SOBRE OS MÓDULOS TOPOLÓGICOS

Alfredo Jorge Aragona Vallejo

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Chaim Samuel Hönig

São Paulo, 1973

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do B.N.D.E., contratos FUNTEC nº100 e nº154.

ÍNDICE

PREFÁCIO I
ÍNDICE DE SÍMBOLOS III
CAPÍTULO 1. AS CONSTRUÇÕES FUNDAMENTAIS NA CATEGORIA DOS MÓDULOS TOPOLÓGICOS
1.1. Definição de um módulo topológico 1
1.2. Submódulos, componentes conexas, submódulos densos e submódulos abertos 6
1.3. Produtos e topologias iniciais 9
1.4. Topologias finais, soma direta e quociente nos módulos topológicos 14
1.5. Módulo topológico livre sobre um conjunto 24
CAPÍTULO 2. CONJUNTOS EQUILIBRADOS, CONVEXOS E LIMITADOS. MÓDULOS LOCALMENTE LIMITADOS
2.1. Conjuntos equilibrados 30
2.2. Conjuntos convexos e conjuntos estrelados 35
2.3. Convexidade nos módulos topológicos 39
2.4. Conjuntos limitados. Módulos localmente limitados 43
CAPÍTULO 3. APLICAÇÕES LINEARES CONTÍNUAS
3.1. O A-módulo topológico $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ 47
3.2. Condição para que $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ seja separado 50
3.3. Condição para que $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ seja J-localmente convexo .. 51
3.4. Partes limitadas de $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ 52
3.5. Partes equicontínuas de $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ 51
3.6. Alguns isomorfismos canônicos 55
3.7. Extensão de aplicações lineares contínuas 58
3.8. Endomorfismos contínuos de um A-módulo localmente limitado 67
CAPÍTULO 4. DUALIDADE SOBRE UM ANEL UNITÁRIO COMUTATIVO LOCALMENTE COMPACTO
4.1. O dual de um módulo topológico 69
4.2. Dual de uma soma direta. Aplicação transposta e dual de um quociente 71
4.3. A dualidade nos módulos localmente compactos 72
4.4. Existência de A-caracteres 81

CAPÍTULO 5. APLICAÇÕES CONTÍNUAS EM UM MÓDULO TOPOLÓGICO

5.1. Estruturas algébrica e topológica 84
5.2. Funções de C(T,Y) que se anulam sobre um subconjunto de T 87
5.3. Aplicações contínuas e soma direta finita 89
5.4. A estrutura de $C_{\mathfrak{S}}(T,A)$-módulo topológico de $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$.. 90
5.5. O princípio da limitação uniforme 92

PREFÁCIO

A origem deste trabalho é o estudo proposto a mim e ao Prof. Roberto Costa, pelos Profs.J.P. Lafon e A. Micali das álgebras tensorial, simétrica e exterior de módulos linearmente topologizados. Desde então, vários trabalhos sobre o assunto foram publicados. De outro lado, o estudo aqui apresentado está longe destas idéias. De fato, fui muito rapidamente levado a considerar problemas de álgebra linear com topologias quaisquer e a descobrir que não existia praticamente bibliografia sobre os módulos topológicos. O presente trabalho começa com módulos topológicos sem se deter no estudo dos anéis topológicos por já existir uma extensa bibliografia sobre este tema, por exemplo [K_1] , [K_2] , [K_3] , [K_4] , [S] , [W_1] , [W_2] , [W_3] , [W_4] e [W_5] entre muitos outros. A maior parte do conteúdo dos Capítulos 1, 2 e 3 são generalizações bastante simples de construções análogas nas categorias dos EVT, grupos abelianos topológicos e módulos. Muitas questões não foram abordadas, entre estas são dignas de destaque: (a) Estudo de epimorfismos, monomorfismos, núcleos, imagens, etc. na categoria dos módulos topológicos; (b) Módulos metrizáveis e normados; (c) Álgebra multilinear topológica - este problema é tratado em parte no Cap. 4 de [Co] . Sobre outras questões naturais, como o Cálculo Diferencial e a Cohomologia, consegui esboços rudimentares de teorias que, por falta total de motivação, ficaram reduzidos a meros desenvolvimentos formais, incompletos e sem objetivo visível, razão pela qual não foram incluídos aqui.

Na redação deste trabalho tentei achar um ponto de equilíbrio entre as duas tendências opostas seguintes: (1º) Não demonstrar, nem definir nada que estivesse demonstrado e definido na literatura; (2º) Demonstrar e definir tudo de novo. O resultado foi uma certa dualidade de critério, por exemplo, é inútil definir produto, soma direta, limites indutivos e projetivos de módulos topológicos já que estes conceitos são definidos nas categorias gerais, por isto o fiz apenas nos casos mais utilizados que são a soma direta e o produto.

Grande parte do presente trabalho aproveita os resultados apresentados em [A_1] , porém esta nova redação é bem mais completa em vários aspectos, sendo o mais destacável o Cap. 4, que é inteiramente constituído de resultados que desconhecia quando da publicação de

[A_1] e [A_2]. Neste Cap. 4 dou uma definição de dualidade para módulos topológicos, sobre um anel unitário comutativo localmente compacto e são demonstrados os dois resultados mais interessantes deste trabalho: o teorema de dualidade de Pontrjaguim para módulos localmente compactos e o principal resultado de [CR] para módulos separados. Uma outra inovação em relação a [A_1] é o Cap. 2, onde são definidos conjuntos equilibrados e conjuntos convexos. O Cap. 1 apresenta poucas novidades em relação a [A_1]; apenas os resultados básicos sobre quocientes na categoria dos módulos topológicos e, por razões de completicidade, vários resultados iniciais que são generalizações triviais de resultados bem conhecidos na teoria elementar dos grupos topológicos. Os Cap. 3 e 5 estão basicamente contidos em [A_1] com a única exceção do último § do Cap. 5 (o princípio da limitação uniforme).

Seria impossível agradecer aqui todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuiram para minha formação durante os meus estudos de bacharelado e de mestrado no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, sem se cair em injustos esquecimentos. De qualquer forma quero agradecer muito especialmente as seguintes pessoas:

Aos Profs. Cândido L.S. Dias, Waldyr M. Oliva e Carlos B. de Lyra por haverem indicado em várias oportunidades a melhor direção a seguir nos meus estudos.

Ao Prof. Chaim S. Hönig pelos ensinamentos, por ter lido o manuscrito e pela oportunidade que me deu de expor parte deste trabalho no seu seminário de Análise Funcional.

À Profa. D. Elza F. Gomide em quem sempre encontrei incentivo e apoio.

Ao Prof. Artibano Micali pela sua grande e amistosa dedicação, por ter sugerido o problema que deu origem a este trabalho e ainda por ser a ele a quem devo a possibilidade de estudar Matemática.

Ao Prof. Roberto C.F. Costa que passou um tempo considerável a discutir comigo idéias por vezes confusas, contribuindo muito no seu esclarecimento e por haver, na fase final de redação, lido esta dissertação eliminando alguns erros de redação.

Devo por fim agradecer à minha esposa pelo estímulo e auxílio constante que sempre me deu e por haver realizado o duro labor de datilografia.

São Paulo, outubro de 1973.

A.J.A.V.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

$U(A)$ é o conjunto dos elementos inversíveis do anel unitário A (pg. 1).

$[M]$ é o submódulo do A-módulo X gerado por $M \subset X$ (pg. 1).

$\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ é o conjunto das aplicações A-lineares do A-módulo X no A-módulo Y.

$L_A(X,Y)$ é o conjunto das aplicações A-lineares contínuas do A-módulo topológico X no A-módulo topológico Y (pg. 5).

s_X é a aplicação (sendo X um A-módulo) de $X \times X$ em X definida por $(x,y) \mapsto x + y$ (pg. 5).

$\bar{s}_X$ é a aplicação (sendo X um A-módulo) de $X \times X$ em X definida por $(x,y) \mapsto x - y$ (pg. 5).

p_X é a aplicação (sendo X um A-módulo) de $A \times X$ em X definida por $(\lambda,x) \mapsto \lambda.x$ (pg. 5).

$\langle M \rangle$ ver pg. 9.

$\tilde{\prod}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é o módulo topológico produto da família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de módulos topológicos (pg. 10).

$\tilde{X}^\Lambda$ é $\tilde{\prod}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ no caso particular $X_\lambda = X$ para todo $\lambda \in \Lambda$ (pg. 10).

$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é o produto da família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de módulos.

$\tilde{\bigoplus}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é o módulo topológico soma direta da família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de módulos topológicos (pg. 17).

$\tilde{X}^{(\Lambda)}$ é $\tilde{\bigoplus}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ no caso particular $X_\lambda = X$ para todo $\lambda \in \Lambda$ (pg. 17).

$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é a soma direta da família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de módulos.

$\mathbf{N}$ é o conjunto dos números inteiros.

$\mathbf{Z}$ é o anel dos números inteiros.

$\mathbf{Q}$ é o corpo dos números racionais.

$\mathbf{R}$ é o corpo dos números reais.

$\mathbf{C}$ é o corpo dos números complexos.

$J[x,y]$ é o J-segmento de extremos x e y (pg. 35).

$\mathbb{B}_X$ é o conjunto de todas as partes limitadas de um A-módulo topológico X (pg. 44).

$\mathbb{K}_X$ é o conjunto de todas as partes compactas de um A-módulo topológico X (pg. 50).

$\mathbb{F}_X$ é o conjunto de todas as partes finitas de um A-módulo topológico X (pg. 44).

$\mathcal{F}(X,Y)$ ou Y^X é o conjunto de todas as aplicações de X em Y.

$\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ ver pg. 48.

$\Gamma_c(B,V)$ ver pg. 47.

$L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ é $L_A(X,Y)$ munido da $\mathfrak{S}$-topologia (pg. 49).

$\Gamma(B,V)$ ver pg. 49.

$\mathcal{V}_X$, $\mathcal{V}^L_X$, $\mathcal{V}^F_X$ ver pg. 51.

<u>Top</u> é a categoria cujos objetos são os espaços topológicos e cujos morfismos são as funções contínuas.

$\underline{\mathrm{Mod}}_A$ é a categoria cujos objetos são os A-módulos e cujos morfismos são as aplicações A-lineares.

$\underline{\mathrm{Mod\ Top}}_A$ ver pg. 5.

<u>GALC</u> (ou $\underline{\mathrm{MLC}}_{\mathbb{Z}}$) e $\underline{\mathrm{MLC}}_{(\mathbb{Z})}$ ver pg. 66.

$\underline{\mathrm{MLC}}_A$ ver pg. 66.

G^*, A^* ver pg. 69.

$H^o[X,A^*]$ ou H^o é o anulador de H (pg. 70).

$X^\bullet$, $X^\bullet_{\mathfrak{S}}$ ver pg. 70.

$\nabla(S,V)$ ver pg. 85.

$C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$ ver pg. 85.

$C_S(T,Y)$ ou C_S ver pg. 87.

$Z(f)$ ver pg. 87.

CAPITULO 1

AS CONSTRUÇÕES FUNDAMENTAIS NA CATEGORIA DOS MODULOS TOPOLOGICOS.

1.1. Definição de um módulo topológico.

As definições de anel unitário e módulo adotadas aqui são respectivamente as de $[B_1]$ e $[B_2]$. Se A é um anel unitário, X é um A-módulo e M é um subconjunto qualquer de X, indicaremos por U(A) o grupo multiplicativo dos elementos inversíveis de A e por $[M]$ o submódulo de X gerado por M.

Definição 1.1.1. Chama-se anel topológico um conjunto A munido de uma estrutura de anel e de uma topologia satisfazendo os axiomas seguintes:

(AT_I) A aplicação $(x,y) \mapsto x - y$ de $A \times A$ em A é contínua.

(AT_{II}) A aplicação $(x,y) \mapsto xy$ de $A \times A$ em A é contínua.

Diz-se que uma estrutura de anel e uma topologia sobre um conjunto A são compatíveis se elas satisfazem os axiomas (AT_I) e (AT_{II}). O axioma (AT_{II})(levando em consideração (AT_I)) é equivalente aos dois seguintes:

(AT_{IIa}) Para todo $a \in A$, as aplicações $x \mapsto ax$ e $x \mapsto xa$ de A em A são contínuas no ponto $x = 0$.

(AT_{IIb}) A aplicação $(x,y) \mapsto xy$ de $A \times A$ em A é contínua no ponto $(0,0)$.

A justificação deste fato é o seguinte:

Lema 1.1.2. Sejam E, F e G três grupos abelianos topológicos e $b : E \times F \to G$ uma aplicação $\mathbb{Z}$-bilinear. Então b é contínua se e só se se verificam as três condições seguintes:

(B_1) Para cada $x \in E$, a aplicação parcial $b(x,-) : F \to G$ definida por $y \mapsto b(x,y)$ é contínua no ponto $y = 0$.

(B_2) Para cada $y \in F$, a aplicação parcial $b(-,y) : E \to G$ definida por $x \mapsto b(x,y)$ é contínua no ponto $x = 0$.

(B_3) b é contínua no ponto $(0,0)$.

Resulta imediatamente da identidade

$$b(x,y) - b(x',y') = b(x - x',y') + b(x',y - y') + b(x - x',y - y'). \blacksquare$$

Dos axiomas (AT_I), (AT_{IIa}) e (AT_{IIb}) se deduz um sistema de condições necessárias e suficientes que deve verificar o filtro $\mathcal{B}$ das vizinhanças de 0 em um anel A para definir sobre A uma topologia compatível com sua estrutura de anel; $\mathcal{B}$ deve satisfazer os axiomas seguintes:

(GA_I) Para cada $U \in \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V + V \subset U$.

(GA_{II}) Para cada $U \in \mathcal{B}$, tem-se $-U \in \mathcal{B}$.

(AV_I) Para cada $a \in A$ e cada $V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $aW \subset V$ e $Wa \subset V$.

(AV_{II}) Para cada $V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $WW \subset V$.

No que segue (salvo advertência em contrário) a expressão "anel topológico significa "anel unitário topológico" e a expressão "A-módulo topológico" significa "A-módulo a esquerda topológico". Frequentemente a expressão "Sejam A um anel topológico e X um A-módulo tológico" será abreviada por "Seja X um A-módulo topológico".

Definição 1.1.3. Seja A um anel topológico. Um A-módulo topológico é um A-móulo (a esquerda) X munido de uma topologia compatível com sua estrutura de grupo abeliano e satisfazendo o axioma seguinte:

(MT) A aplicação $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $A \times X$ em X é contínua.

Dado um anel topológico A, diz-se que uma estrutura de A-módulo e uma topologia sobre um conjunto X são compatíveis se a topologia é compatível com a estrutura de grupo abeliano de X e se verifica o axioma (MT), neste caso se diz frequentemente que a topologia é compatível com a estrutura de A-módulo de X.

Em virtude do lema 1.1.2. o axioma (MT) é equivalente aos três axiomas seguintes:

(MT'_I) Para todo $x \in X$, a aplicação $\lambda \mapsto \lambda x$ de A em X é contínua no ponto $\lambda = 0$.

(MT'_{II}) Para todo $\lambda \in A$, a aplicação $x \mapsto \lambda x$ de X em X é contínua no ponto $x = 0$.

(MT'_{III}) A aplicação $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $A \times X$ em X é contínua no ponto $(0, 0)$.

Deduz-se um sistema de condições necessárias e suficientes que deve verificar o filtro $\mathcal{B}$ das vizinhanças de 0 em um A-módulo X para definir sobre X uma topologia compatível com sua estrutura de A-módu-

lo, $\mathcal{B}$ deve satisfazer, alem dos axiomas (GA_I) e (GA_{II}), os axiomas seguintes:

(MV_I) Para cada $x_0 \in X$ e cada $V \in \mathcal{B}$, existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $Sx_0 \subset V$.

(MV_{II}) Para cada $\lambda_0 \in A$ e cada $V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $\lambda_0 W \subset V$.

(MV_{III}) Para cada $V \in \mathcal{B}$, existe uma vizinhança S de 0 em A e $W \in \mathcal{B}$ tais que $SW \subset V$.

Uma forma bastante frequente de definir uma topologia sobre um A-módulo X (A sendo um anel topológico dado) é dar uma base $\mathcal{B}$ do filtro das vizinhanças de 0 em X, o sistema de condições necessárias e suficientes que deve verificar $\mathcal{B}$ para definir uma topologia compatível com a estrutura de A-módulo de X é constituído pelos axiomas (MV_I), (MV_{II}), (MV_{III}), (GA_I) e o axioma (GA_{II}) é substituído pelo axioma

(GA'_{II}) Para cada $U \in \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $-V \subset U$.

<u>Proposição</u> 1.1.4. <u>Se</u> f <u>é uma aplicação</u> A-<u>linear de um</u> A-<u>módulo topológico</u> X <u>em um</u> A-<u>módulo topológico</u> Y, <u>então</u> f <u>é contínua se e só se</u> f <u>é contínua em um ponto</u>.

É um caso particular da prop.23 de $[B_4]$, ch 3, § 2, nº8. ∎

<u>Exemplos de módulos topológicos</u>

(1) Todo espaço vetorial topológico sobre R (resp. C) é um R (resp. C)-módulo topológico.

(2) Se $\mathcal{B}$ é uma base de filtro sobre um anel A, formada de ideais biláteros então $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 para uma topologia compatível com a estrutura de grupo aditivo de A pois $\mathcal{B}$ satisfaz obviamente os axiomas (GA_I) e (GA_{II}). Como $\mathcal{B}$ também satisfaz os axiomas (AV_I) e (AV_{II}) resulta que esta topologia é compatível com a estrutura de anel de A. Nestas condições sejam X um A-módulo e $\mathcal{B}'$ uma base de filtro sobre X formada por sub-módulos, então $\mathcal{B}'$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 para uma topologia compatível com a estrutura de grupo de X. É trivial a verificação dos axiomas (MT'_{II}) e (MT'_{III}), donde esta topologia sobre X é compatível com a estrutura de A-módulo se e só se verifica o axioma (MT'_I) (que pode se verificar ou não, cfr. corol.1.3.9.). Um caso particular do que precede, em que o axioma (MT'_I) se verifica é quan-

do $\mathcal{B}'$ é o conjunto de todos os submódulos da forma $\underline{a}X$ com $\underline{a}$ percorrendo $\mathcal{B}$. Em questões de Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica (cfr. [G]) aparece frequentemente o seguinte caso particular da construção anterior: fixado um ideal $\underline{a}$ de A, o conjunto $\mathcal{B}$ é formado pelas potências $\underline{a}^n$ ($n \in N$, $n \geqslant 1$), sendo $\mathcal{B}'$ então o conjunto dos submódulos do tipo $\underline{a}^n X$. Estas topologias sobre anéis (resp. módulos) que admitem um sistema fundamental de vizinhanças de 0 formada por ideais (resp. submódulos) são em geral conhecidas pelo nome de <u>topologias lineares</u>.

(3) Se A é um anel topológico e X é um A-módulo, então $\{\emptyset, X\}$ é compatível com a estrutura de A-módulo de X; se δ é a topologia discreta sobre X, então δ é compatível com a estrutura de A-módulo de X se e só se para cada $x \in X$, o anulador de x em A é aberto em A (em particular, se X possui um elemento livre, δ é compatível com a estrutura de A-módulo de X se e só se A é discreto). Se A é discreto e τ é uma topologia compatível com a estrutura de grupo abeliano de X, então τ é compatível com a estrutura de A-módulo de X se e só se se verifica o axioma (MT'_{II}), pois como A é discreto a verificação dos axiomas (MT'_{I}) e (MT'_{III}) é trivial. Em particular, todo grupo abeliano topológico é um Z-módulo topológico quando Z é munido da topologia discreta, pois neste caso a verificação do axioma (MT'_{II}) também é trivial (indução a partir dos axiomas (GA_{I}) e (GA_{II})).

<u>Proposição</u> 1.1.5. <u>Sejam</u> X <u>um</u> A-<u>módulo topológico</u>, $\alpha \in A$ <u>e</u> $b \in X$. <u>A aplicação</u> $x \mapsto \alpha x + b$ <u>de</u> X <u>em</u> X <u>é contínua. Se</u> $\alpha \in U(A)$, <u>então esta aplicação é um homeomorfismo</u>.

A primeira afirmação segue do axioma (MT'_{II}) e da prop.1.1.4.. Se $\alpha \in U(A)$ então $x \mapsto \alpha^{-1}x - \alpha^{-1}b$ é a inversa da aplicação $x \mapsto \alpha x + b$. ∎

<u>Corolário</u> 1.1.6. <u>Se</u> W <u>é um conjunto aberto</u> (<u>resp. fechado</u>) <u>de um A-módulo topológico</u> X, <u>então</u> αW <u>é aberto</u> (<u>resp. fechado</u>) <u>para cada</u> $\alpha \in U(A)$. <u>Se</u> K <u>é um sub-conjunto compacto</u> (<u>resp. conexo</u>) <u>de</u> X, <u>então</u> αK <u>é compacto</u> (<u>resp. conexo</u>) <u>para todo</u> $\alpha \in A$. ∎

<u>Observação</u> Sejam X um A-módulo topológico, α um elemento do centro de A e $h_\alpha : X \to X$ a aplicação definida por $x \mapsto \alpha x$. Da prop.1.1.5. segue que se $\alpha \in U(A)$, então h_α é um isomorfismo de módulos topológicos, mas a recíproca não é verdadeira como mostra o exemplo seguinte. Seja A o anel das funções complexas contínuas definidas no in -

tervalo $[0,1]$ de R munida da topologia definida pela norma $\|f\| = \sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$. Se a e b são dois números reais tais que $0<a<b<1$, seja X o ideal de A formado pelas funções de A que são nulas no intervalo $[0,b]$. Mostremos que se $\alpha \in A$ é a função $x \mapsto x - a$, então a aplicação $h_\alpha : X \to X$ definida por $f \mapsto \alpha f$ é um homeomorfismo A-linear de X sobre X, embora $\alpha \notin U(A)$. Com efeito, é claro que h_α é bijetora e contínua, é suficiente provar que h_α é aberta. Sejam, para cada número real $r>0$, B_r a bola de centro 0 e raio r em A e $V_r = X \cap B_r$, como $(V_r)_{r>0}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de zero em X basta provar que $h_\alpha(V_r)$ é uma vizinhança de zero em X para cada $r>0$ (cfr. $[B_4]$, ch.3, § 2, nº8, prop.24.). Fixado $r>0$, seja s um número real tal que $0<s<r(b-a)$, mostremos que $h_\alpha(V_r) \supset V_s$. De fato, se $g \in V_s$, então $g \in X$ e $\|g\|<s$. De outro lado, a função $f : [0,1] \to C$ definida por $f(x) = 0$ se $0\leq x\leq b$ e $f(x) = g(x)/\alpha(x)$ se $b\leq x\leq 1$ é obviamente contínua, donde $f \in X$. Além disso, é claro que $\alpha f = g$; basta então provar que $f \in V_r$ o que resulta da escolha de s:

$$\|f\| = \sup_{b<x\leq 1}|f(x)| = \sup_{b<x\leq 1}\frac{|g(x)|}{\alpha(x)} \leq \sup_{b<x\leq 1}\frac{|g(x)|}{b-a} = \frac{\|g\|}{b-a} < \frac{s}{b-a} < r.$$

Seja A um anel topológico fixado. A classe dos A-módulos topológicos com as aplicações A-lineares contínuas como morfismos é uma categoria aditiva que será indicada por <u>Mod Top</u>$_A$, os isomorfismos nesta categoria são então os homeomorfismos A-lineares. Se X e Y são dois objetos de <u>Mod Top</u>$_A$, o conjunto das aplicações A-lineares contínuas de X em Y será indicada por $L_A(X,Y)$.

<u>Notações</u>: Se X é um A-módulo, indicaremos frequentemente por s_X, $\bar{s}_X$ e p_X as respectivas aplicações :

$s_X : (x,y) \in X \times X \mapsto x + y \in X$,

$\bar{s}_X : (x,y) \in X \times X \mapsto x - y \in X$ e $p_X : (\lambda,x) \in A \times X \mapsto \lambda x \in X$.

Sejam A,B dois anéis topológicos e ρ um homomorfismo contínuo do anel B no anel A. Para todo A-módulo topológico X a lei externa $p' : B \times X \to X$ definida por $(\beta,x) \mapsto \rho(\beta)x = p_X(\rho(\beta),x)$ define uma estrutura de B-módulo topológico sobre X dita <u>associada</u> a ρ e à estrutura de A-módulo topológico de X. De fato, a aplicação p' é contínua pois a aplicação $\rho \times id : B \times X \to A \times X$ é contínua e $p' = p_X \circ (\rho \times id)$.

1.2. Submódulos, componentes conexas, submódulos densos e submódulos abertos.

Sejam X um A-módulo topológico e S um submódulo de X. As restrições das aplicações $\bar{s}_X$ e p_X a $S \times S$ e $A \times S$ respectivamente são contínuas o que prova que a topologia induzida sobre S pela topologia de X é compatível com a estrutura de A-módulo de S; a estrutura de A-módulo topológico assim definida sobre S é dita induzida pela de X. Salvo advertência em contrário, quando considerarmos um submódulo S de X como um A-módulo topológico, será sempre esta a estrutura considerada. As três proposições que seguem traduzem para os módulos topológicos resultados conhecidos para os grupos topológicos (cfr. $[B_4]$, §2).

Proposição 1.2.1. Seja S um submódulo de um A-módulo topológico X. Tem-se então

(a) O fecho $\bar{S}$ de S é um submódulo (fechado) de X, em particular o fecho $\bar{K}$ de $S = \{0\}$ é um submódulo de X.

(b) Se S é localmente fechado num ponto, então S é fechado.

(c) S é aberto (resp. discreto) se e só se S possui um ponto interior (resp. isolado).

(d) Se S é aberto, então S é fechado.

(a) Com efeito, as aplicações $\bar{s}_X$ e p_X são por hipótese contínuas e como $\bar{s}_X(S \times S) \subset S$ e $p_X(A \times S) \subset S$ resulta:

$$\bar{s}_X(\bar{S} \times \bar{S}) = \bar{s}_X(\overline{S \times S}) \subset \overline{\bar{s}_X(S \times S)} \subset \bar{S}$$

$$p_X(A \times \bar{S}) = p_X(\overline{A \times S}) \subset \overline{p_X(A \times S)} \subset \bar{S}$$

As afirmações (b), (c) e (d) são válidas para grupos topológicos. ∎

Proposição 1.2.2. Seja X um A-módulo topológico. Tem-se então

(a) Se X é conexo, então X é gerado por cada vizinhança de 0.

(b) A componente conexa K de 0 é um submódulo fechado de X; a componente conexa de um ponto $x \in X$ é o subconjunto $x + K$.

A afirmação (a) segue das partes (c) e (d) da prop.1.2.1. Como (b) vale para grupos topológicos, K é um subgrupo fechado de X e pelo corol.1.1.6. para todo $\lambda \in A$ o conjunto λK é conexo e como $0 \in \lambda K$ para todo $\lambda \in A$ resulta $\lambda K \subset K$ para todo $\lambda \in A$. ∎

Proposição 1.2.3. Seja S um submódulo denso de um A-módulo topológico X. Se S é gerado por cada vizinhança de 0 em S, então X é ge-

rado por cada vizinhança de 0 em X. ∎

Seja X um A-módulo, para cada $x \in X$ indicamos por $j_x: A \to X$ a aplicação A-linear definida por $\lambda \mapsto \lambda x$. Para todo submódulo S de X e todo $x \in X$, seja

$$I(S,x) = \{ \lambda \in A \mid \lambda x \in S \}$$

É claro que $I(S,x) = j_x^{-1}(S) = j_x^{-1}(S \cap Ax)$ donde resulta que $I(S,x)$ é um ideal de A e $I(S,x) = A$ se e só se $x \in S$.

Proposição 1.2.4. Sejam S um submódulo aberto próprio de um A-módulo topológico X e $x \in \complement S$. Então $I(S,x)$ é um ideal aberto próprio de A.

Como S é aberto, S é uma vizinhança de 0 em X e por (MT_I') a aplicação $j_x: A \to X$ é A-linear contínua, donde $j_x^{-1}(S) = I(S,x)$ é uma vizinhança de 0 em A o que acarreta (prop.1.2.1.(c)) que $I(S,x)$ é aberto. Como $x \notin S$ resulta $1 \notin I(S,x)$. ∎

Proposição 1.2.5. Seja A um anel unitário topológico, as condições seguintes são equivalentes:

(i) A não possui ideais abertos próprios.

(ii) Toda vizinhança de 0 em A gera A como ideal.

(iii) Nenhum A-módulo topológico X possui submódulos abertos próprios (em particular, todo A-módulo topológico X é gerado por qualquer vizinhança de 0, donde segue que o único A-módulo topológico discreto é (0)).

A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) segue imediatamente da prop.1.2.1.(c).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Suponhamos que existe um A-módulo topológico X que possui um submódulo aberto próprio S. Existe então $x \in \complement S$ e pela prop. 1.2.4. o conjunto $V = I(S,x)$ é um ideal aberto próprio de A. A hipótese (ii) acarreta em consequência que $[V] = A$, de outro lado é claro que $[V] = V$ portanto $I(S,x) = A$ o que é absurdo.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Basta aplicar (iii) no caso $X = A$. ∎

O resultado seguinte dá dois exemplos de anéis topológicos que satisfazem as condições equivalentes da prop.1.2.5. e dois exemplos de anéis que não as satisfazem.

Corolário 1.2.6. (1º) Seja A um anel unitário topológico possuindo uma das propriedades seguintes:

(a) $0 \in \overline{U(A)}$; (b) A é conexo

Nestas condições, A satisfaz as condições equivalentes da prop.1.2.5.

(2º) Se a topologia de A é discreta ou linear não caótica, então A não satisfaz as condições equivalentes da prop.1.2.5. .

(1º) Se I é um ideal aberto de A, então a condição (a) implica que $I \cap U(A) \neq \emptyset$ donde $I = A$.

(2º) De fato, nos dois casos A possui ideais abertos próprios. ∎

Exemplo Se $\mathbb{K}$ indica indiferentemente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e T é um espaço topológico, o anel $A = C(T,\mathbb{K})$ das aplicações contínuas de T em $\mathbb{K}$ munida topologia definida pelas semi-normas

$$p_K : f \mapsto \sup_{t \in K} |f(t)|$$

onde K percorre os compactos de T, é um anel topológico que satisfaz a condição (a) do corolário anterior. De fato, se W é uma vizinhança de 0 em A existem compactos $K_1,\dots,K_n$ e números reais positivos $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ tais que

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} \nabla(K_i,\alpha_i) \subset W$$

onde $\nabla(K_i,\alpha_i) = \left\{ f \in C(T,\mathbb{K}) \mid p_{K_i}(f) < \alpha_i \right\}$. Se α é um número real tal que $0 < \alpha < \inf_i \alpha_i$ e $f : T \to \mathbb{K}$ é a função definida por $f(t) = \alpha$ para todo $t \in T$, então $f \in \bigcap_i \nabla(K_i,\alpha_i) \subset W$ donde $f \in W \cap U(A)$.

Definição 1.2.7. Sejam X um A-módulo e L um subconjunto de X tal que $0 \notin L$. Um submódulo S de X é dito L-maximal se satisfaz as condições seguintes:

(1º) $S \cap L = \emptyset$

(2º) Se S' é um submódulo de X, $S \subset S'$ e $S' \cap L = \emptyset$ então $S' = S$.

Proposição 1.2.8. Sejam X um A-módulo topológico e L um subconjunto de X tal que $0 \notin L$. Então, todo submódulo aberto S de X tal que $S \cap L = \emptyset$ está contido num submódulo aberto S_0 de X que é L-maximal.

O conjunto $\mathcal{F}$ dos submódulos W de X tais que $S \subset W$ e $W \cap L = \emptyset$ é não vazio pois $S \in \mathcal{F}$. É fácil ver que $\mathcal{F}$, ordenado por inclusão, é indutivo, e então pelo lema de Zorn possui um elemento maximal S_0 ∎

Observação No caso particular em que A e X são discretos e $0 \notin L$, o resultado anterior acarreta que sempre existe um submódulo de X que é L-maximal. De fato, basta tomar $S = \{0\}$. Particularizando ainda mais, tomando $X = A$ e $L = \{1\}$ obtemos o teorema de Krull sobre existência de ideais maximais de um anel unitário.

Sejam X um A-módulo topológico separado e M um subconjunto não vazio de X. Indicamos por $\langle M \rangle$ o conjunto de todas as somas $\sum_{x \in M} \lambda_x . x$, onde $(\lambda_x)_{x \in M}$ é uma família de elementos de A tal que a família $(\lambda_x . x)_{x \in M}$ é somável. Com estas notações temos o resultado seguinte:

Proposição 1.2.9. (a) $\overline{[M]}$ é o menor submódulo fechado de X que contém M.

(b) $\langle M \rangle$ é um submódulo de X.

(c) $[M] \subset \langle M \rangle \subset \overline{[M]}$ (portanto, se $[M]$ é conexo, então $\langle M \rangle$ é conexo).

(d) $\langle M \rangle$ é fechado se e só se $\langle M \rangle = \overline{[M]}$.

A afirmação (a) é trivial. Mostremos (b), de $[B_4]$, ch. 3, §5, nº5 prop. 6 resulta que $\langle M \rangle$ é um subgrupo de X. Seja $z \in \langle M \rangle$ e $\mu \in A$, se $z = \sum_{x \in M} \lambda_x . x$, então a família $(\lambda_x . x)_{x \in M}$ é somável e como a homotetia $h_\mu : X \to X$ definida por $y \mapsto \mu y$ é A-linear contínua resulta (loc. cit. prop. 5) que a família $(h_\mu(\lambda_x . x))_{x \in M} = (\mu \lambda_x . x)_{x \in M}$ é somável e é fácil ver que esta soma é μx. A primeira inclusão de (c) sendo óbvia provemos a segunda. Se $z = \sum_{x \in M} \lambda_x . x$ é um elemento de $\langle M \rangle$, então para cada vizinhança V de 0 em X existe um subconjunto finito F_0 de M tal que $\sum_{x \in F} \lambda_x . x - z \in V$ para todo F tal que F é um subconjunto finito de M contendo F_0, o que prova que $[M] \cap (z + V) \neq \emptyset$. A afirmação (d) resulta imediatamente de (c). ∎

Exemplos

(1) Em geral, se tem $[M] \neq \overline{[M]}$, mesmo se A e X são separados (não discretos) como mostra o exemplo: $A = \mathbf{Q}$, $X = \mathbf{R}$ e $M = \{1\}$; é claro que $[M] = \mathbf{Q}$ e $\overline{[M]} = \mathbf{R}$.

(2) Em geral, $\langle M \rangle \neq \overline{[M]}$ (i.é. $\langle M \rangle$ não é fechado) mesmo quando M é um conjunto infinito como mostra o seguinte exemplo: sejam $A = \mathbf{R}$ e $X = C([0,1])$ munido da norma $\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Para todo $n \in N$, $n > 0$ indicamos com f_n à restrição a $[0,1]$ da função $x \mapsto x^n$, $f_0 = 1$ e seja $M = \{f_n \mid n \geq 0\}$. Tem-se então $\langle M \rangle \neq X$, mas pelo teorema Stone-Weiertrass: $\overline{[M]} = X$.

1.3. Produtos e topologias iniciais nos módulos topológicos.

Definição 1.3.1. Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de A-módulos topológi -

cos. Chama-se <u>produto da família</u> $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ a um par $(P,(\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ verificando as condições seguintes:

(PMT1) P é um A-módulo topológico e π_λ é uma aplicação A-linear contínua de P em X_λ, para cada $\lambda\in\Lambda$.

(PMT2) Para todo A-módulo topológico Y e para toda família $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, onde f_λ é uma aplicação A-linear contínua de Y em X_λ, existe uma única aplicação A-linear contínua f de Y em P, tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\lambda & Y \arrow[l, "f_\lambda"'] \arrow[dl, dashed, "f"] \\ P \arrow[u, "\pi_\lambda"] & \end{tikzcd} \qquad (\lambda\in\Lambda)$$

<u>Proposição</u> 1.3.2. <u>O produto existe e é único a menos de isomorfismos na categoria</u> <u>Mod Top</u>$_A$.

Indicamos por $(P',(\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ o produto da família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ realizado na categoria <u>Mod</u>$_A$, então P' é um A-módulo e, para cada índice λ, π_λ é uma aplicação A-linear de P' em X_λ. Indiquemos por P o A-módulo P' munido da topologia τ produto das topologias dos X_λ, então $(P,(\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ é o produto da família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ na categoria <u>Top</u>, donde segue que π_λ é uma aplicação contínua de P em X_λ, para cada índice λ. Da existência de produtos nas categorias <u>Mod</u>$_A$ e <u>Top</u>, segue imediatamente que se verifica a condição (PMT2), portanto só falta verificar a primeira afirmação da condição (PMT1), isto é, que τ é compatível com a estrutura de A-módulo de P'. Como o produto existe na categoria dos grupos topológicos, τ é compatível com a estrutura de grupo (abeliano) de P', sendo portanto suficiente verificar os axiomas (MT'_I), (MT'_{II}) e (MT'_{III}) o que resulta imediatamente da definição de τ e do fato de ser X_λ um A-módulo topológico para cada índice λ. ∎

<u>Notação</u> No que segue indicaremos com o símbolo

$$\widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$$

o produto em <u>Mod Top</u>$_A$ da família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Quando todos os X_λ são idênticos a um mesmo A-módulo topológico X, o produto é indicado pelo símbolo

$$\tilde{X}^\Lambda$$

Se o conjunto de índices Λ é finito e $\mathrm{Card}(\Lambda) = n$, escrevemos sim-

BIBLIOTECA DO IME-USP

plesmente

$$\tilde{X}^n.$$

Lema 1.3.3. Sejam G um A-módulo topológico, T um A-módulo e $u:T\to G$ uma aplicação A-linear. A topologia imagem recíproca por u da topologia de G, isto é

$$\tau_u(G) = \left\{u^{-1}(U) \mid U \text{ é aberto em } G\right\}$$

é compatível com a estrutura de A-módulo de T.

Mostremos que $\bar{s}_T$ é contínua no ponto $(x_o, y_o) \in T\times T$. Sejam $u^{-1}(V)$ uma vizinhança (aberta) de $\bar{s}_T(x_o, y_o) = x_o - y_o$, $V_1 = V - u(x_o - y_o)$ e V_2 uma vizinhança simétrica de 0 em G tal que $V_2 + V_2 \subset V_1$. Então a continuidade de $\bar{s}_T$ resulta da relação

$$\bar{s}_T\left\{\left[x_o + u^{-1}(V_2)\right]\times\left[y_o + u^{-1}(V_2)\right]\right\} \subset u^{-1}(V)$$

De forma análoga, p_T é contínua no ponto $(\lambda_o, x_o) \in A\times T$, pois se $u^{-1}(V)$ é uma vizinhança (aberta) de $p_T(\lambda_o, x_o) = \lambda_o x_o$, então $u(\lambda_o x_o) = \lambda_o u(x_o) \in V$ e a continuidade de p_G implica que existem uma vizinhança S de λ_o em A e uma vizinhança W de $u(x_o)$ em G tais que $p_G(S\times W) = SW \subset V$ donde resulta $p_T(S\times u^{-1}(W)) \subset u^{-1}(V)$. ∎

Proposição 1.3.4. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos topológicos X um A-módulo e, para cada índice λ, seja f_λ uma aplicação A-linear de X em X_λ. Têm-se então as asserções seguintes:

(a) A menos fina das topologias sobre X que torna contínuas todas as aplicações f_λ, é uma topologia τ compatível com a estrutura de A-módulo de X.

(b) Se $f : X \to P = \tilde{\prod}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é a aplicação produto da família (f_λ) (i.e. f é a aplicação determinada pela família (f_λ) por (PMT2), donde $f(x) = (f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ para todo $x \in X$) então (com a notação do lema 1.3.3.)

$$\tau = \tau_f(P) = \tau_f(P \cap f(X))$$

(c) Se $\mathcal{B}_\lambda$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em X_λ, os conjuntos da forma

$$\bigcap_{1\leq i\leq n} f^{-1}_{\lambda_i}(V_{\lambda_i})$$

formam um sistema fundamental de τ-vizinhanças de 0 em X, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ sendo uma sequência finita de elementos de Λ, e para todo índice i, V_{λ_i} um conjunto qualquer de $\mathcal{B}_{\lambda_i}$.

A afirmação (b) resulta de [B_3], ch.1, §4, prop.3; de (b) e do lema 1.3.3. resulta (a); finalmente (c) segue de (a). ∎

Corolário 1.3.5. Suponhamos que os A-módulos X_λ são separados. En-

tão as condições seguintes são equivalentes:

(i) τ é separada.

(ii) Para cada $x \neq 0$ em X, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $f_\lambda(x) \neq 0$. ∎

Corolário 1.3.6. Sejam A um anel topológico, X um A-módulo e $(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de topologias compatíveis com a estrutura de A-módulo de X. Então

$$\tau = \sup_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda$$

é compatível com a estrutura de A-módulo de X.

Indiquemos com X_λ o A-módulo X munido da topologia τ_λ ; por definição τ é a topologia menos fina sobre X que torna contínuas todas as aplicações $i_\lambda = \mathrm{id.}: X \to X_\lambda$. Como i_λ é A-linear, o resultado segue da prop.1.3.4.,(a). ∎

Definição 1.3.7. A topologia τ da prop.1.3.4. é chamada topologia inicial de X em Mod Top_A para a família de aplicações A-lineares $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Exemplo Sejam A um anel topológico, Y um A-módulo topológico, X um A-módulo e Ω um subconjunto de $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$. Para todo subconjunto finito F de Ω e para cada vizinhança V de 0 em Y, consideremos o conjunto $N(F,V)$ dos $x \in X$ tais que $f(x) \in V$ para toda $f \in F$ (i.e. $N(F,V) = \bigcap_{f\in F} f^{-1}(V)$). Então o conjunto $\mathcal{B}$ dos conjuntos $N(F,V)$, onde F percorre os subconjuntos finitos de Ω e V percorre as vizinhanças de 0 em Y, é um sistema fundamental de vizinhanças de 0, para uma topologia $\sigma_A(Y,\Omega)$ sobre X compatível com a estrutura de A-módulo. De fato, basta aplicar a prop.1.3.4. com $\Lambda = \Omega$ e $X_\lambda = Y$ para todo $\lambda \in \Lambda$, então $\sigma_A(Y,\Omega)$ é precisamente a topologia inicial de X em Mod Top_A para o sistema Ω de aplicações como resulta da definição de $\mathcal{B}$ e da parte (c) da prop.1.3.4. .

Corolário 1.3.8. O limite projetivo existe em Mod Top_A (e é único a menos de isomorfismos)

Seja $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ um sistema projetivo de A-módulos topológicos. Sejam $X = \varprojlim X_\alpha$ (algébrico) e $f_\alpha : X \to X_\alpha$ a aplicação A-linear canônica. Consideremos sobre X a topologia τ inicial para a família de aplicações (f_α). Então X munido de τ é um A-módulo topológico e para todo α tem-se $f_\alpha \in L_A(X, X_\alpha)$. Sejam Y um A-módulo topológico qualquer e g_α uma aplicação A-linear contínua de Y em X_α tal que a relação $\alpha \leq \beta$ implique $g_\alpha = f_{\alpha\beta} \circ g_\beta$. Pelo caso algébrico existe uma única aplicação A-linear g de Y em X tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\alpha & Y \arrow[l, "g_\alpha"'] \arrow[dl, dashed, "g"] \\ X \arrow[u, "f_\alpha"] & \end{tikzcd}$$

para todo α. A continuidade de g resulta imediatamente da comutatividade do diagrama e da parte (b) da prop.1.3.4.. ∎

Corolário 1.3.9. Sejam A um anel topológico e X um A-módulo. Então existe uma topologia Φ compatível com a estrutura de A-módulo de X que é a mais fina das topologias compatíveis com a estrutura de A-módulo de X.

A coleção de todas as topologias compatíveis com a estrutura de A-módulo de X é não vazia pois a topologia caótica lhe pertence e o supremo Φ desta coleção é compatível com a estrutura de A-módulo de X pelo corol.1.3.6. . ∎

Definição 1.3.10. Sejam A um anel topológico e X um A-módulo. A topologia Φ do corol.1.3.9. sobre X é chamada topologia A-fina para X. X é dito módulo A-fino se X é um A-módulo munido da topologia A-fina.

Proposição 1.3.11. Sejam A um anel topológico, X um A-módulo e τ uma topologia compatível com a estrutura de A-módulo de X. As condições seguintes são equivalentes:

(i) τ é a topologia A-fina para X.

(ii) Para todo A-módulo topológico Y, se tem $\mathrm{Hom}_A(X,Y) = L_A(X,Y)$.

A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) resulta imediatamente da def.1.3.10. e do lema 1.3.3..Reciprocamente, se X_o é o módulo X munido da topologia A-fina, como por hipótese $\mathrm{Hom}_A(X,X_o) = L_A(X,X_o)$, resulta em particular que a aplicação idêntica $1_X : X \to X_o$ é contínua. ∎

Exemplos

(1) Se A é um anel topológico, então, A considerado como A-módulo topológico é A-fino pois se Y é um A-módulo topológico arbitrário e $f \in \mathrm{Hom}_A(A,Y)$ então f é da forma $\lambda \mapsto \lambda y$ (onde $y = f(1)$), donde f é contínua por (MT'_I) e a conclusão segue da prop.1.3.11. .

(2) Sejam $A = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ e X um espaço normado sobre A. Mostremos que se X é A-fino, então $\dim_A X < \infty$. Com efeito, suponhamos por absurdo que $\dim_A X = \infty$, então, pela prop.1.3.11., basta construir uma forma A-linear descontínua. Seja $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma base de X tal que $\|e_\gamma\| = 1$ para todo índice γ; a hipótese sobre a dimensão de X acarreta que existe uma aplicação injetora $j : \mathbf{N} \to \Gamma$ e a aplicação $f \in \mathrm{Hom}_A(X,A)$

definida pelas relações

$$f(e_\gamma) = j^{-1}(\gamma) \quad \text{para todo } \gamma \in j(\mathbf{N})$$
$$f(e_\gamma) = 0 \quad \text{para todo } \gamma \in \Gamma - j(\mathbf{N})$$

não é contínua pois a imagem por f do conjunto limitado $L = \{e_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subset S_1(0)$ é o subconjunto $\mathbf{N}$ de A. A recíproca da afirmação acima, a saber

$$\dim_A X < \infty \Rightarrow X \text{ é A-fino}$$

é também verdadeira, daremos uma demonstração deste fato no Corol. 1.5.6. .

(3) No fim deste capítulo, veremos um exemplo bastante natural de topologia A-fina sobre um A-módulo (Teor.1.5.4.) .

1.4. Topologias finais, soma direta e quociente nos módulos topológicos

Lema 1.4.1. Sejam (Z,τ) um espaço topológico, T um conjunto não vazio, $\mathcal{T}$ uma família de topologias sobre o conjunto T e $\sigma_0 = \sup \mathcal{T}$. Se $g : Z \to T$ é uma aplicação $\tau - \sigma$ - contínua para toda $\sigma \in \mathcal{T}$, então g é $\tau - \sigma_0$ - contínua.

Ver $[B_3]$, ch. 1, §2, nº3, prop.4. ∎

Proposição 1.4.2. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos topológicos, X um A-módulo e para cada $\lambda \in \Lambda$, seja f_λ uma aplicação A-linear de X_λ em X.

(1º) Existe uma topologia τ sobre X que é a mais fina das topologias compatíveis com a estrutura de A-módulo de X que torna contínuas todas as aplicações f_λ.

(2º) Suponhamos X munido da topologia τ de (1º). Então, para todo A-módulo topológico Y e para toda aplicação A-linear g de X em Y, as condições seguintes:

(i) g é contínua.

(ii) $g \circ f_\lambda$ é contínua para todo $\lambda \in \Lambda$.

são equivalentes.

(1º) Seja $\mathcal{T}$ a coleção de todas as topologias compatíveis com a estrutura de A-módulo de X tais que f_λ seja contínua para cada índice λ; $\mathcal{T}$ é não vazia pois contem a topologia caótica sobre X, Pelo corol.1.3.6., o supremo τ da coleção $\mathcal{T}$ é uma topologia compatível com a estrutura de A-módulo de X e do lema 1.4.1. resulta que f_λ é contínua (quando X está munido da topologia τ) para todo índice λ .

(2º) A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) sendo trivial, mostremos (ii) $\Rightarrow$ (i). Com

a notação do lema 1.3.3., provar que g é contínua equivale a demonstrar a inclusão $\tau_g(Y) \subset \tau$. Pelo lema 1.3.3., $\tau_g(Y)$ é compatível com a estrutura de A-módulo de X, então basta ver que $\tau_g(Y)$ torna contínuas todas as aplicações f_λ (pois então teremos $\tau_g(Y) \in \mathcal{T}$, donde segue a inclusão acima). Seja $W \in \tau_g(Y)$, existe um aberto U em Y tal que $W = g^{-1}(U)$, e então

$$f_\lambda^{-1}(W) = f_\lambda^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f_\lambda)^{-1}(U)$$

é um conjunto aberto em X_λ (para cada $\lambda \in \Lambda$) já que por (ii), $g \circ f_\lambda$ é contínua para todo índice λ. ∎

<u>Definição</u> 1.4.3. A topologia τ da prop.1.4.2. é chamada <u>topologia final</u> de X em <u>Mod Top</u>$_A$ para a família de aplicações A-lineares $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

<u>Corolário</u> 1.4.4. <u>O limite indutivo existe em</u> <u>Mod Top</u>$_A$ (<u>e é único a menos de isomorfismos</u>).

Sejam $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})$ um sistema indutivo de A-módulos topológicos, X o limite indutivo (algébrico) deste sistema e, para cada índice α, f_α a aplicação A-linear canônica de X_α em X. Munindo X da topologia final em <u>Mod Top</u>$_A$ para a família de aplicações (f_α) resulta que X é um A-módulo topológico e que as aplicações f_α são contínuas. Se Y é um A-módulo topológico arbitrário e, para cada índice α, g_α é uma aplicação A-linear contínua de X_α em Y tal que a relação $\alpha \leq \beta$ acarreta $g_\alpha = g_\beta \circ f_{\beta\alpha}$, então (pelo caso algébrico) existe uma única aplicação A-linear g de X em Y tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(para todo } \alpha\text{)}$$

e g é contínua pela prop.1.4.2., (2º) já que por hipótese $g \circ f_\alpha = g_\alpha$ é contínua para todo índice α. ∎

Veremos a seguir duas caracterizações da topologia A-fina sobre um A-módulo (cfr. Def.1.3.10) em termos da noção de topologia final. No enunciado do resultado seguinte usamos as seguintes notações: se X é um A-módulo, para cada $x \in X$ indicamos por j_x a aplicação de A em X definida por $\lambda \mapsto \lambda x$, por $\mathcal{S}$ o conjunto dos submódulos de X e por u_S a inclusão $S \subset X$ para $S \in \mathcal{S}$.

<u>Proposição</u> 1.4.5. <u>Sejam</u> A <u>um anel topológico</u>, X <u>um</u> A-<u>módulo e consi-</u>

deremos as três topologias seguintes:

(1º) Φ é a topologia A-fina para X.

(2º) τ é a topologia final de X em Mod Top_A para a família de aplicações A-lineares $(j_x)_{x\in X}$.

(3º) σ é a topologia final de X em Mod Top_A para a família de aplicações A-lineares $(u_S)_{S\in\mathfrak{J}}$, cada $S\in\mathfrak{J}$ munido da topologia induzida por Φ.

Então $\Phi = \tau = \sigma$.

É claro que $\tau \subset \Phi$; de outro lado σ sendo compatível com a estrutura de A-módulo de X, o axioma (MT_I') e a prop.1.1.3. acarretam que σ torna contínua a aplicação j_x para cada $x \in X$ e como τ é a mais fina das topologias compatíveis com a estrutura de A-módulo de X possuindo esta propriedade resulta $\sigma \subset \tau$. Finalmente, Φ torna contínuas todas as inclusões u_S quando S é munido da topologia induzida por Φ, portanto a definição de σ implica $\Phi \subset \sigma$. ∎

Definição 1.4.6. Seja $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos topológicos. Chama-se soma direta da família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, a um par $(S,(j_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ verificando as condições seguintes:

(SMT1) S é um A-módulo topológico e j_λ é uma aplicação A-linear contínua de X_λ em S, para cada $\lambda\in\Lambda$.

(SMT2) Para todo A-módulo topológico Y e para toda família $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tal que f_λ é uma aplicação A-linear contínua de X_λ em Y, existe uma única aplicação A-linear contínua f de S em Y, tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "j_\lambda"'] & Y \\ S \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad (\lambda\in\Lambda)$$

Proposição 1.4.7. A soma direta existe e é única a menos de isomorfismos na categoria Mod Top_A.

Sejam $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos topológicos, $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ a soma direta da família (X_λ) em Mod_A e j_λ a injeção canônica de X_λ em $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Indiquemos com S o módulo $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ munido da topologia final em Mod Top_A para a família de aplicações $(j_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$; da prop.1.4.2.(1º) resulta que o par $(S,(j_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ satisfaz a condição (SMT1). Seja Y um A-módulo topológico arbitrário e seja, para cada índice λ, f_λ uma aplicação A-linear contínua de X_λ em Y. A existência de somas diretas na categoria Mod_A implica que existe uma única aplicação A-linear f

de S em Y tornando comutativo o diagrama de (SMT2), isto é $f_\lambda = f \circ j_\lambda$ para todo índice e como f_λ é contínua para todo índice λ, da prop. 1.4.2., (2º), segue que f é contínua. ∎

Notações: No que segue indicaremos com

$$\tilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$$

a soma direta em Mod Top_A da família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Quando todos os X_λ são idênticos a um mesmo A-módulo topológico X, a soma direta da família $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é indicada com

$$\tilde{X}^{(\Lambda)}$$

Lema 1.4.8. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos topológicos, $j_\lambda : X_\lambda \to \tilde{\bigoplus_{\mu\in\Lambda}} X_\mu$ (resp. $\pi_\lambda : \tilde{\prod_{\mu\in\Lambda}} X_\mu \to X_\lambda$) a injeção (resp. projeção) canônica, Y um A-módulo topológico e $f_\lambda \in L_A(X_\lambda, Y)$ (resp. $g_\lambda \in L_A(Y, X_\lambda)$) para todo $\lambda\in\Lambda$. Se $f : \tilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda \to Y$ (resp. $g : Y \to \tilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$) é uma aplicação A-linear tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "j_\lambda"'] & Y \\ \tilde{\bigoplus_{\mu\in\Lambda}} X_\mu \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} X_\lambda & Y \arrow[l, "g_\lambda"'] \arrow[dl, dashed, "g"] \\ \tilde{\prod_{\mu\in\Lambda}} X_\mu \arrow[u, "\pi_\lambda"] & \end{tikzcd} \right)$$

então f (resp. g) é contínua.

Pela definição de soma direta (resp. produto) em Mod_A, f (resp. g) é a única aplicação A-linear tal que $f_\lambda = f \circ j_\lambda$ (resp. $g_\lambda = \pi_\lambda \circ g$) para todo índice λ. De outro lado, pela continuidade das f_λ (resp. g_λ) e por (SMT2) (resp. (PMT2)) existe uma única aplicação A-linear contínua f_1 (resp. g_1) tal que $f_\lambda = f_1 \circ j_\lambda$ (resp. $g_\lambda = \pi_\lambda \circ g_1$) para todo índice λ. Então f e f_1 (resp. g e g_1) são A-lineares e tornam comutativos os respectivos diagramas acima, donde $f = f_1$ (resp. $g = g_1$) portanto f (resp. g) é contínua. ∎

Proposição 1.4.9. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos topológicos, $j_\mu : X_\mu \to \tilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$ e $\pi_\mu : \tilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda \to X_\mu$ as aplicações canônicas

Tem-se então as asserções seguintes:

(a) As aplicações $\mathrm{id} : \widetilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda \to \widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$; $g_\mu : X_\mu \xrightarrow{j_\mu} \widetilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda \xrightarrow{\mathrm{id}} \widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$ e $p_\mu = \pi_\mu|(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) : \widetilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda \to X_\mu$, são contínuas. Em particular, se X_λ é separado para todo índice λ, então $\widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$ e $\widetilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$ são separados.

(b) $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é um submódulo denso em $\widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$.

(c) Se o conjunto Λ de índices é finito, então $\widetilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda = \widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$.

(d) Se X_λ é um módulo A-fino (cfr. Def.1.3.10.) para todo índice λ, então $\widetilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$ é um módulo A-fino.

(a) Fixado um índice $\mu\in\Lambda$, para todo $\lambda\in\Lambda$ consideremos as aplicações $\varphi_\lambda : X_\mu \to X_\lambda$ definidas por $\varphi_\mu = \mathrm{id.}$ e $\varphi_\lambda = 0$ se $\lambda \neq \mu$. As aplicações φ_λ sendo A-lineares contínuas, existe por (PMT2) uma única aplicação A-linear contínua g_μ tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\lambda & X_\mu \arrow[l, "\varphi_\lambda"'] \\ \widetilde{\prod_{\nu\in\Lambda}} X_\nu \arrow[u, "\pi_\lambda"] & \end{tikzcd} \qquad (\lambda\in\Lambda)$$

e mais $g_\mu(x) = (\varphi_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} = (\delta_{\lambda\mu}.x)_{\lambda\in\Lambda}$, o que prova a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\mu \arrow[r, "g_\mu"] \arrow[d, "j_\mu"'] & \widetilde{\prod_{\nu\in\Lambda}} X_\nu \\ \widetilde{\bigoplus_{\nu\in\Lambda}} X_\nu \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id.}"'] & \end{tikzcd} \qquad (\mu\in\Lambda)$$

Da continuidade de g_μ e do lema 1.4.8. segue que $\mathrm{id.} : \widetilde{\bigoplus_{\nu\in\Lambda}} X_\nu \to \widetilde{\prod_{\nu\in\Lambda}} X_\nu$ é contínua o que prova que a topologia de $\widetilde{\bigoplus_{\nu\in\Lambda}} X_\nu$ é mais fina que a topologia induzida por $\widetilde{\prod_{\nu\in\Lambda}} X_\nu$ sobre $\bigoplus_{\nu\in\Lambda} X_\nu$. Resulta do que precede que se X_λ é separado para cada índice λ, então $\widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$ e $\widetilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda$ são separados. Finalmente, fixado um índice $\mu\in\Lambda$, para todo $\lambda\in\Lambda$ consideremos as aplicações $\psi_\lambda : X_\lambda \to X_\mu$ definidas por $\psi_\mu = \mathrm{id.}$ e $\psi_\lambda = 0$ se $\lambda \neq \mu$. As aplicações ψ_λ sendo A-lineares contínuas, a condição (SMT2) implica que existe uma única aplicação A-linear contínua p_μ tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "\psi_\lambda"] \arrow[d, "j_\lambda"'] & X_\mu \\ \widetilde{\bigoplus_{\nu\in\Lambda}} X_\nu \arrow[ur, dashed, "p_\mu"'] & \end{tikzcd} \qquad (\lambda\in\Lambda)$$

e como $p_\mu((x_\nu)_{\nu\in\Lambda}) = \sum_{\nu\in\Lambda}\psi_\nu(x_\nu) = \psi_\mu(x_\mu) = x_\mu$, resulta que $p_\mu = \pi_\mu|(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)$.

(b) O conjunto $\mathcal{B}$ dos conjuntos da forma $\prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ tais que V_λ é um aberto de X_λ para todo índice λ e $V_\lambda = X_\lambda$ salvo para um número finito de índices, é uma base de abertos de $\widetilde{\prod}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ e é claro que para todo $U \in \mathcal{B}$ se tem $U \cap (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) \neq \emptyset$.

(c) Suponhamos que $\Lambda = [1,n]$, como $\bigoplus_{1\leq i\leq n} X_i = \prod_{1\leq i\leq n} X_i$, basta ver que $\widetilde{\prod}_{1\leq i\leq n} X_i$ satisfaz a condição (SMT2). Dado um A-módulo topológico Y e aplicações f_i de X_i em Y $(1\leq i\leq n)$, a aplicação $f: \widetilde{\prod}_{1\leq i\leq n} X_i \to Y$ definida por $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\leq i\leq n} f_i(x_i)$ é contínua. De fato, se V é uma vizinhança de 0 em Y, existe uma outra vizinhança U de 0 em Y tal que $\overbrace{U + \ldots + U}^{n} \subset V$ e a continuidade de f_i implica que existe uma vizinhança W_i de 0 em X_i tal que $f_i(W_i) \subset U$ para cada índice i.

<u>Então</u> $f(\prod_{1\leq i\leq n} W_i) \subset \overbrace{U + \ldots + U}^{n} \subset V$.

(d) Indicamos com F o módulo $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ munido da topologia A-fina, da prop.1.3.11. e da hipótese feita sobre os X_λ resulta que j_λ é uma aplicação (A-linear) contínua de X_λ em F para todo índice λ, e como o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "j_\lambda"] \arrow[d, "j_\lambda"'] & F \\ \widetilde{\bigoplus}_{\mu\in\Lambda} X_\mu \arrow[ur, "id."'] & \end{tikzcd} \qquad (\lambda\in\Lambda)$$

é comutativo resulta, pelo lema 1.4.8., que id.: $\widetilde{\bigoplus}_{\mu\in\Lambda} X_\mu \to F$ é contínua. ∎

<u>Observações</u> (1) A recíproca da asserção (c) é falsa, basta tomar uma família infinita tal que todos os módulos excepto um se reduzem a (0).

(2) No caso da soma direta, a afirmação do lema 1.4.8. é consequência direta da prop. 1.4.2.,(2º).

(3) Seja $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ uma família finita de A-módulos topológicos e seja para cada índice i, M_i um submódulo de X_i. Indicamos por M o submódulo $\bigoplus_{1\leq i\leq n} M_i$ de $\bigoplus_{1\leq i\leq n} X_i$ munido da topologia induzida por $\widetilde{\bigoplus}_{1\leq i\leq n} X_i$.

Então, se tem

$$M = \widetilde{\bigoplus_{1\leq i\leq n}} M_i$$

Com efeito, notando j_i' a composta da inclusão $M_i \subset X_i$ com a injeção canônica $j_i : X_i \to \widetilde{\bigoplus_{1\leq p\leq n}} X_p$, é claro que $\operatorname{Im} j_i' \subset \bigoplus_{1\leq p\leq n} M_p$ e da definição de M segue que j_i' é uma aplicação (A-linear) contínua de M_i em M. Da definição 1.4.6. resulta que j_i' é uma aplicação (A-linear) contínua de M_i em $\widetilde{\bigoplus_{1\leq p\leq n}} M_p$ e como o diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "j_i'"] \arrow[d, "j_i'"'] & M \\ \widetilde{\bigoplus_{1\leq p\leq n}} M_p \arrow[ur, "id."'] & \end{tikzcd} \qquad (1\leq i\leq n)$$

é comutativo, do lema 1.4.8., segue que $id.: \widetilde{\bigoplus_{1\leq p\leq n}} M_p \to M$ é contínua. Inversamente, se $\pi_i : \widetilde{\prod_{1\leq p\leq n}} X_p \to X_i$ é a projeção canônica e π_i' é a restrição de π_i a M (o que faz sentido pela prop.1.4.9.,(c)) tem-se $\operatorname{Im} \pi_i' = M_i$, donde π_i' é uma aplicação (A-linear) contínua de M sobre M_i. A definição 1.3.1. acarreta que π_i' é uma aplicação (A-linear) contínua de $\widetilde{\prod_{1\leq p\leq n}} M_p$ sobre M_i e como o diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i & M \arrow[l, "\pi_i'"'] \arrow[dl, "id."] \\ \widetilde{\prod_{1\leq p\leq n}} M_p \arrow[u, "\pi_i'"] & \end{tikzcd} \qquad (1\leq i\leq n)$$

é comutativo, o lema 1.4.8. implica que $id.: M \to \widetilde{\prod_{1\leq p\leq n}} M_p = \widetilde{\bigoplus_{1\leq p\leq n}} M_p$ é contínua.

(4) Sejam $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos topológicos, j_λ a injeção canônica de X_λ em $\widetilde{\bigoplus_{\mu\in\Lambda}} X_\mu$ e X'_λ o módulo $\operatorname{Im} j_\lambda$ munido da topologia induzida por $\widetilde{\bigoplus_{\mu\in\Lambda}} X_\mu$. Então j_λ é um isomorfismo (de A-módulos topológicos) de X_λ sobre X'_λ. Com efeito, é claro que j_λ é uma bijeção A-linear contínua de X_λ sobre X'_λ, mostremos que j_λ^{-1} é contínua. Fixado um índice $\mu\in\Lambda$, consideremos a família (ψ_λ) de aplicações definidas na demonstração da prop.1.4.9.,(a); existe então uma única aplicação A-linear contínua ψ tal que $\psi_\lambda = \psi \circ j_\lambda$ para cada índice λ, e é claro que $\psi | X'_\mu = j_\mu^{-1}$ portanto j_μ^{-1} é contínua para cada índice $\mu\in\Lambda$.

Existe uma diferença bastante grande entre as estruturas iniciais e as finais em Mod Top_A, no sentido seguinte: para obter uma topologia inicial em Mod Top_A basta tomar a topologia inicial em Top e esta é compatível com a estrutura de A-módulo (prop.1.3.4.(a)). Já não acontece o mesmo com as topologias finais que produzem (com os mesmos dados) resultados diferentes em Mod Top_A e em Top, a topologia final em Top é (sempre mais fina) em geral estritamente mais fina que a topologia final em Mod Top_A como mostra o seguinte exemplo. Sejam A um anel topológico que não possui ideais abertos próprios, X um A-módulo e S um submódulo de X munido de uma topologia σ compatível com a estrutura de A-módulo de S. Sejam então ω e τ as topologias finais de X para a inclusão $S \subset X$ em Top e Mod Top_A respectivamente. É fácil ver ($[B_3]$,ch.1, §2, nº4,prop.8) que $S \in \omega$; de outro lado da prop.1.2.5. resulta que $S \notin \tau$, donde $\tau \subsetneq \omega$. Este tipo de problemas torna difícil de obter uma descrição das topologias finais em Mod Top_A (no sentido da prop.1.3.4.(c)). Porém há um caso particular importante em que esta descrição é simples, isto é o que afirma o seguinte:

Lema 1.4.10. *Sejam X um A-módulo topológico, Y um A-módulo, f uma aplicação A-linear de X sobre Y, τ a topologia final de Y em Mod Top_A para f e σ a topologia final de Y em Top para f. Então $\sigma = \tau$.*

Antes de começar a demonstração , observemos que como por definição

$$\sigma = \left\{ V \subset Y \mid f^{-1}(V) \text{ é aberto em } X \right\}$$

o lema 1.4.10. dá efetivamente uma descrição de τ.

Como σ é mais fina que τ é suficiente provar que σ é compatível com a estrutura de A-módulo de Y, para tanto vamos ter que usar uma expressão de σ com a qual seja mais fácil trabalhar. Seja

$$\omega = \left\{ f(V) \subset Y \mid V \text{ é aberto em } X \right\}$$

então vamos mostrar que $\sigma = \omega$ e que ω é compatível com a estrutura de A-módulo de Y.

(1º) Mostremos que $\sigma = \omega$. Seja $H = \operatorname{Ker} f$, então dado $V \in \sigma$, como f é sobrejetora existe um subconjunto G de X tal que $V = f(G) = f(G + H)$ donde (por definição de σ) $f^{-1}(f(G + H))$ é aberto em X e como $f^{-1}(f(G + H)) = G + H$ resulta que $G + H$ é aberto em X, portanto $V = f(G + H)$ é a imagem por f de um aberto de X o que implica $V \in \omega$. Inversamente, dado $V \in \omega$ existe um aberto W de X tal que $f(W) = V$.

Como W é aberto, $W + H$ é aberto e como $W + H = f^{-1}(f(W)) = f^{-1}(V)$ resulta que $f^{-1}(V)$ é aberto em X, donde $V \in \sigma$, o que prova que $\sigma = \omega$. No que segue consideraremos Y munido da topologia $\sigma = \omega$, da definição de σ segue que f é contínua (e de $\sigma = \omega$ segue que f é aberta, este fato não vai ser usado nesta prova).

(2º) ω <u>é compatível com a estrutura de grupo abeliano de</u> Y. Basta verificar que o conjunto $\mathcal{B}$ dos $f(V)$ de ω tais que $0 \in f(V)$ satisfaz os axiomas (GA'_I) e (GA'_{II}).

Verificação de (GA'_I): Dado $f(V) \in \mathcal{B}$ resulta que V é aberto em X e existe $x_0 \in V$ tal que $f(x_0) = 0$. Como a coleção das vizinhanças abertas de x_0 satisfaz (GA'_I), existe uma vizinhança aberta U de x_0 tal que $U + U \subset V$. Então $f(U) \in \mathcal{B}$ e $f(U) + f(U) \subset f(V)$.

Verificação de (GA'_{II}): De novo a relação $f(V) \in \mathcal{B}$ implica que V é aberto em X e existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$. Como a coleção das vizinhanças abertas de x_0 satisfaz (GA'_{II}), existe uma vizinhança aberta U de x_0 tal que $-U \subset V$. Então $f(U) \in \mathcal{B}$ e $-f(U) = f(-U) \subset f(V)$.

(3º) ω <u>é compatível com a estrutura de</u> A-<u>módulo de</u> Y. Vamos verificar os axiomas (MT'_I), (MT'_{II}) e (MT'_{III}).

(MT'_I) Dado $y_0 \in Y$, mostremos que a aplicação $\varphi : \lambda \in A \mapsto \lambda y_0 \in Y$ é contínua. De fato, como f é sobrejetora existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y_0$. Como a aplicação $\psi : \lambda \in A \mapsto \lambda x_0 \in X$ é contínua, a continuidade de φ segue da relação $\varphi = f \circ \psi$.

(MT'_{II}) Dado $\lambda_0 \in A$, mostremos que a aplicação $\varphi : y \in Y \mapsto \lambda_0 y \in Y$ é contínua. Como σ é a topologia final de Y em <u>Top</u> para f, resulta (cfr. $[B_3]$, ch.1, §2, nº4, prop.6):

$$\varphi \text{ é contínua} \Leftrightarrow \varphi \circ f \text{ é contínua} \quad (1.4.10.1.)$$

A continuidade da aplicação $\psi : x \in X \mapsto \lambda_0 x \in X$ e a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

mostram que $\varphi \circ f$ é contínua, donde por (1.4.10.1.) resulta que φ é contínua.

(MT'_{III}) A aplicação p_Y é contínua no ponto $(0,0)$. Dada uma vizinhança V de 0 em Y, a continuidade de f acarreta que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de 0 em X e como p_X é contínua em $(0,0)$, existem uma vizinhança S de 0 em A e uma vizinhança aberta W de 0 em X tais que

$$p_X(S \times W) = SW \subset f^{-1}(V) \qquad (1.4.10.2.)$$

Como $f(W)$ é uma vizinhança de 0 em Y, a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "id. \times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ A \times Y \arrow[r, "p_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

e a relação (1.4.10.2.) implicam que $p_Y(S \times f(W)) \subset V$. ∎

A aplicação mais importante do lema 1.4.10. é a definição de quocientes na categoria dos A-módulos topológicos.

Proposição 1.4.11. Sejam X um A-módulo topológico, S um submódulo de X, $\pi : X \to X/S$ a aplicação canônica e τ a topologia final de X/S em Mod Top_A para a aplicação π. Tem-se então

(a) X/S munido de τ é um A-módulo topológico.

(b) $\tau = \{V \subset X/S \mid \pi^{-1}(V)$ é aberto em $X\} = \{\pi(U) \mid U$ é aberto em $X\}$.

(c) Se $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em X, então $\pi(\mathcal{B})$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em X/S.

(d) A aplicação π é A-linear contínua e aberta.

(e) X/S é separado (resp. discreto) se e só se S é fechado (resp. aberto) em X.

(f) Se Y é um A-módulo topológico arbitrário e f é uma aplicação A-linear contínua de X em Y tal que $S \subset \mathrm{Ker}\, f$, então existe uma única aplicação A-linear contínua f_* de X/S em Y que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/S \arrow[ur, dashed, "f_*"'] & \end{tikzcd}$$

A afirmação (a) segue da prop.1.4.2.,(1º) e as afirmações (b), (c) e (d) resultam imediatamente do lema 1.4.10. . As duas afirmações (e) são válidas para grupos abelianos topológicos. A existência e unicidade da aplicação A-linear f_* tal que $f = f_* \circ \pi$ resulta do caso algébrico pela hipótese $S \subset \mathrm{Ker}\, f$. A continuidade de f_* segue da definição de τ, da comutatividade do diagrama e da continuidade de f. Com efeito, se V é um aberto de Y, provar que $f_*^{-1}(V)$ é aberto em X/S equivale a mostrar que $\pi^{-1}(f_*^{-1}(V))$ é aberto em X o que é evidente pois da relação $f = f_* \circ \pi$ segue que $\pi^{-1}(f_*^{-1}(V)) = (f_* \circ \pi)^{-1}(V) = f^{-1}(V)$ que é aberto pois f é contínua. ∎

Definição 1.4.12. Com as notações da prop.1.4.10., chama-se A-módulo topológico quociente de X por S ao A-módulo topológico obtido munindo o A-módulo X/S da topologia τ.

Se X e Y são A-módulos topológicos e $f : X \to Y$ é uma aplicação A-linear contínua, a prop.1.4.11., (f) permite associar a f uma aplicação A-linear contínua bijetora (dita associada a f)

$$\dot{f} : X/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$$

que em geral não é bicontínua. Esta observação motiva a seguinte:

Definição 1.4.13. Diz-se que uma aplicação A-linear contínua f de um A-módulo topológico X em um A-módulo topológico Y é um morfismo estrito de X em Y, se a aplicação A-linear contínua bijetora $\dot{f}$ de X/Ker f sobre Im f, associada a f, é um isomorfismo de A-módulos topológicos. (i.e. $\dot{f}$ é bicontínua)

Como caso particular da prop.24 de $[B_4]$, ch.3, §2, nº8, se tem o resultado:

Proposição 1.4.14. Seja f uma aplicação A-linear contínua de um A-módulo topológico X em um A-módulo topológico Y, as três proposições seguintes são equivalentes:

(i) f é um morfismo estrito.

(ii) f é uma aplicação aberta de X sobre Im f.

(iii) A imagem por f de toda vizinhança de 0 em X é uma vizinhança de 0 em Im f. ∎

1.5. Módulo topológico livre sobre um conjunto.

Definição 1.5.1. Sejam A um anel topológico e T um conjunto. Chama-se A-módulo topológico livre sobre T (abreviado no que segue por A-m.t.l. sobre T) a um par (L, j) tal que:

(MTL1) L é um A-módulo topológico e $j : T \to L$ é uma aplicação de conjuntos.

(MTL2) Para todo A-módulo topológico X e para toda aplicação de conjuntos $u : T \to X$, existe uma única aplicação A-linear contínua u_* de L em X tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"'] & X \\ L \arrow[ur, dashed, "u_*"'] & \end{tikzcd}$$

Proposição 1.5.2. Sejam A um anel topológico e T um conjunto. Têm-se as proposições seguintes:

(a) Se (L,j) é um A-m.t.l. sobre T, então j é injetora e $j(T)$ gera L como A-módulo.

(b) Se (L,j) e (L',j') são dois A-m.t.l. sobre T, então existe um único isomorfismo $j'_* : L \to L'$ tal que $j' = j'_* \circ j$.

(c) Existe um A-m.t.l. sobre T.

Sejam s e t dois elementos distintos de T e X um A-módulo topológico possuindo pelo menos dois pontos x e y. Define-se $u : T \to X$ por $u(s) = x$, $u(t) = y$ e $u(t') = 0$ se $t' \neq s,t$. Por (MTL2) existe uma aplicação A-linear contínua u_* de L em X tal que $u = u_* \circ j$, e então de $j(s) = j(t)$ resultaria $x = u(s) = u_*(j(s)) = u_*(j(t)) = u(t) = y$ o que é absurdo, portanto j é injetora. Seja X o submódulo de L gerado por $j(T)$ e seja i a inclusão $X \subset L$; por (MTL2), existe uma (única) aplicação A-linear (contínua) j_* que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & X \\ L \arrow[ur, dashed, "j_*"'] & \end{tikzcd}$$

e portanto $j_* | X = 1_X$ o que acarreta a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & L \\ L \arrow[ur, "i \circ j_*"'] & \end{tikzcd}$$

Pela unicidade exigida em (MTL2) resulta $i \circ j_* = 1_L$ o que prova que i é sobrejetora. Fica assim provado (a).

Por (MTL2) existem aplicações A-lineares contínuas $j'_* : L \to L'$ e $j_* : L' \to L$ tais que $j'_* \circ j = j'$ e $j_* \circ j' = j$. Como $j(T)$ e $j'(T)$ geram L e L' respectivamente, resulta que j_* e j'_* são isomorfismos recíprocos de A-módulos topológicos o que prova (b).

O par (L,j), onde $L = \tilde{A}^{(T)}$ e $j : T \to L$ é a aplicação definida por $t \mapsto e_t = (\delta_{st})_{s \in T}$ satisfaz a condição (MTL1). Sejam X um A-módulo topológico e $u : T \to X$ uma aplicação. Consideramos a família $(A_t)_{t \in T}$ definida por $A_t = A$ para todo índice t e para todo $t \in T$, seja $f_t : A_t \to X$ a aplicação definida por $f_t(\alpha) = \alpha . u(t)$. Como X satisfaz o axioma (MT'_I), a aplicação f_t é contínua para cada índice t, donde (por (SMT2)), existe uma única aplicação A-linear contínua u_* de $L = \tilde{A}^{(T)}$ em X tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} A_t \arrow[r, "f_t"] \arrow[d, "j_t"'] & X \\ \tilde{A}^{(T)} \arrow[ur, dashed, "u_*"'] & \end{tikzcd}$$

Em particular, para todo índice t, resultam as relações:

$$u(t) = f_t(1) = u_*(j_t(1)) = u_*(e_t) = u_*(j(t))$$

o que prova que o diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"'] & X \\ \tilde{A}^{(T)} \arrow[ur, dashed, "u_*"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. A unicidade de u_* resulta da relação $u_*(e_t) = u(t)$ para todo índice t e do fato de $(e_t)_{t\in T}$ ser uma base de $A^{(T)}$. ∎

Uma família $(a_t)_{t\in T}$ de elementos de um A-módulo topológico X determina (pela prop.1.5.2.,(c)) uma aplicação A-linear contínua

$$u_* : \tilde{A}^{(T)} \longrightarrow X$$

pela relação $u_*(e_t) = a_t$ para todo índice t. Nestas condições dir-se-á que u_* é a <u>aplicação determinada pela família</u> $(a_t)_{t\in T}$.

<u>Definição</u> 1.5.3. Um A-módulo topológico X é dito <u>topologicamente livre</u> se existe uma família $(a_t)_{t\in T}$ de elementos de X tal que a aplicação $u_* : \tilde{A}^{(T)} \longrightarrow X$ determinada pela família $(a_t)_{t\in T}$ é um isomorfismo de A-módulos topológicos (i.e. um homeomorfismo A-linear). A família $(a_t)_{t\in T}$ é chamada, neste caso, <u>base topológica</u> de X.

<u>Observação</u> Todo módulo topologicamente livre é livre mas a recíproca é falsa. Sejam T um conjunto não vazio <u>finito</u>, A um anel topológico <u>não caótico</u> e X o A-módulo topológico obtido munindo $A^{(T)} = A^T$ da topologia caótica. Resulta que a topologia de $\tilde{A}^{(T)} = \tilde{A}^T$ não é caótica e portanto para toda base $(a_t)_{t\in T}$ de $A^{(T)}$ a aplicação por ela determinada

$$u_* : \tilde{A}^T \longrightarrow X$$

é uma bijeção A-linear contínua que não é aberta.

<u>Teorema</u> 1.5.4. <u>Se</u> X <u>é um</u> A-<u>módulo topológico</u>, <u>então se têm as proposições seguintes:</u>

(a) Se $(a_t)_{t\in T}$ é uma base de X, são equivalentes as condições:

(i) $(a_t)_{t\in T}$ é uma base topológica de X.

(ii) Para todo A-módulo topológico Y e para toda família $(b_t)_{t\in T}$ de elementos de Y, a aplicação A-linear $f : X \to Y$ definida por

$$f(\sum_{t\in T}\lambda_t a_t) = \sum_{t\in T}\lambda_t b_t$$

é contínua ($(\lambda_t)_{t\in T}$ percorrendo as famílias de suporte finito de elementos de A).

(b) Se X é topològicamente livre, então para todo A-módulo topológico Y, se tem

$$L_A(X,Y) = \mathrm{Hom}_A(X,Y)$$

e em particular:

(α) Toda base (algébrica) de X é uma base topológica de X.

(β) A topologia de X é A-fina (cfr. Def.1.3.10.)

(a), (i) $\Rightarrow$ (ii). Sejam $u : T \to X$ e $v : T \to Y$ as aplicações definidas por $u(t) = a_t$ e $v(t) = b_t$ para todo índice t. Se u_* e v_* são as aplicações determinadas por $(a_t)_{t\in T}$ e $(b_t)_{t\in T}$ respectivamente, então é claro que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dd, "f"] \\
\tilde{A}^{(T)} \arrow[urr, "u_*"] \arrow[drr, "v_*"'] & T \arrow[l, "j"'] \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

é comutativo e em particular $v_* = f \circ u_*$. Para todo aberto U de Y, o conjunto $v_*^{-1}(U)$ é aberto em $\tilde{A}^{(T)}$ e como a condição (i) implica que u_* é um homeomorfismo, resulta que o conjunto

$$f^{-1}(U) = u_*(v_*^{-1}(U))$$

é aberto em X, donde f é contínua.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Seja $u : T \to X$ a aplicação definida por $u(t) = a_t$ para todo índice t e mostremos que (X,u) é um A-m.t.l. sobre T. Com efeito, é claro que (X,u) satisfaz (MTL1) e da condição (ii) segue que (X,u) satisfaz (MTL2). Então, da prop.1.5.2.,(b) resulta que existe um isomorfismo (único) de A-módulos topológicos $u_* : \tilde{A}^{(T)} \to X$ tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"'] & X \\ \tilde{A}^{(T)} \arrow[ur, "u_*"'] & \end{tikzcd}$$

e como $u_*(e_t) = a_t$ para todo índice t, resulta que u_* é a aplicação determinada pela família $(a_t)_{t\in T}$; sendo u_* um isomorfismo , $(a_t)_{t\in T}$ é uma base topológica de X.

(b) Sejam Y um A-módulo topológico e $g \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Sejam $(a_t)_{t\in T}$ uma base topológica de X e $(b_t)_{t\in T}$ a família de elementos de Y definida por $b_t = g(a_t)$ para todo índice t. Por (a), a aplicação $f : X \to Y$ definida por

$$f(\sum_{t\in T} \lambda_t a_t) = \sum_{t\in T} \lambda_t b_t$$

é (A-linear) contínua e é claro que $f(a_t) = b_t$ para todo índice t. Como $(a_t)_{t\in T}$ é uma base (algébrica) de X e as aplicações f e g são A-lineares e tomam o mesmo valor b_t no ponto a_t para todo índice t, resulta que f = g, donde g é contínua.

(α) Seja $(a'_t)_{t\in T}$ uma base de X, por (a) basta mostrar que se Y é um A-módulo topológico arbitrário e $(b_t)_{t\in T}$ é uma família qualquer de elementos de Y, a aplicação A-linear $f : X \to Y$ definida por

$$f(\sum_{t\in T} \lambda_t a'_t) = \sum_{t\in T} \lambda_t b_t$$

é contínua. Ora, $f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$ e pelo que precede, $f \in L_A(X,Y)$.

(β) Resulta de (b) e da prop.1.3.11. . ∎

<u>Corolário</u> 1.5.5. <u>Se</u> X <u>é um</u> A-<u>módulo topológico</u>, <u>então as condições seguintes são equivalentes</u>:

(i) X <u>é topologicamente livre</u>.

(ii) X <u>é livre</u> (<u>no sentido algébrico</u>) <u>e</u> A-<u>fino</u>.

A implicação (i)$\Rightarrow$(ii) segue do teor.1.5.4.,(b); inversamente como X é livre existe uma base $(a_t)_{t\in T}$ de X e então a aplicação A-linear contínua $u_* : \tilde{A}^{(T)} \to X$ é bijetora, donde $u_*^{-1} \in \mathrm{Hom}_A(X,\tilde{A}^{(T)}) = L_A(X,\tilde{A}^{(T)})$. ∎

<u>Corolário</u> 1.5.6. <u>Se</u> A = **R** <u>ou</u> **C** <u>e</u> X <u>é um</u> A-<u>espaço normado</u>, <u>então as seguintes condições são equivalentes</u>:

(i) X é A-fino.

(ii) $\dim_A X = n < \infty$.

A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) foi provada no exemplo 2 que segue à prop.1.3.11. .Recìprocamente, pela condição (ii) existe uma base finita $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ de X e por um teorema de Tychonoff, a aplicação A-linear $u_* : A^n \to X$ determinada por $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ (usamos aqui a notação habitual A^n para $\tilde{A}^T = \tilde{A}^{(T)}$ quando Card(T) = n) é um isomorfismo. ∎

Observações (1) Se A é separado e $(a_t)_{t\in T}$ é uma base topológica de X, então $(a_t)_{t\in T}$ é topológicamente livre. De fato, sejam $s\in T$, M o submódulo gerado por $(a_t)_{t\neq s}$ e $F = \{(\lambda_t)_{t\in T} \in A^{(T)} \mid \lambda_s = 0\}$. Como a aplicação $u_* : \tilde{A}^{(T)} \to X$ determinada por $(a_t)_{t\in T}$ é um isomorfismo e F é fechado resulta que $u_*(F) = M$ é fechado em X e $a_s \notin \bar{M} = M$

(2) Se $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de A-módulos topológicos, em geral, a topologia de $\tilde{\bigoplus}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ é estritamente mais fina que a induzida sobre $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ pela de $\tilde{\prod}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ como mostra o exemplo seguinte: tomemos $\Lambda = \mathbf{N}$, $A = X_\lambda = \mathbf{R}$ para todo $\lambda\in\Lambda$ e indiquemos com P o espaço $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ munido da topologia induzida por $\tilde{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}$ e por H o espaço $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ munido da topologia definida pelo produto escalar

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i\geq 0} x_i y_i \qquad (x = (x_i)\ ,\ y = (y_i))$$

É claro que P = H e então basta ver que $H \neq \tilde{\mathbf{R}}^{(\mathbf{N})}$. Com efeito, se $H = \tilde{\mathbf{R}}^{(\mathbf{N})}$ então para toda família $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de elementos de H, a aplicação

$$u_* : \tilde{\mathbf{R}}^{(\mathbf{N})} = H \to H$$

determinada por $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ seria contínua o que é falso como se vê tomando $a_n = ne_n$ $(e_n = (\delta_{nm})_{m\in\mathbf{N}})$.

CAPITULO 2

CONJUNTOS EQUILIBRADOS, CONVEXOS E LIMITADOS. MODULOS LOCALMENTE LIMITADOS.

2.1. Conjuntos equilibrados.

Definição 2.1.1. Chama-se anel equilibrado a um anel unitário topológico A (não necessàriamente comutativo) que satisfaz as duas condições seguintes:

(E1) $0 \in \overline{U(A)}$.

(E2) Existe um sistema fundamental $\mathcal{V}^*$ de vizinhanças de 0 em A tal que $V^2 = V.V \subset V$ para cada $V \in \mathcal{V}^*$.

Lema 2.1.2. Seja A um anel equilibrado, então

(a) Existe um sistema fundamental $\mathcal{V}$ de vizinhanças fechadas de 0 em A tal que $V^2 = V.V \subset V$ para cada $V \in \mathcal{V}$.

(b) Para cada vizinhança T de 0 em A, existem $\mu \in U(A) \cap T$ e $S \in \mathcal{V}$ tais que $S\mu \subset T$.

(a) De fato, dada uma vizinhança W de 0 em A, existe uma vizinhança fechada U de 0 em A tal que $U \subset W$ e existe $V \in \mathcal{V}^*$ tal que $V \subset U$. Da inclusão $V^2 \subset V$ e da continuidade do produto em A, segue que $\overline{V}^2 = \overline{V}.\overline{V} \subset \overline{V}$ e como $\overline{V} \subset \overline{U} = U$ resulta $\overline{V} \subset W$.

(b) A condição (E1) implica que existe $\mu \in U(A) \cap T$. Pela continuidade do produto em A no ponto $(0,\mu)$ existem uma vizinhança S' de 0 em A e uma vizinhança S" de μ em A tais que $S'S'' \subset T$ e em particular $S'\mu \subset T$. Por (a), existe $S \in \mathcal{V}$ tal que $S \subset S'$ donde $S\mu \subset T$. ∎

Definição 2.1.3. Sejam A um anel equilibrado, S uma vizinhança de 0 em A e X um A-módulo topológico. Diz-se que um subconjunto não vazio E de X é S-equilibrado se $SE \subset E$. O vazio é S-equilibrado.

Com as notações da definição anterior, é claro que se um subconjunto E de X é S-equilibrado, então $\overline{E}$ é $\overline{S}$-equilibrado; a reunião e a interseção de uma família qualquer de partes S-equilibradas de X, são partes S-equilibradas de X. Se P é um subconjunto de X, então o conjunto $\mathcal{E}_S(P)$ interseção de todos os conjuntos S-equilibrados que

contem P é um conjunto S-equilibrado que contem P e é claro que $\mathcal{E}_S(P)$ é o menor conjunto S-equilibrado que contem P. O conjunto $\mathcal{E}_S(P)$ chama-se S-envolvente equilibrada de P, as propriedades seguintes da envolvente equilibrada são evidentes:

(1º) Toda parte P de X possui S-envolvente equilibrada.

(2º) Uma parte de X é S-equilibrada se e só se coincide com sua S-envolvente equilibrada.

(3º) Para toda parte P não vazia de X, a S-envolvente equilibrada de P contem o zero; mais geralmente, toda parte S-equilibrada não vazia de X, contem o zero.

(4º) Se S e T são duas vizinhanças de 0 em A tais que $S \subset T$, então todo conjunto T-equilibrado é S-equilibrado e portanto $\mathcal{E}_S(P) \subset \mathcal{E}_T(P)$ para qualquer parte P de X.

Quando $P = \{x\}$, escrevemos $\mathcal{E}_S(x)$ em vez de $\mathcal{E}_S(\{x\})$.

Proposição 2.1.4. Sejam A um anel equilibrado, $\mathcal{V}^*$ o sistema fundamental de vizinhanças de 0 em A da condição (E2)(cfr. Def.2.1.1.), $S \in \mathcal{V}^*$ e X um A-módulo topológico. Têm-se então as proposições seguintes:

(a) $\mathcal{E}_S(P) = S.P \cup P$ para toda parte P de X.

(b) Se K é uma parte compacta de X, então a S-envolvente equilibrada de K é compacta sempre que S seja compacta.

As relações $S(SP \cup P) = S^2P \cup SP \subset SP \cup SP \subset SP \cup P$ mostram que $SP \cup P$ é uma parte S-equilibrada de X contendo P e se E é uma parte S-equilibrada que contem P, então $SP \cup P \subset SE \cup E \subset E$ o que prova (a). De outro lado SK é compacto por ser imagem contínua do compacto $S \times K$ e então $\mathcal{E}_S(K) = SK \cup K$ é compacto. ∎

Proposição 2.1.5. Sejam A um anel equilibrado, S uma vizinhança qualquer de 0 em A, X um A-módulo topológico e P um subconjunto de X. Então:

(a) Existe um subconjunto $\mathcal{N}_S(P)$ de X possuindo as duas propriedades seguintes:

(N1) $\mathcal{N}_S(P)$ é um S-equilibrado e $\mathcal{N}_S(P) \subset P$.

(N2) $\mathcal{N}_S(P)$ é o maior conjunto S-equilibrado contido em P.

(b) $\mathcal{N}_S(P) = \emptyset$ se e só se $0 \notin P$.

(c) Se S é fechada, então vale a implicação

$$P \text{ é fechado} \Rightarrow \mathcal{N}_S(P) \text{ é fechado.}$$

(d) $x \in \mathcal{N}_S(P)$ se e só se $\mathcal{E}_S(x) \subset P$.

(a) Definindo o conjunto $\mathcal{N}_S(P)$ como sendo a reunião de todas as partes S-equilibradas contidas em P, a verificação das propriedades (N1) e (N2) é trivial.

(b) Da (3º) das propriedades evidentes da envolvente equilibrada resulta que $\mathcal{N}_S(P) \neq \emptyset$ implica $0 \in \mathcal{N}_S(P)$ e como $\mathcal{N}_S(P) \subset P$, se obtem $0 \in P$; inversamente, se $0 \in P$, como $\{0\}$ é S-equilibrado, a condição (N2) acarreta que $\{0\} \subset \mathcal{N}_S(P)$, donde $\mathcal{N}_S(P) \neq \emptyset$.

(c) Como $\overline{\mathcal{N}_S(P)}$ é $\bar{S}$-equilibrado e S é fechado resulta que $\overline{\mathcal{N}_S(P)}$ é S-equilibrado; de outro lado como P é fechado, $\overline{\mathcal{N}_S(P)} \subset P$ e então por (N2) resulta $\mathcal{N}_S(P) = \overline{\mathcal{N}_S(P)}$.

(d) Se $x \in \mathcal{N}_S(P)$, então $\mathcal{N}_S(P)$ é um conjunto S-equilibrado que contem $\{x\}$, donde $\mathcal{E}_S(x) \subset \mathcal{N}_S(P)$ e portanto $\mathcal{E}_S(x) \subset P$. Inversamente, se $\mathcal{E}_S(x) \subset P$, por (N2) resulta $\mathcal{E}_S(x) \subset \mathcal{N}_S(P)$, donde $x \in \mathcal{N}_S(P)$. ∎

<u>Corolário</u> 2.1.6. <u>Sejam</u> A, ϑ^*, S <u>e</u> X <u>como na prop.</u>2.1.4. <u>e seja</u> P <u>um subconjunto de</u> X. <u>Então</u> $x \in \mathcal{N}_S(P)$ <u>se e só se</u> $Sx \cup \{x\} \subset P$.

Segue da prop.2.1.4.,(a) e da prop.2.1.5.,(d). ∎

<u>Definição</u> 2.1.7. Sejam A,S,X e P como na prop.2.1.5..O conjunto $\mathcal{N}_S(P)$ é chamado <u>núcleo</u> S-<u>equilibrado de P</u>.

É claro que P é S-equilibrado se e só se $P = \mathcal{N}_S(P) = \mathcal{E}_S(P)$.

<u>Proposição</u> 2.1.8. <u>Sejam</u> A <u>um anel equilibrado</u>, X <u>um</u> A-<u>módulo topológico e</u> ϑ <u>o sistema fundamental construido no lema</u> 2.1.2.,(a). <u>Então para cada vizinhança</u> V <u>de</u> 0 <u>em</u> X, <u>existe</u> $S \in \vartheta$ <u>tal que</u> $\mathcal{N}_S(V)$ <u>é uma vizinhança de</u> 0 <u>em</u> X.

Dada uma vizinhança V de 0 em X, pelo axioma (MT'_{III}) existem uma vizinhança W de 0 em X e uma vizinhança T de 0 em A tais que $TW \subset V$. Pelo lema 2.1.2.,(b) existem $\mu \in U(A) \cap T$ e $S \in \vartheta$ tais que $S\mu \subset T$. De $\mu \in T$ segue $\mu W \subset V$ e como μ é inversível resulta que μW é uma vizinhança de 0 em X, então é suficiente provar que $\mu W \subset \mathcal{N}_S(V)$. Seja $x \in \mu W$, usaremos o corol.2.1.6. para mostrar que $x \in \mathcal{N}_S(V)$. De $x \in \mu W \subset V$ segue $\{x\} \subset V$. De outro lado, $x = \mu w$ com $w \in W$, logo $Sx = S(\mu w) = (S\mu)w \subset Tw \subset TW \subset V$ e portanto $Sx \cup \{x\} \subset V$. ∎

Até agora não foi utilizado o sistema fundamental ϑ construido no lema 2.1.2.,(a) pois a parte (b) deste lema e a prop.2.1.8. poderiam ter sido demonstrados para o sistema ϑ^* da condição (E2). No resultado

seguinte vamos usar o lema 2.1.2. e a prop.2.1.8. combinados com a parte (c) da prop.2.1.5. o que vai exigir trabalhar com o sistema $\mathcal{V}$ do lema 2.1.2.,(a). Para simplificar a linguagem convencionaremos que a expressão

"V é equilibrado"

significa que

"Existe $S \in \mathcal{V}$ tal que V é S-equilibrado".

Sejam A um anel equilibrado, X um A-módulo topológico, L e M duas partes de X. Diz-se que L absorve M se existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $(S - \{0\}).M \subset L$. Diz-se que L é absorvente se L absorve toda parte reduzida a um ponto (i.e. para cada $x \in X$ existe uma vizinhança S_x de 0 em A tal que $(S_x - \{0\}).x \subset L$. É claro que se L é absorvente, então L absorve $\{0\}$ donde $0 \in L$ e em consequência a condição de L ser absorvente pode ser expressada assim: para cada $x \in X$ existe uma vizinhança S_x de 0 em A tal que $S_x.x \subset L$. Vamos usar esta noção no caso particular em que L é uma vizinhança de 0 em X para dar a seguinte formulação equivalente do axioma (MT'_I);

Toda vizinhança de 0 em X é absorvente.

Proposição 2.1.9. Sejam A um anel equilibrado e X um A-módulo. Têm-se as seguintes afirmações:

(1º) Se X é um A-módulo topológico, então existe um sistema fundamental $\mathcal{B}$ de vizinhanças fechadas de 0 em X tal que:

(M1) Todo conjunto $V \in \mathcal{B}$ é equilibrado e absorvente.

(M2) Para cada $V \in \mathcal{B}$ e para cada $\lambda \in A$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $\lambda W \subset V$.

(M3) Para cada $V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W + W \subset V$.

(2º) Inversamente, seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro sobre X satisfazendo as condições (M1),(M2) e (M3). Então existe uma única topologia sobre X, compatível com a estrutura de A-módulo, e para a qual $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0.

(1º) Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as vizinhanças fechadas e equilibradas de 0 em X, mostremos que $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0. Dada uma vizinhança arbitrária W de 0 em X, existe uma vizinhança fechada W' de 0 em X tal que $W' \subset W$ e pela prop.2.1.8. existe $S \in \mathcal{V}$ tal que $V = \mathcal{N}_S(W')$ é uma vizinhança de 0 em X e como W' é fechada, pela prop.2.1.5.,(c) resulta que V é fechada. É claro que

V é S-equilibrada portanto $V \in \mathcal{B}$ e como $V \subset W' \subset W$ resulta $V \subset W$. O axioma (MT'_I) implica que toda vizinhança de 0 em X é absorvente, em particular todo elemento de $\mathcal{B}$ é absorvente, portanto $\mathcal{B}$ satisfaz a condição (M1). A condição (M2) equivale a (MT'_{II}) e é claro que $\mathcal{B}$ satisfaz a condição (M3), pois esta traduz a continuidade da aplicação s_X.

(2º) Inversamente, seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro sobre X satisfazendo as condições (M1), (M2) e (M3). A condição (M1) mostra que $0 \in V$ para cada $V \in \mathcal{B}$. De fato $\mathcal{B}$ é não vazio e não contem o conjunto vazio, donde, para cada $V \in \mathcal{B}$ se tem $V \neq \emptyset$ e como V é equilibrada resulta $0 \in V$. Dado $V \in \mathcal{B}$, tomando $\lambda = -1$ em (M2), resulta que existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $-W \subset V$, o que junto à condição (M3) mostra que $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 para uma topologia sobre X compatível com a estrutura de grupo abeliano de X. Esta topologia é compatível com a estrutura de A-módulo de X pois (MT'_I) resulta de (M1); (MT'_{II}) é equivalente a (M2) e finalmente (MT'_{III}) se verifica pois dada uma vizinhança W de 0 em X, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset W$ e como V é equilibrada, existe $S \in \mathcal{V}$ tal que $SV \subset V \subset W$. ∎

Exemplos

(1) Os corpos R e C são exemplos de aneis equilibrados.

(2) Se **K** indica indiferentemente **R** ou **C** e T é um espaço topológico compacto, o anel $A = C(T,\mathbf{K})$ munido da topologia definida pela norma $\|f\| = \sup_{x \in T} |f(x)|$ é um anel equilibrado.

(3) No caso $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ o exemplo anterior é um caso particular do seguinte: Seja A uma álgebra de Banach (i.e. A é um **C**-espaço de Banach munido de uma multiplicação com elemento identidade e, verificando as condições: $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ e $\|e\| = 1$) então $\frac{1}{n}e$ é inversível em A e $\|\frac{1}{n}e\| = \frac{1}{n} \to 0$ se $n \to \infty$ o que mostra que se verifica a condição (E1). Seja, para cada inteiro $n > 0$, V_n a bola fechada de centro 0 e raio $1/n$, então a coleção dos V_n ($n \in \mathbf{N}$ e $n > 0$) é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 e se $f, g \in V_n$ então $\|f\| \leq 1/n$ e $\|g\| \leq 1/n$ donde $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\| \leq 1/n^2 \leq 1/n$, o que prova que se verifica a condição (E2).

(4) O anel A do exemplo que segue à prop.1.2.6. satisfaz obviamente a condição (E1); para verificar a condição (E2) basta tomar, por exemplo, $\mathcal{V}^*$ como sendo o conjunto de todas as interseções finitas de conjuntos da forma $\nabla(K,\alpha)$ com K compacto de T e $\alpha \leq 1$.

(5) Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, então $A = C(\Omega)$ é um anel equilibrado (ex. anterior). Seja $X = L_p^{loc}(\Omega)$ o espaço das funções p-localmente integráveis em Ω, então X é um A-módulo pois se $\varphi \in A$ e $f \in X$, então $\varphi f \in X$. De fato, indicando com μ a medida de Lebesgue sobre Ω, se K é um compacto de Ω e $c_K = \sup_K |\varphi(x)|^p$, então

$$\int_K |\varphi(x)f(x)|^p \, d\mu \leqslant c_K \int_K |f(x)|^p \, d\mu < \infty$$

Mostremos que X é um A-módulo topológico, para tanto indicamos com $W'(K,\varepsilon)$ o conjunto das funções $f \in X$ tais que $\|f\|_{p,K} \leqslant \varepsilon$ e com $W(K,\alpha)$ o conjunto das funções $\varphi \in A$ tais que $\|\varphi\|_K = \sup_K |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$. Se $\varphi_0 \in A$, a aplicação de X em X definida por $f \mapsto \varphi_0 f$ é contínua pois se $\|\varphi_0\|_K \neq 0$, então $f \in W'(K, \varepsilon/\|\varphi_0\|_K)$ implica que $\varphi_0 f \in W'(K,\varepsilon)$ o que prova (MT'_I). Fixado $f_0 \in X$, a aplicação $\varphi \mapsto \varphi f_0$ de A em X é contínua pois se $\|f_0\|_{p,K} \neq 0$ e $\alpha \leqslant \varepsilon \|f_0\|_{p,K}^{-1}$, então, $\varphi \in W(K,\alpha)$ implica $\varphi f_0 \in W'(K,\varepsilon)$, donde segue (MT'_{II}). Finalmente, se $\varphi \in W(K,\sqrt{\varepsilon})$ e $f \in W'(K,\sqrt{\varepsilon})$ então $\varphi f \in W'(K,\varepsilon)$ o que prova (MT'_{III}) (este exemplo é um caso particular de um "Ω-planeur", cfr. [C]).

2.2. Conjuntos convexos e conjuntos estrelados

Definição 2.2.1. Sejam A um anel topológico, X um A-módulo e J um subconjunto de A satisfazendo as três condições seguintes:

(C1) $0 \in J$ e $1 \in J$.

(C2) A translação de A definida por $\lambda \mapsto 1 - \lambda$ aplica J sobre J.

(C3) J é conexo.

Nestas condições

(a) Sejam $x,y \in X$; chama-se J-segmento de extremos x e y ao conjunto

$$J[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in J\}$$

(b) Sejam U e V dois subconjuntos não vazios de X tais que $U \subset V$. Diz-se que V é J-estrelado em relação a U, se para cada $u \in U$ e para cada $v \in V$, se tem $J[u,v] \subset V$. Em particular, se $U = V$, se diz que V é J-convexo. Por definição, o conjunto vazio é J-convexo.

Exemplos

(1) No caso $A = \mathbb{R}$ e $J = [0,1]$, se têm as noções habituais de segmento (fechado) e convexidade.

(2) Sejam $A = \mathbb{C}$ e $J = \{\alpha + i\beta \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ e } |\beta| \leqslant 1\}$, então é claro que J satisfaz às três condições (C1), (C2) e (C3) da Def.2.2.1.

(3) Sejam K um espaço topológico compacto, A o anel das funções complexas contínuas definidas em K munido da topologia definida pela norma $\|f\| = \sup_{t \in K} |f(t)|$ e j a injeção canônica de $\mathbf{C}$ em A. Se J é o subconjunto de $\mathbf{C}$ do exemplo anterior, então é fácil ver que j(J) é um subconjunto de A que satisfaz as três condições (C1),(C2) e (C3) da Def.2.2.1. .

(4) Se A é uma álgebra de Banach de elemento unidade e, o conjunto $J = \{\lambda e \mid \lambda \in \mathbf{R} \text{ e } 0 \leq \lambda \leq 1\}$ satisfaz as condições (C1),(C2) e (C3); para todo A-módulo as noções de J-segmento e J-convexidade coincidem com as habituais já que todo A-módulo pode ser considerado um $\mathbf{C}$-módulo por meio da isometria $\lambda \in \mathbf{C} \mapsto \lambda e \in A$.

Proposição 2.2.2. Sejam A,J e X como na Def.2.2.1., então

(a) Sejam $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ e $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ duas famílias de subconjuntos de X tais que V_λ é J-estrelado em relação a U_λ (para cada índice λ) e suponhamos que a interseção U da família (U_λ) é não vazia. Então, a interseção V da família (V_λ) é J-estrelada em relação a U. Em particular, interseção de J-convexos é J-convexo.

(b) Se V_1 e V_2 são J-estrelados em relação a U_1 e a U_2 respectivamente, então $V_1 + V_2$ é J-estrelado em relação a $U_1 + U_2$. Mais geralmente, se A é comutativo, $\alpha V_1 + \beta V_2$ é J-estrelado em relação a $\alpha U_1 + \beta U_2$ para todo $\alpha, \beta \in A$. Em particular, se V_1 e V_2 são J-convexos, então $V_1 + V_2$ é J-convexo e se A é comutativo então $\alpha V_1 + \beta V_2$ é J-convexo para todo $\alpha, \beta \in A$. ∎

Proposição 2.2.3. Sejam A,J e X como na Def.2.2.1.. Sejam Y um A-módulo e f uma aplicação A-linear de X em Y. Então

(a) A imagem por f de um J-segmento de X é um J-segmento de Y, mais precisamente, se $x_1, x_2 \in X$ então $f(J[x_1, x_2]) = J[f(x_1), f(x_2)]$.

(b) Se um subconjunto V de X é J-estrelado em relação a um subconjunto não vazio U de X, então f(V) é J-estrelado em relação a f(U); em particular, se V é J-convexo, então f(V) é J-convexo.

(c) Se um subconjunto W de Y é J-estrelado em relação a um subconjunto não vazio Z de Y e $f^{-1}(Z)$ é não vazio, então $f^{-1}(W)$ é J-estrelado em relação a $f^{-1}(Z)$; em particular, se W é J-convexo, então $f^{-1}(W)$ é J-convexo.

A afirmação (a) segue da Def.2.2.1. e as afirmações (b) e (c)

resultam de (a). ∎

Proposição 2.2.4. Seja $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos e sejam, para cada índice λ, U_λ e V_λ subconjuntos não vazios de X_λ tais que $U_\lambda \subset V_\lambda$. Então são equivalentes as condições seguintes:
(i) $V = \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ é J-estrelado em relação a $U = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ (em $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$).
(ii) V_λ é J-estrelado em relação a U_λ, para cada índice λ.
Em particular, V é J-convexo se e só se V_λ é J-convexo para cada índice λ.

Seja π_μ a projeção de X sobre X_μ, então $\pi_\mu(V) = V_\mu$ e $\pi_\mu(U) = U_\mu$ donde a implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) resulta da prop.2.2.3.,(b). Inversamente, como $V = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{-1}(V_\lambda)$ e $U = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$, da prop.2.2.3.,(c) e da prop. 2.2.2.,(a) segue a implicação (ii) $\Rightarrow$ (i). ∎

No caso dos espaços vetoriais reais a noção de convexidade é definida a partir de certos "convexos básicos" (os segmentos) pois um segmento é o conjunto convexo mais simples possível. Se E é um espaço vetorial real e para cada par de pontos $x,y \in E$ indicamos por f_{xy} a aplicação de $[0,1]$ em E definida por $\lambda \mapsto \lambda x + (1-\lambda)y$, então o segmento (fechado) de extremos x e y é a imagem de $[0,1]$ por f_{xy} e um subconjunto V de E é convexo quando contem as imagens de $[0,1]$ por todas as aplicações f_{xy} tais que $x,y \in V$. A definição 2.2.1. repete este processo mas apresentando o seguinte aspecto desagradável: não é evidente (nem mesmo verdade, em geral) que um segmento seja convexo. É fácil dar uma condição necessária e suficiente para que todo segmento seja convexo:

Proposição 2.2.5. Sejam A e J como na Def.2.2.1., então as condições seguintes são equivalentes:
(i) J é J-convexo.
(ii) Para cada A-módulo X, todo J-segmento de X é J-convexo.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sejam X um A-módulo e $x,y \in X$; mostremos que se $u,v \in J[x,y]$ então $J[u,v] \subset J[x,y]$. Com efeito, $u = \alpha x + (1-\alpha)y$, $v = \beta x + (1-\beta)y$ com $\alpha,\beta \in J$; portanto se $\lambda \in J$, então $\lambda u + (1-\lambda)v = \mu x + \mu' y$ onde $\mu = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$ e $\mu' = \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1-\beta)$. É imediato verificar que $\mu' = 1-\mu$; de outro lado por (i) resulta $\mu \in J$, donde por (C2) segue $\mu' = 1-\mu \in J$. Então $\lambda u + (1-\lambda)v = \mu x + (1-\mu)y$ com $\mu \in J$ o que prova que $\lambda u + (1-\lambda)v \in J[x,y]$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $\alpha,\beta \in J$ e mostremos que $J[\alpha,\beta] \subset J$, isto é, se $\lambda \in J$

então $\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \in J$. No A-módulo A^2 o conjunto $\{e_1, e_2\}$, onde $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ é livre. Consideremos os elementos

$$u = \alpha e_1 + (1-\alpha)e_2 \quad \text{e} \quad v = \beta e_1 + (1-\beta)e_2,$$

como $\alpha, \beta \in J$ resulta que $u, v \in J[e_1, e_2]$ e como por (ii), $J[e_1, e_2]$ é J-convexo, temos $J[u,v] \subset J[e_1, e_2]$ o que acarreta que para todo $\lambda \in J$, se tem $\lambda u + (1-\lambda)v \in J[e_1, e_2]$ e por definição de u e v então:

$$p = [\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta]e_1 + [\lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1-\beta)]e_2 \in J[e_1, e_2]$$

portanto existe $\lambda' \in J$ tal que $p = \lambda' e_1 + (1-\lambda')e_2$, donde $\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta = \lambda' \in J$. ∎

Sejam A, J e X como na Def.2.2.1. Se U é um subconjunto não vazio de X, então os conjuntos

$$\mathscr{C} = \{V \subset X \mid U \subset V \text{ e } V \text{ é J-estrelado em relação a } U\}$$
$$\mathscr{C}' = \{V \subset X \mid U \subset V \text{ e } V \text{ é J-convexo}\}$$

são não vazios pois X pertence a ambos. Da prop.2.2.2.,(a) resulta então:

(1º) O conjunto $\Sigma(U) = \bigcap_{V \in \mathscr{C}} V$ é J-estrelado em relação a U.

(2º) O conjunto $\Gamma(U) = \bigcap_{V \in \mathscr{C}'} V$ é J-convexo.

Além disso, é claro que $\Sigma(U)$ (resp. $\Gamma(U)$) é o menor conjunto J-estrelado (resp. J-convexo) que contem U; o conjunto $\Sigma(U)$ (resp. $\Gamma(U)$) chama-se J-<u>estrela</u> (resp. J-<u>convexo</u>) <u>gerada</u> (<u>o</u>) <u>por</u> U. Como $\Gamma(U)$ é J-convexo e $U \subset \Gamma(U)$, resulta que $\Gamma(U)$ é J-estrelado em relação a U, donde resulta $\Sigma(U) \subset \Gamma(U)$.

Seja A um anel topológico e sejam J_1 e J_2 dois subconjuntos de A que satisfazem as condições (C1),(C2) e (C3). Se $J_1 \subset J_2$, então para todo A-módulo X, se tem $J_1[x,y] \subset J_2[x,y]$ quaisquer que sejam $x, y \in X$, donde, todo conjunto J_2-convexo é também J_1-convexo. Em particular, se A é um anel topológico que contem **R** como subanel e se $J \subset A$ satisfaz as condições (C1),(C2) e (C3) e ainda $[0,1] \subset J$, então todo subconjunto J-convexo de um A-módulo X é convexo no sentido habitual em X para a estrutura de **R**-espaço vetorial sobre X obtida por restrição de escalares.

<u>Observação</u> Em todo este §2 não foi usada a condição (C3) imposta sobre J nem na realidade a topologia de A; estas hipóteses serão usadas a seguir.

2.3. Convexidade nos módulos topológicos

Proposição 2.3.1. Sejam A e J como na Def.2.2.1. e suponhamos que X é um A-módulo topológico. Então

(a) Todo J-segmento de X é conexo.

(b) Todo subconjunto J-convexo de X é conexo.

Sejam $x,y \in X$ e t a restrição a J da aplicação $\lambda \mapsto 1-\lambda$; como t é contínua de (C2) e (C3) segue que o gráfico G da aplicação t é conexo. Como $J[x,y]$ é a imagem de G pela aplicação contínua

$$(\lambda,\mu) \in A \times A \mapsto \lambda x + \mu y \in X$$

resulta (a). Seja V um conjunto J-convexo, se V é não vazio, existe $a \in V$ e então (b) segue de (a) já que V é a reunião dos segmentos $J[a,x]$ quando x percorre V. ∎

Proposição 2.3.2. Sejam A e J como na Def.2.2.1., X um A-módulo topológico e U,V dois subconjuntos não vazios de X tais que $U \subset V$. Se V é J-estrelado em relação a U, então $\overline{V}$ é J-estrelado em relação a $\overline{U}$. Em particular, se V é J-convexo, então $\overline{V}$ é J-convexo.

Para cada $\lambda \in J$, seja $g_\lambda : X \times X \to X$ a aplicação definida por $(x,y) \mapsto \lambda x + (1-\lambda)y$. Como V é J-estrelado em relação a U, g_λ aplica $U \times V$ em V, portanto, como g_λ é contínua aplica $\overline{U} \times \overline{V}$ em $\overline{V}$, o que prova que $\overline{V}$ é J-estrelado em relação a $\overline{U}$. ∎

Sejam A,J e X como na Def.2.2.1. e L,M dois subconjuntos de X; no resultado seguinte vai ser cômoda a notação $J[L,M]$ definida por

$$J[L,M] = \bigcup_{(x,y)\in L\times M} J[x,y]$$

Proposição 2.3.3. Sejam A,J e X como na prop.2.3.2. e V um subconjunto de X, J-estrelado em relação a um subconjunto U de X de interior não vazio. Suponhamos que $J[L,M]$ é aberto sempre que L e M o são. Então o interior $\mathring{V}$ de V é J-estrelado em relação ao interior $\mathring{U}$ de U.

A hipótese de V ser J-estrelado em relação a U acarreta a relação $J[\mathring{U},\mathring{V}] \subset V$, que juntada ao fato de $J[\mathring{U},\mathring{V}]$ ser aberto, implica que $J[\mathring{U},\mathring{V}] \subset \mathring{V}$. ∎

Definição 2.3.4. Sejam A,J e X como na prop.2.3.2. Diz-se que X é um A-módulo J-localmente convexo se existe um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em X, formado por conjuntos J-convexos. Diz-se que A é J-localmente convexo quando A é um A-módulo J-localmente convexo.

De forma análoga se pode definir módulo J-localmente estrelado.

Exemplos

(1) O caso clássico que inspira a Def.2.3.4. : $A = \mathbf{R}$, $J = [0,1]$ e X um $\mathbf{R}$-espaço localmente convexo.

(2) Sejam A e J como na Def.2.2.1. Se X é um A-módulo topológico e a topologia de X é linear (i.e. existe um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em X formado por submódulos, cfr. Ex.(2) logo após a prop.1.1.4.) então X é J-localmente convexo, pois todo submódulo é J-convexo.

(3) Sejam A uma álgebra de Banach de elemento unidade $\underline{e}$ e J o conjunto dos λe com λ real e compreendido entre 0 e 1. Então A é J-localmente convexo pois se indicamos com B_r a bola (aberta) de centro 0 e raio r, então $(B_r)_{r>0}$ é um sistema fundamental de vizinhanças J-convexas de 0. De fato, como foi observado no ex.(2) que segue a Def.2.2.1., neste caso as noções de J-convexidade e de convexidade no sentido habitual coincidem, e é claro que B_r é um conjunto convexo de A como $\mathbf{R}$-espaço normado.

(4) Sejam A e J como na Def.2.2.1. e suponhamos que A é J-localmente convexo. Vamos mostrar que é possível construir sobre cada A-módulo X, uma topologia J-localmente convexa a partir de um conjunto não vazio de formas lineares sobre X. De fato, seja Ω um subconjunto não vazio do dual (algébrico) $\mathrm{Hom}_A(X,A)$ de X; já vimos (exemplo que segue à Def.1.3.7., do qual usamos as notações) que a topologia $\sigma_A(A,\Omega)$ é compatível com a estrutura de A-módulo de X. Como A é J-localmente convexo, resulta que o conjunto $\mathcal{B}$ dos conjuntos do tipo

$$N(F,V) = \bigcap_{f \in F} f^{-1}(V)$$

onde F percorre os subconjuntos finitos de Ω e V percorre um sistema fundamental de vizinhanças J-convexas de 0 em A, é (pelas prop. 2.2.3.,(c) e prop.2.2.2.,(a)) um sistema fundamental de vizinhanças J-convexas de 0 em X.

(5) De modo mais geral, sendo A e J como na Def.2.2.1., se $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de A-módulos J-localmente convexos, X é um A-módulo e f_λ é uma aplicação A-linear de X em X_λ, para cada índice λ, então a topologia inicial τ de X em $\underline{\mathrm{Mod\ Top}}_A$ para a família de aplicações A-lineares $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é J-localmente convexa. Com efeito, seja $\mathcal{B}_\lambda$ um sistema fundamental de vizinhanças J-convexas de 0 em X_λ, para cada índice λ; então pela prop.1.3.4.(c), os conjuntos da forma

$$\bigcap_{1\leq i\leq n} f^{-1}_{\lambda_i}(V_{\lambda_i})$$

formam um sistema fundamental de τ-vizinhanças J-convexas de 0 em X (pelas prop.2.2.3.,(c) e prop.2.2.2.,(a))

Acabamos esta secção com a versão do teorema do ponto fixo de Markoff-Kakutani para módulos localmente convexos (a prova sendo praticamente a mesma, cfr. [B_6] , Ap.). Sejam A um anel comutativo (unitário) topológico e J um subconjunto de A que verifica, além das condições (C1),(C2) e (C3) da Def.2.2.1., a condição seguinte:

(MK) Para cada $n \in \mathbf{N}$, $n>0$, a equação em A:

$$n\alpha = 1$$

possui uma solução $\alpha_n \in J$ tal que 0 está no fecho do conjunto

$$\{\alpha_n \mid n \in \mathbf{N} \text{ e } n>0\}.$$

Nos quatro exemplos que seguem à Def.2.2.1., o conjunto J satisfaz a condição (MK).

Lema 2.3.5. Sejam A um anel comutativo topológico; J um subconjunto de A satisfazendo as condições (C1),(C2),(C3) e (MK); X um A-módulo e V um subconjunto J-convexo de X. Então, para todo $n \in \mathbf{N}$, $n>0$, se $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ é uma família de elementos de V, se tem $\alpha_n(x_1 + \dots + x_n) \in V$.

A prova, por indução, é trivial no caso $n = 1$. Seja $n>1$, e suponhamos por hipótese de indução

$$z = \alpha_{n-1}(x_1 + \dots + x_{n-1}) \in V$$

É claro que $(n-1)\alpha_n + \alpha_n = 1$, como $\alpha_n \in J$ a hipótese de V ser J-convexo junto as relações $z \in V$ e $x_n \in V$, acarretam $(n-1)\alpha_n z + \alpha_n x_n \in V$, o que acaba a demonstração pois por ser A comutativo, se tem: $(n-1)\alpha_n z + \alpha_n x_n = (n-1)\alpha_n.\alpha_{n-1}(x_1 + \dots + x_{n-1}) + \alpha_n x_n = \alpha_n(x_1 + \dots + x_n)$. ∎

Lema 2.3.6. Sejam X um A-módulo topológico, K um subconjunto quase-compacto de X e L um subconjunto quase-compacto de A, então

(a) Para cada vizinhança V de 0 em X, existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $SK \subset V$.

(b) Para cada vizinhança V de 0 em X, existe uma vizinhança W de 0 em X tal que $LW \subset V$.

(a) Para todo $x \in X$, a aplicação p_X é contínua no ponto $(0,x) \in A \times X$, donde, dada uma vizinhança V de 0 em X, existem uma vizinhança S_x de 0 em A e uma vizinhança U_x de x em X, U_x aberto, tal que $p_X(S_x \times U_x) = S_x U_x \subset V$. Como K é quase-compacto, existe um subconjunto finito F de K tal que $(U_x)_{x \in F}$ é uma subcobertura de $(U_x)_{x \in K}$ e então $S = \bigcap_{x \in F} S_x$ é uma vizinhança de 0 em A e é claro que $SK \subset V$.

(b) Mesmo raciocínio que em (a). ∎

<u>Observação</u> Com a linguagem que será introduzida na Def.2.4.1., a parte (a) do lema 2.3.6. diz que num módulo topológico, todo quase-compacto é limitado. A parte (b) do lema 2.3.6. será bastante útil nos Cap.3,4 e 5.

<u>Proposição</u> 2.3.7. <u>Sejam</u> A <u>um anel comutativo topológico</u>, J <u>um subconjunto de</u> A <u>satisfazendo as condições</u> (C1),(C2),(C3) <u>e</u> (MK), X <u>um</u> A-<u>módulo topológico separado</u>, K <u>um subconjunto compacto</u> J-<u>convexo de</u> X <u>e</u> Γ <u>um conjunto de aplicações</u> A-<u>lineares de</u> X <u>em</u> X, <u>duas a duas permutáveis que aplicam</u> K <u>em</u> K <u>e tal que para cada</u> $u \in \Gamma$, $u|K$ <u>é contínua. Então, existe um ponto</u> $x_0 \in K$ <u>tal que</u> $u(x_0) = x_0$ <u>para cada</u> $u \in \Gamma$.

Para cada $n > 0$ e para cada $u \in \Gamma$, seja

$$u_n = \alpha_n(1_X + u + \dots + u^{n-1})$$

então, como A é comutativo, $u_n \in \mathrm{End}_A(X)$. De outro lado, como $u(K) \subset K$ para cada $x \in K$ se tem: $x, u(x), \dots, u^{n-1}(x) \in K$ e então a J-convexidade de K junto ao lema 2.3.5. implica $u_n(x) \in K$, donde resulta que $u_n(K) \subset K$. Como a restrição a K de cada $u \in \Gamma$ é contínua, segue que $u_n|K$ é contínua. Seja

$$\Gamma_1 = \left\{ u_{n_1}^{(1)} \circ u_{n_2}^{(2)} \circ \dots \circ u_{n_t}^{(t)} \;\middle|\; u^{(1)}, \dots, u^{(t)} \in \Gamma \,;\, t, n_1, \dots, n_t > 0 \right\}$$

então é fácil verificar as seguintes propriedades:

(a) $v, w \in \Gamma_1 \Rightarrow v \circ w = w \circ v$.

(b) $v \in \Gamma_1 \Rightarrow v|K$ é contínua e $v(K) \subset K$.

Seja $\mathcal{B}$ o conjunto dos $v(K)$ para v percorrendo Γ_1, é claro que $\mathcal{B}$ é não vazio e $\emptyset \notin \mathcal{B}$; de outro lado, se $v, w \in \Gamma_1$, como $u = v \circ w = w \circ v$ resulta por (b): $u(K) \subset v(K) \cap w(K)$ o que mostra que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro sobre K. Como X é separado e os conjuntos de $\mathcal{B}$ são compactos, resulta que estes são fechados em K; sendo $\mathcal{B}$ uma base de filtro $\mathcal{B}$ tem a propriedade da interseção finita, donde $I = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \neq \emptyset$.

Mostremos que para todo $x \in I$, se tem $u(x) = x$ para cada $u \in \Gamma$. Com efeito dado $x \in I$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ se tem $u_n(K) \in \mathcal{B}$ donde $x \in$

$u_n(K)$, portanto existe $y \in K$ tal que $x = u_n(y) = \alpha_n(y + u(y) + \ldots + u^{n-1}(y))$, donde $u(x) = \alpha_n(u(y) + u^2(y) + \ldots + u^n(y))$ o que implica

$$u(x) - x = \alpha_n(u^n(y) - y) \in \alpha_n K'$$

onde K' é a imagem de K pela aplicação $\bar{s}_X$ de $X \times X$ em X definida por $(a,b) \mapsto a - b$. Como $\bar{s}_X$ é contínua, K' é compacto. Seja V uma vizinhança de 0 em X, pelo lema 2.3.6.,(a), existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $SK' \subset V$ e como por (MK), 0 é aderente ao conjunto dos α_n $(n \in N,\ n > 0)$, existe $m \in N$, $m > 0$ tal que $\alpha_m \in S$, donde

$$u(x) - x = \alpha_m(u^m(y) - y) \in V$$

o que prova que $u(x) - x \in V$ para cada vizinhança V de 0 em X e como X é separado resulta $u(x) = x$. ∎

2.4. Conjuntos limitados. Módulos localmente limitados.

Definição 2.4.1. Sejam A um anel topológico e X um A-módulo topológico. Um subconjunto B de X é dito limitado se para cada vizinhança V de 0 em X, existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $SB \subset V$. Diz-se que X é localmente limitado se X possui uma vizinhança de 0 limitada.

Os conjuntos finitos são limitados (pela continuidade de p_X); no caso particular em que o anel A é discreto, qualquer subconjunto de qualquer A-módulo topológico é limitado o que mostra que neste caso especial (do qual os grupos abelianos topológicos é um caso particular) esta noção é completamente inútil. Mas em qualquer outro caso, isto é, quando o anel topológico de base não for discreto, a noção de conjunto limitado é bastante interessante pois permite, entre outras coisas, definir todas as topologias que vão nos interessar sobre um módulo de aplicações lineares contínuas de um módulo topológico em outro como veremos no Cap.3 .O resultado seguinte reune as propriedades mais simples dos conjuntos limitados:

Proposição 2.4.2. Seja X um A-módulo topológico, então

(a) Todo subconjunto quase-compacto de X é limitado.

(b) Se Y é um A-módulo topológico, u é uma aplicação A-linear contínua de X em Y e B é um subconjunto limitado de X, então $u(B)$ é um subconjunto limitado de Y.

(c) Se B_1 e B_2 são subconjuntos limitados de X, então $B_1 \cup B_2$ e $B_1 + B_2$ são limitados.

(d) Se B é um subconjunto limitado de X, λB é um subconjunto limitado de X para todo $\lambda \in A$.

(e) Se X_0 é um submódulo de X e $B \subset X_0$, então B é limitado em X_0 se e só se B é limitado em X.

(f) Se B é limitado em X, então $\overline{B}$ é limitado em X.

(g) Todo subconjunto de um conjunto limitado em X, é limitado em X.

(a) É o lema 2.3.6.,(a). (b) Se V é uma vizinhança de 0 em Y, existe uma vizinhança U de 0 em X tal que $u(U) \subset V$ e como B é limitado, existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $SB \subset U$, donde $S.u(B) \subset V$. (c) Dada uma vizinhança V de 0 em X, existe uma outra vizinhança W de 0 em X tal que $W + W \subset V$; de outro lado existe uma vizinhan- S de 0 em A tal que $SB_1 \subset W$ e $SB_2 \subset W$. Então $S(B_1 \cup B_2) \subset W \subset V$ e $S(B_1 + B_2) \subset W + W \subset V$. (d) É um caso particular de (b). (e) Segue imediatamente da definição de topologia induzida. (f) Dada uma vizinhança V de 0 em X, seja U uma vizinhança fechada de 0 em X tal que $U \subset V$, então existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $SB \subset U$, donde pela continuidade de p_X resulta $S\overline{B} = p_X(S \times \overline{B}) \subset p_X(\overline{S \times B}) \subset \overline{p_X(S \times B)} \subset \overline{U} = U \subset V$. (g) É imediato a partir da Def.2.4.1. ∎

Dado um A-módulo topológico X, podemos associar os seguintes conjuntos de subconjuntos de X:

$$\mathbb{B}_X = \{B \subset X \mid B \text{ é limitado}\}.$$

$$\mathbb{F}_X = \{F \subset X \mid F \text{ é finito}\}.$$

$$\mathbb{K}'_X = \{R \subset X \mid \overline{R} \text{ é compacto}\}.$$

Com estas notações, se tem:

Corolário 2.4.3. Se X é separado, então, $\mathbb{B}_X$, $\mathbb{F}_X$ e $\mathbb{K}'_X$ são bornologias sobre X.

$\mathbb{F}_X$ é uma cobertura de X, é claro que $\mathbb{F}_X \subset \mathbb{K}'_X$ e de (a) e (g) da prop.2.4.2. resulta $\mathbb{K}'_X \subset \mathbb{B}_X$, donde, $\mathbb{K}'_X$ e $\mathbb{B}_X$ são coberturas de X. É evidente que $\mathbb{F}_X$ e $\mathbb{K}'_X$ são hereditárias e $\mathbb{B}_X$ é hereditária por (g). Finalmente, as três classes são estáveis para a reunião finita; para $\mathbb{F}_X$ e $\mathbb{K}'_X$ é evidente e para $\mathbb{B}_X$ segue da prop.2.4.2.,(c). ∎

Corolário 2.4.4. (a) Um A-módulo localmente limitado possui um sistema fundamental de vizinhanças limitadas de 0.

(b) Todo A-módulo localmente compacto é localmente limitado.

(c) Todo A-módulo compacto é limitado. (cfr.corol.2.4.7.)

(a) Segue da prop.2.4.2.,(g); (b) e (c) resultam da prop.2.4.2. (a). ∎

Corolário 2.4.5. Se X é um A-módulo localmente limitado, então

(a) Todo submódulo de X é localemente limitado.

(b) Toda imagem de X por um morfismo estrito é localmente limitada.

A afirmação (a) segue da prop.2.4.2.,(e) e a afirmação (b) resulta da prop.2.4.2.,(b) e da prop.1.4.14.,(iii). ∎

Proposição 2.4.6. Seja A um anel topológico separado verificando a condição

$$0 \in \overline{U(A)} \qquad (*)$$

e seja X um A-módulo topológico separado. Nestas condições se têm as seguintes asserções:

(1º) Para todo $x \in X - \{0\}$, o conjunto $U(A).x = \{\lambda x \mid \lambda \in U(A)\}$ não é limitado em X.

(2º) As condições seguintes são equivalentes:

(i) V é uma vizinhança limitada de 0 em X.

(ii) V é uma vizinhança de 0 em X e o conjunto $\mathcal{B}_V = \{\lambda V \mid \lambda \in U(A)\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em X.

(3º) O único submódulo limitado de X é (0).

(4º) Para toda vizinhança V de 0 em X, se tem $X = \bigcup_{\lambda \in U(A)} \lambda V$.

(1º) Como X é separado, existe uma vizinhança U de 0 em X tal que $x \notin U$, então para toda vizinhança S de 0 em A existe, pela condição $(*)$, $\lambda \in S \cap U(A)$, donde $\lambda^{-1} \in U(A)$ o que implica $x = \lambda . \lambda^{-1}.x \in S.U(A).x$.

(2º) (i) $\Rightarrow$ (ii) Todo elemento de $\mathcal{B}_V$ é uma vizinhança de 0 em X (pela prop.1.1.5.). De outro lado, se U é uma vizinhança arbitrária de 0 em X, como V é limitada, existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $SV \subset U$, e como a condição $(*)$ implica que existe $\lambda \in S \cap U(A)$, resulta $\lambda V \subset U$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dada uma vizinhança U de 0 em X, existem uma vizinhança S de 0 em A e uma vizinhança W de 0 em X tais que $SW \subset U$. Por (ii), existe $\lambda \in U(A)$ tal que $\lambda V \subset W$, donde $S(\lambda V) \subset SW \subset U$. Como $T = S\lambda$ é uma vizinhança de 0 em A (pois $\lambda \in U(A)$) resulta $S(\lambda V) = (S\lambda)V = TV \subset U$.

(3º) Seja X_0 um submódulo limitado de X e suponhamos por absurdo que $X_0 \neq (0)$. Então existe $x \in X_0$, $x \neq 0$ e por (1º) o conjunto

$U(A).x$ não é limitado em X. Mas de outro lado $U(A).x \subset X_o$, e como X_o é limitado (em X) a prop.2.4.2.,(g) acarreta que $U(A).x$ é limitado em X o que é absurdo.

(4º) Seja V uma vizinhança de 0 em X. Se $x \in X$, pelo axioma (MT'_I) existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $Sx \subset V$. Pela condição (*) existe $\lambda \in S \cap U(A)$, donde $\lambda x \in V$ o que implica $x \in \lambda^{-1} V \subset \bigcup_{\mu \in U(A)} \mu V$. ∎

<u>Corolário</u> 2.4.7. <u>Seja</u> A <u>um anel topológico separado verificando a condição</u>

$$0 \in \overline{U(A)}$$

<u>Tem-se então</u>:

(a) <u>O conjunto</u> U(A) (<u>como subconjunto do</u> A-<u>módulo topológico</u> A) <u>não é limitado.</u>

(b) <u>O único</u> A-<u>módulo</u> (<u>topológico</u>) <u>compacto é</u> (0).

A afirmação (a) resulta de aplicar (1º) da prop. anterior no caso particular X = A e x = 1. A asserção (b) segue do corol.2.4.4.,(c) e da proposição precedente,(3º). ∎

<u>Observações</u> (1) Como A não é suposto comutativo, em rigor deveríamos completar a Def.2.4.1. no caso particular em que X é um ideal de A e falar em subconjuntos de X limitados à direita e à esquerda e definir como subconjunto limitado de X, aquele que é limitado à esquerda e à direita simultâneamente (cfr. $[B_4]$, ex.12, §6).

(2) No Corol.2.4.4.,(b) e (c) não é necessária a hipótese de que os módulos sejam separados, i.e. estes resultados valem para módulos quase-compactos e "localmente quase-compactos".

(3) Um subconjunto L de um A-módulo topológico X é limitado se ele é absorvido por toda vizinhança de 0 em X.

CAPITULO 3

APLICAÇÕES LINEARES CONTINUAS

3.1. O A-módulo topológico $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$

Da secção 3.1. à 3.6. (inclusive) A indica um anel (unitário) comutativo topológico. Se X e Y são dois A-módulos topológicos, $\lambda \in A$ e u, v são elementos de $L_A(X,Y)$, consideramos as duas aplicações seguintes:

$$u + v : X \to Y, \text{ definida por } x \mapsto u(x) + v(x)$$

$$\lambda.u : X \to Y, \text{ definida por } x \mapsto \lambda.u(x)$$

É claro que $u + v$ é A-linear e que $\lambda.u$ é aditiva, como A é comutativo resulta que $\lambda.u$ é também A-linear. A aplicação $u + v$ é contínua pois se V é uma vizinhança de 0 em Y, existe uma vizinhança W de 0 em Y tal que $W + W \subset V$; como u e v são contínuas existe uma vizinhança U de 0 em X tal que $u(U) \subset W$ e $v(U) \subset W$ donde $(u + v)(U) \subset V$. A aplicação $\lambda.u$ é contínua pois é composta de u (contínua) com a homotetia de Y de razão λ que é contínua pelo axioma (MT'_{II}). Em definitivo temos

$$\lambda.u,\ u + v \in L_A(X,Y)$$

donde segue:

Lema 3.1.1. Se X e Y são dois A-módulos topológicos, então o conjunto $L_A(X,Y)$ munido das leis de composição $(u,v) \mapsto u + v$ e $(\lambda,u) \mapsto \lambda.u$ é um A-módulo. ∎

Sejam X um conjunto qualquer, $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes de X e Y um grupo abeliano topológico notado aditivamente. O conjunto $\mathcal{F}(X,Y)$ de todas as aplicações de X em Y está munido de uma estrutura de grupo abeliano aditivo produto das estruturas de grupo de seus fatores (pois $\mathcal{F}(X,Y) = \prod_{x \in X} Y_x$ com $Y_x = Y$ para cada $x \in X$). Para cada $B \in \mathfrak{S}$ e cada vizinhança V de 0 em Y, seja $\Gamma_0(B,V)$ o conjunto das $u \in \mathcal{F}(X,Y)$ tais que $u(B) \subset V$ e indiquemos por $\mathcal{S}$ o conjunto dos conjuntos do tipo $\Gamma_0(B,V)$ quando B percorre $\mathfrak{S}$ e V percorre o filtro das vizinhanças de 0 em Y. É claro então que o conjunto $\mathcal{B}$ das interseções finitas de conjuntos de $\mathcal{S}$ é uma base de filtro sobre $\mathcal{F}(X,Y)$. Mostremos que $\mathcal{B}$

satisfaz os axiomas (GA_I) e (GA'_{II})(na realidade, neste caso vale (GA_{II})).

(GA_I) Se $B \in \mathfrak{S}$ e V é uma vizinhança de 0 em Y, existe uma vizinhança W de 0 em Y tal que $W + W \subset V$, donde $\Gamma_0(B,W) + \Gamma_0(B,W) \subset \Gamma_0(B,V)$ o que mostra que $\mathfrak{S}$ satisfaz o axioma (GA_I) donde segue imediatamente que $\mathfrak{B}$ satisfaz o axioma (GA_I).

(GA_{II}) Resulta das identidades: $\Gamma_0(B, -V) = -\Gamma_0(B,V)$ e para todo conjunto finito F de índices:

$$-\left[\bigcap_{i\in F}\Gamma_0(B_i,V_i)\right] = \bigcap_{i\in F}\left[-\Gamma_0(B_i,V_i)\right] = \bigcap_{i\in F}\Gamma_0(B_i,-V_i)$$

Resulta então que existe uma única topologia τ sobre $\mathcal{F}(X,Y)$ compatível com a estrutura de grupo abeliano de $\mathcal{F}(X,Y)$ tal que $\mathfrak{B}$ é um sistema fundamental de τ-vizinhanças de 0. Esta topologia τ será chamada <u>topologia da convergência uniforme sobre as partes de $\mathfrak{S}$ (ou $\mathfrak{S}$-topologia) sobre</u> $\mathcal{F}(X,Y)$. Se M é um subconjunto qualquer de $\mathcal{F}(X,Y)$ chama-se <u>$\mathfrak{S}$-topologia sobre</u> M à topologia induzida sobre M pela $\mathfrak{S}$-topologia sobre $\mathcal{F}(X,Y)$. O grupo abeliano $\mathcal{F}(X,Y)$ munido da $\mathfrak{S}$-topologia é um grupo abeliano topológico que é indicado pela notação $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X,Y)$.

Se X é um conjunto, Y é um A-<u>módulo</u>, $\lambda \in A$, $u \in \mathcal{F}(X,Y)$ e $\lambda.u$ é a aplicação de X em Y definida por $x \mapsto \lambda.u(x)$, é claro que a lei externa $(\lambda,u) \mapsto \lambda u$ define, sobre o grupo abeliano $\mathcal{F}(X,Y)$, uma estrutura de A-módulo.

<u>Proposição</u> 3.1.2. <u>Sejam</u> X <u>um conjunto,</u> $\mathfrak{S}$ <u>um conjunto de partes de</u> X, Y <u>um</u> A-<u>módulo topológico e</u> M <u>um submódulo de</u> $\mathcal{F}(X,Y)$. <u>Então a</u> $\mathfrak{S}$-<u>topologia sobre</u> M <u>possui as propriedades seguintes:</u>

(1º) <u>É compatível com a estrutura de grupo abeliano de</u> M.

(2º) <u>Satisfaz os axiomas</u> (MT'_{II}) <u>e</u> (MT'_{III}).

(3º) <u>Satisfaz o axioma</u> (MT'_I) <u>se e só se</u> $u(B)$ <u>é limitado em</u> Y, <u>para cada</u> $u \in M$ <u>e para cada</u> $B \in \mathfrak{S}$.

A primeira afirmação sendo trivial, mostremos a segunda. Fixado $\lambda_0 \in A$, mostremos que a aplicação $u \in M \mapsto \lambda_0 u \in M$ é contínua. Dados $B \in \mathfrak{S}$ e uma vizinhança V de 0 em Y, como por hipótese a aplicação $y \in Y \mapsto \lambda_0 y \in Y$ é contínua, existe uma vizinhança W de 0 em Y tal que $y \in W \Rightarrow \lambda_0 y \in V$, donde segue que $u \in M \cap \Gamma_0(B,W) \Rightarrow \lambda_0 u \in M \cap \Gamma_0(B,V)$ o que prova (MT'_{II}). Mostremos que p_M é contínua em $(0,0)$. Sejam $B \in \mathfrak{S}$ e V uma vizinhança de 0 em Y. Como por hipótese p_Y é contínua, existem uma vizinhança S de 0 em A e uma vizinhança W de 0 em Y tais que $SW = p_Y(S \times W) \subset V$, donde resulta imediatamente que $p_M(S \times (M \cap \Gamma_0(B,W))) \subset$

$\subset M \cap \Gamma_0(B,V)$, o que prova (MT'_{III}). Vejamos finalmente a terceira asserção, suponhamos que se verifica o axioma (MT'_I), sejam $u_0 \in M$ e $B_0 \in \mathfrak{S}$ e mostremos que $u_0(B_0)$ é limitado. Dada uma vizinhança V de 0 em Y, o conjunto $M \cap \Gamma_0(B_0,V)$ é uma vizinhança de 0 em M e como a aplicação $\lambda \in A \mapsto \lambda.u_0 \in M$ é por hipótese contínua, existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $\lambda \in S$ implica $\lambda u_0 \in M \cap \Gamma_0(B_0,V)$, o que acarreta $S.u_0(B_0) \subset V$. Inversamente, mostremos que se a imagem de qualquer elemento de $\mathfrak{S}$ por qualquer aplicação de M é limitada, então se verifica o axioma (MT'_I). Fixado $u_0 \in M$ e dados $B \in \mathfrak{S}$ e uma vizinhança V de 0 em Y, como por hipótese $u_0(B)$ é limitado, existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $S.u_0(B) \subset V$ o que exprime que se $\lambda \in S$, então $\lambda u_0 \in M \cap \Gamma_0(B,V)$, portanto vale (MT'_I). ∎

<u>Corolário</u> 3.1.3. <u>Sejam</u> A <u>um anel topológico comutativo</u>, X <u>e</u> Y <u>dois</u> A-<u>módulos topológicos e</u> $\mathfrak{S}$ <u>um conjunto de partes limitadas de</u> X (i.e. $\mathfrak{S} \subset \mathbb{B}_X$). <u>Então a</u> $\mathfrak{S}$-<u>topologia sobre</u> $L_A(X,Y)$ <u>é compatível com a estrutura de</u> A-<u>módulo de</u> $L_A(X,Y)$.

A restrição a $L_A(X,Y)$ das leis de composição de $\mathcal{F}(X,Y)$ são as leis de composição consideradas no lema 3.1.1. portanto, $L_A(X,Y)$ é um submódulo de $\mathcal{F}(X,Y)$. Então o corolário resulta da proposição anterior e da prop.2.4.2.,(b). ∎

<u>Notações</u>: O A-módulo $L_A(X,Y)$ munido da $\mathfrak{S}$-topologia, será indicado por

$$L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$$

e para cada $B \in \mathfrak{S}$ e cada vizinhança V de 0 em Y, a interseção de $L_A(X,Y)$ com o conjunto $\Gamma_0(B,V)$ será indicada por

$$\Gamma(B,V).$$

Desta forma, o A-módulo topológico $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ possui um sistema fundamental de vizinhanças de 0, formado por todas as interseções finitas de conjuntos da forma $\Gamma(B,V)$, com B percorrendo $\mathfrak{S}$ e V percorrendo o filtro das vizinhanças de 0 em Y (ou uma base deste filtro).
Os casos mais importantes de $\mathfrak{S}$-topologia são os seguintes:

(1º) Quando $\mathfrak{S}$ é o conjunto $\mathbb{F}_X$ de todas as partes finitas de X, a $\mathfrak{S}$-topologia sobre $L_A(X,Y)$ é dita <u>topologia da convergência simples</u>.

(2º) Quando $\mathfrak{S}$ é o conjunto $\mathbb{K}_X$ de todas as partes compactas de X, a $\mathfrak{S}$-topologia sobre $L_A(X,Y)$ é chamada <u>topologia da convergência compacta</u>.

(3º) Quando $\mathfrak{S}$ é o conjunto $\mathbb{B}_X$ de todas as partes limitadas de X, a $\mathfrak{S}$-topologia sobre $L_A(X,Y)$ é chamada <u>topologia da convergência limitada</u>.

<u>Observações</u> (1) Se $\mathfrak{S}$ é estável para a reunião finita, então a relação

$$\Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} B_i, V) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma(B_i, V)$$

implica que o conjunto dos $\Gamma(B,V)$ (para B percorrendo $\mathfrak{S}$ e V percorrendo o filtro das vizinhanças de 0 em Y) é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$. É o que acontece nos casos $\mathfrak{S} = \mathbb{F}_X$, $\mathfrak{S} = \mathbb{K}_X$ e $\mathfrak{S} = \mathbb{B}_X$ (prop.2.4.2.,(c)).

(2) A $\mathfrak{S}$-topologia sobre $L_A(X,Y)$ não muda quando se substitui o conjunto $\mathfrak{S}$ pelo conjunto $\mathfrak{S}'$ das reuniões finitas de elementos de $\mathfrak{S}$, ou pelo conjunto $\mathfrak{S}''$ dos subconjuntos de elementos de $\mathfrak{S}$.

(3) O caso particular $A = \mathbb{Z}$. Se X é um $\mathbb{Z}$-módulo topológico, então todo subconjunto de X é limitado e portanto se $\mathfrak{S}$ é um conjunto qualquer de partes de X, então, para todo $\mathbb{Z}$-módulo topológico Y, o corol. 3.1.3. acarreta que a $\mathfrak{S}$-topologia é sempre compatível com a estrutura de $\mathbb{Z}$-módulo de $L_{\mathbb{Z}}(X,Y)$. De modo mais geral, as considerações anteriores valem sempre que A seja um anel topológico discreto.

3.2. <u>Condição para que $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ seja separado</u>.

<u>Definição</u> 3.2.1. Diz-se que um subconjunto T de um A-módulo topológico X é <u>total</u> se o submódulo fechado gerado por T é idêntico a X (i.e. se o conjunto das combinações lineares de elementos de T for denso em X).

<u>Proposição</u> 3.2.2. <u>Sejam</u> X <u>e</u> Y <u>dois</u> A-<u>módulos topológicos</u>, Y <u>separado e seja</u> $\mathfrak{S}$ <u>um conjunto de partes limitadas de</u> X <u>tal que a reunião</u> R <u>dos conjuntos de</u> $\mathfrak{S}$ <u>é total em</u> X. <u>Então</u> $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ <u>é separado</u>.

Seja $u \neq 0$ um elemento de $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$. Como R é total em X, existe $x_0 \in R$ tal que $u(x_0) \neq 0$ e como Y é separado, existe uma vizinhança V de 0 em Y tal que $u(x_0) \notin V$. Então, para cada $B \in \mathfrak{S}$ tal que $x_0 \in B$ se tem $u \notin \Gamma(B,V)$. ∎

Corolário 3.2.3. Se Y é um A-módulo topológico separado, então para cada A-módulo topológico X, os A-módulos topológicos

$$L_{\mathbb{F}_X}(X,Y)\ , \qquad L_{\mathbb{K}_X}(X,Y) \qquad \text{e} \qquad L_{\mathbb{B}_X}(X,Y)$$

são separados. ∎

3.3. Condição para que $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ seja J-localmente convexo.

Proposição 3.3.1. Seja Y um A-módulo J-localmente convexo (Def. 2.3.4.). Então $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ é um A-módulo J-localmente convexo, para cada A-módulo topológico X e para cada conjunto $\mathfrak{S}$ de partes limitadas de X.

Se V é uma vizinhança J-convexa de 0 em Y, então $\Gamma(B,V)$ é uma vizinhança J-convexa de 0 em $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ para cada $B \in \mathfrak{S}$. ∎

3.4. Partes limitadas de $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$.

Proposição 3.4.1. Sejam X e Y dois A-módulos topológicos, $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes limitadas de X e H um subconjunto de $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$, então são equivalentes as condições seguintes:

(i) H é um subconjunto limitado de $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$.

(ii) Para toda vizinhança V de 0 em Y, o conjunto $\bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$ absorve todo $B \in \mathfrak{S}$.

A condição (i) equivale a dizer que para todo $B \in \mathfrak{S}$ e para toda vizinhança V de 0 em Y, existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $SB \subset u^{-1}(V)$ para todo $u \in H$, e isto é precisamente (ii). ∎

3.5. Partes equicontínuas de $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$.

Não voltaremos sobre a definição e as considerações gerais sobre equicontinuidade em grupos topológicos (cfr. $[B_5]$ e [Hu]). Nesta secção é cômodo introduzir algumas notações. Seja X um A-módulo topológico, então indicamos por

$\mathcal{V}_X$ = conjunto das vizinhanças de 0 em X.

$\mathcal{V}_X^L$ = conjunto das vizinhanças limitadas de 0 em X.

$\mathcal{V}_X^F$ = conjunto das vizinhanças fechadas de 0 em X.

É claro que $\mathcal{V}_X^F$ é uma base do filtro $\mathcal{V}_X$; o conjunto $\mathcal{V}_X^L$ ou é vazio ou também é uma base do filtro $\mathcal{V}_X$.

Se Y é um outro A-módulo topológico e P (resp.Q) é um subconjunto qualquer de X (resp.Y) então notamos

$$\Gamma(P,Q) = \{u \in L_A(X,Y) \mid u(P) \subset Q\}.$$

O resultado seguinte é trivial, apenas reune várias formas (não muito diferentes) de expressar a equicontinuidade.

Proposição 3.5.1. Sejam X e Y dois A-módulos topológicos, $\mathcal{B}$ um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em Y e H um subconjunto de $L_A(X,Y)$. As condições seguintes são equivalentes:

(i) H é equicontínuo.

(ii) H é equicontínuo em 0.

(iii) Para cada vizinhança V de 0 em Y, existe uma vizinhança U de 0 em X tal que $H \subset \Gamma(U,V)$.

(iii') Para cada $V \in \mathcal{B}$, existe uma vizinhança U de 0 em X tal que $H \subset \Gamma(U,V)$.

(iv) Para cada $V \in \mathcal{B}$, o conjunto $\bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$ é uma vizinhança de 0 em X. ∎

Definição 3.5.2. Diz-se que $(Y,\mathcal{V})$ é um A-par admissível se Y é um A-módulo localmente limitado e $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças limitadas de 0 em Y, satisfazendo a seguinte condição:

(VE) Para cada $(V,W) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, existe $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$ (que depende só do par ordenado (V,W)) tal que $y \notin V \Rightarrow ny \notin W$.

Um A-módulo localmente limitado Y é dito admissível, se existe um sistema fundamental $\mathcal{V}$ de vizinhanças limitadas de 0 em Y tal que $(Y,\mathcal{V})$ é um par admissível.

É fácil ver que os $\mathbf{Z}$-módulos $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ são admissíveis. Os dois resultados que seguem exibem outros exemplos de pares e módulos admissíveis.

Proposição 3.5.3. Seja A um anel unitário comutativo topológico que satisfaz a condição:

(C) Para cada vizinhança S de 0 em A, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $1/n \in S$.

Então, para todo A-módulo localmente limitado Y, o par $(Y,\mathcal{V}^L_Y)$ é admissível (em particular todo espaço normado é admissível).

Suponhamos por absurdo que existe um par (V,W) de vizinhanças limitadas de 0 em Y tal que para todo $m \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 1$ existe $z_m \in Y$ verificando as relações $z_m \notin V$ e $mz_m \in W$. Seja $Z = \{mz_m \mid m \in N \text{ e } m \geqslant 1\}$; é claro que $Z \subset W$ e como W é limitada é suficiente provar que Z não

é limitado. Se Z fosse limitado, para cada vizinhança U de 0 em Y existe uma vizinhança U' de 0 em A tal que $U'Z \subset U$; e em particular, para U = V existe uma vizinhança V' de 0 em A tal que $V'Z \subset V$. De outro lado, pela condição (C), existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $1/n \in V'$, donde, pela inclusão anterior resultaria

$$\frac{1}{n}(mz_m) \in V \quad \text{para cada } m \in \mathbf{N}$$

donde $\frac{1}{n}(nz_n) = z_n \in V$ o que é absurdo. ∎

Exemplos: Os corpos $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ e o anel $C(T,\mathbf{K})$ do exemplo que segue ao corol.1.2.6., satisfazem òbviamente a condição (C) da prop.3.5.3. .

Proposição 3.5.4. Sejam A um anel unitário comutativo topológico, Y um A-módulo munido de uma métrica d tal que a topologia associada a d é compatível com a estrutura de A-módulo de Y. Se d satisfaz a condição

$$d(ny,0) = n.d(y,0) \text{ para todo } y \in Y;\ n \in \mathbf{N}$$

então Y é admissível, se Y for localmente limitado.

Seja, para todo real positivo r, $B_r = \{y \in Y \mid d(y,0) < r\}$ e seja $\mathcal{V}$ o conjunto das B_r com $r \in R$, $r > 0$. Então, é fácil verificar que $(Y,\mathcal{V})$ é um par admissível. ∎

Lema 3.5.5. Sejam X e Y dois A-módulos topológicos e $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes limitadas de X tal que

$$\mathbb{F}_X \subset \mathfrak{S}$$

Tem-se então:

(1º) Se X_0 é uma parte não vazia de X e $V \in \mathcal{V}_Y^F$, então $\Gamma(X_0,V)$ é fechado em $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$.

(2º) Se H é um subconjunto de $L_A(X,Y)$, as condições seguintes são equivalentes:

(i) H é equicontínua.

(ii) $\bar{H}^{\mathfrak{S}}$ é equicontínua ($\bar{H}^{\mathfrak{S}}$ é o fecho de H na $\mathfrak{S}$-topologia).

(iii) $\bar{H}^{\mathbb{F}_X}$ é equicontínua.

(1º) Para cada $x \in X$, a aplicação

$$f_x : L_{\mathbb{F}_X}(X,Y) \to Y$$

definida por $u \mapsto u(x)$ é contínua pois se W é uma vizinhança de 0 em Y, se tem $f_x(\Gamma(\{x\},W)) = W$. Como V é fechada por hipótese, da continuidade de f_x segue que $\Gamma(\{x\},V) = f_x^{-1}(V)$ é fechado em $L_{\mathbb{F}_X}(X,Y)$

para cada $x \in X$, donde resulta que o conjunto

$$\Gamma(X_o, V) = \bigcap_{x \in X_o} \Gamma(\{x\}, V)$$

é fechado em $L_{\mathbb{F}_X}(X,Y)$ e portanto em $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$.

(2º) A relação $\mathbb{F}_X \subset \mathfrak{S}$ acarreta $H \subset \bar{H}^{\mathfrak{S}} \subset \bar{H}^{\mathbb{F}_X}$, donde (iii)$\Rightarrow$(ii) $\Rightarrow$(i). Para mostrar que (i)$\Rightarrow$(iii) aplicamos a condição (iii') da prop.3.5.1. com $\mathcal{B} = \vartheta_Y^F$. Dada uma vizinhança fechada V de 0 em Y, existe por (i), uma vizinhança U de 0 em X tal que $H \subset \Gamma(U,V)$ e então, por (1º), $\bar{H}^{\mathbb{F}_X} \subset \Gamma(U,V)$. ∎

<u>Lema</u> 3.5.6. <u>Sejam</u> X <u>um</u> A-<u>módulo topológico e</u> (Y,ϑ) <u>um par admissível</u> <u>Então</u>, <u>para cada vizinhança</u> U <u>de</u> 0 <u>em</u> X <u>e para cada</u> $V \in \vartheta$, <u>o conjunto</u> $E = \Gamma(U,V)$ <u>é equicontinuo em</u> $L_A(X,Y)$.

Suponhamos por absurdo que E não é equicontínuo, pela prop.3.5.1. (iii') se tem então:

Existe $V_o \in \vartheta$ tal que $E \not\subset \Gamma(W, V_o)$ para cada vizinhança W de 0 em X. (1)

Pela condição (VE) da Def.3.5.2., ao par (V_o, V) corresponde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ tal que

$$nz \notin V \quad \text{para cada } z \notin V_o \qquad (2)$$

Seja W uma vizinhança de 0 em X tal que $W + \overset{n}{\cdots} + W \subset U$, então por (1) existem $u \in E$ e $x \in W$ tais que $u(x) \notin V_o$, donde por (2), $n.u(x) \notin V$ o que é absurdo pois $nx \in W + \overset{n}{\cdots} + W \subset U$ e portanto $n.u(x) = u(nx) \in u(U) \subset V$ pois $u \in E$. ∎

<u>Lema</u> 3.5.7. <u>Com as mesmas hipóteses e notações do lema</u> 3.5.6., <u>para cada</u> $V \in \vartheta$, <u>se tem</u> $\Gamma(X,V) = (0)$, <u>se</u> Y <u>é separado</u>.

Suponhamos por absurdo que existe $V \in \vartheta$ tal que $\Gamma(X,V) \neq (0)$, então existem $u \in \Gamma(X,V)$ e $x \in X$ tais que $z = u(x) \in V - \{0\}$. Sendo Y separado e $z \neq 0$, existe $W \in \vartheta$ tal que $z \notin W$. Seja $n \in N$, $n \geqslant 1$ o inteiro que corresponde ao par (W,V) pela condição (VE) da Def.3.5.2.. Então $ny \notin V$ para cada $y \notin W$, donde $nz \notin V$ o que é absurdo pois $nz = nu(x) = u(nx) \in u(X) \subset V$. ∎

<u>Observações</u> (1) Seja (Y,ϑ) um par admissível e suponhamos que a topologia de Y não é caótica, então $Y \notin \vartheta$. Suponhamos por absurdo que $Y \in \vartheta$. Dado $V \in \vartheta$ arbitrário, ao par (V,Y) corresponde $h \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$

tal que $y \notin V$ implica $ny \notin Y$, donde $\complement V = \emptyset$ e portanto $\vartheta = \{Y\}$ e como ϑ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em Y, resulta que Y é caótico contra o suposto.

(2) A noção de par admissível (Def.3.5.2.) e suas propriedades assinaladas nos lemas 3.5.6. e 3.5.7., assim como o lema 3.5.5., serão utilizadas na prova da prop.5.1.5. que exibe exemplos de módulos de aplicações lineares contínuas localmente compactas, e no cap.5 para obter o princípio da limitação uniforme.

Proposição 3.5.8. Sejam X e Y dois A-módulos topológicos e H um subconjunto de $L_A(X,Y)$. Se H é equicontínuo, então H é limitado em $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ para todo conjunto não vazio $\mathfrak{S}$ de partes limitadas de X.

Pela prop.3.4.1., basta ver que para toda vizinhança V de 0 em Y, o conjunto $\bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$ absorve todo $B \in \mathfrak{S}$, o que é evidente pois pela prop.3.5.1. o conjunto $\bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$ é uma vizinhança de 0 em X e portanto absorve toda parte limitada de X. ∎

Corolário 3.5.9. Se X é um A-módulo localmente limitado e (Y,ϑ) é um A-par admissível, então $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ é localmente limitado para cada $\mathfrak{S}$ tal que $\mathfrak{S} \cap \vartheta_X \neq \emptyset$.

Com efeito, sejam U uma vizinhança limitada de 0 em X tal que $U \in \mathfrak{S}$ e seja $V \in \vartheta$, então $\Gamma(U,V)$ é uma vizinhança de 0 em $L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$, é equicontínua pelo lema 3.5.6. e é então limitada pela prop.3.5.8. ∎

3.6. Alguns isomorfismos canônicos.

Proposição 3.6.1. Sejam A um anel topológico comutativo e $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes compactas de A tal que 1 pertence à reunião dos elementos de $\mathfrak{S}$. Então para todo A-módulo X, existe um isomorfismo de A-módulos topológicos: $X \simeq L_{\mathfrak{S}}(A,X)$.

Toda aplicação A-linear de A em X é da forma $k_x : \lambda \mapsto \lambda x$ (onde x é o valor da aplicação em 1) e k_x é contínua pelo axioma (MT_I') donde $L_A(A,X) = \mathrm{Hom}_A(A,X)$ o que mostra que a aplicação f de X em $L_{\mathfrak{S}}(A,X)$ definida por $x \mapsto k_x$ é uma bijeção A-linear. Dados $L \in \mathfrak{S}$ e uma vizinhança V de 0 em X existe (lema 2.3.6.,(b)) uma vizinhança W de 0 em X tal que $LW \subset V$, donde $f(W) \subset \Gamma(L,V)$ o que prova que f é contínua. Finalmente, se U é uma vizinhança de 0 em X, por hipótese existe $L \in \mathfrak{S}$ tal que $1 \in L$ e então $f^{-1}(\Gamma(L,U)) \subset U$, donde f^{-1} é contínua. ∎

Proposição 3.6.2. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos topológicos, X um A-módulo, f_λ uma aplicação A-linear de X_λ em X para cada índice λ, $\mathfrak{S}_\lambda$ um conjunto de partes limitadas de X_λ para cada índice λ e $\mathfrak{S} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(\mathfrak{S}_\lambda)$. Indicamos com $\tilde{X}$ o A-módulo X munido da topologia final em Mod Top_A para a família de aplicações $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Então para cada A-módulo topológico Y, a $\mathfrak{S}$-topologia sobre $L_A(\tilde{X},Y)$ é a topologia inicial em Mod Top_A para a família de aplicações A-lineares

$$\Phi_\lambda : L_A(\tilde{X},Y) \to L_{\mathfrak{S}_\lambda}(X_\lambda,Y)$$

definida por $u \mapsto u\circ f_\lambda$.

Sejam $\mathcal{T}$ a topologia inicial em Mod Top_A sobre $L_A(\tilde{X},Y)$ para a família de aplicações $(\Phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ o sistema fundamental de $\mathcal{T}$-vizinhanças de 0 dado pela prop.1.3.4.,(c) e $\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}$ o sistema fundamental de vizinhanças de 0 para a $\mathfrak{S}$-topologia formado pelas interseções finitas de conjuntos do tipo $\Gamma(B,V)$ com B percorrendo $\mathfrak{S}$ e V percorrendo o filtro das vizinhanças de 0 em Y. Então, as hipóteses feitas, acarretam imediatamente que $\mathcal{B}_{\mathcal{T}} = \mathcal{B}_{\mathfrak{S}}$. ∎

Corolário 3.6.3. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos topológicos, $\mathfrak{S}_\lambda$ um conjunto de partes limitadas de X_λ para cada índice λ, $j_\mu : X_\mu \to \tilde{\bigoplus}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ a injeção canônica e $\mathfrak{S} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda(\mathfrak{S}_\lambda)$. Então, para todo A-módulo topológico Y, existe um isomorfismo de A-módulos topológicos

$$L_{\mathfrak{S}}(\tilde{\bigoplus}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Y) \overset{\Phi}{\underset{\sim}{\to}} \tilde{\prod}_{\lambda\in\Lambda} L_{\mathfrak{S}_\lambda}(X_\lambda,Y) .$$

Aplicando a prop.3.6.2. no caso particular $\tilde{X} = \tilde{\bigoplus}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ e $f_\lambda = j_\lambda$ para todo índice λ, obtemos uma família de aplicações A-lineares contínuas:

$$\Phi_\mu : L_{\mathfrak{S}}(\tilde{\bigoplus}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Y) \to L_{\mathfrak{S}_\mu}(X_\mu,Y) \qquad (\mu\in\Lambda)$$
$$u \mapsto u\circ j_\mu$$

donde (Def.1.3.1.) resulta que existe uma única aplicação A-linear contínua Φ que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
L_{\mathfrak{S}_\mu}(X_\mu,Y) & L_{\mathfrak{S}}(\tilde{\bigoplus}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Y) \arrow[l, "\Phi_\mu"'] \arrow[dl, dashed, "\Phi"] \\
\tilde{\prod}_{\lambda\in\Lambda} L_{\mathfrak{S}_\lambda}(X_\lambda,Y) \arrow[u, "p_\mu"] &
\end{tikzcd}$$

A aplicação Φ é injetora pois $\Phi(u) = 0$ implica $0 = p_\mu(\Phi(u)) = \Phi_\mu(u) = u \circ j_\mu$ para todo $\mu \in \Lambda$, donde, pela condição (SMT2) da Def. 1.4.6., resulta $u = 0$. A aplicação Φ é sobrejetora pois se $u_\lambda \in L_{\mathfrak{S}_\lambda}(X_\lambda, Y)$ para todo índice λ, por (SMT2) existe uma única aplicação $u \in L_A(\widetilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda, Y)$ tal que $u_\lambda = u \circ j_\lambda$ para todo índice λ, donde $\Phi(u) = (u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Mostremos que Φ é aberta, é claro que isto equivale a provar que a topologia τ, imagem recíproca por Φ da topologia de $\widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} L_{\mathfrak{S}_\lambda}(X_\lambda, Y)$, é mais fina que a $\mathfrak{S}$-topologia. Pelo lema 1.3.3., τ é compatível com a estrutura de A-módulo de $L_A(\widetilde{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}} X_\lambda, Y)$ e torna Φ contínua, portanto τ torna contínua a aplicação $\Phi_\lambda = p_\lambda \circ \Phi$ para todo índice λ. Pela prop.3.6.2., a $\mathfrak{S}$-topologia é a menos fina das topologias que tornam contínuas todas as aplicações Φ_λ, donde τ é mais fina que a $\mathfrak{S}$-topologia. ∎

<u>Proposição</u> 3.6.4. <u>Sejam</u> $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ <u>uma família de A-módulos topológicos</u> Y <u>um A-módulo e</u> g_λ <u>uma aplicação A-linear de</u> Y <u>em</u> Y_λ <u>para cada índice</u> λ. <u>Indicamos com</u> $\widetilde{Y}$ <u>o A-módulo</u> Y <u>munido da topologia inicial em Mod Top$_A$ para a família de aplicações</u> $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. <u>Então, para todo A-módulo topológico</u> X <u>e para todo conjunto</u> $\mathfrak{S}$ <u>de partes limitadas de</u> X, <u>a</u> $\mathfrak{S}$ <u>-topologia sobre</u> $L_A(X, \widetilde{Y})$ <u>é a topologia inicial em Mod Top$_A$ para a família de aplicações A-lineares:</u>

$$\Phi_\lambda : L_A(X, \widetilde{Y}) \to L_{\mathfrak{S}}(X, Y_\lambda)$$

<u>definida por</u> $u \mapsto g_\lambda \circ u$.

A demonstração é inteiramente análoga à da prop.3.6.2. . ∎

<u>Corolário</u> 3.6.5. <u>Sejam</u> $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ <u>uma família de A-módulos topológicos e, para todo</u> $\mu\in\Lambda$, $\pi_\mu : \widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} Y_\lambda \to Y_\mu$ <u>a projeção canônica. Então, para todo A-módulo topológico</u> X <u>e para todo conjunto</u> $\mathfrak{S}$ <u>de partes limitadas de</u> X, <u>existe um isomorfismo de A-módulos topológicos:</u>

$$L_{\mathfrak{S}}(X, \widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} Y_\lambda) \xrightarrow{\Phi} \widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} L_{\mathfrak{S}}(X, Y_\lambda)$$

Aplicando a prop.3.6.4. no caso particular $\widetilde{Y} = \widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} Y_\lambda$ e $g_\lambda = \pi_\lambda$ para todo índice λ, obtemos uma família de aplicações A-lineares contínuas

$$\Phi_\mu : L_{\mathfrak{S}}(X, \widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} Y_\lambda) \to L_{\mathfrak{S}}(X, Y_\mu) \qquad (\mu\in\Lambda)$$
$$u \mapsto \pi_\mu \circ u$$

donde resulta que existe uma única aplicação A-linear contínua Φ que torna comutativo o diagrama:

$$\begin{tikzcd} L_{\mathfrak{S}}(X,Y_\mu) & L_{\mathfrak{S}}(X,\widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} Y_\lambda) \arrow[l, "\Phi_\mu"'] \\ \widetilde{\prod_{\lambda\in\Lambda}} L_{\mathfrak{S}}(X,Y_\lambda) \arrow[u, "p_\mu"] \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

A prova de que Φ é bijetora e bicontínua é análoga à feita na demonstração do corol.3.6.3. ∎

3.7. Extensão de aplicações lineares contínuas.

Esta secção reune, melhorando um pouco, resultados que se encontram em $[A_1]$ e $[A_2]$. Como trabalhamos em condições bastante gerais nossos resultados mais interessantes são apenas condições suficientes para obter formas fracas do teorema Hahn-Banach. Uma forma diferente de tratar o problema da extensão de aplicações lineares contínuas, seria impor hipóteses suplementares sobre os anéis e módulos e tentar obter resultados mais próximos do teorema de Hahn-Banach; um exemplo interessante nesta direção se encontra em [I].

(a) Toros

Definição 3.7.1. Sejam A um anel unitário topológico (não necessáriamente comutativo) e $\mathfrak{M}_A$ uma categoria de A-módulos topológicos (à esquerda). Um toro de $\mathfrak{M}_A$ é um objeto T de $\mathfrak{M}_A$ que possui a propriedade deguinte: Se X é um objeto de $\mathfrak{M}_A$, F é um submódulo fechado de X, $x \in X \cap \complement F$ e u é uma aplicação A-linear contínua de F em T, então existe uma aplicação A-linear contínua $\bar{u}$ de X em T tal que $\bar{u}$ é uma extenção de u e $\bar{u}(x) \neq 0$.

Exemplos de toros

(1) Tomando A = **Z** com a topologia discreta e $\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}$ como sendo a categoria dos grupos abelianos localmente compactos, é conhecido (e difícil de provar, cfr. [HR], ch.6, corol.24.12.) que T = **R/Z** é um toro de $\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}$. (O nome de "toro" para o objeto da Def.3.7.1. é inspirado neste exemplo).

(2) Seja A = **R** ou **C** e seja $\mathfrak{M}_A$ a categoria dos A-espaços normados. Segue imediatamente do teorema de Hahn-Banach que A é um toro da categoria $\mathfrak{M}_A$.

(3) Se A é um corpo e $\mathfrak{M}_A$ é a categoria dos espaços vetoriais sobre

A, se pode considerar $\mathfrak{M}_A$ como uma categoria de A-módulos topológicos onde todas as topologias são discretas. É claro que todo objeto $\neq (0)$ de $\mathfrak{M}_A$ é um toro de $\mathfrak{M}_A$.

Com as notações da Def.3.7.1., é claro que se X é separado e $\neq (0)$, então para todo toro T e para todo $x \in X$, $x \neq 0$, existe uma aplicação A-linear contínua de X em T que não se anula em x. Se H é um subconjunto não vazio de X, indicamos com $H^o[X,T]$, ou mais simplesmente com H^o quando não há perigo de confusão, o subconjunto de $L_A(X,T)$:

$$\{v \in L_A(X,T) \mid H \subset \operatorname{Ker} v\}$$

Se A é comutativo, H^o é um submódulo de $L_A(X,T)$. Tem-se sempre a inclusão $H \subset \bigcap_{v \in H^o} \operatorname{Ker} v$, e se T é separado, então $\overline{H} \subset \bigcap_{v \in H^o} \operatorname{Ker} v$.

<u>Proposição</u> 3.7.2. <u>Sejam</u> A <u>e</u> $\mathfrak{M}_A$ <u>como na Def.</u>3.7.1., <u>então para todo objeto</u> T <u>de</u> $\mathfrak{M}_A$, <u>as condições seguintes são equivalentes</u>:

(i) T <u>é um toro de</u> $\mathfrak{M}_A$.

(ii) <u>Para todo módulo</u> X <u>de</u> $\mathfrak{M}_A$ <u>e para todo submódulo fechado</u> F <u>de</u> X <u>as duas condições seguintes estão verificadas</u>:

(a) $\bigcap_{v \in F^o} \operatorname{Ker} v = F$.

(b) <u>Toda aplicação</u> $u \in L_A(F,T)$, <u>admite uma extensão</u> $\bar{u} \in L_A(X,T)$.

Para mostrar que (i) implica (ii) basta provar a inclusão $F \supset \bigcap_{v \in F^o} \operatorname{Ker} v$. Dado $x \in X \cap \complement F$, se w é a aplicação nula de F em T, existe por (i) uma extensão $\bar{w} \in L_A(X,T)$ de w tal que $\bar{w}(x) \neq 0$ e como $w \in F^o$, resulta $x \notin \bigcap_{v \in F^o} \operatorname{Ker} v$. Reciprocamente (ii) implica (i). Com as notações da Def.3.7.1., por (b) existe uma extensão $\bar{u} \in L_A(X,T)$ de u. Se $\bar{u}(x) = 0$, da relação (a) segue que existe $v \in F^o$ tal que $v(x) \neq 0$ e então $\tilde{u} = \bar{u} + v$ é uma extensão de u que não se anula em x. ∎

<u>Corolário</u> 3.7.3. <u>Sejam</u> A <u>e</u> $\mathfrak{M}_A$ <u>como na Def.</u>3.7.1. <u>e seja</u> T <u>um toro de</u> $\mathfrak{M}_A$. <u>Então, para todo módulo separado</u> X <u>de</u> $\mathfrak{M}_A$, <u>se tem</u>

$$\bigcap_{v \in L_A(X,T)} \operatorname{Ker} v = (0). \ ∎$$

<u>Proposição</u> 3.7.4. <u>Sejam</u> A <u>e</u> $\mathfrak{M}_A$ <u>como na Def.</u>3.7.1. <u>e seja</u> T <u>um toro separado de</u> $\mathfrak{M}_A$. <u>Se</u> X <u>é um</u> A-<u>módulo em</u> $\mathfrak{M}_A$, S <u>é um submódulo de</u> X <u>e</u> $x \in X$, <u>então</u> $x \in \overline{S}$ <u>se e só se</u> $u(x) = 0$ <u>para toda</u> $u \in S^o$.

De fato, $\overline{S} \subset \bigcap_{u \in S^o} \operatorname{Ker} u$, pois T é separado. Inversamente, se $x \notin \overline{S}$, a aplicação nula de $\overline{S}$ em T se extende em uma aplicação A-linear contínua v de X em T tal que $v(x) \neq 0$, donde $x \notin \bigcap_{u \in S^o} \operatorname{Ker} u$. ∎

(b) Módulos topológicos formalmente injetivos e toros.

Lema 3.7.5. Sejam X_1 um A-módulo topológico, X_2 um A-módulo topológico separado completo, S_1 (resp. S_2) um submódulo denso de X_1 (resp. X_2). Então, toda aplicação $u \in L_A(S_1, S_2)$ se extende de modo único em uma aplicação $\overline{u} \in L_A(X_1, X_2)$.

De $[B_4]$, ch.3, §3, prop.5, segue que existe uma representação contínua $\overline{u}$ de X_1 em X_2 extendendo u que é única. É suficiente então, mostrar que

$$\overline{u}(\lambda x) = \lambda . \overline{u}(x) \quad \text{para todo } \lambda \in A,\ x \in X_1$$

o que equivale a mostrar que a aplicação $\tilde{u} : A \times X_1 \to X_2$ definida por $(\lambda, x) \mapsto \overline{u}(\lambda x) - \lambda . \overline{u}(x)$ é nula, ou ainda, pelo princípio da extensão das identidades ($[B_3]$, ch.1, §8, nº1) a provar que $\tilde{u}$ é contínua, o que é evidente pois

$$\tilde{u} = \overline{s}_{X_2} \circ \left\{ (\overline{u} \circ p_{X_1}) \times \left[p_{X_2} \circ (\mathrm{id} \times \overline{u}) \right] \right\} \circ \Delta$$

(onde $\Delta(v) = (v, v)$) portanto $\tilde{u}$ é uma composição de aplicações contínuas. ∎

Corolário 3.7.6. Sejam X_1 um A-módulo topológico, X_2 um A-módulo separado completo, S um submódulo denso de X_1. Então, toda aplicação $u \in L_A(S, X_2)$ se extende de forma única em uma aplicação $\overline{u} \in L_A(X_1, X_2)$. ∎

Definição 3.7.7. Sejam A um anel topológico e $\mathfrak{M}_A$ uma categoria de A-módulos topológicos. Um objeto formalmente injetivo de $\mathfrak{M}_A$ é um objeto I de $\mathfrak{M}_A$ que possui a propriedade seguinte: para todo objeto X de $\mathfrak{M}_A$, para todo submódulo Y de X e para toda aplicação $u \in L_A(Y, I)$, existe uma extensão $\overline{u} \in L_A(X, I)$ de u.

Dado um anel topológico A, qualquer A-módulo injetivo (no sentido algébrico) munido da topologia caótica, é um objeto formalmente injetivo de $\underline{\mathrm{Mod\ Top}}_A$.

Proposição 3.7.8. Sejam A e $\mathfrak{M}_A$ como na Def.3.7.7. Então, todo toro separado completo de $\mathfrak{M}_A$, é um objeto formalmente injetivo de $\mathfrak{M}_A$.

Segue imediatamente do corol.3.7.6. ∎

(c) Os módulos $O_{\mathfrak{S}}(X,G)$ (Construção de toros I).

Sejam A um anel topológico (unitário), X um A-módulo topológico e G um grupo abeliano topológico notado aditivamente. Indicamos com $O(X,G)$ o grupo abeliano formado pelas aplicações $\mathbb{Z}$-lineares contínuas de X em G. Munimos $O(X,G)$ de uma estrutura de A-módulo à direita (estamos supondo que X é um A-módulo à esquerda) pondo, para todo $\lambda \in A$ e $u \in O(X,G)$:

$$(\lambda * u)(x) = u(\lambda x) \text{ para todo } x \in X$$

Para definir uma estrutura topológica sobre $O(X,G)$ consideremos um conjunto $\mathfrak{S}$ de partes limitadas de X satisfazendo as condições seguintes:

(E1) Para todo $B \in \mathfrak{S}$ e para todo $\lambda \in A$, existe $B' \in \mathfrak{S}$ tal que $\lambda B \subset B'$.

(E2) Para todo $B \in \mathfrak{S}$, existem $B' \in \mathfrak{S}$ e uma vizinhança S de 0 em A tais que $SB \subset B'$.

Se P (resp. Q) é um subconjunto de X (resp. G) seja

$$\Gamma(P,Q) = \{u \in O(X,G) \mid u(P) \subset Q\}$$

e consideremos o conjunto $\mathcal{B}$ das interseções finitas de conjuntos do tipo $\Gamma(B,V)$, onde B percorre $\mathfrak{S}$ e V percorre o filtro das vizinhanças de 0 em G. Verifica-se imediatamente que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro e que o filtro $\mathcal{U}$ gerado por $\mathcal{B}$, determina uma topologia compatível com a estrutura de grupo de $O(X,G)$.

Com estas notações temos:

Proposição 3.7.9. Existe uma única topologia compatível com a estrutura de A-módulo à direita de $O(X,G)$, e para esta topologia $\mathcal{U}$ é o filtro das vizinhanças de 0.

Pelo que precede, é suficiente verificar a continuidade da operação externa $(\lambda,u) \mapsto \lambda * u$, o que resulta imediatamente das condições (E1) e (E2). ∎

O A-módulo à direita $O(X,G)$ munido da topologia da prop.3.7.9. (que será chamada $\mathfrak{S}$-topologia) e indicado com $O_{\mathfrak{S}}(X,G)$. Com estas notações temos o resultado:

Proposição 3.7.10. Se a reunião dos conjuntos de $\mathfrak{S}$ é total em X e G é separado, então $O_{\mathfrak{S}}(X,G)$ é separado.

Se $u \in O_{\mathfrak{S}}(X,G)$ e $u \neq 0$, a hipótese sobre $\mathfrak{S}$ e a condição (E1) acarretam que existem $B \in \mathfrak{S}$ e $x \in B$ tais que $u(x) \neq 0$, donde resulta que existe uma vizinhança V de 0 em G tal que $u(x) \notin V$ e portanto $u \notin \Gamma(B,V)$. ∎

O resultado próximo vai ser especialmente útil no capítulo 4:

Proposição 3.7.11. Sejam A um anel topológico, X um A-módulo topológico localmente compacto e G um grupo abeliano topológico separado. Então $O_{\mathbb{K}_X}(X,G)$ é um A-módulo topológico separado.

Com efeito, $\mathbb{K}_X$ verifica òbviamente a condição (E1) e verifica também a condição (E2) pois se B é uma parte compacta de X, basta considerar uma vizinhança compacta B' de 0 em X, como B é limitado, existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $SB \subset B'$. ∎

Sejam A um anel topológico separado e $\mathfrak{M}_A$ uma categoria de A-módulos topológicos. Todo objeto X de $\mathfrak{M}_A$ possui de maneira natural, uma estrutura de $\mathbb{Z}$-módulo topológico (cfr. fim do ex.(3) antes da prop.1.1.5.) que indicamos por X_o. A coleção dos X_o tais que X é um módulo de $\mathfrak{M}_A$, com as aplicações $\mathbb{Z}$-lineares contínuas como morfismos é uma categoria que indicamos com $\mathfrak{M}_{(\mathbb{Z})}$. Indicamos com A_d o anel A munido da estrutura canônica de A-módulo à direita (como sempre se não há advertência especial, estamos supondo que os objetos de $\mathfrak{M}_A$ são módulos à esquerda). O resultado seguinte permite, em certos casos, construir um toro de $\mathfrak{M}_A$ quando se conhece um toro de $\mathfrak{M}_{(\mathbb{Z})}$ (ou um toro de uma categoria que contém $\mathfrak{M}_{(\mathbb{Z})}$ como subcategoria plena).

Teorema 3.7.12. Sejam A um anel topológico, $\mathfrak{M}_A$ uma categoria de A-módulos topológicos e $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes compactas de A verificando as condições (E1) e (E2) e contendo todas as partes finitas de A. Seja T um toro de $\mathfrak{M}_{(\mathbb{Z})}$. Então, se $O_{\mathfrak{S}}(A_d,T)$ é um objeto de $\mathfrak{M}_A$, $O_{\mathfrak{S}}(A_d,T)$ é um toro de $\mathfrak{M}_A$.

De fato, sejam X um módulo de $\mathfrak{M}_A$, F um submódulo fechado de X, x_o um elemento de $X \cap \complement F$ e u uma aplicação A-linear contínua de F em $O_{\mathfrak{S}}(A_d,T)$. Define-se uma aplicação $\mathbb{Z}$-linear contínua $\chi : F \to T$ por $y \mapsto u(y)(1)$ e como T é um toro de $\mathfrak{M}_{(\mathbb{Z})}$, existe uma aplicação $\mathbb{Z}$-linear contínua $\bar{\chi} : X \to T$ que extende χ tal que $\bar{\chi}(x_o) \neq 0$. Para

cada $x \in X$, seja $j_x : A \to X$ a aplicação definida por $\lambda \mapsto \lambda x$; é claro que $\bar{\chi} \circ j_x \in O_{\mathfrak{S}}(A_d, T)$ para cada $x \in X$. Mostremos que a aplicação

$$\bar{u} : X \to O_{\mathfrak{S}}(A_d, T)$$
$$x \mapsto \bar{\chi} \circ j_x$$

é uma aplicação A-linear contínua que extende u e tal que $\bar{u}(x_0) \neq 0$. É claro que $\bar{u}$ é aditiva, para todo $x \in X$ e $\alpha \in A$ se tem $\bar{u}(\alpha x) = \alpha * \bar{u}(x)$ pois para todo $\lambda \in A$ se tem $\bar{u}(\alpha x)(\lambda) = (\bar{\chi} \circ j_{\alpha x})(\lambda) = \bar{\chi}((\lambda\alpha)x) = (\bar{\chi} \circ j_x)(\lambda\alpha) = [\bar{u}(x)](\lambda\alpha) = [\alpha * \bar{u}(x)](\lambda)$ esta última igualdade resultando do fato de A_d ser um A-módulo à direita. Mostremos que $\bar{u}$ é contínua. Seja $\Gamma(B,V)$ uma vizinhança de 0 em $O_{\mathfrak{S}}(A_d, T)$, a continuidade de $\bar{\chi}$ acarreta que existe uma vizinhança W de 0 em X tal que $\bar{\chi}(W) \subset V$. De outro lado, como B é compacto (pois $\mathfrak{S} \subset \mathbb{K}_X$) segue do lema 2.3.6.(b) que existe uma vizinhança U de 0 em X tal que $BU \subset W$ o que implica a inclusão $\bar{u}(U) \subset \Gamma(B,V)$, logo $\bar{u}$ é contínua. Para todo $y \in F$ e $\alpha \in A$ temos $\bar{u}(y)(\alpha) = (\bar{\chi} \circ j_y)(\alpha) = \bar{\chi}(\alpha y) = \chi(\alpha y) = u(\alpha y)(1) = (\alpha * u(y))(1) = u(y)(\alpha)$, o que prova que a restrição de $\bar{u}$ a F é u. Finalmente $\bar{u}(x_0) \neq 0$ pois $\bar{u}(x_0)(1) = (\bar{\chi} \circ j_{x_0})(1) = \bar{\chi}(x_0) \neq 0$. ∎

Será útil mais adiante (Teor. 4.3.1.) ter um enunciado ligeiramente mais geral do Teor.3.7.12., a demonstração sendo pràticamente a mesma.

<u>Teorema</u> 3.7.12'. <u>Sejam</u> A, $\mathfrak{M}_A$ <u>e</u> $\mathfrak{S}$ <u>como no Teor.</u> 3.7.12. <u>Seja</u> $\mathcal{C}$ <u>uma categoria de grupos abelianos topológicos tal que</u> $\mathfrak{M}_{(z)}$ <u>é uma subcategoria plena</u>† <u>de</u> $\mathcal{C}$ <u>e seja</u> T <u>um toro de</u> $\mathcal{C}$. <u>Então, se</u> $O_{\mathfrak{S}}(A_d, T)$ <u>é um objeto de</u> $\mathfrak{M}_A$, $O_{\mathfrak{S}}(A_d, T)$ <u>é um toro de</u> $\mathfrak{M}_A$. ∎

(d) <u>Módulos topológicos formalmente projetivos</u>.(Construção de toros II)

<u>Definição</u> 3.7.13. Sejam A um anel topológico e $\mathfrak{M}_A$ uma categoria de A-módulos topológicos. Um <u>objeto formalmente projetivo de</u> $\mathfrak{M}_A$ é um objeto P de $\mathfrak{M}_A$ que possui a propriedade seguinte: se X e Y são dois objetos arbitrários de $\mathfrak{M}_A$, p é uma aplicação A-linear contínua de X sobre Y e f é uma aplicação A-linear contínua de P em Y, então existe uma aplicação A-linear contínua g de P em X, tornando comu-

† Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são duas categorias, diz-se que $\mathcal{C}'$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{C}$ quando:(1º) todo objeto de $\mathcal{C}'$ é um objeto de $\mathcal{C}$;(2º) Se X,Y são objetos arbitrários de $\mathcal{C}'$, então $\mathcal{C}'(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$.

tativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

É claro que na categoria Mod Top_A existem objetos formalmente projetivos, pois todo A-módulo topològicamente livre (cfr. Def.1.5.3.) é formalmente projetivo. Mais geralmente, se P é um A-módulo projetivo (no sentido algébrico), então P munido da topologia A-fina (cfr.Def. 1.3.10.) é formalmente projetivo em Mod Top_A.

Até ao fim desta secção vamos trabalhar em uma categoria $\mathfrak{M}_A$ de módulos topológicos sobre um anel comutativo topológico A, na qual as seguintes condições estão verificadas:

Condição (A) Todo submódulo fechado de um módulo de $\mathfrak{M}_A$, é um objeto de $\mathfrak{M}_A$.

Condição (B) Quaisquer que sejam os objetos X,Y de $\mathfrak{M}_A$ e qualquer que seja o grupo abeliano topológico G, a continuidade de uma aplicação **A-linear** $f : X \to O_{\mathbb{K}_Y}(Y,G)$ acarreta a continuidade da aplicação (necessariamente A-linear) deduzida de f, $\tilde{f} : Y \to O_{\mathbb{K}_X}(X,G)$ definida por $y \mapsto (x \mapsto f(x)(y))$.

Observação: Não está dito na Cond.(B) que o módulo $O_{\mathbb{K}_X}(X,G)$ seja um A-módulo topológico, certamente é um $\mathbb{Z}$-módulo topológico (pela prop.3.1.2. aplicada no caso X = X, Y = G, $\mathfrak{S} = \mathbb{K}_X$ e $M = O(X,G)$). Se X é localmente compacto, então a prop.3.7.11. implica que $O_{\mathbb{K}_X}(X,G)$ é um A-módulo topológico.(Naturalmente, tudo o que precede vale para $O_{\mathbb{K}_Y}(Y,G)$).

Para simplificar as notações, no que segue indicamos com $O_k(Z,Y)$ o A-módulo $O_{\mathbb{K}_Z}(Z,Y)$.

Teorema 3.7.14. Sejam A um anel comutativo topológico, $\mathfrak{M}_A$ uma categoria de A-módulos topológicos satisfazendo as condições (A) e (B), T um toro de $\mathfrak{M}_{(\mathbb{Z})}$ tal que:

$O_k(Z,T)$ é um objeto de $\mathfrak{M}_A$, para cada objeto Z de $\mathfrak{M}_A$;

P um objeto formalmente projetivo de $\mathfrak{M}_A$ tal que existe uma aplicação A-linear contínua u de P sobre A. Então, $O_k(P,T)$ é um toro de $\mathfrak{M}_A$

Verifiquemos a cond.(b) da prop. 3.7.2..Sejam X um objeto de $\mathfrak{M}_A$

F um submódulo fechado de X e $f : F \to O_k(P,T)$ uma aplicação A-linear contínua. A aplicação

$$c : O_k(X,T) \to O_k(F,T)$$
$$w \mapsto w|F$$

é A-linear contínua e é sobrejetora pois T é um toro de $\underline{\mathfrak{M}}_{(Z)}$. Pela cond.(A), F é um objeto de $\underline{\mathfrak{M}}_A$, donde, pela cond.(B), a aplicação deduzida de f:

$$\tilde{f} : P \to O_k(F,T)$$
$$p \mapsto (y \mapsto f(y)(p))$$

é (A-linear) contínua. Sendo P formalmente projetivo, existe uma aplicação A-linear contínua g tornando comutativo o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ O_k(X,T) \arrow[r, "c"] & O_k(F,T) \end{tikzcd}$$

Da aplicação g, graças à cond.(B), se deduz uma aplicação A-linear contínua

$$\tilde{g} : X \to O_k(P,T)$$
$$x \mapsto (p \mapsto g(p)(x))$$

que extende f pois se $y \in F$, então para todo $p \in P$, se tem

$\tilde{g}(y)(p) = g(p)(y) = (g(p)|F)(y) = \left[(c \circ g)(p)\right](y) = \tilde{f}(p)(y) =$
$= f(y)(p)$.

Verifiquemos a cond.(a) da prop. 3.7.2. Seja F um submódulo fechado de um módulo X de $\underline{\mathfrak{M}}_A$ e mostremos que dado $x_0 \in X \cap \complement F$ existe uma aplicação A-linear contínua v de X em $O_k(P,T)$ que se anula sobre F e tal que $v(x_0) \neq 0$. Como T é um toro de $\underline{\mathfrak{M}}_{(Z)}$, existe $\chi \in O(X,T)$ que se anula sobre F e tal que $\chi(x_0) \neq 0$. Se $j_x : A \to X$ é a aplicação $\lambda \mapsto \lambda x$, definimos a aplicação v de X em $O_k(P,T)$ por $x \mapsto \chi \circ j_x \circ u$, esta aplicação é A-linear (pois A é comutativo), é contínua (de fato, considerando uma vizinhança de 0 em $O_k(P,T)$ do tipo $\Gamma(K,V)$, como $u(K)$ é um compacto de A existe pelo lema 2.3.6.,(b), uma vizinhança W de 0 em X tal que $u(K).W \subset \chi^{-1}(V)$ e então, $x \in W$ implica $v(x) \in \Gamma(K,V)$) e se anula sobre F pois se $y \in F$, temos

$(\chi \circ j_y \circ u)(p) = \chi(u(p).y) = 0$ pois $u(p).y \in F$ e $\chi|F \equiv 0$

Finalmente, $v(x_0) = \chi \circ j_{x_0} \circ u \neq 0$; de fato, se não fosse assim, para todo $p \in P$ teríamos $(\chi \circ j_{x_0} \circ u)(p) = \chi(u(p).x_0) = 0$ o que é absurdo pois u sendo sobrejetora, existe $p_0 \in P$ tal que $u(p_0) = 1$, donde resultaria $\chi(x_0) = 0$, contràriamente à definição de χ. ∎

O teorema anterior é uma variante do Teor. 3.7.12. e como este, admite uma ligeira generalização cuja demonstração é pràticamente a mesma que a do Teor. 3.7.14., por isto não a repetiremos.

Teorema 3.7.14'. Sejam A, $\mathfrak{M}_A$, P e u como no Teor. 3.7.14. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria de grupos abelianos topológicos tal que $\mathfrak{M}_{(\mathbf{Z})}$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{C}$ e seja T um toro de $\mathcal{C}$ tal que

$O_k(Z,T)$ é um objeto de $\mathfrak{M}_A$, para cada objeto Z de $\mathfrak{M}_A$.

Então $O_k(P,T)$ é um toro de $\mathfrak{M}_A$. ∎

As formas originais de nossos resultados de extensão de aplicações são os teoremas 3.7.12. e 3.7.14., porém não são diretamente aplicáveis no caso particular que temos em mente que é quando $\mathfrak{M}_A$ é a categoria $\underline{MLC}_A$ dos A-módulos localmente compactos e T = $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Com efeito, $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ é um toro da categoria GALC dos grupos abelianos localmente compactos (cfr. exemplo (1), logo após a Def. 3.7.1.) mas não é, em geral, um toro da categoria $\underline{MLC}_{(\mathbf{Z})}$ (pois em geral $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ não é um objeto desta categoria). Por esta razão é que enunciamos as formas modificadas 3.7.12'. e 3.7.14'. que estão então inspiradas no exemplo:

$\mathfrak{M}_A = \underline{MLC}_A$, $\mathcal{C} = \underline{GALC}$ e $T = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Sendo evidente que a categoria $\underline{MLC}_A$ satisfaz a cond.(A), mostremos que também satisfaz a cond.(B).

Lema 3.7.15. Sejam A um anel comutativo topológico, X um A-módulo topológico, G um grupo abeliano topológico e Y um A-módulo localmente compacto. Se f é uma aplicação A-linear contínua de X em $O_k(Y,G)$, então a aplicação (A-linear) deduzida de f:

$$\tilde{f} : Y \to O_k(X,G)$$
$$y \mapsto (x \mapsto f(x)(y))$$

é contínua.

Seja $h : X \times Y \to G$ a aplicação definida por $(x,y) \mapsto f(x)(y)$. Para $a \in X$ e $b \in Y$ fixados, a continuidade na origem das aplicações parciais $x \mapsto h(x,b)$ e $y \mapsto h(a,y)$ é trivial e a continuidade de h no ponto (0,0) resulta da compacidade local de Y e da continuidade de f donde h é contínua. Mostremos que $\tilde{f}$ é contínua. Sejam K um compacto de X e V uma vizinhança de 0 em G, h sendo contínua no ponto $(x,0) \in X \times Y$ para todo $x \in K$, existe uma vizinhança aberta W(x) de x em X e uma vizinhança W'(x) de 0 em Y tais que

$$h(W(x) \times W'(x)) \subset V \quad \text{para todo } x \in K \qquad (*)$$

Seja $(W(x_j))_{1 \leq j \leq n}$ uma subcobertura finita da cobertura aberta

$(W(x))_{x\in K}$ de K e seja $W = \bigcap_j W(x_j)$, então de (*) segue $\tilde{f}(W) \subset \Gamma(K,V)$. ∎

Corolário 3.7.16. Sejam A um anel comutativo topológico e P um objeto formalmente projetivo da categoria $\underline{MLC}_A$ tal que existe uma aplicação A-linear contínua de P sobre A. Então $P^* = O_k(P, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ é um toro de $\underline{MLC}_A$. (P^* é também separado e completo).

Apliquemos o teor. 3.7.14'. no caso particular $\mathfrak{M}_A = \underline{MLC}_A$, $\mathscr{C} = \underline{GALC}$ e $T = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Como já foi dito, $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ é um toro de GALC (cfr. [HR], corol. 24.12.), além disso para cada objeto Z de $\underline{MLC}_A$, $O_k(Z, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ é um A-módulo topológico (prop. 3.7.11.) e é localmente compacto (cfr. [HR], teor. 23.15. e 23.17.) donde resulta que $O_k(Z, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ é um objeto de $\underline{MLC}_A$. ∎

Observação Se A é um anel (unitário) comutativo localmente compacto então $A^* = O_k(A, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ é um toro de $\underline{MLC}_A$, isto pode ser demonstrado a partir do Teor. 3.7.12'. ou tomando P = A no corol. 3.7.16. (A sendo topologicamente livre é formalmente projetivo em $\underline{Mod\ Top}_A$ e portanto em qualquer subcategoria de $\underline{Mod\ Top}_A$). Este resultado se encaixa muito melhor no contexto do capítulo 4 que aqui e por isto é aí que aparece o enunciado (Teor. 4.3.1.).

3.8. Endomorfismos contínuos de um A-módulo localmente limitado.

Sejam A um anel comutativo topológico e X um A-módulo topológico. Indicamos por $E_A(X)$ o anel $L_A(X,X)$ dos A-endomorfismos contínuos de X; é claro que a lei de composição $E_A(X) \times X \to X$ definida por $(u,x) \mapsto u(x)$ determina sobre X uma estrutura de $E_A(X)$-módulo. Se $\mathfrak{S}$ é um conjunto de partes limitadas de X, indicamos com $E_{\mathfrak{S}}(X)$ o A-módulo topológico $L_{\mathfrak{S}}(X,X)$. No resultado seguinte, para simplificar, escrevemos E em vez de $E_{\mathbb{B}_X}(X)$.

Proposição 3.8.1. Sejam A um anel comutativo topológico e X um A-módulo localmente limitado. Têm-se as asserções seguintes:

(a) E é um anel topológico.

(b) X é um E-módulo topológico.

(a) Para v fixado em E, as aplicações f_v e g_v de E em E definidas por $u \mapsto u \circ v$ e $u \mapsto v \circ u$ respectivamente, são contínuas no ponto u = 0. Com efeito, se B é uma parte limitada de X e V é uma vizinhança de 0 em X, v(B) é uma parte limitada de X e $v^{-1}(V)$ é uma vizi-

nhança de 0 em X, donde

$$f_v(\Gamma(v(B),V)) \subset \Gamma(B,V) \quad \text{e} \quad g_v(\Gamma(B,v^{-1}(V))) \subset \Gamma(B,V)$$

De outro lado, como X é localmente limitado existe uma vizinhança limitada W de 0 em X, donde $L = \bigcup_{u \in \Gamma(B,W)} u(B)$ é um conjunto limitado em X e então as relações $u \in \Gamma(L,V)$ e $v \in \Gamma(B,W)$ implicam $u \circ v \in \Gamma(B,V)$ o que prova que a aplicação $(u,v) \mapsto u \circ v$ é contínua em (0,0).

(b) As aplicações parciais sendo obviamente contínuas, mostremos que a aplicação $E \times X \to X$ definida por $(u,x) \mapsto u(x)$ é contínua no ponto (0,0). Dada uma vizinhança V de 0 em X, seja W uma vizinhança limitada de 0 em X, então é claro que as relações $u \in \Gamma(W,V)$ e $x \in W$ implicam $u(x) \in V$. ∎

<u>Proposição</u> 3.8.2. <u>Sejam</u> A, X <u>e</u> E <u>como na prop.</u> 3.8.1. <u>Seja</u> G <u>um grupo abeliano topológico. Então, são equivalentes as seguintes asserções</u>

(i) <u>Existe um homomorfismo contínuo de grupos</u> $h : G \to E$.

(ii) <u>Existe uma aplicação</u> $\mathbb{Z}$-<u>bilinear contínua</u> $\tilde{h} : G \times X \to X$ <u>que é</u> A-<u>linear na segunda variável e verifica a condição seguinte: Para toda vizinhança</u> V <u>de</u> 0 <u>em</u> X <u>e para todo conjunto limitado</u> B <u>em</u> X, <u>existe uma vizinhança</u> Q <u>de</u> 0 <u>em</u> G <u>tal que</u> $\tilde{h}(Q \times B) \subset V$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Definimos $\tilde{h}$ por $\tilde{h}(g,x) = h(g)(x)$, é claro que $\tilde{h}$ é $\mathbb{Z}$-bilinear e A-linear na segunda variável. A continuidade de $\tilde{h}$ resulta da comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "h \times id."] \arrow[dr, "\tilde{h}"'] & E \times X \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

onde a flecha vertical é contínua pela prop. 3.8.1., (b). Dadas uma vizinhança V de 0 em X e uma parte limitada B de X, então $\Gamma(B,V)$ é uma vizinhança de 0 em E e como h é contínua, existe uma vizinhança Q de 0 em G tal que $h(Q) \subset \Gamma(B,V)$ ou seja $\tilde{h}(Q \times B) \subset V$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Para cada $g \in G$, define-se $h(g) : X \to X$ por $x \mapsto \tilde{h}(g,x)$; é claro que $h(g) \in E$ para todo $g \in G$ e que h é um homomorfismo de grupos. Finalmente h é contínuo pois se V é uma vizinhança de 0 em X e B é um conjunto limitado de X, existe por hipótese uma vizinhança Q de 0 em G tal que $\tilde{h}(Q \times B) \subset V$ o que equivale a $h(Q) \subset \Gamma(B,V)$. ∎

CAPÍTULO 4

DUALIDADE SOBRE UM ANEL UNITÁRIO COMUTATIVO LOCALMENTE COMPACTO

Em todo este capítulo A é um anel unitário comutativo localmente compacto (UCLC) e todo A-módulo topológico é (salvo advertência em contrário) separado.

4.1. O dual de um módulo topológico.

Este capítulo é constituído essencialmente pelos enunciados e demonstrações dos resultados resumidos em [A_3] . A idéia básica consiste em munir o grupo de caracteres A^* do anel A de uma estrutura de A-módulo topológico e definir o dual de um A-módulo topológico X como sendo o A-módulo das aplicações A-lineares contínuas de X em A^* (cujos elementos são chamados A-caracteres de X). Esta definição generaliza simultâneamente as noções de dualidade nos espaços normados e nos grupos abelianos topológicos. Os resultados mais interessantes deste capítulo são o teorema de dualidade de Pontrjaguin para módulos localmente compactos (Teor. 4.3.13.) e o Teor. 4.4.2. que permite reduzir o problema de caracterizar os módulos topológicos cujos elementos são separados pelos seus A-caracteres, ao mesmo problema para grupos abelianos topológicos (que é estudado em [CR]). O resultado que está na base destes dois teoremas é o lema 4.3.7., cujo enunciado foi sugerido pela prova do Teor. 3.7.12. .

Outras teorias de dualidade são possíveis dependendo da categoria de módulos topológicos na qual se trabalhe, um exemplo disto se encontra em [M] .

Para todo grupo abeliano topológico G indicamos com G^* o dual (na categoria dos grupos abelianos topológicos) de G, isto é, com as notações introduzidas no Cap.3 (3.7.,(c)), temos $G^* = \mathcal{O}_{\mathbb{K}_G}(G, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$, os elementos de G^* são chamados caracteres de G. O símbolo A^* indica o dual do anel A (considerado como grupo abeliano localmente compacto) munido da estrutura de A-módulo topológico dada pela prop. 3.7.11., isto é,

$$A^* = \mathcal{O}_{\mathbb{K}_A}(A, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$$

com a lei de composição $(\lambda, u) \in A \times A^* \mapsto \lambda * u \in A^*$ definida por

$(\lambda * u)(\alpha) = u(\lambda\alpha)$ para todo $\alpha \in A$. Desta forma A^* é um A-módulo topológico localmente compacto (cfr. [HR] , Teor. 23.15.)

Indicamos com $\underline{MLC}_A$ (resp. $\underline{GALC}$) a categoria dos A-módulos (resp. grupos abelianos) topológicos localmente compactos com as aplicações A (resp. $\mathbf{Z}$)-lineares contínuas como morfismos.

<u>Em todo o que segue, se C é um grupo abeliano (ou anel, módulo) topológico, escrevemos $O_k(G,\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ em vez de $O_{\mathbb{K}_G}(G,\mathbf{R}/\mathbf{Z})$; de modo geral o índice k em um módulo de aplicações indicará que este foi munido da topologia da convergência uniforme sobre todas as partes compactas.</u>

<u>Definição</u> 4.1.1. Seja A um anel UCLC. Para todo A-módulo topológico X, chama-se <u>dual</u> de X, o A-módulo

$$X^\circ = L_A(X, A^*).$$

Se $\mathfrak{S}$ é um conjunto não vazio de partes limitadas de X, o A-módulo X° munido da topologia da convergência uniforme sobre as partes de $\mathfrak{S}$, é chamado $\mathfrak{S}$-<u>dual</u> de X e é indicado em geral, com:

$$X^\circ_{\mathfrak{S}} = L_{\mathfrak{S}}(X, A^*).$$

Os elementos de X° são chamados A-<u>caracteres</u> de X.

<u>Exemplos</u>

(1) No caso $A = \mathbf{Z}$, X localmente compacto e $\mathfrak{S} = \mathbb{K}_X$ se tem $A^* \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ e então $X^\circ_{\mathfrak{S}}$ é o dual de X no sentido da teoria de Pontrjaguin.

(2) No caso $A = \mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$), X localmente convexo, é fácil ver que existe um isomorfismo de $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$)-espaços vetoriais topológicos $A^* \simeq \mathbf{R}$ (resp. $A^* \simeq \mathbf{C}$) e X° é então isomorfo ao dual de X no sentido habitual da teoria dos espaços localmente convexos.

O objetivo da seguinte definição é a noção de anulador que já foi usada, em um caso mais geral, na prop. 3.7.2. .

<u>Definição</u> 4.1.2. Seja H um subconjunto não vazio de um A-módulo topológico X, indicamos com $H^\circ[X, A^*]$, ou mais simplesmente H° quando não houver perigo de confusão, o subconjunto de X°:

$$\{u \in X^\circ \mid H \subset \operatorname{Ker} u\}$$

H° é chamado <u>anulador de</u> H em X° .

É claro que H° é um submódulo de X° , tem-se $\overline{H} \subset \bigcap_{v \in H^\circ} \operatorname{Ker} v$ donde segue que $H^\circ = (\overline{H})^\circ$. Se $H = (0)$, então $H^\circ = X^\circ$ mas a recíproca não va-

le em geral (cfr. corol. 4.3.5.). H^o é um submódulo fechado de $X^{\bullet}_{\mathfrak{S}}$ para todo conjunto $\mathfrak{S}$ de partes limitadas tais que $\{x\} \in \mathfrak{S}$ para todo $x \in H$. Com efeito, se $u \notin H^o$, existe $y \in H$ tal que $u(y) \neq 0$ e portanto existe uma vizinhança simétrica V de 0 em A tal que $u(y) \notin V$. Então $u + \Gamma(\{y\}, V)$ é uma vizinhança de u em $X^{\bullet}_{\mathfrak{S}}$ e é claro que $u + \Gamma(\{y\}, V) \subset \complement H^o$.

4.2. <u>Dual de uma soma direta. Aplicação transposta e dual de um quociente.</u>

Sejam $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de A-módulos topológicos, $j_\mu : X_\mu \to \widetilde{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda}} X_\lambda$ a injeção canônica, $\mathfrak{S}_\mu$ um conjunto não vazio de partes limitadas de X_μ e $\mathfrak{S}$ a reunião dos conjuntos $j_\mu(\mathfrak{S}_\mu)$ $(\mu \in \Lambda)$. Com estas notações, temos:

<u>Proposição</u> 4.2.1. <u>Existe um isomorfismo de A-módulos topológicos</u>:

$$\left(\widetilde{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda}} X_\lambda\right)^{\bullet}_{\mathfrak{S}} \simeq \widetilde{\prod_{\lambda \in \Lambda}} (X_\lambda)^{\bullet}_{\mathfrak{S}_\lambda}$$

É um caso particular do corol.3.6.3.. ∎

Sejam X e Y dois A-módulos topológicos, $f \in L_A(X,Y)$, $\mathfrak{S}$ um conjunto não vazio de partes limitadas de X e $\mathfrak{T} = f(\mathfrak{S}) = \{f(B) \mid B \in \mathfrak{S}\}$, é claro que $\mathfrak{T}$ é um conjunto de partes limitadas de Y. A todo $u \in Y^{\bullet}$, associamos a aplicação composta $u \circ f \in X^{\bullet}$ definindo deste modo uma aplicação $f^t : Y^{\bullet}_{\mathfrak{T}} \to X^{\bullet}_{\mathfrak{S}}$ por $f^t(u) = u \circ f$. Esta aplicação f^t é chamada <u>transposta</u> de f, é claro que f^t é A-linear e que $\operatorname{Ker} f^t = (\operatorname{Im} f)^o[Y, A^*]$, donde resulta que se f é sobrejetora então f^t é injetora. A aplicação f^t é contínua pois para todo $B \in \mathfrak{S}$ e toda vizinhança V de 0 em A^* se tem $f^t(\Gamma(f(B), V)) \subset \Gamma(B, V)$. Vamos usar estas considerações para determinar o dual de um quociente por um submódulo fechado. Sejam X um A-módulo topológico, F um submódulo fechado de X e $p : X \to X/F$ a aplicação canônica. Para todo conjunto não vazio $\mathfrak{S}$ de partes limitadas de X, seja $\mathfrak{S}_q = p(\mathfrak{S}) = \{p(B) \mid B \in \mathfrak{S}\}$. Com estas notações temos o resultado seguinte:

<u>Proposição</u> 4.2.2. <u>Existe um isomorfismo de A-módulos topológicos</u>:

$$(X/F)^{\bullet}_{\mathfrak{S}_q} \simeq F^o$$

Mostremos que a aplicação $p^t : (X/F)^{\bullet}_{\mathfrak{S}_q} \to X^{\bullet}_{\mathfrak{S}}$ é um isomorfismo de $(X/F)^{\bullet}_{\mathfrak{S}_q}$ sobre F^o. Para todo $u \in F^o$ se tem $F \subset \operatorname{Ker} u$, portanto

(prop.1.4.11.,(f)) existe um único A-caráter $\bar{u}$ de X/F tal que $u = \bar{u} \circ p$ donde $p^t(\bar{u}) = u$, o que mostra que $F^o \subset \operatorname{Im} p^t$ e como a inclusão inversa é evidente, resulta que p^t aplica $(X/F)^{\bullet}_{\mathfrak{S}_q}$ sobre F^o. Como p é sobrejetora, resulta que p^t é injetora. Finalmente, p^t é aberta, pois se $B' \in \mathfrak{S}_q$ e V é uma vizinhança de 0 em A^*, existe $B \in \mathfrak{S}$ tal que $p(B) = B'$; para $u \in F^o \cap \Gamma(B,V)$ existe um A-caráter $\bar{u}$ de X/F tal que $u = \bar{u} \circ p$ e então $\bar{u} \in \Gamma(B',V)$ o que acarreta $u = p^t(\bar{u}) \in p^t(\Gamma(B',V))$, donde resulta:

$$p^t(\Gamma(B',V)) \supset F^o \cap \Gamma(B,V). \blacksquare$$

4.3. A dualidade nos módulos localmente compactos.

Todos os resultados deste § são bem conhecidos quando $A = \mathbb{Z}$ pois neste caso são parte da teoria de dualidade de Pontrjaguin. Não se pretende aqui dar novas demonstrações neste caso, mas ao contrário, usar os resultados conhecidos no caso $A = \mathbb{Z}$ para obter resultados para A anel UCLC e $A \neq \mathbb{Z}$. Desta forma os resultados serão válidos para todo anel UCLC. A passagem do caso $A = \mathbb{Z}$ ao caso A qualquer é feita pelo lema 4.3.7. cujo enunciado é sugerido pela prova do seguinte resultado do tipo Hahn-Banach que é um caso particular do Teor. 3.7.12'.(cfr. [HR], corol. 24.12.).

Teorema 4.3.1. Seja A um anel UCLC. Se F é um submódulo fechado de um A-módulo localmente compacto X, $x \in X \cap \complement F$ e u é um A-caráter de F, então existe um A-caráter $\bar{u}$ de X que extende u e tal que $\bar{u}(x) \neq 0$.(em outras palavras, A^* é um toro da categoria $\underline{MLC}_A$).

Do corol.24.12. de [HR] segue que $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é um toro da categoria $\mathscr{C} = \underline{GALC}$ que contém $\underline{MLC}_{(\mathbb{Z})}$ como subcategoria plena, portanto o resultado é um caso particular do Teor. 3.7.12' com $\mathfrak{M}_A = \underline{MLC}_A$ e $\mathfrak{S} = \mathbb{K}_A$. $\blacksquare$

Corolário 4.3.2. Seja A um anel UCLC. Se X é um A-módulo localmente compacto, S é um submódulo de X e $x \in X$, então $x \in \bar{S}$ se e só se $u(x) = 0$ para todo $u \in S^o$.

Segue imediatamente do Teor. 4.3.1. e da prop. 3.7.4. . $\blacksquare$

Corolário 4.3.3. Seja A um anel UCLC. Se F é um submódulo fechado de um A-módulo localmente compacto X e $\mathfrak{S}$ é um conjunto de partes limitadas de F, então existe um isomorfismo de A-módulos topológicos:

$$F^{\bullet}_{\mathfrak{S}} \simeq X^{\bullet}_{\mathfrak{S}}/F^{o}$$

Seja $f : X^{\bullet}_{\mathfrak{S}} \to F^{\bullet}_{\mathfrak{S}}$ a aplicação definida por $f(u) = u|F$, então pelo teor. 4.3.1. f é sobrejetora. De outro lado $\operatorname{Ker} f = F^{o}$, portanto a aplicação $\bar{f}$ tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X^{\bullet}_{\mathfrak{S}} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & F^{\bullet}_{\mathfrak{S}} \\ X^{\bullet}_{\mathfrak{S}}/F^{o} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

é uma bijeção A-linear que é contínua pois se $B_1,\ldots,B_n$ são conjuntos de $\mathfrak{S}$ e $V_1,\ldots,V_n$ são vizinhanças de 0 em A^*, se tem por definição de f:

$$f\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \Gamma(B_i,V_i)\Big) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma(B_i,V_i)$$

o que prova que f é contínua, donde $\bar{f}$ é contínua. Como na realidade, do teor. 4.3.1. segue

$$f\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \Gamma(B_i,V_i)\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma(B_i,V_i))$$

resulta (prop. 1.4.14.) que $\bar{f}$ é um morfismo estrito, donde $\bar{f}$ é um isomorfismo. ∎

<u>Corolário</u> 4.3.4. <u>Sejam</u> A <u>um anel UCLC e</u> F <u>um submódulo fechado de um</u> A-<u>módulo localmente compacto</u> X. <u>Um subconjunto</u> T <u>de</u> F <u>é total em</u> F <u>se e só se</u> $T^{o} = F^{o}$.

É claro que se T é total então $T^{o} = F^{o}$. Inversamente, suponhamos que $T^{o} = F^{o}$ e que T não é total em F, então $\overline{[T]} = G \subsetneqq F$, portanto existe $z \in F \cap \complement G$ e pelo teor. 4.3.1. existe um A-caráter u de X que extende o A-caráter nulo de G e não se anula no ponto z. Então $u \in T^{o}$ e $u \notin F^{o}$ o que é absurdo. ∎

<u>Corolário</u> 4.3.5. <u>Sejam</u> A <u>um anel UCLC,</u> X <u>um</u> A-<u>módulo localmente compacto e</u> H <u>um subconjunto não vazio de</u> X. <u>Então</u> H = (0) <u>se e somente se</u> $H^{o} = X^{\bullet}$.

Se $x \in H$ e $x \neq 0$, o A-caráter (nulo) de (0) se extende a um A-caráter u de X que não se anula em x, donde $u \notin H^{o}$. ∎

<u>Observação</u> A implicação: $H^{o} = X^{\bullet} \Rightarrow H = (0)$ é equivalente à relação

$$\bigcap_{u \in X^{\bullet}} \operatorname{Ker} u = (0) \qquad (*)$$

De fato, seja $x \in \bigcap_{u \in X^\bullet} \operatorname{Ker} u$, então chamando H ao conjunto $\{x\}$, a relação precedente diz que $u \in H^o$ para cada $u \in X^\bullet$, donde $H^o = X^\bullet$ portanto $H = (0)$ o que implica $x = 0$. Inversamente, de (*) resulta: $(0) = \bigcap_{u \in X^\bullet} \operatorname{Ker} u = \bigcap_{u \in H^o} \operatorname{Ker} u \supset \overline{H}$ e portanto $\overline{H} = (0)$, donde $H = (0)$.

Sejam A um anel UCLC, X um A-módulo topológico e $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes limitadas de X verificando a condição

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{S}} B = X \qquad (C)$$

Para todo $x \in X$ se considera a aplicação $\omega(x) : X^\bullet_{\mathfrak{S}} \to A^*$ definida por $u \mapsto u(x)$, é claro que esta aplicação é A-linear e que a condição (C) implica que $\omega(x)$ é contínua. Construimos desta forma uma aplicação

$$\omega : X \to L_A(X^\bullet_{\mathfrak{S}}, A^*)$$
$$x \mapsto \omega(x)$$

que é evidentemente A-linear. Da prop. 3.5.8. segue que toda parte equicontínua de $X^\bullet$ é uma parte limitada de $X^\bullet_{\mathfrak{T}}$ para todo conjunto não vazio $\mathfrak{T}$ de partes limitadas de X. Mostremos que se $\mathfrak{S}'$ é um conjunto não vazio de partes equicontínuas de $X^\bullet$, então ω é uma aplicação contínua de X em $L_{\mathfrak{S}'}(X^\bullet_{\mathfrak{S}}, A^*)$. Com efeito, consideremos uma vizinhança de 0 em $L_{\mathfrak{S}'}(X^\bullet_{\mathfrak{S}}, A^*)$ do tipo $\Gamma(B', V)$ onde $B' \in \mathfrak{S}'$ e V é uma vizinhança de 0 em A^*; como B' é equicontínua existe uma vizinhança W de 0 em X tal que $u(W) \subset V$ para todo $u \in B'$ o que equivale à relação $\omega(W) \subset \Gamma(B', V)$. Da definição de ω resulta

$$\operatorname{Ker} \omega = \bigcap_{u \in X^\bullet} \operatorname{Ker} u$$

e então, o corol. 4.3.5. implica que se X é localmente compacto, então ω é injetora.

Em resumo provamos o resultado seguinte:

Proposição 4.3.6. Sejam A um anel UCLC, X um A-módulo topológico, $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes limitadas de X tal que

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{S}} B = X$$

e $\mathfrak{S}'$ um conjunto não vazio de partes equicontínuas de $X^\bullet$. Então, a aplicação

$$\omega : X \to (X^\bullet_{\mathfrak{S}})^\bullet_{\mathfrak{S}'}$$
$$x \mapsto (u \mapsto u(x))$$

é A-linear contínua. Se X é localmente compacto, então ω é injetora. ∎

No caso particular das topologias da convergência uniforme sobre todas as partes compactas, vamos provar o lema que permite "transportar" à categoria $\underline{MLC}_A$ os principais resultados da teoria da dualidade em $\underline{GALC}$, em particular o teorema de dualidade de Pontrjaguin (Teor. 4.3.13.)

Sejam A um anel UCLC e X um A-módulo topológico, notamos $*$ (resp. $\odot$) a lei externa de cap.3. (3.7.,(c)), que define a estrutura de A-módulo sobre A^* (resp. X^*); em outras palavras, para todo $\lambda \in A$ e $\tau \in A^*$ (resp. $\chi \in X^*$), $\lambda * \tau$ (resp. $\lambda \odot \chi$) é o elemento de A^* (resp. X^*) definido por $(\lambda * \tau)(\alpha) = \tau(\lambda\alpha)$ para todo $\alpha \in A$ (resp. $(\lambda \odot \chi)(x) = \chi(\lambda x)$ para todo $x \in X$). Como já foi dito, o fato de ser A localmente compacto junto à prop. 3.7.11., acarreta que A^* é um A-módulo topológico. Se X não é localmente compacto, então $\mathbb{K}_X$ não satisfaz necessariamente a condição (E2) de 3.7.,(c), donde a lei externa $\odot$ não é necessariamente contínua. Se X é localmente compacto, então pela prop. 3.7.11., a lei externa $\odot$ é contínua e X^* é um A-módulo topológico (localmente compacto, cfr. [HR] ,th. 23.15.).

A aplicação $\varphi : A^* \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida por $\tau \mapsto \tau(1)$ é obviamente $\mathbb{Z}$-linear contínua, donde resulta que para todo $u \in X^\bullet$ se tem $\hat{u} = \varphi \circ u \in X^*$, o que mostra que temos uma aplicação

$$f_X : u \in X^\bullet \mapsto \hat{u} \in X^*$$

Para construir a aplicação inversa de f_X vamos repetir neste caso particular, uma construção feita com todos os detalhes (que não desenvolveremos novamente aqui) na prova do Teor. 3.7.12.. Para todo $x \in X$, notamos j_x a aplicação de A em X definida por $\lambda \mapsto \lambda x$; é claro que $\chi \circ j_x \in A^*$ para todo $\chi \in X^*$. Verifica-se facilmente que para todo $\chi \in X^*$, a aplicação

$$\tilde{\chi} : x \in X \mapsto \chi \circ j_x \in A^*$$

é A-linear e usando o lema 2.3.6.,(b) como no Teor. 3.7.12., resulta que $\tilde{\chi}$ é contínua, donde $\tilde{\chi}$ é um A-caráter de X. Deduz-se então, uma aplicação

$$g_X : \chi \in X^* \longmapsto \tilde{\chi} \in X^\bullet$$

De acordo com a convenção de notação da pg.70 escrevemos $X_k^\bullet$ em vez de $X_{\mathbb{K}_X}^\bullet$ no próximo resultado.

<u>Lema</u> 4.3.7. <u>Sejam</u> A <u>um anel UCLC e</u> X <u>um</u> A-<u>módulo topológico</u> (<u>não necessariamente separado</u>). <u>Tem-se então, as seguintes asserções</u>:

(1º) <u>As aplicações</u>

$$f_X : u \in X^\bullet \mapsto \hat{u} \in X^*$$

$$g_X : \chi \in X^* \mapsto \tilde{\chi} \in X^\bullet$$

<u>são isomorfismos recíprocos de A-módulos.</u>

(2º) <u>Se X é localmente compacto, então as aplicações</u>

$$f_X : u \in X_k^\bullet \mapsto \hat{u} \in X^*$$

$$g_X : \chi \in X^* \mapsto \tilde{\chi} \in X_k^\bullet$$

<u>são isomorfismos recíprocos de A-módulos topológicos.</u>

(1º) De fato, é claro que f_X é aditiva, mostremos que f_X é A-homogenea, i.e., $f_X(\lambda u) = \lambda \odot f_X(u)$ para todo $\lambda \in A$, $u \in X^\bullet$. Para todo $x \in X$, se tem $(\lambda \odot f_X(u))(x) = f_X(u)(\lambda x) = u(\lambda x)(1) = (\lambda * u(x))(1) = ((\lambda u)(x))(1) = (f_X(\lambda u))(x)$, portanto f_X é A-linear. Das definições de f_X e g_X segue imediatamente que

$$f_X \circ g_X = 1_{X^*} \quad \text{e} \quad g_X \circ f_X = 1_{X^\bullet}$$

donde resulta que f_X e g_X são bijetoras e que g_X é A-linear.

(2º) Para provar que f_X é contínua consideremos uma vizinhança de 0 em X^* da forma $\Gamma(K,V)$, onde K é um compacto de X e V é uma vizinhança de 0 em $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Como o conjunto $\Gamma(\{1\},V)$ é uma vizinhança de 0 em A^*, resulta que $\Gamma(K,\Gamma(\{1\},V))$ é uma vizinhança de 0 em $X_k^\bullet$ e a relação

$$f_X(\Gamma(K,\Gamma(\{1\},V))) \subset \Gamma(K,V)$$

mostra então que f_X é contínua. Para provar que $g_X = f_X^{-1}$ é contínua consideramos uma vizinhança de 0 em $X_k^\bullet$ do tipo $\Gamma(K,\mathcal{V})$, onde K é um compacto de X e $\mathcal{V}$ é uma vizinhança de 0 em A^*. Existem então conjuntos compactos $H_1,\ldots,H_n$ em A e vizinhanças $V_1,\ldots,V_n$ de 0 em $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ tais que

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} \Gamma(H_i,V_i) \subset \mathcal{V} \qquad (1)$$

De outro lado, para todo $i = 1,2,\ldots,n$, o conjunto $\Gamma(K,V_i)$ é uma vizinhança de 0 em X^*, e então a compacidade de H_i junto ao lema 2.3.6.,(b) acarreta que existem vizinhanças $\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_n$ de 0 em X^* tais que

$$H_i \odot \mathcal{U}_i \subset \Gamma(K,V_i) \quad \text{para todo } i = 1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

O conjunto $\mathcal{U}$, interseção dos $\mathcal{U}_i$, é então uma vizinhança de 0 em X^* e como as relações (1) e (2) implicam $g_X(\mathcal{U}) \subset \Gamma(K,\mathcal{V})$, resulta que g_X é contínua. ∎

<u>Teorema</u> 4.3.8. <u>Sejam</u> A <u>um anel UCLC e</u> X <u>um</u> A-<u>módulo topológico. Têm-se as asserções seguintes:</u>

(a) Se X é localmente compacto, então $X_k^\bullet$ é localmente compacto.
(b) Se X é compacto, então $X_k^\bullet$ é discreto.
(c) Se X é discreto, então $X_k^\bullet$ é compacto.

Este resultado é consequência do mesmo resultado no caso $A = \mathbb{Z}$ ([HR], Th.23.15. e 23.17.) e do lema 4.3.7.,(2º). ∎

Teorema 4.3.9. Sejam A um anel UCLC e F um submódulo fechado de um A-módulo localmente compacto X. Então, existe um isomorfismo de módulos topológicos

$$(X/F)_k^\bullet \simeq F^o$$

Seja $p : X \to X/F$ a aplicação canônica. Como X é localmente compacto e F é fechado, o conjunto $\{p(K) \mid K$ é compacto em $X\}$ é o conjunto de todas as partes compactas de X/F, portanto o resultado segue da prop. 4.2.2.. ∎

Corolário 4.3.10. Sejam A um anel UCLC e M um submódulo aberto de um A-módulo localmente compacto X. Então M^o é um submódulo compacto de $X_k^\bullet$.

Como M é aberto, X/M é discreto, donde $(X/M)_k^\bullet \simeq M^o$ é compacto. ∎

Corolário 4.3.11. Sejam A um anel UCLC não discreto e X um A-módulo localmente compacto, então:
(a) Se X é discreto, então X não possui elementos livres.
(b) Se X é compacto, então $X^\bullet$ não possui elementos livres.

(a) é trivial e (b) resulta de (a) e do Teor. 4.3.8.. ∎

Proposição 4.3.12. Se A é um anel unitário comutativo compacto, então a topologia de A é linear (isto é, A possui um sistema fundamental de vizinhanças de 0 formada por ideais).

O caso A discreto sendo trivial podemos supor que A não é discreto, então A^* é um A-módulo discreto. Para todo $u \in A^*$, seja $W_u = \{\lambda \in A \mid \lambda * u = 0\}$, então o conjunto das interseções finitas de ideais da família $(W_u)_{u \in A^*}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 para uma topologia $\mathcal{T}$ compatível com a estrutura de anel de A. Como A^* é um A-módulo discreto, a continuidade das aplicações $\lambda \mapsto \lambda * u$ acarreta que W_u é aberto, donde $\mathcal{T}$ é menos fina que a topologia original de A. Finalmente, de [HR], corol. 24.12., resulta que $\bigcap_{u \in A^*} W_u =$

$= \bigcap_{u \in A^*} \operatorname{Ker} u = (0)$ portanto $\mathcal{T}$ é separada e então (indicando com $A_{\mathcal{T}}$ o anel A munido da topologia $\mathcal{T}$) a aplicação idêntica $A \to A_{\mathcal{T}}$ é um homeomorfismo. ∎

<u>Teorema</u> 4.3.13. <u>Seja</u> A <u>um anel UCLC. Então, para todo</u> A-<u>módulo localmente compacto</u> X, <u>a aplicação canônica</u>

$$\omega : X \to (X_k^\bullet)_k^\bullet$$
$$x \mapsto (u \mapsto u(x))$$

<u>é um isomorfismo de</u> A-<u>módulos topológicos</u>.

A aplicação $f_X : X_k^\bullet \to X^*$ é, pelo lema 4.3.7.,(2º), um isomorfismo de A-módulos topológicos, portanto induz um isomorfismo de A-módulos topológicos

$$f_X^* : X^{**} \to (X_k^\bullet)^*$$
$$\tilde{x} \mapsto \tilde{x} \circ f_X$$

Pelo Teor. 4.3.8., $X_k^\bullet$ é localmente compacto e então pelo lema 4.3.7., (2º) resulta que a aplicação

$$g_{X_k^\bullet} : (X_k^\bullet)^* \to (X_k^\bullet)_k^\bullet$$

é um isomorfismo de A-módulos topológicos. A aplicação canônica $\omega' : X \to X^{**}$ é, pelo teorema de dualidade de Pontrjaguin ([HR] ,Th. 24.8.), um isomorfismo de grupos topológicos, e neste caso é de fato um isomorfismo de A-módulos topológicos. Então, para mostrar que ω é um isomorfismo é suficiente verificar a comutatividade do diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\omega'"'] & (X_k^\bullet)_k^\bullet \\ X^{**} \arrow[r, "f_X^*"] & (X_k^\bullet)^* \arrow[u, "g_{X_k^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

De fato, se $x \in X$, então $\omega(x)$ é a aplicação $u \mapsto u(x)$ e $(g_{X_k^\bullet} \circ f_X \circ \omega')(x)$ é a aplicação $u \mapsto \tilde{x} \circ f_X \circ j_u$, onde $\tilde{x} = \omega'(x)$ é a aplicação $\chi \mapsto \chi(x)$ e $j_u : A \to X_k^\bullet$ é definida por $\lambda \mapsto \lambda u$. A verificação da comutatividade do diagrama acima se reduz a provar que $u(x)(\alpha) = (\tilde{x} \circ f_X \circ j_u)(\alpha)$ para todo $\alpha \in A$, o que é trivial: $(\tilde{x} \circ f_X \circ j_u)(\alpha) = (\tilde{x} \circ f_X)(\alpha u) = \tilde{x}(\varphi \circ \alpha u) = (\varphi \circ \alpha u)(x) = ((\alpha u)(x))(1) = (\alpha * u(x))(1) = u(x)(\alpha)$. ∎

Veremos a seguir várias consequências do Teor. 4.3.13., começamos com a recíproca do corol. 4.3.10.

Corolário 4.3.14. Sejam A um anel UCLC e M um submódulo fechado de um A-módulo localmente compacto X tal que M^{o} é compacto. Então M é aberto.

Como M é fechado, pelo Teor. 4.3.9. resulta $(X/M)^{\bullet}_{k} \simeq M^{o}$ e sendo M^{o} compacto resulta que $(X/M)^{\bullet}_{k}$ é compacto o que implica, pelo Teor. 4.3.8. que $((X/M)^{\bullet}_{k})^{\bullet}_{k}$ é discreto. Como X/M é localmente compacto (por ser M fechado), o Teor. 4.3.13. acarreta que X/M é discreto, donde M é aberto. ∎

Corolário 4.3.15. Sejam A um anel UCLC, X um A-módulo localmente compacto e $\mathfrak{X}$ um submódulo de $X^{\bullet}$ tal que para todo $x \in X$, $x \neq 0$ existe $u \in \mathfrak{X}$ tal que $u(x) \neq 0$. Então, $\mathfrak{X}$ é denso em $X^{\bullet}_{k}$.

Pelo Teor. 4.3.13. temos

$$\mathfrak{X}^{o} = \mathfrak{X}^{o}[X^{\bullet}_{k}, A^{*}] = \left\{ \omega(x) \in (X^{\bullet}_{k})^{\bullet} \;\middle|\; x \in \bigcap_{u \in \mathfrak{X}} \operatorname{Ker} u \right\}$$

e como a hipótese feita sobre $\mathfrak{X}$ equivale a $\bigcap_{u \in \mathfrak{X}} \operatorname{Ker} u = (0)$ resulta que $\mathfrak{X}^{o} = (0)$, donde $(\overline{\mathfrak{X}})^{o} = (0)$. Então, o resultado segue do Teor. 4.3.1. pois se existe $u \in X^{\bullet}_{k} \cap \complement \overline{\mathfrak{X}}$, então o A-caráter nulo de $\overline{\mathfrak{X}}$ se extende a um A-caráter η de $X^{\bullet}_{k}$ que não se anula em u e portanto $\eta \neq 0$ o que é absurdo pois $\eta \in (\overline{\mathfrak{X}})^{o} = (0)$. ∎

Se X é um A-módulo localmente compacto e H é um subconjunto de X, seja $\widetilde{H} = \{ \chi \in X^{*} \mid H \subset \operatorname{Ker} \chi \}$. Com as notações do lema 4.3.7., é claro que $f_{X}(H^{o}) \subset \widetilde{H}$ e em geral $g_{X}(\widetilde{H}) \not\subset H^{o}$. Se H é um submódulo de X, então neste caso $g_{X}(\widetilde{H}) \subset H^{o}$ o que implica que

$$g_{X}(\widetilde{H}) = H^{o} \quad \text{e} \quad f_{X}(H^{o}) = \widetilde{H}$$

i.e. $\widetilde{H}$ é um submódulo de X^{*}. Se $\mathfrak{X}$ é um submódulo de $X^{\bullet}_{k}$, indicamos com $\mathfrak{X}^{o}$ o submódulo (de $(X^{\bullet}_{k})^{\bullet}_{k}$) $\mathfrak{X}^{o}[X^{\bullet}_{k}, A^{*}]$, que identificamos a sua imagem por ω^{-1} (onde ω é o isomorfismo canônico do Teor. 4.3.13.) então

$$\mathfrak{X}^{o} = \{ x \in X \mid u(x) = 0 \text{ para todo } u \in \mathfrak{X} \} .$$

Para todo subconjunto H de X, H^{o} é um submódulo de $X^{\bullet}_{k}$, o anulador $(H^{o})^{o}$ de H^{o} será notado H^{oo}.

Proposição 4.3.16. Seja A um anel UCLC. Se F é um submódulo fechado de um A-módulo localmente compacto X, então $F = F^{oo}$.

Seja $y \in F$, provar que $y \in F^{oo}$ equivale a verificar que $u(y) = 0$ para todo $u \in F^{o}$, o que é evidente pela definição de F^{o}, donde $F \subset F^{oo}$. Inversamente, se $x \notin F$, o Teor. 4.3.1. acarreta que o A-caráter

nulo de F se extende a um A-caráter u de X que não se anula em x, donde $u \in F^{o}$ e $x \notin F^{oo}$ o que prova a inclusão inversa. ∎

Teorema 4.3.17. Seja A um anel UCLC. Se F é um submódulo fechado de um A-módulo localmente compacto X, então existe um isomorfismo de A-módulos topológicos:

$$F_k^{\bullet} \simeq X_k^{\bullet}/F^{o}$$

De fato, pelo Teor. 4.3.9., temos $(X_k^{\bullet}/F^{o})_k^{\bullet} \simeq F^{oo}$ e então a prop. 4.3.16. implica que $F \simeq (X_k^{\bullet}/F^{o})_k^{\bullet}$ e o resultado segue do Teor. 4.3.13. ∎

Observações (1) Se no corol. 4.3.15. substituimos a hipótese de $\mathfrak{X}$ ser um submódulo pela hipótese de $\mathfrak{X}$ ser apenas um subconjunto, então a conclusão é que $\mathfrak{X}$ é total em $X_k^{\bullet}$. Com efeito, basta aplicar o corol. 4.3.15. ao submódulo gerado por $\mathfrak{X}$.

(2) O lema 4.3.7. mostra que na categoria $\underline{MLC}_A$ se pode definir o dual de um objeto X como sendo o dual X^* de X na categoria GALC, munido da estrutura de A-módulo topológico dada pela prop. 3.7.11. .

(3) Usando métodos da teoria de categorias e funtores em [N] se demonstra os resultados seguintes:

(a) Se $(G_i)_{i \in I}$ é um sistema indutivo de grupos abelianos localmente compactos compactamente gerados, então $(\varinjlim G_i)^* \simeq \varprojlim G_i^*$ (Th.4.6.)

(b) Se $(G_i)_{i \in I}$ é um sistema projetivo de grupos abelianos localmente compactos compactamente gerados, então $(\varprojlim G_i)^* \simeq \varinjlim G_i^*$. (Th. 4.7.).

(c) Se $(G_i)_{i \in I}$ é um sistema indutivo (resp. projetivo) de grupos abelianos localmente compactos compactamente gerados, então

$$(\varinjlim G_i)^{**} \simeq \varinjlim G_i \quad (\text{resp. } (\varprojlim G_i)^{**} \simeq \varprojlim G_i) \quad \text{(Corol. 4.8.)}$$

Neste trabalho se começa por provar o teorema de dualidade para grupos abelianos localmente compactos compactamente gerados (consequência da prop. 4.2.) e então a asserção (c) resulta de (a) e (b). Também é demonstrado que todo grupo abeliano localmente compacto é limite indutivo de grupos abelianos localmente compactos compactamente gerados de maneira que o teorema de dualidade resulta como caso particular da asserção (c) (corol. 4.9.). Nossos métodos não parecem indicados para extender estes resultados para os módulos topológicos, a razão principal é que a consideração do bidual é mais delicada no caso dos módulos topológicos que nos grupos abelianos topológicos (cfr. Obs.(3), pg.50)

4.4. Existência de A-caracteres.

Nos colocamos novamente no caso geral, isto é, A é um anel UCLC e X é um A-módulo topológico separado arbitrário. Existem, para o dual $X^\bullet$ de X, várias possibilidades notáveis, a saber:

(a) $X^\bullet = (0)$ (cfr. [HR], 23.32.).

(b) $X^\bullet \neq (0)$ mas existe $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $u(x) = 0$ para todo $u \in X^\bullet$.

(c) Os A-caracteres de X separam os elementos de X (i.e. para cada $x \in X$, $x \neq 0$, existe $u \in X^\bullet$ tal que $u(x) \neq 0$).

Em [H], pg.254-255 se encontra um exemplo (com $A = \mathbf{Z}$) onde X satisfaz a condição (b), mas existe um sub-$\mathbf{Z}$-módulo fechado F de X tal que F e X/F verificam a condição (c). O resultado seguinte mostra duas condições trivialmente equivalentes à condição (c).

Proposição 4.4.1. Sejam A um anel UCLC e X um A-módulo topológico separado. As condições seguintes são equivalentes:

(i) Os A-caracteres de X separam os elementos de X.

(ii) $\bigcap_{u \in X^\bullet} \operatorname{Ker} u = (0)$.

(iii) A aplicação canônica $\omega : X \to (X^\bullet_{\mathfrak{S}})^\bullet$ é injetora para todo conjunto $\mathfrak{S}$ verificando as hipóteses da prop. 4.3.6. .

De fato, $\operatorname{Ker} \omega = \bigcap_{u \in X^\bullet} \operatorname{Ker} u$. ∎

No que segue damos algumas caracterizações dos A-módulos topológicos (separados) que verificam a condição (c), menos evidentes que a prop. 4.4.1.. O primeiro passo nesta direção é o resultado seguinte que é uma consequência da primeira parte do lema 4.3.7. do qual utilizamos as notações.

Teorema 4.4.2. Sejam A um anel UCLC, X um A-módulo topológico separado e $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. As condições seguintes são equivalentes:

(i) Existe $\chi \in X^*$ tal que $\chi(x_0) \neq 0$.

(ii) Existe $u \in X^\bullet$ tal que $u(x_0) \neq 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Seja $u = g_X(\chi)$, então $u(x_0) = \chi \circ j_{x_0} \neq 0$ pois $(\chi \circ j_{x_0})(1) = \chi(x_0) \neq 0$ por (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i): O conjunto $\{x_0\}$ é uma parte limitada de X portanto, se $\mathfrak{S} = \{\{x_0\}\}$, então $X^\bullet_{\mathfrak{S}}$ é um A-módulo topológico e é fácil ver que a aplicação $\psi : X^\bullet_{\mathfrak{S}} \to A^*$ definida por $u \mapsto u(x_0)$ é A-linear contínua, donde

$$\psi \in (X^\bullet_{\mathfrak{S}})^\bullet \qquad (1)$$

Seja, como no lema 4.3.7., $\varphi : A^* \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ a aplicação $\mathbf{Z}$-linear contí-

nua definida por $\tau \mapsto \tau(1)$. Pela primeira parte do lema 4.3.7. a aplicação f_X é bijetora, donde todo $\chi \in X^*$ é da forma $\hat{u} = \varphi \circ u$ para algum $u \in X^\bullet$ e então a relação

$$\chi(x_0) = 0 \text{ para todo } \chi \in X^*$$

se escreve

$$\varphi(u(x_0)) = 0 \text{ para todo } u \in X^\bullet$$

o que equivale à relação:

$$\operatorname{Im} \psi \subset \operatorname{Ker} \varphi \qquad (2)$$

Apliquemos agora a primeira parte do lema 4.3.7. ao A-módulo topológico $X^\bullet_{\mathfrak{S}}$, resulta que a aplicação

$$f_{X^\bullet_{\mathfrak{S}}} : (X^\bullet_{\mathfrak{S}})^\bullet \to (X^\bullet_{\mathfrak{S}})^*$$

é um isomorfismo de A-módulos. De (1) e da definição de $f_{X^\bullet_{\mathfrak{S}}}$ segue $f_{X^\bullet_{\mathfrak{S}}}(\psi) = \varphi \circ \psi \in (X^\bullet_{\mathfrak{S}})^*$ e de (2) resulta $f_{X^\bullet_{\mathfrak{S}}}(\psi) = 0$, donde $\psi = 0$ o que é absurdo. ∎

O resultado seguinte é consequência do Teor. 4.4.2. e do Th. 1 de [CR]. Antes damos a seguinte (cfr. [CR], pg.375):

<u>Definição</u> 4.4.3. Um subconjunto G de um grupo abeliano topológico X (notado aditivamente) é chamado <u>grande</u> se existe uma família finita $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de elementos de X tal que

$$X \subset (x_1 + G) \cup \ldots \cup (x_n + G)$$

Se $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ e S é um subconjunto de um grupo abeliano X, notado aditivamente, se usa a notação nS para indicar o subconjunto $\sum_{1 \leq i \leq n} S_i$ de X com $S_i = S$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

<u>Teorema</u> 4.4.4. <u>Sejam</u> A <u>um anel UCLC</u>, X <u>um</u> A-<u>módulo topológico separado e</u> $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. <u>As condições seguintes são equivalentes</u>:

(i) <u>Existe</u> $u \in X^\bullet$ <u>tal que</u> $u(x_0) \neq 0$.

(ii) <u>Existe</u> $\chi \in X^*$ <u>tal que</u> $\chi(x_0) \neq 0$.

(iii) <u>Existe uma vizinhança</u> V <u>de</u> 0 <u>em</u> X <u>tal que</u> V <u>é um conjunto grande e</u> $x \notin 6V$.

A equivalência entre (i) e (ii) é o Teor. 4.4.3. e a equivalência entre (ii) e (iii) é o Th.1 de [CR]. ∎

Da prop. 4.4.1. e do Teor. 4.4.4. resulta então:

<u>Teorema</u> 4.4.5. <u>Sejam</u> A <u>um anel UCLC e</u> X <u>um</u> A-<u>módulo topológico separado. As condições seguintes são equivalentes</u>:

(i) Os A-caracteres de X separam os elementos de X.

(ii) Os caracteres de X separam os elementos de X.

(iii) Para cada $x \in X$, $x \neq 0$ existe uma vizinhança V_x de 0 em X tal que V_x é um conjunto grande e $x \notin 6V_x$.

(iv) A aplicação canônica $\omega : X \to (X^{\bullet}_{\mathfrak{S}})^{\bullet}$ é injetora para todo conjunto $\mathfrak{S}$ verificando as hipóteses da prop. 4.3.6..

(v) $\bigcap_{u \in X^{\bullet}} \operatorname{Ker} u = (0)$. ∎

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES CONTÍNUAS EM UM MÓDULO TOPOLÓGICO.

5.1. Estruturas algébricas e topológicas

Sejam T um espaço topológico, A um anel topológico e Y um A-módulo topológico. Indicamos com $C(T,Y)$ o conjunto das aplicações contínuas de T em Y. Dadas $f,g \in C(T,Y)$ e $\lambda \in A$, definem-se as aplicações $f + g : T \to Y$ e $\lambda f : T \to Y$ pelas relações seguintes:

$$(L) \quad \begin{cases} (f+g)(t) = f(t) + g(t) \text{ para cada } t \in T \\ (\lambda f)(t) = \lambda . f(t) \text{ para cada } t \in T. \end{cases}$$

Mostremos que $f + g$ e λf são elementos de $C(T,Y)$. Para provar a continuidade de $f + g$ começamos por mostrar que pela definição de produto de espaços topológicos, existe uma única função contínua $f \times g : T \to Y \times Y$ que torna comutativa o diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y & & \\ Y \times Y \arrow[u] \arrow[d] & & T \arrow[ul, "f"'] \arrow[ll, dashed, "f \times g"'] \arrow[dl, "g"] \\ Y & & \end{tikzcd}$$

(onde as flechas verticais são as projeções) e por definição $(f \times g)(t) = (f(t), g(t))$ para todo $t \in T$. Então, a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f \times g"] \arrow[dr, "f + g"'] & Y \times Y \arrow[d, "+"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(onde a flecha vertical é a adição em Y) prova que $f + g$ é contínua. Para provar a continuidade de λf se poderia proceder de maneira análoga, substituindo no raciocínio anterior o produto $Y \times Y$ por $A \times Y$ e a função g pela função $\tilde{\lambda} : T \to A$ definida por $\tilde{\lambda}(t) = \lambda$ para todo $t \in T$. Mas é mais fácil observar que se $h_\lambda : Y \to Y$ é a aplicação $y \mapsto \lambda y$, então $\lambda f = h_\lambda \circ f$, donde λf é contínua. Fica assim prova-

Proposição 5.1.1. As leis de composição (L) determinam sobre $C(T,Y)$ uma estrutura de A-módulo. ∎

Se P é uma parte de T e Q é uma parte de Y, indicamos com $\nabla(P,Q)$ o conjunto das $f \in C(T,Y)$ tais que $f(P) \subset Q$. Seja $\mathfrak{S}$ um conjunto não vazio de partes compactas de T e consideremos o conjunto

$$\mathfrak{J} = \{\nabla(S,V) \mid S \in \mathfrak{S} \text{ e } V \text{ é uma vizinhança de } 0 \text{ em } Y\}$$

Seja $\mathcal{B}$ o conjunto das interseções finitas de conjuntos de $\mathfrak{J}$. Com estas notações temos o seguinte resultado:

Proposição 5.1.2, Existe uma única topologia $\mathcal{T}$ sobre $C(T,Y)$ que é compatível com a estrutura de A-módulo de $C(T,Y)$ tal que $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de $\mathcal{T}$-vizinhanças de 0.

A prova se apoia em várias considerações do cap. 3 (3.1.) do qual utilizamos as notações. Em primeiro lugar observamos que $C(T,Y)$ com as leis de composição (L) é um submódulo de $\mathcal{F}(T,Y)$. Seja $\mathcal{T}$ a topologia induzida sobre $C(T,Y)$ pela $\mathfrak{S}$-topologia sobre $\mathcal{F}(T,Y)$, então como todos os conjuntos de $\mathfrak{S}$ são compactos, pela prop. 3.1.2. e a prop. 2.4.2.(a) resulta que $\mathcal{T}$ é compatível com a estrutura de A-módulo de $C(T,Y)$. A relação $\Gamma_0(S,V) \cap C(T,Y) = \nabla(S,V)$ para cada $S \in \mathfrak{S}$ e para cada vizinhança V de 0 em Y, mostra que $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de $\mathcal{T}$-vizinhança de 0 em $C(T,Y)$. ∎

Notação A topologia da prop. 5.1.2. é chamada $\mathfrak{S}$-topologia sobre $C(T,Y)$. O A-módulo $C(T,Y)$ munido desta topologia será indicada por

$$C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$$

Quando $\mathfrak{S}$ é o conjunto de todas as partes finitas (resp. compactas) de T usaremos a notação $C_f(T,Y)$ (resp. $C_k(T,Y)$).

Observações (1) O uso da prop. 3.1.2.,(3º) na verificação de (MT_I') na prova da prop. 5.1.2. mostra que a exigência de todos os conjuntos de $\mathfrak{S}$ serem compactos é natural.

(2) No caso particular de T ser um A-módulo topológico (sempre supondo $\mathfrak{S}$ formado por partes compactas de T) se tem:

$$C_{\mathfrak{S}}(T,Y) \cap L_A(T,Y) = L_{\mathfrak{S}}(T,Y).$$

Em outras palavras, a $\mathfrak{S}$-topologia sobre $C(T,Y)$ induz sobre $L_A(T,Y)$ a $\mathfrak{S}$-topologia, isto resulta da identidade evidente

$$\nabla(S,V) \cap L_A(T,Y) = \Gamma(S,V)$$

para cada $S \in \mathfrak{S}$ e cada vizinhança V de 0 em Y.

(3) Se $\mathfrak{S}$ é um conjunto de partes compactas de T que contém todas as partes reduzidas a um ponto de T e Y é separado, então $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$ é separado. De fato, se $u \in C(T,Y)$ e $u \neq 0$, existe $t \in T$ tal que $u(t) \neq 0$, portanto existe uma vizinhança V de 0 em Y tal que $u(t) \notin V$, donde $u \notin \nabla(\{t\},V)$.

No resultado seguinte indicamos com $\mathcal{F}_f(X,Y)$ o conjunto $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ quando $\mathfrak{S}$ é o conjunto de todas as partes finitas de X.

<u>Proposição</u> 5.1.3. <u>Se</u> X <u>e</u> Y <u>são dois</u> A-<u>módulos topológicos, então</u> $L_A(X,Y)$ <u>é um submódulo fechado de</u> $C_f(X,Y)$, <u>se</u> Y <u>é separado</u>.

Seja $(Y_x)_{x \in X}$ a família definida por $Y_x = Y$ para cada $x \in X$, então é claro que $\mathcal{F}_f(X,Y) = \widetilde{\prod_{x \in X}} Y_x$. Para simplificar a notação indicamos por P o A-módulo $\mathcal{F}_f(X,Y)$; seja para cada $x \in X$, π_x a aplicação canônica de P sobre $Y_x = Y$, isto é $f \mapsto f(x)$. Se p_x é a restrição de π_x a $C(X,Y)$, então $p_x : C_f(X,Y) \to Y$ é A-linear contínua. Dados $x,y \in X$ e $\lambda \in A$, consideremos os conjuntos:

$$R_{x,y} = \{f \in C(X,Y) \mid f(x+y) - f(x) - f(y) = 0\}$$
$$H_{\lambda,x} = \{f \in C(X,Y) \mid \lambda.f(x) - f(\lambda x) = 0\}$$

então as igualdades:

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = p_{x+y}(f) - p_x(f) - p_y(f) = (p_{x+y} - p_x - p_y)(f)$$
$$\lambda.f(x) - f(\lambda x) = \lambda.p_x(f) - p_{\lambda x}(f) = (\lambda.p_x - p_{\lambda x})(f)$$

acarretam

$$R_{x,y} = \operatorname{Ker}(p_{x+y} - p_x - p_y)$$
$$H_{\lambda,x} = \operatorname{Ker}(\lambda.p_x - p_{\lambda x})$$

e como Y é separado resulta que $R_{x,y}$ e $H_{\lambda,x}$ são subconjuntos fechados de $C_f(X,Y)$, donde

$$R = \bigcap_{(x,y) \in X \times X} R_{x,y} \quad \text{e} \quad H = \bigcap_{(\lambda,x) \in A \times X} H_{\lambda,x}$$

são subconjuntos fechados de $C_f(X,Y)$ o que implica que

$$L_A(X,Y) = R \cap H$$

é fechado em $C_f(X,Y)$. ∎

<u>Corolário</u> 5.1.4. <u>Sejam</u> X <u>e</u> Y <u>dois</u> A-<u>módulos e suponhamos que</u> Y <u>é separado. Então, para cada conjunto</u> $\mathfrak{S}$ <u>de partes compactas de</u> X <u>conten-</u>

do todas as partes finitas de X, $L_A(X,Y)$ é um submódulo fechado de $C_{\mathfrak{S}}(X,Y)$. ∎

Proposição 5.1.5. Sejam X um A-módulo topológico, $(Y,\mathcal{V})$ um A-par admissível (cfr. Def. 3.5.2.) onde Y é suposto compacto, $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes compactas de X contendo todas as partes finitas de X e $M = L_{\mathfrak{S}}(X,Y)$. Têm-se então as asserções seguintes:

(a) Se existe uma vizinhança U de 0 em X tal que $U \in \mathfrak{S}$, então M é localmente compacto.

(b) Se X é discreto, então M é compacto.

(c) Se $X \in \mathfrak{S}$, então M é discreto.

(a) Seja $V \in \mathcal{V}$ e consideremos o conjunto $E = \Gamma(U,V)$. Como $U \in \mathfrak{S}$, resulta que E é uma vizinhança de 0 em M; de outro lado sendo U uma vizinhança de 0 em X, pelo lema 3.5.6. resulta que E é equicontínuo. Como $\mathfrak{S}$ contém todas as partes finitas de X, o lema 3.5.5. acarreta que o fecho E' de E em M é equicontínuo donde segue que E' é um subconjunto equicontínuo de C(X,Y). Como Y é compacto, para cada $x \in X$, o conjunto $E'(x) = \{u(x) \mid u \in E'\}$ tem fecho compacto em Y. Finalmente, E' sendo fechado em M, pelo corol. 5.1.4., resulta que E' é fechado em $C_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ e como todo conjunto de $\mathfrak{S}$ é compacto, resulta que E' é fechado em $C_k(X,Y)$. Pelo teorema de Ascoli resulta que E' é um subconjunto compacto de $C_k(X,Y)$, donde E' é um subconjunto compacto de $C_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ e então E' é uma vizinhança compacta de 0 em M.

(b) O conjunto $U = \{0\}$ é uma vizinhança de 0 em X, e como $\mathfrak{S}$ contém todas as partes finitas de X resulta que $U \in \mathfrak{S}$, portanto dado $V \in \mathcal{V}$ o raciocínio feito em (a) mostra que o fecho E' em M do conjunto $\Gamma(U,V)$, é compacto em M. Então o resultado segue das relações evidentes: $M = \Gamma(U,V) \subset E' \subset M$.

(c) Como $X \in \mathfrak{S}$, o conjunto $\Gamma(X,V)$ é uma vizinhança de 0 em M para toda $V \in \mathcal{V}$, o resultado segue então do lema 3.5.7.. ∎

5.2. Funções de C(T,Y) que se anulam sobre um subconjunto de T.

Sejam T um espaço topológico, A um anel topológico e Y um A-módulo topológico, então dado $f \in C(T,Y)$ chamamos conjunto de anulação de f ao subconjunto Z(f) do espaço topológico T, formado pelos t tais que $f(t) = 0$ e se S é um subconjunto qualquer de T, definimos

$$C_S(T,Y) = \{f \in C(T,Y) \mid S \subset Z(f)\}.$$

Seja S^0 a interseção da família $(Z(f))_{f \in C_S(T,Y)}$. É claro que

$C_S(T,Y)$ é um submódulo de $C(T,Y)$, que $S_1 \subset S_2$ implica $C_{S_2}(T,Y) \subset C_{S_1}(T,Y)$ e que se Y é separado, então S° é um subconjunto fechado de T que contém S e portanto contém também $\bar{S}$. No resultado seguinte escreveremos C_S em vez de $C_S(T,Y)$.

Proposição 5.2.1. Sejam T um espaço topológico, Y um A-módulo topológico separado e $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes compactas de T contendo todas as partes finitas de T.

Têm-se então

(a) Para todo subconjunto S de T, C_S é um submódulo fechado de $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$.

(b) Se F e G são dois subconjuntos de T tais que $G \subset F \subset \bar{G}$, então $C_G = C_F$.

(c) As condições seguintes (sobre T e Y) são equivalentes:

(i) $C_G = C_H$ implica $\bar{G} = \bar{H}$.

(ii) Para todo subconjunto S de T, se tem $\bar{S} = S^{\circ}$.

(iii) Para todo subconjunto fechado F de T e todo $x \in \complement F$, existe $f \in C_F$ tal que $f(x) \neq 0$.

(iv) Se $x \in T$ e $f(x) = 0$ para todo $f \in C_S$ então $x \in \bar{S}$.

(v) Se F e G são subconjuntos fechados de T tais que $C_F = C_G$, então $F = G$.

(a) Se $f \notin C_S$ então existe $x \in S$ tal que $f(x) \neq 0$ e como Y é separado existe uma vizinhança V de 0 em Y tal que $0 \notin W = f(x) + V$, donde resulta

$$f + \nabla(\{x\},V) \subset \complement C_S$$

(b) É suficiente provar que $C_G \subset C_{\bar{G}}$ o que é imediato pois se $f \in C_G$ então $Z(f) \supset G$ e sendo Y separado resulta que $Z(f) \supset \bar{G}$ donde $f \in C_{\bar{G}}$.

(c) (i) $\Rightarrow$ (ii) A inclusão $C_{S^{\circ}} \subset C_{\bar{S}}$ segue de $\bar{S} \subset S^{\circ}$. Inversamente, se $f \in C_{\bar{S}}$ então $f \in C_S$, donde

$$Z(f) \supset \bigcap_{g \in C_S} Z(g) = S^{\circ}$$

o que prova que $f \in C_{S^{\circ}}$, em consequência $C_{\bar{S}} = C_{S^{\circ}}$. Da condição (i) resulta então $(\bar{S}) = (\overline{S^{\circ}})$ ou seja $\bar{S} = S^{\circ}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $f(x) = 0$ para toda $f \in C_F$ equivale (usando (ii) e a hipótese de F ser fechado) à relação

$$x \in \bigcap_{f \in C_F} Z(f) = F^{\circ} = \bar{F} = F$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) A asserção (b) implica que $C_S = C_{\bar{S}}$, donde a condição

$$f(x) = 0 \text{ para toda } f \in C_S$$

equivale a: $f(x) = 0$ para toda $f \in C_{\overline{S}}$. Então, se $x \notin \overline{S}$, a condição (iii) acarretaria a existência de $g \in C_{\overline{S}}$ tal que $g(x) \neq 0$ o que é absurdo.

(iv)$\Rightarrow$(v) Basta ver que $F \subset G$. Se $x \in F$, então $f(x) = 0$ para toda $f \in C_F$ e como $C_F = C_G$ resulta $f(x) = 0$ para todo $f \in C_G$, o que por (iv) implica $x \in \overline{G} = G$.

(v)$\Rightarrow$(i) Pela asserção (b) temos $C_G = C_{\overline{G}}$ e $C_H = C_{\overline{H}}$ então da igualdade $C_G = C_H$ resulta $C_{\overline{G}} = C_{\overline{H}}$, donde por (v) segue $\overline{G} = \overline{H}$. ∎

<u>Observação</u> Quando T é completamente regular, $\mathfrak{S}$ é o conjunto de todas as partes compactas de T e $A = Y = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, vale um resultado mais forte que a asserção (a) da prop.5.2.1.: Se I é um ideal fechado de $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$ então existe um único subconjunto fechado F_I de T tal que $I = C_{F_I}(T,Y)$ (cfr. [C], prop.1.2.).

5.3. <u>Aplicações contínuas e soma direta finita.</u>

<u>Proposição</u> 5.3.1. <u>Sejam</u> T <u>um espaço topológico,</u> $\mathfrak{S}$ <u>um conjunto de partes compactas de</u> T <u>contendo todas as partes finitas de</u> T <u>e</u> $(Y_i)_{i\in F}$ <u>uma família finita de</u> A-<u>módulos topológicos. Então existe um isomorfismo de</u> A-<u>módulos topológicos</u>

$$C_{\mathfrak{S}}(T, \tilde{\bigoplus}_{i\in F} Y_i) \simeq \tilde{\bigoplus}_{i\in F} C_{\mathfrak{S}}(T,Y_i)$$

Para simplificar as notações indiquemos com Y a soma direta $\tilde{\bigoplus}_{i\in F} Y_i$ que pela prop.1.4.9.,(c) coincide com o produto $\prod_{i\in F} Y_i$. A aplicação canônica

$$\pi_i : Y \to Y_i$$

define uma aplicação

$$\psi : C(T,Y) \to \bigoplus_{i\in F} C(T,Y_i)$$

por $f \mapsto (\pi_i \circ f)_{i\in F}$. Esta aplicação ψ é obviamente A-linear, além disso da propriedade universal do produto dos espaços topológicos $(Y_i)_{i\in F}$ segue que ψ é bijetora. Mostremos que

$$\psi : C_{\mathfrak{S}}(T,Y) \to \tilde{\bigoplus}_{i\in F} C_{\mathfrak{S}}(T,Y_i)$$

é um homeomorfismo. Consideremos uma vizinhança de 0 em $\tilde{\bigoplus}_{i\in F} C_{\mathfrak{S}}(T,Y_i)$

da forma $\prod_{i\in F} W_i$ com $W_i = \bigcap_{1\leq t\leq n(i)} \nabla(S_{ti}, V_{ti})$ (onde $S_{ti} \in \mathfrak{S}$ e V_{ti} é uma vizinhança de 0 em Y_i). Se $\mathfrak{S}'$ é o conjunto das reuniões finitas de conjuntos de $\mathfrak{S}$, a $\mathfrak{S}'$-topologia coincide com a $\mathfrak{S}$-topologia e como $S = \bigcup S_{tj} \in \mathfrak{S}'$ resulta que para

$$V = \prod_{i\in F} \Big(\bigcap_{1\leq t\leq n(i)} V_{ti} \Big)$$

o conjunto $\nabla(S,V)$ é uma vizinhança de 0 em $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$ e é fácil ver que $\psi(\nabla(S,V)) \subset \prod_{i\in F} W_i$, o que prova que ψ é contínua. Seja η_i a injeção canônica de Y_i em Y, então para todo $i \in F$ definimos uma aplicação

$$\varphi_i : C_{\mathfrak{S}}(T,Y_i) \to C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$$

por $u \mapsto \eta_i \circ u$. A linearidade de η_i acarreta que φ_i é A-linear, além disso φ_i é contínua pois para uma vizinhança de 0 em $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$ da forma $\nabla(S,V)$ com $S \in \mathfrak{S}$ e $V = \prod_{i\in F} V_i$ (onde V_i é uma vizinhança de 0 em Y_i) se tem $\varphi_i(\nabla(S,V_i)) \subset \nabla(S,V)$. A condição (SMT2) da definição de soma direta implica que existe uma única aplicação A-linear contínua φ tornando comutativo o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C_{\mathfrak{S}}(T,Y_j) \arrow[r, "\varphi_j"] \arrow[d] & C_{\mathfrak{S}}(T,Y) \\
\tilde{\bigoplus}_{i\in F} C_{\mathfrak{S}}(T,Y_i) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

onde a flecha vertical é a aplicação canônica. Verifica-se imediatamente que $\psi^{-1} = \varphi$. ∎

5.4. <u>A estrutura de $C_{\mathfrak{S}}(T,A)$-módulo topológico de $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$.</u>

Sejam T um espaço topológico, $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes compactas de T que contém todas as partes finitas de T, A um anel topológico e Y um A-módulo topológico. Na prop. 5.1.2. provamos que $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$, e em particular $C_{\mathfrak{S}}(T,A)$, é um A-módulo topológico. Se $\varphi \in C_{\mathfrak{S}}(T,A)$ e $f \in C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$ definimos uma aplicação $\varphi.f : T \to Y$ pela relação

(L') $\quad (\varphi.f)(t) = \varphi(t).f(t)$ para todo $t \in T$

então com um raciocínio inteiramente análogo ao feito em 5.1.(usando a propriedade universal do produto dos espaços topológicos A e Y e a continuidade da aplicação $p_Y : A\times Y \to Y$) resulta que $\varphi.f \in C(T,Y)$. Desta forma fica definida uma aplicação

$$p : C_{\mathfrak{S}}(T,A) \times C_{\mathfrak{S}}(T,Y) \to C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$$

$$(\varphi, f) \mapsto \varphi . f$$

que possui as propriedades seguintes:

<u>Lema</u> 5.4.1. <u>p é Z-bilinear contínua.</u>

Sendo evidente, a partir de (L'), que p é Z-bilinear, mostremos que p é contínua; para tanto aplicamos o lema 1.1.2. .

<u>A condição</u> (B_1): Fixado $\varphi_0 \in C(T,A)$, mostremos que a aplicação p' de $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$ nele mesmo definida por $f \mapsto \varphi_0 . f$ é contínua em $f = 0$. Dado $\nabla(K,V)$, onde $K \in \mathfrak{S}$ e V é uma vizinhança de 0 em Y, como $\varphi_0(K)$ é compacto existe, pelo lema 2.3.6., (b), uma vizinhança W de 0 em Y tal que $\varphi_0(K).W \subset V$, donde segue $p'(\nabla(K,W)) \subset \nabla(K,V)$.

<u>A condição</u> (B_2): Fixado $f_0 \in C(T,Y)$, mostremos que a aplicação p'' de $C_{\mathfrak{S}}(T,A)$ em $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$ definida por $\varphi \mapsto \varphi . f_0$ é contínua em $\varphi = 0$. Sejam $K \in \mathfrak{S}$ e V uma vizinhança de 0 em Y, então $f_0(K)$ é compacto e portanto limitado. Existe então uma vizinhança L de 0 em A tal que $L.f_0(K) \subset V$, donde resulta

$$p''(\nabla(K,L)) \subset \nabla(K,V)$$

<u>A condição</u> (B_3): p é contínua em (0,0). Com efeito, se $K \in \mathfrak{S}$ e V é uma vizinhança de 0 em Y, a continuidade da aplicação p_Y acarreta que existem uma vizinhança L de 0 em A e uma vizinhança W de 0 em Y tais que $LW \subset V$, donde segue $p(\nabla(K,L) \times \nabla(K,W)) \subset \nabla(K,V)$. ∎

<u>Proposição</u> 5.4.2. <u>Sejam</u> T <u>um espaço topológico,</u> $\mathfrak{S}$ <u>um conjunto de partes compactas de</u> T <u>contendo todas as partes finitas de</u> T, A <u>um anel topológico e</u> Y <u>um</u> A-<u>módulo topológico. Então:</u>

(a) $C_{\mathfrak{S}}(T,A)$ <u>munido das leis de composição</u> (L) <u>e</u> (L') <u>é uma</u> A-<u>álgebra topológica.</u>

(b) $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$ <u>munido da primeira das leis de composição</u> (L) <u>e de</u> p <u>é um</u> $C_{\mathfrak{S}}(T,A)$-<u>módulo topológico.</u>

(a) Basta tomar Y = A no lema 5.4.1.. (b) De (a) segue que $C_{\mathfrak{S}}(T,A)$ é um anel topológico, portanto o resultado segue do lema 5.4.1. . ∎

Para todo $\lambda \in A$, consideremos a aplicação $\tilde{\lambda} : T \to A$ definida por $\tilde{\lambda}(t) = \lambda$ para todo $t \in T$, fica definida assim um homomorfismo de anéis $i : A \to C_{\mathfrak{S}}(T,A)$ por $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$, e é fácil ver que i é injetivo e contínuo. Para todo A-módulo topológico Y, a estrutura de A-módulo topológico sobre $C_{\mathfrak{S}}(T,Y)$ obtida por restrição a A dos escalares $C_{\mathfrak{S}}(T,A)$, é precisamente a estrutura da prop. 5.1.2. .

5.5. O princípio da limitação uniforme.

Teorema 5.5.1. (O princípio da limitação uniforme) Sejam T um espaço de Baire, Y um A-módulo topológico, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos fechados e limitados de Y e H um subconjunto de C(T,Y) que satisfaz a condição:

(LU) Para cada $t \in T$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $H(t) = \{f(t) \mid f \in H\} \subset B_m$.

Então, cada aberto não vazio V de T contém um aberto não vazio $\tilde{V}$ tal que o conjunto:

$$H(\tilde{V}) = \{f(t) \mid t \in \tilde{V} \text{ e } f \in H\}$$

é limitado em Y (mais precisamente, para cada aberto não vazio V de T, existem um aberto não vazio $\tilde{V}$ contido em V e $\nu \in \mathbb{N}$ tais que $H(\tilde{V}) \subset B_\nu$).

Dado o aberto não vazio V, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto

$$F_n = \{t \in V \mid f(t) \in B_n \text{ para cada } f \in H\}$$

Como B_n é fechado e as $f \in H$ são contínuas, resulta que o conjunto $\bigcap_{f\in H} f^{-1}(B_n)$ é fechado, donde $F_n = V \cap (\bigcap_{f\in H} f^{-1}(B_n))$ é fechado em V para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $t \in V$, então a condição (LU) implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $H(t) \subset B_m$, donde $t \in F_m$ o que prova que $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Sendo V um espaço de Baire existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\mathring{F}_\nu \neq \emptyset$ e então o conjunto $\tilde{V} = \mathring{F}_\nu$ é um aberto não vazio contido em V. Por definição de F_ν temos $f(t) \in B_\nu$ para cada $t \in V$ e para cada $f \in H$, ou seja $H(\tilde{V}) \subset B_\nu$, donde $H(\tilde{V})$ é limitado. ∎

Corolário 5.5.2. Sejam T um espaço de Baire, Y um espaço normado e H um subconjunto de C(T,Y) que satisfaz a condição:

$$\text{(LU')} \qquad \sup_{f\in H} \|f(t)\| < \infty \quad \text{para cada } t \in T$$

Então, para cada aberto não vazio V de T, existem um subconjunto aberto não vazio $\tilde{V}$ de V e uma constante M tal que $\|f(t)\| \leq M$, para cada $f \in H$ e cada $t \in \tilde{V}$.

Apliquemos o Teor.5.5.1. tomando como B_n a bola fechada de centro 0 e raio $n \in \mathbb{N}$, então é claro que a condição (LU') implica a condição (LU) do Teor.5.5.1.. Como no Teor. 5.5.1., para cada aberto não vazio V de T, existem então um aberto não vazio $\tilde{V}$ contido em V e $\nu \in \mathbb{N}$ tais que $H(\tilde{V}) \subset B_\nu$, ou seja $\|f(t)\| \leq \nu$ para cada $f \in H$ e cada $t \in \tilde{V}$. ∎

Lema 5.5.3. Sejam Y um A-módulo topológico e V uma vizinhança limitada, aberta e simétrica de 0 em Y. Então o conjunto

$$W = \bigcup_{y \in G} (V - y)$$

é uma vizinhança limitada de 0 em Y, para cada parte não vazia G de V.

Como V é aberto e $V - y = \{x - y \mid x \in V\}$ é homeomorfo a V, o conjunto $V - y$ é aberto para cada $y \in G$, donde W é aberto. Como $0 = y - y \in V - y$ para cada $y \in G$, resulta que W é uma vizinhança de 0. Seja U uma vizinhança arbitrária de 0 em Y, então existe uma vizinhança U' de 0 em Y tal que $U' + U' \subset U$. Como V é limitada existe uma vizinhança S de 0 em A tal que $SV \subset U'$, mostremos que $SW \subset U$. De fato, dados $\lambda \in S$ e $z \in W$, existe $y \in G$ tal que $z \in V - y$, donde $z = x - y$ com $x \in V$ e então $\lambda z = \lambda x + \lambda(-y) \in SV + SV \subset U' + U' \subset U$. ∎

Proposição 5.5.4. Sejam X um A-módulo de Baire; $(Y, \mathcal{V})$ um A-par admissível (cfr. Def. 3.5.2.) verificando a seguinte condição:

(C) Para cada vizinhança limitada W de 0 em Y, existe $U \in \mathcal{V}$, U aberta e simétrica tal que $W \subset U$,

e seja H um subconjunto de $L_A(X, Y)$. Se existe uma sequência $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vizinhanças fechadas de $\mathcal{V}$, satisfazendo a condição:

(LU) Para cada $x \in X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H(x) = \{u(x) \mid u \in H\} \subset B_n$

então H é limitado em $L_{\mathfrak{S}}(X, Y)$ para cada conjunto $\mathfrak{S}$ não vazio de partes limitadas de X.

Como $B_n \in \mathcal{V}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que B_n é (uma vizinhança de 0 em Y) fechada e limitada e como vale a condição (LU) podemos aplicar o Teor. 5.5.1. ao aberto não vazio X. Existe então um aberto não vazio $\tilde{X}$ contido em X e existe $\nu \in \mathbb{N}$ tais que $H \subset \Gamma(\tilde{X}, B_\nu)$. Se $0 \in \tilde{X}$, então o resultado segue imediatamente do lema 3.5.6. e da prop. 3.5.8.. Se $0 \notin \tilde{X}$, como $\tilde{X} \neq \emptyset$ existe $a \in \tilde{X}$ e então $\tilde{X}' = \tilde{X} - a = \{x - a \mid x \in \tilde{X}\}$ é uma vizinhança de 0 em X. A condição (C) acarreta a existência de $U \in \mathcal{V}$, U aberta e simétrica tal que $B_\nu \subset U$, donde $H \subset \Gamma(\tilde{X}, U)$. De outro lado é fácil ver que

$$\Gamma(\tilde{X}, U) \subset \Gamma(\tilde{X}', W), \text{ onde } W = \bigcup_{u \in \Gamma(\tilde{X}, U)} (U - u(a))$$

Sendo U aberta, simétrica e limitada, pelo lema 5.5.3., W é uma vizinhança limitada de 0 em Y e pela condição (C), existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $W \subset V$, donde $\Gamma(\tilde{X}', W) \subset \Gamma(\tilde{X}', V)$. Das inclusões precedentes resulta $H \subset \Gamma(\tilde{X}', V)$ e então de novo o resultado segue do lema 3.5.6. e da prop. 3.5.8.. ∎

Corolário 5.5.5. Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e H um subconjunto de $L(X,Y)$ tal que

$$(LU') \qquad \sup_{f\in H}\|f(x)\| < \infty \quad \text{para cada } x \in X.$$

Então, $\sup_{f\in H}\|f\| < \infty$.

Indicando com $\mathcal{V}$ o conjunto de todas as vizinhanças limitadas de Y, pela prop. 3.5.3., $(Y,\mathcal{V})$ é um par admissível e é claro que $(Y,\mathcal{V})$ satisfaz a condição (C) da prop. 5.5.4. pois toda vizinhança limitada está contida em uma bola aberta de centro 0. Aplicamos a prop. 5.5.4. tomando como B_n a bola fechada de centro 0 e raio $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, é claro que a condição (LU') implica a condição (LU) da prop. 5.5.4., logo o conjunto H é limitado em $L_{B_X}(X,Y)$. ∎

Bibliografia

[A_1] ARAGONA, J., Sur les modules topologiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Secrétariat de Mathématiques, Publ. nº 114 (1971).

[A_2] ARAGONA, J., Un résultat d'extension d'applications linéaires continues dans les modules localement compacts, C.R.Acad.Sc.Paris, t.273, p.439 - 442 (1971).

[A_3] ARAGONA, J., Dualité dans les modules topologiques sur un anneau unitaire commutatif localement compact (a aparecer no C.R. Acad. Sc. Paris).

[B_1] BOURBAKI, N., Algebre, Ch.I, Hermann, Paris, 1958.

[B_2] BOURBAKI, N., Algebre linéaire, Hermann, Paris, 1962.

[B_3] BOURBAKI, N., Topologie Générale, Ch.1 et 2, Hermann, Paris, 1961

[B_4] BOURBAKI, N., Topologie Générale, Ch.3 et 4, Hermann, Paris, 1960

[B_5] BOURBAKI, N., Topologie Générale, Ch.10, Hermann, Paris, 1961.

[B_6] BOURBAKI, N., EVT, Ch.1 et 2, Hermann, Paris, 1966.

[B_7] BOURBAKI, N., EVT, Ch.3,4 et 5, Hermann, Paris, 1964.

[C] CATHELINEAU, J.L., Sur les modules topologiques, J. Math. Pures et Appl., 47, 1969.

[Co] COSTA, R.C.F., Aproximação de álgebras universais por álgebras planas e o funtor álgebra universal topológico, Tese de Doutoramento, I.M.E.-U.S.P., 1973.

[CR] COTLAR, M. and RICABARRA, R., On the existence of characters in topological groups, Amer. J. Math., 76 (1964).

[F] FLEISCHER, I., Sur les modules localement polaires, C.R. Acad. Sc. Paris, t.248, (1959), p.3094 - 3096.

[G] GROTHENDIECK, A., Éléments de Géométrie Algébrique I, Publ. Math. I.H.E.S. (1964)

[HR] HEWITT, E. and ROSS, K., Abstract Harmonic Analysis, Vol.1, Springer - Verlag, Berlin, 1963.

[H] HOOPER, R.C., Topological Groups and Integer - Valued Norms, J. Func. Anal., 2, p.243 - 257 (1968).

[Hu] HUSAIN, T., Introduction to topological groups, W.B. Saunders Co., Philadelfia and London, 1966.

[I] ISAC, G., On the Hahn - Banach theorem for a semi-simple module over a normed ring, Stud. Cerc. Mat., 17 (1965), p.457 - 461.

[K_1] KAPLANSKI, I., Topological rings, Amer. J. Math., Vol.LXIX, nº1 (1947), p.153.

[K_2] KAPLANSKI, I., Locally compact rings, Amer. J. Math., Vol. 70, (1948), p.447.

[K_3] KAPLANSKI, I., Locally compact rings II, Amer. J. Math., Vol. 73, (1951), p.20.

[K_4] KAPLANSKI, I., Dual rings, Ann. of Math., Vol.49, nº3 (1948).

[M] MACDONALD, I.G., Duality over complete local rings, Topology, Vol.1 (1962).

[N] NEGREPONTIS, J.W., Duality in Analysis from the Point of View of Triples, Journal of Alg., Vol.19, nº2 (1971).

[P] PONTRJAGIN, L.S., Topological Groups, Princeton University Press, Princeton 1958.

[S] SUZUKI, S., Modules of high order differentials of topological rings, J. Math. Kyoto Univ., 10-2 (1970), p.337 - 348.

[W_1] WARNER, S., Compact noetherian rings, Math. Ann., 141, p.161 - - 170 (1960).

[W_2] WARNER, S., Locally compact equicharacteristic semi-local rings Duke Math. J., 35, (1968), p.179 - 190.

[W_3] WARNER, S., Compact rings, Math. Ann., 145, p.52 - 63 (1962).

[W_4] WARNER, S., Locally compact rings having a topologically nil-potent unit, Trans. Amer. Math. Soc., 139, (1969), p.145 - 154.

[W_5] WARNER, S., Locally compact principal ideal domains, Math. Ann. 188, (1970), p.317 - 334.