

DACIBERG LIMA GONÇALVES

SUBVARIEDADES CRÍTICAS

NÃO DEGENERADAS

Trabalho apresentado ao IME da USP  
para obtenção do grau de Mestre em  
Matemática Pura

NOVEMBRO DE 1972

- SÃO PAULO -

## P R E F Á C I O

Este trabalho tem seus dois primeiros capítulos dedicado ao estudo de pontos críticos, baseado no livro "MORSE THEORY" de John Milnor.

No capítulo 3 que é o último, passei ao estudo de subvariedades críticas não degenerada. As tentativas são sempre no sentido copiar o que se sabe para ponto crítico, para o caso em questão. Percebe-se que coisa ainda está bastante vaga e é fácil enunciarmos questões sem termos resposta.

No texto foi usado técnicas elementares de homotopia. Usei algumas vezes resultados fortes sem demonstração, procurando contudo deixar bem claro as condições que permitiam o seu uso.

Orientou-me neste trabalho o colega Carlos Edgar Harle.

Agradeço a todas as pessoas que de uma forma ou outra colaboraram para que eu alcançasse este modesto estágio da minha formação científica.

*Daciberg Lima Gonçalves*

## CAPÍTULO I

Seja  $M$  uma variedade classe  $C^\infty$ , e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$ . Na vizinhança de um ponto podemos expressar a função  $f$  relativa a um sistema de coordenadas, isto é, por  $f$  passamos a entender  $x^{-1} \circ f$ , onde  $x$  significa um sistema de coordenadas. Vejamos que em algumas situações é possível obtermos um sistema de coordenadas em que a função  $f$  se expressa de maneira bastante simples.

Dizemos que  $P \in M$  é um ponto crítico de  $f$  se:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_P = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

para algum sistema de coordenadas  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Se  $(y_1, \dots, y_n)$  é um outro sistema de coordenadas em uma vizinhança de  $P$ , então pela regra da cadeia, verificamos que:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y_i} \right|_P = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Deste modo o conceito de ponto crítico independe do sistema de coordenadas.

Dado dois vetores pertencentes ao plano tangente ao ponto  $P$ , que indicaremos por  $V_P, W_P \in TM_P$ , defini-se  $f_{**}(V_P, W_P) = V_P(Wf)$ , onde  $W$  é qualquer extensão diferenciável de  $W_P$  em uma vizinhança de  $P$ . Relativo a um sistema de coordenadas vem:

$$(Wf) = \sum_{i=1}^n W_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

onde  $W_i$  representa as componentes de  $W$ .

$$V_P(Wf) = \sum_{i,j=1}^n V_i(P) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( W_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_P = \sum_{i,j=1}^n V_i(P) W_j(P) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n V_j(P) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_P \cdot \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \Big|_P.$$

Se  $P$  é um ponto crítico de  $f$  vemos então que:

$$f_{**}(V_P, W_P) = \sum_{i,j=1}^n V_i(P) W_j(P) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

a)  $f_{**}(V_e, W_e) = (f_{**}(W_e, V_e))$  b)  $f_{**}(V_P, W_P)$  independe da extensão de  $W$ .

Donde concluímos que  $f_{**}$  é uma bem definida forma bilinear simétrica.

Dado uma forma  $H$  bilinear simétrica sobre um espaço vetorial  $V$ , chama-se índice de  $H$  a máxima dimensão do subespaço, no qual  $H$  é negativo definido. Chama-se nulidade de  $H$  a dimensão do subespaço vetorial formado pelos vetores  $w$  tal que  $H(v, w) = 0$  para todo  $v \in V$ .

Um ponto crítico  $P$  é chamado não degenerado se e somente se, a matriz

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (P) \right)$$

é não singular. Este conceito independe do sistema de coordenadas.

LEMA 0-1 - Seja  $P \in M$  um ponto crítico  $f_{**}$  tem índice nulo se e somente se  $P$  é não degenerado.

PROVA: a cargo do leitor.

LEMA 0-2 - Seja  $f$  uma  $C^\infty$  função em uma convexa vizinhança vizinhança  $V$  de  $0$  no  $R^n$ , com  $f(0) = 0$ . Então  $f$  pode ser escrita na forma  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$  para convenientes  $C^\infty$  funções  $g_i$  definidas em  $V_i$  com

$$g_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}$$

PROVA  $f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt =$

$$= \int_0^1 \left[ -\frac{\partial f}{\partial x_i} (tx_1, \dots, tx_n) \right] x_i dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 -\frac{\partial f}{\partial x_i} (tx_1, \dots, tx_n) dt$$

Deste modo temos  $g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 -\frac{\partial f}{\partial x_i} (tx_1, \dots, tx_n) dt.$

e  $g_1(0, \dots, 0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (0, \dots, 0) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} (0)$

C.Q.D.

LEMA 1-3 (MORSE) - Seja P um ponto crítico não degenerado de f. Então existe um sistema de coordenadas local  $(Y_1, \dots, Y_n)$  definido em uma vizinhança V de P com  $Y_i(P) = 0$  para todo i tal que  $f = f(P) - (Y_1)^2 - \dots - (Y_\lambda)^2 + (Y_{\lambda+1})^2 + \dots + (Y_n)^2$  para os pontos de uma vizinhança V de P e  $\lambda$  é o índice de f no ponto P.

PROVA - Vamos admitir que  $f(P) = 0$ . Seja  $(x_1, \dots, x_n)$  um sistema de coordenadas qualquer. Pelo lema 0-2 existem funções  $g_i$  tal que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

em uma convexa vizinhança de  $(x_1(P), \dots, x_n(P))$  que podemos supor ser a origem do  $R^n$ .

Como  $g_i(0, \dots, 0) = -\frac{\partial f}{\partial x_i} (0)$ , então  $g_i(0, \dots, 0) = 0$ . Agora apliquemos o lema 0-2 para cada uma das funções  $g_i$  que claramente satisfazem as hipóteses do lema.

Logo  $g_i = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ , donde concluímos que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \frac{(h_{ij} + h_{ji})}{2}$$

Seja  $H_{ij} = \frac{h_{ij} + h_{ji}}{2}$ , então  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j H_{ij}$ , onde os  $H_{ij}$

constituem uma matriz simétrica. Mostremos como é possível diagonalizar esta matriz.

Por indução, admitamos que existe um sistema de coordenadas  $(u_1, \dots, u_n)$ , tal que

$$f(u_1, \dots, u_n) = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r}^n u_i u_j \bar{H}_{ij}.$$

Mostremos que existe um sistema de coordenadas tal que esta expressão seja válida para r.

Se  $\bar{H}_{rr}$  é igual a zero, podemos fazer uma mudança linear nas n-r+1 últimas coordenadas de modo que  $\bar{H}_{rr}$  seja diferente de zero. Isto é possível pela não singularidade da matriz. Basta ver como os  $\bar{H}_{ij}$  variam quando mudamos de sistema de coordenadas.

Seja  $(v_1, \dots, v_n)$  n funções definidas do seguinte modo:

$$v_i = u_i \quad i \neq r$$

$$v_r = \sqrt{|\bar{H}_{rr}|} \left[ u_r + \sum_{i=r}^n \frac{u_i \bar{H}_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{\bar{H}_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right]$$

A matriz Jacobiana será:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial u_1} & \frac{\partial v_r}{\partial u_r} & \frac{\partial v_r}{\partial u_n} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Pois temos  $\frac{\partial v_i}{\partial u_j} = \delta_{ij}$  para  $i \neq r$ . Logo o determinante da matriz jacobiana será igual ao produto dos elementos da diagonal e portanto valerá  $\frac{\partial v_r}{\partial u_r}$ . Mas esta derivada parcial calculada na origem vale  $\sqrt{|\bar{H}_{rr}|}$  que sabemos ser diferente de zero. Logo pelo teorema das funções inversas,  $(v_1, \dots, v_n)$  constitui um sistema de coordenadas.

Se substituirmos os  $v_i$  na expressão:

$$f(v_1, \dots, v_n) = \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_i^2 + \sum_{i,j > r}^n v_i v_j \hat{H}_{ij}$$

encontramos a expressão de f no sistema de coordenadas  $(v_1, \dots, v_n)$ .

Logo existe um sistema de coordenadas  $(y_1, \dots, y_n)$  tal que:

$$f(y) = -y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 \dots + y_n^2.$$

f\*\* terá a seguinte matriz:



Com a condição inicial  $\phi_0(g) = g$ .

Isto é verdade desde que

$$\frac{d\phi_t(g)}{dt} (f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\phi_{t+h}(g)) - f(\phi_t(g))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\phi_h(P)) - f(P)}{h}$$

onde  $P = \phi_t(g)$ .

$$\text{Logo } \frac{d\phi_t(g)}{dt} (f) = X_P(f) = X_{\phi_t(g)}(f).$$

Mas é bem conhecido que esta equação diferencial, localmente tem uma única solução que depende diferencialmente das condições iniciais.

Então, para cada ponto de  $M$ , existe uma vizinhança  $U$  e um número  $\xi > 0$  tal que a equação diferencial

$$\frac{d\phi_t(g)}{dt} = X_{\phi_t(g)}, \quad \phi_0(g) = g$$

tem uma única  $C^\infty$  solução para  $g \in U$  e  $|t| < \epsilon$ .

O conjunto compacto  $K$  pode ser coberto por um número finito de tais vizinhanças  $U$ . Denotaremos  $\epsilon_0 > 0$  o menor dos correspondentes  $\xi$ . Definindo-se  $\phi_t(g) = g$  para  $g \notin K$ , segue que a equação diferencial tem uma única solução  $\phi_t(g)$  definida para  $|t| < \epsilon_0$  e todo  $g \in M$ . Esta solução é  $C^\infty$  como uma função de ambas as variáveis.

Além do mais se  $|t|, |s|, |t+s| < \xi_0$  então  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ .

Se  $|t| < \xi_0/2$   $\phi_t: M \rightarrow M$  é um difeomorfismo.

Resta definir  $\phi_t$  para módulo de  $t$  maior ou igual a  $\xi_0/2$ . Qualquer número  $t$  pode ser expresso na forma  $t = K \cdot (\xi_0/2) + r$  com  $|r| < \xi_0/2$  e  $K$  um inteiro. Se  $K > 0$  definimos:

$$\phi_t = \phi_{\xi_0/2} \circ \phi_{\xi_0/2} \circ \dots \circ \phi_{\xi_0/2} \circ \phi_r$$

onde a transformação  $\phi_{\xi_0/2}$  é iterada  $K$  vezes. Se  $K < 0$  é somente necessário olhar  $\phi_{\xi_0/2}$  por  $\phi_{-\xi_0/2}$  iterado  $-K$  vezes. Então  $\phi_t$  é definido para todo valor de  $t$ .

É fácil verificar que  $\phi$  independe do particular  $\xi_0$ . Para verificar que  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$  basta escrever:



$$t = K_1 \xi_0/2 + r_1 \quad s = K_2 \xi_0/2 + r_2$$

e observar que  $\phi_{a+b} = \phi_{b+a}$   $|a|, |b|, |a+b| < \xi_0$

Vejamos alguns resultados sôbre CW - Complexo:

Toda variedade separável tem o mesmo tipo de homotopia de um enumerável CW - Complexo. Ver papel (1). Para nós as variedades são separáveis pela própria definição.

Sejam X e Y dois espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma função contínua de X em Y. Esta função induz um homomorfismo dos grupos de homotopia de X nos grupos de homotopia de Y.

Seja  $f_n^*$  o homomorfismo induzido por f de  $\pi_n(X)$  em  $\pi_n(Y)$ . Whitehead demonstrou que se X e Y são dominados por CW - Complexos e  $f_n^* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  é um isomorfismo para todo n, então f é uma equivalência de homotopia (2).

Seja  $X_i$  uma seqüência de espaços tal que  $X_i \subset X_{i+1}$  e a aplicação inclusão é contínua. Seja  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ . Define-se sôbre X a seguinte topologia: Um conjunto é aberto se e somente se a intersecção dele com cada  $X_i$  é um aberto de  $X_i$ . É equivalente dizer que X tem a mais fina topologia na qual tôdas as inclusões são contínuas.

LEMA: 1-5 - Seja X e  $\{X_i\}$  conforme definição acima e X de Larsdorff. Se  $K \subset X$  é um compacto então existe um índice n tal que  $X_n \supset K$ .

PROVA: Seja  $X_i' = X_i \cap K$ . Vamos supor que não exista m tal que  $X_m' \supset K$ . Além do mais tomemos  $X_{m+1}' \supset X_m'$  se não escolhemos uma subseqüência que satisfaz a condição acima.

Seja  $\{x_m\}$  uma seqüência obtida da seguinte maneira.  $x_1 \in X_1'$   $x_2 \in X_2'$   $x_2 \in X_1'$   $x_m \in X_m'$   $x_m \in X_{m-1}'$ . Esta seqüência constitui um conjunto fechado, pois a intersecção com cada  $X_i$  é um número finito de pontos logo fechado pois o Espaço é de Hansdorff. Como o espaço é compacto a seqüência  $\{x_i\}$  tem um ponto limite que terá que ser algum  $x_n$ . Mas pela mesma razão, a seqüência menos  $x_n$  é fechado logo é absurdo  $x_n$  ser ponto limite. Logo isto mostra que é impossível  $X_i'$  distintos. C.Q.D.

LEMA 1-6 - Sejam  $\{X_i\}$  e  $\{Y_i\}$  X e Y conforme acima. Seja  $g : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua de modo que a imagem de  $g_i = g | X_i$  está contida em  $Y_i$ . Se  $g_i$  é uma equivalência de homotopia e X e Y são dominados por CW - Complexos então g é uma equivalência de homotopia.

PROVA: Mostremos que g induz isomorfismos nos grupos de homotopia.

Dado  $\phi_n : S^n \rightarrow Y$ , como  $\phi_n(S^n)$  é um compacto, pelo lema 1-5 ele está contido em algum  $Y_i$ . Desde que  $g_i : X_i \rightarrow Y_i$  é uma equivalência de homotopia, existe  $\gamma_n : S^n \rightarrow X_i$  tal que  $g_i \circ \gamma_n$  é homotópico a  $\phi_n$ . Logo  $g_n^* | Y_n = | \phi_n |$  onde  $| \phi_n |$  representa a classe de homotopia de  $\phi_n$ . Isto mostra que  $g_n^*$  é sobre.

Dado  $\gamma_n : S^n \rightarrow X$  de modo que  $g \circ \gamma_n$  é homotópico a aplicação constante, isto é:  $g_n^* | Y_n = [0]$ ; existe uma homotopia  $H : S^n \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(s, 0) = g \circ \gamma_n$  e  $H(s, 1)$  é a aplicação constante. Como  $S^n \times I$  é compacto,  $H(S^n \times I)$  é um compacto de Y e portanto está contido em algum  $Y_{j_0}$ . Mas  $\gamma_n(S^n)$  é um compacto de X logo está contido em algum  $X_{j_1}$ . Seja  $i = \max(j_0, j_1)$ . Temos  $g_i : X_i \rightarrow Y_i$  que por hipótese é uma equivalência de homotopia. Como  $g \circ \gamma_n$  é homotópico a aplicação constante em  $Y_i$ , implica que  $\gamma_n$  é também homotópico a aplicação constante. Logo  $g_n^*$  é injetora.

Concluimos então, que g induz isomorfismos nos grupos de homotopia para todo n. Pelo teorema de Whitehead segue o resultado.

Sejam  $W_1$  e  $W_2$  CW - Complexos quaisquer. Qualquer aplicação de  $W_1$  em  $W_2$  é homotópica a uma aplicação celular. Este resultado é uma consequência do teorema da extensão de homotopia (2).

Algumas vezes é útil termos uma estrutura Riemanniana sobre a variedade.

LEMA 1-7 - Sobre qualquer variedade  $C^\infty$  podemos definir uma métrica Riemanniana.

PROVA: Cada ponto  $p \in M$  está contido em um aberto coordenado. Podemos definir em cada ponto deste aberto uma métrica no plano tangente a este ponto simplesmente impondo que a aplicação coordenada é

uma isometria. O que necessitamos é definir a métrica em todos os planos tangentes de modo que seja diferenciável.

Seja uma cobertura de  $M$  por abertos coordenados, indexados em um conjunto  $I$ . Toda variedade, sabemos ser um espaço métrico, logo é um espaço paracompacto. Com relação à cobertura dada, existe uma partição da unidade  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  subordinada à esta cobertura.

Para cada ponto  $p \in M$  definimos:

$$\langle V_p, W_p \rangle = \sum_{i \in I} \phi_i(p) \langle V_p, W_p \rangle_i \quad \text{onde} \quad \langle \quad \rangle_i$$

significa o produto escalar devido ao  $i$ -ésimo sistema de coordenadas, valendo zero se  $p$  não pertencer a êle.

Este somatório é bem definido pois para cada ponto salvo um número finito todos são nulos. E claramente isto é um produto escalar.

---

#### REFERÊNCIAS

- (1) - John Milnor - On spaces having the homotopy type at a CW - Complex, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 90 (1959) p.p. 272-280.
- (2) - J.H. Whitehead "Combinatorial Homotopy", Bulletin of The American Mathematical Society, Vol. 55 (1949) p.p. 213 - 245.

## CAPÍTULO II

M sempre será uma variedade  $C^\infty$  e  $f: M \rightarrow R$  uma  $C^\infty$  função. Seja  $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$ .

Neste capítulo estudaremos o comportamento de uma variedade junto a um ponto crítico não degenerado.

TEOREMA 2-1: Seja  $f: M \rightarrow R$  uma função  $C^\infty$  tal que  $f^{-1}[a, b]$  seja compacto e não contenha pontos críticos de  $f$ . Então  $M^a$  é difeomorfo a  $M^b$ . Além do mais  $M^a$  é um retrato de deformação de  $M^b$ . Se  $f^{-1}[a, c]$  é compacto e não contém pontos críticos para todo  $c \geq a$  então  $M^a$  é um retrato de deformação de  $M$ .

PROVA: Define-se em  $M$  uma métrica Riemanniana. Em cada ponto  $P \in f^{-1}[a, b]$  seja o vetor  $(\text{grad } f)_P$  definido por  $\langle (\text{grad } f)_P, X \rangle = X(f)$  para todo  $X \in TM_P$ , onde  $\langle \quad \rangle$  é o produto escalar em  $TM_P$ . Se olharmos a expressão deste campo de vetores relativo a um sistema de coordenadas, veremos que êle é diferencial. Êste campo é diferente de zero em  $f^{-1}[a, b]$ , pois não existem pontos críticos em  $f^{-1}[a, b]$ . Seja  $\rho: f^{-1}[a, b] \rightarrow R$  a função definida por  $\rho(P) = \frac{1}{\langle (\text{grad } f)_P, (\text{grad } f)_P \rangle}$ . Esta função, pelo lema de Tietze diferenciável, pode ser estendida diferenciavelmente de modo que seu suporte seja uma compacta vizinhança de  $f^{-1}[a, b]$ .

Seja o c campo  $\rho \cdot \text{grad } f$ . É um campo diferenciável em  $M$  que se anula fora de um compacto. Logo estamos nas condições de aplicar o lema 1-4. Seja  $\phi$  o grupo de difeomorfismos a um parâmetro gerado pelo campo acima. Digo que a aplicação  $t \rightarrow f(\phi_t(q))$  é uma isometria para todo  $q \in M$ , pois

$$\frac{d f(\phi_t(q))}{dt} = \left\langle \frac{d\phi_t(q)}{dt}, \text{grad } f \right\rangle = \langle X, \text{grad } f \rangle = +1.$$

Seja  $\phi_{a-b}: M \rightarrow M$ : êste difeomorfismo leva  $M^a$  difeomorficamente sobre  $M^b$ .

Define-se uma família de aplicações a 1 - parâmetro:

$$r_t: M^b \rightarrow M^b$$

$$r_t(g) = \begin{cases} g & \text{se } f(g) \leq a \\ \phi_t(a-f(g)) & \text{se } a \leq f(g) \leq b \end{cases}$$

Então  $r_0$  é a identidade, e  $r_1$  é a retração de  $M^b \rightarrow M^a$ . Deste modo  $M^a$  é um retrato de deformação de  $M^b$ .

Suponhamos agora que  $f^{-1}[a, c]$  é compacto e não contenha pontos críticos para todo  $c > a$ . Para cada  $c > a$  estamos nas hipóteses acima portanto podemos conseguir uma homotopia  $r_t$  entre a identidade de  $M^c \rightarrow M^c$  e a retração  $M^c \rightarrow M^a$ . Se considerarmos outro valor  $c_1 > a$  então na intersecção  $M^c \cap M^{c_1}$  os campos gradientes coincidem e portanto a homotopia  $r_t(g)$  está bem definida nos pontos  $g$  de  $M$  independente dos valores  $c$  que  $f(g) \leq c$ . Deste modo  $M^a$  é um retrato de deformação de  $M$ .

Um bom exemplo para motivar a demonstração de nosso próximo teorema é tomarmos  $M$  como sendo o toro e  $f$  a função altura. Veja o ponto crítico 1.

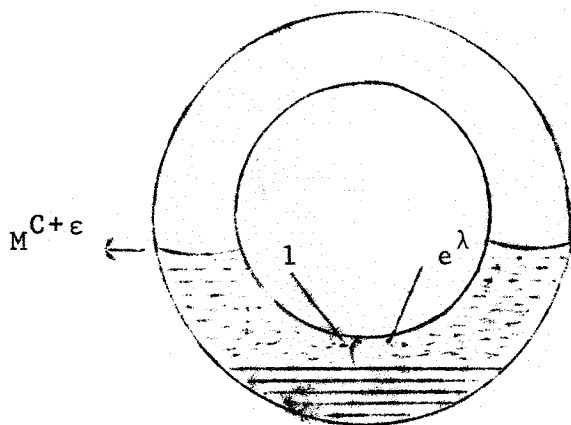


FIGURA 1

TEOREMA 2-2 - Seja  $f: M \rightarrow R$  uma função  $C^\infty$  e  $P$  um não degenerado ponto crítico com índice  $\lambda$ . Seja  $f(P) = C$  e suponha que existe  $\xi$  tal que  $f^{-1}[C - \epsilon, C + \epsilon]$  é compacto e não contém outro ponto crítico além de  $P$ . Então  $M^{C+\epsilon}$  tem o mesmo tipo de homotopia da adjunção de  $M^{C-\xi}$  com uma célula de dimensão  $\lambda$ .

PROVA: Nós construiremos uma nova função  $F$  que coincide com  $f$  fora de uma vizinhança de  $P$  e só tem  $P$  como ponto crítico nesta vizinhança. A vizinhança onde será alterado o valor de  $f$  está indicado na fig. 3 por  $E_1$  e abaixo temos um esboço das novas curvas de nível de  $F$ . fig. (2).

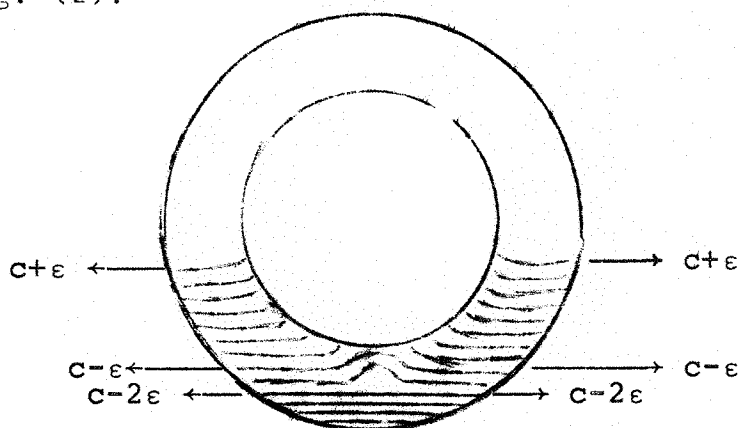


FIGURA 2

Como  $P$  é um ponto crítico não degenerado e  $f$  tem índice  $\lambda$  junto de  $P$ , existe um sistema de coordenadas em uma certa vizinhança de  $P$  tal que  $f = c - \mu_1^2 - \dots - \mu_\lambda^2 + \mu_{\lambda+1}^2 + \dots + \mu_n^2$ . Chamaremos de  $V$  a vizinhança na qual esta expressão é válida.

Seja  $\epsilon$  tal que  $f^{-1}[C - \epsilon, C + \epsilon]$  seja compacto e a imagem de  $V$  com relação ao sistema de coordenadas contenha a bola de raio  $\sqrt{2\epsilon}$ .

Seja  $e^\lambda = \{x \in V \mid \mu_1^2 + \dots + \mu_\lambda^2 \leq \epsilon \text{ e } \mu_{\lambda+1} = \dots = \mu_n = 0\}$  portanto  $\dot{e}^\lambda = \{x \in e^\lambda \mid \mu_1^2 + \dots + \mu_\lambda^2 = \epsilon\}$ . Se  $x \in \dot{e}^\lambda$  então:  
 $f(x) = c - \mu_1^2 - \dots - \mu_\lambda^2 + 0 + \dots + 0 = c - \epsilon$ . Logo  $\dot{e}^\lambda$  está contido em  $f^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$ .

Devemos mostrar que  $M^{C+\epsilon}$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $M^{C-\epsilon} \cup_\phi \dot{e}^\lambda$  onde  $\phi$  é a óbvia aplicação de  $\dot{e}^\lambda$  em  $M^{C-\epsilon}$ .

No aberto  $f(U)$  que é uma vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^n$ , temos a fig.(3) ilustrativa.

Seja  $F$  definida da seguinte maneira:  $F$  coincide com  $f$  fora de uma vizinhança  $E = \{x \in U \mid \mu_1^2 + \dots + \mu_\lambda^2 + 2(\mu_{\lambda+1}^2 + \dots + \mu_n^2) \leq 2\epsilon\}$ . Podemos ver que  $E$  é uma vizinhança de  $e^\lambda$ .

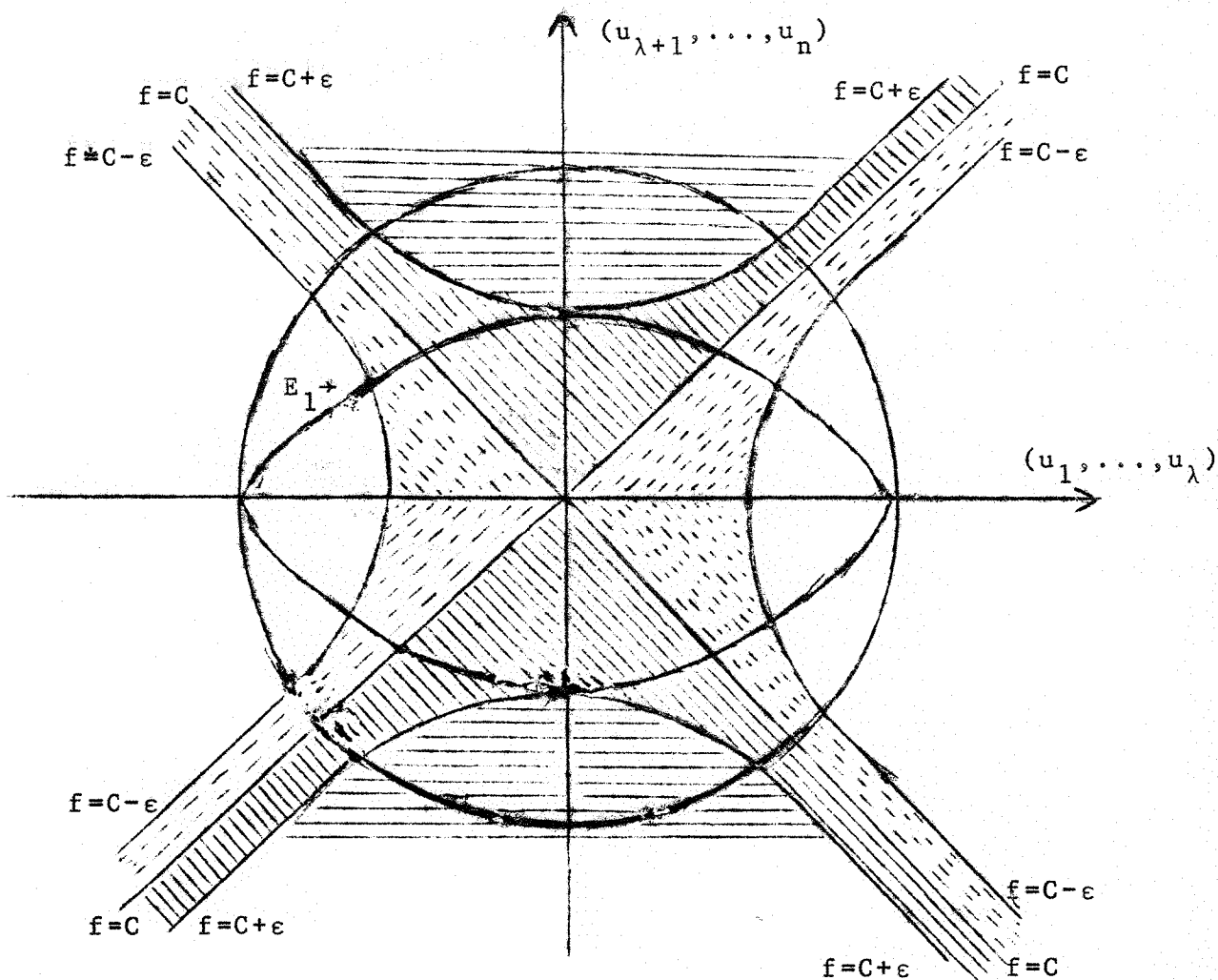


FIGURA 3

Seja  $\mu: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $\mu(0)$  é maior do que  $\epsilon$ ,  $\mu(r) = 0$  para  $r > 2\epsilon$  e  $-1 < \mu'(r) \leq 0$ .

Isto acarreta que a função  $\mu$  só poderá se anular para valores de  $r > \epsilon$ .

Seja  $F = f - \mu(\mu_1^2 + \dots + \mu_\lambda^2 + 2(\mu_{\lambda+1}^2 + \dots + \mu_n^2))$  para pontos de  $E$ . Chamando de  $\xi = (\mu_1^2 + \dots + \mu_\lambda^2)$  e  $\eta = \mu_{\lambda+1}^2 + \dots + \mu_n^2$  vem:

$$F = f - \mu(\xi + 2\eta) = C - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta).$$

$$\text{Temos que } F^{-1}(-\infty, C + \epsilon] = f^{-1}(-\infty, C + \epsilon].$$

Se  $p \in f^{-1}(-\infty, C + \epsilon]$  então  $f(P) \leq C + \epsilon$ . Como  $F \leq f$  vem que  $F(P) \leq C + \epsilon$  logo  $f^{-1}(-\infty, C + \epsilon] \subset F^{-1}(-\infty, C + \epsilon]$ .

Seja  $P \in F^{-1}(-\infty, C + \epsilon]$  logo  $F(P) \leq C + \epsilon$ . Se  $f(P) > C + \epsilon$  isto implica que  $-\xi + \eta > \epsilon$ . Então  $2\epsilon < 2(-\xi + \eta) \leq \xi + 2\eta$ . Isto implica que o ponto está fora de  $E$ . Mas se êle está fora de  $E$   $f = F$ . Logo  $f(P) \leq C + \epsilon$ , donde segue a igualdade.

F só tem P como ponto crítico na vizinhança E.

Note que:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0$$

$$-\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1$$

Desde que  $dF = -\frac{\partial F}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta}d\eta$  ela só será nula se  $d\xi$  e  $d\eta$  forem nulas simultaneamente. Mas isto só se dá na origem, logo P é o único ponto crítico.

Consideremos a região  $F^{-1}[(C - \epsilon, C + \epsilon)]$ . Sabemos que  $F^{-1}(-\infty, C + \epsilon] = f^{-1}(-\infty, C + \epsilon]$  e que  $F^{-1}(-\infty, C - \epsilon] \supseteq f^{-1}(-\infty, C - \epsilon]$ . Logo  $F^{-1}[C - \epsilon, C + \epsilon] \subset f^{-1}[C - \epsilon, C + \epsilon]$ . Como  $f^{-1}[C - \epsilon, C + \epsilon]$  é compacto então  $F^{-1}[C - \epsilon, C + \epsilon]$  também é compacto.

Desde que  $F(P) = f(P) - \mu(0) < C - \epsilon$  então  $F^{-1}[C - \epsilon, C + \epsilon]$  não tem pontos críticos. Pelo teorema 2-1  $F^{-1}(-\infty, C - \epsilon]$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $F^{-1}(-\infty, C + \epsilon]$ . Logo basta mostrar que  $F^{-1}(-\infty, C - \epsilon]$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $f^{-1}(-\infty, C - \epsilon] \cup e^\lambda$ . Seja  $F^{-1}(-\infty, C - \epsilon] = M^{C-\epsilon} \cup H$  onde H é o fêcho de  $F^{-1}(-\infty, C - \epsilon] - M^{C-\epsilon}$ .

$$e^\lambda \subset H \subset E \text{ pois } -\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0 \text{ logo } F(Q) \leq F(P) < C - \epsilon.$$

Os pontos de H são, essencialmente de 3 tipos:

- 1) - Pontos  $\mu_1 \dots \mu_n$  tais que  $\mu_1^2 + \dots + \mu_n^2 \leq \epsilon$ .
- 2) Pontos tais que  $f(g) = C - \xi(g) + \eta(g) \geq C - \epsilon$   $\xi(g) \geq \epsilon$  de onde concluímos  $\epsilon \leq \xi(g) \leq \eta(g) + \epsilon$ .
- 3) Pontos em que  $f(g) = C - \xi + \eta \leq C - \epsilon$  o que implica em  $\eta + \epsilon \leq \xi$ . Ver fig. (4).

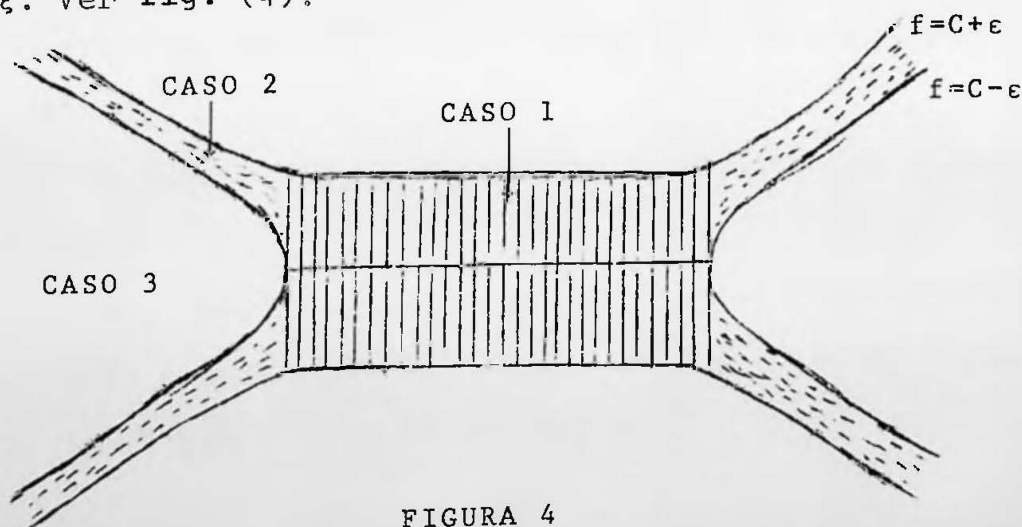


FIGURA 4



Para cada caso temos as respectivas homotopias.

CASO 1.  $r_t(\mu_1, \dots, \mu_n) = (\mu_1, \dots, \mu_\lambda, t\mu_{\lambda+1}, \dots, t\mu_n)$ .  $r_t$  é contínua e esta definida em  $M^{C-\epsilon} U H$  com valores em  $M^{C-\eta} U H$  para todo  $t$ , pois: Se  $g$  tem coordenadas  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$

$$F(r_t(g)) = F(\mu_1, \dots, \mu_\lambda, t\mu_{\lambda+1}, \dots, t\mu_n) = C - \xi(g) + t^2 \eta(g) - \mu(\xi(g) + 2t^2 \eta(g)) \leq C - \xi(g) + \eta(g) - \mu(\xi + 2t^2 \eta).$$

Como  $\mu(\xi + 2t^2 \eta) \leq \mu(\xi + 2\eta)$  então:  $-\mu(\xi + 2t^2 \eta) \geq -\mu(\xi + 2\eta)$  e portanto  $C - \xi(g) + \eta(g) - \mu(\xi + 2t^2 \eta) \leq C - \xi(g) + \eta(g) - \mu(\xi + 2\eta) \leq C - \epsilon$ . Caso 2- seja  $r_t(\mu_1, \dots, \mu_n) = (\mu_1, \dots, \mu_\lambda, S_t \mu_{\lambda+1}, \dots, S_t \mu_n)$  onde:  $S_t = t + (1-t)(\frac{\xi-\epsilon}{\eta})^{1/2}$ .  $r_t$  é uma aplicação de  $M^{C-\epsilon} U H$  nele próprio pelos mesmos argumentos do caso 1. Geometricamente, isto é a projeção na hiperbole  $f = C - \epsilon$ .

No conjunto dos pontos deste caso 2 nós temos  $0 \leq \frac{\xi-\epsilon}{\eta} \leq 1$ . Se o limite desta expressão  $\frac{\xi-\epsilon}{\eta}$  existir quando  $\xi$  tende a  $\epsilon$ , e  $\eta$  tende a zero, êle estará compreendido entre 0 e 1. Mas se  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  tende a  $(\mu_1, \dots, \mu_\lambda, 0, 0 \dots 0)$  então o limite de  $S_t \mu_i = 0$   $i > \lambda$ , logo não importa qual o limite  $\frac{\xi-\epsilon}{\eta}$ .

Temos então que  $r_t$  no ponto em que  $\xi = \epsilon$  foi definido como o limite e coincidiu com a homotopia anteriormente definida.

CASO 3 - Quando  $\eta + \epsilon \leq \xi$ ,  $r_t$  é a identidade. É fácil ver que nos pontos onde  $\eta + \epsilon = \xi$  a homotopia coincide com a do caso 2.

Isto claramente conclui a demonstração.

Se  $f^{-1}(C)$  contém  $K$  pontos críticos não degenerados, com índices  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  respectivamente, a demonstração é idêntica. Mostra-se neste caso que  $M^{C+\epsilon}$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $M^{C-\epsilon} U_{\phi_1} e^{\lambda_1} U_{\phi_2} e^{\lambda_2} U \dots U_{\phi_k} e^{\lambda_k}$ .

Vejamos 2 lemas referentes a adjunção de células em espaços topológicos.

LEMA 2-3: Sejam  $\phi_0$  e  $\phi_1$  duas aplicações homotópicas da esfera  $e^\lambda$  em  $X$ . Então a aplicação identidade em  $X$  se estende à uma equivalência de homotopia  $K: X \cup_{\phi_0} e^\lambda \longrightarrow X \cup_{\phi_1} e^\lambda$ .

PROVA: Defina-se K pelas fórmulas:

$$K(x) = x \quad x \in X$$

$$K(t\mu) = 2t\mu \quad 0 \leq t \leq 1/2 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

$$K(t\mu) = \phi_{2-2t}(\mu) \quad 1/2 \leq t \leq 1 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

Do mesmo modo define-se d:  $X \cup_{\phi_i} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\phi_0} e^\lambda$

$$d(x) = x \quad x \in X$$

$$d(t\mu) = 2t\mu \quad 0 \leq t \leq 1/2 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

$$d(t\mu) = \phi_{2t-1}(\mu) \quad 1/2 \leq t \leq 1 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

Nestas fórmulas  $\phi_s$  é a homotopia ligando  $\phi_0$  a  $\phi_1$

Estas aplicações estão bem definidas nos espaços adjuntos. Vejamos como está definida K o d:

$$K \circ d(x) = x \quad x \in X$$

$$K \circ d(t\mu) = 4t\mu \quad 0 \leq t \leq 1/4 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

$$K \circ d(t\mu) = \phi_{2-4t}(\mu) \quad 1/4 \leq t \leq 1/2 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

$$K \circ d(t\mu) = \phi_{2t-1}(\mu) \quad 1/2 \leq t \leq 1 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

Vejamos que K o d é homotópica a identidade:

Seja a homotopia H(x,s) definida por:

$$H(x,s) = x \quad x \in X \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$H(t\mu,s) = (3s+1)t\mu \quad 0 \leq t \leq 1/4 \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

$$H(t\mu,s) = (3s+1)t\mu \quad 1/4 \leq t \leq 1/2 \quad 0 \leq (3s+1)t \leq 1 \text{ e } \mu \in \dot{e}^\lambda$$

$$H(t\mu,s) = \left( \frac{3t(2t-1)}{1-4t} s + \frac{2(1-t)(2t-1)}{4t-1} \right) (\mu) \quad \frac{1-t}{3t} \leq s \leq 1$$

$$1/4 \leq t \leq 1/2 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

$$H(t\mu,s) = (3s+1)t\mu \quad 1/2 \leq t \leq 1 \quad 0 \leq (3s+1)t \leq 1 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

$$H(t\mu,s) = \left( \frac{3t(1-2t)}{1-4t} s + \frac{(t-1)(1-2t)}{1-4t} \right) (\mu) \quad \frac{1-t}{3t} \leq s \leq 1 \quad 1/2 \leq t \leq 1$$

$$\mu \in \dot{e}^\lambda$$

H é contínua e está bem definida nas partes comuns. H(x,0) é a identidade e H(x,1) é K o d.

Do mesmo modo, mostra-se que d o K é homotópica a identidade,

concluindo-se pois a demonstração.

LEMA 2-4 - Seja  $\phi: \dot{e}^\lambda \rightarrow X$ . Qualquer equivalência de homotopia  $f: X \rightarrow Y$  se estende a uma equivalência de homotopia  $F: X \cup_{\phi} e^\lambda \rightarrow Y \cup_{f\phi} e^\lambda$ .

PROVA: Define-se  $F|X = f$  e  $F|e^\lambda =$  identidade. Se  $g: Y \rightarrow X$  é uma homotopia inversa de  $f$ , define-se:

$$G: Y \cup_{f\phi} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\phi} e^\lambda \quad G|Y=g \quad G|e^\lambda=id.$$

Como  $g \circ f \approx id$  então  $\phi \approx g \circ f \circ \phi$

Pelo lema anterior existe uma equivalência de homotopia

$$K: X \cup_{gf\phi} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\phi} e^\lambda$$

Provaremos que  $K \cdot G \cdot F$  é homotópico a identidade.

Seja  $h_t$  uma homotopia entre  $g \cdot f$  e a identidade.

Usando a definição de  $K$ ,  $G$  e  $F$  temos:

$$K.G.F(x) = gf(x) \quad x \in X$$

$$K.G.F(t\mu) = 2t\mu \quad 0 \leq t \leq 1/2 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

$$K.G.F(t\mu) = h_{2-2t}(\mu) \quad 1/2 \leq t \leq 1 \quad \mu \in \dot{e}^\lambda$$

A requerida homotopia  $g_\tau: X \cup_{\phi} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\phi} e^\lambda$  é agora definida pelas fórmulas:

$$g_\tau(x) = h(x) \quad x \in X$$

$$g_\tau(t\mu) = \frac{2}{1+\tau} t\mu \quad 0 \leq t \leq \frac{1+\tau}{2} \quad \mu \in e^\lambda$$

$$g_\tau(t\mu) = h_{2-2t+\tau}(\mu) \quad \frac{1+\tau}{2} \leq t \leq 1 \quad \mu \in e^\lambda$$

O que mostra que  $F$  tem homotopia inversa pela esquerda.

A prova que  $F$  é uma equivalência de homotopia pode agora ser puramente formal, como segue:

Se uma aplicação tem homotopia inversa a esquerda  $L$  e uma homotopia inversa a direita  $R$ , então  $F$  é uma equivalência de homotopia, e  $R$  ou  $L$  é a homotopia inversa dos dois lados.

Provaremos esta afirmação:

As relações  $L.F. \approx id$  e  $FR \approx id$  implicam em

$$L \approx L(FR) \approx (LF)R \approx R. \quad \text{Logo } RF \approx LF \approx id.$$

Podemos agora completar a prova do lema 1-4 como segue:  
 A relação  $KGF \approx id$  assegura que  $F$  tem uma homotopia inversa a esquerda.

Desde que  $K(GF) \approx$  identidade, e é sabido que  $K$  tem inversa a esquerda, segue  $(GF)K \approx id$ .

Desde que  $G(FK) \approx id$ , e é sabido  $G$  ter uma inversa esquerda segue  $(FK)G \approx id$ .

Logo  $(KG)F \approx id$  e  $F(KG) \approx id$ . Isto completa a prova.

TEOREMA 2-5.  $S$  e  $f: M \rightarrow R$  é uma função  $C^\infty$  com pontos críticos não degenerados, e se cada  $M^a$  é compacto, então  $M$  tem o mesmo tipo de homotopia de um CW - Complexo com uma célula de dimensão  $\lambda$  correspondente a cada ponto crítico com índice  $\lambda$ .

PROVA: Sejam  $C_1 < C_2 < C_3 < \dots$  valores críticos de  $f: M \rightarrow R$ . desde que  $M^C$  é compacto, e toda função contínua em um compacto assume um mínimo, existe  $a$  tal que  $M^a$  é vazio e  $a < C_1$ . Continuemos por indução. Suponha que  $M^a$  é do mesmo tipo de homotopia que um CW - Complexo  $K$ , onde  $a$  é diferente de  $C_i$ . Seja  $C$  o menor dos  $C_i$  para  $C_i > a$ . Temos que  $M^{C+\epsilon}$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $M^{C-\epsilon} \cup_{\phi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\phi_j} e^{\lambda_j}$ . Mas sabemos existir uma equivalência de homotopia  $h: M^{C-\epsilon} \rightarrow M^a$  como também por hipótese  $h': M^a \rightarrow K$  onde  $K$  é um CW - Complexo. Cada  $h'$  o  $h \circ \phi_j: e^{\lambda_j} \rightarrow K$  é homotópico a aplicação celular  $\psi_j: e^{\lambda_j} \rightarrow (N_j - 1)$  - esqueleto de  $K$ .

OBSERVAÇÃO: O fato de nós construirmos estas aplicações  $\psi_j$  garante que  $K \cup_{\phi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\phi_j} e^{\lambda_j}$  é um CW - Complexo. Ver definição CW - Complexo em "Elements of general topology" de S.T.Hu.

Pelos lemas 2-3 e 2-4,  $M^{C+\epsilon}$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $K \cup_{\psi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\psi_j} e^{\lambda_j}$  e existe uma equivalência de homotopia que é uma extensão de  $h'$ .

Por indução,  $M^a$  tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-Complexo. Se  $M$  é compacto, então existirão um número finito de pontos críticos e o teorema fica demonstrado.

Se todos os pontos críticos repousam em um conjunto compacto, então pela parte final do teorema 2-1 fica também demonstrado.

Se existem infinitos valores críticos, sejam  $a_i$  escolhidos tal que para cada  $i$ ,  $C_i < a_i < C_{i+1}$ . Daí temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 M^{a_1} & & C & & M^{a_2} & & C & & M^{a_3} & & C \dots \\
 \downarrow h'_1 & & & & \downarrow h'_2 & & & & \downarrow h'_3 & & \\
 K_1 & & C & & K_2 & & C & & K_3 & & C \dots
 \end{array}$$

onde cada  $h'_{i+1}$  é uma extensão de  $h'_i$ .

Seja  $h'$  a aplicação limite de  $M \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ . A topologia de  $M$  é fácil de ver que é a induzida pela  $UM^{a_i}$

O mesmo com  $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ . Logo,  $h$  é contínua e pelo lema 1-6 induz isomorfismos dos grupos de homotopia de  $M$  para os de  $K$ . No capítulo enunciamos que  $M$  é dominado por um CW - Complexo e claramente  $K$  também é. Logo, pelo teorema de Whitehead, segue que  $h'$  é uma equivalência de homotopia.

C.Q.D.

### CAPÍTULO III

Uma generalização do estudo de pontos críticos em uma variedade que fizemos nos capítulos 1 e 2, é estudar a situação em que no nível de uma função  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  temos uma subvariedade de pontos críticos não degenerada em um sentido que será visto logo mais.

Tentarei expor aqui o que se sabe a êste respeito, exibindo também algumas técnicas mais antigas de resolução de problemas de pontos críticos, que possam provavelmente serem generalizadas.

Seja  $U$  um aberto do espaço euclidiano e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$ . Admitamos que a origem está contida em  $U$ . Definiremos  $U^{a-} = \{x \in U \mid f(x) < a\}$ .

PROPOSIÇÃO 3-1 - Se  $f(x) = -x_1^2 \dots -x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 \dots + x_n^2$ , então o único ponto crítico que temos em  $U$  é a origem  $\{0\}$ , e existe uma vizinhança  $W$  de  $\{0\}$  tal que:

$$\left[ (U^{0-} \cap W) \cup \{0\} ; (U^{0-} \cap W) \right]$$

tem o mesmo tipo de homotopia que  $[B^\lambda ; B^\lambda - \{0\}]$  onde  $B^\lambda$  é a bola aberta de  $\mathbb{R}^\lambda$ , onde  $\mathbb{R}^\lambda$  são os pontos  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tais que  $x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0$ .

PROVA - Seja  $W$  uma bola de raio  $r$  contida em  $U$ . A intersecção de  $W$  com  $\mathbb{R}^\lambda$  da  $B^\lambda$ . Agora a cada ponto  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $W$  associemos o pé da perpendicular tirada de  $(x_1, \dots, x_n)$  até o ponto  $(x_1, \dots, x_\lambda, 0, \dots, 0)$ . É fácil ver que isto é uma retração que vai de

$$\left[ (U^{0-} \cap W) \cup \{0\} ; (U^{0-} \cap W) \right]$$

no par  $[B^\lambda ; B^\lambda - \{0\}]$ . Ver fig. 1. C.Q.D.

Se  $f$  é uma forma quadrática não degenerada, sabemos da álgebra linear que por uma mudança de base podemos diagonalizá-la e recaímos no caso anterior.

Agora seja  $f$  uma função qualquer que tenha a origem como

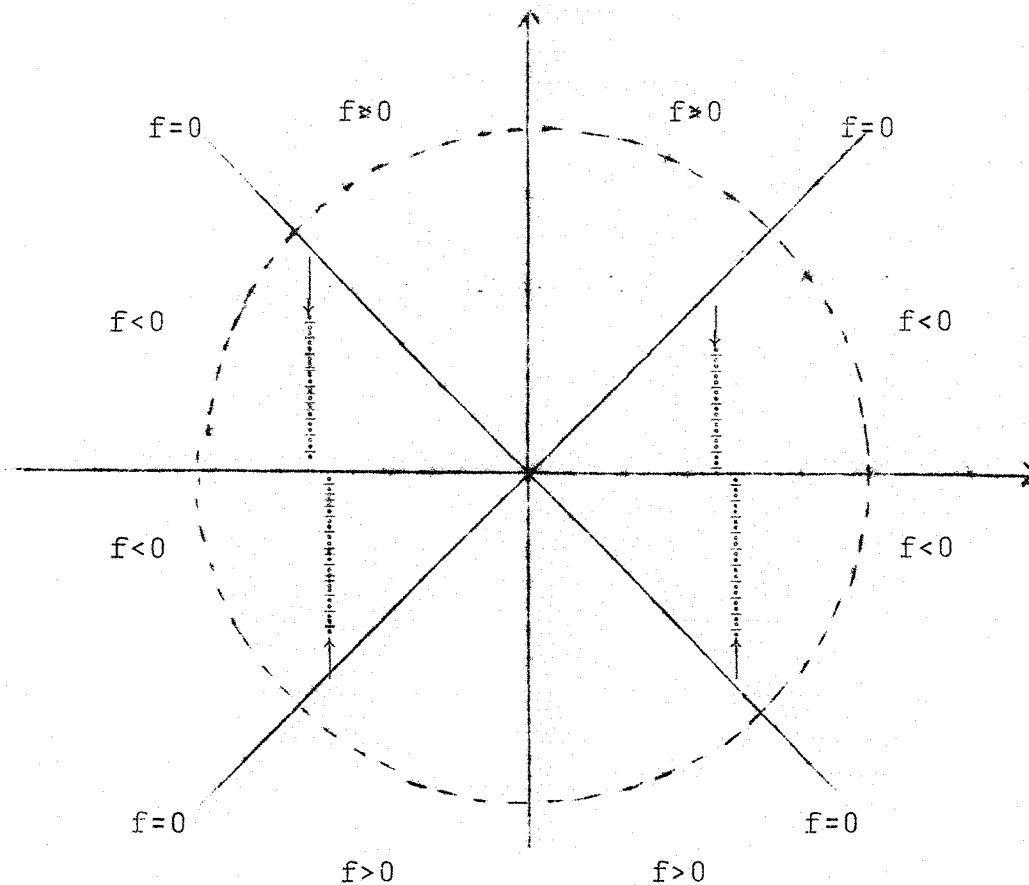


FIGURA 1

ponto crítico não degenerado e  $f(0) = 0$ . O desenvolvimento de Taylor de  $f$  em torno da origem será:

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \bar{X}(x) \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Após uma conveniente mudança de coordenadas podemos diagonalizar a forma quadrática. Então temos:

$$f(x) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 + X(x)$$

onde  $X(x)$  corresponde aos termos de ordem maior ou igual a 3.

Seja  $Q(x) = \sum_{i=1}^n E_i x_i^2$  onde  $E_i = -1 \quad 1 \leq i \leq \lambda$   
 $E_i = +1 \quad \lambda < i \leq n$ .

Logo  $f(x) = Q(x) + X(x)$

$X(x)$  é uma função de classe  $C^\infty$  que tem suas primeiras e segundas derivadas parciais nulas na origem. Daí segue:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{X(x)}{r^2} = 0 \quad (1) \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial X(x)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\text{onde} \quad r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Disto acima podemos concluir que um ponto crítico não de-

gerado é isolado. Pois se existisse uma sequência de pontos críticos convergente para a origem, para cada um desses pontos teríamos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{r} 2E_i x_i + \frac{\partial X(x)}{\partial x_i}$$

O anulamento desta expressão implica:

$$\frac{2 E_i x_i}{r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial X(x)}{\partial x_i}$$

Quadrando e somando obtemos:

$$4 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial X(x)}{\partial x_i} \right)^2 \right)$$

Para valores de  $r$  bastante próximos de 0, o segundo membro tende a zero por (2), logo a igualdade não pode estar satisfeita, mostrando então que o ponto crítico tem que ser isolado.

PROPOSIÇÃO 3-2 - Com relação a função  $f$  temos: Existe uma vizinhança  $W$  da origem tal que o par

$$\left[ (U^{-0} \cap W) \cup \{0\}, (U^{0-} \cap W) \right]$$

tem o mesmo tipo de homotopia que o par  $\left[ B^\lambda, B^\lambda - \{0\} \right]$  onde  $B^\lambda$  é uma bola aberta de  $R^\lambda$ .

PROVA: Temos um sistema de coordenadas no qual a função  $f$  se expressa como  $f(x) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 + X(x)$ . Seja a função  $T(x) = \frac{Q(r)}{r^2}$   $T$  está bem definida em  $R^n \setminus \{0\}$ , e  $-1 \leq T(x) \leq +1$ . As trajetórias ortogonais da família de hipersuperfícies  $T^{-1}(t)$ , que chamaremos de linhas de queda, são quartos de circunferências que vão de um ponto do  $\lambda$ -subespaço  $\{(x_1, \dots, x_\lambda, 0, \dots, 0)\}$  até o  $(n-\lambda)$ -subespaço  $\{(0, \dots, 0, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)\}$ .

Para ver isto seja  $\vec{a}$  um vetor unitário do  $\lambda$ -subespaço e  $\vec{b}$  um vetor unitário do  $(n - \lambda)$ -subespaço. Então todo vetor do plano gerado por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  é dado por  $\vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  reais. O vetor calculado na extremidade de  $\vec{r}$  tem os componentes:

$$\frac{\partial T}{\partial x_a} = - \frac{2}{r^4} (r^2 + Q) x_a \quad \frac{\partial T}{\partial x_b} = \frac{2(r^2 - Q)}{r^4} x_b$$



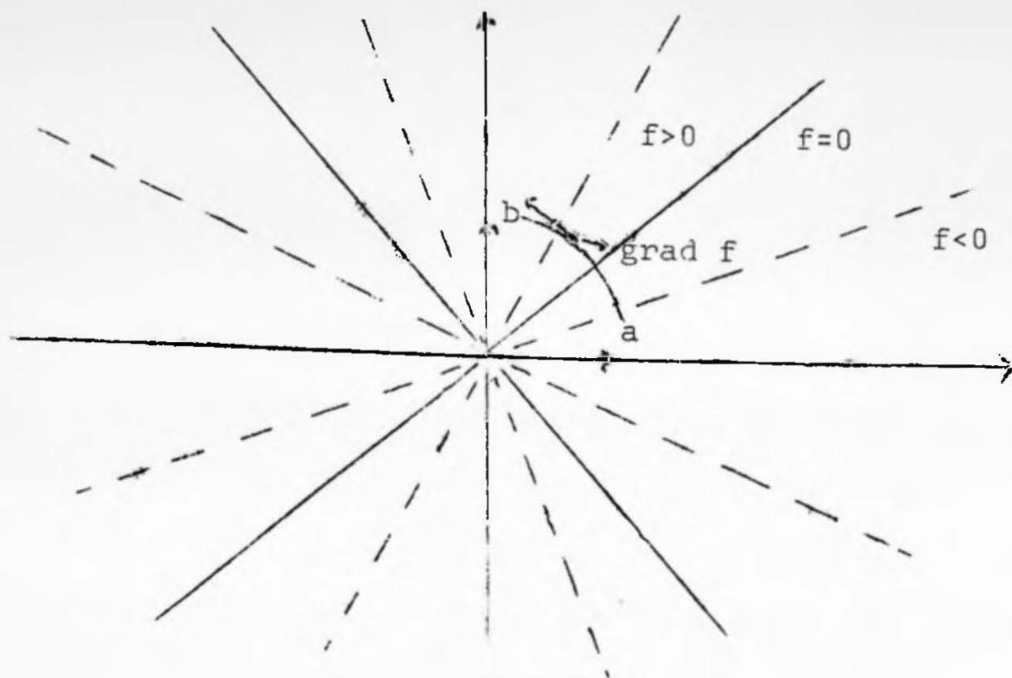


FIGURA 2

mostrando então que  $\text{grad } T$  está no plano gerado por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . As curvas integrais do campo  $-\text{grad } T$  são portanto curvas planas. As intersecções das hipersuperfícies com o plano de cada curva do feixe de retas passando pela origem fig.(2). Como a curva integral é perpendicular as retas, ela será quartos de circunferência.

Tomemos  $0 < E < 1$  e escolhamos uma vizinhança esférica  $W_1$  de  $\{0\}$  de modo que se tenha:

$$\left| \frac{X}{r^2} \right| < E \text{ em } W_1.$$

Isto é possível por (1). Então em  $W_1$  valerá:

$$\frac{f}{r^2} = T + \frac{X}{r^2} = \begin{cases} > 0 & \text{para } T \geq E \\ < 0 & \text{para } T \leq -E \end{cases}$$

Chamando de  $W_1^- = W_1 \cap f^{-1}(-\infty, 0)$ , isto mostra que  $W_1^{-1} \cup g \subset \{x | T(x) < E\}$ .

Agora mostremos que diminuindo-se  $W_1$ , podemos fazer com que ao longo das linhas de queda de  $T$  contida em  $W_1$  diminuída, para  $E \geq T \geq -E$ , a função  $f$  sôbre a linha de queda diminuirá monotonicamente.

Se conseguirmos isto, implica então que a aplicação que a cada ponto de  $W_1^- \cup g$  vai deslizando sôbre a curva está sempre com valores em  $W_1^- \cup g$ .

A condição de  $f$  decrescer nas linhas de queda é equivalente

te a:  $\text{grad } f \cdot \text{grad } T > 0.$

Temos: grad f . grad T =  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (2E_i x_i + \frac{\partial X}{\partial x_i}) (\frac{2E_i x_i}{r^2} - \frac{2Qx_i}{r^4}) =$   
 $= 4 - 4T^2 + 2 \sum \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial x_i}$

Temos que  $4 - 4T^2$  é positivo pois  $|T| \leq E < 1$ . Mas  $2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial x_i}$  tende a zero o que mostra que para alguma bola de raio E da origem, nos pontos desta bola tal que  $|T(x)| \leq E$  temos grad f . grad T > 0.

Finalmente a cada ponto  $x \in U^0 \cap W$  associamos a intersecção da linha de queda que passa por x com o subespaço  $R^\lambda$ . Esta aplicação é uma retração. Pois para cada  $0 \leq t \leq 1$  definimos  $r_t(x)$  da seguinte maneira:

Seja  $x = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \theta \vec{a} + \sin \theta \vec{b})$   
 $r_t(x) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos(1-t)\theta \vec{a} + \sin(1-t)\theta \vec{b})$ .

Para todo t,  $r_t$  é uma aplicação de  $U^0 \cap W \rightarrow U^0 \cap W$ .

Isto mostra a proposição.

Esta deformação será chamada de deformação de Seifert. Esta proposição mostra que tôdas as vêzes que a função f está expressa em relação a um sistema de coordenadas e sua expressão é:  $f(x) = \sum_{i=1}^n E_i x_i^2 + X(x)$  então existe uma deformação de Seifert.

Vejamos agora uma deformação nas vizinhanças de um ponto crítico isolado mas não necessariamente não degenerado.

Seja W uma vizinhança aberta de origem do  $R^n$ , sendo que a origem é o único ponto crítico da vizinhança. Para todo ponto desta vizinhança f possui um vetor gradiente com as componentes:

$$f_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Estes vetores formam um campo em W, cujas curvas integrais são as soluções do sistema de equações diferenciais:

(3)  $\frac{dx_i}{dt} = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^n f_i^2}$  para todo ponto diferente da origem.

As soluções de (3) representaremos por:  $x_i = \phi_i(t, x^0)$  onde  $\phi$  é continuamente diferenciável em todos os argumentos  $t, x_1^0, \dots, x_n^0$  e o ponto inicial de nossa curva integral é  $x_i^0 = \phi_i(0, x^0)$ .

$$\text{Da equação (3) segue } \frac{d}{dt} (f.x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = 1.$$

Logo ao longo da curva integral  $f.x-t$  é constante. Daí podemos introduzir  $f.x$  como parâmetro das curvas integrais. Denotaremos  $f.x$  simplesmente por  $f$ . Obtemos então:

$$(4) \quad x_i = \phi_i(f - f(x_0), x^0) = \bar{\phi}_i(f, x^0)$$

Do mesmo modo  $\bar{\phi}$  é continuamente diferenciável em relação aos  $n+1$  argumentos  $(f, x_1^0, \dots, x_n^0)$  e vale a identidade

$$(5) \quad x_i^0 = \bar{\phi}_i(f(x^0), x^0)$$

Por cada ponto de  $W-\{0\}$  passa exatamente uma linha de queda.

Seja  $p$  um ponto de  $W-\{0\}$ . A equação 4 é válida para todos os pontos de alguma vizinhança  $\delta$  do ponto  $p$ . Supondo  $\delta$  uma vizinhança fechada então existe  $E > 0$  tal que para todos os pontos as curvas integrais estão definidas para  $|f - f(x^0)| \leq E$ . Seja a intersecção de  $\delta$  com  $\{x \mid f(P) - E \leq f(x) \leq f(P) + E\}$ . Este conjunto será chamado de vizinhança tubular de  $P$  de altura  $2E$ . Ver fig. (3).

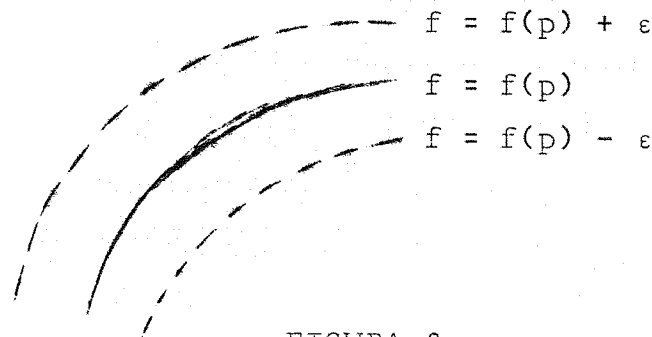


FIGURA 3

Esta vizinhança pode ser pensada como a união de todos os segmentos de linhas de quedas definidas no intervalo de  $-E$  a  $+E$  tendo origem nos pontos de uma vizinhança de contidos na hipersuperfície  $f = f(P)$ .

Olhemos agora para o ponto crítico  $\{0\}$ . Diremos que uma linha de queda

da emboca em  $\{0\}$  quando ela está definida para todos os valores maiores que zero e se para toda sequência  $\{A_n\}$  de pontos de linha tal que a sequência  $\{f(A_n)\}$  é convergente para zero, implica que  $\{A_n\}$  é convergente para  $\{0\}$ . Diremos que uma linha de queda  $\bar{\phi}(t, x^0)$  parte de  $\{0\}$ , se a linha  $\bar{\phi}(-f, x^0)$  emboca em  $\{0\}$ .

PROPOSIÇÃO 3-3 - Seja  $V$  uma vizinhança aberta de  $\{0\}$  cujo fecho está em  $W$ . Seja  $p \neq \{0\}$  um ponto de  $V$ . Por  $p$  passa uma linha  $L$ . Existem duas hipóteses, ou  $L$  permanece em  $V$  abaixo de  $P$  e emboca na origem, ou  $L$  atinge a fronteira de  $V$ .

OBS.: Aqui a linha queda que passa por  $p$  é somente a parte da linha de queda tal que  $f \leq f(P)$ .

DEMONSTRAÇÃO: Como  $f$  é limitada sobre  $V$ , existe um menor número  $\alpha$  tal que  $L$  está definido para  $f(P) \geq f > \alpha$  e está contido em  $V$ . Seja  $\{a_n\}$  uma sequência de pontos de  $L$  tal que a sequência  $\{f(a_n)\}$  converge monotonicamente para  $\alpha$ . Mostremos que  $\{a_n\}$  também converge. Caso contrário existiriam pelo menos dois pontos de acumulação em que um deles  $a_0$  é distinto de  $\{0\}$ , logo não crítico. Neste caso infinitos pontos estão na vizinhança tubular de  $a_0$ . Mas então a linha  $L$  deverá ser a mesma linha  $L$  que passa por  $a_0$  contra a hipótese. Um ponto de  $V - \{0\}$  não pode ser um ponto limite de  $\{a_n\}$  pois  $V - \{0\}$  é aberto e então  $L$  estaria definido para valores menores que  $\alpha$ . Portanto, o limite ou será  $\{0\}$  ou um ponto da fronteira de  $V$ . C.Q.D.

Se considerarmos as curvas percorridas em sentido contrário vale o mesmo, sendo que as curvas que agora embocam são as que na verdade partem.

Também podemos definir vizinhança tubular de um ponto crítico. Seja  $V$  a intersecção de uma vizinhança de  $\{0\}$  com  $\{x \mid f(x) = 0\}$  tal que o fecho de  $V$  está em  $W$ . Existe um  $\epsilon > 0$  bastante pequeno tal que os pontos abaixo relacionados ainda estão em  $W$ .

- a) os pontos tais que  $0 < f \leq \epsilon$  e estão sobre alguma linha de queda que embocam em  $\{0\}$ .

- b) os pontos tais que  $-E \leq f < 0$  e estão sôbre alguma linha de queda que parte de  $\{0\}$ .
- c) os pontos  $-E \leq f \leq +E$  sôbre as linhas de queda que nem embocam nem saem de  $\{0\}$ .

Êstes pontos juntamente com  $\{0\}$ , indicaremos por  $W_c$ , e se rá chamado de vizinhança tubular do ponto crítico de altura  $2E$ . Esta denominação é adequada uma vez que temos realmente uma vizinhança de  $\{0\}$ .

Agora podemos definir uma deformação em  $W_c$  que leva  $W_c$  no subconjunto de  $W_c$ ,  $\{x \mid f(x) \leq 0\} \cap W_c$ . Sendo  $p$  um ponto arbitrário de  $W_c$  com  $f(p) > 0$ , passa por  $p$  uma linha de queda que interceptará no ponto  $p_1$  o  $\{x \mid f(x) = 0\}$  ou convergirá para o ponto  $\{0\}$ . Fazemos êste ponto correr com velocidade  $f(p)$ . Logo no instante  $t = 1$  o ponto atinge  $p_1$ . Isto significa que no instante  $\tau$ , o ponto  $p$  se transforma no ponto cujo valor do parâmetro é  $(1-\tau)f(p)$ . Em seguida supomos que os pontos de  $\{x \mid f \leq 0\} \cap W_c$  permaneçam fixo. Assim obtemos a deformação de  $W_c$  em  $W_c \cap \{x \mid f(x) \leq 0\}$ .

Agora façamos uma deformação de  $\{x \mid f(x) \leq 0\} \cap W_c$  em uma parte do  $\{x \mid f(x) < 0\} \cup \{0\}$ . Para isto consideremos o sistema de equações diferenciais:

$$(6) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(x)(f(x) + E)$$

Aqui  $2E$  significa a altura da vizinhança cilíndrica  $W_c$ .

O segundo membro de (6) são funções continuamente diferenciáveis em  $W$ , se anulam simultaneamente na  $\{0\}$  e na hipersuperfície  $\{x \mid f(x) = -E\}$ . As curvas integrais dêste sistema denotaremos por  $x_i = \psi_i(\tau, x^0)$  onde  $x^0$  indica o ponto correspondente a  $\tau = 0$  da curva integral. Se  $x^0$  é a origem ou um ponto da hipersuperfície  $f(x) = -E$  então temos  $x_i = x_i^0$  isto é, a solução constante. Para todo outro ponto  $(x^0)$  a curva integral que passa por êle, coincide com as linhas de queda de  $f$  vistas anteriormente, pois,

$$\left( \frac{dx_1}{d\tau}, \dots, \frac{dx_n}{d\tau} \right)$$

é proporcional a  $(f_1, \dots, f_n)$ .

Existe um  $E$  tal, que  $\psi(\tau, x^0)$  está definido para todo  $0 \leq \tau \leq E$  em todo ponto da vizinhança.

Chamado  $x^0$  de  $p$  e escolhendo-se um  $0 < \tau < E$ . Seja  $p_\tau = \psi(\tau, p)$  que é uma deformação pedida.

O resultado de tôdas estas informações nos leva a seguinte conclusão:

PROPOSIÇÃO 3-4 - Tôda vizinhança tubular de um ponto crítico isolado de uma função diferenciável  $f$  pode ser deformada em uma parte de  $\{x \mid f(x) < f(0)\} \cup \{0\}$  sendo que durante a deformação nenhum ponto deixa a vizinhança cilíndrica e o ponto  $\{0\}$  permanece fixo.

Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função classe  $C^\infty$  definida no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ , com valores em  $\mathbb{R}$ . Suponhamos que  $N \subset f^{-1}(0)$  é uma subvariedade de  $U$  de dimensão  $n$  tal que todos os pontos de  $N$  são pontos críticos. Chamaremos  $N$  uma subvariedade crítica. Dizemos que  $N$  é uma subvariedade crítica não degenerada **quando temos** o hessiano de  $f$  em todo ponto de  $N$  tem nulidade  $n$ . Disto segue que em cada parte conexa de  $N$  o índice de  $f$  é constante em todos seus pontos.

Para cada  $x \in N$  temos o plano tangente a  $x$  que indicaremos por  $TU_x$ . Definimos  $\phi: TU_x \rightarrow TU_x$  pela fórmula  $f_{**}(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \phi(\vec{v}), \vec{w} \rangle$ .  $\phi$  é um operador simétrico pois  $f_{**}$  é simétrico. Logo  $TU_x$  se decompõe na soma de três subespaços  $TN_x \oplus A_x \oplus B_x$  correspondentes aos valores próprios nulos, positivos e negativos.

Vamos supor que  $N$  seja compacta. Dado  $E > 0$  seja  $V_E$  o conjunto dos pontos de  $U$  que estão a uma distância de  $N$  menor que  $E$ . Como  $N$  é compacta existe  $E > 0$  tal que para todo ponto de  $V_E$  está bem definida a projeção do ponto em  $N$  em que a projetante permanece em  $V_E$ .

Seja  $f_N = \{x \mid f(x) \leq f(N)\}$  e

$$f_N^- = \{x \mid f(x) < f(N)\} \quad B_x^- = B_x - \{0\}$$

PROPOSIÇÃO 3-5 - De acôrdo com as definições acima, existe  $E > 0$  tal que o par  $(f_N, f_N^-) \cap V_E$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $(\bigcup_{x \in N} B_x, \bigcup_{x \in N} B_x^-) \cap V_E$ . Em particular

$$H_m\{(f_N, f_N^-) \cap V_E\} \approx H_m\{(\bigcup_{x \in N} A_x, \bigcup_{x \in N} A_x^-) \cap V_E\}$$

PROVA: Seja  $A = \bigcup_{x \in N} A_x$  e  $B = \bigcup_{x \in N} B_x$  os subfibrados do fibrado normal a  $N$ . Denotemos por  $H^+$  e  $H^-$  as projeções de  $A \oplus B$  em  $A$  e  $B$  respectivamente. Agora consideremos a seguinte deformação de  $(A \oplus B) - A$  em  $A$ , parametrizada por  $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ :

$$y_\theta = \frac{\cos\theta H^+ y + \sin\theta H^- y}{|\cos\theta H^+ y + \sin\theta H^- y|} \quad y \neq 0$$

$$y_\theta = y \quad \text{para } y = 0$$

Temos que:  $y_{\pi/4} = y$   $y_{\pi/2} = H^- y$ . O caminho que um fixado  $y$  percorre é um arco de circunferência. Logo estamos diante de uma deformação que preserve fibra, e é uma deformação de Seiert. Para  $E > 0$  bastante pequeno nós podemos identificar  $V_E$  com um subconjunto de  $A \oplus B$ . A restrição de  $f$  a uma fibra terá um único ponto crítico que não é de gerado. O desenvolvimento de Taylor de  $f$  restrito a esta fibra com relação a um sistema de coordenadas que tenha vetores coordenados no ponto os vetores próprio da fibra neste ponto, é tal que não aparece as derivadas mixtas de segunda ordem. Portanto, pelos argumentos anteriores existe  $E > 0$  tal que esta deformação é bem definida em cada fibra de  $(f_N, f_N^-)$ . Por continuidade e **compacidade** segue que a deformação é verdadeira para algum  $E > 0$ . C.Q.D.

É sabido que se  $E$  é um fibrado, cuja fibra é de dimensão  $K$  sobre uma variedade  $N$ , então  $H_{m-K}(N) \approx H_m(E, E-N)$  quando os coeficientes da homologia estão em  $Z_2$ , e em anel qualquer quando  $E$  é orientável. Isto segue da sequência de Gysin.

TEOREMA 3-6 - Se  $N \subset U$  é uma subvariedade crítica compacta co-

nexa não degenerada de  $f$ , então para suficientemente pequenas vizinhanças  $V$  de  $N$  vale:

$$H_m(f_N \cap V, f_N^- \cap V) \approx H_{m-\lambda_N}(N) \text{ onde } \lambda_N \text{ é o índice de } N.$$

Este teorema segue da última proposição e é devido a Raoult Bott.

Prosseguindo vejamos o que mais se sabe sobre sub-variedades críticas.

LEMA 3-7 - Seja  $f$  uma função de classe  $C^\infty$  definida em uma vizinhança convexa  $U$  do  $\mathbb{R}^m$  contendo a origem. Além do mais,  $f$  é com valores em  $\mathbb{R}$  tal que  $f(0, \dots, 0, x_{(k+1)}, \dots, x_m) = 0$ . Então existem  $k$  funções diferenciáveis  $g_i$  em  $U$  tal que:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^k g_i x_i.$$

Além do mais  $g_i(0, \dots, 0, x_{(k+1)}, \dots, x_m) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m)$ .

PROVA: Temos  $f(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_m) - f(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m)$ .

Seja  $\phi(t) = f(tx_1, \dots, tx_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$ .  $\frac{d\phi}{dt} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i$

Temos  $\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i dt = \sum_{i=1}^k x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} dt$ .

Seja  $g_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(tx_1, \dots, tx_{(k)}, x_{k+1}, \dots, x_m) dt$ .

Logo  $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^k x_i g_i(x_1, \dots, x_m)$ .

Pela definição dos  $g_i$  vem:

$$g_i(0, \dots, 0, x_{(k+1)}, \dots, x_m) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \dots, 0, x_{(k+1)}, \dots, x_m) dt = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m). \quad \text{C.Q.D.}$$

LEMA DE MORSE GENERALIZADO 3-8 - Seja  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$   $f \in C^\infty$  e  $M$



uma variedade de classe  $C^\infty$  e dimensão  $m$ . Seja  $N \subset f^{-1}(0)$  uma subvariedade crítica não degenerada de  $f$  de índice  $\lambda$ . Em cada ponto de  $N$  existe um sistema de coordenadas tal que a função  $f$  se escreve como:

$$f(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{m-n}^2$$

PROVA: Chamemos  $k = m-n$ . Seja  $(y_1, \dots, y_m)$  um sistema de coordenadas em torno de um ponto  $p$  de  $N$  tal que:

$$(y_1(p), \dots, y_m(p)) = (0, \dots, 0)$$

e os pontos da forma  $(0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_m)$  são os pontos da subvariedade.

Temos que  $f \circ y^{-1}$  é uma função definida em um aberto do  $\mathbb{R}^m$ , contendo a origem. Podemos claramente escolher este aberto sendo convexo. Chamemos  $f \circ y^{-1}$  simplesmente de  $f$ .

Esta função  $f$  esta nas condições do lema anterior. Logo  $f(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^K y_i g_i$ . Mas cada  $g_i$  está também nas condições do lema anterior, pois,  $g_i(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m) = 0$ , pois, estes são pontos críticos para a função  $f$ . Então aplicando-se o lema para as funções  $g_i$ , obtemos:

$$g_i = \sum_{j=1}^K h_{ij} y_j$$

$$\text{Logo } f(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i,j=1}^K y_i y_j (y_1, \dots, y_m).$$

Isto também pode ser escrito na forma:

$$f(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i,j=1}^K \frac{(h_{ij} + h_{ji})}{2} y_i y_j$$

$$\text{Chamando } H_{ij} = \frac{h_{ij} + h_{ji}}{2} \text{ obtemos } f(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i,j=1}^K y_i y_j H_{ij}$$

onde claramente  $H_{ij} = H_{ji}$ .

Deste modo podemos definir a  $f$  do seguinte modo:

$$f(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m) \begin{pmatrix} H_{ij} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

onde  $i$  e  $j$  variam de 1 a  $K$  e  $H_{ij} = H_{ji}$ . O problema agora é diagonalizar esta matriz  $(H_{ij})$  em alguma vizinhança da origem, sem alterar os demais termos que são nulos.

Pela expressão de  $f$  podemos ver que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} (0, \dots, 0) = H_{ij}(0, \dots, 0)$$

Como o hessiano restrito ao subespaço gerado por  $(\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_K)$  é não degenerado, implica que a seguinte matriz é não degenerada:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} (0), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial y_K \partial y_1} (0) \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_K \partial y_1} (0) \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial y_K^2} (0) \end{pmatrix}$$

Podemos supor que  $H_{11}(0) \neq 0$  pois caso contrário podemos fazer uma mudança linear nas  $K$  primeiras coordenadas e colocar lá uma  $H_{ij}$  que seja diferente de zero na origem.

Façamos a mudança de coordenadas:

$$Z_1 = \sqrt{|H_{11}(y)|} y_1 + \frac{H_{12}(y) \sqrt{|H_{11}(y)|}}{H_{11}(y)} y_2 + \dots + \frac{H_{1K} \sqrt{|H_{11}(y)|}}{H_{11}(y)} y_K$$

$$Z_2 = y_2$$

$$\vdots$$

$$Z_m = y_m$$

O Jacobiano desta mudança de coordenadas será simplesmente  $\frac{\partial Z_1}{\partial y_1} (0) = \sqrt{|H_{11}(0)|} \neq 0$ . Logo  $(Z_1, \dots, Z_m)$  é um sistema de

coordenadas em alguma vizinhança. Expressando agora  $f$  em relação ao novo sistema de coordenadas, obtemos:

$$f(Z_1, \dots, Z_m) = \pm Z_1^2 + \sum_{i,j=2}^K Z_i Z_j \bar{H}_{ij}$$

Observe que esta mudança de coordenadas não alterou os elementos da matriz que não estão na sub-matriz.

Com relação ao novo sistema de coordenadas  $(Z_1, \dots, Z_m)$  temos:

$$F(Z_1, \dots, Z_m) = (Z_1, \dots, Z_m) \begin{pmatrix} \pm 1, 0 \dots 0 & \vdots & \\ 0 & & \\ \vdots & \bar{H}_{ij} & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix}$$

Suponhamos que está demonstrado que existe um sistema de coordenadas tal que:

$$f(Z_1, \dots, Z_m) = \pm Z_1^2 \pm \dots \pm Z_{r-1}^2 + \sum_{i,j>r}^K \bar{H}_{ij} Z_i Z_j$$

onde  $r-1 < K$ ; mostremos que podemos fazer uma mudança tal que a expressão acima é verdadeira para  $r$ .

Seja  $v_i = Z_i \quad i \neq r$

$$v_r = \sqrt{|\bar{H}_{rr}|} Z_r + \dots + \frac{H_{rK} \sqrt{|\bar{H}_{rr}|}}{\bar{H}_{rr}} Z_K$$

Como antes podemos supor  $\bar{H}_{rr}(0) \neq 0$ , substituindo vem:

$$f(v_1, \dots, v_m) = \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_r^2 + \sum_{i,j>r}^K \bar{H}_{ij} v_i v_j$$

Com isto fica demonstrado que existe um sistema de coordenadas em uma vizinhança de  $p$ , na qual  $f$  é uma forma quadrática. Como o índice é igual ao número dos termos negativos temos:

$$f(x) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_K^2 \quad \text{C. Q. D.}$$

COROLÁRIO 3-9 - Se  $N \subset M$  é uma subvariedade crítica não degenerada de  $f$ , então  $N$  é isolada no seguinte sentido: existe um aberto  $U$  de  $M$  contendo  $N$  tal que neste aberto não existe outros pontos críticos, além de  $N$ .

PROVA: - Para cada ponto de  $N$  consideremos o aberto no qual existe um sistema de coordenadas tal que a função  $f$  se escreve como anteriormente:

$$f(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{m-n}^2$$

Os pontos críticos de  $f$  são os pontos da forma  $(0, \dots, 0, x_{m-n+1}, \dots, x_m)$ , logo de  $N$ . Se tomarmos a união dos abertos relativos a todos os pontos de  $N$ , temos o procurado. C.Q.D.

OBS.: - Durante as diversas mudanças de sistema de coordenadas feitas para chegarmos no sistema de coordenadas final, observe que em cada sistema  $(z_1, \dots, z_m)$ , os pontos da forma  $(0, \dots, 0, z_{m-n+1}, \dots, z_m)$  são os pontos de  $N$ .

COROLÁRIO 3-10 - Se  $f^{-1}(0) = N$  onde  $N$  é uma subvariedade crítica não degenerada de  $f$ , então cada parte conexa de  $N$  é um máximo ou um mínimo local.

PROVA: - Seja um sistema de coordenadas onde  $f$  se expressa como mais e menos somas de quadrados. Se a expressão não é formada só de termos negativos nem só de positivos, então, podemos escolher um ponto na vizinhança onde está definido o sistema de coordenadas, tal que  $f$  é nula nesse ponto. Basta tomarmos  $x_1 = \dots = x_\lambda = E/2$  e

$$x_{\lambda+1} = x_{m-n} = \frac{E \sqrt{\lambda}}{\sqrt{m-n-\lambda}} \quad \text{onde } \lambda \text{ é o índice de } M.$$

Como por hipótese a imagem inversa do zero são todos os pontos críticos, então a função localmente se expressa ou como soma ou como diferença de quadrados. Se localmente  $f$  é um máximo ou mínimo local então em cada componente conexa ela será um máximo ou mínimo local. C.Q.D.

Seja  $p \in N$  onde  $N \subset M$  é uma subvariedade crítica de índice  $\lambda$  e  $f(N) = 0$ .

TEOREMA 11 - Existe uma vizinhança fechada  $V$  em  $M$  do ponto  $p$  e um  $E > 0$  tal que  $M^{C-E} \cup V$  tem o mesmo tipo de homotopia do espaço adjunção  $M^{C-E} \cup_{\phi} (W \times e^{\lambda})$  onde  $W = V \cap N$  e  $e^{\lambda}$  é a bola de dimensão  $\lambda$  e  $\phi$  é a função de colagem relativo ao subespaço  $W \times \dot{e}^{\lambda}$  onde  $\dot{e}^{\lambda}$  é o bordo de  $e^{\lambda}$ .

PROVA: Seja  $(x_1, \dots, x_{\lambda}, \dots, x_{m-n+1}, \dots, x_m)$  um sistema de coordenadas tal que a função  $f$  se escreve na forma:

$$f(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - \dots - x_{\lambda}^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{m-n}^2$$

em alguma vizinhança  $V_1$ .

Denotemos por  $R^{\lambda}$ ,  $R^{m-n-\lambda}$  e  $R^n$  os subespaços formados pelos pontos da forma  $(x_1, \dots, x_{\lambda}, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, \dots, 0, x_{\lambda+1}, \dots, x_{m-n}, 0)$ ,  $(0, \dots, 0, x_{m-n+1}, \dots, x_m)$  respectivamente.

Como  $V_1$  é aberto, existem bolas fechadas de raio  $E, E, E_1$  de  $R^{\lambda}$ ,  $R^{m-n-\lambda}$  e  $R^n$  respectivamente, tal que  $e_E^{\lambda} \times e_E^{m-n-\lambda} \times e_{E_1}^n \subset V_1$ .

Chamemos de  $V = e_E^{\lambda} \times e_E^{m-n-\lambda} \times e_{E_1}^n$ . Consideremos o conjunto dos pontos  $A \subset V$  tais que  $(x_i = 0 \quad \lambda+1 \leq i \leq m-n)$ . É claro que  $A$  é homeomorfo a  $e_E^{\lambda} \times e_{E_1}^n$ . Calculemos a intersecção de  $M^{-E}$  com  $V$ .

$$M^{-E} \cap V = \{x \in V \mid f(x) \leq -E\}$$

$$f(x) = -x_1^2 - \dots - x_{\lambda}^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{m-n}^2 \leq -E$$

implica  $x_1^2 + \dots + x_{\lambda}^2 = E$  pois é o máximo valor que pode alcançar pois o ponto é de  $V$ . Logo  $M^{-E} \cap V$  é homeomorfo a  $\dot{e}_E^{\lambda} \times e_{E_1}^n$ , e temos a natural adjunção de  $e_E^{\lambda} \times e_{E_1}^n$  em  $M^{C-E}$  relativo ao subespaço  $\dot{e}_E^{\lambda} \times e_{E_1}^n$ . Veja fig. (4) para maior claridade. A fig. real corresponde o produto cartesiano desta com  $e_{E_1}^n$ . A vizinhança  $V$  corresponde a parte marcada com pontos. O entendimento desta figura conduz a claridade ou a trivialidade deste teorema.

Agora podemos facilmente definir uma retração de  $M^{-E} \cup V$  em  $M^{-E} \cup_{\phi} e_E^{\lambda} \times e_{E_1}^n$ .

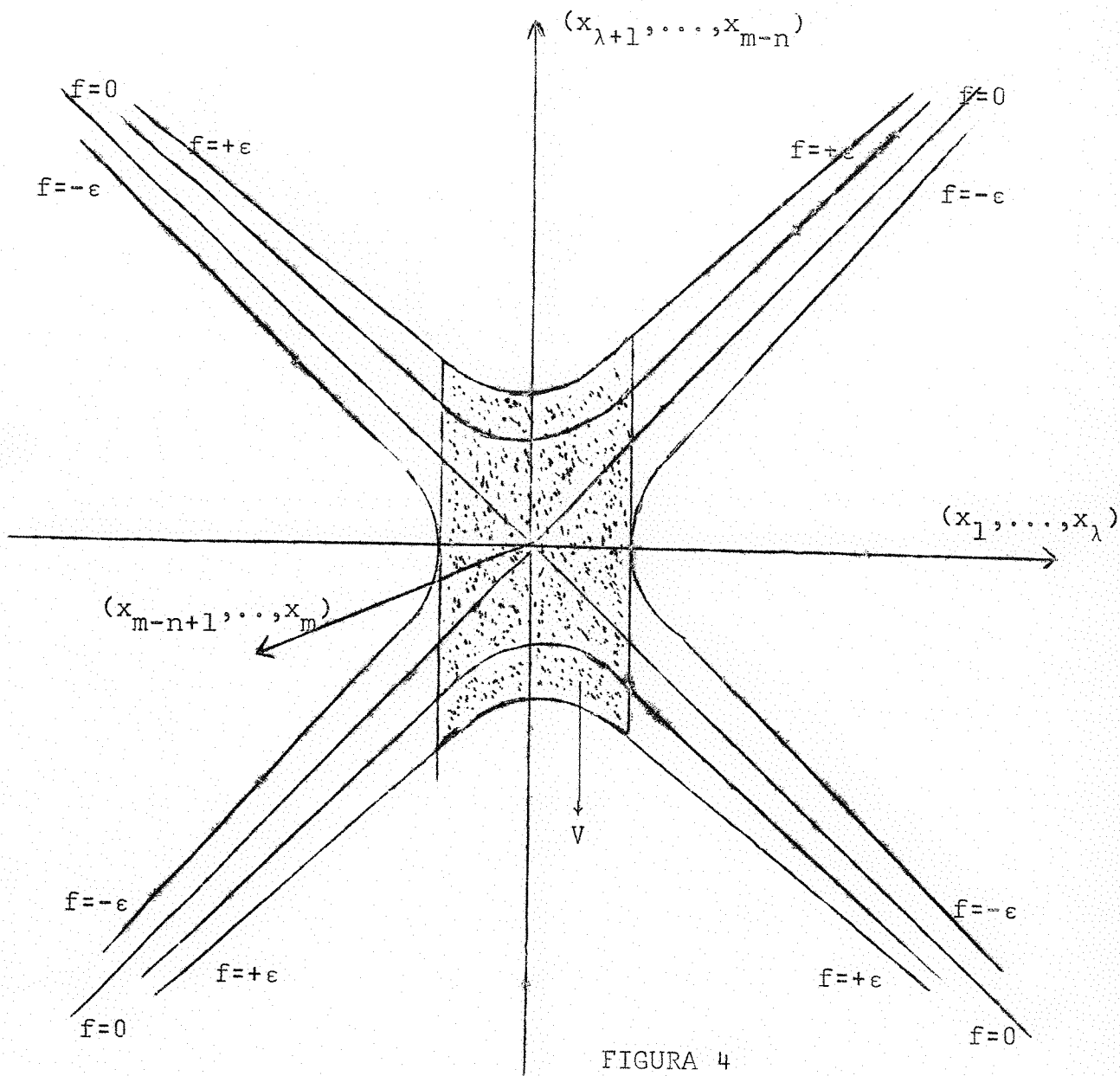


FIGURA 4

Os pontos de  $M^{-E} \cup V$  são de dois tipos:

- a) os que estão em  $M^{-E}$
- b) os que estão em  $M^{-E} \cup V - M^{-E}$

Define-se  $r_t$  por:

$$r_t(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} x & x \in M^{-E} \\ (x_1, \dots, x_\lambda, (1-t)x_{\lambda+1}, \dots, (1-t)x_{m-n}, x_{m-n+1}, \dots, x_m) & \end{cases}$$

Para todo  $t$ ,  $r_t(x)$  pertence sempre a  $M^{-E} \cup V$ .  $r_0$  é a identidade e  $r_1$  é a retração de  $M^{-E} \cup V$  em  $M^{-E} \cup \{e_E^\lambda \times e_{E_1}^n\}$

