada separadamente para cada um desses dois grupos de conjuntos distinguidos (de acordo com GD_g 4, só precisamos ordenar um desses grupos se ele for formado por mais de um conjunto distinguido).

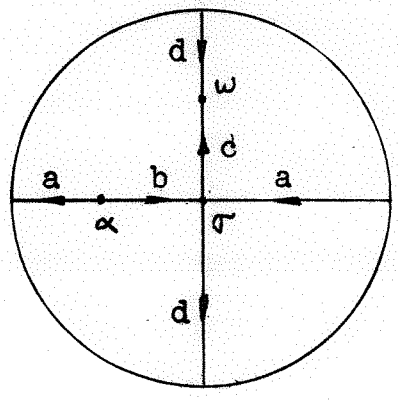
GD 5 - acrescentar que, em um vértice α^1 (ω^1), na situação descrita em GD 4, a verificação da igualdade dos sentidos de rotação das arestas incidentes nesse vértice também deve ser feita separadamente

para os dois grupos de arestas, exigindo-se, porém, que esse sentido seja o mesmo nos dois grupos.

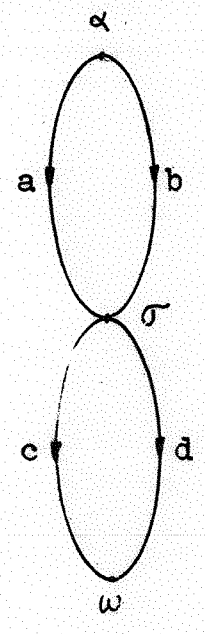
O T1 continua verdadeiro com as mesmas definições de campos conjugados e gráficos distinguidos isomorfos; novamente a demonstração não é dada em [1] pois é análoga à que é feita em [2].

Definindo-se também neste caso gráfico distinguido abstrato (colocando os α^1 no mesmo nível dos α e os ω^1 no dos ω) e considerando as mesmas noções de caracteristica de Euler (as órbitas fechadas não influem) e de gráfico distinguido abstrato realizável, o T2 continua válido, como é demonstrado em [1], o que termina a classificação destes campos.

Vamos examinar agora o caso em que M^2 <u>não</u> é orientável e o campo <u>não</u> possui órbitas fechadas. Considerando o seguinte exemplo no plano projetivo P^2,



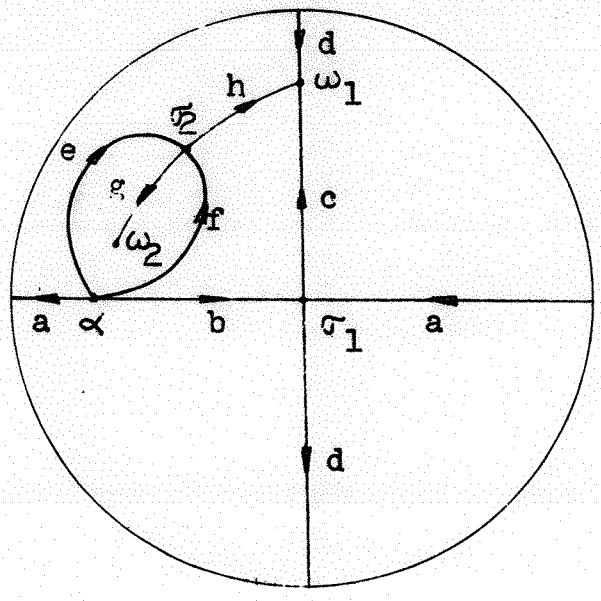
no qual o campo tem apenas tres singularidades: um α, um σ e um ω e levando em conta a interpretação geométrica dos conjuntos distinguidos, vemos que é necessário introduzir um novo tipo de conjunto distinguido, o tipo 4:



Êste tipo de conjunto distinguido pode ser obtido do tipo 1 identificando-se as duas selas e por isso será representado com a mesma notação. No exemplo dado no plano projetivo, o gráfico distinguido associado possui apenas dois conjuntos distinguidos,

ambos do tipo 4: [a, b; c, d] e [a, b; d, c] .

As propriedades GD_g 1 e 2 continuam válidas sem nenhuma alteração; a GD_g 3 também, ressaltando-se no entanto que no conjunto distinguido [a, b; c, d] do tipo 4, são associadas apenas as arestas a e c e as arestas b e d; a propriedade GD_g 4 continua válida desde que, num vértice σ em que incida um conjunto distinguido do tipo 4, este possa aparecer duas vezes na ordem cíclica ao redor desse vértice e observando-se também que no conjunto distinguido [a, b; c, d] do tipo 4 são adjacentes apenas as arestas a e b, b e d, d e c, c e a. Para ilustrar esta modificação em GD_g 4 consideremos o seguinte exemplo, ainda em P^2:



A ordem ciclica dos conjuntos distinguidos ao redor de σ_1 é a seguinte: [a, b; c, d], [b, f;c,h], [a, b; c, d], [a, e; d, h]. A propriedade GD_g 5 não tem significado quando M^2 não é orientável pois os conjuntos do tipo 4 não podem ser orientados.

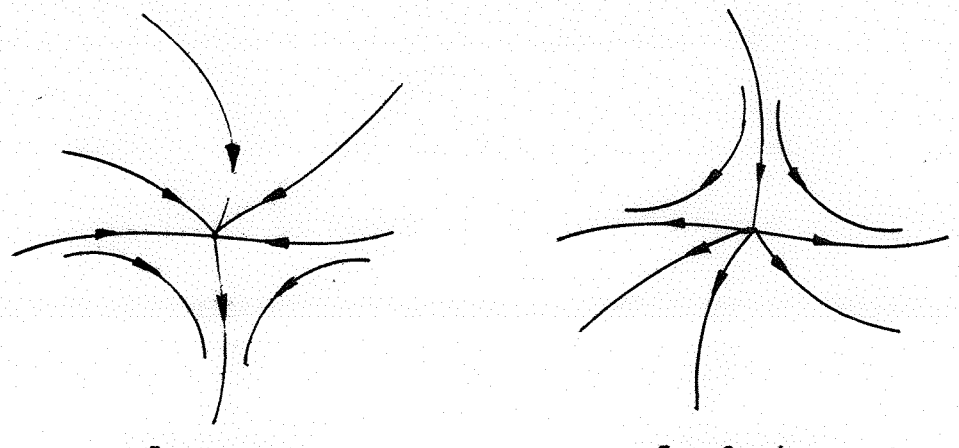
Definindo-se gráfico distinguido abstrato levando em conta as modificações introduzidas nas propriedades que caracterizam os gráficos distinguidos, os teoremas 1 e 2 continuam verdadeiros ([1]).

Finalmente, em vista dos casos já estudados, torna-se fácil estudar os campos com órbitas fechadas em variedades M^2 não orientáveis. Apenas salientamos que, tendo em vista a não orientabilidade de M^2, podem ocorrer órbitas fechadas com apenas um lado: todos os conjuntos distinguidos incidentes em um vértice correspondente a uma tal órbita devem ser colocados em ordem cíclica, deixando de existir a divisão em dois grupos, pois a curva só tem um lado.

§ 2º - DEFINIÇÃO DOS ELEMENTOS QUASE-GENÉRICOS: SINGULARIDADES, ÓRBITAS FECHADAS E CONEXÕES DE SELAS. CAMPOS QUASE-GENÉRICOS.

1 - Definição de singularidade quase-genérica do tipo sela-nó.

Em [3] , pg 18-19 , encontramos a definição de uma singularidade do tipo sela nó: dado um campo X de classe C^r, $r \geq 2$, em M^2, uma singularidade p de X é dita uma sela-nó, se a derivada de X no ponto p, DX_p, tem um único valor próprio nulo. Além disso, sendo v_1 o vetor próprio associado ao valor própio nulo e v_2 o vetor próprio associado ao valor próprio não nulo, exige-se que a segunda derivada de X no ponto p e na direção de v_1 , tenha projeção sobre v_1 paralela a v_2 não nula. Dependendo do sinal do valor próprio não nulo, poderemos ter uma sela-fonte ou uma sela-poço. Da definição acima resulta a seguinte configuração para as trajetórias de X nas vizinhanças de uma sela-nó:

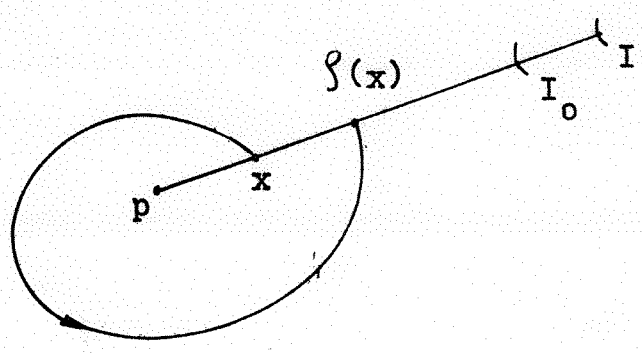


sela-poço sela-fonte

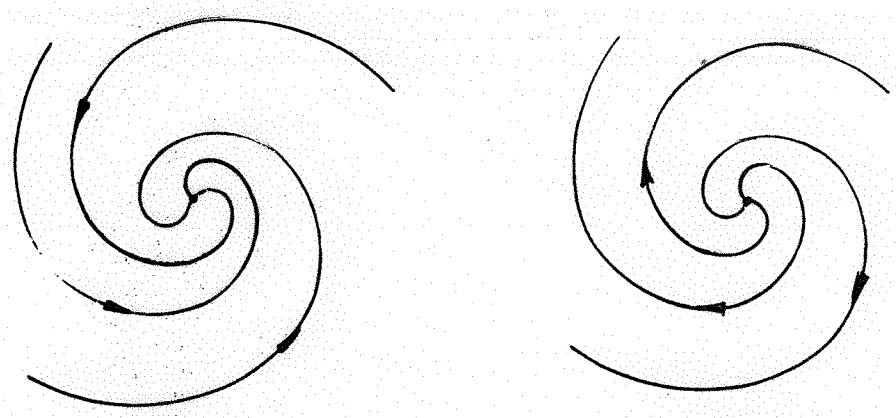
Notemos que a variedade estável de uma sela-poço é bidimensional e com bordo e que a instável é unidimensional e com bordo. Dualmente para a sela-fonte.

2 - Definição de singularidade quase-genérica do tipo foco-composto.

A definição de uma singularidade do tipo foco-composto encontra-se em [3], pg 32-33. Resumidamente, trata-se de uma singularidade p de um campo X de classe C^r, $r \geq 4$, em M^2, tal que a derivada de X no ponto p, DX_p, tem traço $\sigma = 0$ e determinante $\Delta > 0$ (isto acarreta que os valores próprios de DX_p são imaginários puros). De acôrdo com [3] é possível definir uma transformação de Poincaré $\rho : I_0 \to I$, onde $I_0 \subset I$ são arcos semi-abertos transversais ao campo e com extremos em p:



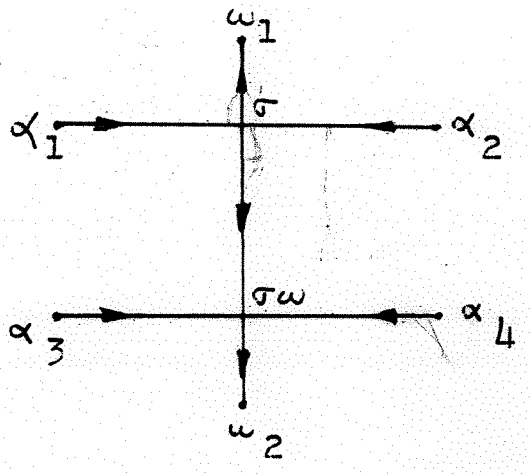
Exige-se ainda na definição que $\rho^{(3)}(p) \neq 0$. Dependendo do sinal de $\rho^{(3)}(p)$ podemos ter um foco-composto estável ou instável. Da definição acima, resulta a seguinte configuração para as trajetórias de X nas vizinhanças de um foco-composto:

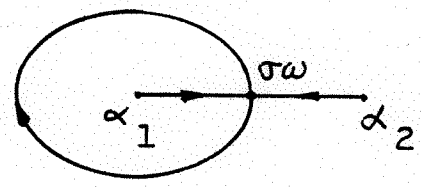


estável instável

3 - Definição de conexão de selas quase-genérica.

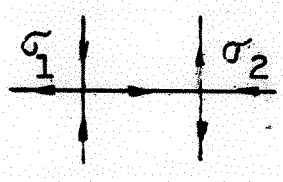
Uma conexão de selas é uma trajetória de um campo X de classe C^r, $r \geqslant 2$, em M^2, cujo conjunto α-limite é formado por uma sela ou uma sela-nó, o mesmo acontecendo com o ω-limite, não sendo essa trajetória interior à variedade invariante bidimensional da sela-nó. Assim sendo, nos exemplos seguintes <u>não</u> temos conexões de selas ($\sigma\omega$ indica uma sela-poço):

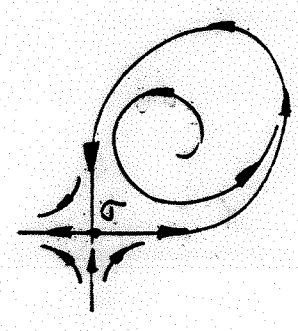




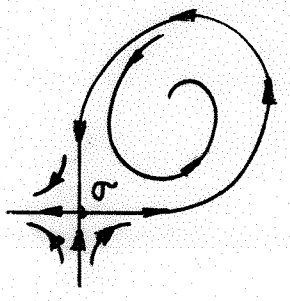
Uma conexão de selas é dita <u>quase-genérica</u> se conecta duas selas diferentes ou se auto-conecta uma única sela p e o traço da aplicação DX_p não é nulo.

Exemplos de conexões de sela quase-genéricas:



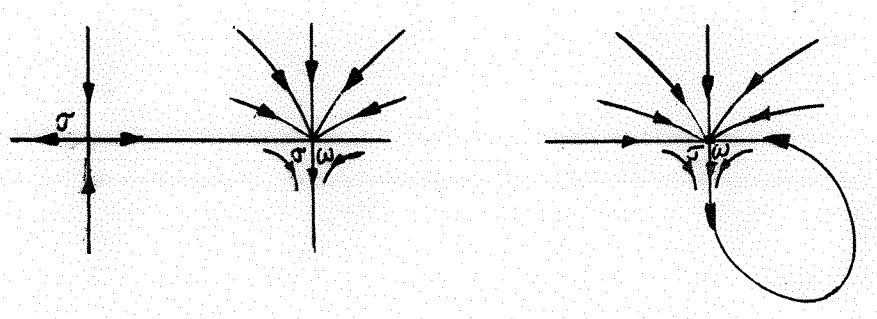


traço $DX_\sigma < 0$



traço $DX_\sigma > 0$

Exemplos de conexões de selas que <u>não</u> são quase-genéricas:



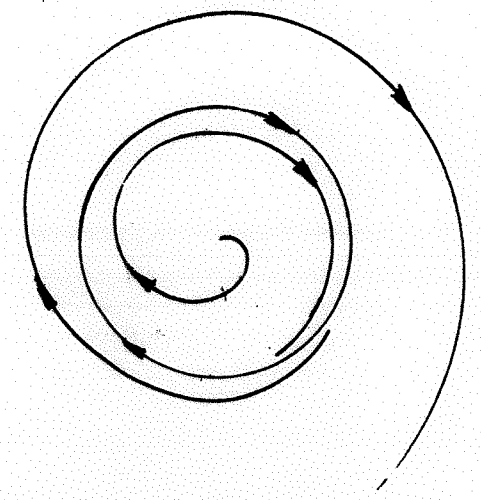
4 - Definição de órbitas fechadas quase-genéricas.

A definição de uma órbita fechada quase-genérica encontra-se em [3], pg 6-7 . Resumidamente, trata-se de uma órbita fechada γ de um campo X de classe C^r, $r \geqslant 3$, em M^2, tal que, para a transformação de Poincaré $\pi : I_0 \longrightarrow I$, onde $I_0 \subset I$ são arcos abertos transversais a X por um ponto $p \in \gamma$, tenhamos:

$$\pi'(p) = 1 \text{ e } \pi^{(2)}(p) \neq 0 \text{ ou } \pi'(p) = -1 \text{ e } (\pi^2)^{(3)}(p) \neq 0$$

O primeiro caso corresponde a uma curva com dois lados que é orbitalmente semi-estável, isto

é, estável de um dos lados e instável de outro:



órbita semi-estável

O segundo caso corresponde a uma curva com apenas um lado (que portanto só pode ocorrer quando M^2 não é orientável) e que é instável ou estável, dependendo do sinal de $(\pi^2)^{(3)}(p)$.

5 - Campos quase-genéricos.

Nesta secção daremos apenas uma idéia intuitiva do que seja um campo quase-genérico, deixando as definições para os parágrafos seguintes. Tratam-se de campos em M^2, que diferem dos estruturalmente estáveis apenas em um detalhe: é permitida a presença de <u>um e um só</u> elemento quase-genérico. A importância

do estudo de tais campos é devida aos resultados obtidos em [3].

§ 3º - CLASSIFICAÇÃO, EM VARIEDADES ORIENTÁVEIS, DOS CAMPOS QUASE-GENÉRICOS COM UMA SELA-NÓ E SEM ÓRBITAS FECHADAS.

Neste parágrafo vamos fazer a classificação dos campos quase-genéricos em que o elemento quase-genérico é do tipo sela-nó. Vamos estudar apenas o caso da sela-poço (que será representada por $\sigma\omega$), já que o da sela fonte é dual e análogo. Supondo <u>M^2 orientável</u>, vamos estudar os campos X de classe C^r $(r \geq 2)$ que <u>não possuem órbitas fechadas</u> e nos quais:

1 - há uma e uma só singularidade do tipo sela-poço; as demais singularidades são todas hiperbólicas (e portanto só há um número finito delas);

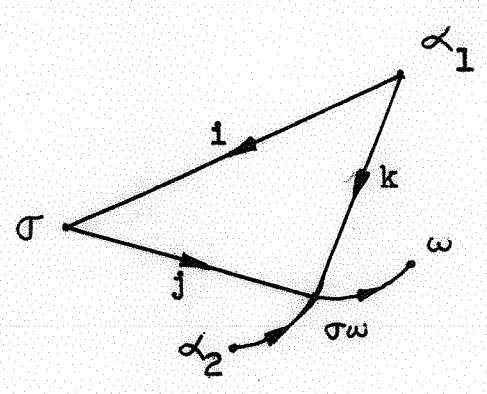
2 - não há trajetórias conectando selas;

3 - o conjunto α-limite (ω-limite) de qualquer trajetória é formado por uma singularidade.

Tais campos serão denotados por $X_{\sigma\omega}$.

A um campos $X_{\sigma\omega}$ associamos um gráfico $G(X_{\sigma\omega})$ definido de maneira semelhante aos gráficos $G(X_g)$ com as seguintes ressalvas para a sela-poço:

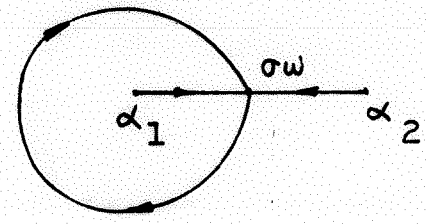
a - esta singularidade deve ser considerada com dois comportamentos distintos: ora semelhante ao de uma sela, onde $W^s(\sigma\omega) - \{\sigma\omega\}$ tem duas componentes conexas (correspondentes ao bordo de $W^s(\sigma\omega)$ como sela-poço) e $W^u(\sigma\omega) - \{\sigma\omega\}$ apenas uma, ora semelhante a um poço cuja variedade estável é o interior de $W^s(\sigma\omega)$. Assim sendo, é possível a seguinte situação:



note-se que há uma aresta k ligando α_1 a $\sigma\omega$ embora exista σ tal que $\alpha_1 \leq \sigma \leq \sigma\omega$, o que não podia acontecer nos gráficos $G(X_g)$. Isto ocorre pois k incide em $\sigma\omega$ como "sela" e j como "poço". Para efeito de referência chamaremos as arestas que chegam a $\sigma\omega$ como "sela" de arestas bordo (pois correspondem ao bordo de $W^s(\sigma\omega)$) e as arestas que chegam a $\sigma\omega$ como "poço" de <u>arestas interiores</u> (pois estão contidas no interior de $W^s(\sigma\omega)$).

É claro que de $\sigma\omega$ só parte uma aresta, correspondente a $W^u(\sigma\omega)$. Do que foi dito conclue-se que cada sela contribue para o gráfico com quatro arestas, como nos campos X_g, e que a sela-poço contribue com tres, sendo estas as únicas arestas presentes em $G(X_{\sigma\omega})$.

b - outra particularidade devida à presença da sela-poço, é que na relação $x \leq y$ definida no conjunto $\Omega(X_{\sigma\omega})$ das singularidades de $X_{\sigma\omega}$, é possível ocorrer $\sigma\omega \leq \sigma\omega$ não trivialmente, já que a trajetória



não é uma conexão de selas; isto corresponderá à ocorrência de um laço no gráfico: é a única possibilidade de termos uma aresta unindo um vértice x a um vertice y com $x = y$. Dizemos que $\sigma\omega \leq \sigma\omega$ não trivialmente pois, nos campos X_g, $x \leq x$ pois $W^u(x) \cap W^s(x) = \{x\}$, ao passo que aqui, no exemplo considerado, $W^u(\sigma\omega) \cap W^s(\sigma\omega) = W^u(\sigma\omega)$.

O gráfico conexo G ($X_{\sigma\omega}$) obtido possue as seguintes propriedades:

$Gr_{\sigma\omega}$ 1 - não há arestas unindo uma fonte a um poço e nem arestas interiores unindo uma fonte à sela-poço.

$Gr_{\sigma\omega}$ 2 - as arestas ou partem de uma fonte e chegam a uma sela, ou partem de uma sela e chegam a um poço, ou ainda:

a - partem de uma sela e chegam à sela-poço (arestas interiores).

b - partem de uma fonte e chegam à sela-poço (arestas bordo) (há exatamente duas arestas deste tipo).

c - partem da sela-poço e chegam ou a um poço ou à própria sela-poço (neste último caso a aresta será uma aresta interior) (há uma e só uma aresta de um destes dois tipos, os quais se excluem mutuamente).

$Gr_{\sigma\omega}$ 3 - em cada sela há exatamente duas arestas que chegam e duas que partem; da sela poço par

te apenas uma aresta ($Gr_{\sigma\omega}$ 2c), a ela chegam exatamente duas arestas bordo ($Gr_{\sigma\omega}$ 2b) e nada se pode afirmar com relação ao numero de arestas interiores que nela incidem ($Gr_{\sigma\omega}$ 2a e c).

Como complementação podemos frisar que as arestas bordo que chegam à sela-poco só podem vir de fontes, enquanto as interiores só podem vir de selas (ou uma da própria sela-poço e as demais de selas).

Os novos conjuntos distinguidos que destacaremos nos gráficos G ($X_{\sigma\omega}$) podem ser obtidos daqueles já considerados nos gráficos G (X_g) por um dos seguintes processos:

a) substituir uma sela por uma sela-poço;

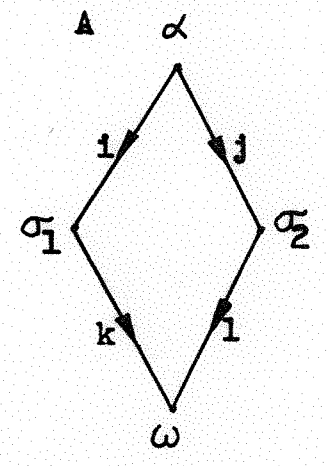
b) substituir um poço por uma sela-poço;

c) identificar uma sela com um poço, substituindo os dois por uma única sela-poço.

Resultam então os seguintes tipos de de conjuntos distinguidos: (são válidas as mesmas notações e convenções dadas para os gráficos G (X_g)):

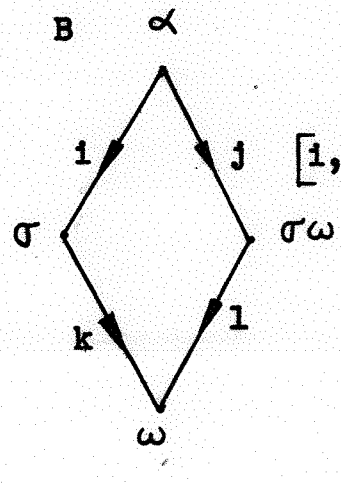
T I P O 1

A



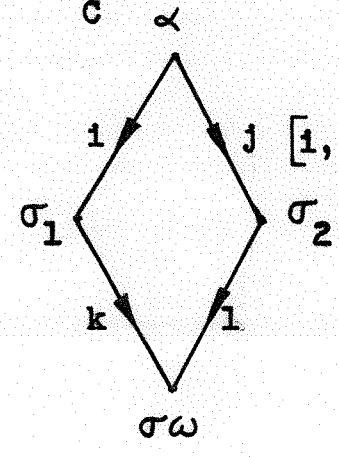
[i, j; k, l]

B



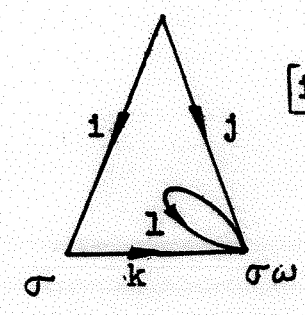
[i, j; k, l]

C



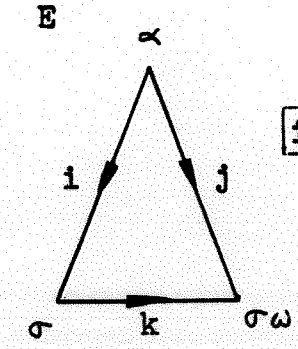
[i, j; k, l]

D



[i, j; k, l]

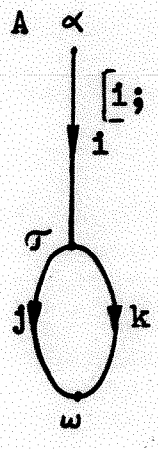
E



[i, j; k, .]

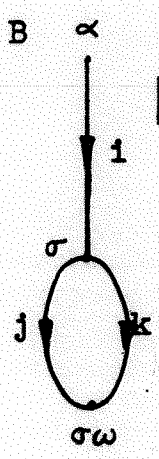
TIPO 2

A



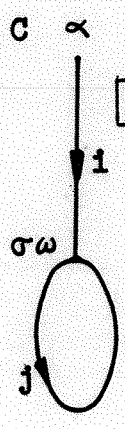
[i; j, k]

B



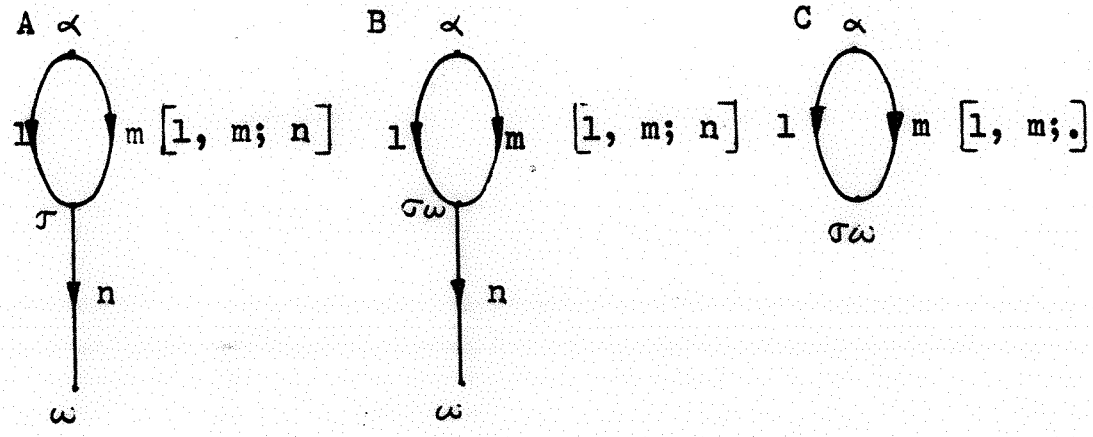
[i; j, k]

C

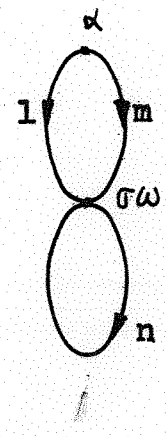


[i; j, .]

T I P O 3



Com relação às substituições e identificações que não foram realizadas, notar que, num tipo 2, não é possivel substituir o σ por um $\sigma\omega$ e nem identificar o σ com o ω mantendo as duas arestas (j e k) pois em qualquer um dos dois casos haveria duas arestas partindo do $\sigma\omega$, o que não é possível; por outro lado, num tipo 3, não é possível substituir o ω por um $\sigma\omega$ pois no poço de um conjunto distinguido do tipo 3 só pode incidir uma aresta e num $\sigma\omega$ incidem pelo menos tres (as duas arestas bordo e a que parte do $\sigma\omega$). Além disso, um conjunto distinguido do tipo



corresponde à identificação da sela com o poço num tipo 3 mantendo a aresta n só pode ocorrer numa variedade não orientável (comparar com o tipo 4 nas variedades não orientáveis no § 1).

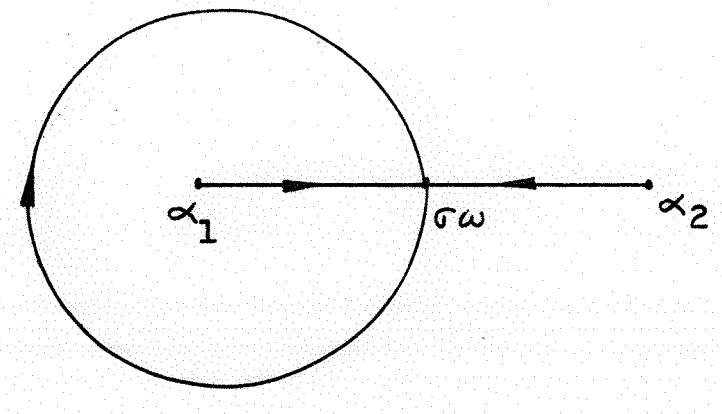
Nos campos $X_{\sigma\omega}$ também os conjuntos distinguidos correspondem às fronteiras das componentes conexas do complementar em relação à variedade do conjunto formado pelas singularidades, pelos pontos das variedades invariantes das selas, pelos pontos da variedade instável da sela-poço e pelos pontos do bordo da variedade estável da sela-poço.

Nos conjuntos distinguidos dos gráficos $G(X_{\sigma\omega})$ temos a mesma noção de arestas associadas que foi dada para os campos X_g, devendo ser incluidas no

conceito uma aresta bordo que chega à sela-poço e a aresta que parte dela. Assim sendo, nos conjuntos distinguidos [i, j; k, l] dos tipos 1 A a 1 D são associadas as arestas i e k e as arestas j e l; num conjunto distinguido [i, j; k, .] , do tipo 1 E, são associadas apenas as arestas i e k; num conjunto distinguido [i; j, k] de tipo 2 A ou 2 B são associadas as arestas i e j e as arestas i e k; num conjunto distinguido [i; j, .] do tipo 2 C, são associadas as arestas i e j e num conjunto distinguido [l, m; n] de tipo 3 A ou 3 B são associadas as arestas l e n e as arestas m e n; num tipo 3 C não há arestas associadas.

Antes de falarmos em arestas adjacentes e em orientação dos conjuntos distinguidos, vamos fazer algumas observações sobre a auto-ligação de uma sela-nó que ocorre nos conjuntos tipo 1 D e 2 C; temos tres possibilidades: ou a auto-ligação pertence a dois conjuntos distinguidos do tipo 2 C, ou pertence a um do tipo 1 D e a um do tipo 2 C ou pertence a dois do tipo 1 D.

No primeiro caso, em que a auto-ligação pertence a dois conjuntos distinguidos do tipo 2 C, o gráfico reduzir-se-á, obrigatoriamente ao seguinte



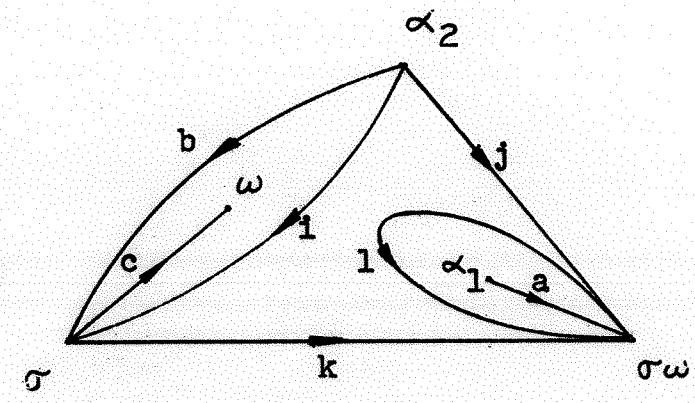
que é realizável em S^2. Para simplificar a definição de gráfico distinguido, este gráfico, denotado $\alpha_1 - \sigma\omega - \alpha_2$ será considerado à parte nessa definição.

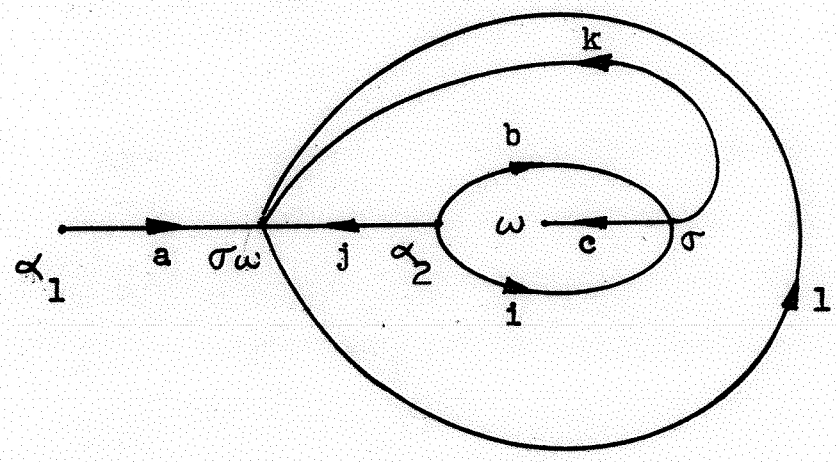
No segundo caso, em que a auto-ligação pertence a um conjunto do tipo 1 D e a um do tipo 2C, o disco delimitado pela auto-ligação (*) (na variedade) e que contém a fonte do conjunto 2 C, estará sempre contida no disco que é delimitado pelas outras tres arestas do conjunto de tipo 1 D e que contém a região canônica correspondente a este conjunto. Com relação a esta observação, é interessante notar que, os dois gráficos dados a

---

(*) abuso de linguagem: o que limita disco ou é curva fechada é a auto-ligação $\cup \{\sigma\omega\}$

seguir são associados ao mesmo campo em S^2;





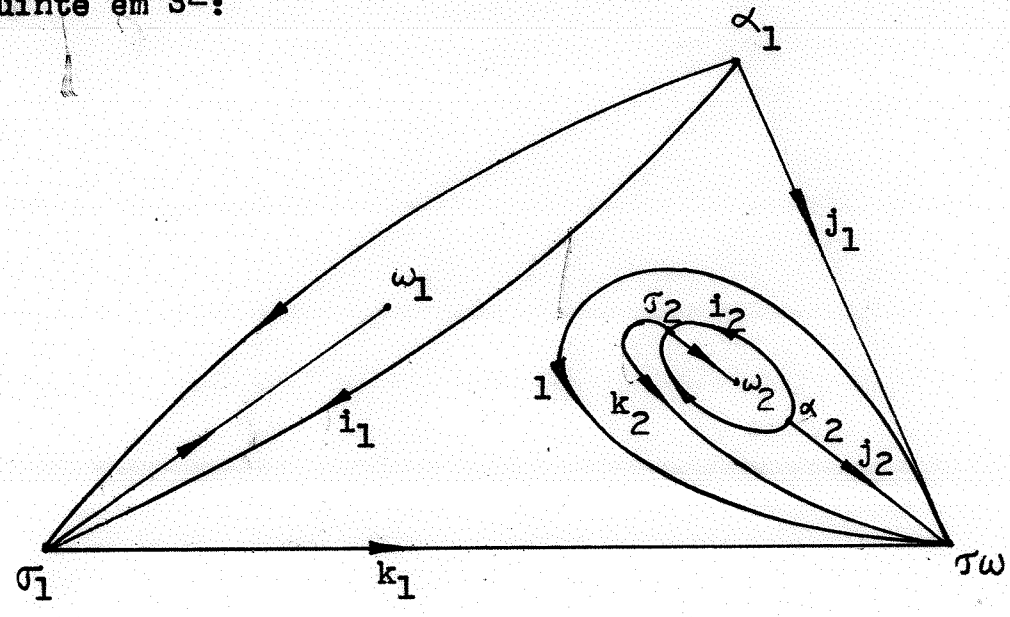
neste exemplo a auto-ligação l pertence aos conjuntos distinguidos $[i, j; k, l]$ e $[a; l, .]$ e em S^2 o disco delimitado por l e que contém a fonte α_1 em seu interior está contido no disco delimitado por i, j e k e que contém a re-

gião canônica correspondente ao conjunto $[i, j; k, l]$.

Afirmamos que, neste segundo caso, não é necessário orientar o conjunto do tipo 2 C, pois, como queremos o mesmo sentido de rotação entre as arestas ao redor do vértice $\sigma\omega$, a orientação do conjunto 2 C seria obrigatoriamente induzida pela do 1 D.

Como um conjunto de tipo 2 C só pode aparecer neste caso e no anterior, definitivamente nunca será necessário orientá-lo.

Finalmente, com relação ao terceiro caso, em que a auto-ligação pertence a dois conjuntos do tipo 1 D, vamos apenas observar que, na variedade, tanto ela pode limitar disco, como no exemplo seguinte em S^2:



como também pode não limitar disco, como veremos mais adiante num exemplo no toro T^2.

Tendo em vista estas observações e lembrando que a noção de arestas adjacentes é introduzida para ser utilizada na orientação dos conjuntos distinguidos definimos os seguintes <u>pares de arestas adjacentes</u>: num conjunto distinguido de tipo 1 A, 1 B, 1 C ou 1 E são adjacentes as duas arestas incidentes em cada vértice; num conjunto [i, j; k, l] do tipo 1 D são adjacentes as arestas i e j, <u>j e k</u>, k e i; num conjunto distinguido [i; j, k] de tipo 2 A ou 2 B são adjacentes as arestas j e k; num conjunto distinguido do tipo 2 C não definimos arestas adjacentes e num conjunto distinguido [l, m; n] de tipo 3 A ou 3 B ou [l, m; .] de tipo 3 C são adjacentes as arestas l e m.

Os conjuntos distinguidos destacados num gráfico G $(X_{\sigma w})$, <u>com exceção dos de tipos 2 C</u>, devem sempre ser orientados, significando esta orientação que, em cada vértice de um conjunto distinguido devemos ter um sentido de rotação bem definido entre as <u>arestas adjacentes</u> do conjunto que são incidentes nesse vértice; esta orientação é dada assinalando-se em cada

vértice da figura plana que representa o conjunto distinguido o sentido da rotação ao redor desse vértice, de tal forma que ela se realize através da região delimitada pelas arestas do conjunto (num tipo 1 D, apenas para efeito de assinalar a rotação, considerar a região delimitada apenas pelas tres arestas distintas da auto-ligação; num tipo 2 A ou 2 B (3 A ou 3 B) tal região é delimitada apenas pelas arestas que não incidem na fonte (no poço)); isto corresponderá, na variedade, a uma rotação realizando-se através da região canônica que deu origem ao conjunto distinguido. Como a rotação só envolverá as arestas adjacentes, devem ser ignoradas, para efeito da orientação, a auto-ligação num tipo 1 D e a aresta incidente na fonte (poço) num tipo 2 A ou 2 B (3 A ou 3 B). É claro que aqui também, fixado o sentido de rotação em um dos vértices de um conjunto distinguido, automaticamente fica dado o sentido de rotação nos outros vértices.

Utilizando o conceito de conjunto distinguido e as noções a ele ligadas definimos um <u>gráfico distinguido</u> associado a um campo $X_{\sigma\omega}$ como sendo ou o gráfico $\alpha_1 - \sigma\omega - \alpha_2$ em S^2 ou então um gráfico $G\ (X_{\sigma\omega})$ juntamente com um certo número de conjuntos distinguidos tais

que:

$GD_{\sigma\omega}$ 1 - análoga a GD_g 1, excluindo-se o tipo 3 C por não haver poço neste conjunto.

$GD_{\sigma\omega}$ 2 - análoga a GD_g 2, também excluindo-se o 3 C pelo mesmo motivo.

$GD_{\sigma\omega}$ 3 - análoga a GD_g 3.

$GD_{\sigma\omega}$ 4 - análoga a GD_g 4, com as seguintes ressalvas:

a - quando ocorre uma auto-ligação incidindo na sela-poço temos duas possibilidades (já que o $\alpha_1 - \sigma\omega - \alpha_2$ está sendo considerado à parte):

1 - a auto ligação pertence a um conjunto distinguido de tipo 1 D e a um de tipo 2 C: neste caso o conjunto do tipo 2 C não deve ser incluido na ordem cíclica ao redor de $\sigma\omega$.

2 - a auto ligação pertence a dois conjuntos do tipo 1 D: neste caso, como a variedade é

orientável, a auto-ligação corresponde a uma curva fechada com dois lados na variedade; procedemos então de maneira semelhante ao que foi feito no parágrafo 1º para as órbitas fechadas com dois lados: os conjuntos distinguidos incidentes no $\sigma\omega$ devem ser divididos em dois grupos, correspondentes à incidência de cada um dos lados da auto-ligação na variedade e então no vértice $\sigma\omega$ a ordem cíclica deve ser tomada separadamente para cada um desses grupos de conjuntos distinguidos (lembrar que só precisamos ordenar um desses grupos se ele for formado por mais de um elemento).

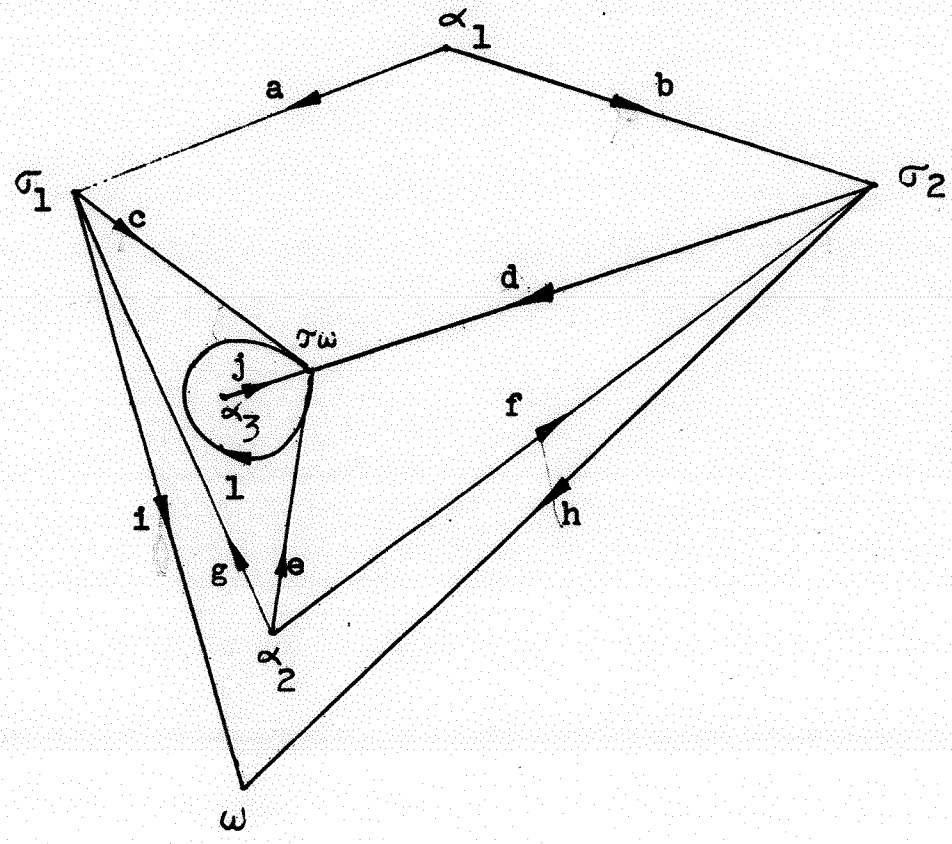
b - com relação à adjacência não devem ser considerados as arestas incidentes na fonte (poço) num tipo 2 A ou 2 B (3 A ou 3 B) e nem a auto-ligação num tipo 1 D (notar que um tipo 2 C nunca ocorrerá numa ordem cíclica).

$GD_{\sigma\omega}$ 5 - análogo a GD_g 5, acrescentando-se que, num vértice $\sigma\omega$, na situação descrita em $GD_{\sigma\omega}$ 4, ítem a2, a verificação da igualdade dos sentidos de rotação das arestas incidentes nesse vértice também deve ser feita separadamente para os dois grupos de

arestas (correspondentes à incidência de cada um dos lados da auto-ligação na variedade) exigindo-se, porém, que esse sentido seja o mesmo nos dois grupos.

Tendo em vista a interpretação geométrica dos conjuntos distinguidos, dado um campo $X_{\sigma\omega}$ só há uma forma possível de associar a ele um gráfico distinguido, o qual será denotado $G^*(X_{\sigma\omega})$.

Para ilustrar a noção de gráfico distinguido, vamos considerar o seguinte exemplo em S^2:



O gráfico distinguido associado a este campo tem os seguintes conjuntos distinguidos:

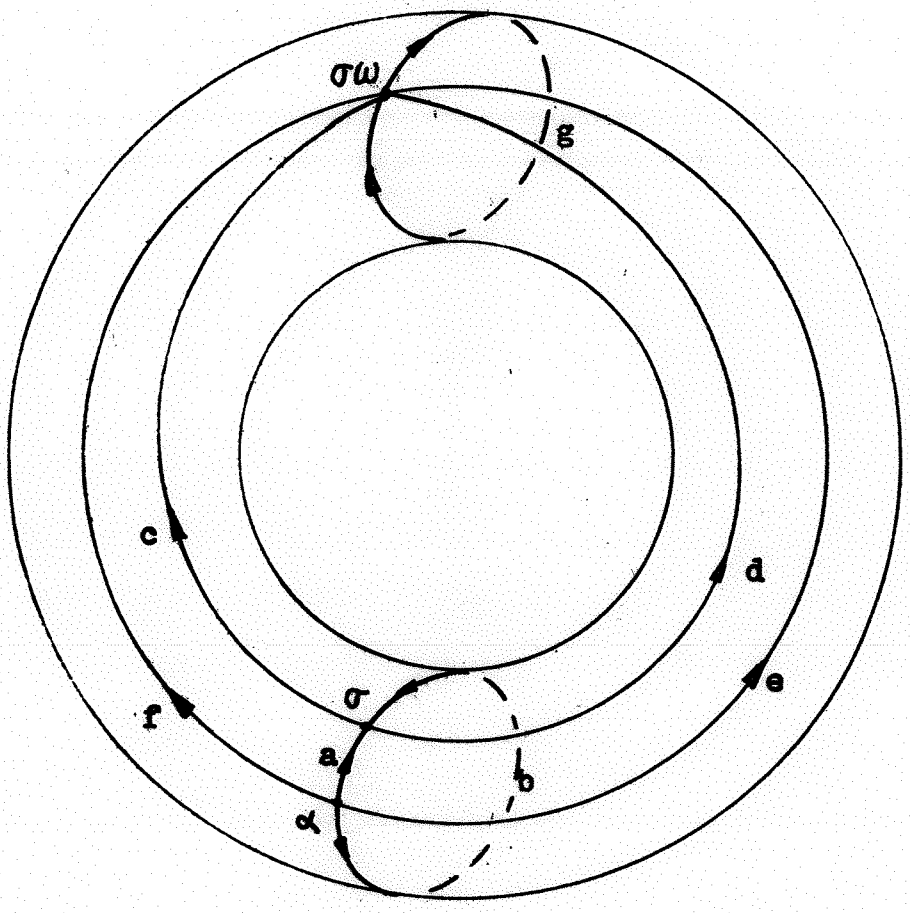
$[a, b; c, d]$, $[e, f; d, .]$, $[f, g; h, i]$,

$[b, a; h, i]$, $[e, g; c, l]$ e $[j; l, .]$.

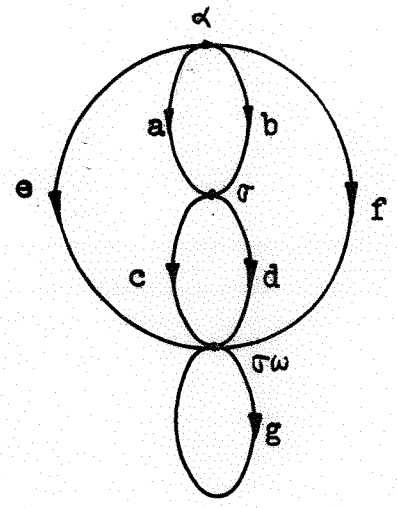
A verificação de $GD_{\sigma\omega}$ 4 e 5 se faz de maneira análoga ao que foi feito no exemplo do campo X_g. Notemos apenas que no vértice $\sigma\omega$ incidem quatro conjuntos distinguidos, os quais, excluido o do tipo 2 C, podem ser escritos na seguinte ordem cíclica

$[a, b; c, d]$, $[e, f; d, .]$, $[e, g; c, l]$, verificando $GD_{\sigma\omega}$ 4.

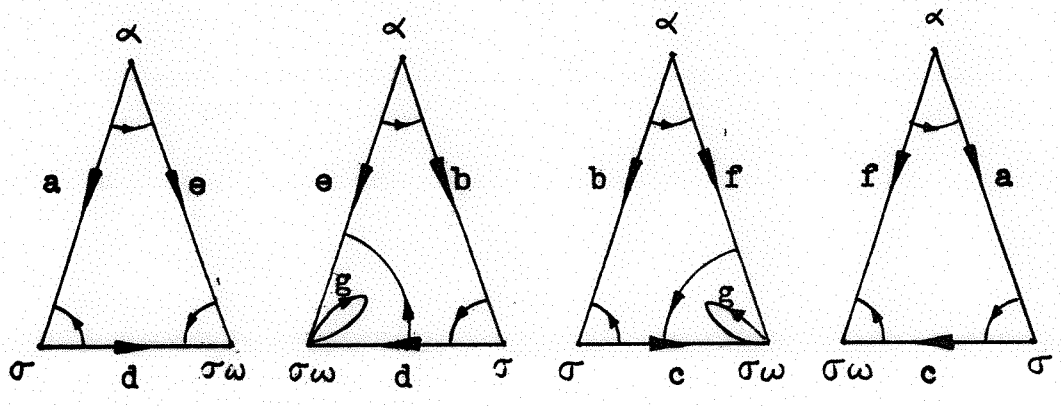
Também é ilustrativo o seguinte exemplo no toro T^2:


σω
g
c
d
σ
e
f
a
b
α

O gráfico associado a este campo é:



com os conjuntos distinguidos [a, e; d,.], [b, e; d, g], [b, f; c, g] e [a, f; c,.] que estão representados na figura seguinte com as suas orientações:



Neste exemplo é interessante fazermos a verificação completa de $GD_{\sigma\omega}$ 4 e 5: no vértice α incidem os quatro conjuntos distinguidos, que podem ser escritos na ordem cíclica [a, e; d,.] , [b, e; d, g], [b, f; c, g] , [a, f; c,.] verificando $GD_{\sigma\omega}$ 4 e temos as rotações a $\longrightarrow$ e, e $\longrightarrow$ b, b $\longrightarrow$ f e f $\longrightarrow$ a verificando $GD_{\sigma\omega}$ 5. No vértice σ temos a ordem cíclica [a, e; d,.], [a, f; c,.] , [b, f; c, g], [b, e; d, g] e as rotações d $\longrightarrow$ a, a $\longrightarrow$ c, c $\longrightarrow$ b e b $\longrightarrow$ d. No vértice $\sigma\omega$, de um dos lados da auto ligação temos a ordem cíclica [a, e; d,.] , [b, e; d, g] e as rotações e $\longrightarrow$ d, d $\longrightarrow$ e ao passo que do outro lado temos a ordem [b, f; c, g] , [a, f; c,.] e as rotações f $\longrightarrow$ c e c $\longrightarrow$ f; observar que os sentidos de rotação são os mesmos nos dois lados da auto-ligação.

Temos para os campos $X_{\sigma\omega}$ as mesmas definições de campos conjugados e de gráficos distinguidos isomorfos que foram dadas para os campos X_g, sendo ainda válido o

$$T_{\sigma\omega}\,1: \quad X_{\sigma\omega} \sim Y_{\sigma\omega} \Leftrightarrow G^*(X_{\sigma\omega}) \sim G^*(Y_{\sigma\omega})$$

Novamente a demonstração deste teorema consiste fundamentalmente na definição do homeomorfismo de M^2 que leva as trajetórias de $X_{\sigma\omega}$ nas de $Y_{\sigma\omega}$ e essa definição é análoga à construção que é feita em [2] e em [3], pag 29 a 32, razão pela qual não faremos a demonstração aqui.

Uma vez demonstrado este teorema, o problema de classificação dos campos $X_{\sigma\omega}$ se transforma no problema de classificação dos gráficos distinguidos $G^*(X_{\sigma\omega})$, mas novamente surge a pergunta: se construirmos um gráfico distinguido abstratamente, pode-se garantir que ele é o gráfico distinguido associado a algum campo $X_{\sigma\omega}$? Para responder a esta pergunta, damos as seguintes definições:

$1_{\sigma\omega}$ - um gráfico distinguido abstrato é definido de maneira análoga ao Λg, colocando-se o $\sigma\omega$ num nível intermediário entre as selas e os poços.

$2_{\sigma\omega}$ - a caracteristica de Euler $\chi(\Lambda_{\sigma\omega})$ é calculada da mesma forma que $\chi(\Lambda_g)$ e portan

to a sela-poço não influi na característica.

$3_{\sigma\omega}$ - definição de gráfico distinguido abstrato realizável igual à que foi dada para os gráficos Λ_g.

O resultado central deste parágrafo é dado pelo

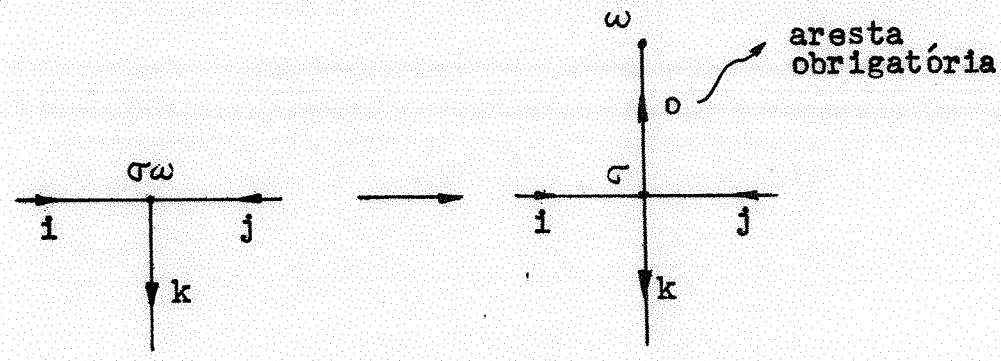
$T_{\sigma\omega}$ 2 - $\Lambda_{\sigma\omega}$ é realizável em $M^2 \Longleftrightarrow \chi(\Lambda_{\sigma\omega}) = \chi(M^2)$.

Demonstração: a idéia da demonstração que faremos é a seguinte: dado um gráfico distinguido com uma sela-poço, a ele associaremos um gráfico distinguido da mesma caracteristica de Euler, mas com todos os vértices genéricos, que é realizável em M^2 se e somente se o gráfico dado inicialmente o for, Mas a realizabilidade do gráfico com vértices genéricos está provada em [1] e então o problema está resolvido.

De acôrdo com [3], lema 3.2, pg. 19, dado um campo $X_{\sigma\omega}$ em M^2, existem uma vizinhança N de $\sigma\omega$ em M^2 e um campo Y em M^2 tais que a única singularidade de $X_{\sigma\omega}$ em N é o $\sigma\omega$ e as únicas singularidades de Y em N são uma sela e um poço; é claro que um tal cam-

po Y pode ser obtido sem alterar o campo $X_{\sigma\omega}$ fora de N e que portanto Y é um campo do tipo X_g.

A situação correspondente a este lema nos gráficos associados aos campos é a seguinte:



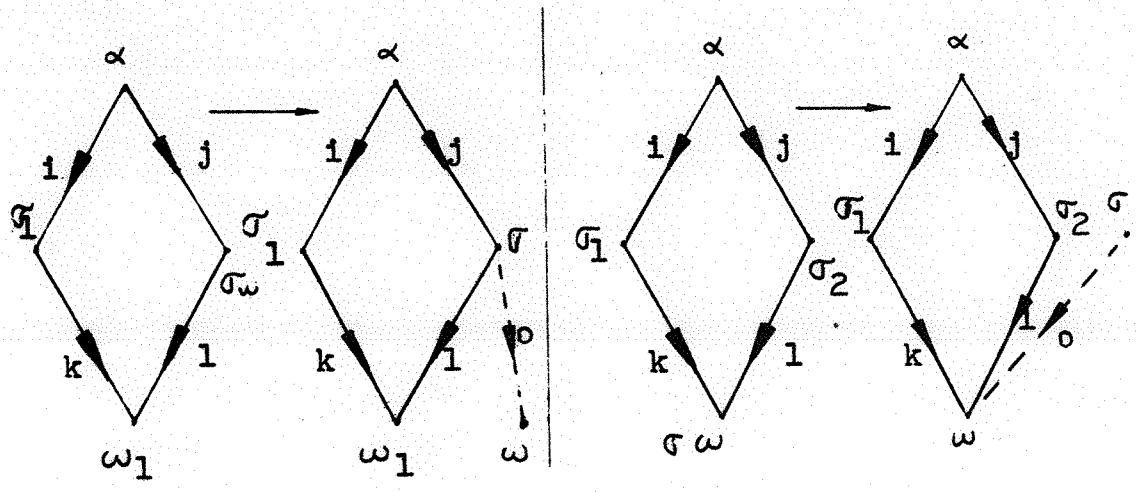
Assim sendo, dado um gráfico $\Lambda_{\sigma\omega}$, ele será realizável em M^2 se e somente se o gráfico Λ_g obtido dele trocando-se convenientemente o $\sigma\omega$ por um σ e um ω o for (observar que $\Lambda_{\sigma\omega}$ e Λ_g tem a mesma caracteristica de Euler). Mas para o Λ_g o T_g 2 já foi provado e isto resolve o problema.

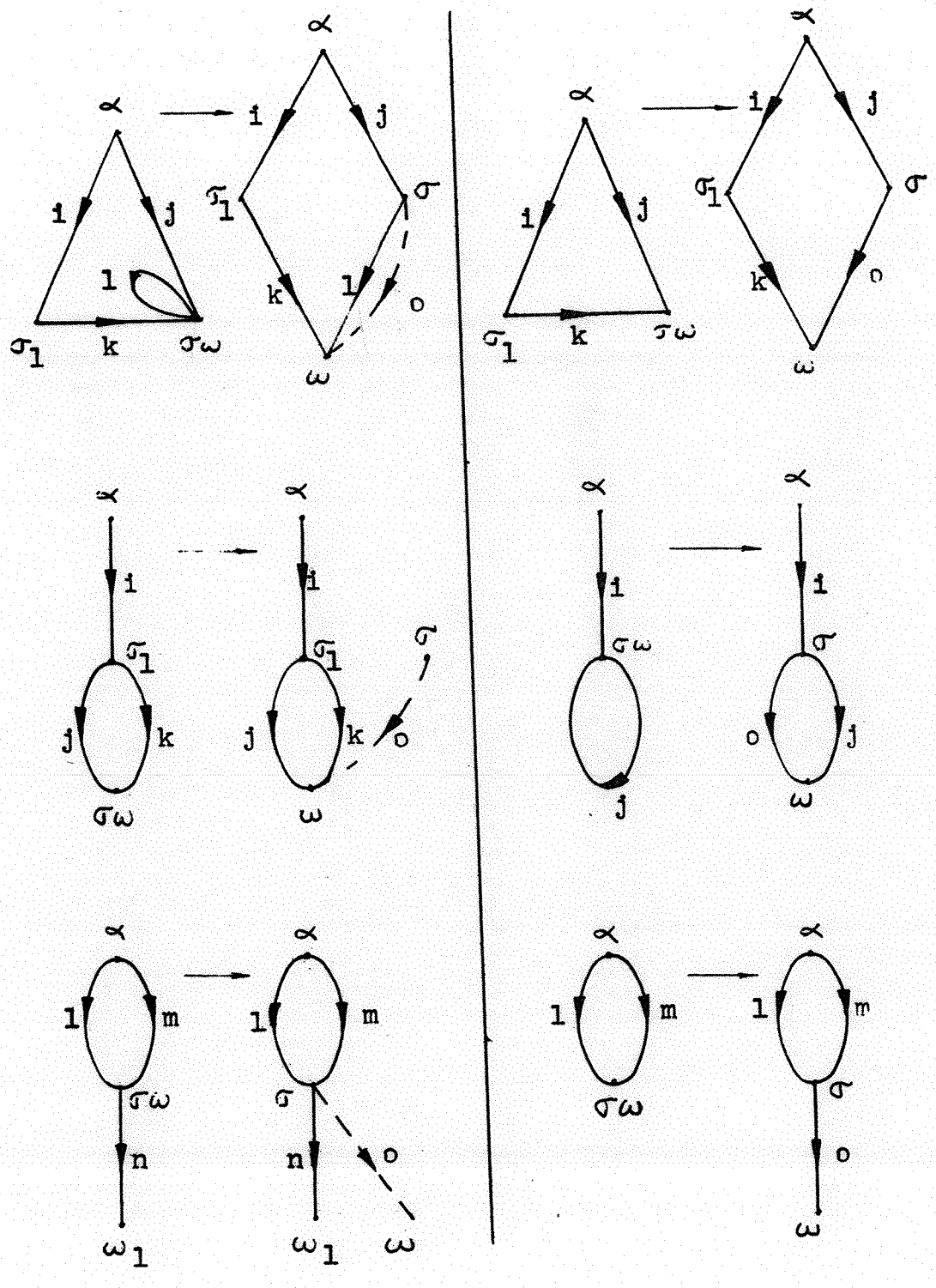
Para concluir a demonstração resta apenas mostrar como obter Λ_g a partir de $\Lambda_{\sigma\omega}$: mantém-se todos os vértices α, σ e ω e todas as arestas que não incidem em $\sigma\omega$; o $\sigma\omega$ é substituido por um σ e um ω; aparece uma aresta obrigatória $\underline{o}$, ligando o novo σ ao novo ω; as arestas que ligavam o $\sigma\omega$ a vértices α

ou ω passarão a ligar esses vértices ao novo σ e as que ligavam o $\sigma\omega$ a vértices σ passarão a ligar esses vértices ao novo ω; no caso da auto-ligação, ela corresponderá a uma outra aresta ligando o novo σ ao novo ω além da obrigatória. Os novos conjuntos distinguidos são obtidos da seguinte maneira:

1 - mantém-se os conjuntos distinguidos que não incidem em $\sigma\omega$.

2 - aos conjuntos distinguidos incidentes em $\sigma\omega$ corresponderão novos conjuntos distinguidos, obtidos de acôrdo com o seguinte esquema (indica-se com $\underline{o}$ a nova aresta obrigatória ligando o σ e o ω que substituiram o $\sigma\omega$):




α
i
j
l
k
σ1
σω
σ
o
ω
m
n
ω1

A partir das existentes anteriormente podemos ver quais são as orientações e ordens cíclicas que devem ser tomadas a fim de que o gráfico Λ_g obtido satisfaça às condições GD_g 4 e 5.

§ 4º - CLASSIFICAÇÃO, EM VARIEDADES ORIENTÁVEIS, DOS CAMPOS QUASE-GENÉRICOS COM UM FOCO COMPOSTO E SEM ÓRBITAS FECHADAS.

Neste parágrafo vamos fazer a classificação dos campos quase-genéricos em que o elemento quase genérico é do tipo foco-composto. Supondo M^2 orientável, vamos estudar os campos X de classe C^r, $r \geq 4$ que não possuem órbitas fechadas e nos quais:

1 - há uma e uma só singularidade do tipo foco-composto; as demais singularidades são todas hiperbólicas (e portanto só há um número finito delas);

2 - não há trajetórias conectando selas;

3 - o conjunto α -limite (ω -limite) de qualquer trajetória é formado por uma singularidade.

Tais campos serão representados por X_f.

De acôrdo com [3], lema 3.12, pg. 34, dado um campo X_f em M^2, existem uma vizinhança N do foco-composto em M^2 e um campo Y em M^2 tais que a única singularidade de X_f em N é o foco-composto e a única singularidade

de Y em N é uma fonte ou um poco dependendo da natureza do foco (instável ou estável); é claro que um tal campo Y pode ser obtido sem alterar o campo X_f fora de N e que portanto Y é um campo do tipo X_g.

Assim sendo, para efeito de classificação, o comportamento de um foco composto instável (estável) é idêntico ao de uma fonte (poço) e portanto classificar os campos X_f é classificar os campos X_g e isto foi feito em [1].

§ 5º - CLASSIFICAÇÃO, EM VARIEDADES ORIENTÁVEIS, DOS CAMPOS QUASE-GENÉRICOS COM UMA CONEXÃO DE SELAS E SEM ÓRBITAS FECHADAS.

Neste parágrafo vamos fazer a classificação dos campos quase-genéricos em que o elemento quase-genérico é uma conexão de selas. Supondo M^2 orientável, vamos estudar os campos X de classe C^r ($r \geqslant 2$) que não possuem órbitas fechadas e nos quais:

1 - as singularidades são todas hiperbólicas (e portanto só há um número finito delas).

2 - há uma e uma só conexão de selas (que pode ser uma auto-conexão).

3 - o conjunto α -limite (ω - limite) de qualquer trajetória ou é formado por uma singularidade ou é a auto-conexão (*) (se esta ocorrer).

Tais campos serão denotados por X_c.

Antes de mostrarmos como associar um gráfico a um campo X_c é necessário fazer alguns comentários sobre as auto-conexões. Como M^2 é orientável, uma auto-cone

---

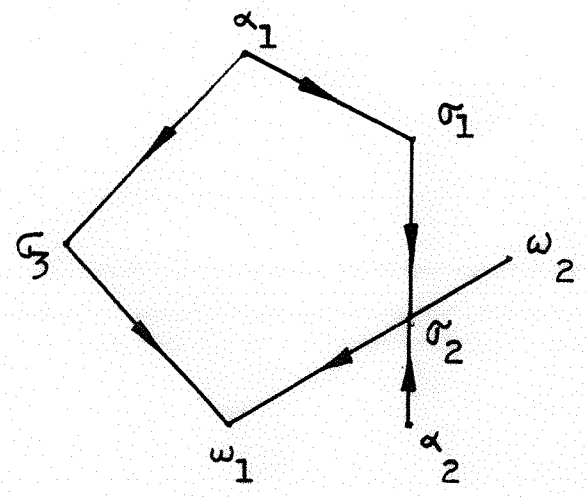
(*) abuso de linguagem: é a auto conexão $\cup \{\sigma\}$

xão é uma curva fechada (*) com dois lados e comporta-se de um desses lados como atrator ou repulsor de trajetórias vizinhas, dependendo do sinal do traço da derivada do campo em seus pontos (ver a definição de conexão de selas nº § 2º, ítem 3, e também [3]); assim sendo, é necessário dar às autoconexões um tratamento análogo ao dado às órbitas fechadas no § 1º, pois elas podem se comportar de um dos lados como uma fonte ou um poço de dimensão 1.

A um campo X_c associamos um gráfico $G(X_c)$ definido de maneira semelhante aos gráficos $G(X_g)$ com as seguintes ressalvas para a conexão de selas:

a - em virtude da conexão de selas existente, a relação $x \leq y$, definida no conjunto $\Omega(X_c)$ das singularidades de X_c, pode deixar de ser uma relação de ordem por <u>não</u> ser transitiva, como no exemplo:

(*) abuso de linguagem: curva fechada é a auto-conexão $\cup \{\sigma\}$

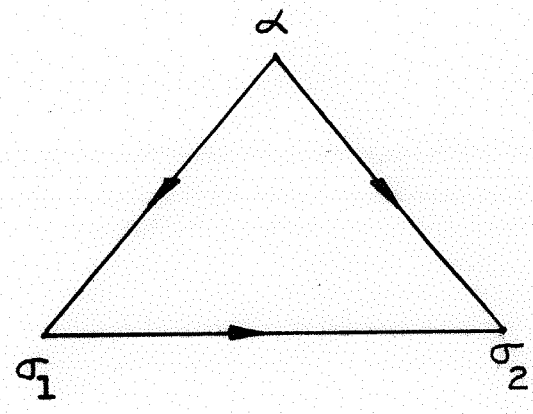


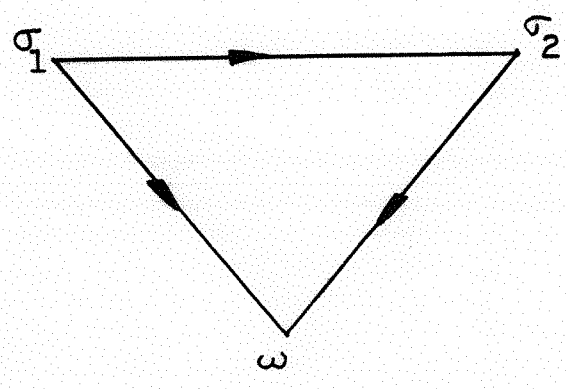
em que temos $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha_1 \leqslant \sigma_1$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, mas $\alpha_1 \nleqslant \sigma_2$ (analogamente $\omega_1 \neq \omega_2$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, $\sigma_2 \leqslant \omega_1$, mas $\sigma_1 \nleqslant \omega_1$); é claro que isto só pode ocorrer envolvendo as selas conectadas. Em virtude disto, para a construção do gráfico G (X_c) acrescentamos as seguintes exceções em relação às regras dadas para a construção de G (X_g):

1 - se ocorrer $\alpha \leqslant \sigma_1$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ e $\alpha \leqslant \sigma_2$, haverá arestas $\alpha \longrightarrow \sigma_1$, $\sigma_1 \longrightarrow \sigma_2$ e $\alpha \longrightarrow \sigma_2$.

2 - se ocorrer $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, $\sigma_2 \leqslant \omega$ e $\sigma_1 \leqslant \omega$, haverá arestas $\sigma_1 \longrightarrow \sigma_2$, $\sigma_2 \longrightarrow \omega$ e $\sigma_1 \longrightarrow \omega$.

Portanto pode ocorrer:





b - outra particularidade, devida à possibilidade de ocorrência de uma auto-conexão, é que para a sela σ auto-conectada teremos $\sigma \leqslant \sigma$ não trivialmente, pois

$$W^u(\sigma) \cap W^s(\sigma) = W^u(\sigma) = W^s(\sigma) ;$$

isto corresponderá à ocorrência de um laço no gráfico: é a única possibilidade de termos uma aresta unindo um vértice x a um vértice y com x = y.

c - como já vimos, uma auto-conexão comporta-se de um dos lados como atrator ao repulsor de trajetórias vizinhas. Estabelecemos então a seguinte conven-

ção: sempre que em um campo X_c ocorrer uma auto-conexão que se comporta de um dos lados como atrator (repulsor) de trajetórias, no gráfico G (X_c) teremos, além do laço correspondente, um vértice $\omega_\sigma^1(\alpha_\sigma^1)$ no qual incidirão as arestas correspondentes à representação das trajetórias cujo conjunto ω - limite (α - limite) é a auto-conexão. É claro que um tal vértice se comportará como um vértice $\omega^1(\alpha^1)$ que ocorre nos gráficos associados aos campos com órbitas fechadas que foram estudados no § 1º (mais precisamente as arestas incidentes num vértice $\omega_\sigma^1(\alpha_\sigma^1)$ correspondem às arestas de um dos dois grupos em que foram divididas as arestas incidentes num $\omega^1(\alpha^1)$ no § 1º, pois a auto-conexão só é atrator (repulsor) de um dos lados). Além disso, como esse vértice é introduzido artificialmente, não influirá na caracteristica de Euler do gráfico.

O gráfico G (X_c) assim obtido será conexo se não ocorrer a auto-conexão ou se esta existir mas não desconectar M^2; se há uma auto-conexão que desconecta M^2 o gráfico não será conexo (terá duas componentes). Além disso, G (X_c) possue as seguintes propriedades:

Gr_g 1 - não há arestas unindo uma fonte a um poço;

Gr_c 2 - as arestas ou partem de uma fonte (que pode ser o α^1_σ) e chegam a uma sela, ou partem de uma sela e chegam a um poço (que pode ser o ω^1_σ) e <u>precisamente uma</u> delas parte de uma sela e chega a uma sela (que pode ser a mesma).

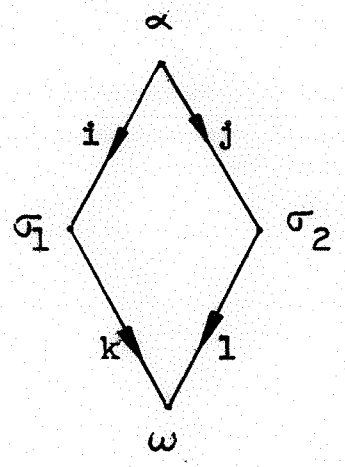
Gr_c 3 - em cada sela há exatamente duas arestas que chegam e duas que partem.

Note-se que na realidade o gráfico é formado exclusivamente pelas arestas mencionadas em $Gr_c 3$.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: com relação às tres propriedades anteriores pode ocorrer a seguinte <u>exceção</u>: (comparar com o estudo dos campos com órbitas fechadas no § 1º): se a auto-conexão se comporta de um dos lados como atrator (repulsor) e se em M^2 ela limita um disco que tem uma fonte α (um poço ω) como única singularidade de X_c no seu interior, de tal forma que toda trajetória contida nesse disco espirala-se da fonte α para a auto-conexão (da auto-conexão para o poço ω), então no gráfico $G(X_c)$ haverá uma aresta $\alpha \to \omega^1_\sigma$ ($\alpha^1_\sigma \to \omega$), que será a única aresta incidente nesses dois vértices.

Nos gráficos G (X_c) podem ocorrer os seguintes tipos de conjuntos distinguidos:

1

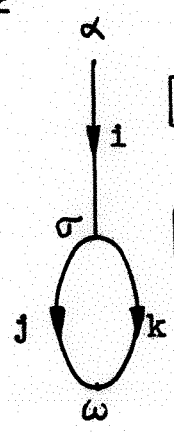


$[i, j; k, l]$

$\parallel$

$[j, i; l, k]$

2

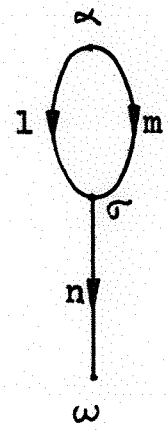


$[i; j, k]$

$\parallel$

$[i; k, j]$

3

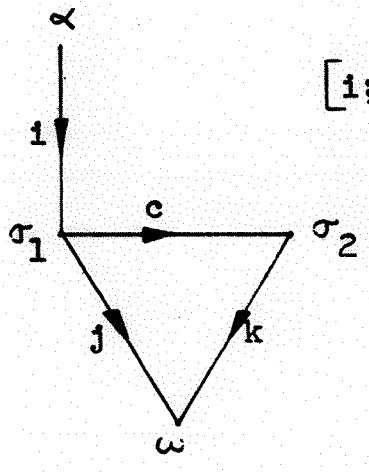


$[l, m; n]$

$\parallel$

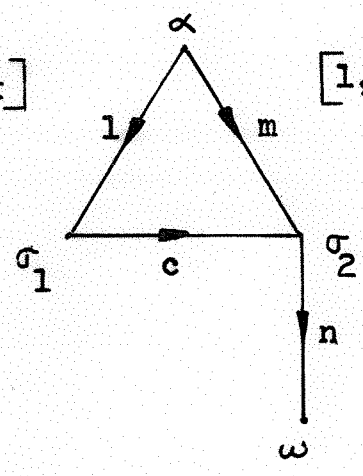
$[m, l; n]$

4



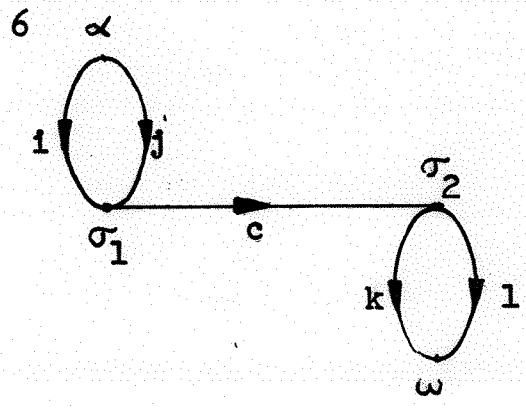
[i; c; j, k]

5



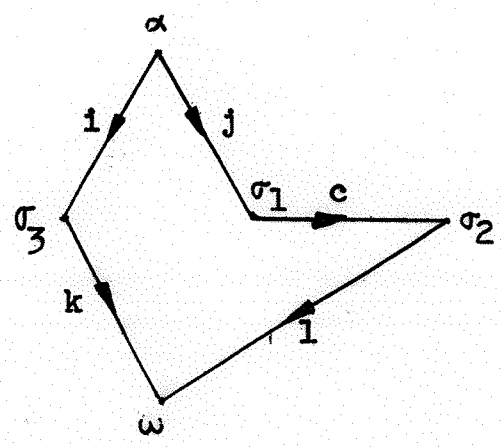
[l, m; c; n]

6



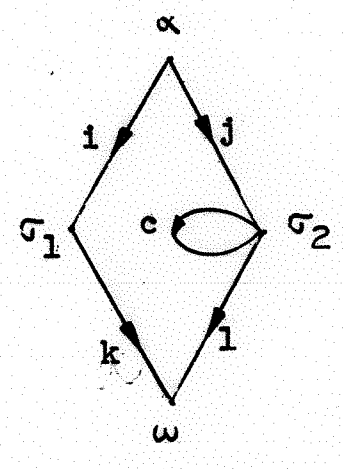
[i, j; c; k, l]
=
[j, i; c; l, k]
=
[i, j; c; l, k]
=
[j, i; c; k, l]

7



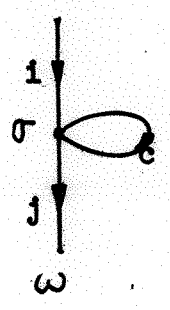
[i, j; c; k, l]

8



[i, j; c; k, l]

9



[i; c; j]

10

[i]

11

[i]

É preciso acrescentar ainda que nos conjuntos distinguidos de tipos 1, 2 e 3, ou o α ou o ω podem ser substituidos respectivamente pelo α_{σ}^{1} ou ω_{σ}^{1}, sendo que a substituição de um deles exclui a possibilidade de substituição do outro. Para efeito de referência os conjuntos distinguidos assim obtidos serão denotados por $1_{\alpha_{\sigma}^{1}}$, $1_{\omega_{\sigma}^{1}}$, $2_{\alpha_{\sigma}^{1}}$, $2_{\omega_{\sigma}^{1}}$, $3_{\alpha_{\sigma}^{1}}$ e $3_{\omega_{\sigma}^{1}}$ (é claro que nos outros tipos de conjunto distinguido tal substituição não pode ser feita pois a conexão já aparece neles).

Nos campos X_c também os conjuntos distinguidos correspondem às fronteiras das componentes conexas do complementar em relação à variedade do conjunto formado pelas singularidades e pelos pontos das variedades invariantes das selas.

Nos conjuntos distinguidos dos gráficos $G(X_c)$ temos a mesma noção de arestas associadas que foi dada para os campos X_g. Assim sendo, nos conjuntos distinguidos dos tipos 1, 2 e 3 (e nos em que o α foi substituido pelo α_{σ}^{1} ou o ω pelo ω_{σ}^{1}) são associadas as mesmas arestas já citadas nos campos X_g. Num conjunto $[i; c; j, k]$, do tipo 4, são associadas i e c, i e j, c e k; num conjunto $[l, m; c; n]$ de tipo 5 são associadas l e c, c e n, m e n;

num conjunto [i, j; c; k, l] de tipo 6 são associadas i e c, j e c, c e k, c e l; num conjunto [i, j; c; k, l] de tipo 7 ou 8 são associadas i e k, j e c, c e l; num conjunto [i; c; j] de tipo 9 são associadas i e c, c e j e num tipo 10 ou 11 não há arestas associadas.

Temos nesses conjuntos distinguidos os seguintes <u>pares de arestas adjacentes</u>: num tipo 1, 2 e 3 (e nos em que o α foi substituido pelo α_{σ}^{1} ou o ω pelo ω_{σ}^{1})são adjacentes os mesmos pares de arestas já citadas para os campos X_g; num conjunto [i; c; j, k] , do tipo 4, são adjacentes c e k, k e j, j e c; num conjunto [l, m; c; n] de tipo 5 são adjacentes l e c, c e m, m e l; num conjunto [i,j;c;k,l] de tipo 6, são adjacentes i e j, k e l; num conjunto [i, j; c; k, l] de tipo 7 são adjacentes as duas arestas incidentes em cada vertice; num conjunto distinguido [i,j;c;k,l] de tipo 8 são adjacentes i e j, <u>j e l</u>, l e k, k e i; num conjunto distinguido de tipo 9, 10 ou 11 não definimos arestas adjacentes.

Os conjuntos distinguidos dos tipos 9, 10 e 11 não precisam ser orientados pois suas arestas pertencem exclusivamente a eles. Os demais conjuntos distinguidos destacados num gráfico G (X_c), devem sempre ser ori-

entados, significando esta orientação que, em cada vértice de um conjunto distinguido devemos ter um sentido de rotação bem definido entre as <u>arestas adjacentes</u> do conjunto que são incidentes nesse vértice; esta orientação é dada assinalando-se em cada vértice da figura plana que representa o conjunto distinguido o sentido da rotação ao redor desse vértice, de tal forma que ela se realize através da região delimitada pelas arestas do conjunto (num tipo 2, $2_{\alpha\frac{1}{\sigma}}$, $2_{\omega\frac{1}{\sigma}}$ e 4 (3, $3_{\alpha\frac{1}{\sigma}}$, $3_{\omega\frac{1}{\sigma}}$ e 5) tal região é delimitada apenas pelas arestas que não incidem na fonte (poço); num tipo 6, considerar duas regiões delimitadas pelos pares de arestas adjacentes e independentes uma da outra para efeito de orientação; num tipo 8 considerar a região delimitada apenas pelas arestas distintas da autoconexão); isto corresponderá, na variedade, a uma rotação realizando-se através da região canônica que deu origem ao conjunto distinguido. Como a rotação só envolverá as arestas adjacentes, devem ser ignoradas, para efeito de orientação, a aresta que incide na fonte (poço) num tipo 2, $2_{\alpha\frac{1}{\sigma}}$, $2_{\omega\frac{1}{\sigma}}$ e 4 (3, $3_{\alpha\frac{1}{\sigma}}$, $3_{\omega\frac{1}{\sigma}}$ e 5) e a conexão nos tipos 6 e 8.

Utilizando o conceito de conjunto distinguido e as noções a ele ligadas, definimos um <u>gráfi-</u>

<u>co distinguido</u> associado a um campo X_c como sendo um gráfico G (X_c) juntamente com um certo número de conjuntos distinguidos tais que:

GD_c 1 - Toda aresta de G (X_c) pertence a exatamente dois conjuntos distinguidos, com exceção da incidente na fonte (no poço) num conjunto tipo 2, $2_{\alpha}\frac{1}{\sigma}$, $2_{\omega}\frac{1}{\sigma}$ e 4 (3, $3_{\alpha}\frac{1}{\sigma}$, $3_{\omega}\frac{1}{\sigma}$ e 5), da conexão num tipo 6 ou 8 e de todas as arestas de um tipo 9, 10 ou 11, que pertencem a um só.

GD_c 2 - a aresta incidente na fonte (no poço) em qualquer conjunto distinguido do tipo 2, $2_{\alpha}\frac{1}{\sigma}$, $2_{\omega}\frac{1}{\sigma}$ ou 4 (3, $3_{\alpha}\frac{1}{\sigma}$, $3_{\omega}\frac{1}{\sigma}$ ou 5) é a única aresta que incide nessa fonte (nesse poço).

GD_c 3 - análoga a GD_g 3.

GD_c 4 - análoga a GD_g 4, com as seguintes observações:

a - com relação a adjacência não devem ser consideradas a aresta incidente na fonte (no poço) num tipo 2, $2_{\alpha}\frac{1}{\sigma}$, $2_{\omega}\frac{1}{\sigma}$ e 4 (3, $3_{\alpha}\frac{1}{\sigma}$, $3_{\omega}\frac{1}{\sigma}$ e 5) e a conexão num tipo 6 ou 8.

b - um conjunto do tipo 9, 10 ou 11 nunca ocorrerá numa ordem cíclica pois suas arestas são

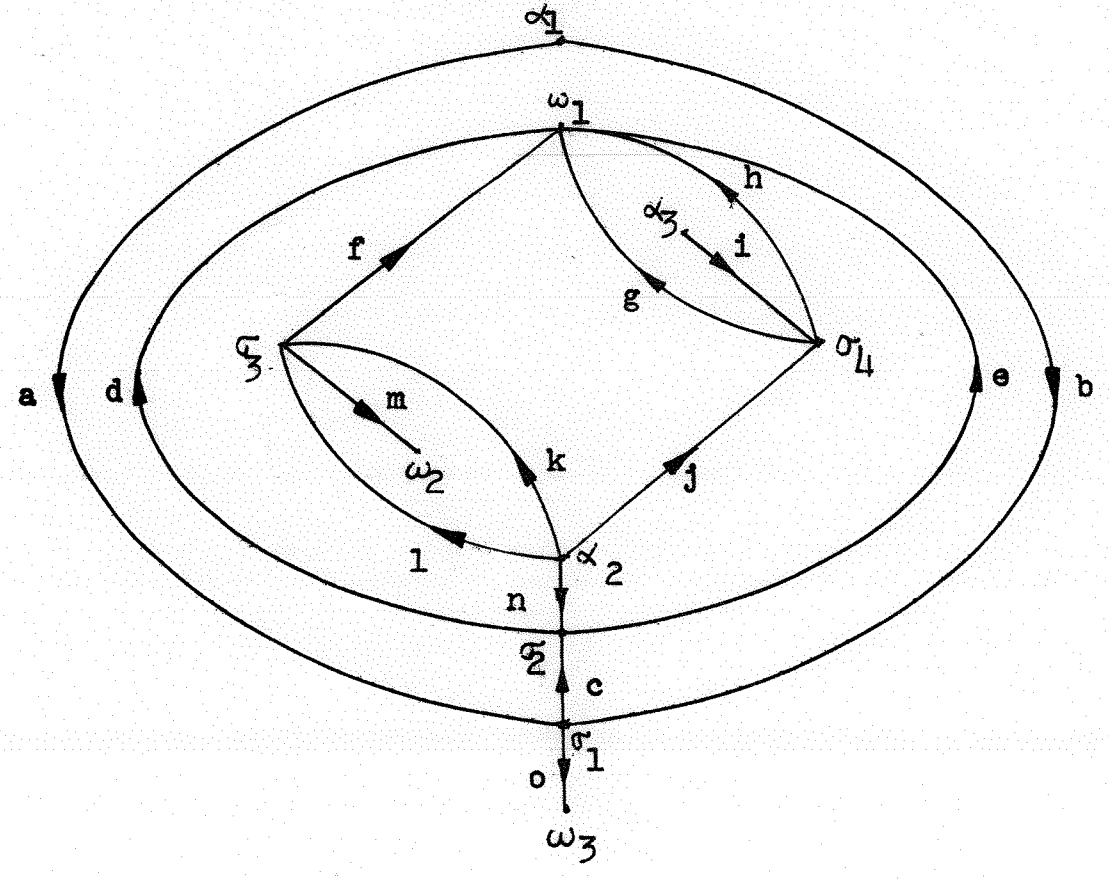
as únicas incidentes em seus vértices.

GD_c 5 - análoga a GD_g 5.

Tendo em vista a interpretação geométrica dos conjuntos distinguidos, dado um campo X_c só há uma forma possível de associar a ele um gráfico distinguido, o qual será denotado G^* (X_c).

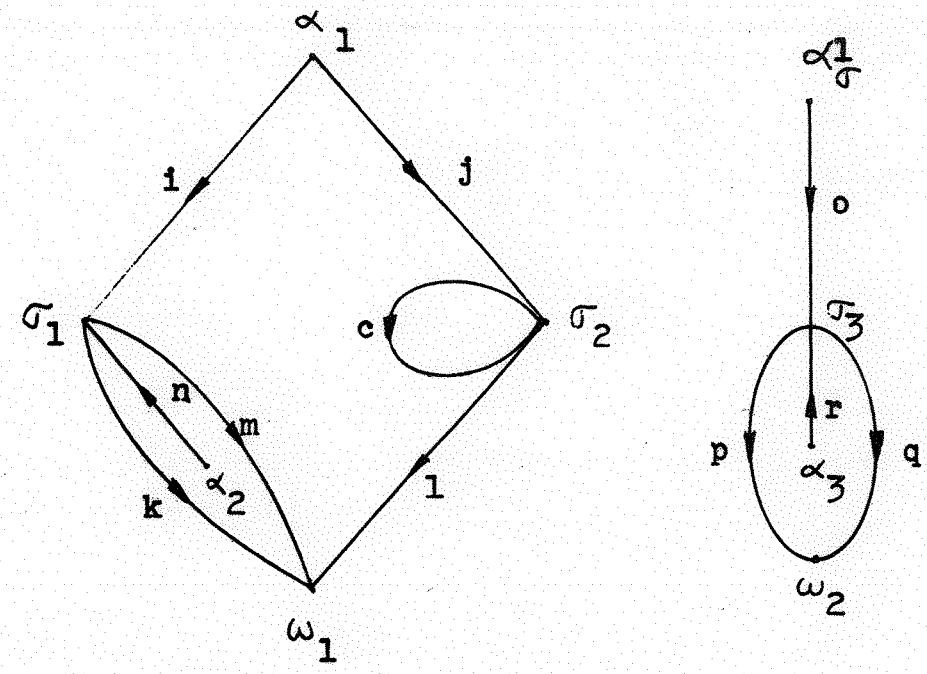
Para ilustrar a noção de gráfico distinguido vamos considerar os seguintes exemplos:

1) Em S^2:



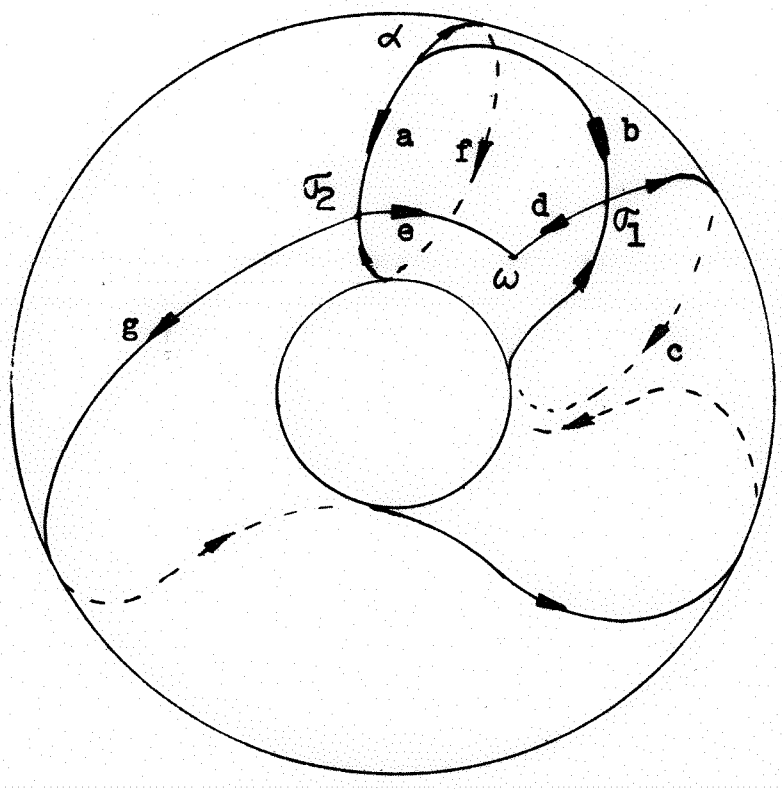
com os conjuntos distinguidos [a, b; c; d, e], [a, b; o], [l, n; f, d], [l, k; m], [j, k; g, f], [i; g, h] e [n, j; e, h].

2) Em S^2:

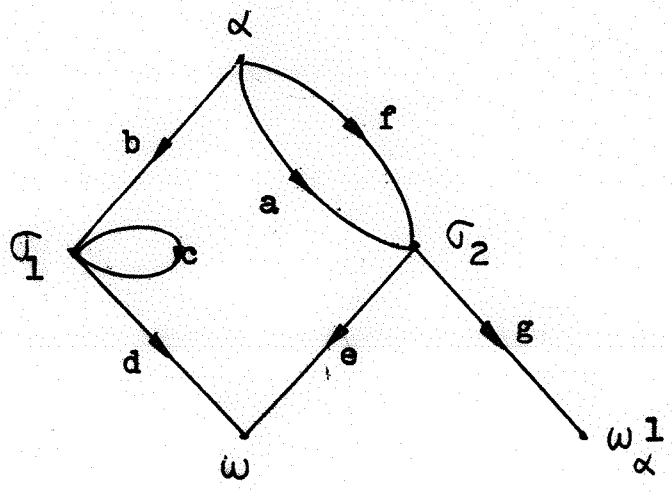


com os conjuntos distinguidos [i, j; c; m, l], [i, j; k,l], [n; k, m], [o; p, q] e [r; p, q].

3) Em T^2:



O gráfico associado a este campo será



com os conjuntos distinguidos $[a, b; e, d]$, $[f, b; c; e, d]$ e $[a, f; g]$.

Temos para os campos X_c as mesmas definições de campos conjugados e de gráficos distinguidos isomorfos que foram dadas para os campos X_g, sendo ainda válido o

$$T_c\ 1 : \quad X_c \sim Y_c \Longleftrightarrow G^* (X_c) \sim G^* (Y_c)$$

Novamente a demonstração deste teorema consiste fundamentalmente na definição do homeomorfismo de M^2 que leva as trajetórias de X_c nas de Y_c e essa definição é análoga à construção que é feita em [2] e em [3], pg 42 a 45 , razão pela qual não faremos a demonstração aqui.

Uma vez demonstrado este teorema, o problema de classificação dos campos X_c se transforma no problema de classificação dos gráficos distinguidos $G^*(X_c)$, mas novamente surge a pergunta: se construirmos um gráfico distinguido abstratamente, pode-se garantir que ele é o gráfico distinguido associado a algum campo X_c ? Para responder a esta pergunta, damos as seguintes definições:

1_c - um gráfico distinguido abstrato Λ_c é definido de maneira análoga ao Λ_g.

2_c - a característica de Euler $\chi(\Lambda_c)$ é calculada da mesma forma que $\chi(\Lambda_g)$; lembrar que o α_σ^1 e o ω_σ^1 não influem na característica.

3_c - definição de Λ_c realizável igual à de Λ_g realizável.

O resultado central deste parágrafo é dado pelo

$$T_c\ 2 - \Lambda_c \text{ é realizável em } M^2 \Longleftrightarrow \chi(\Lambda_c) = \chi(M^2)$$

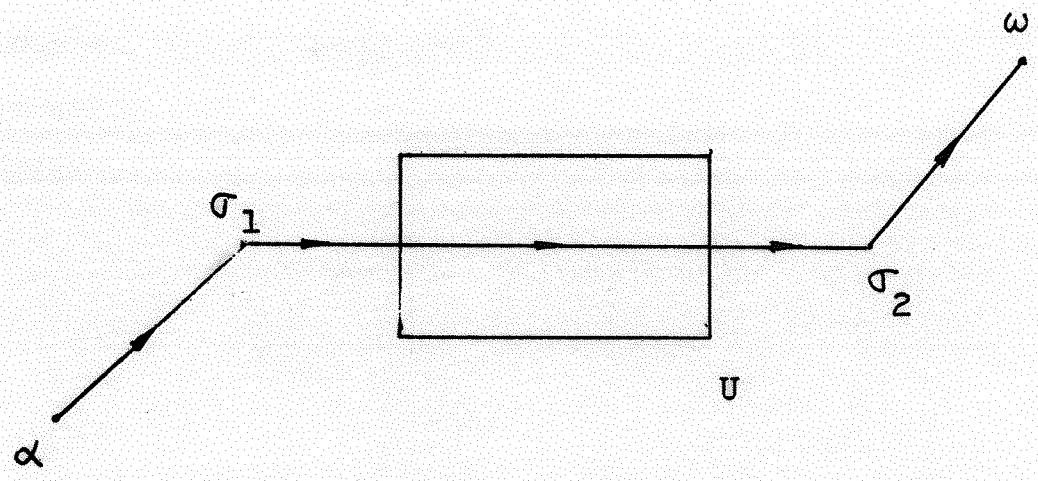
Demonstração:

A - Não há auto-conexão.

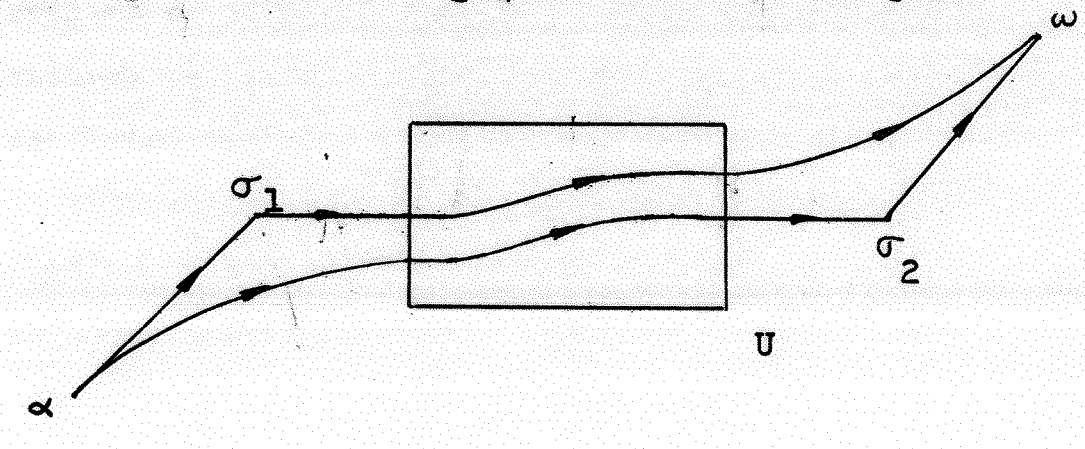
A idéia da demonstração neste caso é a mesma que foi usada no $T_{\sigma\omega}$ 2, ou seja, dado um gráfico Λ_c, a ele associaremos um gráfico Λ_g com mesma característica de Euler, que é realizável em M^2 se e somente se o gráfico Λ_c dado inicialmente o for; mas a realizabilidade do gráfico Λ_g está provada em [1] e então o problema está resolvido.

A conexão de selas pode ser eliminada utilizando-se a técnica usual, que consiste em perturbar o

campo numa vizinhança tubular U ao redor de um ponto regular da conexão de selas.

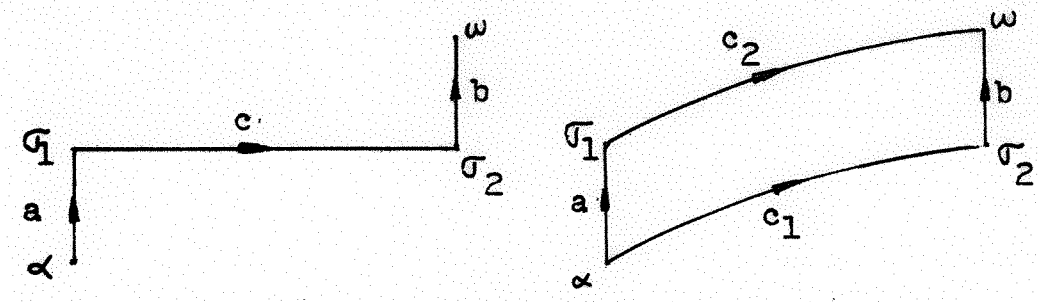


Depois de feita a perturbação teremos (ver a secção 4 de [3] e o artigo VII em [5]):



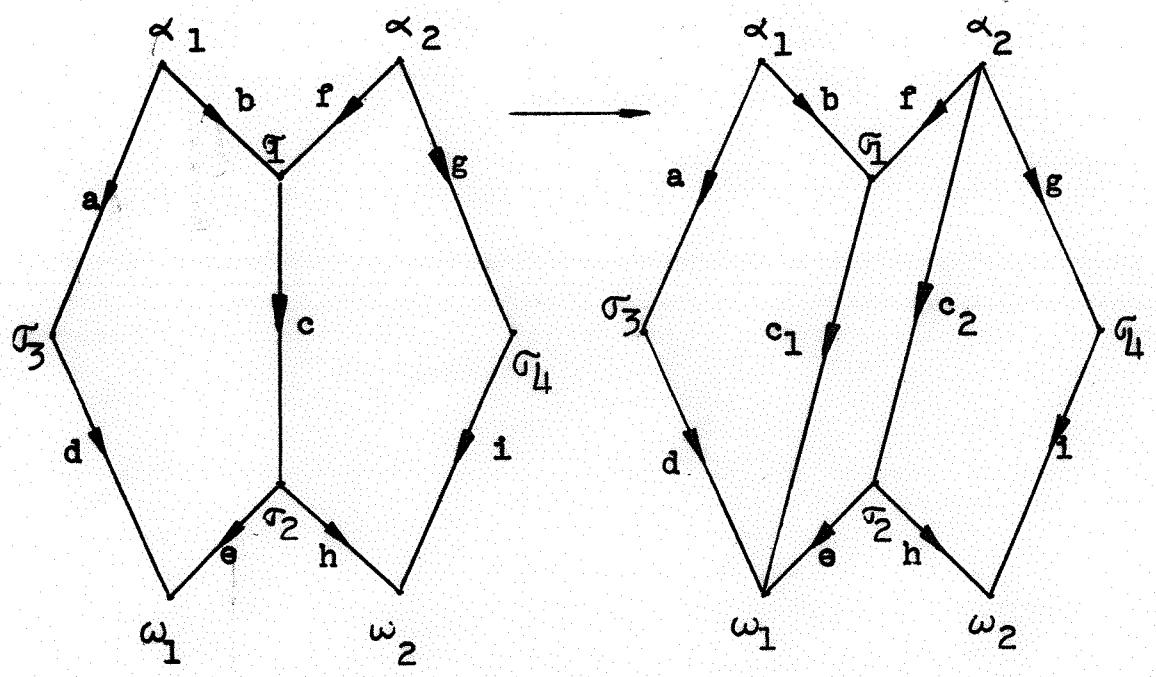
Portanto a conexão de selas foi eliminada e o novo campo coincide com o campo X_c fora de U sendo portanto um campo do tipo X_g.

Como consequência, podemos obter um gráfico Λ_g a partir de um Λ_c fazendo basicamente a seguinte construção:



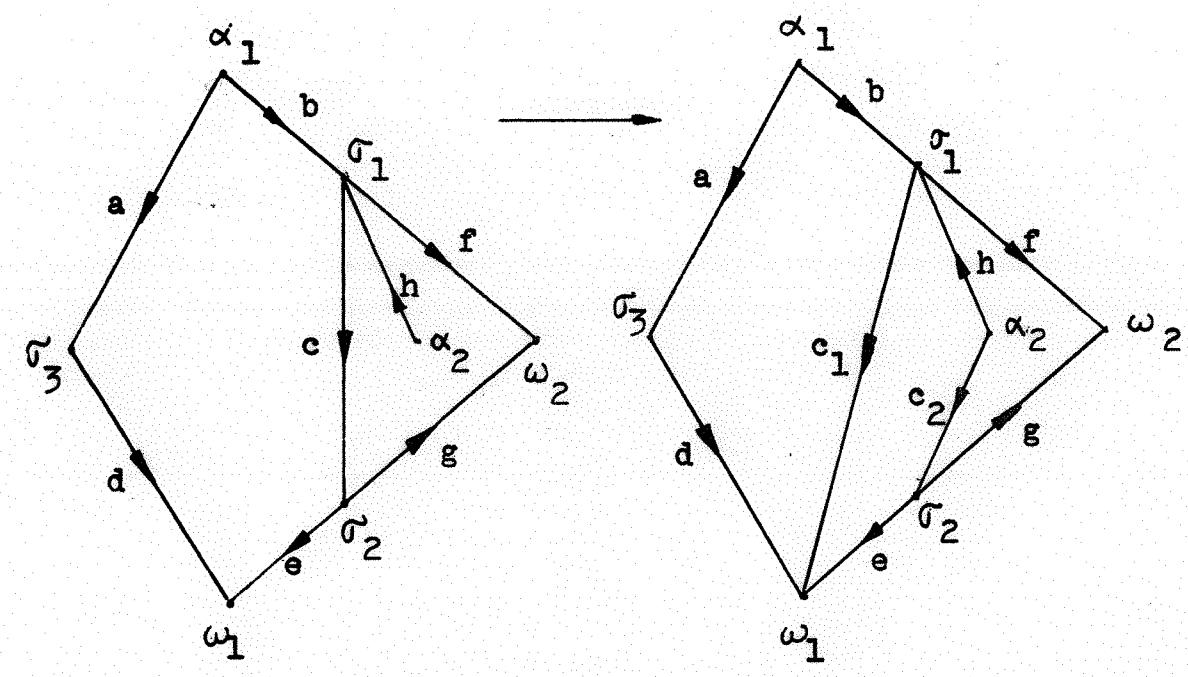
Eliminaremos a conexão de selas examinando todas as combinações possíveis de conjuntos distinguidos em que elas aparecem:

1 - a conexão pertence a dois conjuntos do tipo 7:



Λ_g é obtido da seguinte maneira: mantém-se todas as arestas de Λ_c com exceção da conexão e todos os conjuntos distinguidos com exceção dos dois do tipo 7 que estão sendo considerados. A conexão é substituida pelas arestas c_1 e c_2 e os dois conjuntos distinguidos pelos tres seguintes: $[a, b; d, c_2]$, $[f, c_2; c_1, e]$ e $[c_2, g; h, i]$.

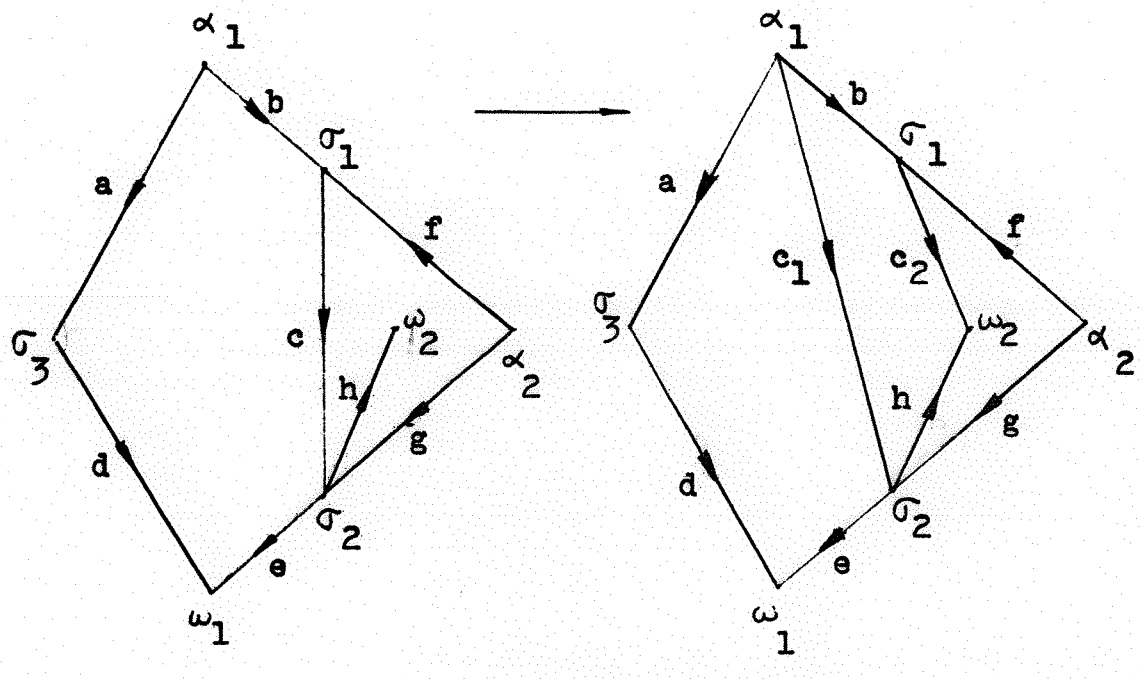
2 - a conexão pertence a conjuntos distinguidos dos tipos 7 e 4:



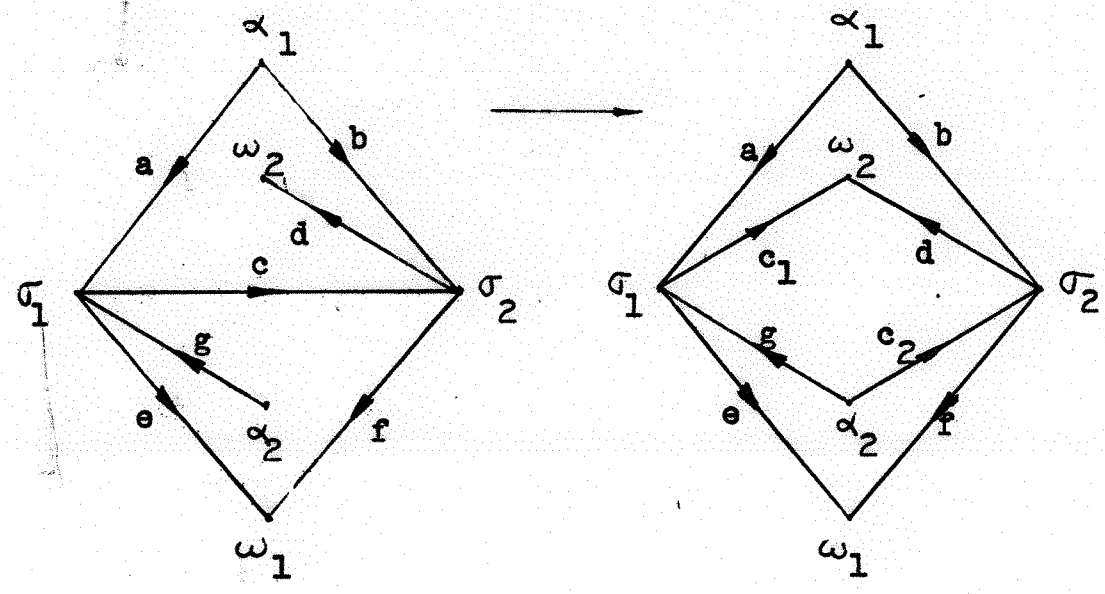
A conexão é substituida por c_1 e c_2 e os conjuntos por $[a, b; d, c_1]$, $[h, c_2; c_1, e]$ e $[h, c_2; f, g]$.

3 - a conexão pertence a conjuntos distinguido dos tipos 7 e 5:

análogo ao anterior:

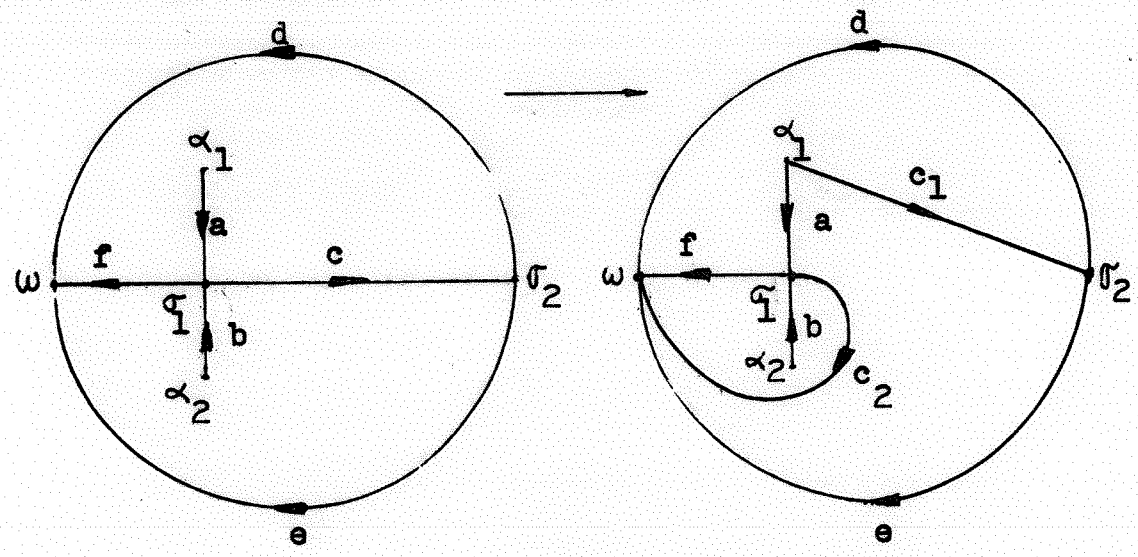


4 - a conexão pertence a conjuntos distinguidos dos tipos 4 e 5:



A conexão é substituida por c_1 e c_2 e os conjuntos por $[a, b; c, d]$, $[g, c_2, c_1, d]$ e $[g, c_2; e, f]$.

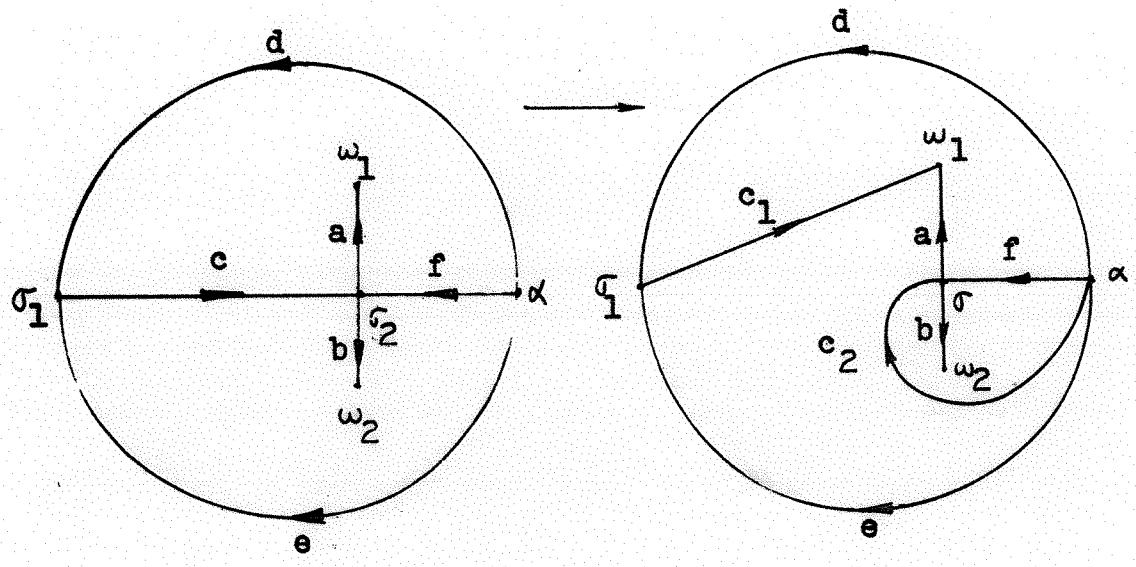
5 - a conexão pertence a dois conjuntos do tipo 4:



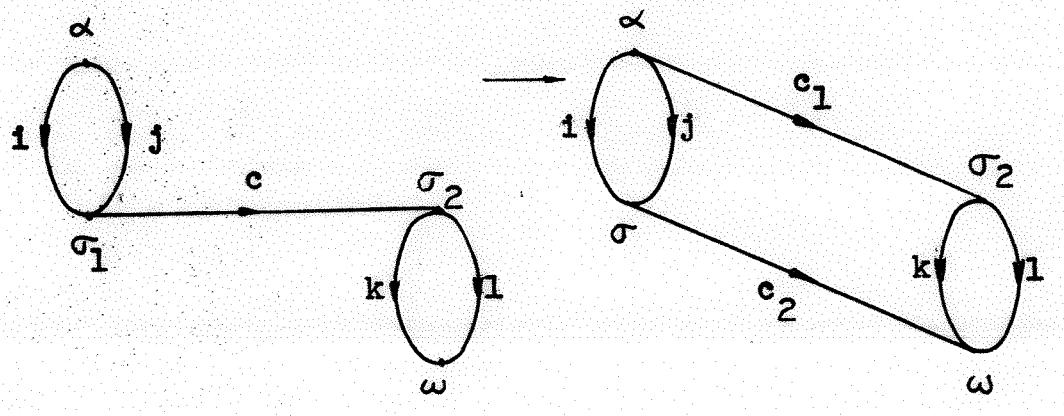
A conexão é substituida por c_1 e c_2 e os conjuntos por $[a, c_1; f, d]$, $[a, c_1; c_2, e]$ e $[b; c_2, f]$.

6 - a conexão pertence a dois conjuntos do tipo 5:

análogo ao anterior:



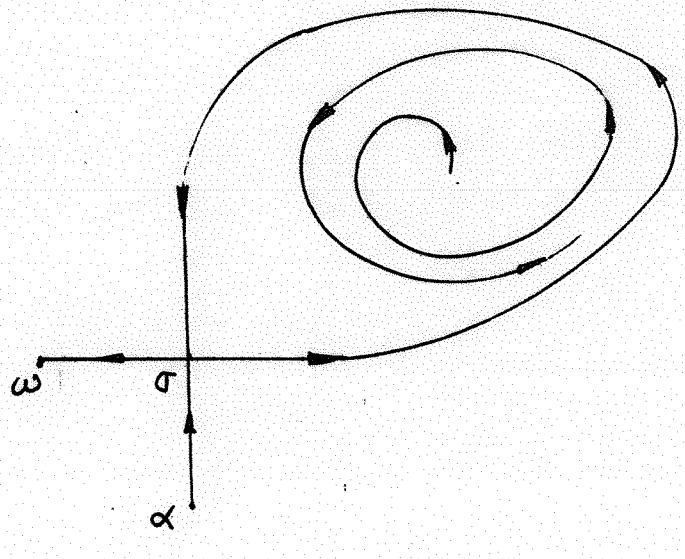
7 - a conexão pertence a um conjunto do tipo 6:



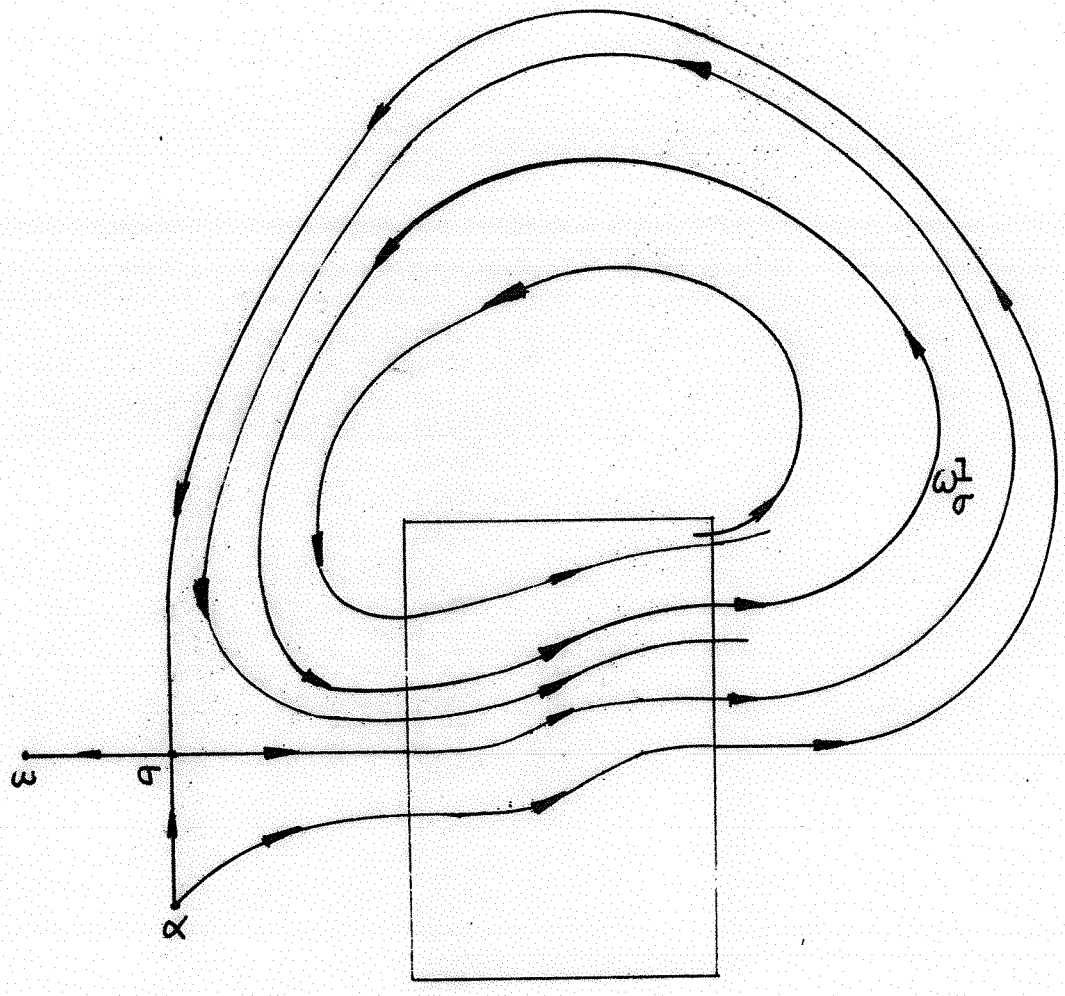
A conexão é substituida por c_1 e c_2 e o conjunto por $[j, c_1; c_2, k]$ e $[i, c_1; c_2, l]$.

B - Há auto-conexão.

A idéia essencialmente é a mesma, porém, ao se fazer a perturbação de maneira análoga ao caso A, aparece uma órbita fechada; suponhamos que a auto-conexão da sela σ num campo X_c seja, de um dos lados, ω - limite de trajetórias (o caso α - limite é análogo):



Depois de feita a perturbação teremos:



Notar que, após a perturbação, a nova separatriz instável de σ tem para ω - limite a órbita estável ω_σ^1 , que é também ω - limite das trajetó -

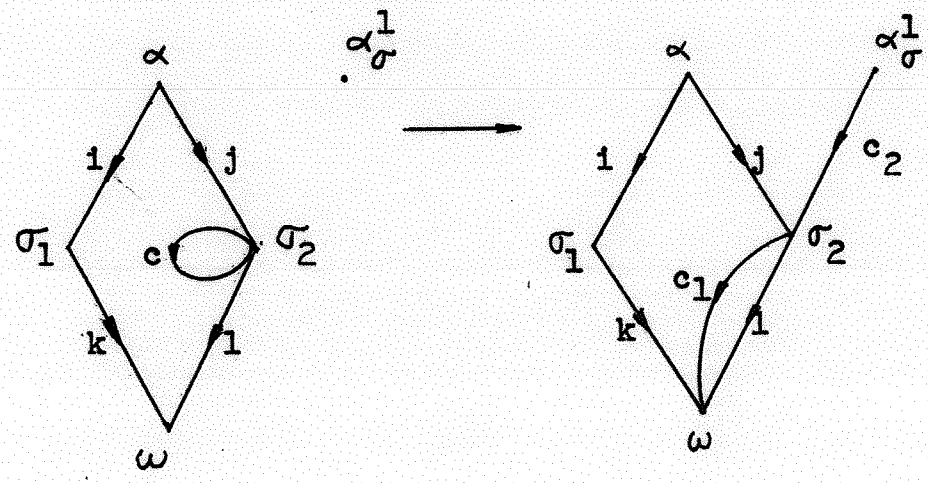
rias que antes da perturbação tinham para ω - limite a auto-conexão.

No gráfico a órbita fechada do campo perturbado será o próprio ω_σ^1(ou α_σ^1) que já havia sido introduzido artificialmente.

O novo Λ será então obtido do Λ_c utilizando a perturbação acima. Examinemos todos os casos possíveis:

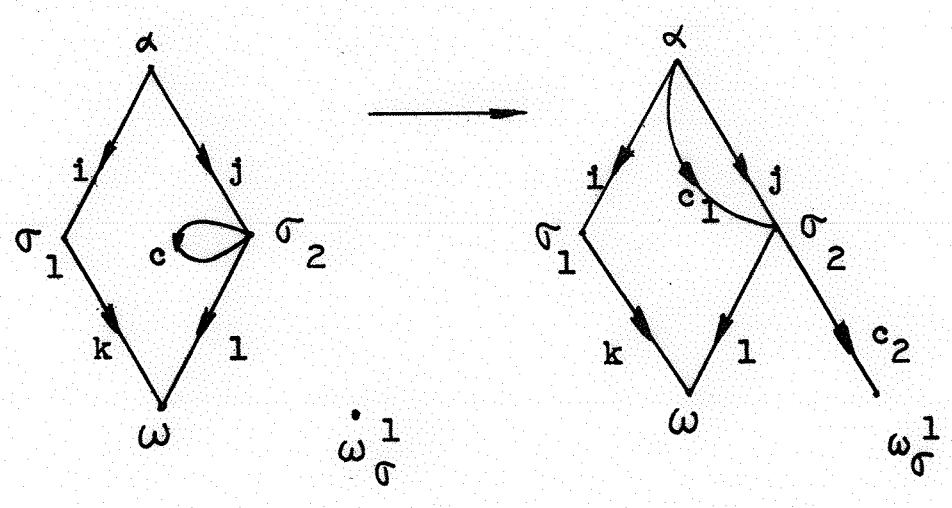
1 - a auto-conexão pertence a um conjunto do tipo 8:

a) a auto-conexão corresponde a um α_σ^1:



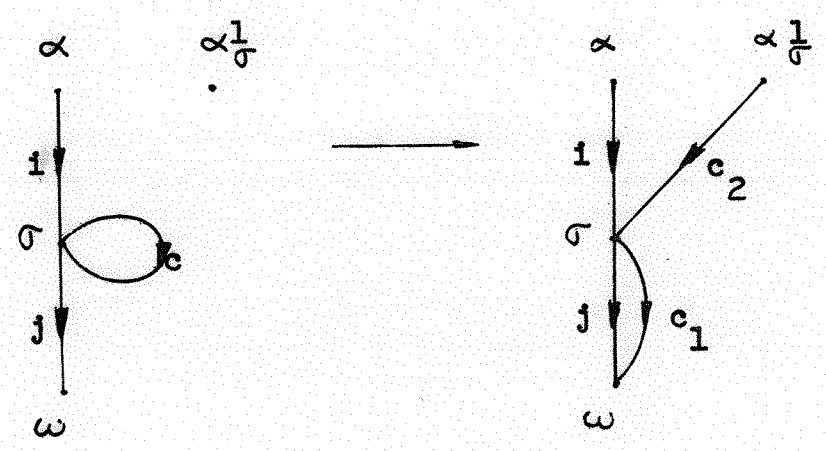
Λ é obtido da seguinte maneira: mantém-se todas as arestas de Λ_c (inclusive as incidentes em α_σ^1 que <u>não estão representadas na figura</u>) com exceção da auto-conexão c e todos os conjuntos distinguidos (inclusive os incidentes em α_σ^1) com exceção do tipo 8 que está sendo considerado; a conexão é substituida por c_1 e c_2 e o conjunto por $[i, j; k, c_1]$ e $[c_2; c_1, l]$.

b - a auto conexão corresponde a um ω_σ^1 : análogo ao anterior:



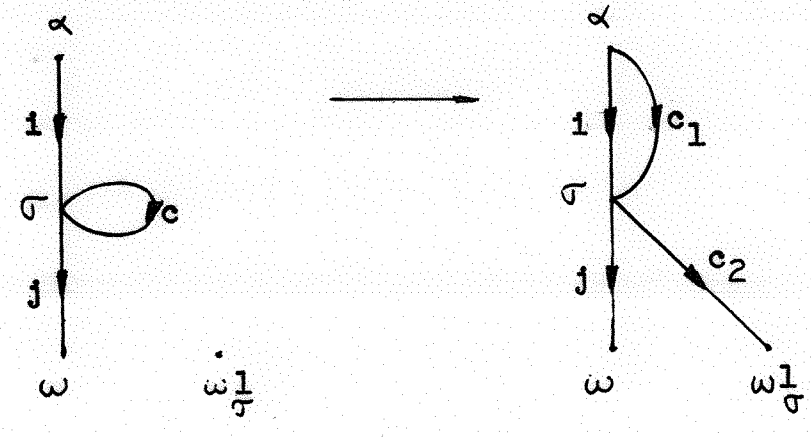
2 - a auto conexão pertence a um conjunto do tipo 9:

a - a auto conexão corresponde a um $\alpha\frac{1}{\sigma}$:



A auto conexão é substituida por c_1 e c_2 e o conjunto por $[i;\ j,\ c_1]$ e $[c_2;\ j,\ c_1]$.

b - a auto-conexão corresponde a um $\omega\frac{1}{\sigma}$: análogo ao anterior:



Tanto no caso A como no caso B, podemos ver, a partir das existentes anteriormente, quais são as orientações e ordens cíclicas que devem ser tomadas a fim de que o gráfico obtido satisfaça às condições GD 4 e 5 (no caso B o campo corresponde a um campo X_g que admite a presença de uma órbita fechada; estes campos foram estudados no § 1º).

§ 6º - CLASSIFICAÇÃO, EM VARIEDADES ORIENTÁVEIS, DOS CAMPOS QUASE-GENÉRICOS COM UMA ÓRBITA FECHADA QUASE-GENÉRICA E SEM OUTRAS ÓRBITAS FECHADAS.

Neste parágrafo vamos fazer a classificação dos campos quase-genéricos em que o elemento quase-genérico é uma órbita fechada quase-genérica. Supondo M^2 orientável, vamos estudar os campos X de classe C^r, $r \geqslant 3$, que não possuem órbitas fechadas hiperbólicas e nos quais

1 - há uma e uma só órbita fechada, que é quase-genérica; as singularidades são todas hiperbólicas (e portanto só há um número finito delas);

2 - não há trajetórias conectando selas;

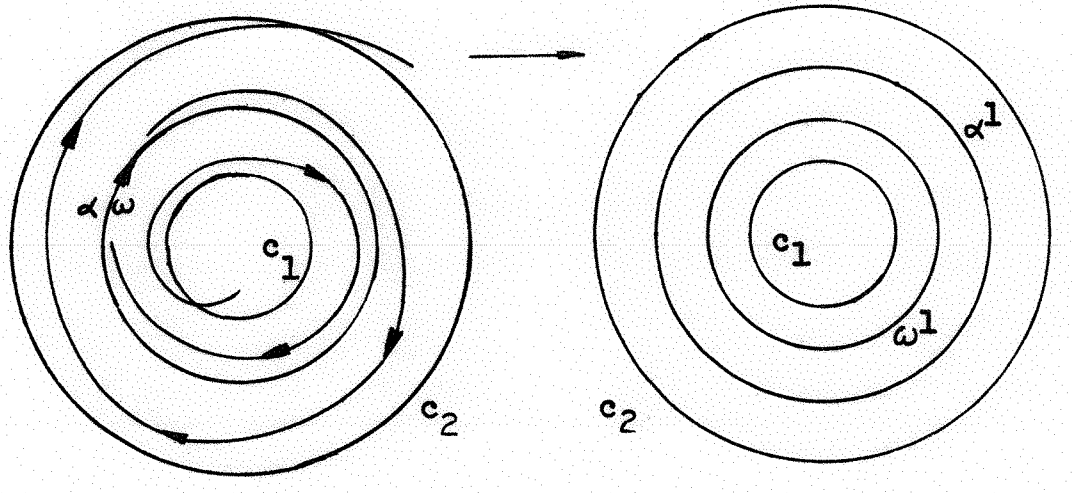
3 - o conjunto α - limite (ω - limite) de qualquer trajetória ou é formado por uma singularidade ou é a órbita fechada quase-genérica.

Tais campos serão denotados por $X_{\alpha\omega}$.

Vamos apenas indicar como pode ser feita a classificação, já que o processo é inteiramente análogo ao dos casos anteriores.

De acordo com [3], lema (2.4), pg 9 ,

dado um campo $X_{\alpha\omega}$ em M^2, existem uma vizinhança N da órbita $\alpha\omega$ em M^2 e um campo Y em M^2 tais que: N é homeomorfa a um anel, sendo sua fronteira formada por duas curvas fechadas C_1 e C_2, a única singularidade de $X_{\alpha\omega}$ em N é a órbita $\alpha\omega$ e as únicas singularidades de Y em N são duas órbitas fechadas hiperbólicas, uma estável e uma instável:



É claro que um tal campo Y pode ser obtida sem alterar o campo $X_{\alpha\omega}$ fora de N.

Isto sugere imediatamente como classificar tais campos: a eles associamos um gráfico $G(X_{\alpha\omega})$ cujos vértices são as singularidades de $X_{\alpha\omega}$ e ao qual acrescentamos mais 2 vértices: um α^1_ω correspondente ao lado instável de $\alpha\omega$ e um ω^1_α correspondente ao lado estável. Na variedade estes dois vértices correspondem às duas órbitas genéricas já mencionadas e como estas duas delimitam um anel no interior do qual não há singularidades, sempre haverá (no novo campo) um conjunto distinguido $\alpha^1_\omega\omega^1_\alpha$ (ver órbitas fechadas no parágrafo 1). Portanto, nos gráficos distinguidos aparecem apenas os conjuntos distinguidos já mencionados no tratamento das órbitas fechadas no parágrafo 1º. É interessante ressaltar apenas que, se a curva $\alpha\omega$ não desconecta M^2 (o exemplo típico pode ser obtido no toro T^2) a órbita $\alpha\omega$ pode ser conjunto α e ω - limite de uma mesma trajetória. Isto vai corresponder a conjuntos distinguidos em que o α e o ω foram substituidos pelo α^1_ω e ω^1_α. Na realidade, no toro T^2 existe um campo que não possui outras órbitas fechadas ou singularidades a não ser uma órbita $\alpha\omega$.

§ 7º - EXTENSÃO DA CLASSIFICAÇÃO, EM VARIEDADES ORIENTÁVEIS, AOS CAMPOS QUASE-GENÉRICOS COM ÓRBITAS FECHADAS GENÉRICAS.

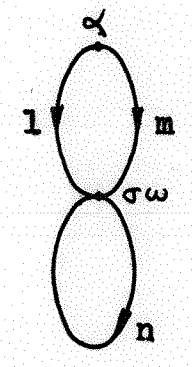
Não há praticamente nada de novo a se fazer neste caso, já que tais órbitas não interferem com os elementos quase-genéricos: basta considerar, em cada caso, novos tipos de conjuntos distinguidos nos quais os vértices α são substituidos por vértices α^1 e/ou os vértices ω por ω^1; a análise relativa ao elemento quase-genérico não se altera e a relativa aos vértices α^1 e ω^1 é a que foi feita no parágrafo 1º para órbitas fechadas.

§ 8º - EXTENSÃO DA CLASSIFICAÇÃO AOS CAMPOS QUASE-GENÉRICOS EM VARIEDADES NÃO ORIENTÁVEIS.

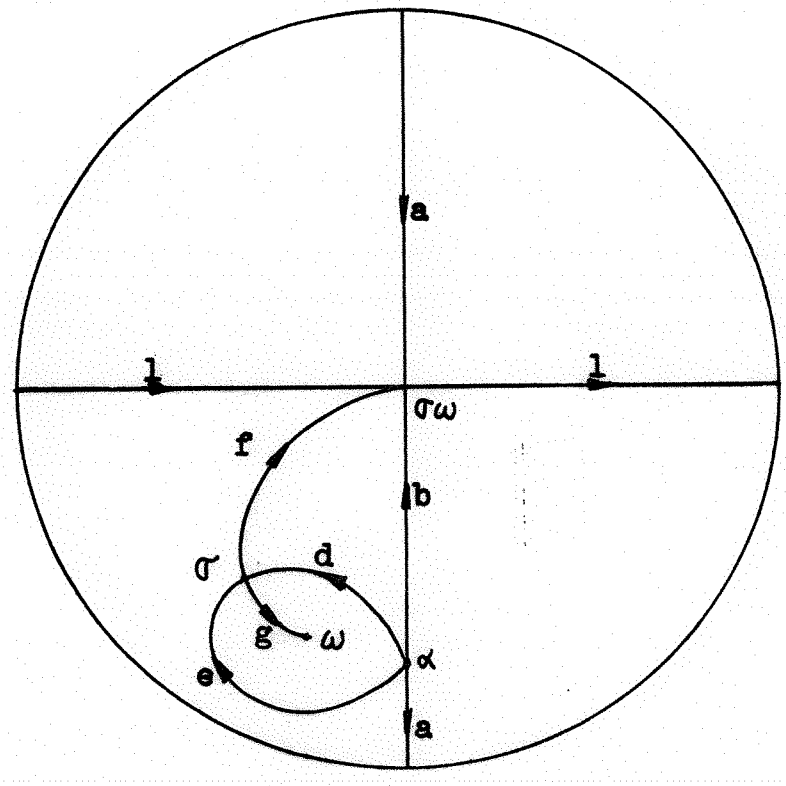
Valem as mesmas observações feitas no parágrafo 1º para o caso não orientável com as seguintes particularidades para cada caso:

A) sela-nó

A auto-ligação de uma sela-nó pode ser uma curva com um lado só. Temos que acrescentar então um novo tipo de conjunto distinguido: (que pode ou não ocorrer num dado campo)



Segue um exemplo de um campo, no plano projetivo P^2, onde ocorre um conjunto distinguido do tipo 1 D em que a auto-ligação é uma curva de um lado só:

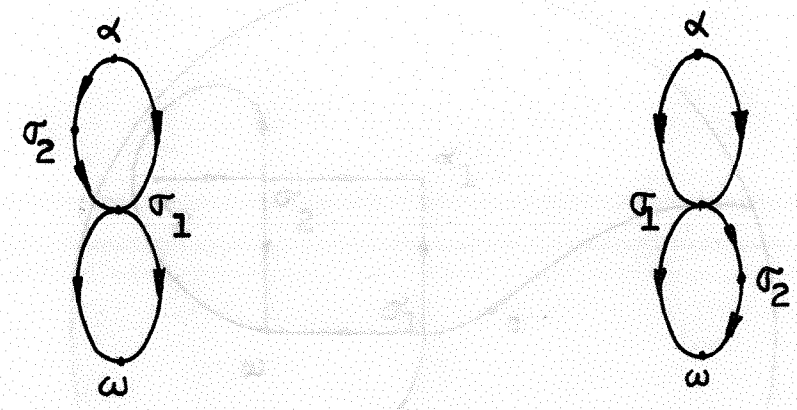


B) Foco - composto

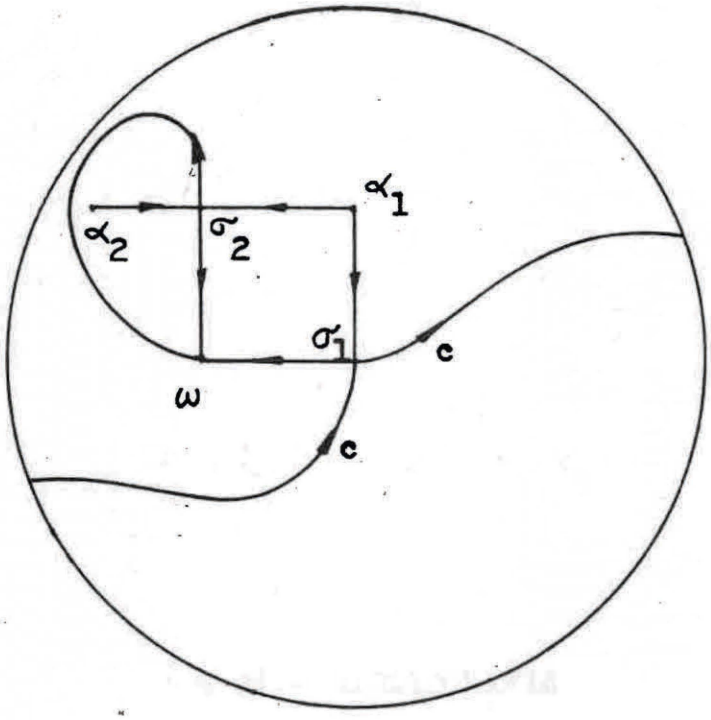
Nada a acrescentar

C) Conexão de selas

Temos mais dois tipos de conjuntos distinguidos: (que podem ou não ocorrer num dado campo)



Além disso, a auto-conexão pode ser uma curva com um lado só, não funcionando como atrator ou repulsor, como no seguinte exemplo em P^2:



D) órbita fechada quase-genérica.

Neste caso a órbita pode ser uma curva com um lado só, que de acordo com [3], lema (2.6), pág. 13, comporta-se, para efeito de classificação, como uma órbita fechada genérica.

§ 9º - BIBLIOGRAFIA

1 - Peixoto, M.M. - On the classification of flows on 2 - manifolds - Edição provisória IMPA.

2 - Peixoto, M.M. e Peixoto, M.C. - Structural Stability in the plane with enlarged boundary conditions - Anais da Academia Brasileira de Ciências - Vol 31 - nº 2 - 1959.

3 - Sotomayor, J. - Generic one - parameter families of vector fields on two dimensional manifolds - Edição provisória IMPA.

4 - Smale, S. - Differentiable Dynamical Systems - Bull.Am. Math.Soc. - 1967, pág. 747 a 817.

5 - Palis, J. - Seminário de Sistemas Dinâmicos - IMPA - CNPq - 1971 - Monografias de Matemática, nº 4.

6 - Lima, Elon L. - Introdução à topologia diferencial - IMPA - Notas de Matemática, nº 23 - 1961.