ALGUMAS APLICAÇÕES DO AXIOMA DA REGULARIDADE NA AXIOMÁTICA DE ZERMELO-FRAENKEL

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Jacob Zimbarg Sobrinho

1970

AGRADECIMENTO

Desejo expressar a mais profunda gratidão à pessoa que orientou a presente tese, ao prof. Edison Farah, da Universidade de S. Paulo.

Talvez seja redundante dizer que o prof.Farah muito me influenciou em minha formação matemática: a sua sensibilidade estética e o apêgo ao rigor matemático foram decisivos para que eu encetasse o estudo dos Fundamentos da Matemática. Além desta influência científica, cumpre-me ressaltar o aspecto humano: as palavras de estímulo que o prof. Farah me dispensou e a confiança em mim depositada é que permitiram a conclusão do presente trabalho, o qual foi feito inteiramente sob a sua supervisão e orientação em S.Paulo, a partir de 1968.

Gostaria de agradecer ao prof.Newton C.A. da Costa, também da Universidade de S.Paulo, que se deu ao trabalho de examinar ao microscópio algumas porções desta tese, fazendo inúmeras críticas e sugestões, levantando novos problemas, enfim, colocando sob luz inteiramente nova aspectos que passaram totalmente desapercebidos ao autor; além do mais, o prof. Newton conseguiu-me transmitir uma grande dose do seu entusiasmo para a consecução dêste trabalho, bem como abrir perspectivas para atividades ulteriores.

O autor

PREFÁCIO

Neste trabalho, estudamos certas questões referentes ao sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (Cf. [1] da bibliografia). Designaremos, de modo sistemático, por ZF o referido sistema sem o Axioma da Escolha e por ZF + AE, o sistema que se obtém de ZF acrescentando o axioma em aprêço.

Passaremos a descrever os principais problemas por nós tratados.

Em algumas axiomáticas do tipo Zermelo-Fraenkel (como, por exemplo, em [1]) postula-se a existência do conjunto vazio. Provamos não ser isto necessário; porém, evidentemente, foram modificadas as formulações usuais dos Axiomas da Regularidade e Infinidade, já que as mesmas fazem uso explícito da existência do conjunto vazio. A questão nos foi proposta por Edison Farah.

Em [4], Edison Farah apresenta uma nova axiomática, ZF', da Teoria dos Conjuntos, provando essencialmente que, se ZF fôr consistente, então ZF' também o será. É fácil ver que ZF' é pelo menos tão forte quanto ZF + AE. Nesta tese, demonstramos, diretamente, que ZF' e ZF + AE são, de fato, equivalentes. (Êste mesmo resultado foi demonstrado, por outro processo, por Newton C.A. da Costa utilizando métodos de [3] e certas relações entre os sistemas de Zermelo-Fraenkel e de Bernays-Gödel (Cf. [1] e [6])). O mesmo se aplica a um outro sistema proposto por Edison Farah (ver [3]).

Em [8], Azriel Lévy enunciou os chamados Axiomas de Escolha Múltipla, Z(n) (n sendo um número natural maior ou igual a 1) e Z(∞). Z(n) afirma que, dado um conjunto não vazio C de conjuntos não vazios, existe uma função que <u>escolhe</u> de cada conjunto pertencente a C uma parte não vazia contendo no máximo n elementos. Z(∞) enuncia-se analogamente; apenas não se impõe limite superior às cardinalidades das partes finitas escolhidas.

Lévy demonstrou que Z(n) é equivalente ao Axioma da Escolha em ZF, mesmo sem o Axioma da Regularidade. Construiu, também, um modêlo do tipo de Fraenkel-Mostowski, no qual é válido Z(∞), mas não vale o Axioma da Escolha (e forçosamente não são válidos também os Axiomas de Extensionalidade e Regularidade, êste último na sua formulação comum).

Provamos que, em ZF, o Axioma da Escolha é equivalente a Z(∞), fazendo uso essencial do Axioma de Regularidade.

Finalmente, demonstramos que o Axioma da Escolha é equivalente, em ZF, à seguinte proposição:

Todo conjunto que admite uma ordem total (i. e., é totalmente ordenável), admite também uma boa ordem.

O resultado precedente foi obtido mediante o emprêgo do Axioma de Regularidade. Conjecturamos que êste axioma é imprescindível para a obtenção dessa equivalência.

Em nossa exposição, para torná-la mais colorida, empregamos sistemàtica e conscientemente, diversos abusos de linguagem, muitos dos quais são de uso corrente na Literatura (v.g., embora em ZF + AE não existam classes no sentido considerado, por exemplo, no sistema de Bernays-Gödel [6], muitas vêzes nos referimos à <u>classe</u> dos ordinais, à <u>classe</u> universal, etc.). O leitor não terá dificuldade em verificar de que modo se pode formular em ZF + AE um enunciado em que se fazem referências a classes ou se cometem outros abusos de linguagem.

Rigorosamente falando, ZF + AE é um sistema de primeira ordem, ou seja, tem como lógica subjacente um <u>cálculo funcional de primeira ordem aplicado</u>, <u>simples</u>, <u>com igualdade</u> (ver, por exemplo, [2]).

§ 1. Terminologia e Notação

Nesta introdução faremos um resumo das principais notações e convenções, bem como de certas noções a serem empregadas no decorrer da exposição.

A linguagem que utilizaremos não é uma linguagem formal; contudo, alguns símbolos das linguagens formalizadas corriqueiramente encontradas na Literatura serão por nós empregados como abreviações taquigráficas. Tais são êles:

$\rightarrow$ (implica), $\leftrightarrow$ (equivalente), $\wedge$ (e), $\vee$ (ou), $\neg$ (não), $=$ (igualdade), $\forall$ (para todo conjunto), $\exists$ (existe um conjunto), $\exists!$(existe um e apenas um conjunto). Além dêstes, aparece o símbolo específico da Teoria dos Conjuntos, o símbolo de pertinência $\in$. Por comodidade, usaremos o símbolo $\neq$ para denotar a negação da relação de igualdade e $\notin$, a da relação de pertinência.

Além dos sinais acima introduzidos, o discurso matemático contará com a presença de letras,que semânticamente serão interpretadas como conjuntos ou classes: minúsculas ou maiúsculas; gregas, latinas ou góticas; e afetadas ou não de índices.

Poder-se-á convencionar que certos símbolos denotam a mesma entidade no decorrer de toda exposição e temos, então, as assim chamadas <u>constantes da teoria</u>:

o 0 (zero) representará o conjunto sem elementos ou o conjunto vazio e a letra V representará a classe de todos elementos ou a classe universal.

Outra convenção a ser adotada se refere à relativização de quantificadores. Como exemplo, letras gregas minúsculas que aparecerem no contexto serão pensados como conjuntos extraídos da classe dos ordinais (que daqui por diante denotaremos por OR). Mais precisamente, se F fôr uma fórmula da Teoria dos Conjuntos(1), sempre que aparecerem expressões do tipo

$$\exists \alpha\, F(\alpha) \quad \text{ou} \quad \forall \alpha\, F(\alpha),$$

leiam-se elas como

$$\exists \alpha (\alpha \in \mathbf{OR} \wedge F(\alpha)) \text{ e } \forall \alpha (\alpha \in \mathrm{OR} \rightarrow F(\alpha))$$

respectivamente. Notar que a expressão $\alpha \in$ **OR** é eliminável, podendo ser substituída por qualquer fórmula que define ordinal (v. [5])(2).

Para que se aumente a clareza do texto, introduzir-se-ão as definições que servirão de abreviações

---

(1) Fórmula do cálculo funcional de primeira ordem aplicado, simples, com igualdade e tendo como único símbolo relacional específico $\in$.

(2) Cumpre-nos assinálar aqui que outras expressões envolvendo símbolos denotando classes são também elimináveis, podendo, pois, serem usadas mesmo no contexto de uma teoria de Conjuntos sem classes próprias: assim, a expressão $x \in V$ (x pertence à classe universal) pode ser substituída por $\exists y(x \in y)$, $x = V$ (x é igual à classe universal) se substitui por $x \neq x$, etc.

sugestivas de expressões que aparecem com relativa frequência. Aproveitamos a oportunidade para exibir as mais usuais, ficando porém a legitimidade de algumas delas sòmente assegurada como consequências dos axiomas da teoria. Limitar-nos-emos, pois, tão sòmente a introduzir definições, sem a menor preocupação de serem as mesmas justificadas ou não, o que ficará pospos to para depois:

$x \subseteq A$: deve ser lido como "x está contido em A", significando que todo elemento de x o é também de A. Em símbolos,

$$x \subseteq A \equiv_{def} \forall y\,(y \in x \rightarrow y \in A)$$

$X = \bigcup A$: ler-se-á como "X é a reunião de A", significando que os elementos de X são aquêles e sòmente aquêles que pertencem a algum membro de A. Em outras palavras:

$$X = \bigcup A \equiv_{def} \forall y\,(y \in X \leftrightarrow \exists z(y \in z \wedge z \in A))$$

$x = \bigcap A$: ou "x é a intersecção de A" significando que x é constituído pelos elementos comuns aos membros de A se A é não vazio ou x é a classe universal em caso contrário.

$$x = \bigcap A \equiv_{def} \forall y(y \in x \leftrightarrow \forall z(z \in A \rightarrow y \in z)).$$

$x = \wp y$: leia-se "x é o conjunto das partes de y". Queremos com isto dizer que x é constituído por todos os conjuntos contidos em y, ou seja:

$$x = \wp y \equiv_{def} (x \in V \wedge \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)).$$

Outras definições serão introduzidas no decorrer da exposição, na medida das necessidades.

Mediante definição contextual, faremos uso das assim chamadas descrições, cuja introdução é feita através do operador ι (iota). Vejamos como se introduz uma descrição: suponhamos que $F(X; c_1 \ldots c_n)$ seja uma fórmula em que a variável X possua ocorrências livres; suponhamos, ainda mais, tenha sido demonstrada a fórmula

$$\exists ! X\, F(X;\ c_1 \ldots c_n)$$

Pode-se, então, considerar daí por diante o têrmo

$$\iota_X\, F(X;\ c_1, \ldots, c_n)$$

como denotando aquela classe X que satisfaz a fórmula F, mantidos fixos os parâmetros $c_1, \ldots, c_n$.

Seja $F(x; c_1, \ldots c_n)$ uma fórmula e suponhamos ter sido demonstrado que

$$\exists ! y\, [y \in V \wedge \forall x\, [x \in y \leftrightarrow F(x;\ c_1, \ldots, c_n)]] .$$

Então, o conjunto y de todos os elementos x tais que $F(x; c_1, \ldots, c_n)$ (onde $c_1, \ldots, c_n$ devem ser pensados como nomes de conjuntos fixos ou parâmetros) será denotado por

$$\{x\colon F(x;\ c_1, \ldots, c_n)\}.$$

É claro que a notação que acabamos de introduzir é abreviação do seguinte têrmo:

$\iota_y\ (y \in V \wedge \forall x\,[x \in y \leftrightarrow F(x;\, c_1, \ldots, c_n)])$.

Faremos, a seguir, um ligeiro retrospecto da noção de <u>aplicação</u> bem como dos conceitos que lhe são correlatos. É clássico considerar-se uma aplicação como um conjunto de pares ordenados satisfazendo a certas condições adicionais. A maneira mais comum de se introduzir o conceito de par ordenado é devida a Kuratowski. No entanto, qualquer definição de par ordenado deve satisfazer às seguintes condições:

(1) $\forall x,y\,[x,y \in V \rightarrow \exists z\,(z = \langle x,y \rangle)]$,

(2) $\forall x,x',y,y'\,[\langle x,y \rangle = \langle x',y' \rangle \rightarrow x=x' \wedge y=y']$.

Pela notação $\langle x,y \rangle$ estamos designando o <u>par ordenado de x e y</u>: x será o primeiro e y o segundo elemento do par $\langle x,y \rangle$. É claro que (2) garante que êsses elementos são unìvocamente determinados e assim a terminologia dada se justifica.

A definição de par ordenado de Kuratowski utiliza a noção de <u>binário de x e y</u> que é o conjunto:

$$\{x,y\} \underset{def}{=} \{t : t = x \vee t = y\}.$$

No caso de termos $x = y$, êsse binário será mais sugestivamente chamado de <u>o conjunto unitário de x</u> (ou de y); a notação será

$$\{x\} \underset{def}{=} \{x,x\} = \{t : t = x\}.$$

Uma vez estabelecidas estas noções, a definição de par ordenado será

$$<x,y> \underset{def}{=} \{\{x\}, \{x,y\}\} \qquad \text{(Kuratowski).}$$

Seja $f \in V$. Diremos que f é uma <u>relação funcional</u> ou <u>aplicação</u> se

(1) $\forall z\,[z \in f \rightarrow \exists x,y\ (z = <x,y>)]$

(2) $\forall x,y,y'\ [<x,y> \in f \wedge <x,y''> \in f \rightarrow y = y'']$.

O conjunto dos primeiros elementos de pares ordenados que compõe uma aplicação será seu <u>domínio</u>:

$$\text{dom } f \underset{def}{=} \{x : \exists y\ \ (<x,y> \in f)\};$$

o conjunto dos segundos elementos será o <u>contradomínio</u> da mesma; assim, se $\breve{f}$ denota a relação oposta a f (i.e. $\breve{f} \underset{def}{=} \iota_g \forall x,y\ (<x,y> \in g \leftrightarrow <y,x> \in f)$), usar-se-á a notação bastante sugestiva para o contradomínio que economiza a introdução de símbolos novos:

$$\text{dom } \breve{f} \underset{def}{=} \{y : \exists x\ (<x,y> \in f)\}.$$

Sendo f uma relação funcional, $x \in \text{dom } f$ e A uma classe qualquer, teremos as seguintes notações:

$$f`x \underset{def}{=} \iota_y\ (<x,y> \in f),$$

$$f^{*}A \underset{def}{=} \{y : \exists x (x \in A \wedge y = f`x)\}.$$

$f`x$ será o <u>valor que $f$ assume em $x$</u> e $f^*A$ será a <u>imagem de $A$ por $f$</u>. Observamos que a notação $y = f`x$ de per si já implica que $x \in \mathrm{dom}\, f$ mas f^*A não força estar $A \subseteq \mathrm{dom}\, f$.

Se $\mathrm{dom}\, f = x$ e $\mathrm{dom}\, \breve{f} \subseteq A$, a notação

$$f \in {}^{x}A$$

significará que f é uma aplicação de domínio x com valores em A. Em particular,

$$f \in {}^{\mathrm{dom}\, f}V$$

é uma forma elegante de se dizer que f é uma aplicação.

§ 2. <u>O sistema axiomático ZF</u>.

Compõe-se o sistema axiomático ZF de [illegible] axiomas e um esquema de axiomas. Tais são êles:

<u>Esquema da Substituição</u>:

Sendo $F(x,y;\, c_1,\ldots,c_n)$ uma fórmula na qual as variáveis x e y possuem ocorrências livres e tal que a variável b não possui ocorrências livres em F, a seguinte fórmula faz parte do esquema (sendo portanto um dos axiomas):

$$\forall x\, \exists ! y\, F(x,y;c_1,\ldots,c_n) \rightarrow \forall a\, \exists b\, \forall y\, (y \in b$$

$$\leftrightarrow \exists x\, (x \in a \wedge F(x,y;\, c_1,\ldots,c_n))).$$

Axioma da Extensionalidade:

$$\forall A,B\, (\forall x\, (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B).$$

Axioma da Reunião:

$$\forall x \exists y \forall t\, (t \in y \leftrightarrow \exists z\, (t \in z \wedge z \in x)).$$

Axioma do Conjunto das Partes:

$$\forall x \exists y \forall t\, (t \in y \leftrightarrow \forall u (u \in t \rightarrow u \in x)).$$

Axioma da Infinidade:

$$\exists I\, (\exists x (x \in I) \wedge \forall x\, (x \in I \rightarrow \exists y (x \in y \wedge y \in I))).$$

Axioma da Regularidade:

$$\forall A\, (\exists x (x \in A) \rightarrow \exists x\, (x \in A \wedge \forall y\, (y \in x \rightarrow y \notin A))).$$

Observações:

(1) A fórmula $F(x,y;\, c_1,\ldots,c_n)$ que aparece no esquema de Substituição, pode possuir ocorrências livres de variáveis outras que x e y; as únicas que o fazem devem no entanto figurar entre as variáveis $c_1,\ldots,c_n$ e serão referidas como parâmetros. Os parâmetros devem intuitivamente ser pensados como nomes de conjuntos mantidos fixos através do argumento (sendo a fórmula $F(x,y;\, c_1,\ldots,c_n)$ cons-

truida a partir dos mesmos e dos símbolos primitivos da Teoria). A melhor imagem que o autor encontrou dos parâmetros é a de que êles deve ser considerados como constantes provisórias.

(2) A condição imposta à fórmula F no Esquema da Substituição será mais sucintamente chamada de "y - univocidade restrita de F":

$$\forall x\ \exists y\ F(x,y;c_1,\dots,c_n) \wedge \forall x,y,y'(F(x,y;c_1,\dots,c_n)$$
$$\wedge\ F(x,y';c_1,\dots,c_n) \rightarrow y = y').$$

Sendo $x \in a$, o único y tal que $F(x,y;c_1,\dots,c_n)$ estará na F-imagem de a e y é o F-valor de x. Com esta terminologia, o Esquema da Substituição ler-se-á:

Se F fôr y-unívoca em sentido restrito e a um conjunto, então existe o conjunto F-imagem de a.

Observar que a y-univocidade de F é sòmente exigida para a interpretação dos parâmetros do contexto e não para tôdas as interpretações possíveis dos mesmos.

(3) Notar que a formulação dos axiomas não pressupõe de modo algum a existência do conjunto vazio. Os únicos conjuntos cuja existência é explícita e diretamente implicada pelos axiomas são os conjuntos dados pelo Axioma de Infinidade e mesmo êstes con-

juntos não possuem obrigatòriamente o vazio como membro.

Passaremos agora a derivar as consequências imediatas dos Axiomas. A primeira delas será o utilíssimo esquema que assim se enuncia:

Sendo $F(x;c_1,\ldots,c_n)$ uma fórmula na qual as únicas variáveis possuindo ocorrências livres são x, $c_1,\ldots,c_n$ e sendo b uma variável distinta de x e dos parâmetros $c_1,\ldots,c_n$, a seguinte fórmula fará parte do esquema:

$$\forall a\,[\exists x\,(x\in a \wedge F(x;c_1,\ldots,c_n)) \rightarrow \exists b\,\forall x\,[x\in b \leftrightarrow x\in a \wedge F(x;c_1,\ldots,c_n)]] .$$

Em outras palavras, se fixados parâmetros $c_1,\ldots,c_n$, existir $x\in a$ tal que F, então será possível separar a parte constituída pelos elementos de a satisfazendo F. Referir-nos-emos a tal esquema como o **Esquema de Separação das partes não vazias** ou $ES_{\neq\emptyset}$.

Demonstração: Seja $F(x;c_1,\ldots,c_n)$ uma fórmula, a um conjunto e digamos que exista $x_0\in a$ tal que F. Seja $G(x,y;c_1,\ldots,c_n,x_0)$ a fórmula dada por

$$(F(x;c_1,\ldots,c_n)\wedge y=x) \vee (\neg F(x;c_1,\ldots,c_n)\wedge y=x_0) .$$

Segue claramente que $\forall x\ \exists!y\,G(x,y;c_1,\ldots,c_n)$ e pela aplicação do esquema de Substituição, obtém-se o conjunto b com as propriedades desejadas.

QED

Teorema 2.1: Sejam u,v conjuntos quaisquer, f uma aplicação, z o primeiro elemento de um par de f e X um conjunto ao qual z pertence. Os seguintes conjuntos existem:

(a) $\{u,v\}$ e $\langle u,v\rangle$

(b) dom f , $\breve{f}$ e dom $\breve{f}$

(c) $f^{\cdot}z$ e $f^{*}X$.

Demonstração: Dividiremos a demonstração dêsse teorema em duas partes. Primeiramente demonstraremos que existem conjuntos com mais de um elemento e depois examinaremos os casos supra citados.

Lema 2.1.1: $\exists I \; \exists a,b \; [a,b \in I \wedge a \neq b]$.

Demonstração: Seja I qualquer conjunto dado pelo Axioma de Infinidade. Temos então:

(a) I não é vazio,

(b) $\forall x \, [x \in I \rightarrow \exists y \, (x \in y \in I)]$.

Seja a um elemento de I (o qual existe devido a (a)). Reciocinando pelo método de redução ao absurdo, vamos supor que a é o único elemento de I. Por (b), $\exists y \, (a \in y \in I)$ e como I possui apenas um elemento, segue-se que o elemento y tal que $a \in y \in I$ é a. Donde

$$a \in a$$

Pelo Axioma de Regularidade,

$$\exists x \, [x \in I \wedge \forall y \, [y \in x \rightarrow y \notin I]].$$

Isto quer dizer que I possui um elemento que é disjunto de I. Êsse elemento sòmente pode ser <u>a</u>. Ora, <u>a</u> $\in$ I e <u>a</u> é disjunto de I, portanto

$$a \notin a.$$

A contradição aparece devido ao fato de havermos suposto I como sendo o conjunto unitário de <u>a</u>.

QED

A existência dos conjuntos mencionados nos casos (a) - (c) do Teorema 2.1 pode ser obtida especializando-se o Esquema da Substituição às seguintes situações:

(a) As fórmulas F_1, F_2 onde o conjunto do qual se substituem os elementos é qualquer conjunto I satisfazendo às condições do Axioma de Infinidade (o sentido do símbolo $\equiv$ é óbvio).

$$F_1(x,y;a,u,v) \equiv (x \neq a \wedge y = u) \vee (x = a \wedge y = v).$$

$$F_2(x,y;a,u,v) \equiv (x \neq a \wedge y = \{u\}) \vee (x = a \wedge y = \{u,v\}).$$

É claro que estamos supondo que $a \in I$. Obtêm-se assim os conjuntos $\{u,v\}$ e $\langle u,v \rangle$, respectivamente, e para demonstrá-lo, precisamos fazer uso do Lema 2.1.1.

(b) Às fórmulas F_3, F_4 e F_5, onde o conjunto do qual se substituem os elementos é a aplicação f:
$F_3(x,y;z) \equiv \exists u,v(x = \langle u,v \rangle \wedge y = x) \vee (\neg \exists u,v(x = \langle x,y \rangle) \wedge y = z)$, da qual se extrai dom f;

$F_4(x,y;z,f) \equiv \exists u,v(x= \langle u,v\rangle \wedge y= \langle v,u\rangle) \vee (\neg \exists u,v$
$(x= \langle u,v\rangle) \wedge y = \iota_t \; \exists w \; (t = \langle w,z\rangle \wedge \langle z,w\rangle \in f))$,
obtendo-se $\breve{f}$; e finalmente

$F_5(x,y;z,f) \equiv \exists u,v(x= \langle u,v\rangle \wedge y=v) \vee (\neg \exists u,v$
$(x = \langle u,v\rangle) \wedge y = \iota_w \; (\langle z,w\rangle \in f))$

que produz dom $\breve{f}$.

(c) Para se demonstrar a existência de $f`z$, dividir-se-á o procedimento em duas etapas. Na primeira, aplicaremos o esquema de Substituição no caso especial de termos a fórmula F_6, sendo o conjunto do qual se substituem os elementos a aplicação f.

$F_6(x,y;\; z,f) \equiv x = x \wedge \exists u \; (\langle z,u\rangle \in f \wedge y = u)$.

É fácil verificar que desta maneira obtemos o conjunto $\{y\}$ onde $y = \iota_u(\langle z,u\rangle \in f)$. Numa segunda etapa, aplica-se o axioma de Reunião ao conjunto $\{y\}$ e tira-se então que $f`z = \bigcup \{y\}$. Portanto, para tôda a aplicação f, existe o valor $f`z$ que f assume no conjunto z pertencente ao dom f.

Terminando o Teorema, seja X um conjunto ao qual pertence um elemento do domínio de f (em particular, podemos tomar z como sendo êste elemento). Demonstremos que a imagem de X por f é um conjunto. Basta substituir os elementos da intersecção do dom f com X pelos elementos y que são correspondentes de x pela seguinte fórmula:

$F_7(x,y;\; f,z) \equiv (x \in \text{dom } f \wedge y = f`x) \vee (x \notin \text{dom } f \wedge y = f`z)$.

Mas notemos o seguinte: precisamos mostrar ainda que a intersecção do domínio de f com X é um conjunto.

Isto sai do $ES_{\neq\emptyset}$ no caso de se ter a fórmula

$F_8(x;\ \mathrm{dom}\ f) \equiv x \in \mathrm{dom}\ f$.

Separa-se então a parte de X constituída pelos elementos que estão no dom f e isso é possível em virtude de $z \in X$.

QED

Para terminarmos êste parágrafo, façamos algumas observações relativas a alguns abusos de linguagem. Quando dizemos (v.g., no enunciado do Teorema 2.1) que "o conjunto x existe", o que queremos dizer é que para uma dada fórmula F e conjuntos $c_1, \ldots, c_n$ pode-se provar que

$$x = \iota_u \left[u \in V \wedge \forall y\, [\, y \in u \leftrightarrow F(y;\ c_1, \ldots, c_n)]\right].$$

Podemos também referir-nos a êsse fato dizendo: "o conjunto

$$\{y:\ F(y;\ c_1, \ldots, c_n)\}$$

existe" ou

$$\{y:\ F(y;\ c_1, \ldots, c_n)\}$$

é um conjunto. Por exemplo, no caso (a) do Teorema 2.1 estávamos provando a seguinte proposição:

$$\forall u, v \quad \exists !\, w\, \forall t\, [t \in w \leftrightarrow t = u \vee t = v] .$$

Enfim, o leitor não deverá encontrar dificuldades para precisar em todos os casos (a) - (c) o que estamos provando quando dizemos que tais e tais conjuntos existem.

§ 3. A existência do conjunto vazio

Como já havíamos anteriormente observado, os Axiomas de ZF não pressupõem a existência do conjunto vazio. Usualmente na Literatura, o que se faz para se derivar que $0 \in V$ é, ou postular diretamente a existência do 0, ou embutir o 0 no conjunto fornecido pelo Axioma de Infinidade, ou ainda não exigir no Esquema de Substituição que

$$\forall x\ \exists!\ y\, F(x,y;\ c_1,\ldots,c_n).$$

No lugar do Esquema de Substituição, colocaríamos, por exemplo, um esquema do seguinte tipo:

$$\forall x,y,y'\ [F(x,y;c_1,\ldots,c_n) \wedge F(x,y';c_1,\ldots,c_n) \rightarrow y = y'] \rightarrow \forall a \exists b \forall y\, [y \in b \leftrightarrow \exists x\, [x \in a \wedge F(x,y;c_1,\ldots,c_n)]].$$

A existência do conjunto vazio ficaria fàcilmente assegurada tomando-se para F no Esquema de Substituição, a fórmula

$$x \neq x \wedge x = y.$$

Quando, porém, eliminamos essas alternativas, a existência do conjunto vazio talvez não seja tão imediata. A substituição de elementos através de nosso Esquema é, por assim dizer, estrita, isto é, dado um conjunto não vazio, após cada uso de um dos Axiomas do Esquema de Substituição, os elementos do conjunto ficam substituídos por outros elementos e o conjunto resultante continua sendo não vazio. É fácil ver que tôdas as operações fornecidas pelos Axiomas, em geral não produzem o conjunto vazio.

Bem, para se demonstrar que $O \in V$, o presente autor fêz uso do Axioma de Regularidade e nossa conjectura é que o mesmo é absolutamente necessário neste projeto. Êste problema nos foi proposto por Edison Farah.

Antes de iniciarmos a demonstração, daremos algumas definições que são úteis nas considerações a seguir:

<u>Definição 3.1</u>: Seja x um conjunto. As expressões seguintes servirão como definições:

$$x = \emptyset \equiv_{def} \neg \exists y \, (y \in x)$$

$$x \neq \emptyset \equiv_{def} \exists y \, (y \in x).$$

Observemos que o símbolo $\emptyset$ que em inúmeros textos da Literatura denota o conjunto vazio não tem significado isoladamente nesta tese. O que se tem é a expressão $x = \emptyset$ ou $x \neq \emptyset$ consideradas <u>em bloco</u>; como já vimos, o símbolo denotando o conjunto vazio é a constante O.

Ainda dentro desta definição, se x e y forem conjuntos quaisquer, colocaremos

$$x \cap y = \emptyset \quad \equiv_{\text{def}} \neg \; \exists z \; (z \in x \wedge z \in y)$$

$$x \cap y \neq \emptyset \quad \equiv_{\text{def}} \neg \quad (x \cap y = \emptyset).$$

A primeira expressão será lida como <u>x é disjunto de y</u>. É claro que se $0 \in V$, então

$$x \cap y = \emptyset \;\longleftrightarrow\; \bigcap \{x, y\} = 0.$$

No que segue, I denotará um conjunto, mantido fixo, e satisfazendo às condições do Axioma de Infinidade:

(1) $I \neq \emptyset$

(2) $\forall x \; [x \in I \rightarrow \exists \, y \; (x \in y \in I)]$.

<u>Definição 3.2</u>: Seja X uma parte de I. A X, iremos associar o conjunto denotado por X_+ que é definido pela seguinte expressão:

$$X_+ = \{x : \; x \in I \;\wedge\; (x \in X \vee x \cap (I \sim X) = \emptyset)\}$$

no caso de $X \neq I$.

$$X_+ = I$$

no caso de ser X igual a I. A expressão $I \sim X$ está designando o conjunto

$$\{x : \; x \in I \wedge x \notin X\}$$

e está definida sòmente no caso em que $I \sim X \neq \emptyset$, ou seja

$$\exists \, x (x \in I \wedge x \notin X).$$

Cumpre-nos assinalar que a existência do conjunto X_+ se justifica aplicando-se o $ES_{\neq\emptyset}$, o Axioma de Regularidade e mais o fato de que $I \neq \emptyset$. Passamos agora a enumerar algumas consequências imediatas da definição, cuja verificação ficará a cargo do leitor:

<u>Teorema 3.2</u>:

(1) $\forall X \left[X \subseteq I \rightarrow X \subseteq X_+ \subseteq I\right]$

(2) $\forall X \left[X \subsetneq I \rightarrow X \subsetneq X_+\right]$

(3) $\forall X, Y \left[X \subseteq Y \subseteq I \rightarrow X_+ \subseteq Y_+\right]$

(4) $I_+ = I$; $\forall X \left[X = X_+ \leftrightarrow X = I\right]$.

Notemos que a operação que associa o conjunto X_+ ao conjunto $X \subseteq I$ está definida para tôdas as partes de I. Caso estivesse demonstrada a existência do conjunto vazio, poderíamos, em particular, aplicar aquela operação ao 0 e neste caso obteríamos o conjunto dos elementos de I que lhe são disjuntos.

Ora, a existência de tal conjunto está assegurada (pelo $ES_{\neq\emptyset}$, o Axioma de Regularidade e mais a hipótese de que $I \neq \emptyset$), independentemente da existência ou não do 0. Por abuso de notação, ainda denotaremos tal conjunto por 0_+ e temos, então, a seguinte definição:

Definição 3.3:

$$0_+ = \{x : x \in I \wedge x \cap I = \emptyset\}.$$

Definição 3.4: Seja P(f) a seguinte fórmula:

$$P(f) \equiv_{def} f \in {}^{\mathrm{dom}\, f}\mathrm{dom}\, f \wedge \mathrm{dom}\, f \subseteq \wp I \wedge 0_+ \in \mathrm{dom}\, f \wedge$$

$$\forall X\, [X \in \mathrm{dom}\, f \rightarrow X_+ \in \mathrm{dom}\, f \vee f\,'X = 0_+] \wedge \forall g\, [g \subseteq f \wedge$$

$$0_+ \in \mathrm{dom}\, g \wedge \forall X\, [X \in \mathrm{dom}\, g \rightarrow X_+ \in \mathrm{dom}\, g \vee f\,'X = 0_+] \rightarrow$$

$$g = f\,].$$

Uma primeira observação é que $\exists f\, P(f)$. Basta tomar

$$f = \{< 0_+ ,\ 0_+ >\}.$$

A seguir, verifica-se que

$$\forall f\, [P(f) \rightarrow f \in \wp\wp\wp\wp I\,].$$

Portanto, pelo $ES_{\neq\emptyset}$ existe o conjunto

$$P = \{f : P(f)\}.$$

Teorema 3.5: $\forall f \in P\ \forall X, Y \in \mathrm{dom}\, f\ [X \subseteq Y \vee Y \subseteq X]$.

Em outras palavras, a relação de inclusão restrita a pares de elementos do $\mathrm{dom}\, f$ (sendo $f \in P$) é uma relação de ordem total.

Demonstração: A prova do Teorema será subdividida em vários Lemas. Estaremos sempre supondo ser f um elemento de P.

<u>Lema 3.5.1</u>: $\forall X\, [X \in \operatorname{dom} f \to 0_+ \subseteq X]$.

Prova: Seja $g \subseteq f$ a função definida por

$$g = \{ \langle X,\ f`X \rangle : 0_+ \subseteq X \}.$$

É claro que $0_+ \in \operatorname{dom} g$. Por outro lado, se $X \in \operatorname{dom} g$ e $f`X \neq 0_+$, então $X_+ \in \operatorname{dom} f$ e $0_+ \subseteq X \subseteq X_+$. Portanto $X_+ \in \operatorname{dom} g$ e pela minimalidade de f, $g = f$. Isso prova o Lema.

QED

<u>Lema 3.5.2</u>: Seja X um elemento do $\operatorname{dom} f$ satisfazendo à seguinte condição:

$$\forall Y\, [Y \in \operatorname{dom} f \wedge Y \subsetneqq X \to Y_+ \subseteq X].$$

Então,

$$\forall Y\, [Y \in \operatorname{dom} f \to Y \subseteq X \vee X_+ \subseteq Y].$$

<u>Demonstração</u>: Seja $g \subseteq f$ dado por

$$g = \{ \langle Y,\ f`Y \rangle : Y \subseteq X \vee X_+ \subseteq Y \}.$$

Pelo Lema 3.5.1, $0_+ \subseteq X$ e portanto $0_+ \in \operatorname{dom} g$. Seja agora $Y \in \operatorname{dom} g$ tal que $f`Y \neq 0_+$. Se demonstrarmos que $Y_+ \in \operatorname{dom} g$, teremos $g = f$. Verifiquemos os fatos:

(1) $Y_+ \in \operatorname{dom} f$

Claro, pois $f \in P$, $Y \in \operatorname{dom} f$ e $f`Y \neq 0_+$.

(2) $Y \subseteq X \vee X_+ \subseteq Y_+$.

Segue do fato de $Y \in \operatorname{dom} g$.

Examinaremos as três possibilidades, que são as únicas possíveis, tendo-se em vista (2):

Caso (a) $Y \subsetneq X$: então, pela hipótese feita sôbre X, $Y_+ \subseteq X$.

Caso (b) $Y = X$: segue que $Y_+ = X_+$ e a fortiori $X_+ \subseteq Y_+$.

Caso (c) $X_+ \subseteq Y$: como $Y \subseteq Y_+$, por transitividade conclui-se que $X_+ \subseteq Y_+$.

De qualquer maneira, o que se prova é que

$$Y_+ \subseteq X \vee X_+ \subseteq Y_+$$

o que acarreta $Y_+ \in \mathrm{dom}\, g$ e portanto $f = g$.

QED

<u>Lema 3.5.3</u>:

$$\forall X,Y \left[X,Y \in \mathrm{dom}\, f \wedge Y \subsetneq X \rightarrow Y_+ \subseteq X \right].$$

<u>Demonstração</u>: Seja

$$g = \left\{ <X, f^{\cdot}X> : \forall Y \left[Y \in \mathrm{dom}\, f \wedge Y \subsetneq X \rightarrow Y_+ \subseteq X \right] \right\}.$$

Novamente, $g \subseteq f$. Pelo Lema 1, $0_+ \in \mathrm{dom}\, g$ por implicação vazia. Seja $X \in \mathrm{dom}\, g$ tal que $f^{\cdot}X \neq 0_+$. Segue que $X_+ \in \mathrm{dom}\, g$ e para terminarmos a demonstração, verifiquemos que $X_+ \in \mathrm{dom}\, g$. Mas esta afirmação será demonstrada se e sòmente se

$$\forall Y \left[Y \in \mathrm{dom}\, f \wedge Y \subsetneq X_+ \rightarrow Y_+ \subseteq X_+ \right].$$

Seja pois $Y \in \mathrm{dom}\, f$ tal que $Y \subsetneqq X_+$. Como X é um elemento do $\mathrm{dom}\, f$ satisfazendo às condições do Lema 3.5.2, temos sòmente as alternativas

$$Y \subseteq X \quad \text{ou} \quad X_+ \subseteq Y.$$

A última delas é impossível pois estamos supondo que $Y \subsetneqq X_+$. Examinaremos os dois casos:

Caso (a): $Y \subsetneqq X$; logo $Y_+ \subseteq X \subseteq X_+$ e por transitividade, $Y_+ \subseteq X_+$.

Caso (b): $Y = X$; portanto $Y_+ = X_+$ e a fortiori $Y_+ \subseteq X_+$.

De qualquer forma, se $X \in \mathrm{dom}\, g \wedge f^{\circ}X \neq 0_+$ então $Y_+ \subseteq X_+$ e o que se tem é $g = f$.

QED

Estamos em condições de demonstrar o Teorema 3.5. Seja $f \in P$ e $X \in \mathrm{dom}\, f$. Pelo Lema 3.5.3, tem-se

$$\forall Y \left[Y \in \mathrm{dom}\, f \wedge Y \subsetneqq X \longrightarrow Y_+ \subseteq X \right].$$

Combinando êste fato com o Lema 3.5.2, tem-se

$$\forall Y \left[Y \in \mathrm{dom}\, f \longrightarrow Y \subseteq X \vee X_+ \subseteq Y \right].$$

Mas $X \subseteq X_+$, e portanto

$$\forall Y \left[Y \in \mathrm{dom}\, f \longrightarrow Y \subseteq X \vee X \subseteq Y \right].$$

QED

Definição 3.6: Seja $Q(f)$ a seguinte fórmula:

$$Q(f) \equiv_{def} P(f) \wedge f = \breve{f} \wedge I \notin \operatorname{dom} f \wedge \forall X\, [X, X_+ \in \operatorname{dom} f \rightarrow (f`X_+)_+ = f`X].$$

Podemos provar que $\exists f\, Q(f)$. Basta tomar f como sendo $\{<0_+, 0_+>\}$. A fim de verificar que a função satisfaz à fórmula Q, um dos passos necessários é mostrar que $0_+ \neq (0_+)_+$. Suponhamos, então, que $0_+ = (0_+)_+$. Pela parte (4) do Teorema 3.2, tem-se que $0_+ = I$. Como $I \neq \emptyset$, podemos tomar $x \in I$. Pelo axioma de Infinidade, é possível encontrar y tal que $x \in y \in I$. Segue pois que $y \cap I \neq \emptyset$, já que x pertence a esta intersecção. Da definição de 0_+, tem-se pois que $y \notin 0_+$ e portanto $y \notin I$, o que é uma contradição.

Um outro fato imediato é

$$\forall f\, [Q(f) \rightarrow P(f)].$$

Estamos pois em condições de aplicar o $ES_{\neq\emptyset}$ no caso específico de termos a fórmula $Q(f)$ e o conjunto P, obtendo-se, pois, o conjunto denotado ainda por Q:

$$Q = \{f : Q(f)\}.$$

Demonstremos agora o importante Teorema:

Teorema 3.7: Seja $f \in Q$. A relação de inclusão restrita a pares de elementos do $\operatorname{dom} f$ é uma boa ordem.

Demonstração: Em vista de $Q \subseteq P$, segue do Teorema 3.5 que a inclusão restrita a pares de elementos Q é uma ordem total. Resta-nos provar que todo subconjunto não vazio do $\mathrm{dom}\, f$ possui elemento minimal em relação à inclusão. A demonstração será subdividida em lemas, em todos êles ficando admitido que f é um elemento arbitràriamente fixado em Q.

<u>Lema 3.7.1</u>: $\forall X \left[f`X = 0_+ \rightarrow X_+ \notin \mathrm{dom}\, f \right]$.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que $f`X = 0_+$ e $X, X_+ \in \mathrm{dom}\, f$. Como $f \in Q$,

$$(f`X_+)_+ = f`X = 0_+ .$$

Sabemos que $f`X_+ \in \mathrm{dom}\, f$ (já que $f = \breve{f}$ e portanto $f`X_+ \in \mathrm{dom}\, \breve{f} = \mathrm{dom}\, f$); logo $0_+ \subseteq f`X_+$. Ora,

$$0_+ \subseteq f`X_+ \subseteq (f`X_+)_+ = f`X = 0_+ .$$

Segue daí que $f`X_+ = 0_+$. Como $f$ é bijetora(já que $f = \breve{f}$) e $f`X = 0_+$, tem-se que

$$f`X = f`X_+ ,$$

e portanto, $X = X_+$. Pela parte (4) do Teorema 3.2, $X = I$, logo $I \in \mathrm{dom}\, f$, o que contradiz a hipótese de $f \in Q$ (vide definição de Q). A conclusão de que $X_+ \notin \mathrm{dom}\, f$ então se impõe.

QED

<u>Lema 3.7.2</u>:

$$\forall X \left[X \in \mathrm{dom}\, f \wedge X \neq 0_+ \rightarrow \exists Y \left[Y \in \mathrm{dom}\, f \wedge Y_+ = X \right] \right].$$

<u>Demonstração</u>: Seja

$$g = \left\{ \langle X, f`X \rangle : X = 0_+ \vee \exists Y \left[Y \in \mathrm{dom}\, f \wedge Y_+ = X \right] \right\}.$$

É claro que $g \subseteq f$. Mais ainda, $0_+ \in \mathrm{dom}\, g$. Seja $X \in \mathrm{dom}\, g$ tal que $f`X \neq 0_+$. Então $X_+ \in \mathrm{dom}\, f$, pois $f \in P$. Logo, X_+ satisfaz à condição

$$\exists Y \left[Y \in \mathrm{dom}\, f \wedge Y_+ = X_+ \right],$$

bastando tomar Y como o próprio X. Segue daí então que $X_+ \in \mathrm{dom}\, g$ e portanto $g = f$.

QED

<u>Lema 3.7.3:</u> $\forall X \left[X, X_+ \in \mathrm{dom}\, f \rightarrow f`X_+ \subseteq f`X \right]$.

<u>Demonstração</u>: Sejam X e X_+ elementos do $\mathrm{dom}\, f$. Pelo Lema 3.7.1., sabemos que $f`X \neq 0_+$. Mas $f \in Q$, logo $f = \breve{f}$ e portanto $f`X \in \mathrm{dom}\, f$, e pelo Lema 3.7.2, para algum $Y \in \mathrm{dom}\, f$ e $Y_+ = f`X$. Em vista de f ser igual a $\breve{f}$, podemos escrever

$$f`Y_+ = X.$$

Segue, então, que

$$X_+ = (f`Y_+)_+ = f`Y.$$

O fato de que $f`X_+ \subseteq f`X$ é então óbvio pelas seguintes fórmulas:

$$f`X_+ = f`f`Y = Y \subseteq Y_+ = f`X.$$

QED

<u>Lema 3.7.4:</u> $\forall X, Y \left[X, Y \in \mathrm{dom}\, f \wedge X \subseteq Y \rightarrow f`Y \subseteq f`X \right]$.

<u>Demonstração</u>: Seja X um elemento do $\mathrm{dom}\, f$ (que será mantido fixo) e consideremos a função g dada por

$$g = \left\{ \langle Y, f`Y \rangle : Y \subsetneq X \vee f`Y \subseteq f`X \right\}.$$

É claro que se g existe, $g \subseteq f$. A existência de g ficará, contudo, assegurada sòmente após termos provado, que $0_+ \in \text{dom}\, g$ (neste caso a fórmula que define g é satisfeita pelo par $\langle 0_+, f^\circ 0_+ \rangle$ e portanto estamos em condições a aplicar $ES_{\neq \emptyset}$).

Se o elemento fixo $X = 0_+$, então $f^\circ 0_+ \subseteq f^\circ X$ e portanto $\langle 0_+, f^\circ 0_+ \rangle \in g$. Se $X \neq 0_+$, $0_+ \subsetneq X$ pelo Lema 3.5.1. Ainda nesse caso a conclusão é a mesma. Portanto $0_+ \in \text{dom}\, g$.

Seja $Y \in \text{dom}\, g$ tal que $f^\circ Y \neq 0_+$. Então $Y_+ \in \text{dom}\, f$ (pois $f \in P$) e para terminar a demonstração, precisamos mostrar que $Y_+ \in \text{dom}\, g$. Como $Y \in \text{dom}\, g$,

$$Y \subsetneq X \quad \vee \quad f^\circ Y \subseteq f^\circ X.$$

Se $Y \subsetneq X$, pelo Lema 3.5.3 tem-se que $Y_+ \subseteq X$. Se $Y_+ \subsetneq X$, $Y_+ \in \text{dom}\, g$. Se $Y_+ = X$, $f^\circ Y_+ = f^\circ X$ e a fortiori $f^\circ Y_+ \subseteq f^\circ X$ o que ainda mostra estar Y_+ em $\text{dom}\, g$. De qualquer forma, $Y \subsetneq X \rightarrow Y_+ \in \text{dom}\, g$. Agora, se $f^\circ Y \subseteq f^\circ X$, teremos, pelo Lema 3.7.3, que

$$f^\circ Y_+ \subseteq f^\circ Y \subseteq f^\circ X,$$

já que Y e Y_+ pertencem ao $\text{dom}\, f$. De qualquer forma, conseguimos provar que $Y_+ \in \text{dom}\, g$, i.e.,

$$\forall Y\, [Y \in \text{dom}\, g \wedge f^\circ Y \neq 0_+ \rightarrow Y_+ \in \text{dom}\, g],$$

o que implica ser $f = g$, o que termina a demonstração do lema.

QED

Lema 3.7.5: $\forall X\, [X \in \mathrm{dom}\, f \longrightarrow X \subseteq f`O_+]$.

Demonstração: Seja $X \in \mathrm{dom}\, f$. Em consequência de $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, \breve{f}$,

$$\exists\, Y\, [Y \in \mathrm{dom}\, f \wedge f`Y = X].$$

Seja Y um elemento do $\mathrm{dom}\, f$ tal que $f`Y = X$. Pelo Lema 3.5.1, temos que $O_+ \subseteq Y$ e portanto pelo Lema 3.7.4 , $f`Y \subseteq f`O_+$. Logo $X \subseteq f`O_+$.

QED

Lema 3.7.6: $\forall \mathfrak{A} [\emptyset \neq \mathfrak{A} \subseteq \mathrm{dom} f \longrightarrow \bigcup \mathfrak{A} \in \mathfrak{A}]$.

Demonstração: Sabemos que, sendo $\mathfrak{A}$ um subconjunto de um conjunto totalmente ordenado, é também totalmente ordenado pela restrição da relação de inclusão a pares de elementos de $\mathfrak{A}$.

Portanto, dizer-se que $\bigcup \mathfrak{A} \in \mathfrak{A}$ é o mesmo que dizer que $\mathfrak{A}$ possui elemento maximal.

Suponhamos que tal não seja o caso, i.e..

$$\forall X \in \mathfrak{A} \quad \exists\, Y \in \mathfrak{A} \;.\; X \subsetneqq Y.$$

É claro que $f`O_+ \notin \mathfrak{A}$, pelo Lema 3.7.5.

Seja

$$g = \{ \langle X, f`X \rangle : \exists\, Y \in \mathfrak{A},\; X \subseteq Y \}.$$

Temos que $g \subseteq f$ e mostremos que $O_+ \in \mathrm{dom}\; g$. Sendo $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, $\exists\, Y\, (Y \in \mathfrak{A})$. Para tal Y, $O_+ \subseteq Y$ pelo Lema 3.5.1. Logo $O_+ \in \mathrm{dom}\; g$.

Suponhamos que $X \in \operatorname{dom} g$ e $f^{\cdot}X \neq O_+$. Segue então que $X_+ \in \operatorname{dom} f$ (pois $f \in P$) e X está incluído em algum elemento de $\mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{A}$ não possui elemento maximal e é totalmente ordenado pela relação de inclusão, então existe Y tal que

$$X \subsetneqq Y \in \mathfrak{A}.$$

Pelo Lema 3.5.3 segue que

$$X_+ \subseteq Y \in \mathfrak{A},$$

ou seja, $X_+ \in \operatorname{dom} g$. Segue daí que $g = f$.

Bem, como $f = \breve{f}$, $f^{\cdot}O_+ \in \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$. Pelo que acabamos de mostrar, existe $Y \in \operatorname{dom} f$ tal que

$$f^{\cdot}O_+ \subseteq Y \in \mathfrak{A}.$$

Pelo Lema 3.7.5, $Y \subseteq f^{\cdot}O_+$, o que implica $f^{\cdot}O_+ = Y \in \mathfrak{A}$. Mas como foi estabelecido acima, $f^{\cdot}O_+ \notin \mathfrak{A}$ e chega-se portanto a uma contradição. Logo $\bigcup \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.

QED

Finalmente estamos em condições de provar o Teorema 3.7.

Seja $\mathfrak{b}$ um subconjunto não vazio do $\operatorname{dom} f$. Seja

$$\mathfrak{A} = \{ f^{\cdot}X : X \in \mathfrak{b} \}.$$

Sendo $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ e $\mathfrak{A} \subseteq \operatorname{dom} f$, segue que $\mathfrak{A}$ possui elemento maximal pela relação de inclusão. Denotemos tal elemento por $f^{\cdot}X_0$, onde $X_0 \in \mathfrak{b}$. Mostremos que X_0 é elemento minimal de $\mathfrak{b}$. Ora, seja $Y \in \mathfrak{b}$. Então $f^{\cdot}Y \subseteq f^{\cdot}X_0$, pela maximalidade de $f^{\cdot}X_0$. Mas $f = \breve{f}$

e pelo Lema 3.7.4 , $f^{\circ}(f^{\bullet}X\ ) \subseteq f^{\bullet}(f^{\bullet}Y)$ e portanto $X_0 \subseteq Y$.

QED

Daremos agora a definição do conjunto $\bar{\omega}$ que para as nossas finalidades, desempenhará a mesma função do conjunto dos números naturais.

Definição 3.8: O conjunto $\bar{\omega}$ é definido pela seguinte fórmula:

$$\bar{\omega} = \{X: \exists f\ [f \in Q \wedge f^{\circ}0_+ = X]\}.$$

Como de costume, precisamos justificar a existência deste conjunto. Ela decorre dos seguintes fatos:

(1) $\bar{\omega} \neq \emptyset$, pois $\{<0_+, 0_+>\} \in Q$ e portanto $0_+ \in \bar{\omega}$.

(2) $\bar{\omega} \subseteq \wp I$, já que todo elemento satisfazendo à fórmula que define $\bar{\omega}$ está no contradomínio de alguma função de Q e sabemos que o contradomínio de qualquer destas funções é constituído de pa de I. De (1), (2) e $ES_{\neq\emptyset}$, segue que $\bar{\omega}$ existe.

Teorema 3.9: O conjunto $\bar{\omega}$ goza das seguintes propriedades:

(1) $0_+ \in \bar{\omega}$.

(2) $\forall X [X \in \bar{\omega} \rightarrow X_+ \in \bar{\omega} \wedge X \subsetneq X_+]$.

(3) $\forall \mathfrak{A} [\mathfrak{A} \subseteq \bar{\omega} \wedge 0_+ \in \mathfrak{A} \wedge \forall X [X \in \mathfrak{A} \rightarrow X_+ \in \mathfrak{A}] \rightarrow \mathfrak{A} = \bar{\omega}]$

<u>Demonstração de (1)</u>: Basta observar que

$$\{ <0_+, 0_+> \} \in Q$$

e olhar para a definição de $\overline{\omega}$.

<u>Demonstração de (2)</u>: Para provarmos (2), vamos introduzir uma definição e logo após provemos uma série de Lemas.

<u>Definição 3.10</u>: Seja f uma função de Q. Definiremos o conjunto f_+ pela fórmula abaixo:

$$f_+ = \{<X,(f`X)_+> : X \in \text{dom } f\} \cup \{ <(f`0_+)_+, 0_+> \}.$$

Mais uma vez, precisamos justificar a existência de f_+ e isto se faz aplicando-se o Esquema de Substituição no caso particular em que se tem a fórmula

$$\exists u,w [x = <u,w> \wedge w \in \wp I \wedge y = <u,w_+>].$$

Naturalmente, o conjunto do qual se substituem os elementos é f. Desta maneira obtém-se o conjunto que se designará por A e dado por

$$A = \{ <X,(f`X)_+> : X \in \text{dom } f \}.$$

Se chamarmos de B o conjunto $\{ <(f`0_+)_+, 0_+> \}$ (o qual certamente existe pelo Teorema 2.1), então é fácil demonstrar que $f_+ = \bigcup \{A,B\}$ e assim a existência de f_+ encontra-se amplamente justificada.

<u>Lema 3.9.1</u>: Seja f uma função de Q. Uma das alternativas abaixo é, então, válida:

(i) $f = \{<0_+,0_+>\}$ e $f_+ = \{<0_+,(0_+)_+>,<(0_+)_+,0_+>\}$.

ou

(ii) $f \neq \{<0_+,0_+>\}$ e $f_+ = \{<Y_+,f'Y> : Y_+ \in \text{dom } f\} \cup$
$\cup \{<0_+,(f'0_+)_+>, <(f'0_+)_+,0_+>\}$.

<u>Demonstração</u>: Se $f = \{<0_+,0_+>\}$, é claro que

$$f_+ = \{<0_+,(0_+)_+>, <(0_+)_+, 0_+>\}.$$

Suponhamos que $f \in Q$ e $f \neq \{<0_+,0_+>\}$. Nosso primeiro passo será verificar que o conjunto

$$\{<Y_+,f'Y> : Y_+ \in \text{dom } f\}$$

existe.

Como $f \neq \{<0_+,0_+>\}$, tem-se que $f'0_+ \neq 0_+$. Isto porque, estando f em P, não existe nenhum $g \subsetneqq f$ tal que $g \in Q$; caso $f'0_+ = 0_+$, tal não se daria. Pelo Lema 3.7.2, $\exists Y\, [Y,Y_+ \in \text{dom } f \wedge Y_+ = f'0_+]$. Logo

$$\{Y: Y,Y_+ \in \text{dom } f\} \neq \emptyset$$

e portanto existe, pelo $ES_{\neq\emptyset}$. É fácil agora verificar que o conjunto

$$\{<Y,f'Y> : Y,Y_+ \in \text{dom } f\}$$

também existe, já que êste conjunto provém de

$$\{Y : Y,Y_+ \in \text{dom } f\}$$

pela substituição de Y por $<Y,f'Y>$.

Pela definição de f_+, tem-se

$$f_+ = \{<X,(f'X)_+> : X \in \text{dom } f\} \cup \{<(f'0_+)_+,0_+>\}$$

Se desejarmos mostrar a igualdade de (2), é suficiente provar que

$$\left\{ \langle X, (f^{\bullet}X)_{+} \rangle \;:\; X \in \mathrm{dom}\ f \right\} =$$

$$= \left\{ \langle Y_{+}, f^{\bullet}Y \rangle \;:\; Y_{+} \in \mathrm{dom}\ f \right\} \cup \left\{ \langle O_{+}, (f^{\bullet}O_{+})_{+} \rangle \right\}.$$

Sabemos que dado $X \in \mathrm{dom}\ f$, as únicas alternativas, pelo Lema 3.7.2, são:

(a) $X = O_{+}$

(b) $\exists\, Y\ \left[Y, Y_{+} \in \mathrm{dom}\ f \wedge Y_{+} = X \right]$.

Temos que

$$X = O_{+} \;\leftrightarrow\; \langle X, (f^{\bullet}X)_{+} \rangle = \langle O_{+}, (f^{\bullet}O_{+})_{+} \rangle .$$

Ainda mais, se existe Y tal que $Y,\ Y_{+} \in \mathrm{dom}\, f$, concluiremos do fato de que $f \in Q$ que

$$X = Y_{+} \;\leftrightarrow\; (f^{\bullet}X)_{+} = (f^{\bullet}Y_{+})_{+} = f^{\bullet}Y$$

ou seja

$$X = Y_{+} \;\leftrightarrow\; \langle X, (f^{\bullet}X)_{+} \rangle = \langle Y_{+}, f^{\bullet}Y \rangle$$

As equivalências acima provam que

$$\left\{ \langle X, (f^{\bullet}X)_{+} \rangle \;:\; X \in \mathrm{dom}\ f \right\} =$$

$$= \left\{ \langle Y_{+}, f^{\bullet}Y \rangle \;:\; Y_{+} \in \mathrm{dom}\ f \right\},$$

o que termina a demonstração de (ii).

QED

Lema 3.9.2: Sendo $f \in Q$, tem-se:

(i) f_+ é uma aplicação.

(ii) $\mathrm{dom}\, f_+ = \mathrm{dom}\, f \cup \{(f^{\cdot}0_+)_+\} \subseteq \wp I$.

(iii) $\mathrm{dom}\, \breve{f}_+ = \mathrm{dom}\, f_+$.

Demonstração: Seja $f \in Q$. No caso de termos $f = \{<0_+, 0_+>\}$, a expressão de f_+ dada no Lema 3.9.1 é suficiente para nos convencermos de (i) - (iii).

Vamos então supor que $f \neq \{<0_+, 0_+>\}$. Para mostrarmos que f_+ é uma aplicação, observemos que, por definição,

$$f_+ = \{<X, (f^{\cdot}X)_+> : X \in \mathrm{dom}\, f\} \cup \{<(f^{\cdot}0_+)_+, 0_+>\}.$$

Se então demonstrarmos que

$$\forall X \, [\, X \in \mathrm{dom}\, f \rightarrow X \neq (f^{\cdot}0_+)_+ \,],$$

teremos alcançado o nosso objetivo, uma vez que os conjuntos

$$\{<X, (f^{\cdot}X)_+> : X \in \mathrm{dom}\, f\} \quad \text{e} \quad \{<(f^{\cdot}0_+)_+, 0_+>\}$$

são claramente aplicações e a reunião de duas aplicações de domínios disjuntos é uma aplicação.

Suponhamos que $(f^{\cdot}0_+)_+ \in \mathrm{dom}\, f$. Ora, $f = \breve{f}$, portanto $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, \breve{f}$, donde se conclui que

$$(f^{\cdot}0_+)_+ \in \mathrm{dom}\, f.$$

Pelo Teorema 3.2 (1) e Lema 3.7.5, tem-se:

$$(f^{\cdot}0_+)_+ \subseteq f^{\cdot}0_+ \subseteq (f^{\cdot}0_+)_+$$

e portanto, $(f^{\circ}O_{+})_{+} = f^{\circ}O_{+} = I$, logo $I \in \operatorname{dom} f$ o que contraria o fato de estar f em Q.

A demonstração que acabamos de dar faz saltar aos olhos que

$$\operatorname{dom} f_{+} = \operatorname{dom} f \cup \{(f^{\circ}O_{+})_{+}\}.$$

Finalizando o lema, provemos que $\operatorname{dom} \breve{f}_{+} = \operatorname{dom} f_{+}$.

Em vista da definição 3.10 de f_{+} e do Lema 3.9.1, é suficiente mostrar que

$$\{X_{+} : X, X_{+} \in \operatorname{dom} f\} = \{f^{\circ}Y : Y_{+} \in \operatorname{dom} f\}.$$

Seja, pois, X um elemento de dom f tal que $X_{+} \in \operatorname{dom} f$. Coloquemos $Y = f^{\circ}X_{+}$. Como sabemos, $(f^{\circ}X_{+})_{+} = f^{\circ}X$, desde que $f \in Q$. Como $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} \breve{f}$ e $f^{\circ}X \in \operatorname{dom} \breve{f}$, temos que $(f^{\circ}X_{+})_{+} \in \operatorname{dom} f$, ou seja, $Y_{+} \in \operatorname{dom} f$. Resumindo, temos $Y = f^{\circ}X_{+}$ com Y e Y_{+} no dom f. Mas $f = \breve{f}$, portanto $X_{+} = f^{\circ}Y$ o que demonstra a inclusão

$$\{X_{+} : X, X_{+} \in \operatorname{dom} f\} \subseteq \{f^{\circ}Y : Y_{+} \in \operatorname{dom} f\}.$$

Para nos convencermos da inclusão oposta, consideremos um elemento Y tal que $Y, Y_{+} \in \operatorname{dom} f$. Precisamos mostrar que $f^{\circ}Y = X_{+}$ onde $X, X_{+} \in \operatorname{dom} f$. Seja $X = f^{\circ}Y_{+}$. Então

$$X_{+} = (f^{\circ}Y)_{+} = f^{\circ}Y$$

o que prova estarem X e X_{+} no dom f. Isto termina a demonstração do Lema.

QED

Lema 3.9.3: Sendo $f \in Q$, tem-se:

(i) $0_+ \in \mathrm{dom}\, f_+$

(ii) $\forall X\, [X \in \mathrm{dom}\, f_+ \rightarrow X_+ \in \mathrm{dom}\, f_+ \vee f_+^{\cdot} X = 0_+]$

(iii) $\forall g\, [g \subseteq f_+ \wedge 0_+ \in \mathrm{dom}\, g \wedge \forall X\, [X \in \mathrm{dom}\, g \rightarrow$

$X_+ \in \mathrm{dom}\, g \vee f_+^{\cdot} X = 0_+] \rightarrow g = f_+]$.

Demonstração: Que $0_+ \in \mathrm{dom}\, f_+$ pode ser visto nas expressões de f_+ dadas no Lema 3.9.1.

Provemos (ii). Seja $X \in \mathrm{dom}\, f_+$. Com um pouco de reflexão sôbre o enunciado do Lema 3.9.1, ficaremos convencidos de que as alternativas que serão expostas são as únicas possíveis e a verificação de uma delas exclui tôdas as outras:

Caso 1: $f = \{<0_+, 0_+>\}$ e $X = 0_+$.

Então $f_+^{\cdot} X = (0_+)_+ = X_+$, i.e.

$f_+^{\cdot} X = X_+ \in \mathrm{dom}\, f_+$.

Caso 2: $f = \{<0_+, 0_+>\}$ e $X = (0_+)_+$.

Então $f_+^{\cdot} X = 0_+$.

Caso 3: $f \neq \{<0_+, 0_+>\}$ e $X = Y_+$, onde $f^{\cdot} Y \neq 0_+$.

Neste caso, $Y_+ = X \in \mathrm{dom}\, f$. Como $f^{\cdot} X \neq 0_+$ e $f \in P$, segue que $X_+ \in \mathrm{dom}\, f \subseteq \mathrm{dom}\, f_+$, pelo Lema 3.9.2, parte (ii). Logo $X_+ \in \mathrm{dom}\, f$.

<u>Caso 4</u>: $f \neq \{<0_+, 0_+>\}$ e $X = Y_+$, onde $f^{\cdot}Y = 0_+$.

Segue então que $Y = f^{\cdot}0_+$ e portanto $X = Y_+ = (f^{\cdot}0_+)_+$, i.e. $f_+^{\cdot}X = 0_+$.

<u>Caso 5:</u> $f \neq \{<0_+, 0_+>\}$ e $X = 0_+$.

É claro então que $f^{\cdot}0_+ \neq 0_+$, pois que f não admite nenhum subconjunto próprio que esteja em P. Logo $f^{\cdot}X \neq 0_+$ e $X_+ \in \text{dom } f \subseteq \text{dom } f_+$.

<u>Caso 6</u>: $f \neq \{<0_+, 0_+>\}$ e $X = (f^{\cdot}0_+)_+$.

Segue que $f_+^{\cdot}X = 0_+$.

O exame de todos êstes casos prova (ii).

Provemos (iii). Suponhamos ser $g \subseteq f$ uma aplicação tal que:

(a) $0_+ \in \text{dom } g$,

(b) $\forall X [X \in \text{dom } g \rightarrow X_+ \in \text{dom } g \vee f_+^{\cdot} X = 0_+]$.

É necessário provar que $g = f_+$. A fim de fazê-lo, usaremos o princípio geral que diz: dadas duas aplicações, se uma está contida na outra e seus domínios são iguais, elas coincidem. Como

$$\text{dom } f_+ = \text{dom } f \cup \{(f^{\cdot}0_+)_+\},$$

provemos que $\text{dom } f \cup \{(f^{\cdot}0_+)_+\} \subseteq \text{dom } g$.

Consideremos a aplicação h dada pela seguinte expressão:

$$h = \{<X, f^{\cdot}X> : X \in \text{dom } g\}.$$

Tem-se que $0_+ \in \text{dom } g$, logo $0_+ \in \text{dom } h$. Seja $X \in \text{dom } g$ tal que $f^\bullet X \neq 0_+$. No caso de se ter $f_+^\bullet X = 0_+$, segue da definição de f_+ que

$$0_+ \subseteq f^\bullet X \subseteq (f^\bullet X)_+ = f_+{}^\bullet X = 0_+$$

ou seja, $f^\bullet X = (f^\bullet X)_+ = I \in \text{dom } f$, o que contradiz estar f em Q. Logo $f_+{}^\bullet X \neq 0_+$ e pela condição (b), $X_+ \in \text{dom } g$ o que prova estar X_+ em dom h. Logo $f = h$ e portanto $\text{dom } f \subseteq \text{dom } g$.

Para concluir, mostremos que $(f^\bullet 0_+)_+ \in \text{dom } g$. Ora, $f^\bullet 0_+ \in \text{dom } f$, logo $f^\bullet 0_+ \in \text{dom } g$. Pela condição (b), se provarmos que

$$f_+{}^\bullet(f^\bullet 0_+) \neq 0_+$$

teremos terminado a demonstração.

Suponhamos que $f_+^\bullet(f^\bullet 0_+) = 0_+$. Sendo $f^\bullet 0_+ \in \text{dom } f$, pela definição de f_+, tem-se:

$$0_+ = f_+^\bullet(f^\bullet 0_+) = (f^\bullet(f^\bullet 0_+))_+ = (0_+)_+$$

o que é manifestamente contraditório, já que neste caso

$$0_+ = (0_+)_+ = I \in \text{dom } f$$

e isto não se dá já que $f \in P$.

Demonstramos então que $g \subseteq f_+$ e $\text{dom } g = \text{dom } f_+$ o que prova ser $g = f_+$.

QED

<u>Lema 3.9.4</u>: $\forall f \left[f \in Q \longrightarrow f_+ \in P \right]$.

<u>Demonstração</u>: Imediata a partir dos Lemas 3.9.2 e 3.9.3.

QED

<u>Lema 3.9.5</u>: $\forall f\,[f \in Q \rightarrow f_+ = \breve{f}_+]$.

<u>Demonstração</u>: Consideremos os dois casos seguintes:

<u>Caso 1</u>: $f = \{<0_+,0_+>\}$.
Então a demonstração é imediata a partir do Lema 3.9.1, parte (i).

<u>Caso 2</u>: $f \neq \{<0_+,0_+>\}$.

Pela parte (iii) do Lema 3.9.2, $\text{dom}\, \breve{f}_+ = \text{dom}\, f_+$. Para se estabelecer que $f_+ = \breve{f}_+$, basta provar que

$$\forall X\,[X \in \text{dom}\, f_+ \longrightarrow f_+{}^{\bullet}(f_+{}^{\bullet}X) = X].$$

Sendo $X \in \text{dom}\, f_+$, tem-se pelo Lema 3.9.1 os seguintes casos:

(a) $X = 0_+$

(b) $X = (f^{\bullet}0_+)_+$

(c) $\exists Y\,[Y,\, Y_+ \in \text{dom}\, f \wedge X = Y_+]$.

Se $X = 0_+$, $f_+{}^{\bullet}X = (f^{\bullet}0_+)_+$ e $f_+{}^{\bullet}(f_+{}^{\bullet}0_+) = f_+{}^{\bullet}(f^{\bullet}0_+)_+ = 0_+$, ou seja, $f_+{}^{\bullet}(f_+{}^{\bullet}0_+) = 0_+$ e portanto $f_+{}^{\bullet}(f_+{}^{\bullet}X) = X$.

Se $X = (f^{\bullet}0_+)_+$, então $f_+{}^{\bullet}X = f_+{}^{\bullet}(f^{\bullet}0_+)_+ = 0_+$ e portanto $f_+{}^{\bullet}f_+{}^{\bullet}X = f_+{}^{\bullet}0_+ = (f^{\bullet}0_+)_+ = X$.

Resta-nos examinar o caso em que existe $Y \in \text{dom}\, f$ tal que $Y_+ \in \text{dom}\, f$ e $X = Y_+$. Coloquemos $Z = f^{\bullet}Y_+$. Mostremos que $Z_+ \in \text{dom}\, f$. Mas isto é claro, já que $f = \breve{f}$ e

$$Z_+ = (f^{\bullet}Y_+)_+ = f^{\bullet}Y \in \mathrm{dom}\, \ddot{f} \subseteq \mathrm{dom}\, f.$$

Como $Z, Z_+ \in \mathrm{dom}\, f$, $f_+^{\bullet}Z_+ = f^{\bullet}Z$, pela Parte (ii) do Lema 3.9.1. Seguem, pois, as igualdades:

$$f_+{}^{\bullet}X = f_+{}^{\bullet}Y_+ = f^{\bullet}Y = Z_+$$

e

$$f_+{}^{\bullet}f_+{}^{\bullet}X = f_+{}^{\bullet}Z_+ = f^{\bullet}Z = f^{\bullet}f^{\bullet}Y_+ = Y_+ = X$$

ou seja,

$$f_+{}^{\bullet}f_+{}^{\bullet}X = X. \text{ Portanto } f_+ = \ddot{f}_+.$$

QED

<u>Lema 3.9.6</u>: $\forall f\, [f \in Q \rightarrow I \notin \mathrm{dom}\, f_+]$.

<u>Demonstração</u>: No caso de ser $f = \{<0_+, 0_+>\}$, a conclusão é óbvia uma vez que sabemos que

$$0_+, (0_+)_+ \neq I \quad \text{e} \quad f_+ = \{<0_+, (0_+)_+> \;,\; <(0_+)_+, 0_+>\}.$$

Consideremos o caso em que $f \neq \{<0_+, 0_+>\}$. Da definição de f_+, tira-se que

$$\mathrm{dom}\, f_+ = \mathrm{dom}\, f \cup \{(f^{\bullet}0_+)_+\}.$$

Como $f \in Q$, $I \notin \mathrm{dom}\, f$ e para finalizar o Lema, provaremos que $I \neq (f^{\bullet}0_+)_+$.

Suponhamos que o contrário aconteça, isto é,

$$I = (f^{\bullet}0_+)_+.$$

Como $I \notin \mathrm{dom}\, f$ e $f^{\bullet}0_+ \in \mathrm{dom}\, f$, teremos forçosamente

$$f^{\bullet}0_+ \subsetneq (f^{\bullet}0_+)_+ = I$$

isto é, $I \sim f^{\cdot}O_{+} \neq \emptyset$. Seja $x \in I \sim f^{\cdot}O_{+}$. Pelo Axioma de Infinidade, existe y tal que

$$x \in y \in I$$

e portanto $y \cap I \neq \emptyset$ já x é membro comum a y e I. Pela definição de $(f^{\cdot}O_{+})_{+}$, $y \notin (f^{\cdot}O_{+})_{+}$ e como $y \in I$, $y \in f^{\cdot}O_{+}$. Mostremos agora que $y \notin O_{+}$. Isso provém da definição de O_{+} que estabelece ser

$$O_{+} = \{z\colon z \in I \wedge z \cap I = \emptyset\}$$

e ainda do fato de que $y \cap I \neq \emptyset$.

Sabemos y pertencer a algum elemento do dom f e êste não poder ser O_{+}. Pelo Lema 3.7.2, $y \in Y_{+}$ onde $Y, Y_{+} \in$ dom f. Como dom f é bem ordenado pela relação de inclusão, tomemos o menor dêstes elementos. Então $y \in Y_{+}$ e $Y, Y_{+} \in$ dom f.

Chegaremos a uma contradição pelas seguintes considerações:

$$Y_{+} = \{z\colon z \in Y \vee (z \in I \wedge z \cap (I \sim Y) = \emptyset)\}.$$

Mas $Y \subseteq f^{\cdot}O_{+}$, pelo Lema 3.7.5, portanto $I \sim f^{\cdot}O_{+} \subseteq I \sim Y$, logo $x \in I \sim Y$ o que significa que $y \cap (I \sim Y) = \emptyset$ e $y \notin Y$. Logo $y \notin Y_{+}$ o que é uma contradição. Portanto $(f^{\cdot}O_{+})_{+} \neq I$. QED

<u>Lema 3.9.7</u>: $\forall X [\, X, X_{+} \in \text{dom } f_{+} \rightarrow$

$$(f^{\cdot}_{+}X_{+})_{+} = f^{\cdot}_{+}X \,].$$

Demonstração: Sejam X e X_+ elementos do dom f_+. Pela parte (ii) do Lema 3.9.2, sabemos que

$$\text{dom } f_+ = \text{dom } f \cup \{(f^{\bullet}0_+)_+\}.$$

Provemos inicialmente que $X \neq (f^{\bullet}0_+)_+$. De fato, se $X = (f^{\bullet}0_+)_+$ teremos $X_+ \in$ dom f, já que a possibilidade de $X_+ = (f^{\bullet}0_+)_+ = X$ é impossível pela parte (4) do Teorema 3.2.

Pela maximalidade de $f^{\bullet}0_+$ no dom f e pela parte (1) do Teorema 3.2, poderemos escrever:

$$(f^{\bullet}0_+)_+ = X \subseteq X_+ \subseteq f^{\bullet}0_+ \subseteq (f^{\bullet}0_+)_+ .$$

Logo $X = X_+ = I$, ou seja $I \in$ dom f_+, o que contradiz o Lema 3.9.6. Portanto tem-se $X \neq (f^{\bullet}0_+)_+$ o que implica estar X_+ no dom f.

Examinaremos os dois seguintes casos:

Caso 1: $X \subsetneq f^{\bullet}0_+$. Então, pelo Lema 3.5.3, $X_+ \subseteq f^{\bullet}0_+$ e assim $X_+ \in$ dom f_+, já que

$$f^{\bullet}0_+ \subsetneq (f^{\bullet}0_+)_+ .$$

Tendo-se, porém, X, $X_+ \in$ dom f_+, segue pela parte (ii) do Lema 3.9.1. que

$$(f_+^{\bullet}X_+) = f^{\bullet}X$$

e portanto

$$(f_+^{\bullet}X_+)_+ = (f^{\bullet}X)_+ = f_+^{\bullet}X.$$

<u>Caso 2</u>: $X = f^{\bullet}O_+$. Então $X_+ = (f^{\bullet}O_+)_+$ e pela parte (ii) do Lema 3.9.1, $f^{\bullet}_+X_+ = O_+$ e portanto $(f^{\bullet}_+X_+)_+ = (O_+)_+$. Por outro lado,

$$f^{\bullet}_+X = f^{\bullet}_+(f^{\bullet}O_+) = (f^{\bullet}(f^{\bullet}O_+))_+ = (O_+)_+.$$

Logo $(f^{\bullet}_+X_+)_+ = f^{\bullet}_+X$.

QED

<u>Lema 3.9.8</u>: $\forall f\,[f \in Q \rightarrow f_+ \in Q]$.

<u>Demonstração</u>: É consequência imediata dos Lemas 3.9.4 a 3.9.7.

Estamos agora em condições de provar a parte (2) do Teorema 3.9. Seja X um elemento de $\overline{\omega}$. Pela definição 3.8., deve existir $f \in Q$ tal que $f^{\bullet}O_+ = X$. Consideremos agora a função f_+. Pelo Lema 3.9.8, $f_+ \in Q$. Pelo Lema 3.9.1, $f^{\bullet}_+O_+ = (f^{\bullet}O_+)_+ = X_+$. Logo $X_+ \in \overline{\omega}$.

Sabemos também que $X \subseteq X_+$. Se $X = X_+$, então $X = I \in \mathrm{dom}\, f$, o que contradiz o fato de que $f \in Q$.

Provemos agora parte (3) do Teorema 3.9.

Seja $\mathfrak{M}$ um subconjunto de $\overline{\omega}$ tal que $O_+ \in \mathfrak{M}$ e $\forall X\,[X \in \mathfrak{M} \rightarrow X_+ \in \mathfrak{M}]$. Queremos provar que $\mathfrak{M} = \overline{\omega}$. Faremos uso dos seguintes Lemas:

<u>Lema 3.9.9</u>: $\forall f,g\,[f,g \in Q \rightarrow \mathrm{dom}\, f \subseteq \mathrm{dom}\, g \vee \mathrm{dom}\, g \subseteq \mathrm{dom}\, f]$.

<u>Demonstração</u>: Temos dois casos a considerar:

<u>Caso 1</u>: $g'O_+ \notin \text{dom } f$.

Seja, então, $h = \{<X, f'X> : X \in \text{dom } g\}$. É claro que $O_+ \in \text{dom } h$ e $h \subseteq f$. Logo, pelo $ES_{\neq\emptyset}$ a definição de h se justifica e provemos que se $X \in \text{dom } h$ e $f'X \neq O_+$, então $X_+ \in \text{dom } h$. É claro que $X_+ \in \text{dom } f$ e para finalizar, mostremos que $X_+ \in \text{dom } g$. Em vista de $X \in \text{dom } g$ e $g \in Q$, provaremos que $X_+ \in \text{dom } g$ se provarmos que $g'X \neq O_+$. Com efeito, se $g'X = O_+$, tem-se que $X = g'O_+$ (pois $g = \breve{g}$) e isto contradiz a hipótese feita no Caso 1, já que $X \in \text{dom } f$.

Do que acabamos de provar, concluimos que $h = f$ e pela definição de h, $\text{dom } f \subseteq \text{dom } g$.

<u>Caso 2</u>: $g'O_+ \in \text{dom } f$.

Suponhamos $\text{dom } g \nsubseteq \text{dom } f$, isto é,

$$\exists X \, [X \in \text{dom } g \wedge X \notin \text{dom } f],$$

Um tal X é forçosamente distinto de $g'O_+$ e de O_+. Pelo Lema 3.7.2, existe $Y \in \text{dom } g$ tal que $Y_+ = X$. Pelo Teorema 3.7, a relação de inclusão bem ordena dom f e portanto, tomando um Y minimal teremos

$$Y \in \text{dom } f, \; Y_+ = X \; \text{ e } \; Y_+ \notin \text{dom } f.$$

Mas se $Y \in \text{dom } f$ e $Y_+ \notin \text{dom } f$ tem-se que $f'Y = O_+$ ou ainda $Y = f'O_+$.

Como $g'O_+ \in \text{dom } f$ e $f'O_+$ é elemento maximal, pelo Lema 3.7.5, tem-se que $g'O_+ \subseteq f'O_+$. Podemos escrever:

$$Y \subseteq Y_+ \subseteq g^{\bullet}O_+ \subseteq f^{\bullet}O_+ = Y,$$

isto é, $Y = Y_+ = I$ e portanto $I \in \operatorname{dom} g$, o que é uma contradição. Logo $\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} f$.

QED

<u>Lema 3.9.10</u>: $\forall f, g \in Q \; [\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} f \longleftrightarrow g^{\bullet}O_+ \in \operatorname{dom} f]$.

<u>Demonstração</u>: Basta analisar a prova do Lema 3.9.9.

QED

<u>Lema 3.9.11</u>: O conjunto $\overline{\omega}$ é totalmente ordenado pela relação de inclusão.

<u>Demonstração</u>: Sejam X e Y elementos de $\overline{\omega}$. Então existem aplicações f e g em Q tais que $f^{\bullet}O_+ = X$ e $g^{\bullet}O_+ = Y$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} f$; êste fato é consequência do Lema 3.9.9. Segue, pelo Lema 3.9.10 que $Y \in \operatorname{dom} f$ e como $f^{\bullet}O_+$ é maximal, tem-se $Y \subseteq X$.

QED

<u>Lema 3.9.12</u>: O conjunto $\overline{\omega}$ é bem ordenado pela relação de inclusão.

<u>Demonstração</u>: Seja $\mathfrak{U}$ um subconjunto não vazio de $\overline{\omega}$. Queremos provar que $\mathfrak{U}$ possui elemento minimal. Seja $X \in \mathfrak{U}$. Como $X \in \overline{\omega}$, tem-se que, para uma aplicação $f \in Q$, $f^{\bullet}O_+ = X$. Ora, $\operatorname{dom} f \cap \mathfrak{U} \neq \emptyset$ e dom f é bem ordenado pela relação de inclusão. Seja

X_o o elemento minimal dêste conjunto. Provaremos que X_o é elemento minimal de $\mathfrak{M}$. Com efeito, seja Y um elemento de $\mathfrak{M}$ e $g \in Q$, tal que $g`O_+ = Y$. Pelos Lemas 3.9.9 e 3.9.10, temos dois casos a considerar:

Caso 1: $f`O_+ \in \mathrm{dom}\ g$.

Teremos então

$$X_o \subsetneq f`O_+ \subseteq g`O_+ = Y, \text{ isto é, } X_o \subsetneq Y.$$

Caso 2: $g`O_+ \in \mathrm{dom}\ f$.

Como $g`O_+ = Y \in \mathfrak{M}$ e X_o é elemento minimal do dom f que pertence a $\mathfrak{M}$, tem-se que $X_o \subseteq Y$.

QED

Lema 3.9.13: $\forall f\ [f \in Q \longrightarrow \mathrm{dom}\ f \subseteq \overline{\omega}]$.

Demonstração: Seja f um elemento de Q e consideremos

$$h = \{\langle X, f`X\rangle : X \in \overline{\omega}\}.$$

Como $h \subseteq f$ e $O_+ \in \mathrm{dom}\ h$, a definição de h se justifica. Se $X \in \mathrm{dom}\ h$ e $f`X \neq O_+$, então $X_+ \in \mathrm{dom}\ f$. Queremos provar que $X_+ \in \overline{\omega}$.

Bem, $X \in \mathrm{dom}\ h$ e por conseguinte $X \in \overline{\omega}$. Logo existe $g \in Q$ tal que $g`O_+ = X$. Consideremos a aplicação g_+, que pelo Lema 3.9.8 pertence a Q. Tem-se pela definição de g_+ que

$$g_+`O_+ = (g`O_+)_+ = X_+$$

o que mostra estar X_+ em $\overline{\omega}$. Logo $h = f$ e portanto $\text{dom } f \subseteq \overline{\omega}$.

QED

Provaremos agora a parte (3) do Teorema 3.9. Seja $\mathfrak{A} \subseteq \overline{\omega}$ tal que

$$0_+ \in \mathfrak{A} \wedge \forall X \,[X \in \mathfrak{A} \rightarrow X_+ \in \mathfrak{A}].$$

Se $\mathfrak{A}$ fôsse distinto de $\overline{\omega}$, então existe o menor dos $X \in \overline{\omega} \sim \mathfrak{A}$ já que $\overline{\omega}$ é bem ordenado pela inclusão. Seja $f \in Q$ tal que $f`0_+ = X$. Como $0_+ \in \mathfrak{A}$ e $X \notin \mathfrak{A}$, segue que $X \neq 0_+$; pelo Lema 3.7.2, existe $Y \in \text{dom } f$ tal que $Y_+ = X$. Ora, $Y \subsetneq Y_+ = X$ e $Y \in \text{dom } f$, portanto, pelo Lema 3.9.13, $Y \in \overline{\omega}$ e pela minimalidade de X, $Y \in \mathfrak{A}$. Pela hipótese feita sôbre $\mathfrak{A}$, $Y_+ \in \mathfrak{A}$ e portanto X deverá forçosamente estar em $\mathfrak{A}$.

QED

<u>Lema 3.10:</u>

$$\forall a \,\exists A \,\big[\{a\} \in A \wedge \forall y\,[y \in A \rightarrow \bigcup y \in A] \wedge$$
$$\forall B\,\big[\{a\} \in B \wedge \forall x\,[x \in B \rightarrow \bigcup x \in B] \rightarrow A \subseteq B\big]\big].$$

<u>Demonstração:</u> Introduziremos a seguinte definição:

<u>Definição 3.11</u>: Seja $X \in \overline{\omega}$. O conjunto denotado por $\overline{\omega}_X$ se define como:

$$\overline{\omega}_X = \{Y : Y \in \overline{\omega} \wedge Y \subseteq X\}.$$

Como $\overline{\omega}_X \subseteq \overline{\omega}$ e $X \in \overline{\omega}_X$, a definição acima se justifica. Provaremos agora o seguinte Lema:

<u>Lema 3.10.1</u>: $\forall X \left[X \in \overline{\omega} \longrightarrow \overline{\omega}_{X_+} = \overline{\omega}_X \cup \{X_+\} \right]$.

<u>Demonstração</u>: A inclusão

$$\overline{\omega}_X \cup \{X_+\} \subseteq \overline{\omega}_{X_+}$$

é imediata. Demonstremos a inclusão oposta; seja $Y \in \overline{\omega}$ tal que $Y \in X_+$. Se $Y \notin \overline{\omega}_X$, como $\overline{\omega}$ é totalmente ordenado pela relação de inclusão, tem-se $X \subsetneq Y$. Por outro lado, se $Y \neq X_+$, tem-se

$$X \subsetneq Y \subsetneq X_+ .$$

Sejam f e g elementos de Q tais que $f^{\cdot}0_+ = Y$ e $g^{\cdot}0_+ = X_+$. Pelo Lema 3.9.9, dom $f \subseteq$ dom $g \vee$ dom $g \subseteq$ dom f. Como $f^{\cdot}0_+ \notin$ dom g, segue pelo Lema 3.9.10 que dom $f \subseteq$ dom g. Temos pois $X, X_+, Y \in$ dom f e $X \subsetneq Y \subsetneq X_+$ o que contraria o Lema 3.5.3.

QED

Consideremos a fórmula $F(X,y;\ a,\overline{\omega})$ dada por:

$$F(X,y;\ a,\overline{\omega}) \equiv X \in \overline{\omega} \wedge \exists f \left[f \in {}^{\mathrm{dom}\, f} V \wedge \mathrm{dom}\, f = \overline{\omega}_X \right.$$
$$\wedge\ f^{\cdot}0_+ = \{a\} \wedge \forall Y \left[Y_+ \in \mathrm{dom}\, f \longrightarrow \right.$$
$$\left. f^{\cdot}Y_+ = \bigcup f^{\cdot}Y \right] \wedge\ y = f^{\cdot}X.$$

Demonstremos que

$$\forall X \left[X \in \overline{\omega} \longrightarrow \exists! y\ F(X,y;\ a,\overline{\omega}) \right].$$

Seja $\mathfrak{A} = \{X : X \in \overline{\omega} \wedge \exists! y\ F(X,y)\}$. Como $\mathfrak{A} \subseteq \overline{\omega}$ e $0_+ \in \mathfrak{A}$, a definição de $\mathfrak{A}$ se justifica.

Suponhamos que $X \in \mathfrak{A}$. Logo existe f satisfazendo às condições explicitadas na fórmula $F(X,y)$. É fácil então ver que a função g definida por

$$g = f \cup \{ X_+ , \bigcup f`X \}$$

tem por domínio $\overline{\omega}_{X_+}$ (pelo Lema 3.10.1) e satisfaz às condições da fórmula $F(X,y)$ enunciadas para a função f. Portanto se temos $F(X,y)$, teremos $F(X_+, \bigcup y)$.

Para se verificar a unicidade do F - correspondente do elemento X_+, observemos que se g_1 é uma função satisfazendo às exigências de $F(X,y)$, tem-se

$$g_1`X = f`X = y$$

(pois $X \in \mathfrak{A}$ e portanto $g_1 \upharpoonright \overline{\omega}_X = f$).

Logo

$$g_1`X_+ = \bigcup g_1`X = \bigcup f`X = \bigcup y = g`X_+$$

e portanto a unicidade está verificada.

Pelo Teorema 3.9 parte (3), $\mathfrak{A} = \overline{\omega}$ e portanto

$$\forall X \in \overline{\omega} \; \exists ! y \;\; F(X,y).$$

Coloquemos

$$A = \{ y : \exists X [X \in \overline{\omega} \wedge F(X,y)] \}.$$

A existe pelo Esquema de Substituição e òbviamente satisfaz as condições requeridas.

Para finalizar, seja B um conjunto satisfazendo às condições:

$$\{a\} \in B \wedge \forall y [y \in B \rightarrow \bigcup y \in B].$$

Seja

$$\mathcal{b} = \{ X : X \in \overline{\omega} \wedge \exists y [y \in B \wedge F(X,y)] \}.$$

Como $\hbar \subseteq \bar{\omega}$ e $0_+ \in \hbar$, a definição de $\hbar$ se justifica. No caso de X pertencer a $\hbar$ e y satisfazer a fórmula $F(X,y)$, tem-se que $y \in B$. Logo $\bigcup y \in B$ e como $F(X_+, \bigcup y)$, concluimos que $X_+ \in \hbar$. Portanto $\hbar = \bar{\omega}$ e desde que $A = \{ y: \exists X [X \in \bar{\omega} \wedge F(X,y)]\}$, teremos $A \subseteq B$.

QED

<u>Definição 3.12</u>: Seja $\underline{a}$ um conjunto. O fêcho transitivo de $\underline{a}$ (denotado por Ta) é conjunto que satisfaz às seguintes condições:

(1) $a \in Ta$

(2) $\forall x [x \in Ta \rightarrow x \subseteq Ta]$

(3) $\forall B [B \subseteq Ta \wedge a \in B \wedge \forall x [x \in B \rightarrow x \subseteq B] \rightarrow B = Ta]$.

Intuitivamente falando, Ta poderia ser representado pela seguinte expressão infinita:

$$Ta = \{a\} \cup a \cup \bigcup a \cup \bigcup\bigcup a \cup \ldots$$

o que significa que o fêcho transitivo de um conjunto contém êste conjunto como membro, contém os membros do conjunto, os membros dos membros do conjunto e assim por diante; ainda mais, a cláusula (3) da definição nos diz ser Ta o menor dos conjuntos com estas propriedades.

<u>Teorema 3.13</u>: O fêcho transitivo de um conjunto existe e é único.

<u>Demonstração</u>: Seja $\underline{a}$ um conjunto. Seja A

o único conjunto associado a a pelo Teorema 3.11. Coloquemos

$$Ta = \bigcup A.$$

Como $\{a\} \in A$, $a \in Ta$. Se $x \in Ta$, existe $y \in A$ tal que $x \in y$. Logo, $x \subseteq \bigcup y$. Como $\bigcup y \in A$, $\bigcup y \subseteq \bigcup A = Ta$. Portanto, $x \subseteq \bigcup y \subseteq Ta$ o que prova que $x \subseteq Ta$.

Seja $B \subseteq Ta$ um conjunto tal que $a \in B$ e $\forall x\,[x \in B \rightarrow x \subseteq B]$. Consideremos o conjunto $\wp B$. Tem-se $\{a\} \in \wp B$ (pois $a \in B$) e se $x \in \wp B$, $x \subseteq B$ e portanto $\bigcup x \subseteq \bigcup \wp B = B$ o que implica $\bigcup x \in \wp B$. Logo $\wp B$ satisfaz às condições:

$$\{a\} \in \wp B.$$

$$\forall x\,[x \in \wp B \rightarrow \bigcup x \in \wp B].$$

Pelo Teorema anterior, $Ta = \bigcup A \subseteq \bigcup \wp B = B$, ou seja, $Ta \subseteq B$.

Logo $Ta = B$.

A unicidade de Ta é consequência imediata da cláusula (3) da definição de fêcho transitivo, a qual diz ser Ta o menor conjunto tal que (1) e (2).

QED

Teorema 3.14: $0 \in V$.

Demonstração: Seja x um conjunto, Tx seu fêcho transitivo. Como $x \in Tx$, $Tx \neq \emptyset$. Pelo Axioma de Regularidade,

$$\exists y\,(y \in Tx \wedge y \cap Tx = \emptyset).$$

Mas se $y \in Tx$, teremos $y \subseteq Tx$, portanto $y \cap Tx = y$, logo $y = \emptyset$. Portanto

$$\exists\, y\ (y \in V \wedge y = \emptyset)$$

o que significa que

$$0 \in V.$$

QED.

Faremos algumas observações finais:

(1) Se analisarmos a demonstração, verificaremos que fundamentalmente foram feitos dois passos; demonstrou-se que:

(a) O fêcho transitivo de um conjunto existe.
(b) $\forall x\ [0 \in Tx]$.

O autor demonstrou ainda que a proposição (b) não é derivável dos Axiomas de ZF sem Regularidade e por sua vez ZF + (b) não implica o Axioma de Regularidade.

(2) Na construção do fêcho transitivo não se usou o Axioma da Escolha.

(3) Existem modêlos de ZF - Reg que não possuem conjuntos infinitos. Assim, o Axioma de Infinidade aqui introduzido sòmente implica a existência de conjuntos infinitos em presença do Axioma de Regularidade. O autor conjectura ser êste Axioma o mais curto dos Axiomas de Infinidade que podem ser formulados na linguagem aqui empregada.

§ 4. O sistema ZF' coincide com ZF+AE

O objetivo dêste parágrafo é estudar mais a fundo a estrutura da classe universal em presença do Axioma de Regularidade. Será provado que a classe V é a união dos conjuntos R_α, onde α é um ordinal. Outra forma de expressar êste fato é dizer que o universo de conjuntos coincide com a classe dos conjuntos regulares.

Esta formulação, equivalente ao Axioma de Regularidade, fornece informações preciosas sôbre V, além de mostrar com clareza cristalina que o Axioma deve ser considerado como um princípio verdadeiro na Teoria dos Conjuntos. Logo após, a título de aplicação, demonstraremos que o sistema axiomático ZF' introduzido por Edison Farah, é equivalente ao sistema de Zermelo-Fraenkel enriquecido pelo Axioma da Escolha.

O sistema ZF' é um sistema axiomático bastante elegante, já que nele aparecem sintetizados em um único esquema, os axiomas de Reunião, Escolha e o Esquema de Substituição. Edison Farah demonstrou que ZF' é pelo menos tão forte quanto o sistema de Zermelo-Fraenkel mais o Axioma da Escolha. Conjecturou-se, ainda, ser ZF' estritamente mais forte que ZF + AE, uma vez que um princípio de escolha para agregados de classes transparecia claramente como consequência dos Axiomas. Êste princípio não parecia ser consequência do Axioma da Escolha.

Bem, o presente autor demonstrou ser falsa a conjectura e que, de fato, ZF' e ZF+AE são equivalentes, mas para isto é necessário lançar mão da estrutura mais rica e manejável do universo de conjuntos regulares. A questão de saber se o Axioma de Regularidade é essencial para estabelecer a equivalência permanece em aberto.

Uma <u>ordem total</u> é um conjunto A satisfazendo as seguintes condições:

(1) $A \subseteq V \times V$ (e quando $\langle x,y \rangle \in A$, usaremos a notação $x A y$).

(2) $\forall x,y \ (xAy \rightarrow \neg \ yAx)$.

(3) $\forall x,y,z \ (xAyAz \rightarrow xAz)$.

(4) $\forall x,y,u,v \ ((xAu \vee uAx) \wedge (yAv \vee vAy) \rightarrow (xAy \vee x = y \vee yAx))$.

Se A fôr uma ordem total, designaremos por $\operatorname{dom} A$ e $\operatorname{dom} \breve{A}$ os seguintes conjuntos:

$$\operatorname{dom} A = \{x : \exists y \ \ xAy\}, \quad \operatorname{dom} \breve{A} = \{y : \exists x \ \ xAy\}.$$

Diremos ainda que A é uma ordem total sôbre z se $\operatorname{dom} A \cup \operatorname{dom} \breve{A} = z$, no caso de possuir z mais de um elemento, ou, se $A = 0$ em caso contrário.

Sendo z um conjunto, a classe das ordens totais sôbre z ainda forma um conjunto que será denotado por OT(z).

Com o auxílio do Axioma dos Ultrafiltros(i.e., todo filtro sôbre um conjunto pode ser estendido a um ultrafiltro), demonstra-se que

$$\forall z\ (OT(z) \neq 0).$$

Como estamos no contexto de uma teoria de conjuntos sem escolha, não é válido assumir a proposição acima como teorema. Posto isto, chamaremos de OT a classe

$$OT = \{z : OT(z) \neq 0\}.$$

Dentre as ordens totais, merecem especial atenção as assim chamadas <u>boas ordens</u>. O conjunto W será uma <u>boa ordem sôbre z</u> se

(1) $W \in OT(z)$,

(2) $\forall X\, [0 \neq X \subseteq z \rightarrow \exists x (x \in X \wedge \forall y (x \neq y \in X \rightarrow xWy))]$.

A cláusula (2) nos diz que todo subconjunto não vazio de um conjunto bem ordenado admite elemento minimal (na boa ordem em questão). As notações introduzidas no caso de ordens totais sugerem as seguintes notações para as boas ordens:

$$BO(z) = \{W : W \text{ é boa ordem sôbre } z\}$$

$$BO = \{z : BO(z) \neq 0\}.$$

A proposição $BO = V$ é òbviamente equivalente ao Axioma da Escolha (Zermelo).

Ordinais são conjuntos transitivos e bem ordenados pela relação de pertinência. Mais precisamente, um conjunto x é um <u>ordinal</u> se,

(1) $Tx = x \cup \{x\}$

(2) $\in \cap (x \times x) \in BO(x)$ onde $\in$ é a classe dos pares $\langle u,v \rangle$ tais que $u \in v$.

Os ordinais formam uma classe (própria) que denotaremos por OR. Esta classe encontra-se bem ordenada pela relação $\in$ ou $\subsetneq$ que, no caso, coincidem.

Como consequência dêste fato, dada uma classe não vazia X de ordinais, existe um único elemento $\in$-minimal pertencente a X. Como X é bem ordenado pela relação $\subsetneq$, o elemento minimal de X será $\bigcap X$. Assim,

$$\bigcap X = \imath_z \; (z \in X \wedge \forall x(z \neq x \in X \rightarrow z \in x)).$$

Em oposição ao elemento minimal de uma classe X de ordinais, podemos considerar o supremo de um conjunto x de ordinais; é o menor ordinal que supera ou iguala a cada um dos ordinais de x. Dada a natureza especial da relação de ordem, demonstra-se que o supremo de x (o qual sempre existe se $x \in V$) é o conjunto $\bigcup x$.

Ordinais podem ser sucessores ou limites. Um ordinal α é sucessor de outro ordinal β se

$$\alpha = \beta \cup \{\beta\} = \beta + 1.$$

Um ordinal λ é limite se não fôr sucessor. Podemos caracterizar se um ordinal é sucessor ou não pelas propriedades do supremo de seus membros; assim,

$$\alpha \text{ é sucessor} \leftrightarrow \bigcup\alpha \in \alpha,$$

$$\lambda \text{ é limite} \leftrightarrow \bigcup\lambda \notin \lambda,$$

$$\lambda \text{ é limite} \leftrightarrow \bigcup\lambda = \lambda.$$

Para finalizar esta pequena recordação de números ordinais, enunciaremos o Esquema de Definição por Recorrência Transfinita e os Princípios de Indução Transfinita. No que segue, $F(x,y;\, c_1 \ldots c_n)$ e $G(x;\, c_1 \ldots c_n)$ serão fórmulas tais que x e y ocorrem livres em F e x ocorre livre em G; $c_1 \ldots c_n$ são eventuais parâmetros. Tem-se, então, que os seguintes esquemas são consequência de ZF:

<u>Esquema de Definição por Recorrência Transfinita</u>:

$$\forall c_1 \ldots c_n [\forall x \; \exists! y \; F(x,y;c_1 \ldots c_n) \rightarrow \forall \alpha \; \exists! f \; (f \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi \; (\xi \in \alpha \rightarrow F(f \restriction \xi \;,\; f`\xi \;;\; c_1 \ldots c_n)))].$$

<u>Princípio de Indução Transfinita</u> (fraco):

$$\forall c_1 \ldots c_n \; (G(0;c_1 \ldots c_n) \wedge \forall \alpha \; (G(\alpha\,;c_1 \ldots c_n) \rightarrow G(\alpha+1;c_1 \ldots c_n)) \wedge \forall \lambda \; (\lambda = \bigcup\lambda \wedge \forall \xi \, (\xi \in \lambda \wedge G(\xi\,;c_1 \ldots c_n)) \rightarrow G(\lambda;\, c_1 \ldots c_n)) \rightarrow \forall \alpha (G(\alpha;\, c_1 \ldots c_n))).$$

Princípio de Indução Transfinita (forte)

$$\forall c_1 \ldots c_n \, (\forall \alpha \, (\forall \xi \, (\xi \in \alpha \rightarrow G(\xi ; c_1 \ldots c_n)) \rightarrow G(\alpha ; c_1 \ldots c_n)) \rightarrow \forall \alpha \, (G(\alpha ; c_1 \ldots c_n))).$$

Nós não daremos aqui as demonstrações dêstes teoremas, as quais decorrem das definições de ordinais.

No que segue, iremos introduzir os conjuntos R_α que irão desempenhar um papel central em tôdas as considerações subsequentes. Para definirmos rigorosamente êstes conjuntos, lançaremos mão de uma especialização do Esquema de Definição por Recorrência Transfinita. Mas antes disso, adiantemos que os referidos conjuntos satisfazem às condições:

$$R_o = \{o\}, \quad R_{\alpha+1} = R_\alpha \cup \mathcal{P} R_\alpha ,$$

$$R_\lambda = \bigcup_{\xi\in\lambda} R_\xi \cup \mathcal{P} \bigcup_{\xi\in\lambda} R_\xi \quad \text{se} \quad \lambda \notin \bigcup \lambda$$

As três equações acima podem ser sintetizadas na seguinte fórmula:

$$R_\alpha = \bigcup_{\xi\in\alpha} R_\xi \cup \mathcal{P} \bigcup_{\xi\in\alpha} R_\xi$$

Admitindo-se que os conjuntos R_α satisfaçam a esta última equação, provemos as seguintes propriedades:

Lema 4.1: $\forall\alpha,\beta\,[\,\alpha\in\beta \to R_\alpha \subsetneqq R_\beta\,]$.

Demonstração: (Por indução transfinita forte). Seja $G(\beta)$ a fórmula

$$\forall\alpha\,[\alpha\in\beta \to R_\alpha \subsetneqq R_\beta\,]$$

Admitamos que

$$\forall\xi\,[\,\xi\in\beta \to \forall\alpha\,(\alpha\in\xi \to R_\alpha \subsetneqq R_\xi\,)\,]$$

Queremos demonstrar $G(\beta)$. Seja α um ordinal qualquer menor que β. Então

$$R_\alpha \subseteq \bigcup_{\xi\in\beta} R_\xi \subseteq \bigcup_{\xi\in\beta} R_\xi \cup \wp\bigcup_{\xi\in\beta} R_\xi = R_\beta$$

ou seja, $R_\alpha \subseteq R_\beta$. Se $R_\alpha = R_\beta$, teríamos

$$\wp R_\alpha \subseteq \wp\bigcup_{\xi\in\beta} R_\xi \subseteq \bigcup_{\xi\in\beta} R_\xi \cup \wp\bigcup_{\xi\in\beta} R_\xi = R_\beta = R_\alpha$$

i.e., $\wp R_\alpha \subseteq R_\alpha$. Chegaremos a uma contradição se mostrarmos que

$$\forall x\,(\wp x \nsubseteq x)$$

Se $\wp x \subseteq x$, $\wp x \in \wp x$ e portanto $\{\wp x\}$ é um conjunto que viola o Axioma de Regularidade.

Teorema 4.2: $\forall x\,\exists\alpha\,(x\in R_\alpha)$.

Demonstração: Façamos algumas observações preliminares. Uma propriedade definida por uma fórmula $F(x)$ (com ou sem parâmetros) é dita hereditária para o conjunto x se tivermos

$$F(x) \rightarrow \exists y\,(y \in x \wedge F(y)).$$

A propriedade será dita <u>universalmente hereditária</u> se fôr hereditária para todos os conjuntos. O que nos propomos a demonstrar, como consequência do Axioma de Regularidade, é que as únicas propriedades universalmente hereditárias são as triviais, ou seja, aquelas que não se verificam para nenhum conjunto:

$$\forall x\,(F(x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge F(y))) \rightarrow \forall z \neg F(z).$$

De fato, suponhamos que F é universalmente hereditária e exista $z \in V$ tal que $F(z)$. Seja

$$A = \{x : x \in Tz \wedge F(x)\}.$$

Então $A \neq 0$, visto que $z \in Tz$. Por outro lado, pelo Axioma de Regularidade, existe $x \in A$ tal que $x \cap A = 0$. Como $x \in Tz$, $x \subseteq Tz$ e como F é hereditária para x, do fato de se ter $F(x)$ segue que

$$\exists y\,(y \in x \wedge F(y)).$$

Mas $y \in Tx$ e portanto $y \in A$ donde se conclui que $y \in x \cap A$ e isto quer dizer que $x \cap A \neq 0$, o que é uma contradição. Logo, $\forall z \neg F(z)$.

Em vista do que foi dito, para provarmos 4.2, basta mostrar que a propriedade

$$\forall \alpha (x \notin R_\alpha)$$

é universalmente hereditária.

Suponhamos que não. Então, seja x um conjunto que verifica a propriedade e

$$\forall y\,(y \in x \rightarrow \exists \beta (y \in R_\beta)).$$

Consideremos a função f que é dada por

$$f = \{<y,\gamma> : \gamma = \bigcap \{\beta ;\ y \in R_\beta\} \wedge y \in x\}$$

Então, $\operatorname{dom} f = x$ e $f^{*}x \subseteq OR$. Seja $\alpha = \bigcup f^{*}x$. Em vista de 4.1, $x \subseteq \bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi$. Portanto

$$x \in \mathcal{P} \bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi \subseteq \bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi \cup \mathcal{P} \bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi = R_{\alpha+1}$$

Mas isto contradiz $\forall \alpha (x \notin R_\alpha)$.

QED

Vamos, então, definir os conjuntos R_α e o faremos aplicando o Esquema de definição por recorrência transfinita.

Seja $F(x,y)$ a seguinte fórmula:

$$F(x,y) = (x \in {}^{\operatorname{dom} x}V \wedge y = \bigcup \operatorname{dom} \breve{x} \cup \mathcal{P} \bigcup \operatorname{dom} \breve{x}) \vee$$

$$(x \notin {}^{\operatorname{dom} x}V \wedge y = x).$$

É claro que a seguinte sentença é um teorema:

$$\forall x\, \exists !\, F(x,y).$$

Segue imediatamente do Esquema de definição por recorrência transfinita que

$$\forall \alpha\, \exists ! f\, (f \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi\, (\xi \in \alpha \rightarrow F(f \upharpoonright \xi, f`\xi))).$$

Introduzamos a notação ρ_α para designar a única função f satisfazendo à fórmula acima, i.e.

$$\rho_\alpha \underset{def}{=} \iota_f \, (f \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi \, (\xi \in \alpha \rightarrow F(f \upharpoonright \xi, \, f`\xi))).$$

Mostremos que as funções ρ_α são mùtuamente compatíveis, i.e.

$$\forall \alpha, \beta \, (\alpha \subseteq \beta \rightarrow \rho_\alpha \subseteq \rho_\beta).$$

Com efeito, se α e β são ordinais tais que $\alpha \in \beta$, teremos que $\operatorname{dom} \rho_\alpha \subseteq \operatorname{dom} \rho_\beta$ desde que

$$\operatorname{dom} \rho_\alpha = \alpha \subseteq \beta = \operatorname{dom} \rho_\beta \, .$$

Seja $f = \rho_\beta \upharpoonright \alpha$ e $\xi \in \alpha$. Como $\xi \in \operatorname{dom} f$ e ρ_β satisfaz à condição $F(\rho_\beta \upharpoonright \xi, \rho_\beta` \xi)$, segue que $F(f \upharpoonright \xi, \, f`\xi)$ onde ξ é um ordinal arbitrário de α. Pela unicidade de ρ_α, tem-se $f = \rho_\alpha$. Que $\rho_\alpha \subseteq \rho_\beta$ segue claramente, então, das fórmulas

$$\rho_\alpha = f = \rho_\beta \upharpoonright \alpha \subseteq \rho_\beta \, .$$

Como as funções ρ_α são duas a duas comparáveis por inclusão, eliminaremos seus índices e passaremos a utilizar a notação ρ, com a convenção de que ao escrevermos $\rho`\xi$ temos em mente o têrmo

$$\rho`\xi = \iota_z \, (\exists \beta \, (\xi \in \beta \wedge z = \rho_\beta` \xi)).$$

Colocaremos então, por definição, o conjunto

$$R_\alpha \underset{def}{=} \rho`\alpha \, .$$

ou ainda

$$R_\alpha = \iota_z\, (\exists \beta\, (\alpha \in \beta \wedge z = \rho_\beta{}^{\cdot}\, \alpha)).$$

ou finalmente

$$R_\alpha = \iota_z\, (\exists \beta\ \exists f\, (f \in {}^{\beta}V \wedge \forall \xi\, (\xi \in \beta \rightarrow F\, (f \upharpoonright \xi,\ f^{\cdot}\, \xi)) \wedge \alpha \in \beta \wedge z = f^{\cdot}\, \alpha).$$

Falta agora demonstrar a seguinte fórmula:

$$R_\alpha = \bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi \ \cup\ \wp \bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi$$

a partir da definição dos R_α.

Seja α um ordinal. Da definição da função ρ, temos que

$$F(\rho \upharpoonright \alpha, \rho^{\cdot}\, \alpha).$$

Da definição de F, segue que

$$\rho^{\cdot}\alpha = \bigcup \operatorname{dom} \breve{\rho} \upharpoonright \alpha \ \cup\ \wp \bigcup \operatorname{dom} \breve{\rho} \upharpoonright \alpha$$

Como $\bigcup \operatorname{dom} \breve{\rho} \upharpoonright \alpha = \bigcup_{\xi \in \alpha} \rho^{\cdot}\, \xi$, tem-se então que

$$\rho^{\cdot}\alpha = \bigcup_{\xi \in \alpha} \rho^{\cdot}\, \xi \ \cup\ \wp \bigcup_{\xi \in \alpha} \rho^{\cdot}\, \xi .$$

Por outro lado, $\rho^{\cdot}\alpha = R_\alpha$ e $\rho^{\cdot}\xi = R_\xi$ e portanto a fórmula procurada se impõe.

Observemos que $R_0 = \{0\}$ pois

$$R_0 = \bigcup_{\xi \in 0} R_\xi \ \cup\ \wp \bigcup_{\xi \in 0} R_\xi = 0 \cup \wp\, 0 = \{0\}.$$

Temos ainda que

$$R_{\alpha+1} = \bigcup_{\xi\in\alpha+1} R_\xi \cup \wp \bigcup_{\xi\in\alpha+1} R_\xi = R_\alpha \cup \wp R_\alpha$$

já que $\bigcup_{\xi\in\alpha+1} R_\xi = R_\alpha$ (os R_α são crescentes).

Finalmente, quando λ é um ordinal limite, a fórmula geral dos R_α nos fornece a igualdade:

$$R_\lambda = \bigcup_{\xi\in\lambda} R_\xi \cup \wp \bigcup_{\xi\in\lambda} R_\xi .$$

Observemos que os conjuntos R_α poderiam ser definidos da seguinte maneira:

$$R_o = \{0\} \quad e \quad R_\alpha = \wp \bigcup_{\xi\in\alpha} R_\xi$$

Preferimos a forma do texto pelo fato da mesma tornar mais explícito o fato de que os R_α formam uma cadeia crescente de conjuntos.

Para terminar esta introdução, definamos a classe R dos conjuntos regulares como sendo a classe constituída pelos conjuntos x tais que

$$\exists\alpha\,(x \in R_\alpha).$$

Teorema 4.2 nos diz então que $V = R$ e esta proposição é por sua vez equivalente ao Axioma de Regularidade.

Passemos a descrever o sistema ZF' para depois demonstrarmos sua equivalência com ZF + AE.

O sistema ZF' possui os mesmos símbolos lógicos, variáveis e constantes predicativas que ZF. Seus Axiomas são os de Extensionalidade Infinidade,Existência do conjunto das partes, Regularidade e um Esquema que, entre outras coisas, desempenhará o papel do Esquema de Substituição. É possível derivar ràpidamente os Axiomas de Reunião e da Escolha a partir dêstes Axiomas.

Para podermos enunciar o Esquema de ZF', necessitamos de algumas definições:

Definição 4.3: Seja $F(x,y;\, c_1 \ldots c_n)$ uma fórmula em que x e y possuem ocorrências livres. Diremos que F é x-unívoca se,

$$\forall x,x',y \left[F(x,y;c_1\ldots c_n) \wedge F(x',y;c_1\ldots c_n) \rightarrow x=x'\right]$$

Observação: Sempre que, na formulação de uma sentença, usarmos a expressão F é x-unívoca , haveremos de ter em mente que a referida expressão serve como abreviação da seguinte fórmula:

$$\forall x,x',y \left[F(x,y) \wedge F(x',y) \longrightarrow x = x'\right].$$

Definição 4.4: Sendo $F(x,y;c_1\ldots c_n)$ uma fórmula em que as variáveis x e y possuem ocorrências livres e m um conjunto qualquer, diremos que o conjunto m' é um F-correspondente de m se forem verificadas as condições:

(1) $\forall y\ (y \in m' \rightarrow \exists u,x\ (x \in u \in m \wedge F(x,y;c_1\ldots c_n))$.

(2) $\forall x,u,y\ (x \in u \in m \wedge F(x,y;c_1\ldots c_n \rightarrow$

$\exists! y(F(x,y;c_1\ldots c_n) \wedge y \in m'))$.

Com estas definições, estamos habilitados a descrever o esquema que completa a Axiomática de ZF':

Sendo $F(x,y;c_1 \ldots c_n)$ uma fórmula contendo ocorrências livres de x e y, a seguinte sentença é um Axioma:

$$\forall c_1 \ldots c_n \ (F \text{ é x-unívoca} \rightarrow \forall m \exists m' \ (m' \text{ é F-correspondente de } m)).$$

Bem, provemos que o referido esquema é um teorema de ZF+AE. Para tanto, admitamos que F(x,y) (com ou sem parâmetros) seja uma fórmula x-unívoca e seja m um conjunto qualquer. Precisamos demonstrar a existência de um F-correspondente de m.

Consideremos dois casos:

<u>Caso 1</u>: $\{x : x \in \bigcup m \wedge \exists y F(x,y)\} = 0.$

Neste caso, o único F-correspondente de m é o próprio vazio, como é fácil de ver pelas definições.

<u>Caso 2</u>: $\{x : x \in \bigcup m \wedge \exists y \ F(x,y)\} \neq 0.$

Sendo $x \in \bigcup m$ e y um conjunto tal que F(x,y), tem-se que

$$\{\xi : y \in R_\xi\} \neq 0,$$

pois $V = R$. Para cada $x \in \bigcup m$ tal que $\exists y \ F(x,y)$ podemos considerar o menor α tal que

$$\exists y \ (F(x,y) \wedge y \in R_\alpha)$$

e portanto definiremos a função

$$f = \{<x, \alpha> : \alpha = \bigcap \{\xi : \exists y (F(x,y) \wedge y \in R_\xi)\}\},$$

É claro então que $\mathrm{dom}\, f \subseteq \bigcup m$ e podemos considerar

$$\beta = \bigcup \mathrm{dom}\, \breve{f}.$$

β é o menor dos ordinais que supera ou iguala a cada um dos ordinais do contradomínio de f. Como os conjuntos R_α são crescentes (Lema 4.1), temos

$$\forall x\,(x \in \bigcup m \wedge \exists y\, F(x,y) \rightarrow \exists y(F(x,y) \wedge y \in R_\beta)).$$

Usando o Axioma da Escolha, é possível achar uma função g tal que

$$g \in {}^{\gamma} R_\beta \wedge \breve{g} \in {}^{R_\beta}\gamma,$$

onde γ é um ordinal. Seja

$$m' = \{g^{\cdot}\xi : \exists x\ (x \in \bigcup m \wedge F(x,g^{\cdot}\xi) \wedge \forall \eta\,(F(x,g^{\cdot}\eta) \rightarrow \xi \subseteq \eta))\}.$$

A existência do conjunto m' está claramente assegurada pelo Axioma de Substituição. Provemos que m' é um F-correspondente de m, ou seja, verifiquemos que

(1) $\forall y\ (y \in m' \rightarrow \exists u,x\ (x \in u \in m \wedge F(x,y))$.

De fato, se $y \in m'$, existem x e ξ tais que

$$x \in \bigcup m,\quad y = g^{\cdot}\xi \quad \text{e} \quad F(x,g^{\cdot}\xi).$$

Se $x \in \bigcup m$, $\exists u\ (x \in u \in m)$. Se $y = g^{\cdot}\xi$ e $F(x,g^{\cdot}\xi)$ então $F(x,y)$. Logo,

$$\exists u(x \in u \in m \wedge F(x,y)),$$

o que verifica (1).

(2) $\forall x,u,y\ (x \in u \in m \wedge F(x,y) \to \exists! y\ (y \in m' \wedge F(x,y)))$.

Sejam x, u e y conjuntos tais que

$$x \in u \in m \quad \text{e} \quad F(x,y).$$

Então, $x \in \bigcup m$ e como $\exists y\ F(x,y)$, $\exists y (F(x,y) \wedge y \in R_\beta)$. Logo

$$\{ \eta : \eta \in \gamma \wedge F(x, g^{\cdot}\eta) \} \neq 0,$$

já que g é uma bijeção de γ sobre R_β. Seja

$$\xi = \bigcap \{ \eta : \eta \in \gamma \wedge F(x, g^{\cdot}\eta) \}$$

Segue daí que

$$F(x, g^{\cdot}\xi) \wedge \forall \eta\ (F(x, g^{\cdot}\eta) \to \xi \subseteq \eta)$$

ou seja, $g^{\cdot}\xi \in m'$. Logo, provamos que

$$\exists y\ (F(x,y) \wedge y \in m').$$

Se y' fosse um elemento de m' tal que $F(x,y')$, então $y' = g^{\cdot}\xi'$, onde $\xi' \in \gamma$. Como nós temos $F(x, g^{\cdot}\xi)$, deduz-se que $\xi' \subseteq \xi$. Por simetria, $\xi' \subseteq \xi$ e portanto $\xi = \xi'$. Como g é uma função, $g^{\cdot}\xi = g^{\cdot}\xi'$, i.e., $y = y'$ o que prova que

$$\exists! y\ (F(x,y) \wedge y \in m').$$

Logo, como (1) e (2) estão verificadas, m' é um F-correspondente de m.

QED

<u>Observação</u>: Como o Axioma da Escolha é um teorema de ZF', seria inútil tentar demonstrar a equi-

valência de ZF com ZF'. O melhor resultado possível é pois a equivalência de ZF' com ZF + AE, que é o que foi demonstrado.

§ 5. Duas proposições equivalentes ao Axioma da Escolha

Neste parágrafo, daremos duas proposições que equivalem ao Axioma da Escolha no sistema de Zermelo-Fraenkel. A primeira delas, formulada por Lévy em [8], diz que, dada uma família de conjuntos não vazios, é possível encontrar uma função que escolhe de cada conjunto um subconjunto finito não vazio (não se tendo um limite superior finito para as cardinalidades dos conjuntos escolhidos).

Vamos dar uma formulação mais precisa desta proposição, a qual se denotará por AF. Antes, porém, uma definição:

Definição 5.1: Um conjunto x é finito se

$$\exists f \exists n \, (n \in \omega \wedge f \in {}^{n}x \wedge \breve{f} \in {}^{x}n).$$

Então, colocaremos

$$AF \equiv \forall A \, (\forall x (x \in A \rightarrow x \neq 0) \rightarrow$$
$$\exists g \, (g \in {}^{A}V \wedge \forall x \, (0 \neq g`x \subseteq x \wedge g`x \text{ é finito}))).$$

O que talvez seja interessante nesta equivalência é que Levy demonstrou ser êsse Axioma estritamente mais fraco que o Axioma da Escolha numa teoria de conjuntos com indivíduos. Lançando mão dos métodos de Fraenkel-Mostowski, Lévy construiu um modêlo onde é válida a negação do AE mas que verifica AF. Isto mostra serem os Axiomas de Regularidade e Extensionalidade essenciais para a demonstração, a qual não pode, portanto, ser feita de maneira ingênua.

Antes de enunciarmos a segunda proposição vamos resumir alguns resultados conhecidos. Relembremos que OT é a classe dos conjuntos totalmente ordenáveis e BO a classe dos conjuntos bem ordenáveis.

É claro que

$$BO \subseteq OT.$$

Nesta linguagem, o célebre teorema de Zermelo fica

$$AE \longleftrightarrow BO = V.$$

Como a proposição $OT = V$ é consequência do Axioma dos Ultrafiltros, e êste por sua vez não implica o Axioma da Escolha (Halpern), tem-se que se ZF é consistente, $ZF + OT = V + BO \neq V$ é também consistente. Portanto, se ZF é consistente, também teremos a consistência de

$$ZF + BO \subsetneq OT.$$

Poderíamos perguntar o que acontece se impusermos a ZF a condição

$$OT = BO.$$

A resposta é

$$ZF + OT = BO \vdash BO = V,$$

e portanto, verifica-se

$$ZF \vdash AE \leftrightarrow OT = BO.$$

A proposição a qual queremos demonstrar equivalente ao Axioma da Escolha pode ser escrita como

$$\forall x\ (OT(x) \neq 0 \leftrightarrow BO(x) \neq 0),$$

ou

$$\forall x\ (OT(x) \neq 0 \rightarrow BO(x) \neq 0).$$

Passemos a demonstrar a equivalência entre AE e AF. É claro que AE implica trivialmente AF e, portanto, resta-mos provar que

$$ZF + AF \vdash AE.$$

A demonstração será subdividida em Lemas, alguns dos quais tendo também aplicações na demonstração da equivalência de AE com OT = BO.

Lema 5.2: Seja $\mathfrak{F}$ um conjunto de aplicações tais que

$$\forall f\ (f \in \mathfrak{F} \rightarrow \operatorname{dom} f \in \alpha + 1).$$

Seja $G \in {}^{\alpha}V$ tal que

$$\forall \xi (\xi \in \alpha \rightarrow G^{\circ}\xi \in OT(\{f^{\circ}\xi : f \in \mathfrak{F}\})).$$

Então, $OT(\mathfrak{F}) \neq 0$. Além disso, existe uma fórmula $\Phi_1(\mathfrak{F}, G; S)$ tal que a seguinte sentença é um teorema:

$$\forall \mathfrak{F}, G, \alpha\ \Big[\mathfrak{F} \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha+1} {}^{\beta}V \wedge G \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi (\xi \in \alpha \rightarrow G^{\circ}\xi \in OT(\{f^{\circ}\xi : f \in \mathfrak{F}\}) \rightarrow \exists ! S (S \in OT(\mathfrak{F}) \wedge \Phi_1(\mathfrak{F}, G; S))\Big].$$

Demonstração: Definamos S como sendo o conjunto

$$S = \{ \langle f,g \rangle : f,g \in \mathfrak{F} \wedge (\exists \xi (f \restriction \xi = g \restriction \xi \wedge$$

$$f`\xi \; (G`\xi) \; g`\xi) \vee f \subsetneq g) \} .$$

Mostremos que S é uma ordem total sôbre $\mathfrak{F}$, verificando-se as condições (1)-(4) da definição:

(1) $\forall f \; (\neg f \, S \, f)$.

De fato, se tivessemos $f \, S \, f$, então é claro que não seria o caso de termos $f \subsetneq f$. Logo,

$$\exists \xi (f \restriction \xi = f \restriction \xi \wedge f`\xi \; (G`\xi) \; f`\xi).$$

Mas $G`\xi$ é por sua vez uma ordem total e portanto

$$\neg \; f`\xi \, (G`\xi) \, f`\xi .$$

Logo, $\neg \; f \, S \, f$.

(2) $\forall f,g \; (f \, S \, g \rightarrow \neg \, g \, S \, f)$.

Suponhamos que se tenha $f \, S \, g \wedge g \, S \, f$. Se $f \subsetneq g$ então não é possível ter-se $g \subsetneq f$. Portanto,

$$\exists \xi (f \restriction \xi = g \restriction \xi \wedge g`\xi \; (G`\xi) f`\xi).$$

Segue então que $g`\xi \neq f`\xi$ o que viola o fato de se ter $f \subsetneq g$.

Suponhamos que se tenha ξ, η tais que

$$f \restriction \xi = g \restriction \xi \wedge f \restriction \eta = g \restriction \eta \wedge f`\xi \; (G`\xi) g`\xi \wedge$$

$$g`\eta \; (G`\eta) f`\eta .$$

Se $\xi \in \eta$, então $f`\xi \neq g`\xi$ e portanto não se tem $f \restriction \eta = g \restriction \eta$. Anàlogamente se prova que $\eta \notin \xi$. Por—

tanto, $\xi = \eta$. Tira-se, então, que

$$f`\xi\,(G`\xi)\,g`\xi \wedge g`\xi\,(G`\xi)\,f`\xi\,,$$

o que contradiz ser $G`\xi$ uma ordem total.

(3) $\forall f,g\,(f,g \in \mathfrak{F} \wedge f \neq g \rightarrow f\,S\,g \vee g\,S\,f)$.

Sendo f,g funções distintas de $\mathfrak{F}$, a fim de verificarmos que f e g são comparáveis (segundo S), consideremos o caso em que se tenha ξ tal que

$$f`\xi \neq g`\xi\,.$$

Podemos supor que ξ é o menor dos ordinais com esta propriedade, i.e. $f \restriction \xi = g \restriction \xi$. Como $G`\xi$ é uma ordem total, teremos

$$f`\xi\,(G`\xi)\,g`\xi \vee g`\xi\,(G`\xi)\,f`\xi$$

e portanto, conforme o caso, ter-se-á respectivamente $f\,S\,g \vee g\,S\,f$. Se não existisse ξ tal que $f`\xi \neq g`\xi$, como as aplicações f e g são distintas, deveremos ter $f \subsetneqq g \vee g \subsetneqq f$. De qualquer forma, a conclusão se impõe.

(4) $\forall f,g,h\,(f\,S\,g \wedge g\,S\,h \rightarrow f\,S\,h)$.

Com efeito, se $f\,S\,g \wedge g\,S\,h$, pela propriedade (2) não podemos ter $f = h$. Pela (3) segue então que $f\,S\,h \vee h\,S\,f$. Suponhamos que se tenha $h\,S\,f$ e portanto

$$f\,S\,g\,S\,h\,S\,f.$$

Como é impossível acontecer $f \subsetneqq g \subsetneqq h \subsetneqq f$, duas destas aplicações diferem de valor em algum ordinal e seja ξ

o menor dos ordinais em que tal se dá. É fácil concluir que neste caso se tem $f^{\circ}\xi\,(G^{\circ}\xi)\,f^{\circ}\xi$ o que é impossível. Logo $\neg\, h\,S\,f$ e portanto somos forçados a ter $f\,S\,h$.

A fórmula que descreve a ordem total S em termos de $\mathfrak{F}$ e G é

$$\Phi_1(\mathfrak{F}, G; S) \equiv \forall x\,(x \in S \leftrightarrow \exists f,g\,(x = \langle f,g\rangle \wedge f,g \in \mathfrak{F} \wedge$$

$$(\exists \xi\,(f \restriction \xi = g \restriction \xi \wedge \langle f^{\circ}\xi, g^{\circ}\xi\rangle \in G^{\circ}\xi) \vee f \subsetneq g))).$$

QED

<u>Corolário 5.3</u>: $\forall x\,(BO(x) \neq 0 \rightarrow OT(\wp x) \neq 0)$. Além disso, existe uma fórmula $\Phi_2(W;A)$ tal que a seguinte sentença é um teorema de ZF:

$$\forall x, W\,(W \in BO(x) \rightarrow \exists!A\,(A \in OT(\wp x) \wedge \Phi_2(W;A))).$$

<u>Demonstração</u>: Seja W uma boa ordem sôbre x. Sabemos que existe um único ordinal α e uma única aplicação h tal que $h \in {}^{\alpha}x \wedge \breve{h} \in {}^{x}\alpha$ e

$$\forall \xi, \eta \in \alpha\,(h^{\circ}\xi\, W\, h^{\circ}\eta \leftrightarrow \xi \in \eta).$$

Isto porque tôda boa ordem tem o mesmo tipo de ordem de um ordinal. Seja k a aplicação de $\wp x$ sôbre ${}^{\alpha}2$ tal que

$$k = \{\langle X,f\rangle : X \in \wp x \wedge f \in {}^{\alpha}2 \wedge \forall \xi\,(f^{\circ}\xi = 1 \leftrightarrow$$

$$h^{\circ}\xi \in X)\}.$$

É claro que $k^{\cdot}X$ é a função composta de h com a função característica de X.

Como h é uma bijeção e a aplicação que a cada parte de um conjunto associa sua função característica é bijetora, segue então que k é também bijetora.

Aplicando-se o Lema 5.2 no caso especial em que $\mathfrak{I} = {}^{\alpha}2$ e G a função constante tal que

$$G = \{ < \xi, \{ <0,1> \} > \ : \xi \in \alpha \},$$

deduz-se a existência de uma ordem total S sôbre o conjunto ${}^{\alpha}2$. Mas $\wp x$ é equipotente a ${}^{\alpha}2$ e como $OT({}^{\alpha}2) \neq 0$, tem-se $OT(\wp x) \neq 0$.

A fórmula $\Phi_2(W;A)$ é a seguinte:

$$\begin{aligned} \Phi_2(W;A) \equiv \ & \exists a(W \in BO(a) \wedge \forall Z(Z \in A \leftrightarrow \exists x, X, Y, h, k, \alpha, \\ & G, S(Z = <X, Y> \wedge X, Y \in \wp x \wedge h \in {}^{\alpha}x \wedge \breve{h} \in {}^{x}\alpha \wedge \\ & \forall \xi, \eta(<h^{\cdot}\xi, h^{\cdot}\eta> \in W \leftrightarrow \xi \in \eta \in \alpha) \wedge \\ & k \in {}^{\wp x}({}^{\alpha}2) \wedge \forall X, f\ (k^{\cdot}X = f \leftrightarrow \forall \xi\ (f^{\cdot}\xi = 1 \leftrightarrow \\ & h^{\cdot}\xi \in X)) \wedge G = \{ <\xi, \{ <0,1> \} > \ : \xi \in \alpha \} \wedge \\ & \Phi_1({}^{\alpha}2, G; S) \wedge < k^{\cdot}X, k^{\cdot}Y > \in S)) \vee \neg \exists a(W \in BO(a) \wedge \\ & A = 0). \end{aligned}$$

Corolário 5.4: $\forall x\ (OT(x) \neq 0 \rightarrow OT(BO(x)) \neq 0)$.

Além disso, existe uma fórmula $\Phi_3(A;\Sigma)$ tal que a seguinte sentença é um teorema de ZF:

$$\forall A, x (A \in OT(x) \rightarrow \exists ! \Sigma\ (\Sigma \in OT(BO(x)) \wedge \Phi_3(A;\Sigma))).$$

Demonstração: Consideraremos apenas o caso em que x é um conjunto e $BO(x) \neq 0$. Seja A uma ordem total sôbre x e seja h a aplicação definida por

$$h = \{ < W, f > : (W \in BO(x) \wedge \exists \beta\ (f \in {}^{\beta}x \wedge \check{f} \in {}^{x}\beta \wedge$$
$$\forall \xi, \eta \in \beta\ (f^{\cdot}\xi\ W\ f^{\cdot}\eta \leftrightarrow \xi \in \eta))) \}.$$

A função h associa a cada boa ordem sôbre x a única bijeção de x sôbre um conveniente ordinal que preserva as relações de ordem. Pode-se demonstrar que a própria função h é também uma bijeção de domínio BO(x).

Aplicando-se o Lema 5.2 no caso especial em que $\mathfrak{I} = \mathrm{dom}\ \breve{h}$ e G é a função dada por

$$G = \{ < \beta, A > : \beta \in \alpha \},$$

onde $\alpha = \bigcup \{ \beta : \exists f\ (f \in \mathrm{dom}\ \breve{h} \wedge \mathrm{dom}\ f = \beta) \}$, deduz-se a existência de uma ordem total sôbre $\mathfrak{I}$, i.e. $OT(\mathfrak{I}) \neq 0$. Mas $\mathfrak{I}$ é equipotente a BO(x) (pela aplicação h), portanto $OT(BO(x)) \neq 0$.

A fórmula $\Phi_3(A;\Sigma)$ que utilizaremos é a seguinte:

$$\Phi_3(A;\Sigma) \equiv \exists x(A \in OT(x) \wedge \forall z(z \in \Sigma \leftrightarrow \exists y, W_1, W_2, h, \alpha,$$
$$\mathfrak{I}, G, S\ (z = \langle W_1, W_2\rangle \wedge W_1, W_2 \in BO(y) \wedge$$
$$h \in {}^{BO(y)}(\bigcup\{{}^{\beta}y : \beta \in \alpha\}) \wedge \forall W, f(h^{\circ}W = f \leftrightarrow$$
$$\forall \xi, \eta \in \operatorname{dom} f\ (\langle f^{\circ}\xi, f^{\circ}\eta\rangle \in W \leftrightarrow \xi \in \eta) \wedge$$
$$\mathfrak{I} = h^{*}BO(y) \wedge G = \{\langle \beta, A\rangle : \beta \in \alpha\} \wedge$$
$$\Phi_1(\mathfrak{I}, G; S) \wedge (\langle W_1, W_2\rangle \in \Sigma \leftrightarrow \langle h^{\circ}W_1,$$
$$h^{\circ}W_2\rangle \in S)))) \vee \neg \exists x\ ((A \in OT(x)) \wedge \Sigma = 0).$$

QED

Lema 5.5: $\forall x_o, x_1, A_o, A_1\ (A_o \in OT(x_o) \wedge$

$A_1 \in OT(x_1) \rightarrow OT(x_o \cup x_1) \neq 0).$

Além disto, existe uma fórmula $\Phi_4(A_o, A_1; A)$ tal que a seguinte sentença é um teorema de ZF:

$$\forall x_o, x_1, A_o, A_1\ (A_o \in OT(x_o) \wedge A_1 \in OT(x_1) \rightarrow$$
$$\exists! A (A \in OT(x_o \cup x_1) \wedge \Phi_4(A_o, A_1; A))).$$

Demonstração: Sejam A_o e A_1 ordens totais sôbre x_o e x_1. Definamos uma relação A sôbre $x_o \cup x_1$ da seguinte maneira:

$$A = \{ \langle u, v\rangle : (u, v \in x_o \wedge uA_o v) \vee$$
$$(u \in x_o \wedge v \in x_1 \sim x_o) \vee (u, v \in x_1 \sim x_o \wedge uA_1 v)\}.$$

É rotineiro verificar-se que $A \in OT(x_o \cup x_1)$ que é portanto não vazio. A fórmula $\Phi_4(A_o, A_1; A)$ pode ser a seguinte:

$$\Phi_4(A_0,A_1;A) \equiv \exists x_0,x_1(A_0 \in OT(x_0) \wedge A_1 \in OT(x_1) \wedge$$

$$\forall z(z \in A \leftrightarrow \exists u,v(z = \langle u,v \rangle \wedge$$

$$((u,v \in x_0 \wedge uA_0v) \vee (u \in x_0 \wedge v \in x_1 - x_0) \vee$$

$$(u,v \in x_1 - x_0 \wedge uA_1v)))))) \vee$$

$$\neg \exists x_0,x_1(A_0 \in OT(x_0) \wedge A_1 \in OT(x_1) \wedge A = 0).$$

QED

Observação: No caso de termos duas boas ordens W_0 e W_1 respectivamente sôbre x_0 e x_1, o **lema** anterior nos garante que se W fôr tal que

$$\Phi_4(W_0,W_1;W),$$

então W será uma ordem total sôbre $x_0 \cup x_1$. Contudo, é fácil demonstrar que W é algo mais que uma ordem total, de fato, W é também uma boa ordem.

Assim, emendando-se duas ordens totais obtém-se uma ordem total; emendando-se duas boas ordens obtém-se uma boa ordem.

Lema 5.6:

$$\forall f,G,\alpha(f,G \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi(G`\xi \in OT(f`\xi)) \rightarrow$$

$$OT(\bigcup f^{*}\alpha) \neq 0).$$

$$\forall f,G,\alpha(f,G \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi(G`\xi \in BO(f`\xi)) \rightarrow$$

$$BO(\bigcup f^{*}\alpha) \neq 0).$$

Além disto, existe uma fórmula $\Phi_5(G;\Sigma)$ tal que as seguintes sentenças são teoremas de ZF:

$$\forall f,G,\alpha(f,G \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi(G^{\cdot}\xi \in OT(f^{\cdot}\xi) \rightarrow$$
$$\exists !\Sigma(\Sigma \in OT(\bigcup f^{*}\alpha) \wedge \Phi_5(G;\Sigma))).$$

$$\forall f,G,\alpha(f,G \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi(G^{\cdot}\xi \in BO(f^{\cdot}\xi) \rightarrow$$
$$\exists !\Sigma(\Sigma \in BO(\bigcup f^{*}\alpha) \wedge \Phi_5(G;\Sigma))).$$

<u>Demonstração</u>: Sejam f e G aplicações de mesmo domínio α; iremos supor que

$$\forall \xi(\xi \in \alpha \rightarrow G^{\cdot}\xi \in OT(f^{\cdot}\xi)).$$

Construamos, então, uma ordem total sôbre $\bigcup f^{*}\alpha$.

Antes disto, faremos na demonstração do presente Lema, a seguinte convenção: se $x \in \bigcup f^{*}\alpha$, denotaremos por

$$\xi_x = \bigcap \{\mathfrak{I} : x \in f^{\cdot}\mathfrak{I}\}.$$

Com isto, definiremos o conjunto Σ pela fórmula:

$$\Sigma = \{<x,y> ; x,y \in \bigcup f^{*}\alpha \wedge (\xi_x \in \xi_y \vee$$
$$(\xi_x = \xi_y \wedge x(G^{\cdot}\xi_x)y))\}.$$

Queremos provar agora dois seguintes fatos:

(1) Se $\forall \xi(G^{\cdot}\xi \in OT(f^{\cdot}\xi))$ então $\Sigma \in OT(\bigcup f^{*}\alpha)$.

(2) Se $\forall \xi(G^{\cdot}\xi \in BO(f^{\cdot}\xi))$ então $\Sigma \in BO(\bigcup f^{*}\alpha)$.

Provemos (1).

(a) $\langle x,x\rangle \notin \Sigma$

De fato, se $\langle x,x\rangle \in \Sigma$ então ter-se-á

$$x(G^{\cdot}\xi_x)x.$$

Mas sendo $G^{\cdot}\xi_x$ uma ordem total, isto é impossível.

(b) $\langle x,y\rangle \in \Sigma \rightarrow \langle y,x\rangle \notin \Sigma$

Se $\langle x,y\rangle$ e $\langle y,x\rangle \in \Sigma$, do fato de não se poder ter $x(G^{\cdot}\xi_x)y$ e $y(G^{\cdot}\xi_x)x$ (já que $G^{\cdot}\xi_x$ é uma ordem total), conclui-se que $\xi_x \neq \xi_y$. No entanto, se $\xi_x \in \xi_y$ não se tem $\langle y,x\rangle \in \Sigma$ e se $\xi_y \in \xi_x$ não se tem $\langle x,y\rangle \in \Sigma$. Logo não se tem $\langle x,y\rangle$, $\langle y,x\rangle \in \Sigma$, o que prova (b).

(c) $\langle x,y\rangle, \langle y,z\rangle \in \Sigma \rightarrow \langle x,z\rangle \in \Sigma$.

Com efeito, admita-se $\langle x,y\rangle$ e $\langle y,z\rangle$ em Σ. Há vários casos a considerar: se $\xi_x = \xi_y = \xi_z$, tem-se $x(G^{\cdot}\xi_x)y(G^{\cdot}\xi_x)z$ e portanto $x(G^{\cdot}\xi_x)$ ou seja $\langle x,y\rangle \in \Sigma$. Se $\xi_x \in \xi_y = \xi_z$ então $\xi_x \in \xi_z$ e portanto $\langle x,z\rangle \in \Sigma$. Anàlogamente se $\xi_x = \xi_y \in \xi_z$ então $\xi_x \in \xi_z$ e portanto $\langle x,z\rangle \in \Sigma$. Finalmente se $\xi_x \in \xi_y \in \xi_z$, pela propriedade transitiva da pertinência restrita a ordinais, segue que $\xi_x \in \xi_z$ e portanto $\langle x,z\rangle \in \Sigma$.

(d) Se $x,y \in \bigcup f^{*}\alpha$, então $\langle x,y\rangle \in \Sigma$ ou $\langle y,x\rangle \in \Sigma$.

De fato, se $x,y \in f^{*}\alpha$, há três possibilidades para ξ_x e ξ_y. Se $\xi_x \in \xi_y$ ou $\xi_y \in \xi_x$, ter-se-á respectivamente $<x,y> \in \Sigma$ ou $<y,x> \in \Sigma$. Caso $\xi_x = \xi_y$, ter-se-á $<x,y> \in \Sigma$ ou $<y,x> \in \Sigma$ conforme ocorra a alternativa $x(G^{\cdot}\xi_x)y$ ou $y(G^{\cdot}\xi_x)x$. De qualquer forma, (d) segue.

De (a) - (d) conclui-se que Σ é uma ordem total.

Provemos (2). Para tanto, é suficiente demonstrar que

$$\forall X(0 \neq X \subseteq \bigcup f^{*}\alpha \rightarrow \exists x(x \in X \wedge \forall y(x \neq y \in X \rightarrow <x,y> \in \Sigma))).$$

Com efeito, seja X uma parte não vazia de $\bigcup f^{*}\alpha$. Seja

$$\xi = \bigcap \{\mathfrak{I} : \exists u(u \in X \wedge u \in f^{\cdot}\mathfrak{I})\}.$$

(É claro que se pode tomar a intersecção acima pois que X é não vazio e $X \subseteq \bigcup f^{*}\alpha$).

No caso de $X \cap f^{\cdot}\xi$ ser unitário e igual a $\{x\}$, então x será Σ-minimal em X.

No caso de $X \cap f^{\cdot}\xi$ possuir mais de um elemento e x $G^{\cdot}\xi$-minimal em $X \cap f^{\cdot}\xi$, segue da definição de Σ que x é também Σ-minimal (em X). De qualquer modo, X sempre possui o elemento Σ-minimal contanto que $\forall \xi (G^{\cdot}\xi \in BO(f^{\cdot}\xi))$. Logo, (2) se impõe.

A fórmula $\Phi_5(G;\Sigma)$ poderá ser a seguinte:

$$\Phi_5(G;\Sigma) \equiv \exists f,\alpha\,(f,G \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi\,(G`\xi \in OT(f`\xi)) \wedge$$

$$\forall z(z \in \Sigma \leftrightarrow \exists x,y(x,y \in f^{*}\alpha \wedge z = \langle x,y\rangle \wedge$$

$$((\bigcap\{\eta : x \in f`\eta\} \in \bigcap\{\eta : y \in f`\eta\}) \vee$$

$$(\bigcap\{\eta : x \in f`\eta\} = \bigcap\{\eta : y \in f`\eta\} \wedge$$
$$x(G`\bigcap\{\eta : x \in f`\eta\})y)))) \vee$$

$$\neg\exists f,\alpha\,(f,G \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi(G`\xi \in OT(f`\xi)) \wedge$$
$$\Sigma = 0).$$

QED

Lema 5.7: $\forall A,x,y(A \in OT(x) \wedge 0 \neq y \subseteq x \wedge y$ é finito $\rightarrow A \cap (y \times y) \in BO(y))$.

Além disto, existe uma fórmula $\Phi_6(A,y;z)$ tal que a sentença seguinte é um teorema de ZF:

$$\forall A,x,y,z\,(A \in OT(x) \wedge 0 \neq y \subseteq x \wedge y \text{ é finito} \rightarrow$$
$$\exists! z(z \in y \wedge \Phi_6(A,y;z))).$$

O Lema acima nos diz que se um conjunto for totalmente ordenado, a restrição de tôda ordem total dêsse conjunto a qualquer de suas partes finitas é uma boa ordem. Este fato é bastante intuitivo e de demonstração simples; omiti-la-emos.

Uma das possíveis fórmulas $\Phi_6(A,y;z)$ é a seguinte:

$$\Phi_6(A,y;z) \equiv \exists x(A \in OT(x) \wedge 0 \neq y \subseteq x \wedge y \text{ é finito } \wedge (y = \{z\} \vee (z \in y \wedge \forall u\, (z \neq u \in y \rightarrow \langle z,u\rangle \in A))) \vee \neg \exists x(A \in OT(x) \wedge 0 \neq y \subseteq x \wedge y \text{ é finito } \wedge z = 0).$$

QED

Antes de finalizarmos a demonstração do nosso teorema, façamos uma convenção. Seja

$$\Phi(x_0,\ldots,x_{n-1})$$

uma fórmula de ZF contendo livres as variáveis $x_0,\ldots,x_{n-1}$ e y e podendo ou não possuir parâmetros adicionais. Suponhamos tenha sido provada a seguinte fórmula (em ZF):

$$\forall x_0 \ldots x_{n-1}\ \exists!\, y\ \Phi(x_0 \ldots x_{n-1};y).$$

Podemos então considerar o têrmo

$$\iota_y\ \Phi(x_0 \ldots x_{n-1};y).$$

Pode acontecer que, no decorrer de uma demonstração, seja necessário definir várias vêzes conjuntos por meio de fórmulas e para cada aplicação da definição precisarmos introduzir uma variável (exemplo: no caso acima, é necessário utilizar a variável y para denotar o Φ-correspondente de $x_0\ldots x_{n-1}$). Afim de evitar a introdução deselegante de um número elevado de variáveis, usaremos a própria fórmula Φ como um operador. Assim, será utilizada a notação

$$\Phi(x_o \ldots x_{n-1})$$

para designar o único y tal que $\Phi(x_o, \ldots, x_{n-1}; y)$.

$$\Phi(x_o \ldots x_{n-1}) = \iota_y \, \Phi(x_o \ldots x_{n-1}; y).$$

É claro que pelo contexto, será possível discernir quando Φ é usada como fórmula e quando é usada como operador.

Com a notação introduzida acima, temos as seguintes consequências das definições e Lemas que até aqui já provamos:

(1) $A \in OT(\bigcup\bigcup A) \leftrightarrow \exists x(A \in OT(x))$.

$W \in BO(\bigcup\bigcup W) \leftrightarrow \exists x(W \in BO(x))$.

(2) $W \in BO(\bigcup\bigcup W) \rightarrow \Phi_2 W \in OT(\wp \bigcup\bigcup W)$

(3) $A \in OT(\bigcup\bigcup A) \rightarrow \Phi_3 A \in OT(BO(\bigcup\bigcup A))$.

(4) $A_o \in OT(\bigcup\bigcup A_o) \wedge A_1 \in OT(\bigcup\bigcup A_1) \rightarrow$

$\Phi_4(A_o, A_1) \in OT(\bigcup\bigcup A_o \cup \bigcup\bigcup A_1)$.

$W_o \in BO(\bigcup\bigcup W_o) \wedge W_1 \in BO(\bigcup\bigcup W_1) \rightarrow$

$\Phi_4(W_o, W_1) \in BO(\bigcup\bigcup W_o \cup \bigcup\bigcup W_1)$.

(5) $f, G \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi (G^{\circ}\xi \in OT(f^{\circ}\xi)) \rightarrow$

$\Phi_5 G \in OT(\bigcup f^{*}\alpha)$.

$f, G \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi (G^{\circ}\xi \in BO(f^{\circ}\xi)) \rightarrow$

$\Phi_5 G \in BO(\bigcup f^{*}\alpha)$.

(6) $A \in OT(\bigcup\bigcup A) \wedge 0 \neq y \subseteq \bigcup\bigcup A \wedge y$ é finito $\to$

$\Phi_6(A,y) \in y$.

Provemos agora que $ZF+AF \vdash \forall\alpha\,(BO(R_\alpha) \neq 0)$. Como é fácil de ver, estabelecido êste fato, o teorema da boa ordem segue imediatamente. De fato, dado x qualquer, pelo Teorema 4.2, $x \in R_\beta$, para algum β. Conclui-se que

$$x \subseteq \bigcup R_\beta \subseteq \bigcup_{\xi\in\beta+1} R_\xi \subseteq \bigcup_{\xi\in\beta+1} R_\xi \cup \mathcal{P} \bigcup_{\xi\in\beta+1} R_\xi \subseteq R_{\beta+1}$$

Pondo $\alpha = \beta+1$, tem-se

$$x \subseteq R_\alpha \wedge BO(R_\alpha) \neq 0.$$

Portanto $BO(x) \neq 0$ o que implica então que $BO = V$.

Para demonstrarmos que $\forall\alpha\,(BO(R_\alpha) \neq 0)$, usaremos o Princípio de Indução Transfinita (forte). Admitamos então que

$$\forall\beta\,(\beta \in \alpha \to BO(R_\beta) \neq 0).$$

Cabe-nos provar que tal hipótese acarreta ser

$$BO(R_\alpha) \neq 0.$$

Usando o axioma AF e tendo em conta que cada um dos membros do conjunto $\{BO(R_\beta) : \beta \in \alpha\}$ é não vazio, deduz-se a existência de uma aplicação H que satisfaz às propriedades:

$$H \in {}^\alpha V \wedge \forall\beta\,(0 \neq H'\beta \subseteq BO(R_\beta) \wedge H'\beta \text{ é finito}).$$

Vemos claramente que a função H seleciona, para cada $\xi \in \alpha$, um subconjunto finito e não vazio de boas ordens de R_β. Nosso próximo passo será provar a existência de uma função K tal que a cada $\beta \in \alpha$ associa uma única boa ordem de R_β. Faremos isto, utilizando o Esquema de definição por recorrência transfinita.

Seja $Ⓗ(x,y;H)$ a seguinte fórmula de ZF (com parâmetro H):

$$Ⓗ(x,y;H) \equiv (x \in {}^{\mathrm{dom}\,x}V \wedge \mathrm{dom}\,x \in \mathrm{dom}\,H \wedge y = \Phi_6(\Phi_3\Phi_4(\Phi_5 x, \Phi_2\Phi_5 x), H'\mathrm{dom}\,x)) \vee \neg(x \in {}^{\mathrm{dom}\,x}V \wedge \mathrm{dom}\,x \in \mathrm{dom}\,H \wedge y=0).$$

Então $\forall x\, \exists!\, y\; Ⓗ(x,y;H)$ e pelo Esquema de definição por recorrência transfinita,

$$\forall \beta \exists! K\, (K \in {}^{\beta}V \wedge \forall \xi\, (Ⓗ(K \restriction \xi, K'\xi; H))).$$

No que segue, chamaremos de K_β ao têrmo que satisfaz ao segundo membro da equação:

$$K_\beta = \iota_z\, (z \in {}^{\beta}V \wedge \forall \xi\, (Ⓗ(z \restriction \xi, z'\xi; H))).$$

Antes de mais nada, verifiquemos um fato do qual já nos familiarizamos:

(7) $\forall \xi, \beta\, (\xi \subseteq \beta \rightarrow K_\xi \subseteq K_\beta)$

(i.e. os K_β são crescentes).

De fato, seja $\xi \subseteq \beta$ e η um elemento qualquer de ξ . Da definição de K_β, tira-se

$$\textcircled{H}(K_\beta \upharpoonright \eta \ , \ K_\beta^{\cdot}\eta \ ; H).$$

Como $\eta \in \xi$, esta fórmula é equivalente a

$$\textcircled{H}((K_\beta \upharpoonright \xi \ ) \upharpoonright \eta \ , \ (K_\beta \upharpoonright \xi \ )^{\cdot}\eta \ ; H).$$

Finalmente como η é um elemento arbitrário de ξ , como $K_\beta \upharpoonright \xi$ tem domínio ξ e como K_ξ é a única aplicação que satisfaz a condição

$$\forall \eta(\eta \in \xi \rightarrow \textcircled{H}(K_\xi \upharpoonright \eta \ , K_\xi^{\cdot}\eta \ ; H)),$$

segue que $K_\beta \upharpoonright \xi = K_\xi$. A conclusão de (7) é então imediata a partir das fórmulas:

$$K_\xi = K_\beta \upharpoonright \xi \subseteq K_\beta .$$

Nós nos propomos a provar

(8) $$\forall\beta(\beta \subseteq \alpha \rightarrow \forall\xi(\xi \in \beta \rightarrow K^{\cdot}_\xi \in BO(R_\xi))).$$

Isto será feito pelo Princípio de Indução transfinita mediante a seguinte hipótese:

$$\forall\xi(\xi \in \beta \subseteq \alpha \rightarrow \forall\eta(K_\xi^{\cdot}\eta \in BO(R_\eta))).$$

Queremos provar que $\forall\xi \ (\xi \in \beta \rightarrow K_\beta^{\cdot}\xi \in BO(R_\xi))$ supondo $\beta \subseteq \alpha$. Seja ξ um elemento arbitrário de β . Vejamos o que é $K_\beta^{\cdot}\xi$. Ora, $K_\beta \upharpoonright \xi$ é uma aplicação de domínio ξ e $\xi \in \alpha$ (pois $\xi \in \beta \subseteq \alpha$) e portanto $\xi \in \mathrm{dom}\, H$. Olhando-se para a definição de $\textcircled{H}$, verifica-se então que

$$K_\beta^{\cdot}\xi = \Phi_6(\Phi_3\Phi_4(\Phi_5(K_\beta \upharpoonright \xi), \Phi_2\Phi_5(K_\beta \upharpoonright \xi)), H^{\cdot}\xi).$$

Agora, se $\eta \in \xi$, $(K_\beta \restriction \xi)`\eta = K`\eta \in BO(R_\eta)$ (vide (4) e hipótese de indução). Portanto, de (5) tira-se que

$$\Phi_5(K_\beta \restriction \xi) \in BO(\bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta).$$

De (2) tira-se que

$$\Phi_2\Phi_5(K_\beta \restriction \xi) \in OT(\wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta).$$

Como $BO \subseteq OT$, conclui-se de (4) que

$$\Phi_4(\Phi_5(K_\beta \restriction \xi), \Phi_2\Phi_5(K_\beta \restriction \xi)) \in OT(\bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta$$

$$\cup \wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta) = OT(R_\xi).$$

De (3) vem

$$\Phi_3\Phi_4(\Phi_5(K_\beta \restriction \xi), \Phi_2\Phi_5(K_\beta \restriction \xi)) \in OT(BO(R_\xi)).$$

Como $H`\xi$ é finito e $0 \neq H`\xi \subseteq BO(R_\xi)$, tem-se de (6) que

$$K_\beta`\xi = \Phi_6(\Phi_3\Phi_4(\Phi_5(K_\beta \restriction \xi),$$

$$\Phi_2\Phi_5(K_\beta \restriction \xi)), H`\xi) \in BO(R_\xi).$$

Assim provamos (8). Em particular, concluimos

(9) $\forall \alpha(\xi \in \alpha \longrightarrow K_\alpha`\xi \in BO(R_\xi))$.

De (5), novamente, temos então

(10) $\Phi_5 K_\alpha \in BO(\bigcup_{\xi\in\alpha} R_\xi)$.

Iremos agora enunciar o seguinte lema:

Lema 5.8:

$$ZF + AF \vdash \forall x\ (BO(x) \neq 0 \rightarrow BO(\wp x) \neq 0).$$

Admitindo-o como verdadeiro, podemos imediatamente provar que $BO(R_\alpha) \neq 0$. De fato, de (10) segue que

$$BO\Big(\bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi\Big) \neq 0.$$

Seja

$$W_0 \in BO\Big(\bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi\Big).$$

Pelo Lema 5.8, concluimos que $\wp \bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi$ é bem ordenável. Seja

$W_1 \in BO(\wp \bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi)$. Como $R_\alpha = \bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi \cup \wp \bigcup_{\xi \in \alpha} R_\xi$,

segue que $\Phi_4(W_0, W_1) \in BO(R_\alpha)$ e portanto $BO(R_\alpha) \neq 0$.

Provemos então o lema 5.8.

Seja x um conjunto bem ordenável e W uma boa ordem sôbre x: $\Phi_2 W$ pertence então a $OT(\wp x)$. Consideremos o conjunto $\wp \wp x \sim 1$. É uma consequência de AF a existência de uma aplicação H tal que

$$(H \in {}^{(\wp \wp x \sim 1)}V \wedge \forall X (0 \neq H{}^{\cdot}X \subseteq X \wedge H{}^{\cdot}X \text{ é finito})).$$

Seja f a aplicação que satisfaz à equação:

$$f = \{ \langle X, \Phi_6(\Phi_2 W, H{}^{\cdot}X) \rangle : 0 \neq X \subseteq \wp x \}$$

É claro então que

$$f \in {}^{(\wp \wp x \sim 1)}V \wedge \forall X\ (f{}^{\cdot}X \in X).$$

Que $\wp x$ é bem ordenável pode-se deduzir do seguinte teorema:

<u>Teorema 5.9</u>: (Zermelo)

$$\forall z,f(f \in {}^{(\wp z - 1)}V \wedge \forall X(f`X \in X) \rightarrow BO(z) \neq 0).$$

<u>Demonstração</u>: Seja z um conjunto e f uma aplicação definida no conjunto das partes não vazias de z tal que $\forall X(f`X \in X)$. Seja $F(x,y;f)$ a seguinte fórmula:

$$F(x,y;f) \equiv (x \in {}^{\operatorname{dom} x}V \wedge y = f`(z \sim \operatorname{dom} \breve{x})) \vee ((x \notin {}^{\operatorname{dom} x}V$$

$$\vee\ (z \sim \operatorname{dom} \breve{x}) \notin \operatorname{dom} f) \wedge y = z).$$

Então é claro que $\forall x\ \exists!\, yF(x,y)$ e pelo Esquema de definição por recorrência transfinita, deduz-se que

$$\forall \alpha\ \exists! g\ (g \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi\,(F(g \upharpoonright \xi,\ g`\xi))).$$

Introduzamos a notação g_α para indicar

$$\iota_t(t \in {}^{\alpha}V \wedge \forall \xi\,(F(t \upharpoonright \xi,\ t`\xi))),$$

onde α é um ordinal qualquer. Provemos os seguintes fatos:

(1') $\forall \alpha\ (g_\alpha$ é injetora $\vee\ z \in \operatorname{dom} \breve{g}_\alpha)$.

Com efeito, seja α um ordinal tal que g_α não seja injetora e consideremos dois ordinais ξ e η tais que $g_\alpha`\xi = g_\alpha`\eta$ e $\xi \in \eta$. Por hipótese tem-se

$$F(g_\alpha \upharpoonright \eta\ ,\ g_\alpha`\eta).$$

Se $X = z \sim \operatorname{dom} \breve{g}_\alpha \restriction \eta \neq 0$ então $X \in \operatorname{dom} f$ e pela definição de F, $g_\alpha \cdot \eta = f \cdot X \in X$, ou seja $g_\alpha \cdot \eta \in z \sim \operatorname{dom} \breve{g}_\alpha \restriction \eta = z \sim \{ g_\alpha \cdot \zeta : \zeta \in \eta \}$. Consequentemente

$$g_\alpha \cdot \eta \notin \{ g_\alpha \cdot \zeta : \zeta \in \eta \}$$

Mas $\xi \in \eta$ e portanto

$$g_\alpha \cdot \xi \in \{ g_\alpha \cdot \zeta : \zeta \in \eta \}$$

a contradição é imediata se levarmos em conta que

$$g_\alpha \cdot \xi = g_\alpha \cdot \eta .$$

Segue daí que $X = z \sim \operatorname{dom} \breve{g}_\alpha \restriction \eta = 0$ e portanto $X \notin \operatorname{dom} f$ tendo-se pois, que $g_\alpha \cdot \eta = z$.

(2') $\forall \alpha, \beta \, (\alpha \subseteq \beta \longrightarrow g_\alpha \subseteq g_\beta)$.

De fato, seja $h = g_\beta \restriction \alpha$. Como se tem

$$\forall \xi \, (F(g_\beta \restriction \xi \, , \, g_\beta \cdot \xi)),$$

em particular ter-se-á

$$\forall \xi \;\; F(h \restriction \xi \, , \, h \cdot \xi)).$$

Pela unidade de g_α, segue

$$g_\alpha = h = g_\beta \restriction \alpha \subseteq g_\beta .$$

(3') $\forall \alpha, \beta \, (\alpha \in \beta \wedge z \notin \operatorname{dom} \breve{g}_\alpha \cup \operatorname{dom} \breve{g}_\beta \longrightarrow$

$$\operatorname{dom} \breve{g}_\alpha \neq \operatorname{dom} \breve{g}_\beta).$$

Se $\alpha \in \beta$ e z não pertence aos contradomínios de g_α e g_β, então ambas, g_α e g_β são injetoras (por (1')). Usando (2'), tem-se $g_\alpha \subseteq g_\beta$ mas $\operatorname{dom} g_\alpha = \alpha \subsetneqq \beta = \operatorname{dom} g_\beta$, logo $g_\alpha \subsetneqq g_\beta$, ou seja

$$\mathrm{dom}\ \breve{g}_\alpha \neq \mathrm{dom}\ \breve{g}_\beta .$$

(4') A classe A dos ordinais α tais que $z \notin \mathrm{dom}\,\breve{g}_\alpha$ forma um conjunto.

Seja $G(X,\alpha\,;\,f,z)$ a seguinte fórmula:

$$G(X,\alpha) \equiv X = \mathrm{dom}\ \breve{g}_\alpha .$$

Mostremos que para todo $X \subseteq z$ existe no máximo um α tal que $G(X,\alpha)$. Se tivermos $X \subseteq z \wedge G(X,\alpha) \wedge G(X,\beta)$, concluimos que $z \notin \mathrm{dom}\ \breve{g}_\alpha$ pois $z \notin z$. Logo,

$$z \notin \mathrm{dom}\ \breve{g}_\alpha \cup \mathrm{dom}\ \breve{g}_\beta .$$

De (3') e da igualdade $\mathrm{dom}\,\breve{g}_\alpha = \mathrm{dom}\,\breve{g}_\beta$ segue que $\alpha = \beta$.

Utilizando-se o Esquema de Substituição no caso especial de se ter a fórmula $G(X,\alpha)$ e sendo $\mathcal{P}_z$ o conjunto do qual se substituem elementos, conclui-se que

$$A = \{\alpha : \exists X(X \subseteq z \wedge G(X,\alpha))\} \in V.$$

(5') $\forall \gamma\ (\gamma = \bigcup A \longrightarrow z \notin \mathrm{dom}\ \breve{g}_\gamma)$.

Sabemos que a reunião de um conjunto de ordinais é o supremo dos ordinais dêste conjunto e é portanto um ordinal. Estamos chamando de γ à reunião de A.

Suponhamos que $z \in \mathrm{dom}\,\breve{g}_\gamma$. Então existe $\alpha \in \gamma$ tal que $g_\gamma`\alpha = z$. Mas se $\alpha \in \gamma$, existe $\beta$ tal que $\alpha \in \beta \in A$ e $\beta \subseteq \gamma$. De (2) segue que $g_\beta \subseteq g_\gamma$ e portanto $g_\beta`\alpha = g_\gamma`\alpha = z$, ou seja $z \in \mathrm{dom}\ \breve{g}_\beta$. Mas isto contradiz o fato de β pertencer a A, pois

$$(\beta \in A \leftrightarrow z \notin \operatorname{dom} \breve{g}_\beta).$$

(6') $\operatorname{dom} \breve{g}_\gamma = z.$

A partir de (5'), sabemos que $\gamma \in A$. Mas sendo γ o supremo dos ordinais de A, segue que $\gamma+1 \notin A$ e portanto $z \in \operatorname{dom} \breve{g}_{\gamma+1}$. Como $g_\gamma \subseteq g_{\gamma+1}$, $z \notin \operatorname{dom} \breve{g}_{\gamma+1}$ e $\operatorname{dom} g_{\gamma+1} - \operatorname{dom} g_\gamma = \{\gamma\}$, concluimos que $g_{\gamma+1}\gamma = z$. Como se tem $F(g_{\gamma+1} \upharpoonright \gamma, g_{\gamma+1}\gamma)$ e portanto $F(g_{\gamma+1} \upharpoonright \gamma; z)$, conclui-se da definição de F que $z - \operatorname{dom} \breve{g}_{\gamma+1} \upharpoonright \gamma = 0$. Mas $\operatorname{dom} \breve{g}_{\gamma+1} \upharpoonright \gamma = \operatorname{dom} \breve{g}_\gamma$, i.e. $z - \operatorname{dom} \breve{g}_\gamma = 0$, ou seja $z \subseteq \operatorname{dom} \breve{g}_\gamma$.

Para finalizar, mostremos que $\operatorname{dom} \breve{g}_\gamma \subseteq z$. Sabemos que $\operatorname{dom} \breve{g}_\gamma \subseteq z \cup \{z\}$. Pela (5), $z \notin \operatorname{dom} \breve{g}_\gamma$, portanto $\operatorname{dom} \breve{g}_\gamma \subseteq z$. Tem-se então que $z = \operatorname{dom} \breve{g}_\gamma$.

Estamos em posição de mostrar que z pode ser bem ordenado. De (1') e (5') temos que g_γ é injetora. De (6') concluimos que seu contradomínio é z. Logo, como $\operatorname{dom} g_\gamma = \gamma$, teremos que g_γ é uma bijeção de γ sôbre z e portanto $BO(z) \neq 0$.

QED

Isto finaliza a demonstração do teorema

$$ZF + AF \vdash BO = V.$$

Passaremos agora a demonstrar o último Teorema desta tese que é o seguinte:

<u>Teorema 5.10</u>: $ZF + BO = OT \vdash BO = V.$

<u>Demonstração</u>: É suficiente mostrar que

$$\forall \alpha (BO(R_\alpha) \neq 0).$$

Isto será feito pelo Princípio de Indução Transfinita; suponhamos então que

(11) $\forall \beta \; (\beta \in \alpha \rightarrow BO(R_\beta) \neq 0)$.

O que desejamos demonstrar como consequência de (11) é que $BO(R_\alpha) \neq 0$. Antes de mais nada, algumas definições:

Definição 5.11: Seja W uma boa ordem sôbre x. Pela restrição de W a y nós estamos, naturalmente designando a intersecção $W \cap (y \times y)$. A notação de que faremos uso para denotar êste conjunto é $W \upharpoonright y$.

É claro que

(12) $\forall W, x, y (W \in BO(x) \rightarrow W \upharpoonright y \in BO(y \cap x))$.

(13) $\forall W, x, y (W \in BO(x) \wedge y \subseteq x \rightarrow W \upharpoonright y \;\; BO(y))$.

Definição 5.12: Seja β um ordinal e W uma boa ordem sôbre R_β. Diremos que W é uma boa ordem crescente se

$$\forall \xi, \eta \in \beta \; \forall u, v \; (u \in R_\xi \wedge v \in R_\eta - R_\xi \rightarrow uWv).$$

As seguintes afirmações são consequências imediatas das definições:

(14) $\forall \beta \; (BO(R_\beta) \neq 0 \leftrightarrow \exists W (W \in BO(R_\beta) \wedge W$ é crescente$))$.

(15) $\forall \beta, W_1, W_2 (W_1, W_2 \in BO(R_\beta) \wedge W_1, W_2$ crescente $\wedge$

$$W_1 \neq W_2 \rightarrow \exists ! \, \xi \, (\xi \in \beta \wedge W_1 \upharpoonright \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta =$$

$$= W_2 \upharpoonright \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta \wedge W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta \neq W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta)).$$

No caso de termos duas boas ordens distintas e crescentes W_1 e W_2 sôbre R_β, denotaremos por

$$i(W_1,W_2) = \iota_\xi \left(\xi \in \alpha \wedge W_1 \upharpoonright \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta = W_1 \upharpoonright \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta \wedge \right.$$
$$\left. W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta \neq W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta \right).$$

<u>Definição 5.13</u>: Seja β um elemento arbitrário de α (o mesmo ordinal fixado e satisfazendo à fórmula (11)). Definimos Σ_β como sendo o conjunto tal que

$$\Sigma_\beta = \Big\{ \langle W_1,W_2\rangle : W_1,W_2 \in BO(R_\beta) \wedge W_1,W_2 \text{ crescentes} \wedge$$
$$W_1 \neq W_2 \wedge \exists\xi \Big(\xi = i(W_1,W_2) \wedge \langle W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta,$$
$$W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta \rangle \in \Phi_3 \Phi_2 (W_1 \upharpoonright \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta)\Big)\Big\} .$$

<u>Explanação</u>: Se W_1 e W_2 são boas ordens crescentes distintas de R_β, segue de (15) que existe um único ξ $(= i(W_1,W_2))$ tal que as restrições de W_1 e W_2 a $\bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta$ coincidem, mas as restrições das mesmas a $\wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta$ são distintas. Seja

$$W = W_1 \upharpoonright \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta = W_2 \upharpoonright \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta .$$

W é então uma boa ordem. Por (2), $\Phi_2 W \in OT(\wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta)$ e por (3), $\Phi_3 \Phi_2 W \in OT(BO(\wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta))$. Como

$$W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta \neq W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta$$

e pertencem a $BO(\wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta)$, estas restrições são $\Phi_3 \Phi_2 W$ - comparáveis. Em Σ_β colocaremos o par

$<W_1, W_2>$ na mesma ordem que as respectivas restrições a $\wp \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta$ aparecem em $\Phi_3 \Phi_2 W$.

Lema 5.14:

$$\forall \beta (\beta \in \alpha \rightarrow \Sigma_\beta \in OT (\{W: W \in BO(R_\beta) \wedge W \text{ crescente}\})).$$

Demonstração: Verificaremos as quatro condições de ordem total:

(a) $\neg <W,W> \in \Sigma_\beta$.

Por definição de Σ_β.

(b) $\neg (<W_1,W_2>, <W_2,W_1> \in \Sigma_\beta)$.

Com efeito, se $<W_1,W_2>$ e $<W_2,W_1> \in \Sigma_\beta$, W_1 e W_2 são distintos.

Seja $\xi = i(W_1,W_2) = i(W_2,W_1)$ e

$$W = W_1 \upharpoonright \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta = W_2 \upharpoonright \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta .$$

Como $<W_1,W_2> \in \Sigma_\beta$, tem-se

$$<W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta, \ W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta> \in \Phi_3 \Phi_2 W.$$

Como $<W_2,W_1> \in \Sigma_\beta$, tem-se

$$<W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta, \ W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta \in \xi} R_\eta> \in \Phi_3 \Phi_2 W.$$

Concluimos que $\Phi_3 \Phi_2 W$ não é uma ordem total o que é uma contradição.

(c) $<W_1,W_2>$, $<W_2,W_3> \in \Sigma_\beta \rightarrow <W_1,W_3> \in \Sigma_\beta$.

Sejam ξ e η os ordinais respectivamente iguais a $i(W_1,W_2)$ e $i(W_2,W_3)$. Então é claro que $i(W_1,W_3)$ é igual ao menor dêles. Examinemos as possibilidades seguintes:

(i) $\xi = \eta$.

Das hipóteses e da definição de Σ_β tem-se que

$$<W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}}, W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}}> , <W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}}, W_3 \upharpoonright \wp \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}}> \in \Phi_3 \Phi_2 (W_1 \upharpoonright \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}}).$$

Mas $\Phi_3 \Phi_2 (W_1 \upharpoonright \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}})$ é uma ordem total e $i(W_1,W_3) = \xi$; segue portanto que

$$<W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}}, W_3 \upharpoonright \wp \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}}> \in \Phi_3 \Phi_2 (W_1 \upharpoonright \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}})$$

o que quer dizer que $<W_1,W_3> \in \Sigma_\beta$.

(ii) $\xi \in \eta$.

Neste caso, teremos $i(W_1,W_3) = \xi$ e

$$<W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}}, W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}}> \in \Phi_3 \Phi_2 (W_1 \upharpoonright \bigcup_{\mathfrak{J}\in\xi} R_{\mathfrak{J}}).$$

Mas

$$W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\gamma\in\xi} R_\gamma \subseteq W_2 \upharpoonright R_\xi \subseteq W_2 \upharpoonright \bigcup_{\gamma\in\eta} R_\gamma =$$

$$= W_3 \upharpoonright \bigcup_{\gamma\in\xi} R_\gamma .$$

Logo,

$$W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\gamma\in\xi} R_\gamma = W_3 \upharpoonright \wp \bigcup_{\gamma\in\xi} R_\gamma .$$

Por substituição direta na fórmula acima, obtém-se

$$< W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\gamma\in\xi} R_\gamma ,\ W_3 \upharpoonright \wp \bigcup_{\gamma\in\xi} R_\gamma > \in \Phi_3 \Phi_2 (W_1 \upharpoonright \bigcup_{\gamma\in\xi} R_\gamma),$$

o que implica $< W_1, W_3 >$ em $\sum_\beta$.

(iii) $\eta \in \xi$.

A demonstração é simétrica de (ii) e será omitida. De (i) - (iii) concluimos (c).

(d) $W_1, W_2 \in BO(R_\beta), \wedge\ W_1 \neq W_2 \wedge W_1, W_2$ crescente $\rightarrow$

$$(< W_1, W_2 > \in \sum_\beta \vee < W_2, W_1 > \in \sum_\beta).$$

De fato, sejam dadas W_1 e W_2 satisfazendo as condições de (d). Seja

$$\xi = \Delta(W_1, W_2) \quad e \quad W = W_1 \upharpoonright \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta .$$

Como $\Phi_3 \Phi_2 W$ é uma ordem total, os elementos

$$W_1 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta \quad e \quad W_2 \upharpoonright \wp \bigcup_{\eta\in\xi} R_\eta$$

são $\Phi_3 \Phi_2$ W - comparáveis. Logo, por definição de Σ_β, W_1 e W_2 são Σ_β - comparáveis.

Provamos por (a) - (d) que Σ_β é uma ordem total.

<u>Definição 5.15</u>: No que segue, iremos fixar f e G como sendo as seguintes funções:

$$f = \{ <\beta, \mathfrak{U}_\beta> : \beta \in \alpha \wedge \mathfrak{U}_\beta = \{W : W \in BO(R_\beta) \wedge W \text{ crescente}\}\}.$$

$$G = \{ <\beta, \Sigma_\beta> : \beta \in \alpha \}.$$

Por (11) e (14) temos

(16) $\forall \beta (\beta \in \alpha \rightarrow f`\beta \neq 0)$.

(17) $\forall \beta (\beta \in \alpha \rightarrow G`\beta \in OT(f`\beta))$.

De (16), (17) e (5) tira-se que

(18) $\Phi_5 G \in OT(\bigcup f^* \alpha)$.

Isto quer dizer que o conjunto

$\{W : \exists \beta (\beta \in \alpha \wedge W \in BO(R_\beta) \wedge W$ é crescente$)\}$ pode ser totalmente ordenado. Como BO = = OT, êste conjunto pode ser bem ordenado e seja $\mathcal{W}$ uma boa ordem de $\bigcup f^* \alpha$.

Sendo $\beta \in \alpha$ denotemos por W_β o elemento w-minimal de $f^{\bullet}\beta$ (que existe pois $f^{\bullet}\beta \neq 0$). A aplicação g, definida por

$$g = \{ < \beta , W_\beta > : \beta \in \alpha \}$$

escolhe para cada $\beta \in \alpha$ uma boa ordem de R_β. Concluimos por (5) que

$$\Phi_5 g \in BO(\bigcup_{\beta \in \alpha} R_\beta)$$

e de (2) vem que

$$\Phi_2 \Phi_5 g \in OT(\wp \bigcup_{\beta \in \alpha} R_\beta),$$

i.e. $\wp \bigcup_{\beta \in \alpha} R_\beta$ pode ser totalmente ordenado. Novamente, como $BO = OT$, $\wp \bigcup_{\beta \in \alpha} R_\beta$ admite uma boa ordem que poderemos denotar por W.

Por (4), concluímos que

$$\Phi_4(\Phi_5 g, W) \in BO(\bigcup_{\beta \in \alpha} R_\beta \cup \wp \bigcup_{\beta \in \alpha} R_\beta) =$$

$$= BO(R_\alpha).$$

Isto quer dizer que $BO(R_\alpha) \neq 0$.

QED

BIBLIOGRAFIA

[1] Cohen, Paul J.

Set Theory and the Continuum Hypothesis, New York, 1966, 154 pp.

[2] Church, Alonzo

Introduction to Mathematical Logic, vol. 1, Princeton, 1956, x + 378 pp.

[3] Farah, Edison

Remarques sur la système de Zermelo-Fraenkel, C.R. Acad. Sc.Paris, vol. 266 (1968) pp.1217-1219.

[4] Farah, Edison

Une nouvelle forme de l'axiome de substitution du systeme de Zermelo-Fraenkel, C.R. Acad. Sc. Paris, vol. 270 (1970) pp.845-847.

[5] Farah, Edison

A new definition of ordinal number, Boletim da Sociedade de Matemática de S.Paulo, vol.12 (1957) pp. 63-69.

[6] Gödel, Kurt

The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, quarta edição, Princeton, 1958, 69 pp.

[7] Kelley, John L.

General Topology, Princeton, 1955, xiv + 298 pp.

[8] Lévy, Azriel

<u>Axioms of multiple choice</u>, Fund. Math., vol. 50 (1962) pp. 475-483.

[9] Quine, Willard v. O.

<u>New foundations for mathematical logic</u>, Amer. Math. Monthly, vol. 44 (1937) pp. 70-80.

[10] Rosser, J. Barkley

<u>Logic for mathematicians</u>, New York - Toronto - London, 1953, xiv + 530 pp.

[11] Specker, Ernest

<u>The axiom of choice in Quine's New foundations for mathematical logic</u>, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 39 (1953), pp. 972-975.

APÊNDICE I

Nos sistemas de Teoria dos Conjuntos do tipo de Bernays-Gödel (Cf.[6]), pode-se formular o Teorema da Boa Ordem de "modo global" ou de "modo local" (e, em conseqüência, há as formulações equivalentes do Axioma da Escolha).

<u>Formulação local</u>: Todo conjunto é bem ordenável.

<u>Formulação global</u>: A classe universal é bem ordenável.

Sabe-se que a segunda formulação é estritamente mais forte do que a primeira.

Nosso resultado sôbre a equivalência entre AE e BO = OT, no sistema ZF, vale também para o sistema de Bernays-Gödel sem escolha; é verdadeira, pois, a proposição:

<u>Teorema 1</u>: No sistema de Bernays-Godel, sem o Axioma E, tem-se

$$V = BO \longleftrightarrow BO = OT.$$

De maneira semelhante, existe uma formulação local evidente de $Z(\infty)$ no sistema de Gödel-Bernays e pode-se provar o

<u>Teorema 2</u>: No sistema de Gödel-Bernays, sem o Axioma E, a formulação local de $Z(\infty)$ é equivalente à formulação local do Axioma da Escolha.

<u>Observação 1</u>: Os resultados precedentes, rela-

tiva a ZF e ao sistema de Gödel-Bernays (sem o Axioma E), permanecem válidos mesmo que se admita a existência de átomos, desde que se formule de modo apropriado o Axioma da Regularidade.

Vários problemas originados pela nossa tese, permanecem abertos. Citaremos, a seguir, os que nos parecem mais importantes.

<u>Problema 1</u>: No sistema de Gödel-Bernays (sem escolha), é válida a equivalência entre "V é bem ordenável" e "Se uma classe fôr linearmente ordenável, então ela é bem ordenável"?

<u>Problema 2</u>: A equivalencia entre as proposições acima é verdadeira no sistema de Kelley-Morse (Cf. [7], apêndice), sem o Axioma da Escolha?

<u>Problema 3</u>: BO = OT é consistente com os postulados de NF de Quine (ver [9] e [10])? (Em caso positivo, não seria equivalente ao Axioma da Escolha, tendo-se em vista um resultado de Specker [11] ?)

<u>Problema 4</u>: Em ZF é válida a implicação BO = = OT → AR? (Questão análoga pode-se propor para sistemas do tipo de Bernays-Gödel).

<u>Observação 2</u>: Problemas como os precedentes podem ser formulados com referência a certos sistemas fortes de teoria dos conjuntos, como os propostos por Newton C.A. da Costa, para servirem de base à Teoria das Categorias (ver, por exemplo, os seguintes trabalhos desse autor: <u>On two systems of set theory</u> Proc. Koninkl. Ned. Ak. Wetenschappen, A 68, Nº 1, pp. 95-99

(1965), *Un nouveau système formel suggéré par Dedecker*, C.R. Acad. Sc. Paris, *A 265*, pp. 85-88 (1967) e *On a set theory suggested by Dedecker and Ehresmann*, Proc. Japan Academy, 45, Nº 10, pp. 880-888 (1969)).

APÊNDICE II

Neste Apêndice resumimos alguns resultados obtidos por nós e pelo Professor Newton C.A. da Costa, e que tencionamos desenvolver e publicar futuramente.

Seja $\overline{ZF}$ o sistema de teoria dos conjuntos do livro de Cohen ([1]); $\overline{ZF}$ é equivalente a nosso sistema ZF com o Axioma da Escolha. $\overline{ZF}^*$ denota $\overline{ZF}$ sem o Axioma da Regularidade.

Em $\overline{ZF}^*$, um conjunto x denomina-se extraordinário se houver uma sequência infinita $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, tal que $x_1 \in x$, $x_2 \in x_1$, $x_3 \in x_2, \ldots$ Sabe-se que, no sistema em aprêço, o Axioma da Regularidade é equivalente à inexistência de conjuntos extraordinários.

Um conjunto x tal que $x = \{x\}$, chama-se um <u>indivíduo de Quine</u>. Evidentemente, todo indivíduo de Quine é um conjunto extraordinário.

<u>Teorema 1</u>: Se $\overline{ZF}$ fôr consistente,

$$\overline{ZF}^* + \exists x(x = \{x\})$$

também é consistente.

<u>Demonstração (esbôço)</u>: Seja M um modêlo de $\overline{ZF}$. A partir de M vamos construir um modêlo M' com as seguintes propriedades: (1) Universo de M $\supseteq$ Universo de M'; (2) $\in_M \neq \in_{M'}$, ou seja, mudamos a relação de pertinência; (3) $M' \models \overline{ZF}^* + \exists x(x = \{x\})$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que M é um modêlo <u>standard</u>:

$$\text{Universo de } M \subseteq V \wedge \forall x, y \in \text{Universo de } M(x \in_M y \longleftrightarrow x \in y).$$

Nestas condições, ω é absoluto:

$$\omega \subseteq \text{Universo de } M \quad \text{e} \quad \omega_M = \omega \in M.$$

Em ω podemos definir a seguinte relação $\in'$: (1) $\forall x \in \omega\ (\neg\, x \in' 1)$; (2) $\forall x \in \omega\ (x \in' 0 \leftrightarrow x = 0)$; (3) $\forall x \in \omega\ (x > 1 \rightarrow \forall y \in \omega\ (y \in' x \leftrightarrow y$ é elemento da expansão diádica de x)).

(<u>Nota</u>: A expansão diádica de x, $x \in \omega$, é definida da seguinte forma:

$$x = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_r},$$

onde

$$\nu_1 > \nu_2 > \nu_2 > \ldots > \nu_r \geq 0.$$

Então, os elementos da expansão diádica de x são

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r.)$$

Se x fôr um conjunto qualquer, denotaremos por $\wp^*(x)$ o seguinte conjunto:

$$\wp(x) = \{y : y \subseteq x \wedge y \text{ é de posto (rank) finito}\}.$$

Façamos: $S_0 = \omega$ e $S_\alpha = \wp^*(\bigcup_{\beta\in} S_\beta)$, onde α e β designam ordinais. Se

$$M' = \bigcup_{\substack{\alpha \in OR \\ \alpha \in M}} S_\alpha,$$

podemos definir $\in_{M'}$ da seguinte maneira: se $y \in \omega$, então $x \in_{M'} y \underset{\text{def}}{\equiv} x \in \omega \wedge x \in' y$; se $y \notin \omega$, então $x \in_{M'} y \underset{\text{def}}{\equiv} x \notin \omega \wedge x \in M' \wedge x \in y$.

Prova-se, então, que $\langle M', \in_{M'} \rangle$ ou, simplesmente (cometendo-se um abuso de linguagem), M' é um modelo de $\overline{ZF}^* + \exists x$ (x é indivíduo de Quine).

Teorema 2: Se $\overline{ZF}$ fôr consistente, então $\overline{ZF}^*$ + "Existe um conjunto finito de indivíduos de Quine" também é consistente.

Teorema 3: Se $\overline{ZF}$ fôr consistente, então não se pode demonstrar a existência do conjunto vazio em nosso sistema ZF + AE, sem o Axioma da Regularidade.

Demonstração (esbôço): De fato, pelo Teorema 1, se $\overline{ZF}$ fôr consistente, $\overline{ZF}^* + \exists x$ (x é um indivíduo de Quine) também o será. Neste último, definamos: $S_0 = \{x\}$ e $S_\alpha = \mathfrak{p}^-(\bigcup_{\beta\in\alpha} S_\beta)$, onde x é um indivíduo de Quine e $\mathfrak{p}^-(t)$ denota o conjunto das partes não vazias de t. A partir de S_α, fàcilmente se pode construir um modêlo de ZF + AE sem regularidade, no qual não há conjunto vazio, ou seja, no qual se tem: $\forall x \exists y (y \in x)$.

Teorema 4: O sistema ZF + AE (AE convenientemente formulado), sem o Axioma da Regularidade, possui um modêlo finito.

Demonstração (esbôço). Com efeito, o modêlo do teorema precedente é finito.

É interessante observar que ZF + AE, sem o Axioma da Regularidade, encerra o Axioma do Infinito...; não obstante, possui modêlo finito. É claro que o fato se explica pelas propriedades, um tanto surpreendentes, à primeira vista, dos conjuntos extraordinários.

O teorema precedente evidencia, por outro lado, o papel relevante do Axioma da Regularidade na demonstração da existência do vazio em ZF: sem esse axioma, não se pode fazer tal demonstração.

Teorema 5: A negação do Axioma da Regularidade é compatível com os axiomas de $\overline{ZF}^*$, se êste último fôr consistente.

Demonstração: Se $\overline{ZF}^*$ fôr consistente, então $\overline{ZF}$ também é (Von Neumann); logo, pelo teorema 1,

$$\overline{ZF}^* + \exists x \, (x = \{x\})$$

é consistente. Ora, como o postulado $\exists x \, (x = \{x\})$ acarreta, em $\overline{ZF}^*$, a negação do Axioma da Regularidade, segue-se que $\overline{ZF}^* + \neg AR$ é consistente. (O presente teorema foi demonstrado, por outro método, por Bernays).

Corolário: O Axioma da Regularidade é independente dos outros postulados de $\overline{ZF}$.

Um conjunto extraordinário x diz-se normal se não existem x_o, $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 0$, tais que

$$x_o \in x, \; x_1 \in x_o, \; x_2 \in x_1, \ldots, \; x_n \in x_{n-1} \quad e \quad \emptyset = x_n.$$

Teorema 6: Em $\overline{ZF}^*$ vale a implicação:

$\exists x$ (x é um conjunto extraordinário) $\rightarrow$ $\exists x$ (x é um conjunto extraordinário normal).

As considerações anteriores sugerem vários problemas. Por exemplo:

Problema 1: Se acrescentarmos a $\overline{ZF}^*$ o postulado

$\exists x \forall y$ ($y \in x \rightarrow y$ é um conjunto extraordinário normal), o novo sistema, assim obtido, será não contraditório, se $\overline{ZF}^*$ o fôr?

<u>Problema 2</u>: O sistema ZF + AE, descrito nesta tese, sem o Axioma da Regularidade, possui, aparentemente, um modêlo intuitivo (informal), no qual só existem conjuntos extraordinários. Poder-se-ia introduzir um postulado que exprimisse que o nôvo sistema possui modêlo infinito, composto sòmente por conjuntos extraordinários normais?

É claro que os resultados dêste apêndice convenientemente adaptados, valem para outras axiomáticas da teoria de conjuntos, como, por exemplo, a de Godel-Bernays ([6]).