SOBRE GRUPOS DE LIE INFINITOS

Edgar Diógenes Vera Saravia

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. Domingos Pisanelli

São Paulo, junho de 1985

O autor foi bolsista, sucessivamente, da CAPES e do CNPq

ABSTRACT

We present a geometric-analytical theory, using manifolds in Silva spaces and a global theorem of Frobenius in this context, in order to study certain Lie groups. We follow the suggestion given in /6/ and /7/ by Pisanelli, and previous results in that direction (/4/, /6/ & /8/).

The goal is to unify and simplify the study of finite and infinite dimensional Lie subgroups of the Lie group $Gh(n,\mathbb{C})$, the set of the invertible elements of $gh(n,\mathbb{C})$. The latter is the Silva space of the germs of holomorphic mappings around the origin of $\mathbb{C}^n$, with values in $\mathbb{C}^n$, vanishing at the origin.

First of all we generalize some results on manifolds and tangent spaces given in /2/ (see /10/). Afterwards we define Lie groups, strong Lie subgroups and strong Lie subalgebras, then we establish a bijection between strong Lie subalgebras and connected strong Lie subgroups. We also obtain, for Lie groups, that the local Frobenius theorem in a neighourhood of the identity implies de global case.

Finally we give a sufficient condition in order that every Lie subalgebra of $gh(n,\mathbb{C})$ be a strong Lie subalgebra and we prove that every finite dimensional Lie subalgebra of $gh(n,\mathbb{C})$ satisfies this condition.

ÍNDICE

NOÇÕES CHAVE

INTRODUÇÃO

Em /6/ e /7/ Pisanelli trata do grupo de Lie $Gh(n,\mathbb{C})$ formado pelos elementos inversíveis de $gh(n,\mathbb{C})$, o espaço de Silva dos germes de aplicações analíticas definidas numa vizinhança da origem de $\mathbb{C}^n$, com valores em $\mathbb{C}^n$, que se anulam na origem. Nesses trabalhos apresenta um teorema de Frobenius local em escalas de Banach (ver também /4/) como alternativa para estudar os subgrupos de Lie de dimensão infinita de $Gh(n,\mathbb{C})$, visto que a exponencial, usada no caso finito, não é mais inversível em $gh(n,\mathbb{C})$ (ver /5/). Mas esta alternativa parecia não funcionar em dimensão finita.

Torna-se assim necessária, para um estudo sistematico do tema, alguma teoria sobre variedades modeladas em espaços de Silva e um teorema de Frobenius global nesse contexto. Um avanço nesta direção foi feita por Salvitti em /8/.

O presente trabalho propõe uma estrutura teorica, no contexto geométrico-analítico mencionado acima, que permite uma visão unificada dos casos finito e infinito e , alem disso, é de aplicação mais simples.

No §1 reunimos alguns resultados relacionados com variedades abstratas que permitam uma apresentação unificada de variedade e fibrado tangente.

Nos parágrafos 2, 3 e 4 generalizamos ao contexto dos espaços de Silva aqueles resultados do Lang /2/, sobre variedades e fibrados tangentes, necessários para nosso objetivo (ver também /10/).

O §5 apresenta, na Proposição 5.6, uma versão abstrata de um teorema tipo Frobenius local. O caso global e visto na Proposição 5.9. Devemos mencionar aqui que no Teorema 7.8 demonstramos que, em grupos de Lie, a validade do Teorema de Frobenius local numa vizinhança da identidade do grupo implica o caso global.

O §6 trata daquilo indispensável sobre Campos de Vetores para poder falar de Algebra de Lie de um grupo de Lie.

As noções de grupo de Lie e algebra de Lie são introduzidas nos parágrafos 7 e 8 respectivamente. Neles aparecem naturalmente as noções de subgrupo de Lie forte e de subalgebra de Lie forte. No Teorema 8.8 establecemos uma correspondencia bijetora entre subalgebras de Lie fortes e subgrupos de Lie fortes e conexos.

No §9 tratamos do grupo de Lie $Gl(n,\mathbb{C})$ e damos (Teorema 9.2) uma condição suficiente para que uma subalgebra de Lie de $gl(n,\mathbb{C})$ seja forte, alem disso mostramos (Teorema 9.7) que toda subalgebra de Lie de dimensão finita de $gl(n,\mathbb{C})$ satisfaz essa condição.

Finalmente, no §10, fazemos alguns comentários tentando relacionar o procedimento apresentado para determinar subgrupos de Lie fortes de $Gl(n,C)$, por meio das subalgebras de Lie fortes de $gl(n,C)$, com o método da exponencial usado em dimensão finita.

Resultados parciais deste trabalho foram apresentados, numa primeira versão, nos Seminarios Brasileiros de Análise seguintes: 14º (1981), 15º (1982) e 16º (1982).
No 12º Seminario Brasileiro de Análise apresentamos um primeiro intento de estender estas ideias aos Grupoide de Lie, visando os pseudogrupos de Lie, mas isso e outra história.

Nosso sincero agradecimento ao Profesor Dr. Domingos Pisanelli, por seu paciente trabalho de orientação, e a todos aqueles meus colegas e amigos que me encorajaram para dar por concluido este trabalho. Menção especial merece a Jean pela sua compreensão e estímulo e por tornar tudo mais agradável.

Lima, Junho de 1985.

Edgar Vera Saravia
Jr. Cueva 527
Lima 21 - Peru

§1 Generalidades

1.1 Definição: Dada uma categoría Topológica $\mathcal{B}$, uma familia $\&$ de $\mathcal{B}$-isomorfismos diz-se um pseudogrupo se

(a) Se $\sigma \in \&$ então $\sigma^{-1} \in \&$

(b) Se $\sigma \in \&$ e W é um $\mathcal{B}$-objeto contido e aberto em D_σ, o dominio de σ, então $\sigma|_W \in \&$

(c) Se σ é um $\mathcal{B}$-isomorfismo tal que, para todo x em D_σ, existe um $\mathcal{B}$-objeto W aberto em D_σ, com $x \in W \subset D_\sigma$ e $\sigma|_W \in \&$, então $\sigma \in \&$

(d) Se $\sigma, \xi \in \&$ e existe $\xi \circ \sigma$ então $\xi \circ \sigma \in \&$

1.2 Definição: Dado um conjunto M, $\mathcal{B}(M)$ indicará a familia das bijeções com domínio contido em M e imagem um $\mathcal{B}$-objeto. Dada uma propriedade P sobre os elementos de $\mathcal{B}(M)$, $\mathcal{B}(M,P)$ indicará a correspondente sub-familia.

1.3 Definição: Um germe de um $(\&,P)$-atlas sobre M e uma sub-familia $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}(M,P)$, com as seguintes propriedades:

(a) Os domínios dos elementos de $\mathcal{A}$ recobrem M

(b) Se $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ e $D_\varphi \cap D_\psi \neq \emptyset$ então $\psi \circ \varphi^{-1} \in \&$

Neste contexto

$$[\mathcal{A}] = \{\xi \in \mathcal{B}(M,P) \,/\, \xi \circ \varphi^{-1} \in \&, \forall \varphi \in \mathcal{A} \text{ com } D_\xi \cap D_\varphi \neq \emptyset\}$$

diz-se o $(\&,P)$-atlas de M gerado por $\mathcal{A}$. Os elementos de $[\mathcal{A}]$ são chamados de $(\&,P)$-cartas de M e os elementos de $\&$ de mudanças de cartas desse atlas

1.4 Observações: Nos termos da definição acima temos

(1) $\mathcal{A} \subset [\mathcal{A}]$, mais ainda, $[\mathcal{A}]$ satifaz (a), (b) e também

$$\sigma \in \&,\ \psi \in [\mathcal{A}] \wedge \exists\, \sigma \circ \psi \in \mathcal{B}(M,P) \Longrightarrow \sigma \circ \psi \in [\mathcal{A}]$$

(2) Se $\mathcal{A}'$ e uma sub-familia de $\mathcal{A}$ tal que os domínios dos elementos de $\mathcal{A}'$ recobrem M então $[\mathcal{A}'] = [\mathcal{A}]$

(3) Considerando $\mathcal{B}(M)$ no lugar de $\mathcal{B}(M,P)$ fica definida a noção de $\&$-atlas sobre M. Neste caso os elemento de $[\mathcal{A}]$ são cha-

mados de $\mathcal{S}$-cartas de M.

No que segue $\mathcal{C}$ indicará uma das três categorías topológicas seguintes: Os objetos de $\mathcal{C}$ são os abertos dos espaços de Banach reais (Espaços de Banach complexos ou Espaços de Silva complexos respectivamente) e os $\mathcal{C}$-morfismos são as aplicações C^{∞} (G-analíticas e contínuas respectivamente).
Espaço significará espaço de Banach ou espaço de Silva, dependendo da categoría considerada.
Dado um espaço E, $\mathcal{GL}(E)$ indicará o subgrupoide de $\mathcal{C}$ cujos objetos são os espaços linearmente homeomorfos a E e cujos morfismos são esses homeomorfismos lineares.
$\mathcal{C}(E)$ representará a subcategoría plena de $\mathcal{C}$ cujos objetos são os abertos dos $\mathcal{GL}(E)$-objetos.
$\mathcal{S}(E)$ será o pseudo-grupo de todos os $\mathcal{C}(E)$-isomorfismos.
Um sub-espaço H de E diz-se um <u>fator</u> de E se existir uma projeção (linear e contínua) $p: E \longrightarrow H$, indicaremos isto com $H \sqsubset E$.
Nestas circunstâncias $\mathcal{GL}(H \sqsubset E)$ indicará o subgrupoide de $\mathcal{GL}(H)$ cujos objetos são os espaços $\mathcal{GL}(E)$-isomorfos a H e cujos morfismos são as correspondentes restrições dos $\mathcal{GL}(E)$-isomorfismos.

§2 Variedades modeladas em espaços de Banach ou de Silva

2.1 Definição: Seja E um espaço e ponhamos $\mathcal{B} = \mathcal{C}(E)$. Um conjunto M diz-se uma E-variedade quando munido de um $\mathcal{S}(E)$-atlas, neste contexto as $\mathcal{S}(E)$-cartas são chamadas de cartas de M e são representadas por $(\mathcal{U}, \varphi)$ ou por $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow E_{\varphi}$; onde E_{φ} indica o $\mathcal{GL}(E)$-objeto onde φ toma valores.

2.2 Observação: É facil ver que uma E-variedade admite una única topología que torna homeomorfismos, com domínio aberto, suas cartas. Muniremos a variedade com essa topología. No que segue variedade significará E-variedade com topologia de Hausdorff.

2.3 Definição: $\mathcal{C}Var$ indicará a categoría das variedades. Um morfismo desta categoria é uma aplicação $f: M \longrightarrow \hat{M}$ tal que para cada $x \in M$ existem cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$ e $(\hat{\mathcal{U}}, \hat{\varphi})$ de M e $\hat{M}$ respectivamente, satisfazendo: $x \in \mathcal{U}$, $f(\mathcal{U}) \subset \hat{\mathcal{U}}$ e $\hat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}$ é um $\mathcal{C}$-morfismo.

2.4 Observação: $\mathcal{C}$ resulta uma sub-categoria de $\mathcal{C}Var$ da maneira obvia.

2.5 Definição: Dada a variedade M, uma variedade S diz-se uma subvariedade (imersa) de M se para cada $x \in S$ existem: uma carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M, um aberto $\mathcal{A}$ de S e um fator H_φ de E_φ, isto é $H_\varphi \sqsubset E_\varphi$, tal que $x \in \mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ e $(\mathcal{A}, \varphi|_{\mathcal{A}})$ é uma carta de S com imagem um aberto de H_φ.

Diremos que S e uma subvariedade mergulhada em M se $\mathcal{A} = \mathcal{U} \cap S$.

2.6 Proposição: Seja M uma E-variedade. $S \subset M$ é uma sub-variedade mergulhada em M se e somente se existe $H \sqsubset E$ e um recobrimento $\mathcal{R}$ de S por cartas de M satisfazendo: Para cada $(\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{R}$ existe um $\mathcal{GL}(H \sqsubset E)$-objeto $H_\psi \sqsubset E_\psi$ tal que, indicando com p a projeção de E_ψ sobre H_ψ, $(\mathcal{V} \cap S, p \circ \psi|_{\mathcal{V} \cap S})$ é uma carta de S e a aplicação

$$\xi \equiv \psi \circ [p \circ \psi|_{\mathcal{V} \cap S}]^{-1} : p \circ \psi(\mathcal{V} \cap S) \subset H_\psi \longrightarrow E_\psi$$

é um $\mathcal{C}$-morfismo

Demonstração: A necessidade é imediata. Vejamos a suficiência: Obviamente a familia $\{ (\mathcal{V} \cap S, p \circ \psi|_{\mathcal{V} \cap S}) \ / \ (\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{R} \}$ é um germe de $\mathcal{E}(H)$-atlas sobre S. Com efeito, dados $(\mathcal{V}, \psi)$ e $(\hat{\mathcal{V}}, \hat{\psi})$ de $\mathcal{R}$ com $S \cap \mathcal{V} \cap \hat{\mathcal{V}} \neq \emptyset$, temos

$$(\hat{p} \circ \hat{\psi}) \circ (p \circ \psi)^{-1} = \hat{p} \circ (\hat{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ \xi \in \mathcal{E}(H)$$

Observe-se que ξ é o morfismo inverso de $p: \psi(S \cap \mathcal{V}) \longrightarrow A$ onde $A = p \circ \psi(\mathcal{V} \cap S)$.

De outro lado, escrevendo $U = \psi(\mathcal{V}) \cap p^{-1}(A)$ e $\mathcal{U} = \psi^{-1}(U)$,

$$F : y \in U \longmapsto p(y) + (y - \xi(p(y))) \in E_\psi$$

pertence a $\mathcal{E}(E)$, sendo seu morfismo inverso a aplicação

$$G : z \in p^{-1}(A) \longmapsto z - p(z) + \xi(p(z)) \in E_\psi$$

restrita a $F(U)$. Disto e da Observação 1.4 segue que
$\varphi = F\circ\psi|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \longrightarrow E_\psi$ é carta de M tal que $\varphi|_{\mathcal{U}\cap S} = p\circ\psi|_{\mathcal{U}\cap S}$
isto é, satisfaz a Def. 2.5 ▮

§3 Espaços Fibrados

Fixemos uma variedade M e um sub-grupoide $\mathcal{G}$ da categoria $\mathcal{E}Var$. $\mathcal{B}$ indicará aqui a categoria $\mathcal{E}Var$ incluindo como objetos as variedades produto definidas da maneira usual.
Neste contexto $\mathcal{E}$ indicará o pseudo-grupo (dos fibrados triviais) dos $\mathcal{B}$-isomorfismos da forma

$$\Sigma : (x,y) \in \mathcal{U}\times N \longmapsto (x, \Sigma_x(y)) \in \mathcal{U}\times \hat{N}$$

onde $\mathcal{U}$ é um aberto de M, N e $\hat{N}$ são $\mathcal{G}$-objetos e Σ_x é um $\mathcal{G}$-isomorfismo.

Seja agora T um conjunto e $\rho : T \longrightarrow M$ uma aplicação sobrejetora. A propriedade P, nos $(\mathcal{E},P)$-atlas a ser considerados, indicará que as bijeções consideradas são da forma

$$\Phi : v \in \rho^{-1}(\mathcal{U}) \longmapsto (\rho(v), \Phi_{\rho(v)}(v)) \in \mathcal{U}\times N$$

onde, para cada $x\in\mathcal{U}$, $\Phi_x : T_x \longrightarrow N$ é a bijeção induzida por Φ à x-fibra $T_x = \rho^{-1}(\{x\})$ de T.

3.1 Definição: T diz-se um $\mathcal{G}$-espaço fibrado, com base M e projeção ρ, se ele admitir um $(\mathcal{E},P)$-atlas nas condições acima. Neste contexto as $(\mathcal{E},P)$-cartas Φ são chamadas de cartas fibradas de T e denotadas por $(\mathcal{U},\Phi)$ ou $\Phi : \rho^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U}\times N$.

3.2 Observação: Se M é uma E-variedade e os $\mathcal{G}$-objetos são F-variedades, então vamos considerar T uma $E\times F$-variedade da maneira obvia, isto é, munida do atlas gerado pela familia de bijeções $(\xi,\psi)\circ\Phi|_{\rho^{-1}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\times\mathcal{W})}$ onde $(\mathcal{U},\Phi)$ é uma carta fibrada de T, $(\mathcal{V},\xi)$ é uma carta de M e $(\mathcal{W},\psi)$ é uma carta de N.

§4 Fibrado Tangente de uma Variedade

Dada uma E-variedade M, o conjunto TM e a correspondente projeção $\pi: TM \longrightarrow M$ são definidas da maneira usual (/ / / /), isto é, se $(\mathcal{U}, \varphi)$ é uma carta de M, a x-fibra $T_x M$ de TM é

$$T_x M = \{ \langle \varphi, h \rangle_x \,/\, h \in E_\varphi \} \ , \ x \in \mathcal{U} \qquad (4.1)$$

onde $\langle \varphi, h \rangle_x$ indica a classe de equivalencia do par (φ, h) em x. Mais ainda, associa-se à carta acima a seguinte bijeção

$$\Phi : \langle \varphi, h \rangle_x \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longmapsto (x, h) \in \mathcal{U} \times E_\varphi \qquad (4.2)$$

Estas bijeções formam um germe de um $(\mathcal{GL}(E), P)$-atlas sôbre TM. Com efeito, se Ψ é a bijeção associada à carta $(\mathcal{V}, \psi)$ de M com $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ então

$$\Psi_x \circ \Phi_x^{-1} : h \in E_\varphi \longmapsto (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x)) \cdot h \in E_\psi \qquad (4.3)$$

é obviamente um $\mathcal{GL}(E)$-isomorfismo para cada $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

4.1 Definição: O $\mathcal{GL}(E)$-espaço fibrado TM, com base M e projeção π, munido do correspondente atlas gerado pelas bijeções (4.2) é chamado de Fibrado Tangente de M.

Por simplicidade as cartas fibradas de TM são chamadas cartas de TM

4.2 Observações: Nas condições acima temos:

(1) $\langle \psi, k \rangle_x = \langle \varphi, h \rangle_x \iff k = \Psi_x \circ \Phi_x^{-1} \cdot h$

(2) Se $f: M \longrightarrow \hat{M}$ é um $\mathcal{C}$Var-morfismo e $Tf: TM \longrightarrow T\hat{M}$ a correspondente aplicação tangente, então: Dadas as cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$ e $(\hat{\mathcal{U}}, \hat{\varphi})$ de M e $\hat{M}$ respectivamente, com $f(\mathcal{U}) \cap \hat{\mathcal{U}} \neq \emptyset$, temos que, para cada $x \in \mathcal{U} \cap f^{-1}(\hat{\mathcal{U}})$, $\hat{\Phi}_{f(x)} \circ T_x f \circ \Phi_x^{-1}$ é a aplicação

$$: k \in E_\varphi \longmapsto (\hat{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x)) \cdot k \in \hat{E}_{\hat{\varphi}}$$

(3) Se $g: \hat{M} \longrightarrow N$ é outro $\mathcal{C}$Var-morfismo, então a regra da cadeia se exprime

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)} g \circ T_x f \ , \quad x \in M \qquad (4.4)$$

4.3 Definição: Dado $H \sqsubset E$, suponhamos que $X \subset TM$ é um $\mathcal{GL}(H)$-espaço fibrado com base M e projeção $\pi|_X$. X diz-se um sub-fi brado tangente de M se existir um recobrimento de M por cartas de TM satisfazendo: Se $(\mathcal{U}, \hat{\Phi})$ é uma dessas cartas então existe um $\mathcal{GL}(H \sqsubset E)$-objeto $H_{\hat{\Phi}} \sqsubset E_{\hat{\Phi}}$ tal que a restrição, Φ, de $\hat{\Phi}$ a $\left(\pi|_X\right)^{-1}(\mathcal{U})$, toma valores em $\mathcal{U} \times H_{\hat{\Phi}}$ e $(\mathcal{U}, \Phi)$ é carta fibrada do espaço fibrado X.

Neste contexto $(\mathcal{U}, \hat{\Phi})$ diz-se uma carta de TM que paraleliza X.

4.4 Observação: É fácil ver que: Se S é uma sub-variedade de M então, com as identificações obvias, TS e um sub-fibrado tangente de M. Com efeito, basta considerar o recobrimento formado pelas cartas de TM associadas às cartas de M consideradas na Def. 2.5.

§5 Sub-fibrados Integráveis

Neste parágrafo M e uma E-variedade, H é um fator de E e X é um H-sub-fibrado tangente de M.

5.1 Definição: Uma H-sub-variedade S de M diz-se uma variedade integral de X se $T_s S = X_s$ para todo s de S. Dizemos que S passa por $x \in M$ se $x \in S$.

Com um argumento similar àquele usado na prova do Teorema 4.3 de /2/ demonstra-se a seguinte

5.2 Proposição: Sejam S e $\hat{S}$ duas variedades integraveis de X passando por $x \in M$ e suponhamos que elas são mergulhadas e conexas em M. Então existe uma vizinhança aberta, $\mathcal{O}$, de x em M tal que $S \cap \mathcal{O} = \hat{S} \cap \mathcal{O}$.

5.3 Definição: Uma carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M diz-se uma X-carta se:

(a) Por cada $x \in \mathcal{U}$ passa uma variedade integral S_x de X, conexa e mergulhada em M.

(b) Existe um $\mathcal{GL}(H \sqsubset E)$-objeto $H_\varphi \sqsubset E_\varphi$ com projeção $p: E_\varphi \longrightarrow H_\varphi$ satisfazendo: Para cada $x \in \mathcal{U}$ existe uma vizinhança aberta $\mathcal{A}$ de S_x, com $x \in \mathcal{A} \subset \mathcal{U}$, tal que $(\mathcal{A}, p \circ \varphi|_{\mathcal{A}})$ é carta de S_x.

(c) $(\mathcal{U}, \Sigma)$ é carta fibrada de X, onde $\Sigma_x = p \circ (\Phi_x|_{X_x}) = (p \circ \Phi_x)|_{X_x}$ e Φ é a carta de TM associada a φ.

A seguir veremos que na categoría dos espaços de Banach reais, os teoremas da aplicação aberta e da função implícita garantem que (a) implica (b) e (c); isto é, se X é integrável então M admite um recobrimento por X-cartas.

5.4 Proposição: No contexto do Lang /2/, se por cada ponto de M passa uma variedade integral de X, conexa e mergulhada em M, então existe um recobrimento de M formado por X-cartas.

Demonstração: Fixemos $z \in M$ e ponhamos $S = S_z$. Seja $(\mathcal{U}, \varphi)$ uma carta de M contendo z e tal que sua restrição a $\mathcal{U} \cap S$ é uma carta de S com valores em algum fator H_φ de E_φ com projeção p. Reduzindo $\mathcal{U}$ se fôr preciso vamos considerar $(\mathcal{U}, \hat{\psi})$, uma carta de TM paralelizando X e contendo z, e indicaremos com ψ sua restrição a X.

Como TM é fibrado vetorial temos que (VB3, pg. 42 de /2/)

$$x \in \mathcal{U} \longmapsto \Phi_x \circ \hat{\psi}_x^{-1} \in Lis(E_{\hat{\psi}}, E_\varphi)$$

é um $\mathcal{C}Var$-morfismo.

Disto, com a notações da Def. 5.3, segue que (Prop. 1.16 de /2/)

$$x \in \mathcal{U} \longmapsto \Sigma_x \circ \psi_x^{-1} \circ \psi_z \circ (\Phi_z^{-1}|_{H_\varphi}) \in L(H_\varphi)$$

é um $\mathcal{C}Var$-morfismo que leva z na identidade de H_φ, segue daí que existe uma vizinhança aberta de z que indicaremos ainda por $\mathcal{U}$ tal que a seguinte aplicação é um $\mathcal{C}Var$-morfismo

$$x \in \mathcal{U} \longmapsto \Sigma_x \circ \psi_x^{-1} \in Lis(H_\psi, H_\varphi)$$

Das proposições 1.15 e 1.16 de /2/, segue que $\Sigma_x \circ \psi_x^{-1}$ é um $\mathcal{G}L(H)$-morfismo e também que

$$(x, h) \in \mathcal{U} \times H_\psi \longmapsto \Sigma_x \circ \psi_x^{-1} \cdot h \in H_\varphi$$

é um $\mathcal{C}Var$-morfismo. Isto prova (c) da Def. 5.3.

Seja agora $x \in \mathcal{U}$ e $(\mathcal{V}, \delta)$ uma carta de M, com $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, de tal maneira que sua restrição a $\mathcal{V} \cap S_x$ é uma carta de S_x com imagem um aberto de um fator H_δ de E_δ.

Para ter (b) devemos ver que

$$t \in \delta(\mathcal{V} \cap S_x) \subset H_\delta \longmapsto (p\circ\varphi\circ\delta^{-1})(t) \in H_\varphi$$

pertence a $\mathcal{E}(H)$, quando restrita a uma vizinhança de $\delta(x)$, mas, indicando com Λ à carta de TS associada a δ, isto segue de

$$(p\circ\varphi\circ\delta^{-1})'(\delta(x)) = \Sigma_x \circ (\Lambda_x^{-1}|_{H_\delta}) \in L(H_\delta, H_\varphi)$$

aplicando primeiro o teorema da aplicação aberta e a seguir o teorema da função inversa ∎

5.5 Definição: Um sub-fibrado tangente X de M diz-se sub-fibrado integravel de M se M admite um recobrimento por X-cartas.

5.6 Proposição: Com as notações da Def. 5.3, uma carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M é uma X-carta se e somente se:

(1) Existe um $\mathcal{GL}(H \sqsubset E)$-objeto $H_\varphi \sqsubset E_\varphi$, com projeção p, tal que $(\mathcal{U}, \Sigma)$ é uma carta fibrada de X.

(2) Para cada $x \in \mathcal{U}$, o PVI

$$\xi'(t) = [P|_{\Phi_\alpha(X_\alpha)}]^{-1} \quad , \quad \xi(p\circ\varphi(x)) = \varphi(x) \qquad (5.1)$$

onde $\alpha = \varphi^{-1}(\xi(t))$

admite uma solução definida numa vizinhança aberta $A \subset p\circ\varphi(\mathcal{U})$ de $p\circ\varphi(x)$, com valores em $\varphi(\mathcal{U})$, isto é, um $\mathcal{C}$-morfismo local de H_φ em E_φ.

5.7 Observação: De (1) acima ou (c) da Def. 5.3 temos que $P|_{\Phi_\alpha(X_\alpha)}$ e inversível. Com efeito, seja $(\mathcal{V}, \psi)$ uma carta de TM paralelizando X e tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, então para $y \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$

$$[P|_{\Phi_y(X_y)}]^{-1} = \Phi_y \circ \Psi_y^{-1} \circ [\Sigma_y \circ (\Psi_y|_{X_y})^{-1}]^{-1} \qquad (5.2)$$

Demonstração da necessidade: Escrevendo $A = p\circ\varphi(\mathcal{A}) \subset H_\varphi$, temos que $\xi = \varphi\circ(p\circ\varphi|_{\mathcal{A}})^{-1} : A \longrightarrow E_\varphi$ é o $\mathcal{C}$-morfismo inverso de $P|_{\varphi(\mathcal{A})}$

Segue que $\xi'(t) = \Phi_\alpha \circ \Sigma_\alpha^{-1}$ donde

$$\xi'(t) H_\varphi = \Phi_\alpha \circ \Sigma_\alpha^{-1} H_\varphi = \Phi_\alpha(T_\alpha S_x) = \Phi_\alpha(X_\alpha) = [P|_{\Phi_\alpha(X_\alpha)}]^{-1} H_\varphi$$

logo dado $h \in H_\varphi$ existe $k \in H_\varphi$ tal que $\xi'(t)h = [P|_{\Phi_\alpha(X_\alpha)}]^{-1} k$

finalmente, aplicando p, resulta $h = k$, e o resultado segue.

Demonstração da suficiência: (1) acima implica (c) da Def. 5.3. De outro lado, aplicando p ao PVI (5.1), obtemos um novo PVI o mesmo que nos permite concluir que $p \circ \xi = 1_A$ donde, escrevendo $\mathcal{A} = \varphi^{-1}(\xi(A))$, é facil ver que $p \circ \varphi|_{\mathcal{A}}$ é uma bijeçao de $\mathcal{A}$ sobre A, mais ainda $\xi = \varphi \circ (p \circ \varphi|_{\mathcal{A}})^{-1}$

Consequentemente, munindo $S = \mathcal{A}$ da estrutura de variedade com o atlas gerado pela bijeção $p \circ \varphi|_{\mathcal{A}}$, segue que S e uma H-sub-variedade mergulhada em M. Alem disso

$$\Phi_\alpha(T_\alpha S) = \Phi_\alpha \circ \Sigma_\alpha^{-1}(H_\varphi) = \xi'(t) H_\varphi = \Phi_\alpha(X_\alpha)$$

e como Φ_α é bijeção, concluimos (a) e (b) da Def. 5.3 ∎

5.8 Corolario: Se M e um aberto do espaço E, entao $(M, 1_M)$ é uma X-carta se e somente se

(1) Existe um $\mathcal{DL}(H \subset E)$-objeto $\hat{H}$ com projeçao $p: E \longrightarrow \hat{H}$, e um recobrimento de M por domínios de cartas de TM paralelizando X, tal que, se $(\mathcal{V}, \Psi)$ é uma dessas cartas então

$$p \circ \Psi_y^{-1} \text{ é um } \mathcal{DL}(H)\text{-morfismo}, \quad y \in \mathcal{V} \tag{5.3}$$

$$(y, h) \in \mathcal{V} \times \hat{H} \longmapsto [p \circ \Psi_y^{-1}]^{-1} h \in \hat{H} \quad \text{é um } \mathcal{C}\text{-morfismo} \tag{5.4}$$

(2) A mesma condição da proposição 5.6.

Demonstração: A condição necessária e imediata. De outro lado, (1) acima implica (1) da Prop. 5.6, visto que, neste caso, $\Sigma_y = p|_{X_y}$ e alem disso a mudança de cartas entre Σ e Ψ fica determinada pelas aplicações indicadas em (5.3) e (5.4) ∎

Observe-se que, neste caso, (5.2) escreve-se

$$[p|_{\Phi_y(X_y)}]^{-1} = \Psi_y^{-1} \circ [p \circ (\Psi_y|_{X_y})^{-1}]^{-1} \tag{5.5}$$

No que segue vamos considerar integrável o sub-fibrado tangente X e munir a variedade M de uma nova topologia $\mathcal{T}_X$:

Uma base de $\tilde{\mathcal{T}}_X$-vizinhanças de $x \in M$, será a correspondente base de vizinhanças de x na variedade integral, mergulhada e conexa em M, passando por este ponto (lembrar as proposições 5.2 e 5.6).

5.9 Proposição: Seja S uma sub-variedade imersa em M. Se S é uma variedade integral de X, então S é um conjunto $\tilde{\mathcal{T}}_X$-aberto de M. De outro lado, a componente $\tilde{\mathcal{T}}_X$-conexa de x resulta uma variedade integral de X, imersa em M, quando munida da estrutura de variedade obvia. A variedade assim considerada é chamada <u>a sub-variedade integral</u> de X passando por x.

Demonstração: imediata.

§6 Campos de Vetores

Daqui em diante usaremos livremente as propriedades das funções G-analíticas e contínuas, também chamadas LF-analíticas, (/1/ e /3/)

6.1 Definição: Uma aplicação $\xi : M \longrightarrow TM$ diz-se um campo de vetores de M se $\pi \circ \xi = 1_M$ e, para cada carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M, a seguinte aplicação é um $\mathcal{C}$-morfismo

$$\xi_\varphi : t \in U = \varphi(\mathcal{U}) \longmapsto \Phi_{\varphi^{-1}(t)} \circ \xi(\varphi^{-1}(t)) \in E_\varphi \tag{6.1}$$

$V(M)$ indicará o espaço dos campos de vetores de M.

6.2 Proposição: Seja $\xi \in V(M)$. Dadas $(\mathcal{U}, \varphi)$ e $(\mathcal{V}, \psi)$ cartas de M, com $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, vale a seguinte relação de compatibilidade:

$$\xi_\varphi(\varphi(x)) = \Phi_x \circ \Psi_x^{-1} \cdot \xi_\psi(\psi(x)) \quad , \quad x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \tag{6.2}$$

Reciprocamente, se para cada carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M existem $\mathcal{C}$-morfismos $\xi_\varphi : U \longrightarrow E_\varphi$, satisfazendo (6.2), então

$$\xi(x) = \Phi_x^{-1} \cdot \xi_\varphi(\varphi(x)) \quad , \quad x \in \mathcal{U} \tag{6.3}$$

define um campo de vetores de M.

Demonstraçao: imediata.

6.3 *Proposição:* Se $\xi, \eta \in V(M)$, então, para cada carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de M, as aplicações

$$[\xi,\eta]_\varphi : t \in U \longmapsto \eta'_\varphi(t)\cdot \xi_\varphi(t) - \xi'_\varphi(t)\cdot \eta_\varphi(t) \in E_\varphi \qquad (6.4)$$

são $\mathcal{E}$-morfismos satisfazendo (6.2)

Demonstração: imediata.

6.4 *Definição:* O campo de vetores $[\xi,\eta]$ definido, usando (6.3) e (6.4), por

$$[\xi,\eta](x) = \Phi_x^{-1}\cdot[\xi,\eta]_\varphi(\varphi(x)) \quad , \; x \in \mathcal{U}$$

diz-se o colchete de Lie de ξ e η.

As propriedades usuais do colchete seguem da relação

$$(\alpha\xi + \beta\eta)_\varphi = \alpha\xi_\varphi + \beta\eta_\varphi \qquad ; \quad \alpha,\beta \text{ escalares}$$

6.5 *Definição:* Dadas as variedades M e $\hat{M}$ e o $\mathcal{E}$Var-morfismo f de M em $\hat{M}$. Diz-se que $\xi \in V(M)$ e $\hat{\xi} \in V(\hat{M})$ são f-relacionados se

$$T_x f\cdot\xi(x) = \hat{\xi}(f(x)) \quad , \; x \in M \qquad (6.5)$$

Observe-se que, dadas as cartas $(\mathcal{U},\varphi)$ de M e $(\hat{\mathcal{U}},\hat{\varphi})$ de $\hat{M}$ com $f(\mathcal{U}) \subset \hat{\mathcal{U}}$, a expressão local de (6.5) é

$$(\hat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1})'(t)\cdot\xi_\varphi(t) = \hat{\xi}_\varphi(\hat{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1}(t)) \, , \; t \in U \qquad (6.6)$$

A seguinte afirmação é demonstrada da maneira usual

6.6 *Proposição:* Se $\xi, \eta \in V(M)$ sao f-relacionados com $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in V(\hat{M})$ respectivamente, entao $[\xi,\eta]$ é f-relacionado com $[\hat{\xi},\hat{\eta}]$.

§7 Grupos de Lie

7.1 *Definição:* Um grupo G diz-se um grupo de Lie se ele possui uma estrutura de variedade tal que suas operações sao $\mathcal{E}$Var-morfismos. Consideraremos G munida dessa estrutura de variedade e indicaremos com e a identidade de G.

7.2 Observações:

(1) As traslações

$$\tau_x : y \in G \longmapsto yx \in G$$

são $\mathcal{C}$Var-morfismos e valem as relações

$$\tau_{xy} = \tau_y \circ \tau_x \qquad e \qquad \tau_{x^{-1}} = \tau_x^{-1} \tag{7.1}$$

mais ainda, a aplicação $x \longmapsto \tau_x$ é um homomorfismo de grupos.

(2) Se $(\mathcal{U}, \varphi)$ é carta de e, então $(\tau_x(\mathcal{U}), \varphi \circ \tau_x^{-1})$ é carta de x em G, e toda carta de x é dessa forma; mais ainda

(3) Seja S uma sub-variedade de G passando por e. Se, dada a carta acima, $(\mathcal{A}, \varphi|_{\mathcal{A}})$ é carta de e em S, então, dado $x \in S$, $(\tau_x(\mathcal{A}), \varphi|_{\mathcal{A}} \circ \tau_x^{-1})$ é carta de x em S. Segue daí que, para cada $y \in G$, $\tau_y(S)$ é sub-variedade de G quando munida da estrutura induzida por τ_y.

(4) Para cada $x \in G$, $T_e \tau_x$ define uma aplicação linear inversível, chamada transformação infinitesimal de G em x,

$$L(x) \equiv T_e \tau_x : T_e G \longrightarrow T_x G$$

com inversa

$$\mathcal{L}(x) \equiv T_x \tau_x^{-1} : T_x G \longrightarrow T_e G$$

temos ainda as bijeções, uma inversa da outra,

$$L : (x,u) \; G \times T_e G \longmapsto L(x)u \in TG$$

$$\mathcal{L} : v \in TG \longmapsto (x, \mathcal{L}(x).v) \in G \times T_e G \qquad , \; x = \pi(v)$$

(5) Da primeira relação de (7.1) e da regra da cadeia (4.4), temos a chamada equação de Lie de G

$$T_x \tau_y = L(xy) \circ \mathcal{L}(x) \tag{7.2}$$

7.3 Observação: Dada uma carta $(\mathcal{V}, \varphi)$ de e em G, é facil ver que existe um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ tal que o par $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ é um grupo de Lie local, isto é, $e \in \mathcal{U}$ e valem as relações

$$x, y \in \mathcal{U} \Longrightarrow xy \in \mathcal{V} \quad \wedge \quad x \in \mathcal{U} \Rightarrow x^{-1} \in \mathcal{U}$$

de tal maneira que as aplicações induzidas, de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ em $\mathcal{V}$ e de

$\mathcal{U}$ em $\mathcal{U}$ respectivamente, sao $\mathcal{C}$Var-morfismos.
Mais ainda, fica definida uma estrutura de grupo de Lie local no par $U=\varphi(\mathcal{U})$, $V=\varphi(\mathcal{V})$, com as operações

$$st=\varphi(\varphi^{-1}(s)\,\varphi^{-1}(t)) \quad \wedge \quad s^{-1}=\varphi((\varphi^{-1}(s))^{-1})$$

Neste último caso as aplicações induzidas são $\mathcal{C}$-morfismos e a identidade do grupo local induzido é $\varphi(e)$.

Na proposição seguinte veremos que $\mathcal{L}$, definida na Observ 7.2(4), se comporta, localmente, como uma carta de TG . $\mathcal{L}$ será de fato uma carta de TG se G e um $\mathcal{C}$-objeto, i. e., um aberto de algum espaço.

7.4 Proposição: Nas condiçoes da Observaçao 7.3, dado $w\in G$, o par $(\mathcal{W},F)$, onde $\mathcal{W}=\tau_w(\mathcal{U})$ e , escrevendo $y=\pi(v)$,

$$F: v\in \pi^{-1}(\mathcal{W}) \longmapsto (\varphi\circ\tau_w^{-1}(y),\ \Phi_e\circ\mathcal{L}(y)\cdot v)\in U\times E_\varphi$$

é uma carta de TG que contem a w.

Demonstração: Visto que $(\mathcal{W},\psi)$, onde $\psi=\varphi\circ\tau_w^{-1}$, é carta de w em G , das Observ. 1.4(2) e 7.2(2), bastará analisar o comportamento das mudanças de cartas

$$\Psi\circ F^{-1}(s,h)=(s,\Psi_y\circ F_y^{-1}h) \text{ e suas inversas } F\circ\Psi^{-1} \text{, onde } y=\psi^{-1}(s)$$

Seja então $(s,h)\in U\times E$ e ponhamos $y=\psi^{-1}(s)$
De um lado temos:

$$\Psi_y\circ F_y^{-1}\cdot h=\Psi_y\circ L(y)\circ\Phi_e^{-1}\cdot h=\Psi_y\circ T_e\tau_y\circ\Phi_e^{-1}\cdot h=(\psi\circ\tau_y\circ\varphi^{-1})'(\varphi(e))\cdot h=(\varphi\circ\tau_{yw^{-1}}\circ\varphi^{-1})'(\varphi(e))\cdot h$$

mas $yw^{-1}=\varphi^{-1}(s)$ implica $\varphi\circ\tau_{yw^{-1}}\circ\varphi^{-1}(t)=\varphi(\varphi^{-1}(t)\cdot\varphi^{-1}(s))=ts$ donde

$$\Psi_y\circ F_y^{-1}\cdot h=\left[\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=\varphi(e)}(ts)\right]\cdot h$$

onde observamos que o segundo membro é a transformação infinitesimal, em s , do grupo de Lie local induzido (U,V).
De outro lado, procedendo similarmente, temos que

$$F_y\circ\Psi_y^{-1}\cdot h=\left[\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=s}(ts^{-1})\right]\cdot h$$

onde o segundo membro é a inversa da tranformação infinitesimal mencionada anteriormente.

É facil ver que, das duas igualdades obtidas acima, a proposição decorre das propriedades dos $\mathscr{C}$-morfismos ▯

7.5 Observações:

(1) Basta demonstrar a proposição acima para o caso $w = e$. Com efeito, seja $(\mathcal{U}, \Sigma)$ a carta associada a $w = e$ e ponhamos $x = \varphi^{-1}(s)$ Obviamente $x = yw^{-1}$ e também

$$\Psi_y \circ F_y^{-1} = (\varphi \tilde{\tau}_y \varphi^{-1})'(\varphi(e)) = (\varphi \tilde{\tau}_w^{-1} \tilde{\tau}_y \varphi^{-1})'(\varphi(e)) = (\varphi \tilde{\tau}_x \varphi^{-1})'(\varphi(e)) = \Phi_x \circ T_e \tilde{\tau}_x \Phi_e^{-1} = \Phi_x \circ \Sigma_x$$

(2) Da observação anterior temos que se X é um sub-fibrado tangente de G e $(\mathcal{U}, p \circ \Sigma)$ é carta de X, entao $(\mathcal{W}, p \circ F)$ também é carta deste sub-fibrado.

7.6 Definição: Um sub-grupo G_1 de um grupo de Lie G diz-se um sub-grupo de Lie de G se ele é uma sub-variedade de G e um grupo de Lie com essa estrutura de variedade.

7.7 Proposição: Seja G um grupo de Lie e G_1 um sub-grupo de Lie dele, então temos:

(1) A transformaçao infinitesimal de G_1, em $x \in G_1$, é a restrição de $L(x)$ a $T_e G_1$.

(2) TG_1 é um sub-fibrado de TG, segundo a Observ. 4.4, com estrutura induzida pelas cartas de TG dadas na Prop. 7.4.

(3) $\tau_x(G_1) = G_1 x$ é uma variedade integral de TG_1, passando por x.

Demonstração: imediata.

Na Prop. 5.4 vimos que, no contexto dos espaços de Banach, a condição (3) acima garante a integrabilidade de TG_1. Isto sugere dar uma noçao mais forte de sub-grupo de Lie. Com efeito, temos o seguinte

7.8 **Teorema**: Seja G um grupo de Lie e X_e um sub-espaço de $T_e G$. $X = \bigcup_{x \in G} L(x) X_e$, munido da estrutura induzida pelas cartas da Prop. 7.4, é um sub-fibrado integravel de G se existir uma X-carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de e em G. Neste caso, a sub-variedade integral de X passando por e, G_1, é um sub-grupo de Lie de G.

Demonstração: Vejamos, usando a Prop. 5.6, que, para cada $a \in G$, $(\mathcal{V}, \psi)$, onde $\mathcal{V} = \tau_a(\mathcal{U}) \wedge \psi = \varphi \circ \tau_a^{-1}$, é X-carta de a em G.

Sem perda de generalidade podemos supor que $(\mathcal{U}, \varphi)$ está nas condições da Observ. 7.3.

Dado $y \in \mathcal{V}$, da equação de Lie (7.2), temos

$$\Psi_y = \Phi_x \circ T_y \tau_a^{-1} = \Phi_x \circ L(x) \circ \mathcal{R}(y) \qquad (x = ya^{-1} \in \mathcal{U})$$

logo, considerando as cartas da Prop. 7.4, resulta

$$(p \circ \Psi_y) \circ F_y^{-1} = p \circ \Phi_x \circ L(x) \circ \mathcal{R}(y) \circ L(y) \circ \Phi_e^{-1} = (p \circ \Phi_x) \circ F_x^{-1}$$

Daqui e fácil ver que $(\mathcal{V}, \Delta)$, com $\Delta_y = (p \circ \Psi_y)|_{L(y)X_e}$ é carta fibrada de X.

De outro lado, para cada $y \in \mathcal{V}$, devemos ver que o PVI

$$\xi'(t) = [p|_{\Psi_\beta(X_\beta)}]^{-1} \quad , \quad \xi(p \circ \psi(y)) = \psi(y)$$

onde $\beta = \psi^{-1}(\xi(t))$, admite solução. Para tanto, bastará fazer $x = ya^{-1} \in \mathcal{U}$ e considerar a solução, ξ, do PVI

$$\xi'(t) = [p|_{\Phi_\alpha(X_\alpha)}]^{-1} \quad , \quad \xi(p \circ \varphi(x)) = \varphi(x)$$

onde $\alpha = \varphi^{-1}(\xi(t))$.

Com efeito, temos $\beta = \alpha a$, $\psi(y) = \varphi(x)$ e

$$\Psi_\beta(X_\beta) = \Phi_\alpha \circ L(\alpha) \circ \mathcal{R}(\beta) \circ L(\beta) X_e = \Phi_\alpha(X_\alpha)$$

Para concluir, seja $x \in G_1$, da Observ. 7.2(3), segue que $G_1 x^{-1}$, é variedade integral de X passando por e, donde $x^{-1} \in G_1 x^{-1} \subset G_1$; similarmente, dado $y \in G_1$, como $y^{-1} \in G_1$, resulta que $G_1 y$ também é variedade integral de X passando pela identidade, conseqüentemente $xy \in G_1 y \subset G_1$ ∎

7.9 *Definição:* Um subgrupo de Lie, G_1, do grupo de Lie G diz-se um subgrupo de Lie forte se G admitir uma TG_1-carta contendo e.

Do mencionado na Prop. 5.4 é claro que, no contexto dos espaços de Banach, todo subgrupo de Lie e um subgrupo de Lie forte.

§8 Algebras de Lie

8.1 Definição: Dado o grupo de Lie G, $\xi \in V(G)$ diz-se ℓ-invariante se ξ é τ_x-relacionado com ele mesmo, para todo $x \in G$.
$\ell V(M)$ indicará o conjunto dos campos de vetores ℓ-invariantes de G.

8.2 Proposição: $\xi, \eta \in \ell V(G) \Longrightarrow [\xi, \eta] \in \ell V(G)$

Demonstração: É conseqüência imediata da Prop. 6.6.

8.3 Proposição: $\ell V(G) = \{L_v / \ v \in T_e G\}$, onde G é grupo de Lie e

$$L_v : x \in G \longmapsto L(x)v \in T_x G$$

Demonstração: Para ver que L_v é um campo de vetores devemos mostrar que, dada uma carta $(\mathcal{V}, \psi)$ de G, $(L_v)_\psi$ é um $\mathcal{C}$-morfismo. Mas, do mencionado na Observ. 7.2(2), bastará considerar $\mathcal{V} = \tau_w(\mathcal{U})$ e $\psi = \varphi \circ \tau_w^{-1}$, onde $(\mathcal{U}, \varphi)$ é uma carta de $e \in G$ e $w \in G$.

Feito isto, seja $t \in \psi(\mathcal{V})$ e ponhamos $y = \psi^{-1}(t)$, $x = \varphi^{-1}(t) \wedge h = \Phi_e v$ resulta, usando a Σ da Obsv. 7.5 e o fato que $y = xw$,

$$(L_v)_\psi(t) = (\Psi_y \circ L(y))v = (\Psi_y \circ T_e \tau_y \circ \Phi_e^{-1})h = (\Phi_x \circ \Sigma_x)h.$$

De outro lado, a equação de Lie (7.2) garante a ℓ-invariança de L_v.
Finalmente, dado $\xi \in \ell V(G)$, como este campo de vetores e τ_x-relacionado com ele mesmo, temos

$$\xi(x) = \xi(\tau_x(e)) = T_e \tau_x \cdot \xi(e) = L(x) \cdot \xi(e) \ \blacksquare$$

8.4 Observações:

(1) Dados $u, v \in T_e G$ existe um único vetor $[u,v] \in T_e G$, chamado colchete de Lie de u e v, tal que $[L_u, L_v] = L_{[u,v]}$, mais precisamente $[u,v] = [L_u, L_v](e)$.

(2) Nas condições acima é facil ver que $T_e G$ admite uma estrutura de de algebra de Lie.

8.5 Definição: Dado um grupo de Lie G, o espaço $T_e G$, munido da estrutura de algebra acima, diz-se a algebra de Lie de G.

8.6 Proposição: Se G e $\hat{G}$ sao grupos de Lie e $f: G \longrightarrow \hat{G}$ um homomorfismo de grupos de Lie, isto é, um $\mathscr{C}$Var-morfismo que é homomorfismo de grupos, então

(1) $T_e f : T_e G \longrightarrow T_{\hat{e}} \hat{G}$ é um homomorfismo de algebras de Lie.

(2) $Im(T_e f)$ é subalgebra de Lie de $T_{\hat{e}} \hat{G}$.

Demonstração: Dado $y \in G$, da hipótese temos $f \circ \tau_y = \tau_{f(x)} \circ f$

Calculando a aplicação tangente em e, usando a regra da cadeia, dá

$$T_y f \circ L(y) = \hat{L}(f(y)) \circ T_e f$$

aplicando em $v \in T_e G$ e escrevendo $\hat{v} = T_e f \cdot v \in T_{\hat{e}} \hat{G}$, temos

$$T_y f \cdot L_v(y) = \hat{L}_{\hat{v}}(f(y))$$

mas isto quer dizer que L_v e $\hat{L}_{\hat{v}}$ são f-relacionados para todo v de $T_e G$, conseqüentemente $[L_u, L_v]$ e $[\hat{L}_{\hat{u}}, \hat{L}_{\hat{v}}]$ são f-relacionados i. e.

$$T_y f \cdot L_{[u,v]}(y) = \hat{L}_{[\hat{u},\hat{v}]}(f(y))$$

finalmente, fazendo $y = e$, temos

$$T_e f \cdot [u,v] = [T_e f \cdot u, T_e f \cdot v]$$

donde o resultado segue ∎

8.7 Definição: Seja G um grupo de Lie. Uma subalgebra de Lie, $H \subset T_e G$, diz-se uma subalgebra de Lie forte de G se o fibrado $\bigcup_{x \in G} L(x) H$, munido da estrutura induzida pelas cartas dadas na Prop. 7.4, é um subfibrado integravel de G.

8.8 Teorema: Dado um grupo de Lie, existe uma correspondencia bijetora entre seus subgrupos de Lie forte e conexos e suas subalgebras de Lie fortes.

Demonstração: Segue das Definções 7.9 e 8.7 e das Proposições 7.6 e 8.6.

No seguinte parágrafo veremos um caso particular importante e daremos uma condição suficiente para que uma subalgebra de Lie seja uma subalgebra de Lie forte. Veremos também que as subalgebras de Lie de dimensão finita satisfazem esta condição.

§9 O Grupo de Lie $Gh(n,\mathbb{C})$

Indicaremos com $gh(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)$ o espaço vetorial complexo dos germes de aplicações holomorfas definidas em vizinhanças da origem de $\mathbb{C}^n$, com valores em C^m, e que se anulam na origem.

Usaremos a mesma notação para indicar um germe ou seus representantes.

Vamos considerar as seguintes notações, maiores detalhes sobre o mencionado aqui podem ser encontrados na referência /6/

$|\ |$: A norma sup do $\mathbb{C}^n$.

$D(t,r)$: O disco aberto de centro $t\in\mathbb{C}^n$ e raio $r>0$.

$\|\ \|$: A norma sup das matrices $n\times n$.

X : O espaço $gh(n,\mathbb{C})\equiv gh(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$.

$J(x)$: O Jacobiano de $x\in X$.

$J(x)(t)$ indicará o valor deste Jacobiano no ponto $t\in\mathbb{C}^n$

G : O subconjunto $Gh(n,C)=\{x\in X\ /\ J(x)(0)\neq 0\}$ de X.

Os elementos de G são os germes inversiveis de X e formam um grupo com a operação de composição usual.

X_s : O espaço de Banach (com norma $|\ |_s$) dos $x\in X$ tais que

$$|x|_s=\sup_{|t|<s}|x(t)|<+\infty \quad , \quad s>0$$

Y_s : O espaço de Banach (com norma $\|\ \|_s$) dos $y\in X$ tais que

$$\|y\|_s=\sup_{|t|<s}\|J(y)(t)\|<+\infty \quad , \quad s>0$$

B_s : A bola aberta em Y_s de centro $e\in G$ e raio $R>0$

9.1 Observações: Na referência /6/ se mostra que:

(1) Valem as seguintes desigualdades

$$|x|_s\leq s\|x\|_s \quad , \quad \|y\|_{s'}\leq\frac{n}{s-s'}|y|_s \quad ; \quad 0<s'<s \tag{9.1}$$

$$\text{e} \qquad |J(y)\cdot x|_s\leq n\|y\|_s|x|_s \tag{9.2}$$

(2) $X=\bigcup\limits_{0<s<1}X_s=\bigcup\limits_{0<s<1}Y_s$ e as topologías localmente convexas, limite in-

dutivo das famílias $\{X_s\}$ e $\{Y_s\}$ são a mesma. Mais ainda, X, munido desta topologia, é um espaço de Silva.

(3) G é aberto em X e um grupo de Lie com algebra de Lie X e com transformação infinitesimal $L(x) = J(x)$

9.2 Teorema: Uma subalgebra de Lie, H, de X é uma subalgebra de Lie forte de G se existir uma projeção linear $p : X \longrightarrow H$ e uma constante $K > 0$ tal que

$$|p(x)|_s \leq K|x|_s \quad , \quad 0 < s < 1 \tag{9.3}$$

Demonstração; É claro que $\mathcal{H} = \bigcup_{x \in G} J(x)H$ resulta um subfibrado tangente de G. O teorema seguirá da Prop. 7.8 se mostrarmos que $(\mathcal{U}, I_G)$, onde $\mathcal{U} = \bigcup_s B_s$ com $R > 0$ apropriado, é uma $\mathcal{H}$-carta de $e \in G$. Para ver isto último usaremos o Corol. 5.8.

Por construção e daquilo mencionado logo antes da Prop. 7.4, para verificar (1) desse corolário, devemos provar (5.3) e (5.4), i.e.,

$$p \circ J(x)|_H : H \longrightarrow H \quad \text{é um } \mathcal{GL}(H)\text{-morfismo}, \quad \forall\, x \in \mathcal{U} \tag{9.4}$$

e

$$\lambda : (y,h) \in \mathcal{U} \times H \longrightarrow [p \circ J(y)|_H]^{-1} \cdot h \in H \quad \text{é } LF\text{-analítica} \tag{9.5}$$

Para tanto vamos considerar a aplicação linear

$$g : x \in X \longrightarrow p \circ J(x)|_H \in L(H)$$

De (9.3) e (9.2) temos

$$|g(x) \cdot h|_s \leq n K \|x\|_s |h|_s \quad , \quad \forall\; x \in Y_s \wedge h \in H_s \equiv H \cap X_s \tag{9.6}$$

donde $g(x) H_s \subset H_s$, para todo $x \in Y_s$.

Seja agora $g_s : x \in Y_s \longmapsto g(x)|_{H_s} \in L(H_s)$

resulta que $g_s \in L(Y_s, L(H_s))$

A seguir fixemos $0 < \rho < 1$ e consideremos $R = \frac{\rho}{nK}$. De (9.6) e da linearidade de g segue que

$$|[g_s(x) - g_s(e)] \cdot h|_s \leq \rho |h|_s \qquad \forall\; x \in B_s \wedge h \in H_s$$

disto, de $g_s(e) = 1_{H_s}$ e do Teorema 4.1D do Taylor /9/ , resulta

$$g_s(x) \in GL(H_s) \quad \text{e} \quad |g_s(x)^{-1}.h|_s \leq \frac{1}{1-\rho}|h|_s \quad \forall x \in B_s \qquad (9.7)$$

donde segue (9.4) como primeira consequencia.

De outro lado, continuando, vemos que, para cada $x \in \mathcal{U}$ fixado, $h \in H \longmapsto \lambda(x,h) \in X$ é linear e contínua, donde LF-analítica.

Portanto, do Teorema de Hartogs (/1/,/6/), para ter (9.5) bastará provar que, para cada $h \in H$ fixado,

$$u : x \in \mathcal{U} \longmapsto \lambda(x,h) \in X \quad \text{e LF-analítica}$$

ou seja, da propria definição de LF-analiticidade, devemos ver que

$$f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{U} \ \text{analítica} \Longrightarrow u \circ f : \mathcal{D}_f \longrightarrow X \ \text{analítica}$$

Ora, X sendo um espaço de Silva , f é analítica se e só se dado t em $\mathcal{D}_f$ existem $0 < s < 1$ e $D \equiv D(t,r) \subset \mathcal{D}_f$ tal que a função $f : D \longrightarrow Y_s$ é analítica

Alem disso, do feito acima, temos que as aplicações

$$x \in B_s \longrightarrow u(x) \in H_s \quad , \quad 0 < s < 1 \qquad \text{são}$$

LF-analíticas como compostas das aplicações LF-analíticas

$$x \in B_s \longmapsto g_s(x) \in GL(H_s) \longmapsto (g_s(x))^{-1} \in GL(H_s) \longmapsto (g_s(x))^{-1}.h \in H_s$$

Resulta então que: Dado $t \in \mathcal{D}_f$ existem $0 < s < 1$ e D tal que

$$u \circ f : D \longrightarrow H_s \quad \text{e analítica}$$

mas isto completa (9.5) visto que H também é um espaço de Silva.

Finalmente (2) do Corol. 5.8 segue do chamado Teorema de Frobenius local em escalas de Banach dado em /8/ e /4/ se alem de (9.4) e (9.5) demonstrarmos (lembrar (5.5))

$$\|J(x) \circ [p \circ J(x)]^{-1}.k\|_{s'} \leq C \frac{s}{s-s'}\|k\|_s \quad ; \quad x \in B_s \ , \ k \in Y_s \cap H \ , \ s' < s$$

Com efeito, de (9.1), (9.2) e (9.7) resulta

$$\|J(x) \circ [p \circ J(x)]^{-1}.k\|_{s'} \leq \frac{n}{s-s'}|J(x) \circ [p \circ J(x)]^{-1}|_s \leq \frac{n}{s-s'}\|x\|_s |[p \circ J(x)]^{-1}.k|_s \leq$$

$$\leq \frac{nR}{1-\rho} \cdot \frac{s}{s-s'}\|k\|_s \quad \blacksquare$$

9.3 Observação: A exigência das desigualdades (9.3) não é artificial. Isto pode ser apreciado lembrando que o Lang /2/ define subalgebras de Lie, de um grupo de Lie G, como aquelas subalgebras de Lie de T_eG que admitem suplementar topologico, i. e., satisfazem uma desigualdade do tipo (9.3).

Neste caso a parte (2) do Corol. (5.8) segue do Teorema de Frobenius em espaços de Banach.

A seguir, no Teorema 9.7, veremos que toda subalgebra de Lie de dimensão finita de T_eG, é subalgebra de Lie forte de G.

Escreveremos $Z = gh(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ e vamos considerar o espaço de Silva $Z = \bigcup_s Z_s$, similarmente a como foi considerado $X = \bigcup_s X_s$

Lembre-se que dado $v \in Z$ temos, com $0 < \mu < 1$ fixado,

$$v(t) = \sum_{\alpha \neq 0} a_\alpha(v)\, t^\alpha \quad , \quad t \in P_{\mu s}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ indica um multi-indice e P_r um polidisco simétrico de raios $r > 0$ e centrado na origem.

Nestas circunstâncias a desigualdade de Cauchy garante

$$|a_\alpha(v)| \leq \frac{|v|_s}{(\mu s)^{|\alpha|}} \tag{9.8}$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ indica o comprimento do multi-indice α.

Ordenando os multi-indices pelo seu comprimento, se tiverem comprimentos diferentes, ou lexicograficamente se seus comprimentos forem iguais, indicaremos com α_v ao menor multi-indice α tal que $a_\alpha(v) \neq 0$ e escreveremos $k_v = |\alpha_v|$

9.4 Lema de Schwarz em Z

$$u \in Z \implies |u(t)| \leq \frac{|u|_R}{R^{k_u}} |t|^{k_u} \quad , \quad t \in D(0,R) \tag{9.9}$$

Demonstração: Fixemos $t \in D(0,R) \setminus \{0\}$, ponhamos $r = \frac{R}{|t|} > 1$ e consideremos a função analítica (de variavel complexa)

$$f : s \in D(0,r) \longmapsto u(st) \in \mathbb{C}$$

Obviamente $|f(s)| \leq |u|_R$ e $f(0)=0$, *um zero de ordem* $k \geq k_u$

Do lema de Schwarz em $\mathbb{C}$ *temos*

$$|f(s)| \leq \frac{|u|_R}{r^k}|s|^k \leq \frac{|u|_R}{r^{k_u}}|s|^k$$

donde (9.9) *segue fazendo* $s=1$ ∎

9.5 *Lema: Se* $u \in Z_1 \setminus \{0\}$ *com* $a_{\alpha_u}(u)=1$, *então existe*

$$p : Z \longrightarrow [u] = \{\lambda u \,/\, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

uma projeção linear satisfazendo (9.3).

Demonstração: Definir $p(v) = a_{\alpha_u}(v)u$ *e ver que, de* (9.8) *e* (9.9),

$$v \in Z_s \Longrightarrow |p(v)| \leq \frac{|u|_1}{\mu^{k_u}}|v|_s$$ ∎

9.6 *Lema: Se* H *é um subespaço de* Z_1 *de dimensão* n , *então existe uma base* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *de* H *tal que*

$$a_{\alpha_i}(u_j) = \delta_{ij} \tag{9.10}$$

onde $\alpha_i = \alpha_{u_i}$.

Demonstração: Como o Lema 9.5 *garante o caso* $n=1$, *procederemos indutivamente. Com efeito, seja* $\dim H = l+1$ *e fixemos* $v \in H \setminus \{0\}$ *com* $\alpha \equiv \alpha_v \geq \alpha_u$ *para todo* $u \in H$.

Seja p *a projeção associada a* v , *segundo o Lema* 9.5, *e indiquemos com* $\{u_1, \ldots, u_l\}$ *a base do* $Ker(p|_H)$ *obtida aplicando a hipotese indutiva. Obviamente podemos supor* $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_l$.

Da forma como temos considerado v *segue que* $a_\alpha(u_i)=0$ *para todo* $i=1, \ldots, l$, *donde* $\alpha < \alpha_1$

Finalmente, o resultado desejado segue se considerarmos

$$u_{l+1} = v \quad \text{se} \quad a_{\alpha_j}(v) = 0 \quad \forall \; j=1,\ldots,l$$

ou

$$u_{l+1} = v - \sum_1^l a_{\alpha_j}(v)u_j \quad \text{no caso contrario}$$ ∎

9.7 *Teorema: Se* H *é subalgebra de Lie de dimensão* n *de* X *então* H *é subalgebra de Lie forte de* G.

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor $H \subset X_1$.
Faremos a demonstração usando o Teorema 9.2. Para tanto observemos que podemos identificar, da maneira obvia, X com Z^n.
Seja entao H_j o subespaço de Z formado pelas j-ésimas componentes dos elementos de H.
Seja $\{u_{1j}, \ldots, u_{nj}\}$ a base de H_j garantida pelo Lema 9.6 e seja p_{ij} a projeção associada a u_{ij} dada no Lema 9.5.
Defina-se $p_j \equiv \sum_i p_{ij} : Z \longrightarrow H_j$ que resulta uma projeção satisfazendo (9.3).
Finalmente, é facil ver que $p(x) = (p_j(x_j))$ é a projeçao buscada ▯

§10 Comentarios Finais

Seja G um grupo de Lie. Vamos considerar T_eG munido da estrutura topológica induzida pelas cartas vetoriais de TG.

Vamos chamar grupo linear a um parámetro de T_eG a os grupos

$$t \in \mathbb{K} \longmapsto tv \in [v]$$

onde $\mathbb{K}$ é o conjunto dos escalares e $[v]$ o subespaço gerado por $v \in T_eG$.

Suponhamos agora que a carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de G, considerada na Observaçao 7.3, toma valores em T_eG. Suponhamos ainda que φ^{-1} leva grupos lineares locais de T_eG em grupos locais a um parametro de G, então se cumple

$$\Phi_x^{-1} \cdot v = L(x) \cdot \Phi_e^{-1} \cdot v \quad ; \quad v \in T_eG \, , \; x \in \mathcal{U} \cap \varphi^{-1}([v]) \qquad (10.0)$$

Com efeito, de um lado sabemos que se $g(t)$ é um grupo a um parámetro em G então

$$T_t g = L(g(t)) \cdot T_0 g \qquad (10.1)$$

t numa vizinhança do zero de $\mathbb{K}$.
De outro lado, como neste caso $g(t) = \varphi^{-1}(tv)$ com $v \in T_eG$, temos

$$T_t\, g = \Phi_{g(t)}^{-1}.v \tag{10.2}$$

donde, em particular, $T_0\, g = \Phi_e^{-1}.v$ pois $g(0) = e$

Disto, (10.1) e (10.2) segue o resultado desejado.

Pode-se dizer então que uma carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de G do tipo mencionado acima e satisfazendo $\Phi_e = 1_{T_eG}$, a identidade de T_eG, tem a $\mathcal{L}$, a inversa da transformação infinitesimal L, como sua carta vetorial associada.

Ora, em dimensão finita a função exponencial dá origem a uma carta do tipo indicado acima, mais precisamente $\varphi^{-1} = \exp$

Observe-se que neste caso (10.0) se escreve

$$T_x \exp.v = L(x).v \quad ; \quad v \in T_eG \ , \quad x \in \mathcal{U} \cap \varphi^{-1}([v]) \qquad \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA

/1/ Costa, I. M. da : "A LF-analiticidade em espaços localmente convexos", Tese de Mestrado, ICMSC-USP, 1978.

/2/ Lang, S. : "Differential Manifolds", Add. Wesley, 1972.

/3/ Pisanelli, D. : "Applications analytiques en dimension infinie" Bull. des Sc. Math.-2^{me} serie-96-pg. 181, 1972.

/4/ "Théorèmes d'Ovcyannicov, Frobenius, d'inversion et groupes de Lie locaux dans une échelle d'espaces de Banach", C. R. Acad. Sc. Paris - t. 277 - pg. 943, Nov. 1973.

/5/ "An extension of the exponential of a matrix and a counter example to the inversion theorem of a holomorphic mapping in a space H(K)", Rendiconti Mat. - (3) - Vol. 9 - Ser. VI, pg. 465, 1976.

/6/ "Grupos analiticos finitos de transformações", Escola de Analise 1977, IME-USP, 1977

/7/ "An example of a infinite Lie group", Proc. of Am. Math. Soc. - Vol. 62 - Nº 1, pg. 156, 1977.

/8/ Salvitti, R. : "Teorema de Frobenius - Formulação global, aplicações a grupos de Lie", Tese Doutor, IME-USP, 1980

/9/ Taylor, A. : "Introduction to Functional Analysis", J. W. & S., 1958.

/10/ Vaisman, I. : "Cohomology and Differential Forms", Marcel Dekker, 1973.