TOSHIO HATTORI

SÔBRE EQUAÇÕES FUNCIONAIS NÃO-LINEARES EM ESPAÇOS DE BANACH

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para obtenção do grau de Doutor em Ciências (Matemática).

- 1971 -

A G R A D E C I M E N T O S

Expressamos os nossos profundos agradecimentos ao Prof. Chaim Samuel Hönig que permitiu a realização do presente trabalho através de uma orientação atuante nas discussões, nas críticas e nas sugestões. Foi-nos de grande valia o constante encorajamento e o muito apôio que dêle recebemos.

Ressaltamos ainda o muito que aprendemos com o Prof. Chaim que com denodo e sacrifício pessoal durante muito tempo manteve conosco seminários avançados dos quais se originaram muitas das idéias constantes dêste trabalho.

Agradecemos à Profª Ofélia T. Alas , que leu o manuscrito com muita dedicação fazendo-nos inúmeras observações e sugestões permitindo corrigíssemos algumas falhas nêle existentes.

Ao Prof. Leo Huet Amaral, Chefe do Departamento de Matemática do ITA, agradecemos pelo constante apôio, estímulo e confiança que dêle recebemos.

Agradecemos ao Prof. F.A.Lacaz Netto, Magnífico Reitor do ITA, pelo apôio e prestígio que sempre nos proporcionou.

Ficamos gratos à C.A.P.E.S. e C.N.Pq. que através de bôlsa de Pós-Graduação nos possibilitaram aperfeiçoamento no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Queremos deixar assinalados os nossos agradecimentos aos colegas do Departamento de Matemática do ITA e a todos aquêles que contribuiram direta ou indiretamente para elaboração do presente trabalho.

Estendemos os nossos agradecimentos à Sra. Isabel C. Ferraz que com grande zêlo realizou o excelente trabalho de datilografia.

Toshio Hattori

À Maria, minha espôsa,
e a meus filhos
Márcio, Haroldo e Miriam.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho aborda alguns aspectos da teoria de equações funcionais não lineares envolvendo operadores monótonos num espaço de Banach. A teoria de operadores monótonos, históricamente, tem sua gênese em alguns resultados especiais obtidos por Vainberg num trabalho sôbre operadores tipo gradiente, publicado por volta de 1950; tais resultados foram apresentados no contexto da teoria de métodos variacionais para o estudo de operadores não lineares.

Kacurovskii, investigando os resultados obtidos por Vainberg, deu definição explícita de operador monótono definido num espaço de Banach com valôres no seu dual, e obteve algumas propriedades simples dêste operador. Esta teoria assumiu sua grande importância quando Vainberg anunciou numa nota o teorema de ponto fixo para operador monótono satisfazendo uma condição de Lipschitz num espaço de Hilbert. O primeiro passo importante e crucial no desenvolvimento da teoria de operadores monótonos foi dado, entretanto, por Minty que estendeu o teorema de Zarantonello - Vainberg para operador não linear contínuo em 1962, explorando hàbilmente uma relação de monotonicidade induzida no espaço $H \times H$ pelo produto interno do espaço de Hilbert. Iniciou-se assim uma nova teoria que constitui um dos tópicos mais importantes na teoria de análise funcional não linear.

Browder provou posteriormente o teorema de Minty sob as hipóteses mais fracas de monotonicidade e de continuidade impostas ao operador T; prosseguindo intensa investigação sôbre a teoria de operadores monótonos, enfraquecendo cada vez mais as hipóteses assumidas, obteve os resultados mais gerais. Procurando aplicar sua teoria à resolução do problema de equações diferenciais parciais, conseguiu êle sucessivas generalizações da mesma aumentando-lhe o campo de aplicabilidade.

Além dos autores acima citados, contribuiram ainda para o desenvolvimento desta teoria, Brezis, Figueiredo, Granas, Hartman, Petryshyn, Stampacchia, Lions, Strauss e muitos outros.

O fator dominante na investigação foi a aplicabilidade da teoria à resolução de problemas tais como: problemas de valor contôrno do

tipo elítico ou parabólico, problemas de equações funcionais não lineares, problemas de equações integrais, etc.

Sob o ponto de vista construtivo, Petryshyn deu grande contribuição ao problema construtivo da existência de soluções da equação funcional não linear $Tx = f$, no âmbito da teoria geral de operadores P-compactos, culminando com o desenvolvimento da teoria de métodos projecionais que são PS-solubilidade e PF-solubilidade. Uma significativa generalização desta teoria foi feita por êle em recentes pesquisas.

Após esta breve nota histórica da teoria de equações funcionais não lineares, apresentaremos sucintamente o conteúdo do nosso trabalho, tendo em vista que explanações mais completas são dadas na introdução de cada capítulo. No Capítulo I, iniciamos com alguns conceitos fundamentais e definições que se encontram em análise funcional que julgamos indispensáveis para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Nêle são dadas as definições de espaços estritamente convexos e uniformemente convexos e suas propriedades fundamentais, bem como uma breve noção de topologia fraca e de espaço reflexivo. O Capítulo II considera o problema da existência de solução da equação do tipo $Tx = Sx$ que foi inspirado no trabalho de Petryshyn. Dadas as muitas generalizações verificadas nos últimos tempos na teoria de operadores monótonos por Browder, Brezis e Sibony, mostramos, mediante a conjugação adequada da teoria dos princípios de ponto fixo, de um lado, e da teoria de operadores monótonos, de outro, a existência de solução da equação $Tx = Sx$. Além do mais, sob hipótese adicional imposta a T, obtivemos mais resultados sôbre a existência de solução daquela equação.

O Capítulo III é devotado à extensão dos resultados obtidos no capítulo precedente; nêle são considerados os dois tipos de operadores, semicontrativos e fracamente semicontrativos. As duas classes dêstes operadores, que constituem as classes de operadores mais gerais que a de operadores compactos, foram introduzidas por Browder que mostrou os teoremas de existência de pontos fixos dêstes operadores num espaço de Banach uniformemente convexo. Êstes teoremas de ponto fixo e os teoremas fundamentais de operadores monótonos num espaço de Hilbert conduziram-nos a resultados mais gerais concernentes à equação $Tx = Fx$. Ao tentar estender êstes resul

tados ao âmbito de espaço de Banach, fomos forçados a definir os dois novos tipos de operadores, a saber: Operadores semilipschitzianos e fracamente semilipschitzianos.

A introdução dêstes operadores nos permitiu estender e fortalecer os resultados sôbre a existência de solução da equação $Tx = Fx$, num espaço de Banach uniformemente convexo.

No Capítulo IV tratamos do problema do método de super regularização elítica com respeito a operadores semimonótonos e pseudomonótonos. O método de super regularização elítica foi introduzido por Browder e B.Ton numa tentativa de englobar os diversos métodos de aproximação do tipo Galerkin e o método de regularização elítica. Explorando sistemàticamente as técnicas desenvolvidas, provamos então que, sob certas hipóteses, uma solução v da equação $Tv = w$ é obtida como limite fraco de uma certa sequência $\{Qu_\varepsilon\}$ em X, onde T é um operador semimonótono ou pseudomonótono. O problema da obtenção de uma solução v da equação $Tv = w$ em X como limite forte da equação aproximante é também discutido. (Para maior detalhe sôbre êste método, ver a introdução do capítulo IV).

No Capítulo V, dedicamo-nos ao problema de desigualdades variacionais não lineares envolvendo operador pseudomonótono. Tratamos nêle ainda do problema de aproximação das soluções daquelas desigualdades. Um dos nossos objetivos neste capítulo consiste na extensão de alguns resultados sôbre desigualdades, obtidos por Browder para operador monótono hemicontínuo. Por outro lado, dirigimos os nossos esforços no sentido de obter algum resultado sôbre a aproximação de solução da desigualdade variacional não linear, que nos conduziram a um resultado desejado.

O Capítulo VI é devotado ao teorema de Leray - Schauder para G - operador. G - operador foi introduzido e investigado por D.G.de Figueiredo que mostrou o teorema de existência de ponto fixo dêste operador. Devido a êste teorema, obtivemos o teorema de Leray - Schauder para G - operador, e algumas consequências e aplicações.

Quanto a aplicações desta teoria de equações funcionais não lineares em um espaço de Banach (particularmente, espaços L^p, espaços de Sobolev, etc.) à resolução de equações diferenciais parciais, recomendamos ao leitor o Capítulo II de | 26 | e o Capítulo IV de | 16 |.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Êste capítulo introdutório contém alguns conceitos e teoremas de análise funcional indispensáveis, a nosso ver, para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Focalizamos a nossa atenção especial em tôrno das propriedades da compacidade dos conjuntos convexos fechados num espaço de Banach reflexivo e das propriedades geométricas de um espaço uniformemente convexo.

Ao lado dêstes, são postos em evidência algumas propriedades fundamentais de uma sequência limitada num espaço de Banach reflexivo e destacados certos resultados importantes concernentes aos espaços de dimensão finita. Os resultados fundamentais, que são bem conhecidos, serão, apenas, enunciados sem demonstrações, pois, são encontrados fàcilmente em ótimos livros de análise funcional. Os resultados importantes que poderão ser encontrados sòmente em alguns livros avançados ou em revistas matemáticas especializadas estão devidamente indicados na bibliografia.

1.1. Convexidade.

Seja X um espaço vetorial real. O segmento de reta que une dois pontos x e y em X é o conjunto de todos os pontos da forma $tx + sy$ com t e s os números reais não negativos tais que $t + s = 1$, ou equivalentemente, o conjunto de todos os pontos $tx + (1 - t)y$ com t real satisfazendo $0 \leq t \leq 1$.

Um subconjunto C de X é convexo se, sempre que x e y pertencem a C, o segmento de reta que une x e y está contido em C. Um conjunto unitário, uma subvariedade linear, um segmento de reta são exemplos de conjuntos convexos. Obviamente, um subespaço vetorial é convexo; uma combinação linear finita de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Como X é convexo, se C é um subconjunto de X, a família de todos os subconjuntos convexos que contêm C é não vazia. A intersecção dos membros

desta família é o menor conjunto convexo que contém C e é denominada envoltória convexa de C.

1.2. Espaços de Banach estritamente convexo e uniformemente convexo.

Um espaço de Banach X é estritamente convexo, se dado um par de vetores x e y em X satisfazendo $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ *tem-se* $x = ky$ *ou* $y = kx$, $k > 0$. *Equivalentemente, X é estritamente convexo se quaisquer que sejam x e y em X com* $||x|| = ||y|| = 1$, $x \neq y$, *tem-se*

$$||tx + (1 - t)y|| < 1, \text{ para } 0 < t < 1.$$

Em outras palavras, X é estritamente convexo, se quaisquer que sejam dois pontos distintos x e y sôbre a esfera unitária com centro na origem, por mais próximos que êles estejam um do outro, o ponto médio do segmento que une x e y não pertence à esfera.

Um espaço de Banach X é uniformemente convexo se para cada $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que para todo x e y em X com*

$$||x|| = ||y|| = 1 \qquad e \qquad ||x - y|| > \varepsilon$$

tem-se:

$$\left|\left|\frac{x + y}{2}\right|\right| < 1 - \delta\ (\varepsilon).$$

Clarkson provou que todo espaço de Banach uniformemente convexo é estritamente convexo.

Como um exemplo de espaço uniformemente convexo temos: todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo. É um resultado bem conhecido o fato de que para $1 < p < \infty$ *os espaços* l^p *de tôdas sequências de números reais (ou complexos)* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ *tais que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty$$

são uniformemente convexos. Clarkson |27| .

Do mesmo modo, para $1 < p < \infty$, os espaços $L^p(K)$ de tôdas as funções Lebesgue mensuráveis, definidas μ - quase tôda parte em K, tais que

$$\int_K |f|^p \, d\mu < \infty$$

são uniformemente convexos. Clarkson |27| . Decorre disto que o espaço de Sobolev $H^{m,p}(G)$, G um aberto de R^n, munido da norma

$$||u|| = \left(\sum_{|j| \leq m} \int_G |D^j u|^p dx \right)^{1/p}$$

é uniformemente convexo.

Os espaços l^1, l^∞, c_0 e $L^1(K)$ bem como o espaço $C(K)$ de tôdas as funções contínuas definidas em K com a norma da convergência uniforme não são uniformemente convexos. Mais detalhes sôbre as propriedades do espaço uniformemente convexo, o leitor poderá encontrá-los em Clarkson |27| e Opial |40| .

Obs.: c_0 é o espaço de tôdas as sequências (c_n) em l^∞ tais que $c_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

1.3. Espaços duais e topologia fraca.

Ao lado da topologia métrica, induzida pela norma num espaço de Banach X, chamada topologia forte de X, destaca-se uma outra topologia em X, chamada a topologia fraca de X, que é muito importante em nosso trabalho.

Seja X um espaço de Banach. Denotemos por X' o seu espaço dual, i.é, o espaço vetorial de todos os funcionais lineares contínuos definidos em X. Se f é um elemento de X', denotemos por (f,x) o valor que f assume em x para um elemento x em X. O espaço vetorial X' munido com a norma usual

$$||f|| = \sup \{ |(f,x)| \; ; \; ||x|| < 1 \}$$

é um espaço de Banach.

Por meio do espaço X', podemos introduzir a topologia fraca em X como segue: dados $\varepsilon > 0$ e um número finito de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de X', consideremos

$$W_\varepsilon(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \{x \varepsilon X;\ |(f_k, x)| < \varepsilon\ ,\ k = 1, \ldots n\}.$$

Verifica-se fàcilmente que a família β *de todos os conjuntos* $W_\varepsilon(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, *define uma base de vizinhanças de zero no espaço vetorial X, quando* $(f_1, \ldots, f_n)$ *varia sôbre a família de todos os subconjuntos finitos de X' e* ε *sôbre o conjunto dos números reais estritamente positivos.*

A topologia definida pela base β *de vizinhanças de zero em X é chamada a topologia fraca de X, e é usualmente denotada por* $\sigma(X,X')$.

Sabe-se que a topologia fraca de X é a topologia menos fina de X tal que cada funcional f em X' é contínuo. É claro que a topologia fraca é menos fina que a topologia forte de X. Uma sequência $\{x_n\}$ *de elementos de X converge fracamente para* x_o *em X se e somente se*

$$(f, x_n) \to (f, x_o)$$

para cada f em X', e denotamo-la por $x_n \rightharpoonup x_o$.

<u>*Teorema 1.1.*</u> *Tôda sequência (fortemente) convergente é fracamente convergente. Tôda sequência fracamente convergente é limitada.*

<u>*Teorema 1.2.*</u> *Se X é de dimensão finita, a convergência forte é equivalente a convergência fraca.*

O espaço X munido da topologia fraca é um espaço vetorial localmente convexo. Um subconjunto de X é dito fracamente fechado (resp, fracamente compacto, fracamente aberto, fracamente limitado, etc.) se êle é fechado (resp. compacto, aberto, limitado, etc.) com respeito à topologia fraca de X. Observa-se que todo subconjunto fracamente fechado é fechado em X mas, a recíproca não é verdadeira.

<u>*Teorema 1.3.*</u> *(Mazur). Todo subconjunto convexo fechado de um espaço de Banach é necessàriamente fracamente fechado.*

<u>*Teorema 1.4.*</u> *Seja C um subconjunto de um espaço de Banach X. Para que C seja limitado (fortemente) é necessário e suficiente que C seja fracamente limitado.*

Cumpre salientar o fato de que se X é um espaço de Hilbert com o produto interno (,), o seu espaço dual X' é identificado por meio dêste produto interno.

Topologia fraca ' de X': No espaço dual X' de um espaço de Banach X, vamos introduzir uma topologia do seguinte modo: dados $\varepsilon > 0$ e um número finito de elementos $x_1, \ldots, x_n$ de X, consideremos a família de conjuntos da forma

$$V'_\varepsilon (x_1, \ldots, x_n) = \{f \in X'; \ |(f,x_k)| < \varepsilon \ , \ k = 1, \ldots n\}$$

Esta família é uma base de vizinhanças de zero em X', que define a topologia chamada a topologia fraca ' de X'. Uma sequência $\{f_n\}$ de X' converge fracamente ' para f_o se e sòmente se

$$(f_n, x) \to (f_o, x)$$

para todo x em X.

1.4. Espaços reflexivos.

Em vista da existência de inúmeras publicações excelentes sôbre análise funcional onde se encontram a definição, as propriedades elementares e os exemplos de espaços reflexivos, omitimos aqui de mencioná-las, restringimo-nos, apenas, a mencionar as suas propriedades fundamentais, sem demonstrá-las. As propriedades fundamentais dos espaços reflexivos são instrumentos indispensáveis no desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

Teorema 1.5. (Mil'man, Pettis). Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.

Teorema 1.6. (Bourbaki). Um espaço de Banach X é reflexivo se e sòmente se sua bola unitária é fracamente compacta.

Teorema 1.7. Todo espaço de Banach de dimensão finita é reflexivo. Todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Teorema 1.8. *(Smulyan, Eberlein). Um espaço de Banach X é reflexivo se e sòmente se tôda sequência limitada de elementos de X contém uma subsequência que é fracamente convergente.*

Como consequência imediata dos teoremas 1.3. e 1.6., temos

Teorema 1.9. *Num espaço de Banach X reflexivo, todo subconjunto convexo fechado e limitado de X é fracamente compacto.*

Há um fato conhecido a observar: é que, em geral, a topologia fraca no espaço dual X' de um espaço de Banach X, é mais fina que a topologia fraca ' em X'. Contudo, se X é reflexivo, estas duas topologias coincidem.

1.5. Espaços vetoriais de dimensão finita.

Nesta secção mencionamos sòmente os teoremas fundamentais sôbre os espaços vetoriais de dimensão finita cujas demonstrações serão omitidas.

Teorema 1.10. *Seja X um espaço vetorial complexo normado de dimensão finita. Então,*

(a) X é isomorfo a C^n, onde n é a dimensão de X.

(b) Todo funcional linear sôbre X é contínuo.

(c) X é um espaço de Banach reflexivo.

(d) O espaço dual X' de X é um espaço de Banach reflexivo de dimensão n.

1.6. Propriedade de intersecção finita.

Uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos tem a propriedade de intersecção finita se e sòmente se a intersecção dos membros de cada subfamília finita de $\mathcal{F}$ é não vazia.

Teorema 1.11. *Um espaço topológico X é compacto se e sòmente se tôda família $\mathcal{F}$ de conjuntos fechados em X que tem a propriedade de intersecção finita tem a intersecção não vazia, i.é,*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \phi$$

CAPÍTULO II

ESTUDO DA EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DO TIPO $Tx = Sx$

2.1. Introdução.

A teoria de pontos fixos de um operador não linear definido num espaço de Banach reflexivo (particularmente, num espaço de Hilbert) recebeu grande impulso nos últimos tempos, tendo em vista sua aplicabilidade flexível não só na teoria da existência de soluções de equações funcionais não lineares num espaço de Banach, como, também, no estudo de problemas de equações diferenciais parciais.

Ao lado do teorema do ponto fixo de Brouwer para o operador contínuo num espaço de dimensão finita, destacam-se os teoremas, agora clássicos, de pontos fixos de Schauder para operadores não lineares compactos, e fracamente contínuos num espaço de Banach reflexivo.

Recentemente, Petryshyn fêz investigação intensiva sôbre a classe de operadores não lineares P-compactos definidos em espaços de Banach com a propriedade (π_c) que inclui, entre outros operadores não lineares, os operadores compactos; e mostrou, então, o teorema de existência de pontos fixos para operador P-compacto sob certa condição imposta sôbre êste operador na fronteira de uma bola fechada, obtendo, daí, como consequência dêste teorema, muitos dos teoremas famosos de pontos fixos conhecidos.

Browder deu enriquecimento maior à teoria de pontos fixos considerando, num espaço de Banach uniformemente convexo, os operadores semicontrativos e fracamente semicontrativos; esta teoria, de um modo geral, tem por finalidade o estudo da equação do tipo acretivo, bem como, a obtenção de soluções periódicas de uma certa equação diferencial.

Por meio da extensão e do uso adequado da teoria de pontos fixos, Kacurovskii, usando um princípio variacional, dedicou-se aos primeiros estudos da existência da equação funcional, não linear, do tipo $Tx = Sx$, onde T é um operador compacto e S é um operador tipo potencial.

Em recentes pesquisas, Petryshyn estendeu os resultados de Kacurovskii generalizando os princípios de pontos fixos de Schauder e Shimbrot e usando vários resultados obtidos por Browder, Minty e outros autores sôbre os operadores de tipo monotônico. Petryshyn provou, assim a existência de solução da equação do tipo $Tx = Sx$, onde o operador S é um dos operadores compactos (completamente contínuo ou fracamente contínuo) e T é operador de X em X', fortemente monótono ou operador satisfazendo k-condição.

A equação funcional não linear do tipo $Tx = Sx$ aparece frequentemente no estudo da teoria das equações diferenciais ordinárias como também das equações diferenciais parciais, o que justifica plenamente o estudo da existência de soluções desta equação.

O nosso objetivo principal neste capítulo é, então, estudar e estender os estudos da existência da solução da equação do tipo $Sx = Tx$ num espaço de Banach reflexivo, considerando uma classe de operadores muito gerais mediante a conjugação adequada da teoria de pontos fixos e da teoria de operadores tipo monotônico, tendo em vista o surto de desenvolvimento verificado na teoria dos operadores monótonos nos últimos tempos.

Veremos então que, sob certas hipóteses, é possível realizar êste estudo graças aos teoremas obtidos recentemente por Brezis e Sibony, que asseguram a bijetividade de um operador tipo monotônico T e uma certa espécie de continuidade do operador T^{-1}.

2.2. Definições e Teorema da existência de solução da equação $Tx = Sx$.

Esta secção começa com algumas definições de operadores não lineares definidos em um espaço de Banach X com valôres em seu espaço dual X'. Os teoremas clássicos de pontos fixos que serão utilizados no decorrer da demonstração do nosso teorema principal são enunciados, sem demonstrações.

Sejam X um espaço de Banach, X' o seu espaço dual; para x em X e w em X', denotemos por $(\quad , \quad)$ a forma bilinear canônica da dualidade entre X e X', i.é, (w,x) indica o valor que o elemento w assume em x.

Diremos que uma aplicação T, definida num subconjunto $D(T)$ de X e tomando seus valôres no espaço dual X', é um operador monótono de X em X' se

$$(Tx - Ty \ , \ x - y) \geq 0$$

para todo x e y em $D(T)$.

Uma aplicação T de X em X' é fracamente contínua se $x_n \rightharpoonup x$ (fracamente) em X implica $Tx_n \rightharpoonup Tx$ (fracamente) em X'. T é demicontínua se $x_n \to x$ (fortemente) em X implica $Tx_n \rightharpoonup Tx$ (fracamente) em X'.

T é hemicontínua se T é contínuo de cada segmento de reta em X, com topologia forte, e com valor em X', com topologia fraca.

T é uma aplicação compacta se T é contínua e leva um conjunto limitado de X num conjunto relativamente compacto de X'.

T é completamente contínua se $x_n \rightharpoonup x$ em X implica $Tx_n \to Tx$ em X'.

Vamos enunciar agora alguns teoremas clássicos importantes que serão utilizados em nosso trabalho subsequente.

Cumpre observar que, se X é uniformemente convexo, logo, estritamente convexo, e se S é um subconjunto convexo não vazio de uma <u>esfera</u> de raio r, o conjunto S se reduz a um único ponto, i.é, S é o conjunto unitário.

<u>Teorema 2.1.</u> (Schauder). Seja X um espaço de Banach reflexivo, e seja B_r uma bola fechada de raio r em X. Se T é um operador compacto de B_r em B_r, então, T tem um ponto fixo em B_r.

<u>Teorema 2.2.</u> (Schauder). Sejam X um espaço de Banach reflexivo, B_r uma bola fechada de raio r em X. Se T é um operador fracamente contínuo de B_r em B_r, então, T tem um ponto fixo em B_r.

<u>Teorema 2.3.</u> (Rothe). Se T é um operador compacto de B_r em X tal que $T(\partial B_r) \subset B_r$, então, T tem um ponto fixo em B_r.

Um operador T de X em X' é dito <u>coercivo</u> se $\dfrac{(Tx\ ,\ x)}{\|\ x\ \|} \to \infty$, quando $\|\ x\ \| \to \infty$.

Observa-se que se T é monótono e coercivo existe uma função real $c(r)$ com $c(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$ tal que,

$$(Tx,x) \geq c(\|\ x\ \|)\ .\ \|\ x\ \|\ ,$$

bastando para isso tomar

$$c(r) = \inf_{||x||=r} \frac{(Tx,x)}{||\ x\ ||}$$

A seguir enunciemos o teorema fundamental em que se baseiam as provas dos teoremas subsequentes.

<u>*Teorema 2.4.*</u> *(Browder). Seja $T : X \to X'$, onde X é um espaço de Banach reflexivo. Suponhamos que,*

a) T é hemicontínuo em X.

b) T é monótono, i.é, $(Tx - Ty,\ x - y) \geq 0$, para todo x e y em X.

c) T é coercivo.

Então, T é sobrejetor, i.é, $T(X) = X'$.

<u>*Teorema 2.5.*</u> *Seja X um espaço de Banach reflexivo, estritamente convexo, e seja $T : X \to X'$ um operador hemicontínuo tal que:*

$$(Tx - Ty\ ,\ x - y) \geq m(||x|| - ||y||)^2\ ,\ \text{com } m > 0. \tag{2.1.}$$

Então, T é bijetor (1-1 e sôbre), e T^{-1} é monótono, limitado e hemicontínuo de X' em X.

<u>*Demonstração:*</u> *1. T é sobrejetor: em vista do teorema 2.4., é suficiente mostrar que T é monótono e coercivo. Com efeito,*

i) T é monótono: $(Tx - Ty,\ x - y) \geq m(||x|| - ||y||)^2 \geq 0$, para todo x e y em X, desde que $m > 0$.

ii) T é coercivo: de fato, ponto $y = 0$ em (2.1.), vem,

$$(Tx - T0\ ,\ x - 0) \geq m\ ||x||^2\ ,$$

o que acarreta

$$(Tx,x) \geq (T0,x) + m||x||^2 \geq (-\ ||T0|| + m||x||)\ .\ ||x||.$$

Logo,

$$\frac{(Tx,x)}{||x||} \geq (-||T0|| + m\,||x||).$$

Portanto, $\frac{(Tx,x)}{||x||} \to \infty$, quando $||x|| \to \infty$.

2. T é injetor (unicidade): inicialmente, vamos mostrar que $Tu = w$ se e sòmente se $(Tv - w, v - u) \geq 0$, para todo v em X. Ora, se $Tu = w$, pela monotonicidade de T, vem, $(Tv - Tu, v - u) \geq 0$, para todo v em X.

Recìprocamente, se $(Tv - w, v - u) \geq 0$ para todo v em X, tomemos $v_t = u + tz$ com $t > 0$, e obtemos $(Tv_t - w, tz) \geq 0$; daí, cancelando o fator $t > 0$, vem $(Tv_t - w, z) \geq 0$. Contudo, pela hemicontinuidade de T, temos $Tv_t \to Tu$ quando $t \to 0^+$, e consequentemente, $(Tv_t - w, z) \to (Tu - w, z)$. Segue-se que $(Tu - w, z) \geq 0$, o que acarreta $Tu = w$. Agora, para v_o em X, o conjunto $S_{v_o} = \{u \in X\ ;\ (Tv_o - w, v_o - u) \geq 0\}$ é um semiespaço fechado e convexo de X. Dêste fato juntamente com a observação acima deduz-se que o conjunto S das soluções de $Tu = w$ é dado por $S = \bigcap_{v_o \in X} S_{v_o}$, o qual é fechado e convexo.

Por outro lado, o conjunto das soluções de $Tu = w$ está contido numa esfera de X. De fato, se u e v são duas soluções de $Tu = w$, ou seja, se $Tu = Tv = w$, resulta que

$$0 = (Tu - Tv, u - v) \geq m(||u|| - ||v||)^2.$$

Deduz-se daí que $||u|| = ||v||$, o que mostra que u e v estão numa mesma esfera em X. Como X é estritamente convexo, e como as soluções de $Tu = w$ estão situadas numa mesma esfera de X, e ainda, pelo fato de que o conjunto das soluções de $Tu = w$ é convexo, deduz-se que êste conjunto se reduz a um único elemento. Logo, $u = v$.

3. T^{-1} é hemicontínuo de X' em X. Com efeito, seja $w_n \to w$ em X'. Como T é sôbre existem uma sequência $\{x_n\}$ e um elemento x em X tais que $w_n = Tx_n \to w = Tx$.

Por outro lado, pondo $y = 0$ em (2.1.), obtemos,

$$||Tx - T0|| \geq m\ ||x||.$$

Donde,

$$||x|| = ||T^{-1}w|| \leq 1/m\ (||w|| + ||T0||),$$

o que mostra que T^{-1} *leva um conjunto limitado de* X' *num conjunto limitado de* X. *Como a sequência* $\{w_n\}$ *é limitada em* X', *então, pela observação acima, inferimos que a sequência* $\{x_n\}$ *é limitada em* X. *Tendo em vista que* X *é reflexivo, conclui-se que existe uma subsequência* $\{x_n\}$ *ainda denotada por* $\{x_n\}$ *tal que* $x_n \rightharpoonup y$ *em* X. *Logo,* $x = y$ *e* $x_n \rightharpoonup x$, *o que mostra a hemicontinuidade de* T^{-1}.

Agora estamos numa posição de enunciar o seguinte teorema de existência.

<u>*Teorema 2.6.*</u> *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e estritamente convexo, e* $T : X \to X'$ *um operador hemicontínuo tal que,*

$$(Tx - Ty,\ x - y) \geq m(||x|| - ||y||)^2, \tag{2.2.}$$

para todo x *e* y *em* X. *Seja* C *uma aplicação completamente contínua tal que* $1/m\ (Cx - T0)$ *leva uma bola fechada* B_r *numa bola fechada* $B_{r'}$, *com* $r \geq r'$. *Existe, então, um elemento* x_o *em* B_r *tal que* $Tx_o = Cx_o$.

<u>*Prova:*</u> *Graças ao teorema 2.5. (anterior),* T *é bijetor (1-1 e sôbre) e* T^{-1} *é hemicontínuo de* X' *em* X. *(logo,* T *é demicontínuo).*

Seja z *um elemento de* B_r *fixado arbitràriamente. Como* Cz *está em* X' *e* T *é bijetor, existe um e um só elemento* x *em* X *tal que* $Tx = Cz$, *ou seja,* $x = T^{-1}\ Cz$. *Vamos mostrar que para cada* z *em* B_r, *o elemento correspondente* $x = T^{-1}\ Cz$ *pertente à bola* B_r. *De fato, pondo* $y = 0$ *em (2.2.), obtemos*

$$(Tx - T0,\ x) \geq m||x||^2.$$

Disto e da hipótese do teorema resulta que,

$||x||^2 \leq 1/m\ (Tx - T0,\ x) = 1/m\ (Cz - T0,\ x) \leq ||1/m\ (Cz - T0)||\ \ ||x|| \leq$ $\leq r'\ ||x||$. Segue-se que $||x|| \leq r' \leq r$, o que mostra que x está em B_r. Portanto, o operador $T^{-1}C$ é um operador de B_r em B_r.

Mostremos agora que $T^{-1}C$ é um operador fracamente contínuo de B_r em B_r. Com efeito, seja $x_n \rightharpoonup x$, então $Cx_n \to Cx$, pois C é completamente contínua. Levando em conta que T^{-1} é demicontínuo, segue-se que $T^{-1}Cx_n \rightharpoonup T^{-1}Cx$, o que prova que $T^{-1}C$ é fracamente contínuo de B_r em B_r. Logo, pelo teorema 2.2. de ponto fixo de Schauder, existe um elemento x_o em B_r tal que $T^{-1}Cx_o = x_o$, ou seja, $Tx_o = Cx_o$.

<u>Corolário 2.1.</u> Seja $T : X \to X'$ um operador demicontínuo tal que

$$(Tx - Ty,\ x - y) \geq k_1 ||x - y||^2 ,$$

para todo x e y em X. Seja C uma aplicação completamente contínua tal que $1/k\ (Cx - T0)$ leva a bola B_r de X numa bola $B_{r'}$ com $r' \leq r$. Então, existe um elemento x_o em B_r tal que $Tx_o = Cx_o$.

2.3. <u>Mais resultados sôbre a equação do tipo $Tx = Cx$.</u>

Esta seção é dedicada a uma generalização do problema acima proposto, onde se considera um operador hemicontínuo T de X' satisfazendo a condição

$$(Tx - Ty,\ x - y) \geq \{b(||x||) - b(||y||)\}\ .\ (||x|| - ||y||) ,$$

onde b é uma função real com certas propriedades.

Prova-se inicialmente dois lemas auxiliares, um com respeito à função b e outro referente à convergência forte de uma sequência num espaço uniformemente convexo, a fim de provar o teorema de existência e unicidade da solução de equação $Tx = w$, com w em X', bem como continuidade, monotonicidade e limitabilidade do seu inverso T^{-1}.

Com êste teorema em mãos, podemos resolver o problema da existência de soluções da equação do tipo $Tx = Cx$, onde agora C é uma aplicação compacta.

Teorema 2.7. Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja $T : X \to X'$ um operador hemicontínuo satisfazendo

$$(\times) \qquad (Tx - Ty,\ x - y) \geq \{b(||x||) - b(||y||)\}\ (||x|| - ||y||)$$

para todo x e y em X, onde $b : R^+ \to R$, estritamente crescente tal que $b(r) \to \infty$, quando $r \to \infty$.

Então, para todo w em X' existe u em X único tal que $Tu = w$. Além do mais, T^{-1} é monótono, limitado e contínuo de X' em X.

Como um exemplo de um operador não linear T que satisfaz a condição $(\times)$ podemos mencionar o operador fortemente monótono

$$(Tx - Ty,\ x - y) \geq c(||x|| - ||y||)^2\ , \quad c > 0$$

definido por Browder. (Neste caso, a função b é dada por $b(||x||) = c||x||$).

Antes, porém, vamos mostrar dois lemas úteis que serão utilizados na demonstração do teorema 2.7. .

Lema 2.1. Seja $b : R^+ \to R$, estritamente crescente verificando $\{b(r_j) - b(r)\}\ (r_j - r) \to 0$, quando $j \to \infty$. Então, $r_j \to r$ quando $j \to \infty$.

Prova

Verifica-se fàcilmente que $\{r_j\}$ é limitada. Suponhamos que $r_j \not\to r$, quando $j \to \infty$. Sendo $\{r_j\}$ limitada, podemos extrair uma subsequência $\{r_k\}$ tal que $r_k \to t \neq r$ e $b(r_k) \to b(r)$.

Agora, sendo $t \neq r$, temos, $t < r$ ou $t > r$. Se $t < r$ existem um número real s, satisfazendo $t < s < r$, e um inteiro N tais que $r_k \leq s$ para todo $k \geq N$. Daí resulta que $b(r_k) \leq b(s) < b(r)$. Como $b(r_k) \to b(r)$ quando $k \to \infty$, segue-se imediatamente que $b(r) \leq b(s) < b(r)$, ou seja,

$b(r) < b(r)$, o que é um absurdo.

Do mesmo modo, mostra-se que $t > r$ é impossível. Logo, $t = r$ e, temos, $r_j \to r$.

Lema 2.2. Se X é um espaço de Banach uniformemente convexo, e $x_n \rightharpoonup x$ e $||x_n|| \to ||x||$, então, $x_n \to x$.

Prova

Pelo teorema de Hahn-Banach, existe um elemento w em X', com $w \neq 0$, tal que $(w,x) = ||w||\ ||x||$.

Como, por hipótese, $x_n \rightharpoonup x$, resulta que $(w, x + x_n) \to 2(w,x)$. Mas, de um lado, temos,

$$(w,x_n + x) \leq ||w||\ \ ||x_n + x|| \leq ||w||(||x_n|| + ||x||) \to 2||w||\ \ ||x||,$$

pois, por hipótese, $||x_n|| \to ||x||$. Portanto, $||x_n + x|| \to 2||x||$, ou seja, $||x_n + x||/2 \to ||x||$. Por outro lado, sem perda de generalidade, podemos supor, pela dilatação própria ou contração, que $||x_n|| \leq 1$ e $||x|| = 1$.

Se $x_n \not\to x$, podemos achar uma sub-sequência ainda denotada por $\{x_n\}$ tal que $||x_n - x|| \geq \varepsilon$. Pela convexidade uniforme de X, deduz-se que

$$\frac{1}{2}||x_n + x|| \leq 1 - \delta(\varepsilon) < 1. \tag{2.3.}$$

Porém, pelo que foi visto acima, temos $||x_n + x||/2 \to ||x|| = 1$; consequentemente, fazendo $n \to \infty$ na relação (2.3.), teríamos $1 < 1$, o que é uma contradição. Logo $x_n \to x$.

Demonstração do teorema 2.7.

Em vista do teorema 2.4., para provar a primeira parte dêste teorema, é suficiente mostrar que T é monótono e coercivo.

1. *T é sobrejetor (existência): segundo a observação acima, para isso basta mostrar que T é monótono e coercivo. Com efeito,*

$$(Tx - Ty,\ x - y) \geq \{b(||x||) - b(||y||)\} \cdot (||x|| - ||y||) \geq 0 ,$$

pois b é estritamente crescente, o que mostra a monotonicidade de T. Pondo $y = 0$ na expressão acima, obtemos

$$(Tx - T0,\ x) \geq \{b(||x||) - b(||0||)\} \cdot ||x||.$$

Donde,

$$(Tx,x) \geq \{b(||x||) - ||T0|| - b(0)\} \cdot ||x||,$$

ou seja,

$$(Tx,x)/||x|| \geq b(||x||) - K,$$

onde $K = ||T0|| + b(0)$.

Assim, $(Tx,x)/||x|| \to \infty$, quando $||x|| \to \infty$, tendo em vista que $b(||x||) \to \infty$ quando $||x|| \to \infty$.

2. *T é injetor (unicidade): mostremos inicialmente que o conjunto das soluções de $Tx = w$ é convexo e fechado de X. De fato, já vimos anteriormente que*

"$Tx = w$ é equivalente a $(Ty - w,\ y - x) \geq 0$",

para todo y em X. Fixado y_o em X, o conjunto

$$C_{y_o} = \{x \varepsilon X;\ (Ty_o - w,\ y_o - x) \geq 0\}$$

é um semiespaço fechado convexo de X. Logo, o conjunto C das soluções de $Tx = w$ é dado por $C = \bigcap_{y_o \varepsilon X} C_{y_o}$, o que mostra que C é convexo e fechado.

Feito isso, seja $Tx_1 = Tx_2$, *e suponhamos que* $||x_1|| \geq ||x_2||$. *Temos, então,*

$$0 = (Tx_1 - Tx_2, x_1 - x_2) \geq \{b(||x_1||) - b(||x_2||)\} \cdot (||x_1|| - ||x_2||).$$

Como b é estritamente crescente, temos,

$$\{b(||x_1||) - b(||x_2||)\} \cdot (||x_1|| - ||x_2||) = 0.$$

Pelo lema 2.1., $||x_1|| = ||x_2||$, *o que mostra que o conjunto das soluções é um conjunto convexo fechado situado sôbre uma esfera de X. Como por hipótese X é estritamente convexo, decorre, daí, conforme a observação feita no início sôbre uniformidade convexo de X, que o conjunto C se reduz a um só ponto. Logo,* $x_1 = x_2$.

3. T^{-1} *é monótono, limitado e contínuo.*

Com efeito, seja $Tx = w$ *com* $||w|| \leq M$. *Temos,*

$$(Tx - T0, x) = (w - T0, x) \geq (b(||x||) - b(0)).||x||.$$

Donde,

$$||w|| \geq (b(||x||) - b(0) - ||T0||),$$

ou seja,

$$b(||x||) \leq M + b(0) + ||T0||,$$

o que acarreta $||x|| \leq K$ *com K dependendo de* $||w||$. *Segue-se que* $||T^{-1}w|| \leq K$, *o que mostra que* T^{-1} *leva conjunto limitado de X' num conjunto limitado de X.*

A fim de provar que T^{-1} *é contínuo, seja* $w_n \to w$; *como T é sôbre, existem uma sequência* $\{x_n\}$ *e um elemento x em X tais que* $w_n = Tx_n$ *e* $w = Tx$. *Temos, então,* $w_n = Tx_n \to Tx = w$. *Como* $\{w_n\}$ *é limitada e* T^{-1} *leva limitada numa limitada de X, resulta que* $\{x_n\}$ *é limitada em X. Assim, pela reflexividade*

de X, existe uma subsequência ainda denotada por $\{x_n\}$ tal que $x_n \rightharpoonup y$ em X.

Contudo, $x_n = T^{-1}w_n \rightharpoonup y = T^{-1}w = x$; logo, $x = y$ e obtemos $x_n \rightharpoonup x$ (fracamente).

Queremos, agora, mostrar que $x_n \to x$. Com efeito, sabendo-se que $(Tx_n - Tx, x_n - x) \geq \{b(||x_n||) - b(||x||)\} \cdot (||x_n|| - ||x||) \geq 0$ e $Tx_n \to Tx$, e ainda, $x_n \rightharpoonup x$, obtemos disso que,

$$\{b(||x_n||) - b(||x||)\} \cdot (||x_n|| - ||x||) \to 0 .$$

Aplicando, agora, novamente, o lema 2.1., temos $||x_n|| \to ||x||$. Consequentemente, já que $x_n \rightharpoonup x$, pelo lema 2.1., deduz-se que

$$x_n \to x \quad \text{(fortemente)} ,$$

o que mostra a continuidade de T^{-1}.

Graças ao teorema 2.7., podemos provar agora o teorema de existência das soluções da equação do tipo $Tx = Cx$, onde T é um operador que aparece no referido teorema.

<u>Teorema 2.8.</u> Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja $T : X \to X'$ um operador hemicontínuo tal que,

$$(Tx - Ty, x - y) \geq \{b(||x||) - b(||y||)\}.||x||-||y||),$$

para todo x e y em X, onde b é uma função real estritamente crescente de R^+ em R tal que $b(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$. Seja C uma aplicação compacta de B_r em X' tal que $C(\partial B_r) \subset T(B_r)$. Existe, então, um elemento x_o em B_r tal que $Tx_o = Cx_o$.

<u>Prova</u>

Pelo teorema 2.7., T é biunívoco e sôbre, e, tem o operador

inverso T^{-1} *contínuo de* X' *em* X. *Como* B_r *é um conjunto limitado em* X, *e sendo* C *uma aplicação compacta, a sua imagem* $C(B_r)$ *é relativamente compacta em* X'. *Sendo* T^{-1} *contínuo,* $T^{-1}C(B_r)$ *é relativamente compacto em* X. *Consequentemente,* $T^{-1}C$ *é um operador compacto de* B_r *em* X.

Pela hipótese, $C(\partial B_r) \subset T(B_r)$, *o que acarreta* $T^{-1}C(\partial B_r) \subset B_r$, *pela biunivocidade de* T. *Pelo teorema 2.3. de ponto fixo de Rothe, existe um elemento* x_o *em* B_r *tal que* $T^{-1}Cx_o = x_o$, *ou seja,* $Tx_o = Cx_o$.

<u>*Teorema 2.9.*</u> *Assumimos as mesmas hipóteses do teorema anterior para o operador* T *mais a hipótese adicional de que* T *é homogêneo de grau 1, isto é,* $T(kx) = k.Tx$.

Seja C *uma aplicação compacta de* B_r *em* X' *tal que* $||Cx|| \leq$ $\leq ||Tx||$ *para algum* x *em* ∂B_r.

Existe, então, um elemento x_o *em* B_r *tal que* $Tx_o = Cx_o$.

<u>*Demonstração:*</u>

Na demonstração do teorema anterior, já temos mostrado que $T^{-1}C$ *é um operador compacto de* B_r *em* X.

Logo, pelo teorema de ponto fixo de Petryshyn, é suficiente mostrar que se para algum elemento x *de* ∂B_r *a equação* $T^{-1}Cx = \alpha x$ *é satisfeita, então* $\alpha \leq 1$. *Com efeito,* $T^{-1}Cx = \alpha x$ *implica* $Cx = T\alpha x$, *graças à biunivocidade de* T. *Pela homogeneidade de* T, *temos* $Cx = \alpha Tx$.

Logo, $||Cx|| = |\alpha|\ ||Tx||$, *donde,* $\dfrac{||Cx||}{||Tx||} = |\alpha| \leq 1$, *devido à hipótese do teorema. Consequentemente, existe um elemento* x_o *em* B_r *tal que* $T^{-1}Cx_o = x_o$, *ou seja,* $Tx_o = Cx_o$, *o que queríamos provar.*

2.4. Operador monótono complexo, finitamente contínuo e o estudo da equação $Tx = Cx$.

A seção é devotada ao estudo de um nôvo tipo de operador não linear T, chamado operador monótono complexo, finitamente contínuo de X em X', originalmente definido por Browder. Inicia-se com a definição dêste operador e, a seguir, prova-se um teorema que assegura, sob certa hipótese, que T é bijetor e que seu inverso T^{-1} é contínuo de X' em X.

Devido ao resultado profundo e refinado dêste teorema, exibimos aqui, sua demonstração completa, baseando-se fundamentalmente nos trabalhos de Browder, publicados em diversas revistas especializadas.

A seguir, provamos, como uma aplicação dêste teorema, um teorema da existência da solução da equação do tipo $Tx = Cx$, onde T é um operador acima referido, e C um operador compacto.

Diz-se que $T : X \to X'$ é um operador monótono complexo se, para todo subconjunto limitado B de X existe uma função real $c_B : R^+ \to R$, contínua e estritamente crescente com $c_B(0) = 0$ tal que

$$|(Tx - Ty, x - y)| \geq c_B(||x - y||) \tag{2.4.}$$

para todo x e y em B.

Dizemos que T é finitamente contínuo se T é contínuo de todo subespaço F de dimensão finita de X com topologia forte no espaço X' com topologia fraca.

Teorema 2.10. Seja X um espaço de Banach reflexivo. Seja $T : X \to X'$ um operador monótono complexo, finitamente contínuo e coercivo. Então, T é bijetor (1-1 e sôbre) e tem inverso contínuo T^{-1} de X' em X.

Para demonstrar o teorema vamos provar inicialmente o seguinte lema.

Lema 2.3. Seja X um espaço de Banach de dimensão finita. Se $T : X \to X'$ é monótono complexo finitamente contínuo e coercivo, então T é bijetor e bicontínuo.

Prova:

a) *T é injetor:* com efeito, seja $Tx = Ty$, então temos,

$$0 = |(Tx - Ty,\ x - y)| \geq c_B(||x - y||).$$

Como c_B é estritamente crescente e $c_B(0) = 0$, obtemos $||x - y|| = 0$, ou seja, $x = y$.

b) *T é sobrejetor:* observamos, primeiro, que T^{-1} é um operador limitado, i.é, leva um subconjunto limitado de $T(X)$ num subconjunto limitado de X. Com efeito, como T é coercivo, existe uma função real q de R^+ em R tal que $q(r) \to \infty$ com $r \to \infty$, e,

$$q(||x||) \cdot ||x|| \leq |(Tx,x)| \leq ||Tx|| \cdot ||x||$$

e

$$q(||x||) \leq ||Tx|| \leq M_1 ,$$

o que acarreta $||x|| \leq M$.

Provemos agora que T é um operador fechado. Ora, seja Tu_j em $T(C)$, onde C é um conjunto fechado de X, tal que $w_j = Tu_j \to w$ em X'. Como $\{w_j\}$ é limitada em X', pela observação acima, a sequência $\{u_j\}$ é limitada em X, i.é, $\{u_j\}$ está contida num conjunto limitado S de X.

Temos, então,

$$|(Tu_j - Tu_k,\ u_j - u_k)| \geq c_S(||u_j - u_k||) \tag{2.5.}$$

Como $\{Tu_j\}$ é convergente em X', e $\{u_j\}$ é limitada em X, o primeiro membro de (2.5.) tende a zero quando $j,k \to \infty$.

Como c_S é crescente e $c_S(0) = 0$, deduz-se que $||u_j - u_k|| \to 0$ quando $j,k \to \infty$, ou seja, $\{u_j\}$ é uma sequência de Cauchy em X.

Como X é completo (dimensão de X é finita), e sendo C fechado, segue-se que $u_j \to u$ e $u \in C$.

Como X é de dimensão finita, T é contínuo, o que acarreta $Tu_j \to Tu = w$. Consequentemente, $w \in T(C)$, e conclui-se que $T(C)$ é fechado em X'. Em particular, nota-se que $T(X)$ é fechado em X'.

Como T é um operador biunívoco e contínuo de X em X' com $\dim X = \dim X' < \infty$, pelo teorema da invariança de domínio de ~~Browder~~ Brouwer, T é um operador aberto de X em X', i.é, leva um conjunto aberto de X num conjunto aberto de X'. Segue-se que $T(X)$ é aberto em X'. Como X' é conexo, e lembrando que $T(X)$ é fechado e aberto ao mesmo tempo, temos $T(X) = X'$.

<u>*Prova do teorema 2.10.*</u>

Para provar que $T(X) = X'$, observa-se que é suficiente mostrar que $0 \in T(X)$, pois, caso contrário, basta considerar o operador $T_w x = Tx - w$ com w em $T(X)$, e notar que T_w tem as mesmas propriedades que T.

Seja Φ a família de subespaços F de dimensão finita de X, ordenada por inclusão. Sejam $j_F : F \to X$ a injeção natural de F em X, e $j'_F : X' \to F'$, a transposta de j_F.

Consideremos, agora,

$$T_F = j'_F \cdot T \cdot j_F : F \to F'$$

que é um operador monótono complexo, contínuo e coercivo, pois, bastando para isso observar que,

$$(2.6.) \qquad (T_F u, v) = (j'_F T j_F u, v) = (T j_F u, j_F v) = (Tu, v)$$

para todo u e v em F.

Pelo lema 2.3. existe um elemento u_F em F tal que $T_F u_F = 0$. Pela coercividade de T_F, temos,

$$0 = (T_F u_F , u_F) \geq q(||u_F||) \cdot ||u_F|| ,$$

ou seja,

$$q(||u_F||) \cdot ||u_F|| \leq 0 .$$

Lembrando que $q(r) \to \infty$, quando $r \to \infty$, então, existe um constante M, independente de F, tal que,

$$||u_F|| \leq M,$$

para todo F em Φ e $T_F u_F = 0$.

Para $F \varepsilon \Phi$, seja $V_{F_o} = \{u_F;\ F_o \subset F,\ T_F u_F = 0\}$.

Observe-se que $V_{F_o} \subset B_M(0)$, onde $B_M(0)$ é a bola fechada de raio M em X. Seja $\tilde{V}_{F_o}$ o fecho (fraco) de V_{F_o}. Observando que a bola $B_M(0)$ é fracamente compacta, em virtude da reflexividade de X, e que a família $\{\tilde{V}_{F_o}\}$, $F_o \varepsilon \Phi$, tem a propriedade de intersecção finita, deduz-se que o conjunto

$$\bigcap_{F_o \varepsilon \Phi} \tilde{V}_{F_o} \neq \Phi ,$$

isto é, existe um elemento u_o em $\bigcap \tilde{V}_{F_o}$. Queremos mostrar que $Tu_o = 0$. Para isso, sejam F e F_1 em Φ tal que $F \subset F_1$. Então,

$$(2.7.) \qquad |(Tu_F - Tu_{F_1},\ u_F - u_{F_1})| \geq c_B(||u_F - u_{F_1}||) ,$$

onde $B = B_M(0)$.

Mas,

$(Tu_F - Tu_{F_1},\ u_F - u_{F_1}) = (Tu_F,\ u_F) - (Tu_F,\ u_{F_1}) - (Tu_{F_1}, u_F - u_{F_1}) =$

$= - (Tu_F, u_{F_1})$, por (2.6.),

pois, u_F *é tal que* $Tu_F = 0$ *e* $||u_F|| \leq M$.

Donde,

(2.8.) $$c_B(||u_F - u_{F_1}||) \leq |(Tu_F , u_{F_1})|$$

Considerando, agora, a função q de v de X definida por:

$$q(v) = c_B(||u_F - v||) - |(Tu_F, v)| ,$$

temos, segundo a relação (2.8.), $q(v) \leq 0$, *e q é fracamente semicontínua inferior em* V_F. *Resulta, daí, que* $q(v) \leq 0$ *em* $\tilde{V}_F$, *e, consequentemente,* $q(u_o) \leq 0$, *ou seja,*

(2.9.) $$c_B(||u_F - u_o||) = |(Tu_F , u_o)| .$$

Seja F contendo u_o. *Como* $Tu_F = T_F u_F = 0$, *vem,*

$$c_B(||u_F - u_o||) = 0,$$

o que implica $u_F = u_o$. *Sejam, agora, v um elemento qualquer de X, e F contendo ambos* u_o *e v. Então,*

$$(Tu_o,v) = (Tu_F,v) = (T_F u_F,v) = (0,v) = 0,$$

donde, $Tu_o = 0$, *pois, v é arbitrário. Segue-se que* $0 \varepsilon T(X)$.

Naturalmente, T é biunívoco. Resta, apenas, provar que T^{-1} *é contínuo de X' em X. Seja* $w_j \to w$ *em X', assim que existe uma sequência* $\{u_j\}$ *em X tal que* $Tu_j = w_j$. *Como na demonstração do lema 2.3., mostra-se que existe uma subsequência ainda denotada por* $\{u_j\}$ *tal que* $u_j \to u_o$ *em X. Por outro lado, T sendo sôbre, existe v em X tal que* $w = Tv$. *Como* $w_j = Tu_j \to w = Tv$, *para provar*

a continuidade de T^{-1}, *basta mostrar que* $u_o = v$. *Com efeito,*

$$|(w_j - w,\ u_j - v)| = |(Tu_j - Tv,\ u_j - v)| \geq$$

$$\geq c_B\ (||u_j - v||).$$

Tendo que $Tu_j = w_j - w \to 0$ *e* $u_j \to u_o$, *deduz-se que*

$$c_B\ (||u_o - v||) \leq 0\ ,$$

quando $j \to \infty$. *Logo, pela propriedade de* c_B, *temos* $u_o = v$.

Aplicando o teorema 2.10., obtemos sob certa hipótese, o seguinte teorema da existência da equação do tipo $Tx = Cx$.

<u>*Teorema 2.11.*</u> *Seja* $T : X \to X'$ *um operador monótono* complexo, *finitamente contínuo e coercivo. Seja* C *um operador compacto de* $B_r^{(0)}$ *em* X' *tal que, para um subconjunto limitado* B, *suficientemente grande, qualquer que seja* x *em* B, $d_B\ (|Cy - T0,\ x|) \leq r$ *para todo* y *em* B_r, *onde* d_B *é a função inversa de* c_B. *Então, existe um elemento* x_o *em* B_r *tal que* $Tx_o = Cx_o$.

<u>*Demonstração:*</u>

Pelo teorema 2.10., o operador T *é bijetor e tem inverso* T^{-1} *contínuo de* X' *em* X. *Seja* y *um elemento arbitràriamente fixado em* B_r. *Notando-se que* T *é bijetor e* Cy *é um elemento de* X', *deduz-se que existe um único elemento* x *em* X *tal que* $Tx = Cy$, *ou seja,* $x = T^{-1}Cy$. *Mostremos que* x *é um elemento de* B_r. *De fato, tomando* B *que contém* x *e* y, *vem*

$$|(Tx - Ty,\ x - y)| \geq c_B(||x - y||)\ .$$

Pondo $y = 0$ *e denotando por* d_B *a função inversa de* c_B, *obtemos*

$$||x|| \leq d_B(|(Tx - T0,\ x)|) = d_B(|(Cy - T0, x)|) \leq r\ .$$

Logo, x está em B_r, e o operador $T^{-1}C$ aplica de B_r em B_r. Mostremos que $T^{-1}C$ é um operador compacto de B_r em B_r.

É claro que $T^{-1}C$ é contínuo. Se B_r é um subconjunto limitado de X, a imagem de B_r pela C é relativamente compacto de X', tendo em vista que C é um operador compacto. Como T^{-1} é contínuo, êle leva um conjunto relativamente compacto num conjunto relativamente compacto.

Logo, $T^{-1}C$ é um operador compacto de B_r em B_r. Pelo teorema 2.1. de ponto fixo de Schauder, existe um elemento x_1 em B_r tal que $T^{-1}Cx_1 = x_1$, ou seja, $Tx_1 = Cx_1$.

CAPÍTULO III

EXTENSÃO DOS RESULTADOS CONCERNENTES À EQUAÇÃO $Tx = Fx$.

3.1. Introdução

O presente capítulo é devotado à extensão dos resultados já obtidos no capítulo II, referente ao problema da existência da solução da equação do tipo $Tx = Fx$, onde F, ao invés de um operador compacto, será operador pertencente a duas classes de operadores muito mais gerais introduzidas por Browder, a saber: os operadores semicontrativos e fracamente semicontrativos.

O trabalho de extensão baseia-se nos teoremas de ponto fixo obtidos na obra de Browder | 19 |. Para tal propósito foram introduzidas novas aplicações que recebem os nomes de aplicações semi-Lipschitzianas e fracamente semi-Lipschitzianas.

3.2. Definições e Extensões Referentes à Equação $Tx = Fx$

Esta seção começa com as definições de dois novos tipos de operadores não lineares, não compactos, introduzidos por Browder, a saber: operadores semicontrativos e fracamente contrativos.

O objetivo principal nesta seção é estender e fortalecer os resultados obtidos sôbre a equação $Tx = Fx$, pelo mesmo procedimento adotado no capítulo anterior, porém, com operador F acima mencionado.

Sejam X um espaço de Banach real, e C um subconjunto convexo fechado e limitado de X.

Seja $q : R^+ \to R$ uma função contínua estritamente crescente com $q(0) = 0$ e $q(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$. Uma aplicação J (não linear) de X em X' é chamada aplicação de dualidade para alguma função guia q se:

$$(Jx,x) = ||Jx|| \, . \, ||x|| \, , \quad ||Jx|| = q(||x||).$$

Exemplo 1: Se $X = H$ é um espaço de Hilbert, então uma apli

cação identidade $I = J$ é uma aplicação de dualidade de H em H. (Obs.: o dual de H é identificado por meio do produto interno de H).

Exemplo 2: Tomemos $X = L^p(G)$, $1 < p < \infty$, onde G é um aberto de R^n. A aplicação J de $L^p(G)$ em $L^q(G)$ dada por $x \to x^{p-1}$ (sinal x) é uma aplicação de dualidade de $L^p(G)$ em $L^q(G)$, onde $1/p + 1/q = 1$. (Obs.: o espaço $L^q(G)$ é o dual do $L^p(G)$).

São conhecidas as seguintes propriedades de J:

a. *Se X é reflexivo, então, J é uma aplicação hemicontínua de X em X', e ainda, ela é sobrejetora.*
b. *J é uma aplicação monótona maximal e semicontínua superiormente com X' topologia fraca.*
c. *Para cada x em X, Jx é um subconjunto fechado convexo de X'; se X' é estritamente convexo, então J é uma aplicação univalente, e ela é determinada ùnicamente pela função guia q. Se J_o é uma aplicação de dualidade que corresponde à função q_o, e se $q(r)$ é uma aplicação não negativa de R^+ em R, estritamente crescente tal que $q(0) = 0$ e $q(r) \to \infty$, quando $r \to \infty$, então a aplicação J de X em X' dada por*

$$Jx = \frac{q(||x||)}{q_o(||x||)} J_o x$$

é uma aplicação de dualidade, associada à função q.
d. *Se X' é uniformemente convexo, então J é uma aplicação contínua de X em X'.*
e. *Se X é uniformemente convexo, então J^{-1} é contínua de X' em X; se $(Jx_n - Jx, x_n - x) \to 0$ para um elemento x em X, então, $x_n \to x$ em X.*
f. *Do teorema de Hahn-Banach, segue-se que todo espaço de Banach tem aplicação J.*

Um operador não linear T de X em X' é completamente contínuo se $x_n \rightharpoonup x$ em X implica $Tx_n \to Tx$ em X'.

Seja C um subconjunto convexo fechado e limitado de X. Diz-se

que um operador $F : C \to C$ é semicontrativo se existe uma aplicação $S : X \times X \to C$ tal que:

i. $F(x) = S(x,x)$ *para cada* x *em* C.

ii. Para cada x *fixado em* X, $S(.,x)$ *é não expansiva.*

iii. Para cada x *fixado em* X, $S(x,.)$ *é completamente contínua.*

Além do mais, dizemos que F *é fracamente semicontrativo se:*

i. $F(x) = S(x,x)$ *para cada* X *em* C.

ii. Para cada x *fixado em* X, $S(.,x)$ *é não expansiva*

iii. Para cada x *fixado em* X, $S(x,.)$ *é compacta.*

Vamos enunciar dois teoremas de ponto fixo em que se baseia o nosso trabalho.

Teorema 3.1. (Browder |19|). Seja X *um espaço de Banach reflexivo para o qual existe uma aplicação de dualidade* J, *fracamente contínua, de* X *em* X' *para alguma função guia* q. *Seja* F *uma aplicação semicontrativa de* X *em* X' *que leva um subconjunto convexo fechado e limitado* C *de* X *em* C. *Então,* F *tem um ponto fixo em* C.

Teorema 3.2. (Browder |19|). Seja X *um espaço de Banach reflexivo para o qual existe uma aplicação de dualidade* J *fracamente contínua de* X *em* X' *para alguma função guia* q. *Seja* F *uma aplicação fracamente semicontrativa de* C *em* C. *Suponhamos que* $(I - F)(C)$ *é fechado em* X. *Então,* F *tem um ponto fixo em* C.

Queremos salientar o fato de que o teorema 3.1. é deduzido do teorema 3.2. com o auxílio de um lema que envolve a propriedade de um operador semi-J-monótono. E, ainda, na demonstração do teorema 3.2., o autor utiliza o teorema clássico de ponto fixo de Schauder para operador compacto.

Sejam T *uma aplicação de* X *em* X', J *uma aplicação de dualidade de* X *em* X'. *Diz-se que* T *é J-monotônica se para todo* x *e* y *em* X,

$$(Tx - Ty, J(x - y)) \geq 0.$$

Seja S_1 *uma aplicação de* $X \times X$ *em* X, *onde* X *é um espaço de Banach. Diz-se*

que S_1 é semi-J-monótona se:

i. Para cada x fixado em X, $S_1(.,x)$ é contínua e J-monótona.

ii. Para cada x fixado em X, $S_1(x,.)$ é completamente contínua.

Um operador A de C em X é demicompacto se dada uma sequência limitada $\{x_n\}$ em C e se a sequência $\{x_n - Ax_n\}$ converge, então existe uma subsequência $\{x_m\}$ que é convergente.

Teorema 3.3. (Zarantonello). Seja H um espaço de Hilbert, e suponhamos que T é um operador demicontínuo de H em H satisfazendo:

$$(Tx - Ty,\ x - y) \geq c||x - y||^2 ,$$

com $c > 0$, para todo x e y em H. Então, T é bijetor e tem inverso T^{-1} contínuo de H em H.

Teorema 3.4. Sejam H um espaço de Hilbert, e C um subconjunto convexo fechado e limitado de H.

Seja $T : H \to H$ uma aplicação demicontínua tal que existe $K \geq 1$ para o qual

$$(Tx - Ty,\ x - y) \geq K||x - y||^2 \tag{3.1.}$$

para todo x e y em H.

Seja F uma aplicação fracamente semicontrativa de C em C. Suponhamos que $T^{-1}(C) \subset C$. Suponhamos que $(I - T^{-1}F)(C)$ é fechado em H, ou, $T^{-1}F$ é demicompacta e F contínua.

Existe então, um elemento x_o em C tal que $Tx_o = Fx_o$.

Demonstração:

Vamos assumir aqui que o dual do espaço H é identificado com H por meio do produto interno.

1. Pelo teorema 3.3., T é bijetor e tem seu inverso T^{-1} conti-

nuo de H em H; para x e y em H, e pondo-se $u = Tx$ *e* $v = Ty$, *obtemos,* $x=T^{-1}u$ *e* $y = T^{-1}v$.

Da relação (3.1.) obtemos

(3.2.) $$||x - y|| \leq 1/K\ ||Tx - Ty|| \quad , \quad ou$$

$$||T^{-1}u - T^{-1}v|| \leq 1/K\ ||u - v||$$

para todo u e v em H.

2. *O nosso objetivo agora é provar que* $T^{-1}F$ *é fracamente semicontrativa de C em C. Para tal fim, consideremos a aplicação* $T^{-1}S$, *onde S é a aplicação que aparece na definição de fracamente semicontrativa de F. Observa-se que, em virtude da hipótese* $T^{-1}(C) \subset C$, $T^{-1}S$ *é uma aplicação de* $X \times X$ *em C. Pomos agora* $S_1 = T^{-1}S$. *Como F é fracamente semicontrativa temos* $Fx = S(x,x)$ *para cada x em C. Consequentemente*

$$T^{-1}F(x) = T^{-1}S(x,x) = S_1(x,x)$$

para cada x em C.

Mostremos que para cada x fixado em H, $S_1(.,x)$ *é não expansiva, enquanto* $S_1(x,.)$ *é compacta. Com efeito, em vista da relação (3.2.), resulta*

$$||S_1(y,x) - S_1(z,x)|| = ||T^{-1}S(y,x) - T^{-1}S(z,x)|| \leq$$

$$\leq 1/K\ ||S(y,x) - S(z,x)|| \leq 1/K\ ||y-z|| \leq ||y-z|| ,$$

tendo em conta que $K \geq 1$. *Donde, para cada x fixado em H,* $S_1(.,x)$ *é não expansiva.*

Por outro lado, sabe-se que a aplicação $S(x,.)$ *leva um conjunto limitado num conjunto relativamente compacto em H. Como* T^{-1} *é conti-*

nuo de H em H, conclui-se que $T^{-1}S(x,.)$ leva um conjunto limitado num conjunto relativamente compacto em H. Portanto, a aplicação $T^{-1}S(x,.) = S_1(x,.)$, x fixado, é uma aplicação compacta.

Como, por hipótese, $T^{-1}(C) \subset C$ e F é uma aplicação de C em C, segue-se que a aplicação $T^{-1}F$ é uma aplicação de C em C. Logo, a aplicação $T^{-1}F$ é fracamente semicontrativa.

Se supomos a primeira hipótese de que $(I - T^{-1}F)(C)$ é fechado, então, pelo teorema 3.2., $T^{-1}F$ tem um ponto fixo x_o em C, i.é, $T^{-1}Fx_o = x_o$, ou seja, $Tx_o = Fx_o$.

Se, em vez disso, assumimos que $T^{-1}F$ é demicompacta e contínua, então provaremos que $(I - T^{-1}F)(C)$ é fechado em H. Com efeito, seja $y \in \overline{(I - T^{-1}F)(C)}$, então existe uma sequência $\{x_j\}$ em C tal que $x_j - T^{-1}Fx_j \to y$. Sendo $T^{-1}F$ demicompacta, existe uma subsequência ainda denotada por $\{x_j\}$ tal que $x_j \to z_o$, e em virtude de C ser fechado, z_o está em C. Como F é suposta contínua, $Fx_j \to Fz_o$. Segue-se que $z_o - T^{-1}Fz_o = y$, ou seja, $(I - T^{-1}F)(z_o) = y$, o que mostra que $y \in (I - T^{-1}F)(C)$.

Assim, novamente, pelo teorema 3.2., concluímos que existe x_o em C tal que $Tx_o = Fx_o$, e a prova do teorema está completa.

<u>Corolário 3.1.</u> Sejam H um espaço de Hilbert, C um subconjunto convexo fechado e limitado. Seja $T : H \to H$ uma aplicação hemicontínua tal que existe $k \geq 1$ tal que

$$(3.3.) \qquad (Tx - Ty, x - y) \geq k \, ||x - y||^2 ,$$

para todo x e y em H.

Seja F uma aplicação semicontrativa de C em C. Suponhamos que $T^{-1}(C) \subset C$.

Existe, então, um elemento x_o em C tal que $Tx_o = Fx_o$.

Prova:

Tendo em vista o teorema 3.1. de ponto fixo para aplicação semicontrativa, é suficiente mostrar que a aplicação

$$S_1(x,.) = T^{-1}S(x,.) \ ,$$

para cada x fixado em H, é completamente contínua, já que no decorrer da demonstração do teorema anterior, foi provado que $S_1(.,x)$ é não expansiva e que $T^{-1}F$ aplica de C em C.

Ora, seja $x_n \rightharpoonup x_o$ em H. Como $S(x,.)$ é completamente contínua, por hipótese, resulta que $S(x,x_n) \to S(x,x_o)$. Seque-se daí que $T^{-1}S(x,x_n) \to T^{-1}S(x,x_o)$, pela continuidade de T^{-1}.

Assim, pelo teorema 3.1., existe um elemento z_o em C tal que $Tz_o = Fz_o$.

Queremos chamar a atenção do leitor ao fato de que o nosso estudo da equação $Tx = Fx$ nesta seção, até o presente momento, se limitou ao âmbito do espaço de Hilbert. Para que nós pudéssemos sair desta situação, precisamos introduzir o nôvo tipo de aplicações que definiremos a seguir.

Sejam X um espaço de Banach reflexivo, C um subconjunto convexo fechado e limitado de X, C' um subconjunto convexo fechado limitado de X'.

Diz-se que uma aplicação não linear F de X em X' é semi-lipschitziana se F leva C em C', e existe uma aplicação S de $X \times X$ em C' tal que:

i. $Fx = S(x,x)$ para cada x em C.

ii. Para cada x fixado em X, $S(.,x)$ é Lipschitziana de razão 1, isto é,

$$||S(y,x) - S(z,x)||_{X'} \leq ||y - z||_X.$$

iii. $S(x,.)$ é completamente contínua, para cada x fixado em X.

Além do mais, dizemos que F é fracamente semi-Lipschitziana se F leva C em C' tal que:

i. $Fx = S(x,x)$ *para cada* x *em* C.

ii. *Para cada* x *fixado em* X, $S(.,x)$ *é Lipschitziana de razão 1.*

iii. *Para cada* x *fixado em* X, $S(x,.)$ *é compacta.*

<u>Teorema 3.5.</u> *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo. Se* T *é um operador finitamente contínuo de* X *em* X' *tal que*

$$(3.4.) \qquad (Tx - Ty,\ x - y) \geq m\ ||x - y||^2, \quad m > 0\ ,$$

então, T *é bijetor, e o operador inverso* T^{-1} *é contínuo de* X' *em* X.

<u>Prova:</u>

Observa-se, inicialmente, o fato de que a hipótese da coercividade de T *está ausente neste teorema. Acontece, porém, que esta hipótese pode ser obtida a partir da relação (3.4.).*

Com efeito, pondo $y = 0$ *em (3.4.), vem*

$$(Tx - T0,\ x) \geq m\ ||x||^2$$

Disto decorre que,

$$(Tx,x) \geq (T0,x) + m\ ||x||^2 \geq (-||T0|| + m\ ||x||)\ ||x||\ .$$

Logo,

$$\frac{(Tx,x)}{||x||} \geq (-||T0|| + m\ ||x||)$$

Conclui-se que

$$\frac{(Tx,x)}{||x||} \to \infty \quad , \text{ quando } ||x|| \to \infty\ .$$

Chega-se com isso à conclusão de que T *é um operador finitamen*

te contínuo e coercivo satisfazendo (3.4.). Como a demonstração dêste teorema é análoga à prova do teorema 2.10., pág. 22 e 23, deixamos de dar aqui a sua demonstração.

Teorema 3.6. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo para o qual existe uma aplicação de dualidade J, fracamente contínua, de X em X' para alguma função guia q, B_r uma bola fechada de raio r.*

Seja T um operador finitamente contínuo de X em X' satisfazendo

$$(3.5.) \qquad (Tx - Ty,\ x - y) \geq m\ ||x - y||^2,\ m \geq 1\ ,$$

para todo x e y em X.

Seja F uma aplicação semi-Lipschitziana tal que a aplicação 1/m (Fx - T0) leva B_r numa bola fechada $B_{r'}$, de raio r' de X' com r' ≤ r. Suponhamos que $B_{r'} \subset T(B_r)$.

Existe, então, um elemento x_o em B_r tal que $Tx_o = Fx_o$.

Demonstração:

Queremos provar que a aplicação $T^{-1}F$ é uma aplicação semicontrativa de B_r em B_r.

1. $T^{-1}F$ aplica de B_r em B_r. Com efeito, pelo teorema 3.5., T é bijetor e tem inverso T^{-1} contínuo de X' em X. Para x e y em X, vamos pôr u = Tx e v = Ty, e temos, $x = T^{-1}u$ e $y = T^{-1}v$.

Da relação (3.5.) deduz-se que

$$(3.6.) \qquad ||x - y|| \leq 1/m\ ||Tx - Ty|| = 1/m\ ||u - v||,$$

para todo u e v em X'.

Sejam z um elemento arbitràriamente fixado em B_r, Fz o elemento correspondente de z pela F em X'. Sendo T bijetor de X em X', existe um

único elemento x em X tal que $Tx = Fz$, ou seja, $x = T^{-1}Fz$.

Mostremos que x está em B_r. De fato, pondo $y = 0$ em (3.5.), vem

$$||x||^2 \leq 1/m\ (Tx - To,\ x) = 1/m\ (Fz - T0,\ x) \leq$$

$$\leq 1/m\ ||Fz - T0||\ ||x|| \leq r'\ ||x||\ ,$$

graças à hipótese de que $1/m\ (Fz - T0)$ leva B_r em $B_{r'}$.

Donde, deduz-se que $||x|| \leq r' \leq r$, o que resulta que x está em B_r. Logo, $T^{-1}F$ aplica de B_r em B_r.

2. Mostremos, agora, que $T^{-1}F$ é semicontrativa de B_r em B_r. Inicialmente, verificamos que, pondo $u = S(x,w)$ e $v = S(y,w)$ em (3.6.), com x, y e w em X, obtemos

$$||T^{-1}S(x,w) - T^{-1}S(y,w)|| \leq 1/m\ ||S(x,w) - S(y,w)|| \tag{3.7.}$$

Seja a aplicação $S_1 = T^{-1}S$ de $X \times X$ em X, onde S é a aplicação que aparece na definição de semi-Lipschitziana de F. Vê-se, imediatamente, que S_1 aplica de $X \times X$ em B_r, pois, por hipótese, $B_{r'} \subset T(B_r)$, o que implica, pela biunivocidade de T, que

$$T^{-1}S\ (X \times X) \subset T^{-1}(B_{r'}) \subset B_r\ .$$

Mostremos que, para cada w fixado em X, $S_1(.,w)$ é não expansiva, enquanto que $S_1(w,.)$ é completamente contínua. Com efeito,

$$||S_1(x,w) - S_1(y,w)|| = ||T^{-1}S(x,w) - T^{-1}S(y,w)|| \leq$$

$$\leq 1/m\ ||S(x,w) - S(y,w)|| \leq 1/m\ ||x - y|| \leq ||x - y||\ ,$$

o que mostra que $S_1(.,w)$ é não expansiva.

Por outro lado, seja $x_n \rightharpoonup x$, *então, pela continuidade completa de* $S(w,.)$, $S(w,x_n) \to S(w,x)$. *Então, como* T^{-1} *é contínuo, temos*

$$T^{-1}S(w,x_n) \to T^{-1}S(w,x).$$

Logo, $S_1(w,.)$ *é completamente contínua.*

Assim, pelo teorema 3.1. de ponto fixo de Browder, $T^{-1}F$ *tem um ponto fixo* x_o *em* C, *i.é,* $T^{-1}Fx_o = x_o$, *ou seja,* $Tx_o = Fx_o$.

<u>*Teorema 3.7.*</u> *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior para o espaço* X, *para o operador* T, *e para a bola fechada* B_r, *seja* F *uma aplicação fracamente semi-Lipschitziana e contínua tal que a aplicação* $1/m\ (Fx - T0)$ *leva* B_r *numa bola fechada* $B_{r'}$ *de* X' *com* $r' \leq r$.

Suponhamos que $B_{r'} \subset T(B_r)$ *e que* $T^{-1}F$ *seja demicompacta. Existe, então, um elemento* x_o *em* B_r *tal que* $Tx_o = Fx_o$.

<u>*Prova:*</u>

Vamos provar que a aplicação $T^{-1}F$ *é uma aplicação fracamente semicontrativa de* B_r *em* B_r .

Já foi provado que a aplicação $T^{-1}F$ *aplica de* B_r *em* B_r *e que a aplicação definida por* $S_1 = T^{-1}S$ *aplica de* $X \times X$ *em* B_r *tem a propriedade de que, para cada* w *fixado em* X, $S(.,w)$ *é não expansiva.*

Assim sendo, resta apenas mostrar que $S_1(x,.)$ *é uma aplicação compacta para cada* x *fixado em* X.

Para isso observa-se que, como $S(x,.)$ *é uma aplicação compacta, ela leva um conjunto limitado num conjunto relativamente compacto; como* T^{-1} *é contínua, deduz-se que ela leva um conjunto relativamente compacto num conjunto relativamente compacto. Assim, conclui-se que* $T^{-1}S(x,.) = S_1(x,.)$ *leva um conjunto limitado num conjunto relativamente compacto, do que resulta que* $S_1(x,.)$ *é uma aplicação compacta.*

De acôrdo com as hipóteses do teorema, nota-se que $T^{-1}F$ é demicompacta e contínua. Consequentemente, conforme o que vimos no decorrer da demonstração do teorema 3.4., conclui-se que $(I - T^{-1}F)(B_r)$ é fechado.

Logo, aplicando o teorema 3.2. de ponto fixo de Browder, existe um elemento x_o em B_r tal que $T^{-1}Fx_o = x_o$, ou seja, $Tx_o = Fx_o$.

CAPÍTULO IV

SÔBRE O MÉTODO DE SUPER-REGULARIZAÇÃO ELÍTICA ENVOLVENDO UM OPERADOR SEMIMONÓTONO.

4.1. Introdução

Êste capítulo é devotado ao método de super-regularização elítica que consiste numa nova técnica para estabelecer a existência de soluções de equações funcionais não lineares num espaço de Banach reflexivo X envolvendo operadores monótonos T de X no seu espaço dual X'.

As equações funcionais não lineares num espaço de Banach surgem frequentemente na teoria de equações diferenciais parciais, entre as quais destacam-se: os problemas de valor contôrno de tipo elítico, parabólico ou hiperbólico, a equação de onda, bem como alguns tipos de equações integrais não lineares.

Com respeito ao problema da aproximação de soluções da equação não linear, existem diversos métodos utilizados por vários autores, por exemplo, recentemente, Petryshyn tem se dedicado intensamente ao estudo da PS - solubilidade da equação $Tx = w$ com o objetivo de dar uma demonstração construtiva da existência e unicidade desta equação. Além do mais, Lions e Strauss têm dado ùltimamente algumas contribuições ao problema da existência através do método de regularização elítica para resolução de diversos tipos de equações.

O método de super-regularização elítica foi introduzido por Browder e B.Ton na tentativa de englobar os vários métodos de tipo Galerkin e outras técnicas de regularização elítica.

O nosso objetivo principal neste capítulo é dedicarmo-nos ao método de super-regularização elítica envolvendo, em vez de um operador monótono demicontínuo, dois tipos de operadores mais gerais, a saber: operadores semimonótonos e pseudomonótonos.

Em suma, queremos tratar o método de super-regularização elítica a fim de obter a existência de solução da equação não linear $Tx = w$, onde T será um operador não linear semimonótono ou pseudomonótono de X em X'.

Antes, porém, daremos sucintamente algumas explicações do nosso procedimento. Dado um espaço (auxiliar) de Banach reflexivo Y (em particular, um espaço de Hilbert), seja Q uma aplicação linear contínua de Y em X tal que Q(Y) é denso em X. Dêste modo, o espaço Y pode ser considerado como espaço imerso pela Q no espaço X. Considera-se, então, uma aplicação monótona (auxiliar ou perturbação) de Y em Y', sujeita a certas hipóteses.

Podemos exibir gràficamente o seguinte esquema:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & T(Q(Y)) \subset X' \arrow[d, "Q'"] \\ Y \arrow[r, "M"] & Y' \end{tikzcd}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, *considera-se a equação aproximante em* Y'

$$\varepsilon M u_\varepsilon + Q'TQu_\varepsilon = Q'w \ ,$$

com w *em* $T(Q(Y))$, *a qual é resolvida em* Y . *Depois, mostra-se que a sequência de aproximações imersas* $\{Qu_{\varepsilon_j}\}$ *em* X *converge fracamente (ou fortemente, sob hipóteses suplementares) para um elemento* v *em* X, *onde* v *será uma solução da equação* $Tv = w$.

Vamos dar aqui um exemplo concreto da situação acima. Seja G *um subconjunto aberto limitado de* R^n *satisfazendo a condição uniforme do cone (i.é,* G *é um subconjunto aberto limitado suficientemente regular). Consideremos os espaços de Sobolev* $H^{m,p}(G)$ *e* $H^{k,2}(G)$ *e tomemos* $X = H^{m,p}(G)$ *e* $Y = H^{k,2}(G)$. *O teorema de imersão de Sobolev afirma que se* $\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{k-m}{n}$, $m < k$, *então*

$$H^{k,2}(G) \xhookrightarrow[Q]{} H^{m,p}(G) \ ,$$

$H^{k,2}(G)$ *é denso em* $H^{m,p}(G)$ *e* Q *é uma aplicação linear compacta.*

4.2. Operador semimonótono e Teoremas

Sejam X um espaço de Banach reflexivo, X' o seu espaço dual. Um operador T de X em X' é semimonótono se existe uma aplicação S de $X \times X$ em X' tal que:

1. *$Tx = S(x,x)$ para cada x em X.*
2. *Para cada x fixado em X, a aplicação $S(x,.)$ é contínua de X (com a topologia fraca) em X' (com a topologia forte).*
3. *Para cada x fixado em X, a aplicação $S(.,x)$ é monótona e hemicontínua.*

Devemos salientar o fato de que a classe de operadores semimonótonos é a generalização da classe de operadores monótonos hemicontínuos, pois, todo operador hemicontínuo T de X em X' é semimonótono com $S(x,y) = Tx$ para todo x e y em X. Por esta razão, a classe de operadores semimonótonos contém, além de outros, operadores contínuos, compactos, completamente contínuos, demicontínuos, Lipschitzianos, fracamente contínuos, quase monótonos, operadores introduzidos por J.Lions e J.Leray, etc.

Diz-se que um operador M de X em X' é firmemente coercivo se para cada x_o em X, tivermos $(Mx - Mx_o, x - x_o)/||x - x_o|| \to \infty$, quando $||x - x_o|| \to \infty$.

Observa-se que um operador firmemente coercivo é coercivo.

Estamos agora numa posição de enunciar e provar o nosso teorema fundamental envolvendo operador semimonótono. Antes, porém, vamos enunciar dois teoremas auxiliares para o nosso teorema.

Teorema 4.1. (Browder |16|). Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se T é um operador semimonótono e coercivo de X em X', então, T é sobrejetor, i.é, $T(X) = X'$.

Teorema 4.2. Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se T é um operador monótono hemicontínuo de X em X', então, para x_o em X e w em X', as seguintes desigualdades são equivalentes:

(1) $(Tx - w, x - x_o) \geq 0$ para todo x em X.

(2) $(Tx_o - w, x - x_o) \geq 0$ para todo x em X.

(3) $Tx_o = w$

<u>Teorema 4.3.</u> *Sejam X um espaço de Banach reflexivo, T um operador semimonótono coercivo de X em X'. Sejam Y um espaço de Banach reflexivo (em particular, espaço de Hilbert), M um operador monótono hemicontínuo e firmemente coercivo de Y em Y', Q uma aplicação linear contínua de Y em X tal que $Q(Y)$ é denso em X. Suponhamos que o operador $Q'TQ$ é semimonótono de Y em Y' e que $||S(0,Qu)||$ é limitado quando $||u|| \to \infty$. Temos, então,*

1) Para cada w em X' e $\varepsilon > 0$, existe ao menos uma solução u_ε em Y da equação

$$\varepsilon Mu_\varepsilon + Q'TQu_\varepsilon = Q'w \tag{4.1.}$$

2) Existe uma constante B tal que $||Qu_\varepsilon|| \leq B$ para todo $\varepsilon > 0$, onde

$$B = \text{máx}\ (||Q||\ C,\ f\ (||w||)\ ).$$

3) Para todo $\varepsilon_j \to 0$, $Qu_{\varepsilon_j} \rightharpoonup v$ em X, então, $Tv = w$, onde u_{ε_j} é uma solução da equação (4.1.) com w em $T(Q(Y))$.

4) T é sobrejetor; se T é injetor, então, Qu_{ε_j} converge a uma única solução v da equação $Tv = w$.

<u>Demonstração de 1):</u> *Por hipótese, o operador $Q'TQ$ é semimonótono de Y em Y', e M é um operador monótono hemicontínuo firmemente coercivo de Y em Y'. Então, o operador $K = \varepsilon M + Q'TQ$ é um operador semimonótono de Y em Y'. Por outro lado, temos,*

$$(Ku,u) = \varepsilon(Mu,u) + (Q'TQu,u) = \varepsilon(Mu,u) + (TQu,Qu).$$

Usando a monotonicidade de $S(.,x)$ em sua primeira variável, para cada x fixado em X, obtemos

$$(TQu,Qu) = (S(Qu,Qu) - S(0,Qu)\ ,\ Qu - 0) + (S(0,Qu),Qu) \geq (S(0,Qu),Qu) \geq$$

$$\geq - ||S(o,Qu)||\ ||Q||\ ||u||.$$

Donde,

(4.2.) $$(Ku,u) \geq \varepsilon(Mu,u) - ||S(0,Qu)||\ ||Q||\ ||u||.$$

Como, por hipótese, M é coercivo, i.é, $(Mu,u)/||u|| \to \infty$, quando $||u|| \to \infty$, e $||S(0,Qu)||$ é limitado quando $||u|| \to \infty$, resulta, pela relação (4.2.), que

$$\frac{(Ku,u)}{||u||} \to \infty \quad , \text{ quando } ||u|| \to \infty,$$

ou seja, K é um operador semimonótono coercivo de Y em Y'. Pelo teorema 4.1., K é efetivamente sobrejetor, i.é, $K(Y) = Y'$.

Decorre daí que para cada w em X' e $\varepsilon > 0$, a equação aproximante

$$\varepsilon Mu_\varepsilon + Q'TQu_\varepsilon = Q'w$$

tem pelo menos uma solução u_ε em Y, o que prova a primeira parte do teorema.

<u>Demonstração de 2)</u>: Consideremos a equação aproximante,

(4.3.) $$\varepsilon Mu_\varepsilon + Q'TQu_\varepsilon = Q'w \ ,$$

com w em X', a qual tem, conforme a primeira parte, uma solução u_ε em Y. Queremos mostrar que, existe um constante B tal que $||Qu_\varepsilon|| \leq B$ para todo $\varepsilon > 0$. Com efeito, aplicando ambos os lados da equação (4.3.) num elemento u_ε, obtemos

(4.4.) $$\varepsilon(Mu_\varepsilon, u_\varepsilon) + (Q'TQu_\varepsilon, u_\varepsilon) = (Q'w, u_\varepsilon)$$

Como M é coercivo, existe $C > 0$ tal que para $||x|| \geq C$, temos,

(4.5.) $$(Mx,x) \geq 0$$

Para $\varepsilon > 0$ *para qual* $||u_\varepsilon|| \leq C$, *pela linearidade e continuidade de* Q, *obtemos,*

$$(4.5.)^* \qquad ||Qu_\varepsilon|| \leq ||Q||\ ||u_\varepsilon|| \leq ||Q||.C\ .$$

Por outro lado, para $\varepsilon > 0$ *para qual* $||Qu_\varepsilon|| \geq C\ ||Q||$, *teríamos,* $||u_\varepsilon|| \geq C$. *Segundo a relação (4.5.), se* $||u_\varepsilon|| \geq C$, *então,* $(Mu_\varepsilon\ ,\ u_\varepsilon) \geq 0$.

Portanto, da relação (4.4.), deduz-se que

$$(4.6.) \qquad (TQu_\varepsilon,\ Qu_\varepsilon) \leq (w,\ Qu_\varepsilon) \leq ||w||\ ||Qu_\varepsilon||\ .$$

Como T *é coercivo, existe uma função* $d(r)$ *de* R^+ *em* R *tal que* $d(r) \to \infty$ *com* $r \to \infty$, *tal que*

$$(Tx,x) \geq d(||x||).||x||\ ,$$

para todo x *em* X. *Em particular, temos*

$$(4.7.) \qquad (TQu_\varepsilon,\ Qu_\varepsilon) \geq d(||Qu_\varepsilon||).||Qu_\varepsilon||.$$

Das relações (4.6.) e (4.7.), obtemos,

$$d(||Qu_\varepsilon||)\ ||Qu_\varepsilon|| \leq ||w||\ ||Qu_\varepsilon||\ ,$$

o que acarreta

$$(4.8.) \qquad ||Qu_\varepsilon|| \leq f(||w||)\ ,$$

onde $f(r) = \sup\ \{t;\ d(t) \leq r\}$, *e vê-se que* f *é uma função finita crescente de* R^+ *em* R, *já que* $d(t)$ *é finita quando* t *é finita.*

Juntando $(4.5.)^*$ *e (4.8.), obtemos,*

$$||Qu_\varepsilon|| \leq \text{máx}(||Q||\ C,\ f(||w||)) ,$$

para todo $\varepsilon > 0$, *e a prova da segunda parte do teorema está completa.*

<u>*Demonstração de 3)*</u>: *Vamos provar que se* u_{ε_j} *é solução da aproximante (cuja existência é assegurada pela parte 1),*

$$\varepsilon_j Mu_{\varepsilon_j} + Q'TQu_{\varepsilon_j} = Q'w \quad ,$$

com w *em* $T(Q(Y))$, *e se para* $\varepsilon_j \to 0$, $Qu_{\varepsilon_j} \longrightarrow v$ *em* X, *então,* $Tv = w$.

Em outras palavras, isto equivle a afirmação de que Qu_{ε_j} *converge fracamente a uma solução* v *da equação* $Tv = w$.

Como X *é reflexivo e* $||Qu_\varepsilon||$ *é uniformemente limitado para todo* $\varepsilon > 0$, *podemos supor que* $Qu_{\varepsilon_j} = v_j \longrightarrow v_o$, *quando* $\varepsilon_j \to 0$; *vamos mostrar que* v_o *é uma solução da equação* $Tv_o = w$.

Com efeito, seja x *um elemento arbitrário do subconjunto* $Q(Y)$ *de* X *(de modo que existe* y *em* Y *tal que* $x = Q(y)$.

Pela monotonicidade de $S(.,\ z)$ *em sua primeira variável, para cada* j, *obtemos,*

$$(4.9.) \qquad (S(x,v_j)-w,\ x-v_j) = (S(x,v_j)-S(v_j,v_j),\ x-v_j) +$$

$$+ (S(v_j,v_j)-w,\ x-v_j) \geq (S(v_j,v_j)-w,\ x-v_j) =$$

$$= (Tv_j - w,\ x-v_j) = (Q'TQu_{\varepsilon_j} - Q'w,\ y-u_{\varepsilon_j}),$$

notando que Q' *é linear e* $x = Q(y)$ *e* $v_j = Qu_{\varepsilon_j}$.

Observando que u_{ε_j} *é uma solução da equação*

$$\varepsilon_j Mu_{\varepsilon_j} + Q'TQu_{\varepsilon_j} = Q'w \quad ,$$

e que

$$Q'TQu_{\varepsilon_j} - Q'w = - \varepsilon_j Mu_{\varepsilon_j} \, ,$$

e

$$y - u_{\varepsilon_j} = - (u_{\varepsilon_j} - y)$$

obtemos,

(4.10.) $$(S(x,v_j) - w, \; x - v_j) \geq \varepsilon_j \, (Mu_{\varepsilon_j}, \; u_{\varepsilon_j} - y)$$

Como $S(z,.)$ *é completamente contínua em sua segunda variável e* $v_j \longrightarrow v_o$, *obtemos,*

$$S(x,v_j) \to S(x,v_o) \qquad e$$

$$(S(x,v_j)-w, \; x-v_j) \to (S(x,v_o)-w, \; x-v_o)$$

Logo,

(4.11.) $$(S(x,v_o)-w, \; x-v_o) \geq \limsup \, \varepsilon_j (Mu_{\varepsilon_j}, \; u_{\varepsilon_j} - y)$$

Como M *é firmemente coercivo, i.é,*

$$(Mx-My, \; x-y)/||x-y|| \to \infty, \text{ se } ||x-y|| \to \infty \quad ,$$

existe $C > 0$, *dependendo de* y, *tal que,*

(4.12.) $$(Mu_{\varepsilon_j}, \; u_{\varepsilon_j} - y) \geq 0, \text{ para } ||u_{\varepsilon_j}|| \geq C,$$

e temos,

(4.13.) $$(S(x,v_o)-w,\ x-v_o) \geq 0.$$

Para $||u_{\varepsilon_j} - y|| \leq C$, pela monotonicidade de M, temos,

$$(Mu_{\varepsilon_j},\ u_{\varepsilon_j} - y) = (Mu_{\varepsilon_j} - My,\ u_{\varepsilon_j} - y)+(My,\ u_{\varepsilon_j} - y \geq$$

$$\geq (My,\ u_{\varepsilon_j} - y),\ e$$

donde,

(4.14.) $$(S(x,v_o)-w,\ x-v_o) \geq \lim\sup_{\varepsilon_j} (My,\ u_{\varepsilon_j}-y) = 0$$

Logo,

(4.15.) $$(S(x,\ v_o)-w,\ x-v_o) \geq 0,$$

para todo x em $Q(Y)$.

Mostremos, agora, que a relação (4.15.) é verificada para todo x em X. Com efeito, $S(.,z)$ é hemicontínua de X em X' para z fixado; logo ela é demicontínua, ou seja, se $x_n \to x$ em X, então, $S(x_n,z) \longrightarrow S(x,z)$. Por outro lado, por hipótese, $Q(Y)$ é denso em X. Logo, se x é um elemento qualquer de X, existe uma sequência $\{x_n\}$ em $Q(Y)$ tal que $x_n \to x$; e além do mais, cada elemento x_n deve satisfazer,

$$(S(x_n,v_o)-w,\ x_n-v_o) \geq 0$$

devido à relação (4.15.).

Pela demicontinuidade de $S(.,v_o)$, deduz-se que

$$S(x_n,\ v_o) \longrightarrow S(x,v_o)\ .$$

Donde,

$$(4.16.) \qquad (S(x,v_o)-w,\ x-v_o) = \lim\ (S(x_n,v_o)-w,\ x_n-v_o) \geq 0$$

Logo, combinando as relações (4.15.) e (4.16.) chega-se a conclusão de que,

$$(4.17.) \qquad (S(x,v_o)-w,\ x-v_o) \geq 0$$

para todo x em X.

Como T é semimonótono, a aplicação $x \to S(x,v_o)$ é monótona e hemicontínua. Consequentemente, em virtude do teorema 4.2, a relação (4.17.) implica

$$(S(v_o,\ v_o)-w,\ x-v_o) \geq 0$$

para todo x em X, ou equivalentemente,

$$(Tv_o-w,\ x-v_o) \geq 0$$

para todo x em X, o que acarreta $Tv_o = w$.

4.3. <u>*Sôbre convergência forte da sequência $\{Qu_\varepsilon\}$*</u> .

Temos visto na secção anterior que a sequência aproximante $\{Qu_\varepsilon\}$ converge fracamente a uma solução da equação $Tv = w$.

Tendo em vista que, numa determinada situação, há necessidade da convergência forte de uma sequência aproximante, provaremos, nesta secção, sob as hipóteses adicionais, que a sequência aproximante $\{Qu_\varepsilon\}$ converge <u>fortemente</u> a uma solução v da equação $Tv = w$.

Um operador T de X em X' é firmemente monótono, se para cada $b > 0$, existe uma função q_b de R^+ em R, estritamente crescente, com $q_b(0) = 0$, tal que

(4.18.) $$(Tx-Ty,\ x-y) \geq q_b(|\,||x||-||y||\,|)\ ,$$

para todo x e y em X satisfazendo $||x|| \leq b$ e $||y|| \leq b$.

Teorema 4.4. Sejam X um espaço de Banach uniformemente convexo, T um operador semimonótono coercivo, firmemente monótono de X em X'. Sejam Y um espaço de Banach (auxiliar) reflexivo, M um operador monótono hemicontínuo, firmemente coercivo de Y em Y', Q uma aplicação linear e contínua de Y em X tal que $Q(Y)$ é denso em X. Suponhamos que $Q'TQ$ é semimonótono de Y em Y'.
Temos, então,

a) Para cada $\varepsilon > 0$, existe pelo menos uma solução u_ε em Y da equação aproximante

(4.19.) $$\varepsilon Mu_\varepsilon + Q'TQu_\varepsilon = Q'w$$

para cada w em X'.

b) Existe um constante B tal que $||Qu_\varepsilon|| \leq B$ para todo $\varepsilon > 0$.

c) Para cada w, T é sobrejetor, i.é, existe uma solução da equação $Tv = w$. As soluções desta equação estão situadas numa esfera em X.

d) Escolhendo-se uma solução u_{ε_j} da equação (4.19.) (que existe pela a)), para cada $\varepsilon_j > 0$ e w em $T(Q(Y))$, então, Qu_{ε_j} converge fortemente a uma solução v_o da equação $Tv_o = w$, quando $\varepsilon_j \to 0$.

Prova de a). Seja $K = \varepsilon M + Q'TQ$. Vimos já na demonstração do teorema anterior que K é semimonótono de Y em Y'.

Em virtude do teorema 4.1, para provar a existência de solução da equação

(4.20.) $$\varepsilon Mu_\varepsilon + Q'TQu_\varepsilon = Q'w \quad ,$$

para cada $\varepsilon > 0$ *e* w *em* X', *resta apenas mostrar que* K *é coercivo.*

Com efeito, sendo T *firmemente monótono, temos*

$$(Ku,u)=\varepsilon(Mu,u)+(TQu,Qu)=\varepsilon(Mu,u)+(TQu-T0,Qu-0)+(T0,Qu) \geq$$

$$\geq \varepsilon(Mu,u)+(T0,Qu) \geq - ||T0|| \; ||Q|| \; ||u|| + \varepsilon(Mu,u).$$

Donde,

$$\frac{(Ku,u)}{||u||} \geq \varepsilon \frac{(Mu,u)}{||u||} - ||T0|| \; ||Q||$$

Como $\dfrac{(Mu,u)}{||u||} \to \infty$, *quando* $||u|| \to \infty$, *deduz-se que,*

$\dfrac{(Ku,u)}{||u||} \to \infty$, *quando* $||u|| \to \infty$, *o que mostra que* K *é coercivo.*

<u>*Prova de b).*</u>

O fato de que $||Qu_\varepsilon||$ *é limitado para todo* $\varepsilon > 0$ *já foi provado no teorema anterior.*

<u>*Prova de c)*</u> .

Sendo T *um operador semimonótono e coercivo, pelo teorema 4.1,* T *é sobrejetor.*

Se $Tu = Tv = w$, *i.é, se* u *e* v *são duas soluções da equação*

$$Tx = w, \text{ seja } b = \text{máx } (||u||, \; ||v||).$$

Então,

$$q_b(|||u|| - ||v|||) \leq (Tu-Tv,\ u-v) = 0,$$

pela monotonicidade firme de T.

Tendo em vista que $q_b(r) > 0$ *para* $r > 0$, *deduz-se que* $|\ ||u|| - ||v||\ | = 0$, *ou seja,* $||u|| = ||v||$, *o que mostra que as soluções da equação* $Tv = w$, *para cada* w *em* X', *estão situadas numa esfera com centro na origem em* X.

<u>*Prova de d).*</u>

Já foi provado no teorema anterior que Qu_{ε_j} *converge fracamente a uma solução da equação* $Tv = w$, $\varepsilon_j \to 0$, *com* w *em* $T(Q(Y))$. *Vamos mostrar agora que* $Qu_{\varepsilon_j} \to v$, *quando* $\varepsilon_j \to 0$, *e que* v *é uma solução de* $Tv = w$.

Com efeito, desde que w *está em* $\overline{T(Q(Y))}$, *existe um elemento* v *em* $Q(Y)$ *tal que* $w = Tv$. *Sendo* v, *por sua vez, elemento de* $Q(Y)$, *existe um* y *em* Y *tal que* $v = Q(y)$.

Seja u_{ε_j} *uma solução da equação*

$$\varepsilon_j Mu_{\varepsilon_j} + Q'TQu_{\varepsilon_j} = Q'w \tag{4.21.}$$

Levando em conta que $v = Q(y)$ *com* y *em* Y, *podemos escrever* $w = Tv = TQy$, *obtemos,*

$$\varepsilon_j My + Q'TQy = \varepsilon_j My + Q'w \tag{4.22.}$$

Subtraindo-se a relação (4.22.) da relação (4.21.), temos

$$\varepsilon_j(Mu_{\varepsilon_j} - My) + Q'(TQu_{\varepsilon_j} - TQy) = -\ \varepsilon_j My \tag{4.23.}$$

Aplicando-se ambos os membros da equação (4.23.) num elemento $(u_{\varepsilon_j} - y)$, *obtemos*

$$\varepsilon_j(Mu_{\varepsilon_j} - My,\ u_{\varepsilon_j} - y) + (TQu_{\varepsilon_j} - TQy,\ Qu_{\varepsilon_j} - Qy) = \tag{4.24.}$$

$$= \varepsilon_j(My, y - u_{\varepsilon_j}).$$

Por outro lado, como T é monótono, da relação (4.24.) resulta que

$$(Mu_{\varepsilon_j} - My,\ u_{\varepsilon_j} - y) \leq (My, y - u_{\varepsilon_j}) \leq ||My||\ \ ||y-u_{\varepsilon_j}||.$$

Donde,

$$(Mu_{\varepsilon_j} - My,\ u_{\varepsilon_j} - y)/||u_{\varepsilon_j} - y|| \leq ||My|| < \infty.$$

Tendo em vista que M é firmemente coercivo, deduz-se daí que

$$||u_{\varepsilon_j} - y|| \leq C \tag{4.25.}$$

Retomando a relação (4.24.), e tendo em mãos a monotonicidade de M e a relação (4.25.), obtemos

$$(TQu_{\varepsilon_j} - TQy,\ Qu_{\varepsilon_j} - Qy) \leq \varepsilon_j(My,\ y - u_{\varepsilon_j}) \leq$$

$$\leq \varepsilon_j||My||\ \ ||y - u_{\varepsilon_j}|| \leq \varepsilon_j||My||\ C \to 0$$

quando $\varepsilon_j \to 0$.

Pondo $b = \text{máx}(\overset{B}{\cancel{||Qu_{\varepsilon_j}||}},\ ||Qy||)$, *e observando que T é firme-*

mente monótono, vem

$$q_b(\,|\,||Qu_{\varepsilon_j}|| - ||Qy||\,|\,) \leq (TQu_{\varepsilon_j} - TQy, Qu_{\varepsilon_j} - Qy) \to 0$$

com $\varepsilon_j \to 0$.

Como q é estritamente crescente com $q_b(0) = 0$, segue-se que $||Qu_{\varepsilon_j}|| \to ||Qy|| = ||v||$.

Graças ao lema 2.2. (Cap. II), segue-se que $Qu_{\varepsilon_j} \to v$ em X, e temos $Tv = w$, já que v é uma solução da equação $Tv = w$.

4.4. Definição e Teoremas Concernentes a Operador Pseudo-Monótono; Teorema de Existência.

Esta seção é devotada aos teoremas concernentes a um operador pseudomonótono, e ao teorema de sobrejetividade dêste operador. Alguns dêstes teoremas mostram que o operador pseudomonótono é a extensão dos operadores hemicontínuos e semimonótono anteriormente estudados.

Sejam X um espaço de Banach reflexivo, X' o seu espaço dual. Um operador T de X em X' é pseudomonótono se êle verifica as duas seguintes propriedades:

1. Se $\{x_k\}$ é uma sequência em X que converge fracamente para um elemento x_o em X com

$$\limsup\,(Tx_k, x_k - x_o) \leq 0$$

então, temos

$$(Tx_o, x_o - x) \leq \liminf\,(Tx_k, x_k - x)\,,$$

para todo x em X.

2. Para todo y em X, a aplicação $x \to (Tx, x - y)$ é limitada

inferiormente sôbre subconjuntos limitados de X.

<u>*Teorema 4.5.*</u> *Tôda aplicação monótona hemicontínua T é uma aplicação pseudomonótona.*

<u>*Prova*</u>

Seja $x_n \rightharpoonup x_o$ *em X com* $\limsup (Tx_n, x_n - x_o) \leq 0$. *Pela monotonicidade de T, temos*

$(Tx_n - Tx_o, x_n - x_o) \geq 0$, *ou seja,* $(Tx_o, x_n - x_o) \leq (Tx_n, x_n - x_o)$.

Logo,

$$0 = \lim (Tx_o, x_n - x_o) \leq \limsup (Tx_n, x_n - x_o) = 0$$

o que acarreta que existe

$$\lim (Tx_n, x_n - x_o) = 0 \tag{4.26.}$$

Sejam x um elemento qualquer em X, e $y = (1 - t)x_o + tx$ *com* $t \in [0,1]$. *Pela monotonicidade de T, temos*

$$(Tx_n - Ty, x_n - y) \geq 0$$

e vem

$$-(Tx_n, x_n - x_o) + (T(x_o - tx_o + tx), x_n - x_o + tx_o - tx) \leq \tag{4.27.}$$

$$\leq t\,(Tx_n, x_o - x).$$

Tendo em vista que $x_n \rightharpoonup x_o$, *passando ao limite em (4.27.), quando* $n \to \infty$, *obtemos*

$$t(T(x_o - tx_o + tx), x_o - x) \leq t \liminf (Tx_n, x_o - x),$$

em virtude da relação (4.26.). Cancelando o fator $t > 0$, e passando ao limite quando $t \to 0^+$, e lembrando que T é hemicontínuo, obtemos

$$(Tx_o, x_o - x) \leq \liminf (Tx_n, x_o - x) = \liminf (Tx_n, x_n - x),$$

tendo em conta que $x_n \rightharpoonup x_o$.

Mostremos agora que para y em X, a aplicação $x \to (Tx, x - y)$ é limitada inferiormente sôbre os subconjuntos de X. Com efeito, pela monotonicidade de T, obtemos

$$(Tx, x - y) \geq (Ty, x - y) \geq -||Ty|| \quad ||x - y|| \geq K \text{ (cte)}$$

desde que x percorra num subconjunto limitado de X.

Logo, T é pseudomonótona.

<u>Teorema 4.6.</u> Todo operador T semimonótono é um operador pseudomonótono.

<u>Prova</u>

Seja $x_n \rightharpoonup x_o$ em X com $\limsup (Tx_n, x_n - x_o) \leq 0$; como T é semimonótono, existe uma aplicação S de $X \times X$ em X', tal que, para cada x fixado em X, a aplicação $S(.,x)$ é monótona e hemicontínua, enquanto $S(x,.)$ é completamente contínua. Vamos mostrar que $(Tx_o, x_o - x) \leq \liminf (Tx_n, x_n - x)$, para todo x em X.

Como $x_n \rightharpoonup x_o$ e $S(x_o,.)$ é completamente contínua, segue-se que $S(x_o,x_n) \to S(x_o,x_o)$. Pela monotonicidade de S em seu primeiro argumento, temos

$$(S(x_n,x_n), x_n - x_o) \geq (S(x_o,x_n), x_n - x_o)$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, temos

$$0 = \lim (S(x_o,x_n), x_n - x_o) = \lim\sup (S(x_n,x_n), x_n - x_o) = \lim\sup (Tx_n, x_n - x_o) = 0,$$

Donde,

$$\lim (S(x_n,x_n), x_n - x_o) = 0 \tag{4.28.}$$

Sejam x um elemento qualquer em X, e $z = (1 - t)x_o + tx$ com $t \in [0,1]$. Pela monotonicidade de S em sua ~~segunda~~ primeira variável, temos

$$(S(x_n,x_n) - S(z,x_n), x_n - z) \geq 0$$

e

$$-(S(x_n,x_n), x_n - x_o) + (S(x_o - tx_o + tx, x_n), x_n - x_o) + t(S(x_o - tx_o + tx, x_n), x_o - x) \leq t(S(x_n,x_n), x_o - x).$$

Em vista da relação (4.28.) e $\lim (S(x_o - tx_o + tx, x_n), x_n - x_o)) = 0$, passando ao limite quando $n \to \infty$, vem

$$t(S(x_o - tx_o + tx, x_n), x_o - x)) \leq t \lim\inf (S(x_n,x_n), x_o - x)).$$

Cancelando $t > 0$, e passando ao limite quando $n \to \infty$, resulta

$$(S(x_o,x_o), x_o - x) \leq \lim\inf (S(x_n,x_n), x_o - x) = \lim\inf (S(x_n,x_n), x_n - x),$$

sabendo-se que $x_n \rightharpoonup x_o$.

Logo,

$$(Tx_o, x_o - x) \leq \liminf (Tx_n, x_n - x) ,$$

para todo x em X, o que queríamos mostrar.

Mostremos agora que, para y em X, a aplicação $x \to (Tx, x-y)$ é limitada inferiormente sôbre os subconjuntos limitados de X. Com efeito, pela monotonicidade de S em seu primeiro argumento,

$$(4.29.) \qquad (Tx, x - y) = (S(x,x), x - y) \geq (S(y,x), x - y)$$

Como $S(y,.)$ é completamente contínua, e X é reflexivo, logo compacta, ela leva um subconjunto limitado de X num subconjunto limitado de X'. Consequentemente,

$$||S(y,x)|| \leq K_1 ,$$

sempre que x varia num subconjunto limitado de X.

Por outro lado,

$$||x - y|| \leq K_2 ,$$

sempre que x percorre num subconjunto limitado de X.

Retomando a relação (4.29.), obtemos

$$(Tx, x - y) \geq (S(y,x), x - y) \geq -||S(y,x)||\,||x - y|| \geq C,$$

desde que x percorra um subconjunto limitado de X. Logo, a aplicação $x \to (Tx, x - y)$, com y em X, é limitado inferiormente sôbre os subconjuntos limitados de X, o que completa a prova do teorema.

Conforme os teoremas anteriores, vê-se que a classe de operadores pseudomonótonos constitui uma classe muito extensa, pois, contém, entre outros, os operadores tais como: operadores contínuos, fracamente contínuos, compactos, demicontínuos, semimonótonos, quase monótonos, etc.

<u>*Teorema 4.7.*</u> *Seja X um espaço de Banach de dimensão finita.*

Um operador T de X em X' é pseudomonótono se e sòmente se T é contínuo.

Prova

Naturalmente, todo operador contínuo é pseudomonótono. Reciprocamente, seja T um operador pseudomonótono de X em X' com $\dim X < \infty$. Seja $x_n \rightharpoonup x_o$ em X com $\limsup (Tx_n, x_n - x_o) \leq 0$.

Mostremos que $\{Tx_n\}$ é limitado. Com efeito, se $\{Tx_n\}$ não fôsse limitado, podemos extrair uma subsequência ainda denotada por $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x_o$, $||Tx_n|| \to \infty$, e $y_n = Tx_n/||Tx_n|| \to y$ com $||y|| = 1$.

Seja z um elemento em X; como $\{x_n\}$ é limitada em X, devido à segunda condição de pseudomonotonicidade de T, obtemos

$$K \leq (Tx_n, x_n - z)$$

Dividindo por $||Tx_n||$ e passando ao limite quando $n \to \infty$, vem

$$0 \leq (y, x_o - z) ,$$

para todo z em X, o que acarreta $y = 0$, conduzindo-nos a uma contradição.

Vamos, agora, mostrar que $Tx_n \to Tx_o$ (continuidade de T). Com efeito, se isso não fôsse verificado, poderíamos extrair uma subsequência ainda denotada por $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x_o$ e $Tx_n \to w \neq Tx_o$. (obs.: $Tx_n \to w$, porque Tx_n é limitado em espaço de dimensão finita).
Donde,

$$\limsup (Tx_n, x_n - x_o) \leq 0.$$

Pela pseudomonotonicidade de T, temos

$$(Tx_o, x_o - x) \leq \liminf (Tx_n, x_n - x) = (w, x_o - x)$$

para todo x em X, acarretando $Tx_o = w$, o que é uma contradição.

Logo, T é contínuo de X em X'.

Teorema 4.8. *Se T é um operador pseudomonótono e A é um operador monótono hemicontínuo de X em X', então, a soma S = T + A é um operador pseudomonótono.*

Demonstração: *Seja* $x_n \rightharpoonup x_o$ *em X com* $\limsup(Sx_n, x_n - x_o) \leq 0$

Pela monotonicidade de A, temos

$$(Ax_n, x_n - x_o) \geq (Ax_o, x_n - x_o)$$

Donde,

$$(Tx_n, x_n - x_o) = (Sx_n, x_n - x_o) - (Ax_n, x_n - x_o) \leq$$

$$\leq (Sx_n, x_n - x_o) - (Ax_o, x_n - x_o).$$

Segue-se que

$$\limsup (Tx_n, x_n - x_o) \leq \limsup (Sx_n, x_n - x_o) \leq 0 ,$$

ou seja,

$$\limsup (Tx_n, x_n - x_o) \leq 0$$

Como T é pseudomonótono, resulta que,

$$(Tx_o, x_o - x) \leq \liminf (Tx_n, x_n - x) = 0$$

para todo x em X.

Consequentemente,

$$\limsup (Ax_n, x_n - x_o) \leq \limsup (Sx_n, x_n - x_o) \leq 0$$

e vem

$$\limsup (Ax_n, x_n - x_o) \leq 0.$$

Sendo A pseudomonótono, em virtude do teorema 4.5., decorre que

$$(Ax_o, x_o - x) \leq \liminf (Ax_n, x_n - x) ,$$

para todo x em X. Logo,

$$(Sx_o, x_o - x) = (Tx_o, x_o - x) + (Ax_o, x_o - x) \leq$$

$$\leq \liminf (Tx_n, x_n - x) + \liminf (Ax_n, x_n - x) \leq$$

$$\leq \liminf (Sx_n, x_n - x),$$

para todo x em X, o que mostra a primeira parte da definição de pseudomonotonicidade.

A demonstração da segunda parte da definição de pseudomonotonicidade de S será deixada a cargo do leitor por ser imediata.

A fim de provar o teorema de sobrejetividade do operador pseudomonótono, vamos enunciar o seguinte teorema de sobrejetividade de um operador contínuo.

<u>Teorema 4.9.</u> Se T é um operador contínuo e coercivo de um espaço de Banach X de dimensão finita em X', então T é sobrejetor, i.é, $T(X) = X'$.

<u>Teorema 4.10.</u> Se T é um operador pseudomonótono e coercivo de um espaço de Banach reflexivo separável X em X', então, T é sobrejetor.

<u>Demonstração:</u> Se T é pseudomonótono de X em X', vamos mostrar que para todo w em X', existe um elemento x em X tal que $Tx = w$. Note-se que é suficiente mostrar que 0 está em $T(X)$, pois, caso contrário, basta considerar o operador $T_w = Tx - w$, com w em X', e observar que T_w tem as mesmas propriedades que as de T.

Seja $\{F_n\}$ *uma sequência crescente de subespaços de dimensão finita de* X, *ordenada por inclusão, tal que* $\overline{\bigcup F_n} = X$. *Sejam* j_{F_n} *a injeção canônica de* F_n *em* X, *e* j'_{F_n} *a sua sobrejeção adjunta de* X' *sôbre* F'_n. *Para cada* F_n, *seja* T_{F_n} *a aplicação de* F_n *em* F'_n, *definida por*

$$T_{F_n} = j'_{F_n} \cdot T \cdot j_{F_n}$$

que é um operador pseudomonótono de F_n *em* F'_n. *Como dimensão de* F_n *é finita, pelo teorema 4.7.,* T_{F_n} *é contínuo de* F_n *sôbre* F'_n.

Para x *e* y *em* F_n, *temos*

$$(T_{F_n} x, y) = (j'_{F_n} T j_{F_n} x, y) = (T j_{F_n} x, j_{F_n} y) = (Tx, y) ,$$

Pela coercividade de T, *obtemos*

$$(T_{F_n} x, x) = (Tx, x) \geq c(||x||) \; ||x||$$

onde c *é uma função de* R^+ *em* R *tal que* $c(r) \to \infty$, *quando* $r \to \infty$. *Concluímos assim que o operador* T_{F_n} *é um operador contínuo e coercivo de* F_n *em* F'_n. *Logo, pelo teorema 4.9.,* T_{F_n} *é sobrejetor, i.é, existe uma solução* x_{F_n} *em* F_n *tal que* $T_{F_n} x_{F_n} = 0$.

Segue-se que

$$0 = (T_{F_n} x_{F_n}, x_{F_n}) \geq c(||x_{F_n}||) \; ||x_{F_n}||$$

Logo, devido à propriedade de $c(r)$ *de que* $c(r) \to \infty$, *quando* $r \to \infty$, *deduz-se que existe uma constante* K *tal que* $||x_{F_n}|| \leq K$, *qualquer que seja* n.

Portanto, pela reflexividade de X, podemos supor que existe uma subsequência ainda denotada por $\{x_{F_n}\}$ *tal que* $x_{F_n} \rightharpoonup x_o$ *em X. Por conseguinte, temos*

$$\limsup\,(Tx_{F_n},\ x_{F_n} - x_o) = \limsup\,(T_{F_n}x_{F_n},\ x_{F_n} - x_o) \leq 0$$

já que T_{F_n} *é contínuo em* F_n.

Como T é pseudomonótono, resulta que, para todo x em X,

$$(Tx_o,\ x_o - x) \leq \liminf\,(Tx_{F_n},\ x_{F_n} - x) = \liminf\,(T_{F_n}x_{F_n},\ x_{F_n} - x) = 0,$$

desde que $T_{F_n}x_{F_n} = 0$ *para todo n.*

Segue-se daí que $Tx_o = 0$ *o que implica* $0 \in T(X)$, *e a prova do teorema está completa.*

4.5. Sôbre o método de super-regularização elítica envolvendo operador pseudo monótono.

Tendo sido obtido o teorema da sobrejetividade para o operador pseudomonótono na seção anterior, estamos, nesta seção, numa posição de investigar o método de super-regularização elítica envolvendo operador pseudomonótono.

Teorema 4.11. Sejam X um espaço de Banach reflexivo (em particular, Hilbert), um operador pseudomonotono coercivo de X em X', coercivo, M um operador monótono hemicontínuo, firmemente coercivo de Y em Y', Q uma aplicação linear contínua de Y em X tal que Q(Y) é denso em X. Suponhamos que Q'TQ é um operador pseudomonótono de Y em Y' e que $||TQy||$ *é limitado para* $||y|| \to \infty$.

Temos então:

1. *Para cada w em X' e* $\varepsilon > 0$, *existe ao menos uma solução* x_ε *em Y da equação.*

(4.30.) $$\varepsilon Mx_\varepsilon + Q'TQx_\varepsilon = Q'w$$

2. *Existe um constante B tal que* $||Qx_\varepsilon|| \leq B$ *para todo* $\varepsilon > 0$.

3. *Se, para* $\varepsilon_n \to 0$, $Qx_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x_o$ *em X, então* $Tx_o = w$, *com w em X', onde* x_{ε_n} *é uma solução da equação (4.30.).*

4. *Se T é injetora, então* Qx_{ε_n} *converge fracamente para uma única solução* x_o *da equação* $Tx_o = w$.

<u>*Prova de 1.*</u>

Por hipótese, o operador Q'TQ é pseudomonótono de Y em Y' e M é um operador monótono hemicontínuo de Y em Y'.

Pelo teorema 4.8., o operador $K = \varepsilon M + Q'TQ$, *para* $\varepsilon > 0$, *é um operador pseudomonótono de Y em Y'.*

Mostremos, agora, que K é coercivo. Com efeito,

$$(Ky,y) = \varepsilon.(My,y) + (TQy,Qy)$$

e temos,

$$\frac{(Ky,y)}{||y||} = \varepsilon\frac{(My,y)}{||y||} + \frac{(TQy,Qy)}{||y||} \geq \varepsilon\frac{(My,y)}{||y||} - ||TQy|| \quad ||Q||$$

Como, por hipótese, $||TQy||$ *é limitado e* $\frac{(My,y)}{||y||} \to \infty$ *quando* $||y|| \to \infty$, *segue-se que*

$$\frac{(Ky,y)}{||y||} \to \infty \quad , \text{ quando } ||y|| \to \infty .$$

Finalmente, temos concluído que K é um operador pseudomonótono

coercivo de Y em Y'. Portanto, pelo teorema 4.10., a equação (4.30.) em Y' tem pelo menos uma solução x_ε em Y, o que prova a parte 1. .

Prova de 2.

A demonstração de que $||Qx_\varepsilon||$ é uniformemente limitado para todo $\varepsilon > 0$, é análoga à que foi feita na prova da parte 2. do teorema 4.3., já que, por hipótese, T é coercivo e M é monótono firmemente coercivo.

Prova de 3.

Vamos provar que se x_ε é uma solução (que existe pela parte 1.) da equação aproximante

$$\varepsilon_n M x_{\varepsilon_n} + Q'TQx_{\varepsilon_n} = Q'w$$

com w em X', e se $\varepsilon_n \to 0$, $QX_n \rightharpoonup x_o$ em X, então $Tx_o = w$, o que equivale a afirmar que Qx_{ε_n} converge fracamente para uma solução x_o da equação $Tx_o = w$, quando $\varepsilon_n \to 0$.

Como X é reflexivo e $||Qx_{\varepsilon_n}||$ é uniformemente limitado, pela parte 2., podemos supor, sem perda de generalidade, que $Qx_{\varepsilon_n} = z_n \rightharpoonup x_o$ quando $\varepsilon_n \to 0$; assim sendo, queremos provar que $Tx_o = w$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $w = 0$, pois, caso contrário, consideraríamos operador $T_w = T - w$, o qual tem a mesma propriedade que T.

Seja x um elemento arbitrário do subconjunto $Q(Y)$ de X (dêste modo existe y em Y tal que $x = Q(y)$).

Por construção, x_{ε_n} é uma solução da equação

$$\varepsilon_n M x_{\varepsilon_n} + Q'Tx_{\varepsilon_n} = 0 \tag{4.33.}$$

Aplicando ambos os membros da equação (4.33.) num elemento $x_{\varepsilon_n} - y$, *obtemos*

$$(TQx_{\varepsilon_n}, Qx_{\varepsilon_n} - Qy) = -\varepsilon_n(M_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n} - y)$$

ou seja

$$(Tz_n, z_n - x) = -\varepsilon_n(Mx_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n} - y)$$

Logo,

(4.34.) $$\limsup (Tz_n, z_n - x) = -\liminf \varepsilon_n(Mx_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n} - y)$$

Vamos mostrar que $\liminf \varepsilon_n(Mx_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n} - y) \geq 0$.

De fato, como M é firmemente coercivo, existe um constante C (que depende de y) tal que para $||x_{\varepsilon_n}|| \geq C$, *temos*

$$(Mx_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n} - y) \geq 0$$

Donde

$$\liminf \varepsilon_n(Mx_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n} - y) \geq 0$$

Para $||x_{\varepsilon_n} - y|| \leq C$, *temos pela monotonicidade de M,*

$$(Mx_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n} - y) = (Mx_{\varepsilon_n} - My, x_{\varepsilon_n} - y) + (My, x_{\varepsilon_n} - y) \geq$$

$$\geq (My, x_{\varepsilon_n} - y).$$

Por conseguinte,

$$\lim \overset{\inf}{\cancel{\sup}}\, \varepsilon_n (Mx_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n} - y) \geq \lim \overset{\inf}{\cancel{\sup}}\, \varepsilon_n (My, x_{\varepsilon_n} - y) \geq 0.$$

Levando em conta a relação (4.34.), segue-se que

(4.35.) $$\lim \sup\, (Tz_n, z_n - x) \leq 0$$

para x em $Q(Y)$.

Notando que $Q(Y)$ é denso em X, e T é limitado, temos

$$\lim \sup\, (Tz_n, z_n - x) \leq 0$$

para todo x em X.

Logo, em particular, $\lim \sup\, (Tz_n, z_n - x_o) \leq 0$.

Como T é pseudomonótono e $z_n \rightharpoonup x_o$, resulta que

(4.36.) $$(Tx_o, x_o - x) \leq \lim \inf\, (Tz_n, z_n - x)\ ,$$

para todo x em X.

Mas,

(4.37.) $$\lim \inf\, (Tz_n, z_n - x) \leq \lim \sup\, (Tz_n, z_n - x) \leq 0.$$

Logo,

$$(Tx_o, x_o - x) \leq 0$$

para todo x em X, o que acarreta $Tx_o = 0$.

Prova de 4.

Por hipótese, T é pseudomonótono coercivo de X em X'. Se, por outro lado, T é 1-1, então, a equação $Tx = w$ tem uma única solução quando $\varepsilon_n \to 0$.

Do mesmo modo como foi provado anteriormente no teorema 4.4. concernente ao método de super regularização elítica envolvendo operador semimonótono, podemos provar, sob hipóteses adicionais, que a sequência $\{Qx_\varepsilon\}$ imersa em X converge fortemente em X a uma solução da equação $Tx = w$. Por esta razão, limitamo-nos, apenas, a enunciar o teorema concernente à convergência da sequência $\{Qx_\varepsilon\}$, cuja demonstração não será dada aqui.

Teorema 4.12. Sejam X um espaço de Banach uniformemente convexo e separável, T um operador pseudomonótono limitado, coercivo e firmemente monótono de X em X'. Sejam Y um espaço (auxiliar) de Banach reflexivo, M um operador monótono hemicontínuo firmemente coercivo de Y em Y', Q uma aplicação linear e contínua de Y em X tal que $Q(Y)$ é denso em X. Suponhamos que $Q'TQ$ é um operador pseudomonótono de Y em Y' e que $||TQy||$ é limitado para $||y|| \to \infty$.

1. Para cada $\varepsilon > 0$, existe pelo menos uma solução x_ε em Y da equação (4.30.), para cada w em X'.
2. Existe um constante B tal que $||Qu_\varepsilon|| \leq B$ para todo $\varepsilon > 0$.
3. Escolhendo-se uma solução x_{ε_n} (cuja existência é assegurada em 1.), da equação (4.30.), para cada $\varepsilon_n > 0$ e w em X', então, a sequência $\{Qx_{\varepsilon_n}\}$ converge fortemente a uma solução x_0 da equação $Tx_0 = w$, quando $\varepsilon_n \to 0$.
4. T é sobrejetor; para cada w em X', as soluções da equação $Tx = w$ estão situadas numa esfera com centro na origem em X.

CAPÍTULO V

Problema de Desigualdade Variacionais Não Lineares. Problema de Aproximação

5.1. Introdução

Êste breve capítulo está dividido em duas secções. A primeira secção é devotada a uma classe de problema denominada desigualdades variacionais não lineares, envolvendo operador pseudomonótono. A segunda secção é dedicada a um teorema da aproximação das soluções dêstes problemas.

Em poucas palavras, tentaremos dar algumas explicações sôbre êste problema. Sejam X um espaço de Banach reflexivo, X' o seu espaço dual. Dados um operador não linear pseudomonótono de X em X', uma função própria* convexa semicontínua inferiormente de X em $(-00,00]$, e um elemento w em X', nós propomos a determinar os elementos x_o em C para os quais

$$(Tx_o - w , x_o - x) \leq f(x) - f(x_o)$$

para todo x em C, onde C é um subconjunto convexo de X.

Êste problema é uma extensão de vários problemas não lineares, pois, se C é um subconjunto convexo fechado e f é a função indicatrix (isto é, $f = 0$ sôbre C, e $f \equiv 00$, fora de C), o problema se torna a teoria de desigualdades monótonos sôbre conjuntos convexos, enquanto que se $f = 0$ e $C = X$, teremos o estudo da equação do tipo $Tx_o = w$

5.2. Desigualdades Variacionais Não Lineares Envolvendo Operador Pseudomonótono.

Sejam X um espaço de Banach reflexivo, X' seu espaço conjugado. Uma função f de X em $(-\infty, \infty]$ é convexa se para cada par de elementos x e y em X e para t em $[0,1]$, tivermos

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

f é semi contínua inferiormente em x_o de X se para todo a em R com $a<f(x_o)$

*Uma função f semicontinua inferiormente de X em $(-\infty,\infty]$ é <u>própria</u> se $f \not\equiv \infty$.

existe uma vizinhança V de x_o tal que $a < f(x)$, para x em V.
Equivalentemente, f é semicontínua inferiormente em X se o conjunto

$$A = \{x \in X \; ; \; a < f(x)\}$$

é aberto para todo a em R.

<u>Lemma 5.1.</u> (Browder) Sejam X um espaço de Banach de dimensão finita, T uma aplicação contínua de X em X', f uma função convexa semicontínua inferiormente de X em $(-\infty, \infty]$ com $f(0) = 0$. Seja B uma bola fechada de raio R em X.
Então, dado w em X', existe x_o em B tal que

$$(Tx_o - w, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o)$$

para x em B.

<u>Prova:</u> Considerando a aplicação $x \to Tx - w$, podemos supor sem perda de generalidade, que $w = 0$. Se a afirmação do Lema fôsse falsa, então para cada y em B existiria um elemento x em B tal que

$$(Ty, y - x) > f(x) - f(y) \; .$$

Para um x fixado em B, o conjunto

(5.1.) $$\{y \in X : (T y, y - x) > f(x) - f(y)\}$$

é aberto em B, graças à semicontinuidade inferior de f.
Como B é compacto, podemos achar um conjunto finito $\{x_1, \ldots , x_n\}$ em B tal que os conjuntos

$$U_k = \{y \in B \; ; \; (Ty , y - x_k) > f(x_k) - f(y)\},$$

$k = 1, \ldots , n$, formam uma cobertura de B.

Seja $\{q_1, \ldots, q_n\}$ uma partição da unidade em B subordinada a esta cobertura, de modo que para todo y em B, $0 \leq q_k(y) \leq 1$, $q_1(y) + \ldots + q_n(y) = 1$ e supp. $q_k \subset U_k$, $k = 1, \ldots, n$. (supp. q_k indica o <u>suporte</u> de q_k)

Definimos

$$q(y) = \sum_{k=1}^{n} q_k(y) x_k$$

Como $q(y)$ é uma combinação linear convexa dos x_k com coeficientes contínuos, resulta que q é uma aplicação contínua de B em B.

Pelo teorema de ponto fixo de Brouwer, q tem ponto fixo y_1 em B, isto é, $q(y_1) = y_1$.

Para y em B,

$$(Ty, y-q(y)) = \sum_{k=1}^{n} q_k(y)(Ty, y - x_k) > \sum_{k=1}^{n} q_k(y)(f(x_k) - f(y)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} q_k(y)(f(x_k)) - f(y).$$

Mas, f é convexa, e vem

$$f(q(y)) \leq \sum_{k=1}^{n} q_k(y) f(x_k)$$

Assim, para todo y em B,

$$(Ty, y - q(y)) > f(q(y)) - f(y) \tag{5.2.}$$

Em particular, tomando $y = y_1$ (ponto fixo de q) em (5.2.), vem

$$0 = (Ty_1, y_1 - q(y_1) > f(y_1) - f(q(y_1)) = 0,$$

o que é uma contradição.

<u>Lema 5.2.</u> Sejam T uma aplicação de um domínio convexo $D(T)$ de X

em X' *contendo a origem,* f *uma função convexa de* X *em* $(-\infty, \infty]$ *com* $f(0)=0$, B *uma bola fechada de raio* R *com centro na origem.*
Dado w *em* X', *suponhamos que para* x *em* $D(T)$ *com* $||x|| = R$,

$$(5.3.) \qquad (Tx - w, x) + f(x) > 0 .$$

Se x_o *em* $B \cap D(T)$ *é uma solução do sistema de desigualdades*

$$(Tx_o - w, x_o - y) \leq f(y) - f(x_o) ,$$

para todo y *em* $D(T) \cap B$, *então* $||x_o|| < R$, *e* x_o *satisfaz o sistema mais forte de desigualdades*

$$(5.4.) \qquad (Tx_o - w, x_o - y) \leq f(y) - f(x_o)$$

para todo y *em* $D(T)$.

<u>*Prova:*</u> *Pondo* $y = 0$ *em (5.4.), resulta*

$$(Tx_o - w, x_o) + f(x_o) \leq 0$$

Da relação (5.3.), segue-se que $||x_o|| < R$. *Seja* y *em* $D(T)$. *Existe, então,* $t > 0$ *tal que o elemento* $y_t = (1 - t)\, x_o + ty$ *pertence a* B, *enquanto, pela convexidade de* $D(T)$, y_t *pertence a* $D(T)$.
Fazendo $y = y_t$ *em (5.4.), obtemos*

$$t(Tx_o - w, x_o - y) \leq f(y_t) - f(x_o) \leq t(f(y) - f(x_o))$$

Cancelando $t > 0$, *temos*

$$(Tx_o - w, x_o - y) \leq f(y) - f(x_o).$$

<u>*Teorema 5.1.*</u> *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo separável,* T *uma aplicação, pseudomonotona limitada de* X *em* X', f *uma função semicon-*

tínua inferior convexa de X *em* $(-\infty, \infty]$ *com* $f(0) = 0$. *Suponhamos que para um elemento* w *em* X' *existe uma bola fechada* B *de raio* R *com centro na origem em* X *tal que*

$$(Tx - w, x) + f(x) > 0$$

para todo x *em* ∂B.
Então, existe x_o *em* B *tal que*

$$(Tx_o - w, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o)$$

para todo x *em* X.

<u>*Prova:*</u> *Como vimos, anteriormente, podemos supor, sem perda de generalidade, que* $w = 0$. *Seja* $\{F_n\}$ *uma sequência crescente de subespaços de dimensão finita tal que* $X = \overline{\bigcup F_n}$. *Para cada* F_n, *sejam* j_n *uma injeção canônica de* F_n *em* X, j_n' *a sobrejeção adjunta de* X' *sôbre* F_n'.
Para cada F_n, *seja* T_n *a aplicação de* F_n *em* F_n' *definida por*

$$T_n = j_n' \, T \, j_n \, ,$$

que é uma aplicação pseudomonótona de F_n *em* F_n'. *Pelo teorema 4.7.,* T_n *é contínua, pois* $\dim F_n < \infty$.
Para x *e* y *em* F_n, *temos*

$$(T_n x, y) = (Tx, y)$$

Além do mais, para x *em* F_n *com* $||x|| = R$, *temos* $(T_n x, x) + f(x) > 0$. *Lembrando que* T_n *é contínua de* F_n *em* F_n' *e que* $\dim F_n < \infty$, *pelo lema 5.1., existe* x_n *em* $F_n \cap B$ *tal que para todo* x *em* $B \cap F_n$

$$(T_n x_n, x_n - x) = (Tx_n, x_n - x) \leq f(x) - f(x_n) \tag{5.5.}$$

Aplicando lema 5.2., obtemos o sistema de desigualdade mais forte,

(5.6.) $$(Tx_n, x_n - x) \leq f(x) - f(x_n) \ , \quad x \text{ em } F_n \ .$$

Como x_n está em B para todo n, e X é reflexivo, podemos assumir sem perda de generalidade que existe uma subsequência ainda denotada por $\{x_n\}$ tal que $x_n \rightharpoonup x_o$ em X.

Sendo T limitada e $x_n \rightharpoonup x_o$, vem

$$\limsup (Tx_n, x_n - x_o) \leq 0$$

Pela pseudomonotonicidade de T, segue-se que

$$(Tx_o, x_o - x) \leq \liminf (Tx_n, x_n - x)$$

para todo x em X.

Por hipótese, $\overline{\bigcup F_n} = X$, e pela semicontinuidade inferior de f,

$f(x_o) \leq \liminf f(x_n) < \infty$

Da relação (5.6.), segue-se que

$$(Tx_o, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o), \quad x \text{ em } \bigcup F_n$$

Observando que $\bigcup F_n$ é denso em X, concluímos que

$$(Tx_o, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o)$$

para todo x em X.

<u>Teorema 5.2.</u> Sejam X em espaço de Banach reflexivo separável, T uma aplicação densamente definida de X em X' com domínio convexo $D(T) = \bigcup F_n$*, f uma aplicação convexa semicontínua inferiormente de X em

---

* $\{F_n\}$ é uma sequência crescente de subespaços de dimensão finita tal que $\overline{\bigcup F_n} = X$.

$(-\infty, \infty]$ com $f(0) = 0$. Suponhamos que $T = A + L$, onde

a) A é uma aplicação pseudomonótona limitada de X em X'.

b) L é uma aplicação linear monótona fechada densamente definida de X em X' tendo a propriedade que se para um dado elemento x_o em X com $f(x_o)$ finito e cada constante $K > 0$ existe uma constante $M_K > 0$ tal que

$$(x_o, L'x) \geq -M_K (||x|| + 1)$$

para todo x em $D(L) \cap D(L') \cap \{x \; ; \; f(x) \leq K\}$, então x_o é um elemento de $D(L)$.

c) Dado w em X' existe uma bola fechada B de raio R com centro na origem tal que para x em $D(T) = D(L)$ com $||x|| = R$,

$$(Tx - w, x) + f(x) > 0 \tag{5.7.}$$

Então, existe um elemento x_o em $D(T)$ com $||x_o|| < R$ tal que

$$(Tx_o - w, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o)$$

para todo x em $D(T)$.

<u>Prova:</u> Como vimos anteriormente, podemos supor, sem perda de generalidade, que $w = 0$. Seja $\{F_n\}$ a sequência crescente de subespaços de dimensão finita de X tal que

$$\overline{\cup F_n} = X \quad e \quad D(T) = \cup F_n \, .$$

De acôrdo com o que temos visto na prova do teorema 5.1., para cada F_n, existe um elemento x_n em $B \cap F_n$ tal que, para todo x em F_n, temos

$$(Tx_n, x_n - x) \leq f(x) - f(x_n) \tag{5.8.}$$

Sendo X reflexivo, B é fracamente compacto em X. Como x_n está em B pa-

ra cada n, segue-se que existe uma subsequência tal que $x_n \rightharpoonup x_o$ em X e x_o está em B com $||x_o|| \leq R$. Usando lema 5.2., obtemos $||x_o|| < R$. Provaremos que x_o está em $D(T)$. Com efeito, seja x um elemento qualquer de $D(L) \cap D(L') \cap \{x \; ; \; f(x) \leq k\}$, e seja F_n um subespaço de X que contém x. Para todo $F_n \supset F_{n_o}$, tem-se

$$(5.9.) \qquad (T\, x_n, x_n - x) = (A\, x_n, x_n - x) + (L\, x_n, x_n - x) \leq f(x) - f(x_n) \; .$$

onde x_n é uma solução, em $B \cap F_n$, da desigualdade (5.8.).
Pondo $x = 0$ em (5.9.), vemos que

$$(5.10.) \qquad f(x_n) \leq - (A\, x_n, x_n) - (L\, x_n, x_n) \leq m,$$

em virtude de A e L serem limitados.
Todo x_n estando em B, pela semicontinuidade inferior de f, segue-se que $f(x_n)$ é limitada inferiormente por $-k_1(R)$. Logo, em vista da (5.10.), $f(x_n)$ é uniformemente limitada, e disso resulta que $f(x_o)$ é finita.
Tendo em vista que $f(x) \leq K$ e $||x_n|| \leq R$, e L sendo monótona linear, da relação (5.9.), obtemos

$$(L\, x_n, x) \geq (L\, x_n, x_n) + f(x_n) - f(x) + (Ax_n, x_n - x) \geq$$

$$\geq f(x_n) - K - ||A\, x_n||(||x_n|| + ||x||) \geq - k_1(R) - K - K_2(R)(R + ||x||) \geq$$

$$\geq - K_3(R)(||x|| + R) - K \geq - M_K\, (||x|| + 1).$$

ou seja,

$$(x_n, L'\, x) \geq - M_K(||x|| + 1)$$

Sendo $x_n \rightharpoonup x_o$, resulta que,

$$(x_o, L' x) \geq - M_K (\|x\| + 1)$$

Pela hipótese (b) do teorema, deduz-se que x_o está em $D(L) = D(T)$.
Tendo $x_n \rightharpoonup x_o$ e T sendo limitada, segue-se que

$$\limsup (Tx_n, x_n - x_o) \leq 0$$

Sendo T pseudomonótona, resulta que

$$(5.11.) \qquad (Tx_o, x_o - x) \leq \liminf (Tx_n, x_n - x)$$

para todo x em $D(T) = \bigcup F_n$.
Mas, por outro lado, conforme a relação (5.8), temos

$$(Tx_n, x_n - x) \leq f(x) - f(x_n), \quad x \text{ em } F_n$$

Finalmente, da relação (5.11), obtemos

$$(T x_o, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o)$$

para todo x em $D(T)$, o que queríamos provar.

5.3. Problemas de Existências e Aproximação.

O nosso objetivo nesta secção é tratar o problema de existência e da aproximação de soluções de desigualdades variacionais não lineares envolvendo operador pseudomonótono.

Mediante o uso adequado de uma aplicação de dualidade J de X em X', provaremos o seguinte resultado da aproximação de soluções.

Teorema 5.3. Sejam X um espaço de Banach uniformemente convexo, ~~reflexivo~~, J uma aplicação de dualidade de X em X' para uma função guia q, T um operador pseu

domonótono limitado, ~~firmemente coerciva~~ e firmemente monótono de X em X', e f uma função própria convexa semicontínua inferiormente de X em $(-\infty, \infty]$. Sejam w e w_o elementos arbitrários em X'. Suponhamos que a desigualdade

$$(5.12.) \qquad (Tx_o - w, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o)$$

para x em X, tem pelo menos uma solução x_o.
Então, temos:

(a) Se para cada $\varepsilon > 0$, pomos $T_\varepsilon = T + \varepsilon J$, a desigualdade variacional,

$$(5.13.) \qquad (T_\varepsilon x_\varepsilon - w_\varepsilon , x_\varepsilon - x) \leq f(x) - f(x_\varepsilon)$$

para todo x em X, tem uma solução x_ε em X, onde $w_\varepsilon = w + \varepsilon w_o$.

(b) Escolhendo-se $\varepsilon_k \to 0$, a sequência de soluções $\{x_{\varepsilon_k}\}$ das desigualdades, (5.13.) acima converge fortemente a uma solução x_o da desigualdade (5.12.)

$$(Tx_o - w, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o)$$

Além do mais, x_o é ùnicamente caracterizado como a ùnica solução da desigualdade variacional

$$(J x_o - w_o, x - x_o) \geq 0, \quad x \text{ em } X.$$

A fim de provar o teorema, vamos inicialmente, provar o seguinte lema.

<u>Lema 5.3.</u> *Sejam X um espaço de Banach reflexivo, T um operador pseudomonótono limitado de X em X', f uma função própria convexa semicontínua inferiormente de X em $(-\infty, \infty]$.*
Se $\{w_k\}$ é uma sequência em X' tal que $w_k \to w_o$, e se, para cada k, x_k é uma solução da desigualdade

$$(5.14.) \qquad (Tx_k - w_k, x_k - x) \leq f(x) - f(x_k), \quad x \text{ em } X,$$

tal que $x_k \rightharpoonup x_o$, então x_o é uma solução da desigualdade

(5.15.) $$(Tx_o - w_o, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o)$$

Prova do Lema 5.3.

Por hipótese, cada x_k satisfaz

(5.16.) $$(Tx_k - w_k, x_k - x) \leq f(x) - f(x_k)$$

para x em X. Como, por hipótese, X é reflexivo e $x_k \rightharpoonup x_o$ em X, resulta que a sequência $\{x_k\}$ é limitada em X.

Mais uma vez, sendo T limitado, resulta que

$$\limsup (Tx_k, x_k - x_o) \leq 0$$

Pela pseudomonotonicidade de T, obtemos

$$(Tx_o, x_o - x) \leq \liminf (Tx_k, x_k - x)$$

com x em X. Logo, usando a relação (5.16.) acarreta

$$(Tx_o - w_o, x_o - x) \leq \liminf (Tx_k - w_k, x_k - x) \leq f(x) - f(x_o) \quad ,$$

x em X, o que queríamos provar.

Prova do Teorema 5.3.

Em vista das informações que tivemos nos capítulos anteriores com respeito a uma aplicação de dualidade J, podemos afirmar que ela é monótona, coerciva, hemicontínua de X em X'. Pela coercividade de J, existe uma função real $d(r)$ com $d(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$, tal que

(5.17.) $$(Jx, x) \geq d(||x||) \; ||x|| \; , \quad x \text{ em } X.$$

Como T é firmemente coercivo (logo, T é coercivo) existe uma função real $c(r)$ com $c(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$ tal que

$$(5.18.) \qquad (Tx, x) \geq c(\|x\|)\,\|x\|$$

Pela semicontinuidade inferior de f, resulta que f é limitada inferiormente sôbre conjuntos limitados de X. Assim, é fácil de ver, que existe um constante M tal que

$$(5.19.) \qquad f(x) \geq -M\,\|x\|.$$

Graças às relações (5.17.), (5.18.) e (5.19.), obtemos,

$$(5.20.) \quad (T_\varepsilon x, x) + f(x) = (Tx, x) + \varepsilon(Jx, x) + f(x) \geq \varepsilon(d(\|x\|) + c(\|x\|) - M)\,\|x\|$$

Agora lembrando que $c(\|x\|) \to \infty$ e $d(\|x\|) \to \infty$ quando $\|x\| \to \infty$ é suficiente escolher R suficientemente grande a fim de que tenhamos a relação.

$$(5.21.) \qquad (T_\varepsilon x - w_\varepsilon, x) + f(x) > 0$$

para todo x em ∂B_R, onde B_R é uma bola fechada de raio R. Aplicando o teorema 5.1. de existência de desigualdade variacional envolvendo operador pseudo monótono que já é do nosso conhecimento, podemos concluir que a desigualdade variacional

$$(5.22.) \qquad (T_\varepsilon x - w_\varepsilon, x_\varepsilon - x) \leq f(x) - f(x_\varepsilon)$$

tem uma solução x_ε em X para cada w_ε em X', o que prova a parte (a).

<u>Prova de b.</u>

Por hipótese, a desigualdade

$$(Tx_o - w, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o))$$

tem pelo menos uma solução x_1, o que nos permite escrever

$$(Tx_1 - w,\ x_1 - x_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon) - f(x_1)$$

ou

(5.23.) $$(T_\varepsilon x_1 - (w + \varepsilon J\, x_1),\ x_1 - x_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon) - f(x_1)$$

Por outro lado, pela relação (5.22.), temos

(5.24.) $$(T_\varepsilon x_\varepsilon - (w + \varepsilon w_o),\ x_\varepsilon - x_1) \leq f(x_1) - f(x_\varepsilon)$$

Adicionando as relações (5.23.) e (5.24.), membro a membro, obtemos

$$(T_\varepsilon x_\varepsilon - T\, x_1,\ x_\varepsilon - x_1) + \varepsilon(J\, x_1 - w_o,\ x_\varepsilon - x_1) \leq 0,$$

ou equivalente,

(5.25.) $$(Tx_\varepsilon - Tx_1,\ x_\varepsilon - x_1) + \varepsilon(Jx_\varepsilon - Jx_1,\ x_\varepsilon - x_1) \leq \varepsilon(w_o - Jx_1,\ x_\varepsilon - x_1)$$

Pela monotonicidade de $\overset{J}{T}$, vem

$$\varepsilon(\overset{J}{T}x_\varepsilon - \overset{J}{T}x_1,\ x_\varepsilon - x_1) \leq \varepsilon(w_o - Jx_1,\ x_\varepsilon - x_1) \leq \varepsilon\ ||w_o - Jx_1||\ ||x_\varepsilon - x_1||$$

Donde,

$$(\overset{J}{T}x_\varepsilon - \overset{J}{T}x_1,\ x_\varepsilon - x_1)\ /\ ||x\ - x_1|| < \varepsilon\ ||w_o - Jx_1||.$$

~~Sendo T firmemente coercivo,~~ segue-se que a família $\{x_\varepsilon\}$ é uniformemente limitada em X. Sendo J uma aplicação monótona hemicontínua coerciva e limitada para uma função guia q estritamente crescente, existe uma única solução x_o da desigualdade

(5.26.) $$(Jx_o - w_o,\ x - x_o) \geq 0\ ,\quad x \text{ em } X.$$

Escolhendo-se uma subsequência $\{x_{\varepsilon_k}\}$ *da família de soluções* $\{x_\varepsilon\}$, *uniformemente limitada, correspondente a uma sequência* $\varepsilon_k \to 0$, *vamos mostrar que a sequência assim escolhida* $\{x_{\varepsilon_k}\}$ *converge fortemente a* x_o *em* X *e que* x_o *é uma solução de (5.15.).*

Com efeito, sendo X *reflexivo e* $\{x_{\varepsilon_k}\}$ *limitada em* X, *resulta que* $x_{\varepsilon_k} \rightharpoonup x_1$ *em* X.

Sabemos, por outro lado, que cada x_{ε_k} *satisfaz a desigualdade*

$$(Tx_{\varepsilon_k} - [w + \varepsilon_k w_o - \varepsilon_k J x_{\varepsilon_k}], x_{\varepsilon_k} - x) \leq f(x) - f(x_{\varepsilon_k}), \ x \text{ em } X.$$

Como $\{x_{\varepsilon_k}\}$ *é uniformemente limitada em* X *e* J *leva um conjunto limitado num conjunto limitado segue-se que*

$$w_{\varepsilon_k} - \varepsilon_k J x_{\varepsilon_k} = w + \varepsilon_k w_o - \varepsilon_k J x_{\varepsilon_k} \to w, \text{ quando } k \to \infty .$$

Como $x_{\varepsilon_k} \rightharpoonup x_1$ *em* X, *aplicando o lema 5.3, resulta, imediatamente, que* x_1 *é uma solução de desigualdade variacional,*

$$(Tx_1 - w, x_1 - x) \leq f(x) - f(x_1), \quad x \text{ em } X .$$

Retomando a relação (5.25.) e substituindo-se nela x_1 *por* x_o, *vem*

$$(5.27.) \qquad (Tx_{\varepsilon_k} - Tx_o, x_{\varepsilon_k} - x_o) + \varepsilon_k (Jx_{\varepsilon_k} - Jx_o, x_{\varepsilon_k} - x_o) \leq$$

$$\leq \varepsilon_k (w_o - Jx_o, x_{\varepsilon_k} - x_o)$$

Sendo T *firmemente monótono, pondo* $M = \text{máx}\,(\|\cancel{x_{\varepsilon_k}}\,B\|, \|x_o\|)$, *resulta que*

$$(5.28.) \qquad K_M(\|x_{\varepsilon_k} - x_o\|) \leq \varepsilon_k (w_o - Jx_o, x_{\varepsilon_k} - x_o)$$

onde $K_M(r)$ é uma função real estritamente crescente de $r \geq 0$ com $K_M(0) = 0$. Mas, por outro lado, temos

$$(5.29.) \qquad (w_o - Jx_o, x_{\varepsilon_k} - x_o) = (w_o - Jx_o, x_{\varepsilon_k} - x_1) + (w_o - Jx_o, x_1 - x_o)$$

Como, por hipótese, $(w_o - Jx_o, x_1 - x_o) \leq 0$

vem,
$$K_M(||x_{\varepsilon_k} - x_o||) \leq \varepsilon_k (w_o - Jx_o, x_{\varepsilon_k} - x_1)$$

Contudo, $x_{\varepsilon_k} \rightharpoonup x_1$ e $\varepsilon_k \to 0$, segue-se que $\varepsilon_k(w_o - Jx_o, x_{\varepsilon_k} - x_1) \to 0$, quando $k \to \infty$.

Consequentemente,

$$K_M(||x_{\varepsilon_k} - x_o||) \to 0$$

Em virtude da propriedade da função K_M, segue-se que

$$||x_{\varepsilon_k} - x_o|| \to 0$$

isto é, $x_{\varepsilon_k} \to x_o$ (fortemente).

Lembrando que $x_k \rightharpoonup x_1$ e x_1 é solução da desigualdade

$$(Tx_1 - w, x_1 - x) \leq f(x) - f(x_1) \quad x \text{ em } X, \text{ resulta que}$$

$x_1 = x_o$, ou equivalentemente, x_o é uma solução da desigualdade

$$(Tx_o - w, x_o - x) \leq f(x) - f(x_o)$$

x em X, o que completa a prova do teorema.

CAPÍTULO VI

Teorema de Leray-Schauder para G-operador.

6.1. Introdução.

Este capítulo é devotado fundamentalmente ao teorema de Leray-Schauder para G-operador. Em recentes pesquisas, D.G. de Figueiredo introduziu e investigou uma classe de G-operadores num espaço de Banach real, e obteve, então, desta investigação, o teorema de ponto fixo para G-operador, que foi utilizado para tirar alguns teoremas de ponto fixo de vários autores (Schauder, Rothe, Petryshyn, ...), isto porque, os G-operadores incluem, entre outros, os operadores compactos e quase-compactos.

O nosso objetivo é, então, obter o teorema de Leray-Schauder para G-operador com o auxílio do teorema de ponto fixo acima referido, e deduzir, como casos especiais do nosso teorema, os teoremas de Leray-Schauder para operadores P-compactos e compactos. O teorema de Leray-Schauder para P-compacto foi recentemente obtido por T.Tucker na sua dissertação apresentada a Universidade de Chicago. Como aplicações do nosso teorema, obtivemos um teorema de existência para G-operador, e deduzimos, dentro de certas hipóteses, um teorema de ponto fixo para G-operador.

6.2. Teorema de Leray-Schauder para G-operador.

Seja X um espaço de Banach real com a propriedade (Π_1), isto é, existem uma sequência $\{X_n\}$ de subespaços de dimensão finita de X, e uma sequência de projeções lineares $\{P_n\}$, definidas em X, tais que:

$$P_n X = X_n \quad , \quad X_n \subset X_{n+1} \quad , \quad n = 1,2, \ldots$$

$$\overline{\bigcup X_n} = X \quad , \quad ||P_n|| \leq 1 \quad , \quad n = 1,2, \ldots$$

$$P_n P_j = P_j \qquad \text{para} \qquad n \geq j$$

Os espaços de Hilbert, o espaço $C([a, b])$, os espaços L^p, $1 \leq p < \infty$, os espaços de Banach com uma base monótona de Schauder, e grande número de espaços utilizados na prática, têm a propriedade (Π_1). (Browder e Figueiredo, |28|).

Um operador A é P-compacto se P_nA é contínuo em X_n para todo n grande e se para um constante $p > 0$ e uma sequência limitada $\{x_n\}$ com x_n em X_n a sequência $\{P_nAx_n - px_n\}$ converge, então, existe uma subsequência convergente $\{x_m\}$ e um elemento x em X tais que $x_m \to x$ e $P_mAx_m \to Ax$ quando $m \to \infty$.

Seja X um espaço de Banach com a propriedade (Π_1), C um subconjunto fechado convexo limitado de X.

Um operador T de C em X é dito G-operador se:

(i) $P_nT : C \cap X_n \to X_n$ é contínuo para todo n.

(ii) A solubilidade de $P_nTx = x$ em X_n, para quase todo n, implica a solubilidade de $Tx = x$ em X.

<u>Teorema 6.1.</u> (Figueiredo |28|) Num espaço de Banach reflexivo separável X, os seguintes operadores T de C em X são G-operadores: completamente contínuo, compacto, fracamente contínuo e não expansivo.

<u>Teorema 6.2.</u> (Figueiredo |28|) Num espaço de Banach separável com a propriedade (Π_1), todo P-compacto é um G-operador.

Seja C um subconjunto convexo fechado e limitado de X, e suponhamos que a origem 0 está no interior de C. Recordemos aqui que uma aplicação de dualidade J de X em X' para uma função guia q é a aplicação definida por:

$$(Jx, x) = ||Jx|| \, ||x|| \quad , \qquad ||Jx|| = q(||x||).$$

Sabe-se que J é uma aplicação monótona, hemicontínua e limitada de X em X'.

<u>Teorema 6.3.</u> (Figueiredo |28|) Sejam X um espaço de Banach de dimensão finita, q uma função guia, T um operador contínuo de C em X.

Suponhamos que para todo x *em* ∂C *existe um elemento* v' *em* X' *tal que*

$$(x, v') = ||x|| \, q(||x||), \quad (Tx, v') \leq ||x|| \, q(||x||).$$

Entao, existe um elemento x_o *em* C *tal que* $Tx_o = x_o$.

<u>*Lema 6.1.*</u> *Se* X *é um espaço de Banach com a propriedade* (Π_1), *então, para todo* x *em* X, *a seguinte inclusão se verifica:*

$$P_n'(Jx) \subset Jx \, . \tag{6.1.}$$

<u>*Prova:*</u> *Para* x *em* X_n, *seja* u' *um elemento qualquer de* Jx. *Temos, então,*

$$(x, P_n'u') = (P_n x, u') = (x, u') = ||x|| \; q(||x||). \tag{6.2.}$$

Desta relação (6.2.) resulta que

$$||P_n' \, u'|| \geq q(||x||) \tag{6.3.}$$

Mas, por outro lado,

$$||P_n'u'|| \leq ||P_n'|| \; ||u'|| \leq ||u'|| = q(||x||) \tag{6.4.}$$

De (6.3.) e (6.4.), vem

$$||P_n u'|| = q(||x||) \, . \tag{6.5.}$$

Pelas relações (6.2.) e (6.5.), juntamente com a definição da aplicação da dualidade J, *obtemos,* $P_n'u' \in Jx$. *Logo,* $P_n'(Jx) \subset Jx$.

<u>*Teorema 6.4.*</u> *(Figueiredo |28|) Sejam* X *um espaço de Banach com a propriedade* (Π_1), T *um G-operador de* C *em* X, J *uma aplicação de dualidade de* X *em* X' *para uma função guia* q. *Suponhamos que a origem* 0 *está*

no interior de $C \cap X_n$ *para todo* n *exceto num número finito de* n. *Se*

$$(Tx, Jx) \leq ||x||\, q(\,|x\,|),$$

para todo x *na fronteira* ∂C *de* C, *então,* T *tem um ponto fixo* x_o *em* C, *isto é,* $Tx_o = x_o$.

Agora estamos em condições de enunciar e provar o seguinte teorema de Leray-Schauder para G-operador e obter algumas consequências dêste teorema.

<u>*Teorema 6.5.*</u> *Sejam* X *um espaço de Banach de dimensão infinita com propriedade* (Π_1), B_r *uma bola fechada de raio* r *com centro na origem em* X, $C(x,t)$ *um operador de*

$$B_r \times [0,1] \to X$$

tal que

(G_1) $C(x,t)$ *é G-operador em* x *para cada* t *em* $[0,1]$; P_nC *é contínuo em* x *e* t, *simultaneamente, onde* x *em* X_n *e* t *em* $[0,1]$.

(G_2) $C(x,t) \neq x$ *para* x *em* ∂B_r *e* t *em* $[0,1]$.

(G_3) $C(x,0)$ *satisfaz a condição:*

$$(C(x,0), Jx) \leq ||x||\, q(||x||)$$

para todo x *em* ∂B_r.

Então, existe um elemento x_1 *em* B_r *tal que* $C(x_1,1) = x_1$.

<u>*Demonstração:*</u> *Suponhamos, por absurdo, que não existe nenhum elemento* x_1 *em* B_r *tal que* $C(x_1,1) = x_1$. *Consequentemente, pela (ii) da definição de G-operador, a equação* $P_nC(x,1) = x$ *não tem solução em* $B_r \cap X_n$ *para todo* n. *Combinando a hipótese* (G_2) *do teorema e (ii) da definição de G-operador, a equação* $P_nC(x,t) = x$ *não tem solução em* $\partial B_r \cap X_n$, *para todo* n,

e t em $[0,1]$.

Portanto, para cada n, podemos encontrar $\varepsilon_n > 0$, tal que,

$$(6.6.) \qquad ||x - P_n C(x,t)|| = \varepsilon_n > 0$$

para todo (x,t) em $F = (B_r \times \{1\}) \cup (\partial B_r \times [0,1])$.

Feito isso, seja g_n a função contínua de

$$B_r \cap X_n \to (B_r \times \{1\}) \cup (\partial B_r \times [0,1])$$

definida por:

$$g_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{r\,x}{r-k}, \ 1\right) & \text{se } ||x|| \leq r-k \\ \left(\frac{r\,x}{x}, \ \frac{1}{k}(r - ||x||)\right) & \text{se } r-k \leq ||x|| \leq r \end{cases}$$

onde $k < \min(r, \varepsilon_n)$.

Deste modo, a aplicação $P_n\, C\, g_n : B_r \cap X_n \to X_n$ é uma aplicação contínua num espaço X_n de dimensão finita, assim que, pelo teorema 6.3., $P_n\, C\, g_n$ tem um ponto fixo x_o em $B_r \cap X_n$, isto é, a equação $P_n\, C\, g_n(x) = x$ tem uma solução, sempre que a condição:

$$(P_n\, C\, g_n(x), Jx) \leq x \cdot q(||x||)$$

esteja satisfeita para todo x em $\partial B_r \cap X_n$.

Com efeito, se x está em $\partial B_r \cap X_n$, então $||x|| = r$, e temos, pela definição de g_n, que $g_n(x) = (x,0)$ e $P_n\, C\, g_n(x) = P_n\, C(x,0)$.

Seja y' em $Jx \subset X'$, e pomos $v' = y'/X_n$, de modo que v' é um elemento de X_n'. Temos, então,

$$(x,v') = ||x||\ ||v'|| = ||x||\ q(||x||) \qquad e$$

$$(P_n\ C\ g_n(x),\ v') = (P_n\ C\ g_n(x),\ y') = (P_n\ C\ (x,0),\ y') =$$

$$= (C(x,0),\ P_n' y') \leq ||x||\ q(||x||)\ .$$

graças à hipótese (G_3) do teorema e ao lema 6.1. .

Logo, a equação

$$P_n\ C\ g_n\ (x) = x$$

tem uma solução x_o em $B_r \cap X_n$ para cada n, isto é,

(6.7.) $$P_n\ C\ g_n\ (x_o) = x_o$$

Mas, vamos mostrar que isto nos conduz a uma contradição. De fato, se existe x_o em $B_r \cap X_n$ tal que $P_n\ C\ g_n\ (x_o) = x_o$, então, teríamos

$$||x_o|| \leq r - k \quad ou \quad r - k \leq ||x_o|| \leq r.$$

<u>1º Caso:</u> Se $||x_o|| \leq r - k$, então, pela definição de g_n, vem

(6.8.) $$g_n(x_o) = \left(\frac{r\ x_o}{r-k},\ 1\right) \quad e \quad P_n\ C\ g_n(x_o) = P_n\ C\ \left(\frac{r\ x_o}{r-k},\ 1\right) = x_o$$

Logo, notando que $\frac{r\ x_o}{r-k}$ está em B_r, e usando a relação (6.8.), vem

$$\left|\left| \frac{r\ x_o}{r-k} - P_n\ C\ \left(\frac{r\ x_o}{r-k},\ 1\right)\right|\right| = \left|\left| \frac{r\ x_o}{r-k} - x_o\right|\right| = k\ \left|\left| \frac{x_o}{r-k}\right|\right| \leq k < \varepsilon_n\ ,$$

o que é uma contradição, de acôrdo com a relação (6.6.)

<u>2º Caso:</u> Se $r - k \leq ||x_o|| \leq r$, então, segundo a definição de g_n, vem

$$g_n(x_o) = \left(\frac{r\ x_o}{||x_o||},\ \frac{1}{k}\ (r - ||x_o||)\right) \quad e$$

(6.9.) $$P_n\, C\, g_n(x_o) = P_n\, C\left(\frac{r\, x_o}{||x_o||}, \frac{1}{k}(r - ||x_o||)\right) = x_o$$

Logo, pela relação (6.9.), e observando que $\frac{r\, x_o}{||x_o||}$ está em B_r, segue-se que:

$$\left|\left|\frac{r\, x_o}{||x_o||} - P_n\, C\left(\frac{r\, x_o}{||x_o||}, \frac{1}{k}(r - ||x_o||)\right)\right|\right| = \left|\left|\frac{r\, x_o}{||x_o||} - x_o\right|\right| \leq k < \varepsilon_n ,$$

o que, novamente, acarreta uma contradição pela relação (6.6.). Assim, a prova do teorema está completa.

6.3. Consequências e Aplicações.

Como dissemos na introdução, os seguintes teoremas são casos especiais do nosso teorema 6.5., conforme veremos abaixo.

Teorema 6.6. (Tucker). Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita com a propriedade (Π_1), $C(x,t)$ um operador de

$$B_r \times [0,1] \to X$$

tal que

(P_1) $C(x,t)$ é P-compacto em x para cada t. $P_n\, C$ é contínuo em x e t, simultaneamente, onde x em X_n e t em $[0,1]$.

(P_2) Se para x_n em $\partial B_r \cap X_n$ e t_n em $[0,1]$ temos $x_n - P_n\, C(x_n, t_n) = 0$ então existe uma subsequência $t_m \to t$ tal que $x_m - P_m\, C(x_m, t) \to 0$

(P_3) $C(x,t) \neq x$ para todo x em ∂B_r e t em $[0,1]$.

(P_4) $C(x,0)$ é um operador P-compacto limitado satisfazendo a condição

$$(C(x,0), Jx) \leq ||x||\, q(||x||)$$

para todo x em ∂B_r.

Então, existe um elemento x_1 *em* B_r *tal que* $C(x_1, 1) = x_1$.

<u>*Prova:*</u> *Pelo teorema 6.2., todo operador P-compacto é um G-operador.*

<u>*Teorema 6.7.*</u> *(Leray-Schauder). Sejam* X *um espaço de Banach de dimensão infinita com* (Π_1), $C(x,t)$ *um operador compacto de*

$$B_r \times [0,1] \to X$$

tal que

(L_1) $C(x,t)$ *é compacto em* x *para cada* t, *e uniformemente contínua em* t *com respeito a* x *em um conjunto limitado.*

(L_2) $C(x,t) \neq x$ *para todo* x *em* ∂B_r *e* t *em* $[0,1]$.

(L_3) $C(x,0) = x_o$ *para todo* x *em* ∂B_r *e um* x_o *em* B_r.

Então, existe um elemento x_1 *em* B_r *tal que*

$$C(x_1, 1) = x_1$$

<u>*Prova:*</u> *É suficiente verificar a condição* (G_3) *do teorema 6.5., já que todo operador compacto é um G-operador.*
Com efeito, para x *em* ∂B_r,

$$(C(x,0), Jx) = (x_o, Jx) = ||x_o|| \; ||Jx|| \leq ||x|| \; q(||x||) ,$$

pois

$$||x_o|| \leq ||x|| \text{ para } x \text{ em } \partial B_r \text{ e } ||Jx|| = q(||x||),$$

<u>*Teorema 6.8.*</u> *Sejam* T *um G-operador de* B_r *em* X, *e* A *um outro G-operador de* B_r *em* X. *Suponhamos que:*

(a) Existe uma aplicação $C(x,t)$ que é G-operador em x para cada t e uniformemente contínua em t com respeito a x em B_r.

(b) $C(x,0) = Tx$ e $C(x,1) = Ax$.

(c) $C(x,t) \neq x$ para x em ∂B_r e t em $[0,1]$.

(d) T satisfaz a condição:

$$(C(x,0), Jx) = (Tx, Jx) \leq ||x||\, q(||x||)$$

para todo x em ∂B_r.

Então, existe um elemento x_1 em B_r tal que

$$Ax_1 = x_1. \qquad (\text{i.é., } A \text{ tem um ponto fixo em } B_r)$$

Prova: Basta observar que tôdas as hipóteses do teorema 6.5. são verificadas para operador A neste teorema.

Sob a hipótese adicional sôbre G-operador T, obtemos, como consequência do teorema 6.5., um teorema de ponto fixo para êste operador. Precisamente, se T é um G-operador homogêneo, i.é., se $T(tx) = t\,Tx$ com t em $[0,1]$, então vale o seguinte teorema.

Teorema 6.9. Seja T um G-operador homogêneo de B_r em X. Se, para todo x em ∂B_r, temos

$$(Tx, Jx) \leq ||x||\, q(||x||) \tag{6.10.}$$

Então, T tem um ponto fixo x_o em B_r.

Demonstração: Inicialmente, podemos supor que T não tem ponto fixo em ∂B_r, pois se existisse tal ponto, então, a conclusão do teorema é automàticamente verificada.

É claro que se T é G-operador homogênio, então tT é um G-operador com t em $[0,1]$.

Definimos agora a aplicação C por:

$$C(x,t) = t \,.\, Tx$$

com t em $[0,1]$. Vamos mostrar que as hipóteses (G_1), (G_2) e (G_3) do teorema 6.5. são efetivamente verificadas para aplicação C.

Com efeito, conforme a observação acima, tT sendo um G-operador, segue-se que a hipótese (G_1) é verificada.

Para verificar a hipótese (G_2) é suficiente notar que, para todo x em ∂B_r,

$$(C(x,0),\ Jx) = (0, Jx) = 0 \leq ||x||\ ||Jx|| = ||x||\ q(||x||),$$

desde que q é uma função estritamente crescente e $q(0) = 0$.

Mostremos agora que a hipótese (G_3) é verificada, ou seja,

$$C(x,t) = t\,Tx \neq x$$

para todo x em ∂B_r e t em $[0,1]$. De fato, se isso não fôsse verdade, i.é., se $C(x,t) = t\ Tx = x$ para x em ∂B_r e t em $[0,1]$, teríamos:

<u>1º Caso:</u> Se $t = 0$ implica $t\,Tx = x = 0$, o que é um absurdo, pois, x estando em ∂B_r, vem

$$x \neq 0\ .$$

<u>2º Caso:</u> Se t em $[0,1]$ com $t \neq 0,\ 1$, temos

$$Tx = \frac{1}{t}\,x \qquad e$$

$(Tx,\ Jx) = \frac{1}{t}\ (x,\ Jx) > ||x||\ \ q(||x||)$, para $t \neq 1$, o que viola a hipótese (6.10.) deste teorema.

Para $t = 1$, *implicaria* $C(x,t) = Tx = x$, *e* x *seria um ponto fixo de* T *em* ∂B_r, *o que é impossível, pois, admitimos no início de que* T *não tem ponto fixo em* ∂B_r.

Logo, pelo teorema 6.5., existe um elemento x_1 *em* B_r *tal que* $C(x_1, 1) = x_1$, *ou seja* $Tx_1 = x_1$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

|1| Aubin, J.P., Un théorema de compacité, C.R.Acad.Sci.Paris, vol.256, 1963.

|2| Aubin, J.P., Approximation des espaces de distribuitions et des operatéurs differentiels, Bulletin de La Societé Mathematique de France, 1967.

|3| Belluce, L.P., Kirk, W.A., Fixed-point theorems for families of contraction mappings, Pacif. Jour. Math. , 1966.

|4| Brezis, H., Une généralization de operateurs monotones, inequations d'evolution abstraites, C.R. Acad. Sci. Paris, 264, 1967.

|5| Brezis, H., Equations et inequations non Lineares dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. L'Inst. Fourier, 1968.

|6| Brezis, H. Sibony, M., Méthodes d'Approximations et d'Interation pour les Operateurs Monotones, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 28, 1968.

|7| Browder, F.E., Remarks on nonlinear functional equations, Proc. Nat. Acad. Sc., U.S.A., vol. 51, 1964.

|8| Browder, F.E., Nonlinear equation of evolution, Annals of Math., 1964.

|9| Browder, F.E., Remarks on nonlinear functional equations, Illinois, Jour. Math., vol. 9, II, 1965.

|10| Browder, F.E., Remarks on nonlinear functional equations, Illinois, Jour. Math., vol. III, 1965.

|11| Browder, F.E., Nonlinear inicial value problems, Annals of Math., vol. 82, 1965.

|12| Browder, F.E., Nonlinear elliptic boundary value problem, Trans. Am. Math. Soc., 1965.

|13| Browder, F.E., Mapping theorems for non compact nonlinear operators in Banach Spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 1965.

|14| Browder, F.E., On a theorem of Beurling and Livingston, Canad. Jour.Math., vol. 17, 1965.

|15| Browder, F.E., Multivalued monotone nonlinear mappings and duality mappings in Banach Spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 118, 1965.

|16| Browder, F.E., Problemes Non-Linéaires, Les Presses de L'Université de Montréal, 1966.

|17| *Browder, F.E., Further remarks on nonlinear functional equations, Illinois Jour. Math., vol. 10, 1966.*

|18| *Browder, F.E., On the unification of the calculus of Variations and the theory of nonlinear operators in Banach Spaces, Proc.Nat. Acad. Sci. U. S.A., 56, 1966.*

|19| *Browder, F.E., Fixed point theorems for nonlinear semicontractive mappings in Banach Spaces, Arch. Rat. Mech. Anal, vol. 21, 1966.*

|20| *Browder, F.E., Existence and Approximations of solutions of nonlinear variational inegualities, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1966.*

|21| *Browder, F.E., Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach Spaces, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 74, 1968.*

|22| *Browder, F.E., Ton, B.A., Nonlinear functional equations in Banach Spaces and elliptic super-regularization, Math. Zeitschr., 105, 1968.*

|23| *Browder, F.E., Nonlinear maximal monotone operators in Banach Spaces, Math. Ann., 1968.*

|24| *Browder, F.E., Nonlinear monotone and accretive operators in Banach Spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 61, 1968.*

|25| *Browder, F.E., Nonlinear variational inequalities and maximal monotone mappings in Banach Spaces, Math. Ann., 1968.*

|26| *Carroll, W.R., Abstract Methods in The Partial Differentials Equations, Harper & Row, 1969.*

|27| *Clarkson, J.A., Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 40, 1936.*

|28| *Figueiredo, D.G., Fixed point theory for nonlinear operator and Galerkin approximations, Jour. Diff. Equat., 1967.*

|29| *Hönig, C.S., Análise Funcional e Aplicações. Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, vol. II, 1970.*

|30| *Hönig, C.S., Análise de Fourier em espaços L_2 e teoremas do tipo Sobolev, Tese de Livre-Docência, 1965.*

|31| *Kaniel, S., Quasi-compact nonlinear operators in Banach Spaces and applications, Arch. Rat. Mech., Anal, 20, 1965.*

|32| *Lions, J.L., Strauss, W.A., Sur certain problèmes hyperboliques non linéares, C.R. Acad. Sci., 257, 1963.*

|33| *Lions, J.L., Leray, J., Quelquers résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéares par les méthodes de Minty-Browder, Bull.Soc. Mat. France, vol. 913, 1965.*

|34| *Lions, J.L., Certains equations paraboliques non-linéares, Bull. Soc. Mat. France, 1965.*

|35| *Lions, J.L., Stampacchia, G., Variational inequalities, comm. Pure and Appl. Math., 1967.*

|36| *Minty, G., Monotone nonlinear operators in Hilbert Space, Duke Math. Jour., 29, 1962.*

|37| *Minty, G., On a monotonicity method for the solutions of non linear equations in Banach Spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 50, 1963.*

|38| *Minty, G., Two theorems on nonlinear functional equations in Hilbert Space, Bull.Amer.Math.Soc., 69, 1963.*

|39| *Moreaux, J.J., Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull.soc. Math.France, tome 93, 1965.*

|40| *Opial, Z., Non expansive and monotone mappings in Banach Spaces, Lecture notes, 67-1, Brown University, 1967.*

|41| *Petryshyn, W.V., On a fixed point theorem for nonlinear P-compact operators in Banach Space, Bull. Amer. Math. Soc., 72, 1966.*

|42| *Petryshyn, W.V., Further remarks on nonlinear P-compact operators in Banach Space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 55, 1966.*

|43| *Petryshyn, W.V., Projection methods in nonlinear numerical functional analysis, Jour. Math. Mech. , 1967.*

|44| *Petryshyn, W.V., Remarks on fixed-point theorems and their extensions, Trans. Amer. Math. Soc. , 1967.*

|45| *Petryshyn, W.V., Fixed point theorems involving P-compact, semicontrative, and accretive operators not defined on all of a Banach Spaces, Jour.Math. Anal. Appl., 1968.*

|46| *Petryshyn, W.V., On the approximation - solvability of nonlinear equations, Math. Annalen, 177, 1968.*

|47| *Stampacchia, G., Hartman, P., On some nonlinear elliptic functional differential equations, Acta. Math., 1966.*

Êste trabalho foi impresso no Departamento de Física e Química do I.T.A..

ÍNDICE