S Ô B R E

C U R V A S   G E N E R A L I Z A D A S

Seiji Hariki

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Paulo - Brasil

1973

a

Laura e Aleph

Í N D I C E

Introdução

O objetivo desta exposição é abordar alguns aspectos da teoria de curvas necessária para se estudar o problema fundamental do cálculo das variações na forma paramétrica.

Uma formulação dêsse problema é a seguinte: Dado um certo conjunto $\mathcal{A}$ de curvas situadas no R^n, achar uma curva em $\mathcal{A}$ que minimize o funcional

$$J[C] = \int_a^b F(x(t), \dot{x}(t))dt$$

onde $x(t): [a,b] \longrightarrow R^n$ é uma representação da curva C e $F(x,y): R^n x R^n \longrightarrow R$ é uma função contínua, positivamente homogênea em y .

Os três primeiros capítulos tratam essencialmente de responder à pergunta - O que é curva ?

A idéia básica usada nos capítulos I e II é a seguinte: Considera-se um certo conjunto $\mathfrak{F}$ de funções, definidas em intervalos compactos de R, com valores vetoriais em R^n; define-se uma relação de equivalência sôbre $\mathfrak{F}$; cada classe de equivalência será então chamada de curva.

As definições variam de acôrdo com a escolha do conjunto $\mathfrak{F}$ e da relação de equivalência.

Já no capítulo III concebemos curva como um funcional linear não-negativo. É aqui, nêste contexto, que aparecem as curvas generalizadas de L.C. Young .

No capítulo IV apresentamos um teorema de representação para as curvas generalizadas.

Quanto ao trabalho como um todo, queremos observar que procuramos organizar o material sôbre a teoria de curvas , de modo a tornar "natural" o aparecimento do conceito de curva generalizada de Young.

Quero deixar aqui expressos os meus agradecimentos aos Professores Doutores Chaim Samuel Honig e Ubiratan d'Ambrosio, por sua orientação; Léo Borges Vieira, pelos ensinamentos e Luiz Arthaud Berthet, que me iniciou na carreira universitária.

Aos meus colegas José Carlos Fernandes de Oliveira, Tadao Yoshioka, Ivan Resina, Johnny e Rodnei, com os quais aprendi a gostar de Cálculo de Variações, aquele abraço !

1. Curva de Lebesgue

1.1 Definição

Sejam dadas duas funções $f: [a,b] \longrightarrow R^n$ e $g: [c,d] \longrightarrow R^n$ contínuas. Dizemos que f é Lebesgue-equivalente a g se existe uma função $h: [c,d] \longrightarrow R$ tal que

1) $h(c) = a$, $h(d) = b$

2) h é contínua e estritamente crescente

3) $foh = g$.

Esta relação é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas, definidas em intervalos compactos de R , com valores vetoriais em R^n. As classes de equivalência são denominadas curvas de Lebesgue, situadas no R^n. Vamos denotar por $[f]$ a classe de equivalência determinada por f. Se g é um elemento de $[f]$, dizemos que g é uma representação da curva de Lebesgue $[f]$.

1.2 Extremidades, gráfico e ordem no gráfico

Sejam $f: [a,b] \longrightarrow R^n$ e $g: [c,d] \longrightarrow R^n$ duas funções Lebesgue-equivalentes. Tem-se, então, que

1) $f(a) = g(c)$, $f(b) = g(d)$

2) $f([a,b]) = g([c,d])$.

Os pontos $f(a)$ e $f(b)$, pertencentes ao R^n, chamam-se extremidades da curva $[f]$: $f(a)$ é o ponto inicial e $f(b)$ o ponto final; o subconjunto $f([a,b])$ do R^n chama-se o gráfico da curva $[f]$.

Proposição 1.1 Seja $f: [a,b] \longrightarrow R^n$ uma função contínua. Então, para todo ponto $P \in f([a,b])$, existe o mínimo do conjunto $\{t \in [a,b]$ tais que $f(t) = P\}$.

Dem. Seja t_P o ínfimo do conjunto $\{t \in [a,b]$ tais que $f(t) = P\}$. Queremos mostrar que t_P é o mínimo dêsse conjunto, isto é, $f(t_P) = P$. Se $t_P = b$, nada há a demonstrar. Suponhamos, então, que $t_P \neq b$. Como f é uniformemente contínua em $[a,b]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo t de $[a,b]$,

$$|t - t_P| < \delta \quad \text{implica} \quad \| f(t) - f(t_P) \| < \varepsilon .$$

Mas, pela definição de t_P, dado $\delta > 0$, existe $t < t_P + \delta$ tal que $f(t) = P$. Portanto, $\| P - f(t_P) \| < \varepsilon$ //.

Seja f uma função contínua de $[a,b]$ em R^n. Vamos definir uma ordem no conjunto $f([a,b])$. Dados dois pontos P e Q de $f([a,b])$, sejam t_P e t_Q os mínimos dos conjuntos dos t de $[a,b]$ tais que $f(t) = P$ e $f(t) = Q$, respectivamente. Dizemos que P precede Q e denotamos por $P \leqslant_f Q$ se e sòmente se $t_P \leq t_Q$. É claro que esta relação é uma relação de ordem total em $f([a,b])$.

Proposição 1.2 Sejam $f: [a,b] \longrightarrow R^n$ e $g: [c,d] \longrightarrow R^n$ duas funções Lebesgue-equivalentes. Então, para todo par de pontos P e Q do gráfico de $[f]$,

$$P \leqslant_f Q \quad \text{se e sòmente se} \quad P \leqslant_g Q .$$

Dem. Seja h uma função de $[c,d]$ em R, com $h(c) = a$, $h(d) = b$, contínua e estritamente crescente tal que $g = f \circ h$. Sejam t_P e t_Q como antes. Então, $h^{-1}(t_P) = \min\{\tau \in [c,d]$ tais que $g(\tau) = P\}$ e $h^{-1}(t_Q) = \min\{\tau \in [c,d]$ tais que $g(\tau) = Q\}$. Portanto,

$P \leqslant_f Q$ se e só se $t_P \leq t_Q$ se e só se $h^{-1}(t_P) \leq h^{-1}(t_Q)$ se e só se $P \leqslant_g Q$. //

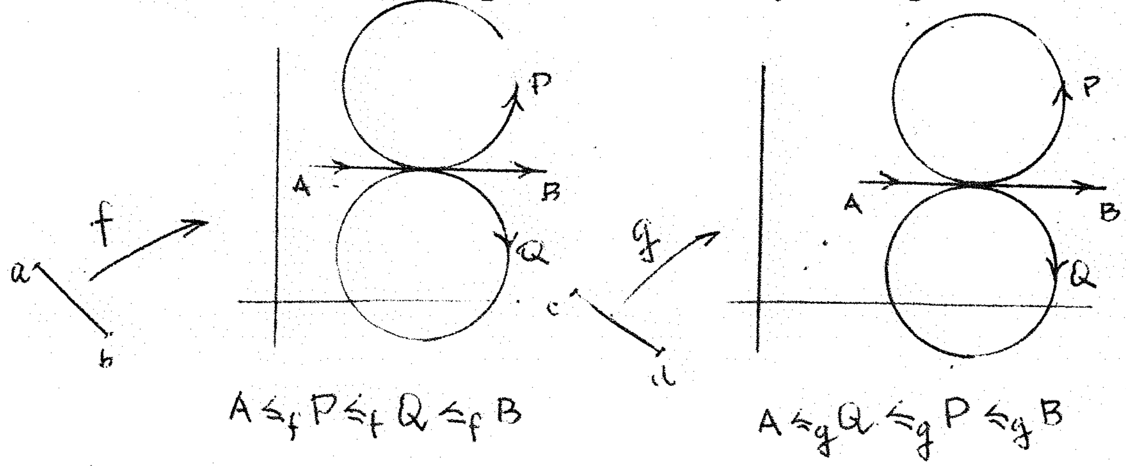
Podemos, então, definir uma ordem total no gráfico de uma curva $[f]$, usando-se a ordem $\leqslant_f$; o que é afirmado na Proposição anterior é que esta ordem não depende da particular representação f escolhida.

A proposição 1.2 ainda nos permite dar um exemplo de duas funções contínuas f, de $[a,b]$ em R^n, e g, de $[c,d]$ em R^n tais que

1) $f(a) = g(c)$, $f(b) = g(d)$

2) $f([a,b]) = g([c,d])$

mas que não são Lebesgue-equivalentes. Veja a figura abaixo.



2. Curva de Fréchet

Sejam dadas duas funções f, de $[a,b]$ em R^n, e g, de $[c,d]$ em R^n, contínuas. Dizemos que f é Fréchet-equivalente a g se, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função h_ε de $[c,d]$ em R tal que

1) $h_\varepsilon(c) = a$, $h_\varepsilon(d) = b$

2) h_ε é contínua e estritamente crescente

3) $\| f(h_\varepsilon(t)) - g(t) \| < \varepsilon$ para todo t em $[c,d]$.

Verifiquemos que valem as propriedades

Reflexiva : Seja f de $[a,b]$ em R^n contínua. Dado $\varepsilon > 0$, seja h_ε de $[a,b]$ em R, definida por $h(t) = t$. Tem-se que $h_\varepsilon(a)= a$, $h_\varepsilon(b)=b$, h é contínua e estritamente crescente. Além disso, para todo t em $[a,b]$,

$$\| f(h_\varepsilon(t)) - f(t) \| = \| f(t) - f(t) \| = 0$$

Portanto, f é Fréchet-equivalente a si mesma.

<u>Simétrica</u> : Suponha que a função f de $[a,b]$ em R^n seja Fréchet-equivalente à função g de $[c,d]$ em R^n. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função h_ε de $[c,d]$ em R que satisfaz 1),2) e 3). Seja h_ε^{-1}, de $[a,b]$ em R a função inversa de h_ε. Tem-se que $h_\varepsilon^{-1}(a) = c$, $h_\varepsilon^{-1}(b)=d$, h_ε^{-1} é contínua e estritamente crescente. Seja $\tau = h_\varepsilon(t)$. Então de 3), segue-se que

$$\| f(\tau) - g(h_\varepsilon^{-1}(\tau)) \| < \varepsilon \quad \text{para todo } \tau \text{ em } [a,b] .$$

Portanto, g é Fréchet-equivalente a f .

<u>Transitiva</u> : Sejam f_1, f_2, f_3 funções contínuas, respectivamente, de $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$ em R^n. Suponha que f_1 e f_2 são Fréchet-equivalentes e f_2 e f_3 também. Dado $\varepsilon > 0$, existem funções h_ε de $[a_2,b_2]$ em R e k_ε de $[a_2,b_2]$ em R, contínuas estritamente crescentes com

$h_\varepsilon(a_2)=a_1$, $h_\varepsilon(b_2)=b_1$, $k_\varepsilon(a_2)=a_3$, $k_\varepsilon(b_2)=b_3$ tais que

$$\| f_1(h_\varepsilon(t) - f_2(t) \| < \varepsilon/2 \quad \text{para todo } t \text{ em } [a_2,b_2]$$

$$\| f_2(t) - f_3(k_\varepsilon(t))\| < \varepsilon/2 \quad \text{para todo } t \text{ em } [a_2,b_2]$$

Daí $\| f_1(h_\varepsilon(t)) - f_3(k_\varepsilon(t)) \| < \varepsilon$ " " " " "

A composta $k_\varepsilon o h_\varepsilon^{-1}$ de $[a_1,b_1]$ em R é contínua, estritamente crescente , $k_\varepsilon o h_\varepsilon^{-1}(a_1)=a_3$, $k_\varepsilon o h_\varepsilon^{-1}(b_1)=b_3$. Seja $\tau=h_\varepsilon(t)$. Então $\| f_1(\tau) - f_3(k_\varepsilon o\, h_\varepsilon^{-1}(\tau))\| < \varepsilon$ pra todo τ em $[a_1,b_1]$

Portanto, f_1 e f_3 são Fréchet-equivalentes.

Esta relação é, então, uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas, definidas em intervalos compactos de R, com valores vetoriais em R^n. As classes de equivalência são denominadas <u>curvas de Fréchet</u>, situadas em R^n. Vamos denotar por $[f]$ a classe de equivalência determinada por f. Se g pertence a $[f]$, dizemos que g é uma representação da curva de Fréchet $[f]$.

Proposição 2.1 Sejam $f\colon [a,b] \longrightarrow R^n$ e $g\colon [c,d] \longrightarrow R^n$ duas funções contínuas. Se f e g são Lebesgue-equivalentes então são Fréchet-equivalentes. A recíproca é falsa.

Dem. É evidente. Vamos dar um contra-exemplo para mostrar que a recíproca é falsa. Seja $f\colon [0,1] \longrightarrow R^n$ definida por $f(\tau) = (f^1(\tau),0,\ldots,0)$ onde $f^1(\tau) = \tau$. Seja $g\colon [0,1] \longrightarrow R^n$ definida por $g(t) = (g^1(t),0,\ldots,0)$ onde

$$g^1(t) = \begin{cases} \dfrac{3t}{2} & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{3} \\ 1/2 & \text{se } \dfrac{1}{3} \leq t \leq \dfrac{2}{3} \\ 1 + 3(t-1)/2 & \text{se } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

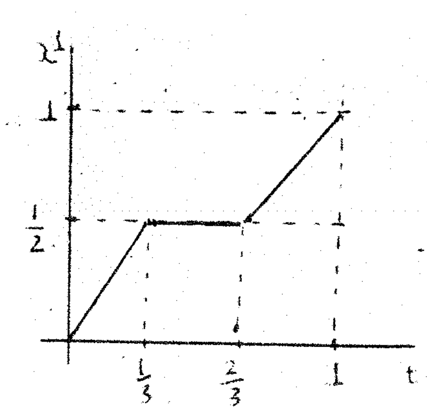
É claro que f e g não são Lebesgue-equivalentes. Para $n \geq 4$, seja $h_n\colon [0,1] \longrightarrow R$ definida por

$$h_n(t) = \begin{cases} 3t/2 & \text{se } 0 \leq t \leq 1/3 - 1/n \\ 1 + 3(t-1)/2 & \text{se } 2/3 + 1/n \leq t \leq 1 \\ 1/2 + 9(t-1/2)/n+6 & \text{se } 1/3 - 1/n \leq t \leq 2/3 + 1/n \end{cases}$$

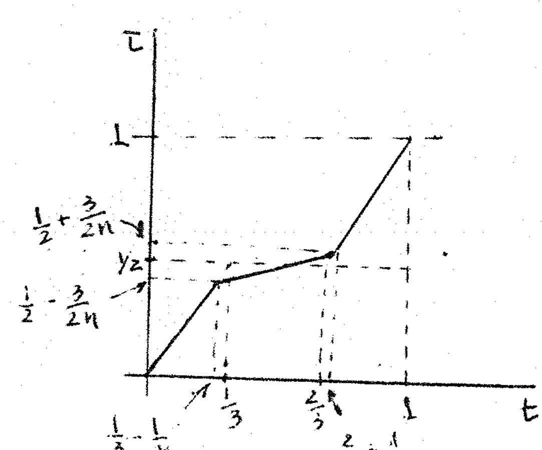
Tem-se que $h_n(0)=0$, $h_n(1) = 1$, h_n é contínua e estritamente crescente. Além disso,

$$|\, h_n(t) - g^1(t)\, | < 3/n \quad \text{para todo } t \text{ em } [0,1]$$

Portanto, $\|\, f(h_n(t)) - g(t)\, \| < 3/n$ para todo t em $[0,1]$ isto é, f e g são Fréchet-equivalentes. //



$x^1 = g^1(t)$



$\tau = h_n(t)$

Este exemplo mostra também que podem existir curvas de Lebesgue que têm as mesmas extremidades, o mesmo gráfico e a mesma ordem no gráfico, mas que são distintas. Baseado na Proposição 2.1, podemos dizer que, num certo sentido, o conceito de curva de Fréchet é mais geral do que o de curva de Lebesgue.

O passo seguinte seria metrizar o conjunto das curvas de Fréchet. Em vez disso, preferimos dar uma nova definição de curva, menos geral que a de Lebesgue, eliminando-se assim, certas curvas "anormais" que não nos interessarão. Dessa maneira, alcançamos dois objetivos importantes: ter uma definição simples de curva e ter uma topologia no conjunto das curvas.

3. <u>Curva Paramétrica Contínua</u>

3.1 <u>Definição</u>

Dizemos que uma função contínua x , definidanum intervalo compacto $[a,b]$ de R e com valores vetoriais em R^n, é <u>light</u> se ou x não é constante em nenhum subintervalo próprio de $[a,b]$ ou x é constante em todo $[a,b]$.

Sejam dadas duas funções contínuas light x, de $[a,b]$ em R^n e y, de $[c,d]$ em R^n. Dizemos que x é equivalente a y se existe uma função h de $[c,d]$ em R tal que

1) $h(c) = a$, $h(d) = b$

2) h é contínua e estritamente crescente

3) $x(h(t)) = y(t)$ para todo t em $[c,d]$.

Esta relação é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas light, definidas em intervalos compactos de R, com valores vetoriais em R^n. Vamos chamar as classes de equivalência de <u>curvas paramétricas contínuas</u>, situadas em R^n. Se C é uma classe e x pertence a C, dizemos que x é uma <u>representação paramétrica</u> da curva C.

Observação: Se uma curva contínua C tem uma representação constante, então todas as suas representações são constantes. Neste caso, dizemos que C é uma curva degenerada.

3.2 Extremidades, gráfico e ordem no gráfico.

Repita-se o item 1.2, comas devidas modificações de nomenclatura e notação.

3.3 Distância de Fréchet

Denotemos por $\mathcal{C}$ o conjunto das curvas contínuas, situadas em R^n. Vamos agora definir uma função d de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ em R, da seguinte maneira: Dados C_1 e C_2 pertencentes a $\mathcal{C}$, seja X o conjunto das representações de C_1, definidas em $[0,1]$ e seja Y o conjunto das representações de C_2, definidas em $[0,1]$. Então, seja $d(C_1,C_2)$ o ínfimo do conjunto $\{\max\limits_{t\in[0,1]}||x(t) - y(t)||$ tal que $x\in X$, $y\in Y\}$.

Proposição 3.1 Sejam x e y duas funções contínuas leves (light), de $[0,1]$ em R^n. Se h é uma função de $[0,1]$ em R contínua e estritamente crescente, com $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, então, tem-se

$$\max_{\tau}||x(\tau) - y(\tau)|| = \max_{t}||x(h(t)) - y(h(t))||.$$

Dem. $\max\limits_{t}||x(h(t)) - y(h(t))|| = \max\limits_{t}||(x - y)(h(t))|| = \max\limits_{\tau}||(x - y)(\tau)|| = \max\limits_{\tau}|| x(\tau) - y(\tau) ||$. //

Vamos definir uma outra função δ de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ em R: Dados C_1 e C_2 em $\mathcal{C}$, seja $\overline{x}$, de $[0,1]$ em R^n, uma representação fixada de C_1. Seja Y como antes. Então, seja $\delta(C_1,C_2)$ o ínfimo do conjunto $\{\max\limits_{t\in[0,1]}||\overline{x}(t) - y(t)||$ tal que $y\in Y\}$.

Proposição 3.2 $\delta(C_1,C_2) = d(C_1,C_2)$ para todo C_1,C_2 em $\mathcal{C}$.

Dem. $d(C_1,C_2) \leq \delta(C_1,C_2)$ pois o conjunto $\{\max||\overline{x}(t) - y(t)||$ tal que $y\in Y\}$ está contido no conjunto $\{\max||x(t) - y(t)||$ tal que $x\in X$ e $y\in Y\}$. Para mostrar que

$\delta(C_1,C_2) \leq d(C_1,C_2)$, basta mostrar que se $x \in X$ e $y \in Y$, então existe $\overline{y}$ em Y tal que $\max||x(t) - y(t)|| = \max||\overline{x}(t) - \overline{y}(t)||$. Como x é equivalente a $\overline{x}$, existe uma função h de $[0,1]$ em R contínua e estritamente crescente tal que $h(0)=0$, $h(1)=1$ e $x = \overline{x} o h$. Seja $\overline{y} = y o h^{-1}$ pertencente a Y. Então, pela proposição 3.1, $\max||x(t) - y(t)|| = \max||\overline{x}(h(t)) - y(t)|| = \max||\overline{x}(\tau) - y(h^{-1}(\tau))|| = \max||\overline{x}(\tau) - \overline{y}(\tau)||$. //

Observação: Pela proposição 3.1, sabe-se que $\delta(C_1,C_2)$ não depende da particular representação $\overline{x}$ escolhida.

<u>Proposição</u> 3.3 A função d de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ em R é uma métrica em $\mathcal{C}$.

<u>Dem</u>. Sejam C_1 e C_2 duas curvas contínuas. É claro que $d(C_1,C_2) \geq 0$ e que $C_1 = C_2$ implica $d(C_1,C_2)=0$. Vamos mostrar que $d(C_1,C_2) = 0$ implica $C_1 = C_2$.

i) Se uma das curvas, digamos C_1, é degenerada (seja P o único ponto de seu gráfico), tem-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma representação y de $[0,1]$ em R^n de C_2 tal que $\max|| P - y(t)|| < \varepsilon$. Isto significa que os pontos do gráfico de C_2 estão arbitráriamente próximos do ponto P e dáí concluimos que o gráfico de C_2 coincide com o de C_1. Segue, portanto, que $C_1 = C_2$.

ii) Suponhamos que nenhuma das curvas seja degenerada. Sejam $\overline{x}$ de $[0,1]$ em R^n e $\overline{y}$ de $[0,1]$ em R^n representações de C_1 e C_2 , respectivamente. Se $\max||\overline{x}(t) - \overline{y}(t)|| = 0$, segue-se que $\overline{x} = \overline{y}$ e portanto $C_1=C_2$. Suponha que não aconteça isso. Então, vamos mostrar que existe uma função h de $[0,1]$ em R, contínua e estritamente crescente com $h(0) =0$, $h(1) = 1$ e $\overline{x} = \overline{y} o h$.

Seja H o conjunto das funções h de $[0,1]$ em R contínuas e estritamente crescentes com $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. Como $d(C_1,C_2)=0$, segue-se que dado n em N, existe h_n em H tal que

(1) $$\max||\overline{x}(t) - \overline{y}(h_n(t))|| < 1/n .$$

A sequência $\overline{y} o h_n$ converge, então, uniformemente para $\overline{x}$. Vamos mostrar que a sequência h_n admite uma subsequência uniformemente convergente. A seq. h_n é uniforme/ limitada, pois para todo n em N, todo t em $[0,1]$, tem-se $0 \leq h_n(t) \leq 1$. Suponha que a seq. h_n não seja equicontínua: existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo n em N, existe h_{p_n}, existe t_n, t'_n em $[0,1]$ tal que

(2) $0 < | t_n - t'_n | < 1/n$ e $| h_{p_n}(t_n) - h_{p_n}(t'_n) | \geq \varepsilon$

As seq. t_n , $h_{p_n}(t_n)$, $h_{p_n}(t'_n)$ são limitadas; podemos , então, sem perda de generalidade, supor que elas sejam convergentes:

(3) $\lim t_n = \tau_0$, $\lim h_{p_n}(t_n) = u_0$, $\lim h_{p_n}(t'_n) = u'_0$

Por (2), segue-se que

$$\lim t'_n = \tau_0 \quad \text{e} \quad | u_0 - u'_0 | \geq \varepsilon$$

Seja λ um número qualquer entre u_0 e u'_0 . Por (3), existe n_0 em N tal que para todo $n > n_0$,

$$|h_{p_n}(t_n) - u_0| < | u_0 - \lambda | \quad \text{e} \quad | h_{p_n}(t'_n) - u'_0| < |u'_0 - \lambda |$$

Como λ está em $h_{p_n}([0,1])$, existe τ_n entre t_n e t'_n tal que $h_{p_n}(\tau_n) = \lambda$.

Por (1), tem-se $||\bar{x}(\tau_n) - \bar{y}(h_{p_n}(\tau_n)|| < 1/p_n$

(4) $$||\bar{x}(\tau_n) - \bar{y}(\lambda)|| < 1/p_n$$

É claro que $\lim \tau_n = \tau_0$. Tem-se que p_n tende a ∞ quando n tende a ∞ , pois, senão, existiria algum $h_{p_{\bar{n}}}$ tal que para uma subsequência t_{n_k} da seq. t_n

$$\lim h_{p_{\bar{n}}}(t_{n_k}) = u_0 = \lim h_{p_{\bar{n}}}(t'_{n_k}) = u'_0 \quad \text{e} \quad |u_0 - u'_0| \geq \varepsilon ,$$

o que seria absurdo. Segue-se portanto, de (4), que $\bar{x}(\tau_0) = \bar{y}(\lambda)$. Então, $\bar{y}$ é constante num subintervalo, o que é uma contradição. Portanto, a seq. h_n é equicontínua.

Pelo Teorema de Ascoli, existe uma subseq. h_m da seq. h_n que converge uniforme/ para uma função h contínua , em $[0,1]$.

É claro que $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. A função h é estrita/ crescente, pois, dados t_1, t_2 em $[0,1]$, com $t_1 < t_2$, tem-se que

$h_m(t_1) < h_m(t_2)$. E daí, $h(t_1) \leqslant h(t_2)$. Supondo que $h(t_1) = h(t_2)$, como $\overline{y}(h_m(t_1))$ tende para $\overline{y}(h(t_1)) = \overline{x}(t_1)$ e $\overline{y}(h_m(t_2))$ tende para $\overline{y}(h(t_2)) = \overline{x}(t_2)$, a função $\overline{x}$ seria constante em $[t_1, t_2]$. Para cada t em $[0,1]$, $\overline{x}(t) = \lim \overline{y}(h_m(t)) = \overline{y}(h(t))$ e daí $\overline{x}$ e $\overline{y}$ são equivalentes e portanto $C_1 = C_2$.

É claro que $d(C_1, C_2) = d(C_2, C_1)$.

Para mostrar a desigualdade triangular, sejam C_1, C_2 e C_3 curvas contínuas e sejam $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$ representações, definidas em $[0,1]$ de C_1, C_2 e C_3, respectiva/. Tem-se para todo h, k em H, $\max \| \overline{x} \circ h(t) - \overline{y} \circ k(t) \| \leqslant$ $\max \| \overline{x} \circ h(t) - \overline{z}(t) \| + \max \| \overline{z}(t) - \overline{y} \circ k(t) \|$.

Portanto, $\inf \{ \max \| \overline{x} \circ h(t) - \overline{y} \circ k(t) \| \text{ tais que } h, k \in H \} \leqslant$

$\inf \{ \max \| \overline{x} \circ h(t) - \overline{z}(t) \| \text{ tais que } h \in H \} +$

$\inf \{ \max \| \overline{z}(t) - \overline{y} \circ k(t) \| \text{ tais que } k \in H \}$, isto é,

$d(C_1, C_2) \leqslant d(C_1, C_3) + d(C_3, C_2)$. //

<u>Definição</u>: a aplicação d de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ em R chama-se <u>distância de Fréchet</u>.

Dadas duas curvas contínuas C_1 e C_2, indiquemos por graph C_1 e graph C_2 os gráficos de C_1 e C_2. Seja $D_{12} = \inf \{ \|P - Q\| \text{ tal que } P \text{ está em graph} C_1 \text{ e } Q \text{ está em graph} C_2 \}$. Pela definição de distância de Fréchet, tem-se que $D_{12} \leqslant d(C_1, C_2)$. Vamos dar um exemplo em que $D_{12} < d(C_1, C_2)$. Seja $\overline{x}$, de $[0,1]$ em R^n, definida por $\overline{x}(t) = (t, 0, \ldots, 0)$ e $\overline{y}$, de $[0,1]$ em R^n, definida por $\overline{y}(t) = (0, 1 + t, \ldots, 0)$ representações, resp., de duas curvas C_1 e C_2. Tem-se que $D_{12} = 1$ e como para h em H,

$\max \| \overline{x}(t) - \overline{y}(h(t)) \| = \max (t^2 + (1 + h(t))^2)^{1/2} = 5^{1/2}$,

tem-se $d(C_1, C_2) = 5^{1/2}$.

Em geral, o cálculo efetivo da distância de Fréchet entre duas curvas contínuas é difícil.

3.4 Curva Contínua Retificável

Definição: Uma função x de $[a,b]$ em R^n é de variação limitada (BV) se existe uma constante $M>0$ tal que para toda partição finita de $[a,b]$ $P: a=u_0<u_1<\ldots<u_m=b$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{m} ||x(u_i) - x(u_{i-1})|| \leq M.$$

Neste caso, o número real

$$V(x) = \sup_P \sum_{i=1}^{m} ||x(u_i) - x(u_{i-1})|| \qquad \text{onde}$$

o sup é tomado sôbre todas as partições finitas P de $[a,b]$, chama-se a <u>variação total</u> de x .

<u>Proposição</u> 3.4 Seja $x=(x^1,\ldots,x^n)$ uma função de $[a,b]$ em R^n. Então, x é BV se e só se as funções $x^i: [a,b]$ em R $i = 1,\ldots,n$ são BV.

Dem. Ver Rudin, pg 117.

Seja x uma função de $[a,b]$ em R^n BV e seja h uma função de $[c,d]$ em R contínua e estrita/ crescente, com $h(c) = a$, $h(d) = b$. Então, a composta $x \circ h$ é BV e tem-se que $V(xoh) = V(x)$, pois h estabelece uma bijeção entre as partições de $[c,d]$ e as partições de $[a,b]$. Disto segue-se que se uma curva contínua admite uma representação BV, tôdas as suas representações são BV.

<u>Definição</u> Se uma curva contínua C tem alguma representação x de $[a,b]$ em R^n de variação limitada, dizemos que C é uma <u>curva contínua retificável</u>. Neste caso, V(x) chama-se o <u>comprimento</u> da curva C e denota-se por $l(C)$.

<u>Proposição</u> 3.5 Uma curva contínua retificável é degenerada se e só se o seu comprimento é nulo.

<u>Dem.</u> Se C é degenerada, é claro que o seu comprimento é nulo. Agora, suponha que $l(C) = 0$. Seja x, de $[a,b]$ em R^n uma repr. qualquer de C. Como, para todo u,v em $[a,b]$

$$||x(u) - x(v)|| \leq l(C) = 0$$

tem-se que x é constante e portanto C é degenerada. //

Seja C uma curva contínua retificável não-degenerada e seja x, de $[a,b]$ em R_n uma representação de C. Defina a função s de $[a,b]$ em R por

$$s(u) = \begin{cases} V(x|[a,u]) & \text{se} \quad a < u \leq b \\ 0 & \text{se} \quad u = a \end{cases}$$

É claro que $s(a) = 0$, $s(b) = l(C)$ e $s(u)$ é estritamente crescente . Além disso, $s(u)$ é contínua (para a dem. ver Rudin, pg 119). Seja θ a função inversa de s . Então $y = x \circ \theta$, de $[0,l(C)]$ em R^n é uma nova representação de C, chamada representação de C, cujo parâmetro é o comprimento de arco. Esta rep. é Lipschitziana, pois,

$$\| y(s_2) - y(s_1) \| \leq | s_2 - s_1 |$$

para todo s_1, s_2 em $[0,l(C)]$.

Seja h, de $[0,1]$ em R, definida por $h(t) = l(C).t$. Tem-se que $h(0) = 0$, $h(1) = l(C)$, h é contínua e estritamente crescente. Seja z, de $[0,1]$ em R^n, definida por $z = y \circ h$. Então z é uma nova representação de C, chamada representação standard da curva C. Esta rep. é também Lipschitziana, pois

$$\|z(t_2) - z(t_1)\| = \| y(h(t_2)) - y(h(t_1)) \| \leq$$
$$|h(t_2) - h(t_1)| = l(C) \, | t_2 - t_1 |$$

para todo t_1, t_2 em $[0,1]$.

Para completar, se C é uma curva degenerada, a sua representação definida em $[0,1]$ chama-se representação standard.

4. Teorema de Existência

Proposição 4.1 Uma sequência de curvas C_n converge para uma curva C se e só se existem uma seq. de representações x_n, de $[0,1]$ em R^n, de C_n e uma rep. x, de $[0,1]$ em R^n de C tal que x_n converge uniformemente para a função x.

Dem. Por um lado, $\lim \max\|x_n(t) - x(t)\| = 0$ implica $\lim d(C_n, C) = 0$.

Por outro lado, seja fixada uma rep. x, de $[0,1]$ em R^n de C. Para cada n em N, existe uma rep. x_n, de $[0,1]$ em R^n, de C_n tal que $\max \|x_n(t) - x(t)\| < d(C_n,C) + 1/n$

Portanto $\lim \max \|x_n(t) - x(t)\| = 0$. //

<u>Proposição</u> 4.2 Sejam x_n, de $[0,1]$ em R^n, funções contínuas de variação limitada com $V(x_n) \leq M$ e seja x, de $[0,1]$ em R^n, uma função contínua. Suponha que $x_n(t)$ tende a $x(t)$, para cada t em $[0,1]$. Então, x é de variação limitada e $V(x) \leq M$.

<u>Dem.</u> Seja $P: 0 = u_0 < u_1 < \dots < u_N = 1$ uma partição finita de $[0,1]$. Desde que $x_n(u_i)$ tende para $x(u_i)$, dado $\varepsilon > 0$, existe n_i tal que para todo $n \geq n_i$

$$\|x_n(u_i) - x(u_i)\| < \varepsilon/2N$$

Seja $\bar{n} = \max_{0 \leq i \leq N} n_i$. Então para todo i pertencendo a $\{0,1,\dots,N\}$ para todo $\varepsilon > 0$, existe $\bar{n}$ tal que para todo $n \geq \bar{n}$

$$\|x_n(u_i) - x(u_i)\| < \varepsilon/2N \quad \text{e} \quad \|x_n(u_{i-1}) - x(u_{i-1})\| < \varepsilon/2N$$

Portanto, $\|x_n(u_i) - x(u_i)\| + \|x_n(u_{i-1}) - x(u_{i-1})\| < \varepsilon/N$

$$\|x(u_i) - x(u_{i-1})\| - \|x_n(u_i) - x_n(u_{i-1})\| < \varepsilon/N$$

$$\|x_n(u_i) - x_n(u_{i-1})\| \geq \|x(u_i) - x(u_{i-1})\| - \varepsilon/N$$

$$\sum_{i=1}^{N} \|x_n(u_i) - x_n(u_{i-1})\| > \sum_{i=1}^{N} \|x(u_i) - x(u_{i-1})\| - \varepsilon$$

$$V(x_n) \geq V(x) - \varepsilon$$

$V(x) \leq V(x_n) + \varepsilon \leq M + \varepsilon$. Como ε é arbitrário, $V(x) \leq M$. //

<u>Proposição</u> 4.3 Seja G um conjunto qualquer de subintervalos I de $[0,1]$, dois a dois disjuntos. Então, existe uma função φ de $[0,1]$ em R, contínua e não-decrescente, com $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, tal que φ é constante apenas sôbre os intervalos I de G.

<u>Dem.</u> Ver Fréchet.

<u>Definição</u> Seja B um subconjunto de R^n. Dizemos que uma curva C está situada em B se o seu gráfico está contido em B.

<u>Proposição</u> 4.4 Seja B um subconjunto compacto de R^n e seja M um número real estrita/ positivo. Seja K o conjunto das curvas contínuas retificáveis C tais que

1) C está situada em B

2) $l(C) \leq M$.

Então, K é um espaço métrico compacto.

<u>Dem.</u> Para mostrar que K é compacto, basta mostrar que K é sequencial/ compacto. Seja Cn uma sequencia de curvas pertencentes a K. seja x_n, de $[0,1]$ em R_n a rep. standard de C_n. A seq. x_n é uniforme/ limitada pois para todo n em N, todo t em $[0,1]$, tem-se que $x_n(t)$ pertence a B. A seq. x_n é equicontínua pois para todo n em N, todo t_1, t_2 em $[0,1]$,

$$||x_n(t_2) - x_n(t_1)|| \leq l(C_n) \; |t_2 - t_1| \leq M \; |t_2 - t_1|$$

Pelo Teorema de Ascoli, existe uma subseq. de x_n (conservamos a notação), que converge uniforme/ para uma função x, de $[0,1]$ em R^n, contínua. Há três casos a considerar :

1º) Se x é constante, então, pela Prop. 4.1, a subseq. correspondente de curvas converge para uma curva degenerada que pertence a K.

2º) Se x não é constante em nenhum subintervalo próprio de $[0,1]$ então é rep. de uma curva contínua C. Esta curva está situada em B e pela Prop. 4.2, é retificável e $l(C) \leq M$. Portanto, a subseq. correspondente de curvas converge para uma curva C em K.

3º) Se existe um conjunto G de subintervalos I de $[0,1]$, dois a dois disjuntos, tal que x é constante em cada I de G, então, pela Prop. 4.3, existe uma função φ de $[0,1]$ em R, contínua, não-decrescente, com $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, tal que φ é constante apenas em cada I de G. Seja X, de $[0,1]$ em Rn, definida da

seguinte maneira: se $u=\varphi(t)$, então $X(u) = x(t)$.
X não é constante em nenhum subintervalo de $[0,1]$..Vamos mostrar que X é contínua, usando o seguinte resultado: A fim de que X, de $[0,1]$ em R^n seja contínua no ponto u_o de $[0,1]$ é suficiente que para toda seq. u_n em $[0,1]$ convergindo para u_o, $X(u_n)$ admita uma subseq. convergindo para $X(u_o)$ (Ver Elon Lages Lima, El. de Topologia Geral, Vol. 1, pg 159).
Seja u_n uma seq. em $[0,1]$, convergindo para u_o. A seq. $X(u_n)$ é limitada, portanto existe uma subseq. $X(u_n')$ convergente.
Para cada u_n', existe t_n' em $[0,1]$ e, daí, existe uma subseq. t'_{p_n} convergente a um número t_o. Como φ é contínua,

$$\varphi(t_o) = \lim \varphi(t'_{p_n}) = \lim u'_{p_n} = u_o \quad .$$

Como x é contínua,

$$X(u_o) = X(\varphi(t_o)) = x(t_o) = \lim x(t'_{p_n}) = \text{Lim}\, X(u'_{p_n}) \quad .$$

É claro que $X([0,1])$ está contido em B. Pela Prop. 4.2, X é de variação limitada e $V(X) \leq M$. Portanto a curva definida pela rep. X pertence a K. Seja agora $\varphi_n(t)=(1-1/n)\,\varphi(t) + t/n$ onde n pertence a N. Cada φ_n de $[0,1]$ em R é contínua, estrita/ crescente, com $\varphi_n(0)=0$, $\varphi_n(1)=1$. A seq. φ_n converge uniforme/ para φ. Seja $t=b_n(u)$ a função inversa de φ_n. A aplicação X_n de $[0,1]$ em R^n dada por $X_n(u) = x_n(b_n(u))$ é uma rep. de C_n.
Tem-se que $\max||X(\varphi_n(t)) - x_n(t)|| \leq$

$$\max||X(\varphi_n(t)) - X(\varphi(t))|| + \max||X(\varphi(t)) - x_n(t)|| =$$
$$\max||X(\varphi_n(t)) - X(\varphi(t))|| + \max||x(t) - x_n(t)||$$

Como $\max||X(\varphi_n(t)) - X(\varphi(t))||$ tende para zero e $\max||x(t) - x_n(t)||$ tende para zero, então $\max||X(\varphi_n(t)) - x_n(t)||$ tende para zero quando n tende para ∞. Sendo $u=\varphi_n(t)$,

$$||X(\varphi_n(t)) - x_n(t)|| = ||X(u) - X_n(u)||$$
$$\max||X(\varphi_n(t)) - x_n(t)|| = \max||X(u) - X_n(u)||.$$

Pela Prop. 4.1, a subseq. correspondente de curvas C_n converge para a curva C. //

Definição : Seja f uma função de X em R onde X é um espaço métrico. Dizemos que f é semicontínua inferiormente num ponto x_0 pertencente a X se para todo $\varepsilon > 0$, existe uma bola aberta $B_\delta(x_0)$ de centro x_0 e raio $\delta > 0$ tal que x pertence a $B_\delta(x_0)$ implica $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.
A função f é semicontinua inferiormente se é semicontínua inferior/ em todo ponto de X.

Proposição 4.5 Se X é um espaço métrico compacto e f é uma função de X em R semicontínua inferior/ , então existe um ponto x_0 em X tal que $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$.

Dem. Ver Kolmogórov, pg 125 .

Teorema Seja B um subconjunto compacto de R^n e seja M um número real estrita/ positivo. Seja K o conjunto das curvas contínuas retificáveis C tais que C está situada em B e $l(C) \leq M$. Se J é um funcional de K em R inferior/ semicontínua, então existe uma curva C_0 em K tal que

$$J[C_0] = \min_{C \in K} J[C]$$

Dem. Segue das Proposições 4.4 e 4.5 . //

5. Curvas de Peano

O nosso propósito neste item é mostrar que o conceito de curva contínua não é o mais apropriado para o cálculo das variações, apresentando as chamadas curvas de Peano.

5.1 Imagens de Intervalos

Um subconjunto C de R^n chama-se imagem de intervalo se existe alguma função f de $[0,1]$ em R^n contínua tal que $f([0,1]) = C$.

5.2 Conjunto diádico contínuo

Seja dada uma coleção de conjuntos não-vazios compactos V_p , V_{pq} , V_{pqr} ,... do R^n, cujos índices tomam os valores possíveis 1 e 2 , isto é, $\{V_1, V_2, V_{11}, V_{12}, V_{21}, V_{22}, \dots\}$

Suponha que para cada seq. diádica $(p,q,r,\dots)$ tenha-se

$$V_p \supset V_{pq} \supset V_{pqr} \supset \dots .$$

e que os diâmetros destes conjuntos convirjam para zero, com o crescer do número de índices. É claro então que se δ_n é o maior diâmetro dos conjuntos V^n com n índices, então δ_n tende a zero. Sabe-se que se uma seq. decrescente

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ de conjuntos compactos não-vazios de R^n é tal que os diâmetros dos A_j convergem a zero, então $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um conjunto com apenas um ponto.

Seja $\{x\} = V_p \cap V_{pq} \cap V_{pqr} \cap \dots$

O conjunto de tais pontos x

$$D = \bigcup (V_p \cap V_{pq} \cap V_{pqr} \cap \dots)$$

onde a reunião é tomada sôbre todas as sequências diádicas chama-se um <u>conjunto diádico</u> .

Os conjuntos V^n com n índices podem ser ordenados lexicografica/ . Diremos que dois conjuntos com n índices são lexicografica/vizinhos se, na ordem lexicográfica, são consecutivos. Suponha que os conjuntos de mesmo número de índices sejam tais que conjuntos lexicografica/ vizinhos se interceptem. Em outras palavras, $V_1 \cap V_2 \neq \phi$, $V_{11} \cap V_{12} \neq \phi$, $V_{12} \cap V_{21} \neq \phi$, $V_{21} \cap V_{22} \neq \phi$, etc.

Então o conjunto diádico D que vamos denotar agora por C

$$C = \bigcup (V_p \cap V_{pq} \cap V_{pqr} \cap \dots) = (\bigcup V_p) \cap (\bigcup V_{pq}) \cap (\bigcup V_{pqr}) \cap \dots$$

será chamado de <u>conjunto diádico contínuo</u> .

<u>Proposição</u> 5.1 Toda imagem de intervalo é um conjunto diádico contínuo e vice-versa.

<u>Dem.</u> i) Seja C uma imagem de intervalo e seja f uma função de $[0,1]$ em R^n tal que $f([0,1]) = C$. Sejam $T_1 = [0,1/2]$ e $T_2 = [1/2,1]$ as metades esquerda e direita de $[0,1]$, sejam T_{p1} e T_{p2} as metades esquerda e direita de T_p ; T_{pq1} e T_{pq2} as

metades esquerda e direita de T_{pq} e assim por diante.

Os conjuntos $C_p = f(T_p)$, $C_{pq} = f(T_{pq})$, ... são compactos não-vazios cujos diâmetros convergem a zero quando o número de índices cresce pois f é uniforme/ contínua em $|0,1|$.

Tem-se que $C = \bigcup C_p = \bigcup C_{pq} = \bigcup C_{pqr} = \ldots$

É claro então que C é um conjunto diádico contínuo.

ii) Seja C um conjunto diádico contínuo. Dada uma seq. diádica $(p,q,r,\ldots)$, sejam

$\{x\} = V_p \cap V_{pq} \cap V_{pqr} \cap \ldots$

$\{t\} = T_p \cap T_{pq} \cap T_{pqr} \cap \ldots$

Suponha que t possa ser obtida por duas sequências diádicas. Então nesse caso x também é obtida por estas sequências diádicas. Para exemplificar, seja $t = 1/2$. Então

$\{1/2\} = T_1 \cap T_{12} \cap T_{122} \cap \ldots = T_2 \cap T_{21} \cap T_{211} \cap \ldots$

Tem-se que $V_1 \cap V_2 \neq \phi$, $V_{12} \cap V_{21} \neq \phi$, $V_{122} \cap V_{211} \neq \phi$,etc.

Então $\mathrm{diam}(V_1 \cup V_2) \leq 2\,\delta_1$, $\mathrm{diam}(V_{12} \cup V_{21}) \leq 2\,\delta_2$, etc.

onde δ_n é o maior diâmetro dos conjuntos V^n com n índices.

Portanto $(V_1 \cup V_2) \cap (V_{12} \cup V_{21}) \cap \ldots$ é formado por apenas um ponto. Mas $(V_1 \cap V_{12} \cap V_{122} \cap \ldots) \cup (V_2 \cap V_{21} \cap V_{211} \cap \ldots)$ está contido em $(V_1 \cup V_2) \cap (V_{12} \cup V_{21}) \cap \ldots$ Daí

$V_1 \cap V_{12} \cap V_{122} \cap \ldots = V_2 \cap V_{21} \cap V_{211} \cap \ldots$

Seja f a função que a t associa x . Mostremos que f é contínua.

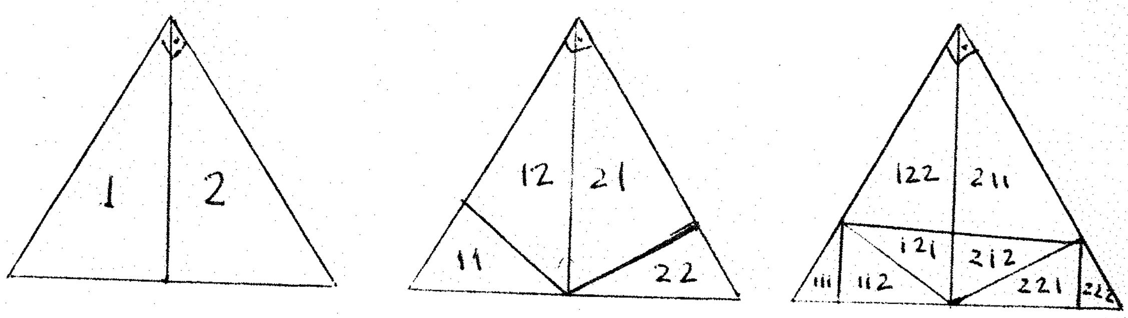
Seja τ um ponto qualquer de $[0,1]$ e $\xi = f(\tau)$.

Se $|t - \tau| < 1/2^n$, então t e τ pertencem a um mesmo subintervalo T^n com n índices ou a dois subintervalos vizinhos. Mas, então, x e ξ pertencem a um mesmo conjunto V^n com n índices ou a dois conjuntos vizinhos e então $\mathrm{dist}(x, \xi) \leq 2\,\delta_n$ onde δ_n é o maior diâmetro dos conjuntos V^n com n índices. Daí f é contínua em τ. Portanto, todo conjunto diádico contínuo é uma imagem de intervalo. //

5.3 Curvas de Peano

Uma imagem de intervalo chama-se curva de Peano se tem interior não-vazio.

Vamos dar exemplo de uma curva de Peano que preenche uma região triangular fechada C. Considere um triângulo retângulo isósceles de base L. A partir do vértice trace a altura relativa à base. Obtém-se assim duas regiões triangulares fechadas V_1 e V_2 . Repita o processo para cada V_p, obtendo-se V_{p1} , V_{p2} , V_{q1} , V_{q2} e assim por diante. Coloque índices nos nomes das regiões obtidas de modo que $V_p \supset V_{pq} \supset V_{pqr} \supset \ldots$ e que conjuntos de mesmo número de índices lexicografica/ vizinhos se interceptem.



Tem-se $C = \bigcup V_p = \bigcup V_{pq} = \bigcup V_{pqr} = \ldots$

Se V^n tem n índices, então diam $V^n = L/2^{n/2}$ e portanto C é um conjunto diádico contínuo. Pela Proposição anterior, existe uma função f de $[0,1]$ em R^n contínua tal que $f([0,1]) = C$.

A existência dessas curvas de Peano mostra que para o cálculo das variações, o conceito de curva paramétrica contínua é excessiva/ geral. Tendo em vista uma delimitação mais conveniente, iremos trabalhar com um conceito mais restrito de curva que é o de curva absolutamente contínua.

Observação: O item 5 foi baseado no livro de Hausdorff - Set Theory .

Capítulo II Curvas Paramétricas Absolutamente Contínuas

1. Definição

Definição: Uma função f de $[a,b]$ em R é <u>absolutamente contínua</u> (AC) se dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para tôda coleção finita de subintervalos abertos de $[a,b]$, dois a dois disjuntos $\{(u_1,v_1), (u_2,v_2), \ldots, (u_m,v_m)\}$

$$\sum_{i=1}^{m}(v_i-u_i)<\delta \text{ implica } \sum_{i=1}^{m}|f(v_i)-f(u_i)|<\varepsilon$$

Definição: Uma função $x=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ de $[a,b]$ em R^n é <u>absolutamente contínua</u> (AC) se as suas componentes $x^1,x^2,\ldots,x^n$ são funções de $[a,b]$ em R absolutamente contínuas.

Definição: Dizemos que uma função x de $[a,b]$ em R^n absoluta/ contínua é <u>light</u> (leve) se ou $||x'(t)||\neq 0$ para quase todo t em $[a,b]$ ou x é constante em todo $[a,b]$.

Sejam dadas duas funções absoluta/ contínuas light x, de $[a,b]$ em R^n e y, de $[c,d]$ em R^n. Dizemos que x é equivalente a y se existe uma função h de $[c,d]$ em R tal que

1) $h(c)=a$, $h(d)=b$

2) h é absoluta/ contínua e $h'(t)>0$ para quase todo $t\in[c,d]$

3) $x\circ h=y$.

<u>Proposição</u> 1.1 Se f é uma função de $[a,b]$ em R absolutamente contínua, então f é contínua e de variação limitada; existe e é finita a derivada $f'(t)$ para quase todo t em $[a,b]$ e $f'(t)$ é Lebesgue-integrável.

<u>Proposição</u> 1.2 Se h é uma função de $[a,b]$ em R absoluta/ contínua e estrita/ crescente e f é uma função de $[h(a),h(b)]$ em R AC, então a composta $f\circ h$ é AC.

<u>Proposição</u> 1.3 Suponha que g é uma função de $[a,b]$ em R Lebesgue-integrável; seja $f(t)=\int_a^t g(u)du + c$, onde c é uma constante; então, a função f de $[a,b]$ em R é AC.

<u>Proposição</u> 1.4 Se f é uma função de $[a,b]$ em R AC, então $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u)du$ para todo t em $[a,b]$.

<u>Proposição</u> 1.5 Seja f uma função de $[a,b]$ em R AC e seja E um subconjunto de $[a,b]$ tal que a medida de Lebesgue de $F = f(E)$ é nula. Então, $f'(t) = 0$ para quase todo t em E.

<u>Proposição</u> 1.6 Seja f uma função de $[a,b]$ em R monótona não-decrescente. Então f é AC se e só se

1) f é contínua e

2) f leva conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula.

<u>Proposição</u> 1.7 Se as funções h de $[a,b]$ em R, f de $[h(a),h(b)]$ em R e $f \circ h$ de $[a,b]$ em R são AC, então vale a regra da cadeia:

$$(f \circ h)'(t) = f'(h(t)).\ h'(t) \quad \text{para quase todo } t \text{ em } [a,b].$$

As demonstrações das Proposições acima podem ser vistas nos livros de Kestelman e Asplund-Bungart.

Mostremos então que a relação acima definida é de equivalência.

<u>Reflexiva:</u> Seja x uma função de $[a,b]$ em R^n AC light; a função h de $[a,b]$ em R dada por $H(t) = t$, é AC, $h(a)=a, h(b)=b$, $h'(t) = 1 > 0$ para todo t em $[a,b]$ e $x \circ h = x$. Portanto x é equivalente a si mesma.

<u>Simétrica:</u> Suponha que a função x de $[a,b]$ em R^n seja equivalente à função y de $[c,d]$ em R^n. Então existe uma função h de $[c,d]$ em R AC, com $h(c)=a$, $h(d)=b$, e $h'(t) > 0$ para quase todo t em $[c,d]$ e $x \circ h = y$. Vamos mostrar que h é inversível e sua inversa h^{-1} de $[a,b]$ em R é AC, $h^{-1}(a)=c$, $h^{-1}(b)=d$, $(h^{-1})'(\tau) > 0$ para quase todo τ em $[a,b]$ e $x = y \circ h^{-1}$.

A função h é contínua, pela Prop. 1.1. Seja t_1, t_2 em $[c,d]$, com $t_1 < t_2$. Pela Prop. 1.4, $h(t_1) = h(c) + \int_c^{t_1} h'(u)du$ e

$h(t_2) = h(c) + \int_c^{t_2} h'(u)du$. Daí $h(t_2) - h(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} h'(u)du$. Como $h'(u) \geq 0$, tem-se $h(t_2) \geq h(t_1)$. Se existisse $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ em $[c,d]$, com $\bar{t}_1 < \bar{t}_2$ e $h(\bar{t}_1) = h(\bar{t}_2)$, então h seria constante em $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$, o que seria contra a hipótese. Portanto h é estrita/ crescente ; existe então a sua inversa h^{-1} de $[a,b]$ em R e esta é contínua e estrita/ crescente. Além disso, $h^{-1}(a) = c$, $h^{-1}(b) = d$. Mostremos que h^{-1} leva conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula. Seja F contido em $[a,b]$ com medida nula. Seja $E = h^{-1}(F)$. Como $h(E)=F$, segue-se, pela Prop. 1.5, que $h'(t)=0$ para quase todo t em E. Então a medida de E é igual à medida do conjunto $\{t$ em E tais que $h'(t)=0\}$ que é igual a zero, por hipótese sôbre h.
Daí, pela Prop.1.6, h^{-1} é AC. Pela Prop. 1.7,
$(h^{-1})'(\tau) = 1/ h'(h^{-1}(\tau)) > 0$ parav quase todo τ em $[a,b]$.
É claro que $x = y \circ h^{-1}$. Portanto y é equivalente a x.

<u>Transitiva</u>: Sejam x de $[a,b]$ em R^n e y de $[c,d]$ em R^n equivalentes e y e z de $[e,f]$ em R^n eqüivalentes. Sejam h de $[c,d]$ em R e k de $[e,f]$ em R funções AC com $h(c)=a$, $h(d)=b$, $k(e)=c$, $k(f)=d$, $h' > 0$ em quase todo $[c,d]$ e $k' > 0$ em quase todo $[e,f]$, tais que $x \circ h = y$ e $y \circ k = z$. A função k é estrita/ crescente e portanto, pela Prop. 1.2, a composta $h \circ k$ é AC. Daí, $x \circ (h \circ k) = z$. É claro que $h \circ k\,(e)=a$, $h \circ k\,(f)=b$. Pela Prop. 1.7, $(h \circ k)'(t) = h'(k(t)).k'(t) > 0$ para quase todo t em $[e,f]$. Portanto x e z são equivalentes.

A relação acima definida é , então, de equivalência. As classes de equivalência serão chamadas <u>curvas paramétricas absolutamente contínuas</u>, situadas em R^n. Se C é uma classe e x pertence a C, dizemos que x é uma <u>representação paramétrica</u> da curva absoluta/ contínua C.

Seja C uma curva AC determinada pela representação x de $[a,b]$ em R^n; os pontos $x(a)$ e $x(b)$ do R^n chamam-se extremidades da curva C: $x(a)$ é o ponto inicial, $x(b)$ é o ponto final. O conjunto $x([a,b])$ do R^n chama-se o gráfico ou traço de C. A variação total $V(x)$ de x chama-se comprimento de C e denota-se por $l(C)$. Todos esses conceitos independem da particular representação escolhida.

Uma curva C diz-se degenerada se tem uma rep. constante. Tem-se que C é degenerada se e só se C tem como traço apenas um ponto se e só se o comprimento de C é nulo.

<u>Proposição</u> 1.8 Se C é uma curva Ac e x de $[a,b]$ em R^n é uma representação de C, então, tem-se que

$$l(C) = \int_a^b ||x'(u)||du$$

Dem. Decorre da seguinte proposição

<u>Proposição</u> 1.9 Seja x uma função de $[a,b]$ em R^n contínua e de variação limitada. Então, tem-se que

$$V(x) \geq \int_a^b ||x'(u)||du$$

O sinal de igualdade vale se e só se x é AC .

Dem. Seja $s(u)$ a função de $[a,b]$ em R definida por

$$s(u) = \begin{cases} V(x|[a,u]) & \text{se } a < u \leq b \\ 0 & \text{se } u=a \end{cases}$$

Sabe-se que $s(u)$ é não-decrescente, tem derivada $s'(u)$ quase sempre em $[a,b]$ e $s'(u)$ é Lebesgue-integrável.

Como $||x(u_2) - x(u_1)|| \leq s(u_2) - s(u_1)$

para todos u_1,u_2 em $[a,b]$, tem-se que

$||x'(u)|| \leq s'(u)$ para quase todo u em $[a,b]$.

Como $s(b) = V(x)$ e $s(a) = 0$,

$$V(x) = s(b) - s(a) \geq \int_a^b s'(u)du \geq \int_a^b ||x'(u)||du .$$

Suponha que $V(x) = \int_a^b ||x'(u)||du$. Então,

$s(b) - s(a) = \int_a^b s'(u)du$. Segue-se que $s(u)$ é uma função AC e portanto $x = x(u)$ é AC.

Suponha que $x = x(u)$ seja AC. Então

$$x(u_2) - x(u_1) = \int_{u_1}^{u_2} x'(u)du$$

Dada uma subdivisão de $[a,b]$ D: $a=u_0 < u_1 \ldots < u_m=b$

$$\sum_{i=1}^{m} ||x(u_i) - x(u_{i-1})|| \leq \sum_{i=1}^{m} || \int_{u_{i-1}}^{u_i} x'(u)du|| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{u_{i-1}}^{u_i} ||x'(u)||du = \int_a^b ||x'(u)||du.$$

Para a última desigualdade, ver Rudin, pg. 116.

$$V(x) = \sup \sum_{i=1}^{m} ||x(u_i) - x(u_{i-1})|| \leq \int_a^b ||x'(u)||du$$

Como já era $V(x) \geq \int_a^b ||x'(u)||du$, segue-se que

$$V(x) = \int_a^b ||x'(u)||du . \quad //$$

2. Duas representações particulares

Seja C uma curva AC não-degenerada. Seja x, de $[a,b]$ em R^n, uma representação de C. Seja $s(u) = \int_a^u ||x'(u)||dt$. Essa função s, de $[a,b]$ em R é AC, $s(a) = 0$, $s(b) = l(C)$ e $ds/du = ||x'(u)|| > 0$ para quase todo u em $[a,b]$. (para a prova, ver Graves). Seja θ a função inversa de s. Ela também é AC, $\theta(0) = a$, $\theta(l(C)) = b$ e
$d\theta/ds > 0$ para quase todo s em $[0,l(C)]$. A função $y = x \circ \theta$ de $[0,l(C)]$ em R^n é a representação de C chamada representação de C cujo parâmetro é o comprimento de arco. Ela é Lipschitziana pois $||y(s_2) - y(s_1)|| \leq |s_2 - s_1|$ para todos s_1 e s_2 em $[0,l(C)]$. Tem-se ainda que
$||y'(s)|| = 1$ para quase todo s em $[0,l(C)]$ pois
$||y'(s)|| = ||x'(\theta(s)). d\theta/ds(s)|| = ||1/ds/d\theta\ (\theta(s)) .x'(\theta(s))||$
$= ||x'(\theta(s))||/||x'(\theta(s))|| = 1$ para quase todo $s \in [0,l(C)]$.
Seja C uma curva AC não-degenerada e seja y, de $[0,l(C)]$ em R^n, sua representação cujo parâmetro é o comprimento de arco. A função h de $[0,1]$ em R dada por $h(t) = l(C).t$ é AC, $h(0)=0$, $h(1)=l(C)$ e $h'(t)=l(C)>0$ para todo $t \in [0,1]$. Portanto a função $z = y \circ h$ de $[0,1]$ em R^n é também uma representação da curva C; chama-se a representação standardda curva C.

Ela é Lipschitziana pois para todo $t_1, t_2 \in [0,1]$

$$||z(t_2) - z(t_1)|| = ||y(h(t_2)) - y(h(t_1))|| \leq$$
$$|h(t_2) - h(t_1)| = l(C)|t_2 - t_1| .$$

Tem-se ainda que $||z'(t)|| = l(C)$ para quase todo $t \in [0,1]$. pois $||z'(t)|| = ||h'(t).y'(h(t))|| = l(C)||y'(h(t))||$ $= l(C)$ para quase todo $t \in [0,1]$.

3. Problema fundamental do Cálculo das Variações

Definição: Uma função $F: R^n x R^n \longrightarrow R$ chama-se um *integrando paramétrico* se

1) F é contínua

2) F é homogênea , no seguinte sentido:

$F(x, \sigma y) = \sigma F(x,y)$ para todo $\sigma \in R$, $\sigma > 0$ e para todos $x,y \in R^n$.

Proposição 3.1 Seja C uma curva AC e $x: [0,1] \longrightarrow R^n$ sua representação standard. Seja F um integrando paramétrico. Então a função $F(x(t),x'(t)): [0,1] \longrightarrow R$ é Lebesgue-integrável. (Convenciona-se aqui colocar $(0,0,\dots,0) \in R^n$ onde não existe $x'(t)$).

Dem. Como x é contínua em $[0,1]$, podemos extendê-la ao intervalo $[-1,2]$ de modo contínuo, pondo $x(t) = x(0)$ para $t \in [-1,0]$ e $x(t) = x(1)$ para $t \in [1,2]$. Considere a sequência de funções contínuas

$F_n(t) = F(x(t), x(t+1/n) - x(t)/1/n) : [0,1] \longrightarrow R$. Tem-se que

$$||x(t + 1/n) - x(t)|| \leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} ||x'(u)||du \leq L(C)/n$$

$$\left|\left| \frac{x(t + 1/n) - x(t)}{1/n} \right|\right| \leq l(C)$$

Como F é contínua, seja M o máximo do conjunto $\{ F(x(t),y)$ tais que $t \in [0,1]$ e $||y|| \leq l(C) \}$. Tem-se que $|Fn(t)| \leq M$ para todo $n \in N$ e para todo $t \in [0,1]$. Então, para quase todo $t \in [0,1]$, $F(x(t),x'(t)) = \lim_n Fn(t)$

Portanto, pelo teorema da convergência limitada de Lebesgue

$$\int_0^1 F(x(t),x'(t))dt = \lim_n \int_0^1 F_n(t)dt < +\infty \;.//$$

<u>Proposição</u> 3,2 Seja C uma curva AC, $x: [0,1] \longrightarrow R^n$ sua representação standard e $y: [a,b] \longrightarrow R^n$ uma outra representação de C. Então, se F é um integrando paramétrico, tem-se que $F(y(t),y'(t))$ é Lebesgue-integrável e

$$\int_a^b F(y(t),y'(t))dt = \int_0^1 F(x(\tau),x'(\tau))d\tau$$

Dem. Seja $\tau = h(t): [a,b] \longrightarrow R$ AC tal que $h(a)=0, h(b)=1$ $dh/dt > 0$ quase sempre e $x \circ h = y$. Tem-se que

$dy/dt = dh/dt \cdot dx/d\tau$ para quase todo $t \in [a,b]$

Daí $F(y(t),y'(t)) = F(x(h(t)),\ dh/dt\ .\ dx/d\tau\,(h(t))\ ) =$
$dh/dt . F(x(h(t)),\ dx/d\tau\,(h(t))\ )$ para quase todo $t \in [a,b]$.

Portanto a função de t $F(y(t),y'(t))$ é Lebesgue-integrável e

$\int_a^b F(y(t),y'(t))dt = \int_a^b F(x(h(t)),x'(h(t)))\,.\ dh/dt\ .\ dt =$
$\int_a^b F(x(\tau),x'(\tau))d\tau$ .Para a última igualdade ver Graves pg 221, 223.

<u>Proposição</u> 3.3 Seja C uma curva AC. Se $x_1 : [a,b] \longrightarrow R^n$ e $x_2: [c,d] \longrightarrow R^n$ são duas representações quaisquer de C, então, para qualquer integrando paramétrico F,

$$\int_a^b F(x_1(t),x_1'(t))dt = \int_c^d F(x_2(\tau),x_2'(\tau))d\tau$$

Dem. Segue da Prop. 3.2 .//

Dado um integrando paramétrico F, podemos então definir um funcional J sôbre o conjunto das curvas absoluta/ contínuas situadas em R^n, pondo

$$J[C] = \int_a^b F(x(t),x'(t))dt$$

onde $x[a,b] \longrightarrow R^n$ é uma representação qualquer da curva C.

O problema fundamental do Cálculo das Variações na forma paramétrica é: Dado um conjunto $\mathfrak{A}$ de curvas AC e dado um integrando paramétrico F, achar uma curva $C_0 \in \mathfrak{A}$ que minimize o funcional J isto é, tal que $J[C_0] \leq J[C]$ para todo $C \in \mathfrak{A}$.

Capítulo III Curvas Generalizadas

Seja $B = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times \dots \times[a_n,b_n]$ um intervalo compacto de R^n.

Definição: Chama-se <u>representação paramétrica admissível</u> toda função $x: [a,b] \longrightarrow B$ absolutamente contínua tal que ou $\|x'(t)\| \neq 0$ para quase todo t em $[a,b]$ ou é constante em todo intervalo de definição.

Definição: Duas representações $x: [a,b] \longrightarrow B$ e $y: [c,d] \longrightarrow B$ dizem-se <u>equivalentes</u> se para todo integrando paramétrico F,

$$\int_a^b F(x(t),x'(t))dt = \int_c^d F(y(\tau),y'(\tau))d\tau$$

A relação acima definida é de equivalência; cada classe de equivalência será chamada de <u>curva elementar</u> situada em B.

Notemos que duas representações equivalentes no sentido do Capítulo II são também equivalentes neste sentido.

Seja $x:[a,b] \longrightarrow B$ uma representação constante $x(t)= x_0$. Então uma representação $y:[c,d] \longrightarrow B$ é equivalente a x se e só se y é também uma representação constante $y(\tau) = y_0$. Pois para todo integrando paramétrico F

$$\int_a^b F(x(t),x'(t))dt = \int_a^b F(x_0,0)dt = 0$$

i) se $y(\tau) = y_0$, então $\int_c^d F(y(\tau),y'(\tau))d\tau = 0$ e y é equivalente a x.

ii) se y é equivalente a x, então, para o integrando paramétrico $F(x,y) = \|y\|$, tem-se

$$\int_c^d F(y(\tau),y'(\tau))d\tau = \int_c^d \|y'(\tau)\| d\tau = \text{variação total de } y = 0$$

e daí y é uma função constante.

Vamos dar agora algumas definições e proposições da análise funcional, que usaremos logo em seguida.

Seja $S = \{ y \in R^n \mid \| y \| = 1 \}$ e seja $A = BxS$ (A é um compacto de $R^n x R^n$).

$C(A)$ é o espaço vetorial das funções $f: A \longrightarrow R$ contínuas, munido da norma do sup $\| \ \|$ e da ordem parcial $f_1 \geqslant f_2$ se e só se $f_1(x,y) \geqslant f_2(x,y)$ para todo (x,y) em A.

$C^*(A)$ é o dual de $C(A)$, isto é, o espaço vetorial dos funcionais lineares e contínuos $l: C(A) \longrightarrow R$, com a norma $\| l \| = \sup \{ |l(f)| \mid \| f \| \leqslant 1 \}$

$C^+(A)$ é o conjunto dos funcionais lineares não-negativos $l: C(A) \longrightarrow R$ ($l(f_1) \geqslant l(f_2)$ se e só se $f_1 \geqslant f_2$).

<u>Proposição</u> 1 Se l pertence a $C^*(A)$, então, para todo f em $C(A)$,

$$|l(f)| \leqslant \| l \| \| f \|$$

<u>Proposição</u> 2 Se l pertence a $C^+(A)$, então l pertence a $C^*(A)$ e $\| l \| = l(u)$ onde $u \in C(A)$ é definida por $u(x,y) = 1$ para todo (x,y) em A.

Demonstração: Para todo f em $C(A)$, com $\| f \| \leqslant 1$, tem-se $-u \leqslant f \leqslant u$. Portanto $-l(u) \leqslant l(f) \leqslant l(u)$ isto é $|l(f)| \leqslant l(u)$. Mas, então, $\sup \{ |l(f)| \mid \| f \| \leqslant 1 \} \leqslant l(u)$ e l é contínuo. E daí, $\| l \| \leqslant l(u) \leqslant \| l \| \| u \| = \| l \|$.

Definição: Diremos que uma sequencia (g_n), $g_n \in C^*(A)$, converge fracamente para $g \in C^*(A)$, se para todo f em $C(A)$,

$$\lim g_n(f) = g(f) .$$

Neste caso, diremos ainda que g é o limite fraco da sequencia (g_n).

Proposição 3 A sequencia (g_n) converge fracamente para g se e só se

1) a sequencia $(\|g_n\|)$ é limitada e

2) $\lim g_n(f) = g(f)$ para todo f de um conjunto denso em C(A).

Demonstração: Ver Banach, pg. 123.

Como C(A) é separável, vale a seguinte

Proposição 4 Toda sequencia (g_n), $g_n \in C^*(A)$, cuja correspondente sequencia das normas $(\|g_n\|)$ é limitada, tem uma subsequencia fracamente convergente.

Demonstração: Ver Banach, pg. 123 ou Kolmogorov, pg. 213.

Definição: Um funcional $l: C(A) \longrightarrow R$ é concentrado em um ponto $x_o \in B$, se para todo $f_1, f_2 \in C(A)$,

$f_1|\{x_o\}xS = f_2|\{x_o\}xS$ implica $l(f_1) = l(f_2)$.

Nosso próximo passo é identificar as curvas elementares com certos funcionais sôbre C(A).

Como todas as representações que usamos têm imagens contidas em B, vamos identificar dois integrandos paramétricos F_1 e F_2 se e só se $F_1|BxR^n = F_2|BxR^n$.

Vamos verificar agora que, com esta identificação, existe uma bijeção entre C(A) e o conjunto dos integrandos paramétricos.

1) Dada f em C(A), seja $\tilde{f}$ uma extensão contínua de f ao conjunto $R^n xS$. Seja $F: R^n xR^n \longrightarrow R$ definida por

$$F(x,y) = \|y\| \tilde{f}(x, \|y\|^{-1}y) \quad \text{se } y \neq 0$$
$$= 0 \quad \text{se } y = 0$$

Então F é um integrando paramétrico tal que $F|A = f$. A cada f em C(A) está associado, portanto, um integrando paramétrico F de modo único e esta associação é injetora. Diremos que F é o integrando paramétrico, extensão de f.

2) Dado um integrando paramétrico F, seja $f = F|A$. Tem-se que $f \in C(A)$. Dessa maneira, a cada integrando paramétrico F está associado um único f em C(A) e esta associação é injetora.

Seja C uma curva elementar situada em B e $x:[a,b] \longrightarrow B$ uma representação de C. Definamos o funcional $g: C(A) \longrightarrow R$ por

$$g(f) = \int_a^b F(x(t),x'(t))dt$$

onde F é o integrando paramétrico, extensão de f. É claro que g é linear e não-negativo. Então g é contínuo, pela Proposição 2. Tem-se ainda que

$$\|g\| = g(u) = \int_a^b U(x(t),x'(t))dt$$

e como $U(x,y) = \|y\|$

$$\|g\| = \int_a^b \|x'(t)\| dt$$

Podemos considerar então as curvas elementares como funcionais pertencentes a $C^+(A)$. Em outras palavras,

Definição: $g \in C^+(A)$ é uma <u>curva elementar</u> situada em B se existe uma representação $x: [a,b] \longrightarrow B$ tal que para cada f em C(A),

$$g(f) = \int_a^b F(x(t),x'(t))dt$$

onde F é o integrando paramétrico, extensão de f.

Neste caso, x chama-se uma <u>representação</u> de g, $\|g\|$ é o <u>comprimento</u> de g.

Se $g \neq 0$ é uma curva elementar e $x:[a,b] \longrightarrow B$ uma representação de g, seja $s(t) = \int_a^t \|x'(t)\|\,dt$; seja $\theta(s)$: $[0,\|g\|] \longrightarrow R$ a função inversa de s(t). Tem-se que a composta $y = x \circ \theta: [0,\|g\|] \longrightarrow B$ é uma outra representação de g. Então, defina $z:[0,1] \longrightarrow B$ por $z(t) = y(\|g\|t)$. Tem-se que z é também uma representação de g. Diremos que z é uma <u>representação standard</u> de g.

Propriedades de uma representação standard:

1) $\|z'(t)\| = \|g\|$ para quase todo t em $[0,1]$

2) z é Lipschitziana de constante $\|g\|$.

A propriedade 1) segue da regra da cadeia:

$\|z'(t)\| = \|x'(\tau)\| \, \|x'(\tau)\|^{-1} \|g\| = \|g\|$.

A propriedade 2) segue de

$\|z(t_2) - z(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} z'(t)dt \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|z'(t)\| dt = \|g\| \, |t_2 - t_1|$ quaisquer que sejam t_1, t_2 em $[0,1]$, com $t_1 < t_2$.

Se $g = 0$, uma representação de g definida em $[0,1]$ chama-se representação standard de g.

<u>Definição</u>: $g \in C^*(A)$ é uma <u>curva generalizada</u> situada em B, se é o limite fraco de alguma sequência (g_n) de curvas elementares situadas em B.

Capítulo IV Dois Teoremas

1. Teorema I

Seja $g \in C^*(A)$ uma curva generalizada, situada em B. Então, existem uma função $x: [0,1] \longrightarrow R^n$ Lipschitziana e um subconjunto T de $[0,1]$ com medida de Lebesgue $m(T) = 1$ tal que para todo t em T, existe um funcional $M_t \in C^+(A)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1) M_t é concentrado no ponto $x(t)$

2) $\| M_t \| = \| g \|$

3) $M_t(\varphi^i) = x'^i(t) \quad i = 1,\ldots,n$ onde $\varphi^i: A \longrightarrow R$ é dada por $\varphi^i(x,y) = y^i$

4) $g(f) = \int_0^1 M_t(f)dt$ para todo f em C(A).

Dem. Seja g uma curva generalizada. Por definição, existe uma sequencia (g_n) de curvas elementares situadas em B tal que g_n converge fracamente para g. Pela Prop. 3 do Cap. III, existe uma constante $K > 0$ tal que $\| g_n \| \leq K$ para todo n em N.

Para cada n em N, escolha uma representação standard $x_n : [0,1] \longrightarrow R^n$ de g_n que, como já vimos, é Lipschitziana. Vamos mostrar que

(1) existe uma subsequencia de (g_n) (conservaremos a mesma notação (g_n) para esta subseq. assim como para outras subsequencias que considerarmos) tal que a subseq. correspondente (x_n) converge uniformemente em $[0,1]$ para uma função $x: [0,1] \longrightarrow R^n$, que é também Lipschitziana.

Tem-se para todo n em N e para todos t_1, t_2 em $[0,1]$

$$\| x_n(t_2) - x_n(t_1) \| \leq \| g_n \| \, |t_2 - t_1|$$

$\boxed{1}$ $$\| x_n(t_2) - x_n(t_1) \| \leq K \, |t_2 - t_1|$$

Portanto a família $\{x_n\}$ é equicontínua. Como $x_n(t)$ pertence a B para todo t em $[0,1]$, para todo n em N, a família $\{x_n\}$ é uniformemente limitada. Então, pelo Teorema de Ascoli, existe uma subsequencia (x_n) que converge uniforme/ para uma função contínua que denotaremos por $x\colon [0,1] \longrightarrow R^n$.

De $\boxed{1}$, segue-se que para todos t_1, t_2 em $[0,1]$

$$\| x(t_2) - x(t_1) \| \leq K \, |t_2 - t_1| .$$

Portanto, x é Lipschitziana.

De agora em diante trabalharemos com a correspondente subsequencia (g_n).

Seja Δ um subintervalo fechado não-degenerado qualquer de $[0,1]$ e por $|\Delta|$ designemos o seu comprimento. Restringindo-se a função x_n ao intervalo Δ, seja Δg_n a curva elementar definida por

$$\Delta g_n(f) = \int_\Delta F(x_n(t), x_n'(t))dt \quad \text{para todo f em C(A).}$$

Vamos mostrar que

(2) existe uma subsequencia (g_n) da seq. obtida em (1) tal que para todo subintervalo Δ fechado não-degenerado de $[0,1]$ a subseq. correspondente (Δg_n) é fraca/ convergente para uma curva generalizada Δg.

Vamos dividir a demonstração de (2) em quatro etapas.

(2.1) Dado um subintervalo Δ fechado não-degenerado de $[0,1]$ existe uma subseq. (g_n) da seq. obtida em (1) tal que (Δg_n) é fraca/ convergente.

Para todo n em N

$$\|\Delta g_n\| = \int_\Delta \|x_n'(t)\|\, dt = \int_\Delta \|g_n\|\, dt = \|g_n\|\,|\Delta|$$

$\boxed{2}$ $$\|\Delta g_n\| \leq K\,|\Delta| \leq K$$

Portanto a seq. de números reais $(\|\Delta g_n\|)$ é limitada. Como C(A) é separável, segue-se, pela Prop. 4,Cap.III, que existe uma subsequência (Δg_n) fraca/ convergente.

Seja $\{t_k\}_{k\in N} = (0,1)\cap Q$.

Seja $\Delta_k = [0,t_k]$ para todo k em N.

(2.2) existe uma subseq. (g_n) da seq. obtida em (1) tal que para todo k em N, a subseq. correspondente de curvas elementares $(\Delta_k g_n)_n$ é fraca/ convergente.

Da seq. (g_n) obtida em (1) é possível, como foi provado em (2.1) extrair uma primeira subseq. tal que a correspondente subseq. $(\Delta_1 g_n)_n$ é fraca/ convergente. Dessa primeira subsequencia é possível extrair uma segunda subseq. tal que $(\Delta_2 g_n)_n$ seja fraca/ convergente e etc.

$$\begin{array}{lllllll}
\Delta_1: & g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots\cdots g_{1n} & \cdots \\
\Delta_2: & g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots\cdots g_{2n} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\Delta_n: & g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots\cdots g_{nn} & \cdots
\end{array}$$

A sequencia diagonal, que vamos ainda denotar por (g_n) é tal que para todo k em N, a seq. correspondente $(\Delta_k g_n)_n$ é fraca/ convergente.

Se $t \in [0,1]$, $t \neq 0$, vamos indicar por $\Delta_t = [0,t]$

(2.3) A sequencia (g_n) obtida em (2.2) é tal que para todo t em $[0,1]$, $t \neq 0$, a sequencia $(\Delta_t g_n)_n$ é fraca/ convergente.

Dada f em C(A), para cada n em N, vamos indicar por $\varphi_n(\cdot,f)$ a função de t definida por

$$\varphi_n(t,f) = \begin{cases} \Delta_t g_n(f) & \text{se } t \in (0,1] \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Observemos que para todo subintervalo Δ fechado não-degenerado de $[0,1]$, obtém-se de $\boxed{2}$

$\boxed{3}$ $|\Delta g_n(f)| \leq K \|f\| \, |\Delta|$ para todo f em C(A)

Mostremos que fixada f em C(A) a família de funções de t $\{\varphi_n(t,f)\}_n$ é equicontínua.

Temos para todos t_1, t_2 em $[0,1]$, com $t_1 < t_2$, para todo n em N

$$\varphi_n(t_2,f) - \varphi_n(t_1,f) = \Delta_{t_2} g_n(f) - \Delta_{t_1} g_n(f) = \Delta g_n(f) \quad \text{onde}$$
$$\Delta = [t_1, t_2]$$

Segue-se então de $\boxed{3}$ que para todo n em N, para todos t_1, t_2 em $[0,1]$, $t_1 < t_2$,

$$|\varphi_n(t_2,f) - \varphi_n(t_1,f)| \leq |\Delta g_n(f)| \leq K \|f\| \, |\Delta|$$
$$|\varphi_n(t_2,f) - \varphi_n(t_1,f)| \leq K \|f\| \, |t_2 - t_1|$$

o que acarreta a equicontinuidade da família $\{\varphi_n(.,f)\}_n$.

Já vimos que para cada racional t, $0 < t < 1$, a sequencia numérica $(\varphi_n(t,f))_n$ é convergente.

Mostremos que fixada f em C(A), a sequencia de funções de t $(\varphi_n(t,f))_n$ é uniforme/ convergente em $[0,1]$ (para uma função de t que denotaremos por $\varphi(t,f)$).

Para isto, vamos aplicar o critério de Cauchy.

Devido à equicontinuidade, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo n em N, para todos t_1, t_2 em $[0,1]$

$$|t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow |\varphi_n(t_2,f) - \varphi_n(t_1,f)| < \varepsilon$$

Seja k um inteiro positivo tal que $1/k < \delta$. Seja D um conjunto finito de pontos racionais de $[0,1]$, tal que para cada t em $[0,1]$, existe d em D com $|t - d| < 1/k$.

Note-se que k e D dependem apenas de ε.

Para cada d em D, a sequencia numérica $(\varphi_n(d,f))_n$ é convergente e portanto de Cauchy. Como D é finito, podemos afirmar que existe n_o em N tal que para todo d em D

$m,n > n_o$ implica $|\varphi_n(d,f) - \varphi_m(d,f)| < \varepsilon$

Portanto para todo t em $[0,1]$

$m,n > n_o$ implica $|\varphi_n(t,f) - \varphi_m(t,f)| \leq |\varphi_n(t,f) - \varphi_n(d,f)| + |\varphi_n(d,f) - \varphi_m(d,f)| + |\varphi_m(d,f) - \varphi_m(t,f)| < 3\varepsilon$

Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe n_o em N tal que para todo t em $[0,1]$

$m,n > n_o$ implica $|\varphi_n(t,f) - \varphi_m(t,f)| < \varepsilon$

Vamos denotar então por $\varphi(t,f)$ o limite uniforme da sequencia de funções de t $(\varphi_n(t,f))_n$.

Em particular, para cada f em C(A), para cada t em $(0,1]$, a sequencia numérica $\Delta_t g_n(f)$ converge para $\varphi(t,f)$.

(2.4) Seja Δ um subintervalo fechado não-degenerado de $[0,1]$ qualquer. Êle é da forma $[t_1,t_2]$ e portanto para cada f em C(A)

$$\Delta g_n(f) = \int_\Delta F(x_n(t),x_n'(t))dt = \int_{\Delta t_2} F(x_n(t),x_n'(t))dt - \int_{\Delta t_1} F(x_n(t),x_n'(t))dt = \Delta_{t_2} g_n(f) - \Delta_{t_1} g_n(f)$$

Então $\lim \Delta g_n(f) = \varphi(t_2,f) - \varphi(t_1,f)$

Portanto $(\Delta g_n)n$ é fraca/ convergente e está demonstrado (2).

Vamos agora mostrar que

(3) existe um subconjunto T de $[0,1]$ com medida = 1 tal que para todo f em C(A) a função de t $\varphi(t,f)$ tem derivada finita $\varphi'(t,f)$ em cada ponto t de T.

Primeiro, mostremos que dada f em C(A), a função de t $\varphi(t,f)$ é Lipschitziana.

Seja $\Delta = [t_1,t_2]$ um subintervalo qualquer de $[0,1]$. Denotemos por Δg o limite fraco da sequencia $(\Delta g_n)_n$. Tem-se para todo f em C(A)

$$\Delta_{t_i} g(f) = \lim \Delta_{t_i} g_n(f) = \lim \varphi_n(t_i,f) = \varphi(t_i,f) \quad \text{para } i=1,2.$$

Portanto,

$$\Delta g(f) = \Delta_{t_2} g(f) - \Delta_{t_1} g(f) = \varphi(t_2,f) - \varphi(t_1,f)$$

De $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$ segue-se respectivamente

$\boxed{4}$ $\|\Delta g\| \leq K\, |\Delta|$

$\boxed{5}$ $|\Delta g(f)| \leq K\, \|f\|\, |\Delta|$

Portanto $\varphi(t,f)$ é Lipschitziana.

Tem-se então que dada f em C(A) a função de t $\varphi(t,f)$ tem derivada $\varphi'(t,f)$ em todo $[0,1]$ exceto num conjunto de medida nula E_f.

Seja $\mathcal{P} \subset C(A)$ o conjunto dos polinômios com coeficientes racionais; $\mathcal{P}$ é enumerável e denso em C(A). Seja então $\mathcal{P} = \{f_k\}_{k\in N}$.

Vamos indicar por $T = (0,1) - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{f_k}$ onde E_{f_k} é o conjunto de medida nula correspondente a $\varphi(.,f_k)$. Tem-se que a medida de T é igual a 1 e para cada f_k em $\mathcal{P}$, $\varphi(.,f_k)$ é derivável em T.

Queremos mostrar que para todo t_o em T, para todo f em C(A) . existe a derivada $\varphi'(t_o,f)$.

Seja $h > 0$ tal que $(t_o - h, t_o + h)$ esteja contida em $[0,1]$.

Seja $\mu(t_o;h) = \sup\{(\varphi(t,f) - \varphi(t_o,f))/(t - t_o) \mid 0 < |t - t_o| < h\}$

$\lambda(t_o;h) = \inf\{(\varphi(t,f) - \varphi(t_o,f))/(t - t_o) \mid 0 < |t - t_o| < h\}$

$\overline{D}\,\varphi(t_o;f) = \lim\limits_{h\to 0} \mu(t_o;h)$

$\underline{D}\,\varphi(t_o;f) = \lim\limits_{h\to 0} \lambda(t_o;h)$

Vamos mostrar que $\overline{D}\,\varphi(t_o;f) - \underline{D}\,\varphi(t_o;f) = 0$

Seja $\Delta = \begin{cases} [t_o,t] & \text{caso } t > t_o \\ [t,t_o] & \text{caso } t < t_o \end{cases}$

Se $t > t_o$, $(\varphi(t,f) - \varphi(t_o,f))/(t - t_o) = \Delta g(f)\, /\, |\Delta|$

Se $t < t_o$, $(\varphi(t,f) - \varphi(t_o,f))/(t - t_o) = (-\Delta g(f))/(-|\Delta|) = \Delta g(f)/|\Delta|$

$\lambda(t_o;h) = \inf\{\Delta g(f)/|\Delta| \mid |\Delta| < h\}$

$\mu(t_o;h) = \sup\{\Delta g(f)/|\Delta| \mid |\Delta| < h\}$

Da linearidade de Δg, tem-se que

$$\Delta g(f)/|\Delta| = \Delta g(f_k)/|\Delta| + \Delta g(f - f_k)/|\Delta| \quad \text{para } f_k \in \mathcal{P}$$

De [5] vem que

$$|\Delta g(f - f_k)| / |\Delta| \leq K \|f - f_k\|$$

Portanto

$$\lim_{h\to 0} \mu(t_o;h) - \lim_{h\to 0} \lambda(t_o;h) = \lim_{h\to 0} \Big\{ \sup_{|\Delta|<h} \Delta g(f)/|\Delta| - \inf_{|\Delta|<h} \Delta g(f)/|\Delta| \Big\} \leq \lim \Big\{ \sup_{|\Delta|<h} \Delta g(f_k)/|\Delta| + \sup_{|\Delta|<h} \Delta g(f-f_k)/|\Delta|$$
$$- \inf_{|\Delta|<h} \Delta g(f_k)/|\Delta| - \inf_{|\Delta|<h} \Delta g(f - f_k)/|\Delta| \Big\} =$$
$$= \lim \Big\{ \sup_{|\Delta|<h} \Delta g(f - f_k)/|\Delta| - \inf_{|\Delta|<h} \Delta g(f - f_k)/|\Delta| \Big\}$$

(pois para f_k em $\mathcal{P}$, existe $\varphi'(t_o, f_k)$)

$$\leq K \|f - f_k\| + K \|f - f_k\| = 2K \|f - f_k\|$$

Como $\mathcal{P}$ é denso em C(A), para todo f em C(A), dado $\varepsilon > 0$ existe f_k (que não depende de h) tal que $2K \|f - f_k\| < \varepsilon$

Portanto $\overline{D}\varphi(t_o,f) - \underline{D}\varphi(t_o,f) = 0$ e daí existe $\varphi'(t_o,f)$.

Está demonstrado (3).

Dado t em T, seja $M_t: C(A) \to R$ definido por

$M_t(f) = \varphi'(t,f)$ para f em C(A).

Para t em $[0,1] - T$, seja $M_t(f) = 0$.

Tem-se então para cada f em C(A)

$$\int_0^1 M_t(f)dt = \int_0^1 \varphi'(t,f)dt = \varphi(1,f) - \varphi(0,f) = g(f)$$

Mostremos que para cada t_o em T, M_{t_o} é linear.

Δg é linear. Portanto,

$$M_{t_o}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \lim_{|\Delta|\to 0} \Delta g(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)/|\Delta| = \alpha_1 M_{t_o}(f_1) + \alpha_2 M_{t_o}(f_2).$$

M_{t_o} é não-negativo, pois, sendo Δg não-negativo, $f \geq 0$ implica $M_{t_o}(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} \Delta g(f)/|\Delta| \geq 0$.

Segue-se que M_t pertence a $C^+(A)$ para todo t em T.

Mostremos que $\|M_{t_o}\| = \|g\|$ para todo t_o em T.

Como $\|\Delta g_n\| = \|g_n\| |\Delta|$ e $\Delta g_n(u) \longrightarrow \Delta g(u) = \|\Delta g\|$

tem-se $\|\Delta g\| = \|g\| \cdot |\Delta|$. Mas $\|\Delta g\| = \Delta g(u)$ e

$\|M_{t_o}\| = M_{t_o}(u) = \lim_{|\Delta|\to 0} \Delta g(u)/|\Delta| = \|g\|$

Mostremos que $M_t(\varphi^i) = x'^i(t)$ para todo t em T.

Se $\Delta = [t_o, t]$, $\Delta g(\varphi^i) = \lim_n \Delta g_n(\varphi^i) = \lim_n \int_\Delta \varphi^i(x_n(t), x_n'(t))dt =$

$\lim_n \int_\Delta x_n^{i\,\prime}(t)dt = \lim_n (x_n^i(t) - x_n^i(t_o)) = x^i(t) - x^i(t_o)$

$M_{t_o}(\varphi^i) = \lim_{|\Delta|\to 0} \Delta g(\varphi^i)/|\Delta| = \lim_{t\to t_o} (x^i(t) - x^i(t_o))/(t - t_o) = x^{i\,\prime}(t_o)$

Vamos mostrar que M_t é concentrado em x(t).

Seja $t_o \in T$, $\rho \in R$, $\rho > 0$. Seja $B(x(t_o),\rho)$ a bola aberta de centro $x(t_o)$ e raio ρ.

Como x(t) é contínua em t_o, existe um subintervalo $\Delta(\rho)$ de $[0,1]$, contendo t_o tal que $t \in \Delta(\rho) \Rightarrow \|x(t) - x(t_o)\| < \rho/2$.

Como a sequencia (x_n) converge uniformemente para x em $[0,1]$, existe n_o em N tal que para todo $n > n_o$, para todo t em $[0,1]$, tem-se que $\|x_n(t) - x(t)\| < \rho/2$.

Daí segue-se que para todo $n > n_o$, para t em $\Delta(\rho)$, tem-se $\|x_n(t) - x(t_o)\| < \rho$ isto é $x_n(t) \in B(x(t_o),\rho)$.

Concluimos que dado $\rho > 0$, existe n_o em N, existe $\Delta(\rho) \subset [0,1]$ tal que, para todo subintervalo Δ contido em $\Delta(\rho)$ e contendo t_o e para todo $n > n_o$, tem-se

$x_n(t) \in B(x(t_o),\rho)$ para todo t em Δ.

Para $n > n_o$ e para Δ subintervalo de $\Delta(\rho)$, tem-se

$|\Delta g_n(f)| = |\int_\Delta F(x_n(t), x_n'(t))dt| \leq$

$|\Delta| \cdot \sup\{|F(x,y)| \mid x \in \overline{B(x(t_o),\rho)} \text{ e } \|y\| \leq K\}$

Mas para $0 \neq \|y\| \leq K$ tem-se

$|F(x,y)| = \|y\| \, |f(x, y/\|y\|)| \leq K|f(x, y/\|y\|)|$

Denotando-se

$\|f\|_\rho = \sup\{|f(x,z)| \mid x \in \overline{B(x(t_o),\rho)} \text{ e } \|z\| = 1\}$

vem que

$\sup\{|F(x,y)| \mid x \in \overline{B(x(t_o),\rho)} \text{ e } \|y\| \leq K\} \leq K\|f\|_\rho$

Portanto $|\Delta g_n(f)| \leq K \|f\|_\rho |\Delta|$

Daí $|\Delta g(f)| \leq K \|f\|_\rho |\Delta|$ e $|M_{t_o}(f)| = \left| \lim_{|\Delta| \to 0} \Delta g(f)/|\Delta| \right| \leq K \|f\|_\rho$

Como a desigualdade acima vale para todo $\rho > 0$

$|M_{t_o}(f)| \leq K \|f\|_0$ onde

$\|f\|_0 = \sup \{ |f(x(t_o),z)| \mid \|z\| = 1 \}$

Seja $f \in C(A)$ tal que $f|\{x(t_o)\} xS \equiv 0$

$|M_{t_o}(f)| \leq K \|f\|_0 = 0$. Como M_{t_o} é linear, segue-se (Ver McShane) que M_{t_o} tem suporte $\{x(t_o)\}xS$, isto é, M_{t_o} é concentrado em $x(t_o)$. Está demonstrado o Teorema I.

2. Teorema II

Suponha que existam

a) uma função $x: [0,1] \longrightarrow B$ Lipschitziana

b) um subconjunto T de $[0,1]$ de medida de Lebesgue 1

c) uma família de funcionais $M_t: C(A) \longrightarrow R$, $t \in T$, lineares e não-negativos tais que

1) para cada $t \in T$, existe a derivada $x'(t)$

2) para cada $t \in T$, M_t é concentrado no ponto $x(t)$

3) para cada $t \in T$, $M_t(\Psi^i) = x^{i\prime}(t)$, $i=1,\ldots,n$ onde $\Psi^i: A \longrightarrow R$ é dada por $\Psi^i(x,y) = y^i$

4) para cada $t \in T$, $\|M_t\| = K$, onde K é uma constante > 0

5) para cada $f \in C(A)$, a função de t $M_t(f): T \longrightarrow R$ é Lebesgue-mensurável.

Então, o funcional $g: C(A) \longrightarrow R$, definido por

$g(f) = \int_T M_t(f)dt$ é uma curva generalizada.

Observação: Convencionamos pôr $M_t = 0$ para todo $t \in [0,1] - T$.

Vamos dividir o Teorema II em vários lemas.

Lema 1 Nas hipóteses do Teorema II, tem-se que para cada f em C(A), existe e é finita a integral $\int_T M_t(f)dt$.

Demonstração: Fixado f em C(A), decorre da hipótese 4 que, para todo t em T, $|M_t(f)| \leq K \|f\|$

E daí, a função $M_t(f)$: $T \longrightarrow R$ é limitada. Como, pela hipótese 5, ela é Lebesgue-mensurável, ela é Lebesgue-integrável.

Lema 2 Nas hipóteses do Teorema II, o funcional $g : C(A) \longrightarrow R$ é linear, não-negativo e tem norma $\|g\| = K$.

Demonstração: É claro que g é linear e não-negativo. $\|g\| = g(u) = \int_T M_t(u)dt = \int_T Kdt = K$, onde $u: A \longrightarrow R$ é dada por $u(x,y) = 1$.

Lema 3 Nas hipóteses do Teorema II, se Δ é um subintervalo qualquer de $[0,1]$ de comprimento $|\Delta|$, então, para cada f em C(A),

$$\left|\int_\Delta M_t(f)dt\right| \leq |\Delta| K \sup\left\{ |f(x(t),y)| \;\middle|\; t \in \Delta,\ y \in S \right\}.$$

Demonstração: Seja $t_o \in \Delta \cap T$. O funcional M_{t_o} é linear, não-negativo e, pela hipótese 2, é concentrado no ponto $x(t_o)$, isto é, M_{t_o} tem suporte $\{x(t_o)\} x S$. Portanto, para cada f em C(A),

$$|M_{t_o}(f)| \leq \|M_{t_o}\| \sup\left\{ |f(x(t_o),y)| \;\middle|\; y \in S \right\}$$

$$|M_{t_o}(f)| \leq K \sup\left\{ |f(x(t_o),y)| \;\middle|\; y \in S \right\} \qquad \text{(Ver McShane)}$$

$$\left|\int_\Delta M_t(f)dt\right| \leq |\Delta| \sup\left\{ |M_t(f)| \;\middle|\; t \in \Delta \right\} \leq$$

$$\leq |\Delta| K \sup\left\{ |f(x(t),y)| \;\middle|\; t \in \Delta,\ y \in S \right\}.$$

Lema 4 Nas hipóteses do Teorema II, para cada t em T, existe uma extensão linear não-negativa $\overline{M}_t$ de M_t a um subespaço vetorial $\mathfrak{D}$ de B(A) (B(A) é o espaço vetorial das funções f: $A \longrightarrow R$ limitadas), que contém C(A) e também as funções f(x,y) que são contínuas em x e escadas em y de modo que as propriedades 2,4 e 5 sejam ainda válidas.

Demonstração: Ver Botts, pgs. 389-391.

O funcional $\overline{g}:\mathcal{D} \longrightarrow R$ definido por $\overline{g}(f) = \int_T \overline{M}_t(f)dt$ é uma extensão linear não-negativa de g. Então, os Lemas 1 , 2 e 3 continuam válidos trocando-se M_t por $\overline{M}_t$, g por $\overline{g}$ e C(A) por $\mathcal{D}$.

Dado n em N, vamos dividir S em N=N(n) partes S_1, $S_2,\ldots,S_N$, dois a dois disjuntos, com $\bigcup_{i=1}^{N} S_i = S$, de modo que

$$\text{diam } S_i \leq 1/n \qquad i = 1,\ldots,N$$

Seja y_i um ponto de S_i, $i=1,\ldots,N$. Dado f em C(A), seja f_n: $A \longrightarrow R$ definida por $f_n(x,y) = f(x,y_i)$ para $y \in S^i$, $x \in B$.

<u>Lema 5</u> A sequencia de funções $(f_n)_n$ converge uniformemente em A para f.

Demonstração: A função f é uniformemente contínua em A: dado $\varepsilon > 0$, existe n_o em N tal que para todos $y,\bar{y}$ em S e para todo x em B,

$\|\bar{y} - y\| < 1/n_o$ implica $|f(x,\bar{y}) - f(x,y)| < \varepsilon$

Seja $n > n_o$. Então, para cada y em S, existe S_i que contém y e $\|y - y_i\| \leq 1/n < 1/n_o$, onde y_i é um ponto de S_i. Portanto,

$|f(x,y_i) - f(x,y)| < \varepsilon$

$|f_n(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon$

Daí, dado $\varepsilon > 0$, existe n_o em N tal que para todo y em S e para todo x em B,

$n > n_o$ implica $|f_n(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon$

Seja $M_{t,n}$: $C(A) \longrightarrow R$ definido por $M_{t,n}(f) = \overline{M}_t(f_n)$. $M_{t,n}$ é linear, não-negativo e para cada f em C(A)

$|M_{t,n}(f)| = |\overline{M}_t(f_n)| \leq K \sup\{|f_n(x(t),y)| \mid y \in S\}$

$|M_{t,n}(f)| \leq K \max\{|f(x(t),y_i)| \mid 1 \leq i \leq N\}$

Do Lema 5 segue-se que

$\lim_n M_{t,n}(f) = \lim_n \overline{M}_t(f_n) = \overline{M}_t(f) = M_t(f)$.

<u>Lema 6</u> Dado f em C(A), a sequencia de funções de t $(M_{t,n}(f))_n$ converge uniformemente para $M_t(f)$ em T.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe n_o em N tal que para todo t em T,

$n > n_o$ implica $|M_{t,n}(f) - M_t(f)| = |\overline{M}_t(f_n) - \overline{M}_t(f)| =$
$|\overline{M}_t(f_n - f)| \leq \|\overline{M}_t\| \sup\{|f_n(x(t),y) - f(x(t),y)| \mid y \in S\} \leq K\varepsilon$
A última desigualdade segue do Lema 5.

Dado n em N, seja $\psi_i: A \to R$ $i=1,\ldots,N$ a função característica de BxS_i.

Seja $b_i: T \to R$ $i=1,\ldots,N$ definida por

$b_i(t) = \overline{M}_t(\psi_i)$. Tem-se então que b_i é Lebesgue-integrável, $b_i(t) \geq 0$ para todo t em T e

$\sum_{i=1}^{N} b_i(t) = K$ para todo t em T pois
$\sum_{i=1}^{N} b_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \overline{M}_t(\psi_i) = \overline{M}_t(\sum_{i=1}^{N} \psi_i) = \overline{M}_t(u) = \|\overline{M}_t\| = \|M_t\| = K$
Como b_i é Lebesgue-integrável, dado $\varepsilon = 1/Nn > 0$, existe uma função escada $a_i: [0,1] \to R$ tal que

$$\int_T |a_i(t) - b_i(t)|dt < 1/Nn$$

(ver Williamson, J.H.- Lebesgue integration, Holt, Rinehart and Winston, N.York, 1 962, pg. 66)

Pode-se ainda escolher as funções a_i de modo que $a_i(t) \geq 0$ para todo t em $[0,1]$ e $\sum_{i=1}^{N} a_i(t) = K$ para todo $t \in T$.

Fixados t em T, n em N, tem-se para cada f em C(A)
$M_{t,n}(f) = \overline{M}_t(f_n(x(t),y)) = \overline{M}_t\left[\sum_{i=1}^{N} f(x(t),y_i)\psi_i(x(t),y)\right] =$
$\sum_{i=1}^{N} f(x(t),y_i)\overline{M}_t(\psi_i(x(t),y)) = \sum_{i=1}^{N} b_i(t)f(x(t),y_i)$

<u>Lema 7</u> Para cada f em C(A), a sequencia de funções de t $\left(\int_0^t \sum_{i=1}^{N(n)} a_i(\tau)f(x(\tau),y_i)d\tau\right)_n$ converge uniformemente em $[0,1]$ para $\int_0^t M_\tau(f)d\tau$.

Demonstração: $\left|\int_0^t \left[\sum_{i=1}^{N} a_i(\tau)f(x(\tau),y_i) - M_\tau(f)\right]d\tau\right| \leq$
$\int_0^t \left|\sum_{i=1}^{N} a_i(\tau)f(x(\tau),y_i) - \sum_{i=1}^{N} b_i(\tau)f(x(\tau),y_i)\right| d\tau +$
$\int_0^t \left|\sum_{i=1}^{N} b_i(\tau)f(x(\tau),y_i) - M_\tau(f)\right| d\tau \leq$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^t |a_i(\tau) - b_i(\tau)|\,|f(x(\tau),y_i)|\,d\tau + \int_0^t |M_{\tau,n}(f) - M_\tau(f)|\,d\tau \leq$$
$$\leq 1/n \sup\{|f(x(t),y)| \mid t\in[0,1],\ y\in S\} + \int_0^t |M_{\tau,n}(f) - M_\tau(f)|\,d\tau .$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe n_o em N tal que para todo t em $[0,1]$

$n > n_o$ implica $\left|\int_0^t \left[\sum_{i=1}^{N} a_i(\tau)f(x(\tau),y_i) - M_\tau(f)\right] d\tau\right| < \varepsilon$.

Dado n em N, sejam y_i e a_i $i=1,\ldots,N$, como antes. Vamos dividir cada intervalo em que todas as funções $a_i(t)$ são constantes em 2^n subintervalos $J(n,k)$ $k=1,\ldots,2^n$ de mesmo comprimento $|J(n,k)|$ e dividir cada $J(n,k)$ em N subintervalos $I(n,k,1),\ldots,I(n,k,N)$ de modo que para todo t em $J(n,k)$

$|I(n,k,i)| = a_i(t)/K\,|J(n,k)|$

Seja $c_i : [0,1] \to R$ $i=1,\ldots,N$ definida por

$$c_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t\in I(n,k,i) \quad k=1,\ldots,2^n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Lema 8 Dados n em N, $k\in\{1,\ldots,2^n\}$, $i\in\{1,\ldots,N\}$ tem-se que

$$\left|\int_{J(n,k)} a_i(t)/K\, f(x(t),y_i)dt - \int_{J(n,k)} c_i(t)f(x(t),y_i)dt\right| \leq$$
$$|I(n,k,i)| \sup\{|f(x(t),y_i) - f(x(t^*),y_i)| \mid t,t^*\in J(n,k)\}$$

Demonstração: $\int_{J(n,k)} a_i(t)K^{-1}f(x(t),y_i)dt$ -

$\int_{J(n,k)} c_i(t)f(x(t),y_i)dt$ =

$$|I(n,k,i)|^{-1} \int_{J(n,k)} \left\{ \int_{J(n,k)} [f(x(t),y_i) - f(x(t^*),y_i)] a_i(t)K^{-1}dt\right\} c_i(t^*)dt^*$$

pois

$$\int_{J(n,k)} [f(x(t),y_i) - f(x(t^*),y_i)]\, a_i(t)K^{-1}dt =$$
$$\int_{J(n,k)} f(x(t),y_i)a_i(t)K^{-1}dt - f(x(t^*),y_i)|I(n,k,i)|$$

e daí

$$\int_{J(n,k)} \left[\int_{J(n,k)} f(x(t),y_i)a_i(t)K^{-1}dt - f(x(t^*),y_i)|I(n,k,i)|\right] c_i(t^*)dt^*$$
$$= \left(\int_{J(n,k)} f(x(t),y_i)a_i(t)K^{-1}dt\right)|I(n,k,i)| +$$
$$- |I(n,k,i)| \left(\int_{J(n,k)} f(x(t^*),y_i)c_i(t^*)dt^*\right)$$

Portanto $\left|\int_{J(n,k)} a_i(t)K^{-1}f(x(t),y_i)dt - \int_{J(n,k)} c_i(t)f(x(t),y_i)dt\right| \leq$

$$|I(n,k,i)|^{-1}|I(n,k,i)|\,|I(n,k,i)| \sup_{t,t^*\in J(n,k)} |f(x(t),y_i) - f(x(t^*),y_i)|$$

Lema 9 Seja $\Delta = \bigcup_K J(n,k)$ onde k percorre um subconjunto de $\{1,2,\ldots,2^n\}$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_\Delta \left[\sum_{i=1}^{N(n)} a_i(t)K^{-1}f(x(t),y_i) - \sum_{i=1}^{N(n)} c_i(t)f(x(t),y_i)\right]dt \right| = 0$$

Demonstração: $\int_\Delta = \sum_K \int_{J(n,k)}$

$$\left| \int_\Delta \left[\sum_{i=1}^{N} a_i(t)K^{-1}f(x(t),y_i) - \sum_{i=1}^{N} c_i(t)f(x(t),y_i)\right]dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_K \sum_{i=1}^{N} |I(n,k,i)| \sup \{ | f(x(t),y_i) - f(x(t^*),y_i)| \mid t,t^* \in J(n,k)\}$$

$$\leq |\Delta| \sup \{ | f(x(t),y) - f(x(t^*),y)| \mid y \in S, |t - t^*| \leq 2^{-n} \}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\substack{y\in S \\ |t-t^*|\leq 2^{-n}}} | f(x(t),y) - f(x(t^*),y)| = 0$

segue-se o Lema 9.

Se $\Delta = [0,t]$ é um subintervalo qualquer de $[0,1]$, então

$$\lim \left| \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{N} a_i(t)K^{-1}f(x(t),y_i) - \sum_{i=1}^{N} c_i(t)f(x(t),y_i)\right]dt \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \int_0^{t_n} \left[\sum_{i=1}^{N} a_i(t)K^{-1}f(x(t),y_i) - \sum_{i=1}^{N} c_i(t)f(x(t),y_i)\right]dt \right|$$

$$\leq \lim |t^n| \sup_{\substack{y\in S \\ |\bar{t}-t^*|\leq 2^{-n}}} | f(x(\bar{t}),y) - f(x(t^*),y)| = t \cdot 0 = 0$$

Tem-se então que a sequencia de funções de t

$$\left(\left| \int_0^t \sum_{i=1}^{N(n)} a_i(t)K^{-1}f(x(t),y_i)dt - \int_0^t \sum_{i=1}^{N(n)} c_i(t)f(x(t),y_i)dt \right| \right)_n$$

converge uniformemente para a função nula em $[0,1]$. Em face do Lema 7, segue-se o

Lema 10 Para cada f em C(A), a sequencia de funções de t $K\int_0^t \sum_{i=1}^{N(n)} c_i(t)f(x(t),y_i)dt$ converge uniformemente em $[0,1]$ para $\int_0^t M_\tau(f)d\tau$.

Defina $x_n'(t) = K\sum_{i=1}^{N} c_i(t)y_i$ e

$x_n(t) = x(0) + \int_0^t x_n'(t)dt$.

Se f está em C(A), tem-se que

$$K\sum_{i=1}^{N} c_i(t)f(x(t),y_i) = K\sum_{i=1}^{N} c_i(t)F(x(t),y_i) = F(x(t),K\sum_{i=1}^{N} c_i(t)y_i) =$$
$$= F(x(t),x_n'(t))$$

onde F é o integrando paramétrico, extensão de f.

O Lema 10 diz então que para cada f em C(A), a sequencia de funções de t $\int_0^t F(x(t),x_n'(t))dt$ converge uniformemente para $\int_0^t M_t(f)dt$ em $[0,1]$.

Se $f = \varphi^i$, tem-se que

$$\int_0^t F(x(t),x_n'(t))dt = \int_0^t x_n^{i\prime}(t)dt = x_n^i(t) - x^i(0)$$

$$\int_0^t M_\tau(f)d\tau = \int_0^t x^{i\prime}(\tau)d\tau = x^i(t) - x^i(0) .$$

Portanto a sequencia $x_n(t)$ converge uniformemente para $x(t)$ em $[0,1]$. Como

$$\lim_n | F(x_n(t),x_n'(t)) - F(x(t),x_n'(t))| = 0$$

uniformemente em $[0,1]$, tem-se que para cada f em C(A), a sequencia $\int_0^1 F(x_n(t),x_n'(t))dt$ converge para $\int_0^1 M_t(f)dt$.

Bibliografia

(1) d'Ambrosio, Ubiratan Notas de aula sôbre Cálculo das Variações, 1 969.

(2) Asplund-Bungart A first Course in Integration , Holt, Rinehart and Winston, 1 966.

(3) Banach, S. Théorie des Opérations Linéaires, Chelsea, 1 932.

(4) Botts, T.A. Sufficient conditions for a generalized-curve problem in the calculus of variations, Duke Math. J., 11 , (1 944), pg. 373-403.

(5) Cesari, L. Rectifiable curves and the Weierstrass integral, Am. Math. Monthly, 65 (1 958), pg. 485-500.

(6) Fréchet, M. Sur quelques points du calcul fonctionnel , Rend. Cir. Mat. Palermo, 22 (1 906), pg. 1-74.

(7) Graves, L.M. Theory of functions of real variables, McGraw-Hill Co., 1 956.

(8) Kestelman, H. Modern Theories of Integration, Dover, 1 960.

(9) Kolmogorov, A.N. e Fomin, S.V. Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional, Mir, Moscou, 1 972.

(10) McShane, E.J. Generalized Curves, Duke Math. J., 6, (1 940), pg. 513-536.

(11) Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Co., N. York, 1 965.

(12) Tonelli, L. Fondamenti di Calcolo delle Variazioni, Vols. I e II, N. Zanichelli, Bologna, 1 921, 1 923.

(13) Young, L.C. Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations, C.R. de la Société des Sciences et de Lettres de Varsovie, classe III, 30 (1 937), pg. 212-234.

(14) Young, L.C. Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, W.B. Saunders Co., Philadelphia, 1 969.

(15) Youngs, J.W.T. Curves and Surfaces, Am. Math. Monthly, 51(1 944), pg. 1-11.