NILTON LAPA

ESTABILIDADE DE MOVIMENTOS ESTA - CIONÁRIOS DE SISTEMAS NÃO HOLÔNOMOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Ciência.

Orientador :

Dr. Mauro de Oliveira Cesar

Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
1971

INTRODUÇÃO

A estabilidade reduzida de movimentos estacionários tem sido objeto de muitas investigações. Um conhecido teorema devido a Routh estabelece a estabilidade de tais movimentos, quando submetidos a perturbações que satisfaçam a condições iniciais particulares. Êste teorema, entretanto, não permite obter conclusões sôbre a estabilidade no sentido definido por Liapunov.

Um resultado mais completo foi obtido por M.O.Cesar em [3], onde demonstra, sob as mesmas hipóteses do teorema de Routh, que o movimento estacionário é L-estável.

Entretanto, tanto Routh como Cesar se limitam a sistemas materiais sujeitos a vínculos holônomos. O caso de vínculos não holônomos tem sido estudado por muitos autôres, mas não se conseguiu um resultado geral como aquêle já obtido para vínculos holônomos.

Neste trabalho damos a demonstração de um teorema que garante a estabilidade, segundo Liapunov, de movimentos estacionários de certos sistemas particulares, sujeitos a vínculos não holônomos.

O trabalho se divide em quatro partes. Na primeira, fazemos a exposição do método dos multiplicadores de Lagrange, comumente utilizado para sistemas não holônomos. Tal exposição segue a linha formal encontrada nos diversos tratados do assunto. Damos em seguida uma demonstração do caráter determinista das equações de Lagrange com multiplicadores. Acreditamos ser útil esta demonstração, pois nas obras clássicas consultadas êste problema não é resolvido detalhadamente. Para a execução desta primeira parte foi extremamente útil o trabalho de W.M.Oliva em [2].

Na segunda parte expomos a definição e a maneira de determinar os movimentos estacionários de um sistema material sujeito a vínculos não holônomos, fazendo certas hipóteses que particularizam a situação focalizada. A nossa finalidade principal é estudar a estabilidade dos movimentos estacionários nessa particular situação. Foram importantes para esta segunda parte os trabalhos de M.O.Cesar [3] e L.N.Semenova [4].

A terceira parte contém, finalmente, os elementos necessários para se estabelecer o teorema citado, bem como a demonstração dêste.

Na quarta parte apresentamos uma ilustração do resultado obtido, através de um exemplo.

Quero agradecer a W.M.Oliva, E.Harle e A.Caroli pelas sugestões valiosas e, em especial, a M. O. Cesar, cuja orientação tornou possível êste trabalho.

São Paulo, 31 de março de 1971

CAPÍTULO I

MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE. CARÁTER DETERMINISTA.

1. Equações de Lagrange para um sistema material sujeito a vínculos não holônomos.

a) Considere-se um sistema material cuja configuração é determinada em cada instante por n coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \dots, q_n$, sujeito a vínculos não holônomos, perfeitos, representados por ℓ equações diferenciais não integráveis da forma

$$\sum_{r=1}^{n} A_{ir}\dot{q}_r + C_i = 0 \qquad i = 1, \dots, \ell \tag{1}$$

Sendo k o grau de liberdade do sistema, tem-se $n = k + \ell$.

Os coeficientes destas equações vinculares são funções das coordenadas $q_1, q_2, \dots, q_n$ e de t, isto é,

$$A_{ir} = A_{ir}(q,t) \qquad \text{e} \qquad C_i = C_i(q,t)$$

onde
$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Admitiremos que tais coeficientes são funções de classe C^2 num aberto $\Omega = \mathcal{A} \times \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com

$$\mathcal{A} = \left\{ q \in \mathbb{R}^n : a_i < q_i < b_i \ , \ i = 1,\dots,n \right\}$$

e
$$\mathcal{T} = \left\{ t \in \mathbb{R} \ : t_1 < t < t_2 \right\}$$

Vamos admitir ainda que a matriz $(\ell \times n)$ $A = (A_{ir})$ tem característica ℓ para todo ponto $(q,t) \in \Omega$.

b) A energia cinética do sistema é dada por

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

onde $T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j$ é uma forma quadrática definida positiva,

$T_1 = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\, \dot{q}_j$ é uma função linear em $\dot{q}$ e

$T_0 = T_0(q,t)$.

Vamos supor que as funções

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \alpha_{ij}(q,t) \quad , \quad \beta_{ij} = \beta_{ij}(q,t) \quad , \quad T_0 = T_0(q,t)$$

são de classe C^2 em Ω.

Tem-se $\alpha_{ij} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_j}$ e a matriz $\alpha = (\alpha_{ij})$ tem determinante positivo para todo ponto $(q,t) \in \Omega$, devido à hipótese feita de que T_2 é definida positiva.

c) O sistema material é sujeito à ação de um sistema de fôrças representado aqui pelas expressões das fôrças generalizadas que correspondem a cada coordenada $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$Q_j = Q_j(q, \dot{q}, t) \qquad j = 1, \ldots, n .$$

Estas funções serão supostas de classe C^1 em $\Omega \times \mathbb{R}^n$.

d) Com as hipóteses feitas acima, pode-se escrever a equação fundamental da dinâmica na forma

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \qquad (3)$$

Esta expressão se encontra em [1], pág. 74.

As equações vinculares (1) se escrevem na forma

$$\sum_{r=1}^{n} A_{ir} \, dq_r + C_i \, dt = 0 \qquad i = 1, \ldots, \ell$$

e então a equação (3) não é satisfeita para um deslocamento virtual δq arbitrário, mas sòmente pelo deslocamento δq que satisfaz às condições

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \, \delta q_j = 0 \qquad i = 1, \ldots, \ell \qquad (4)$$

Portanto, sòmente $n - \ell = k$ dos δq_j são linearmente independentes. Multipliquemos estas equações (4) por ℓ multiplicadores, que indicaremos por $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_\ell$ e vamos somar os resultados com (3) :

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ij} \right\} \delta q_j = 0 \qquad (5)$$

Nas equações (4), ℓ dos δq_j podem ser expressos em têrmos dos $n - \ell$ restantes. O determinante D dos coeficientes dêsses ℓ deslocamentos "dependentes" é diferente de zero. Na equação (5) os multiplicadores λ_i podem ser determinados de tal modo que os coeficientes dêsses deslocamentos "dependentes" se anulem. Êste processo determina os λ_i unìvocamente, pois o determinante de seus coeficientes nessas equações é o mesmo $D \neq 0$. Sendo assim, restam na equação (5) ùnicamente os $n - \ell$ deslocamentos δq_j que são arbitrários. Mas então os seus coeficientes também devem se anular.

Com êste raciocínio, concluímos que é possível determinar unìvocamente os multiplicadores λ_i de modo que todos os coeficientes da equação (5) se anulem, e tem-se então :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ij} \qquad j = 1,\ldots n \qquad (6)$$

Estas são as equações de Lagrange para um sistema material sujeito a vínculos não holônomos.

2. Caráter determinista das equações de Lagrange .

A consideração de um sistema material sujeito a vínculos não holônomos leva, segundo vimos, ao sistema de $\ell + n$ equações abaixo :

$$\sum_{r=1}^{n} A_{ir}\, \dot{q}_r + C_i = 0 \qquad i = 1,\ldots, \ell \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ij} \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (6)$$

Vamos agora mostrar o caráter determinista destas equações, isto é, vamos mostrar que o sistema acima determina unìvocamente os multiplicadores λ_i como funções de q, $\dot{q}$, t e que, após a eliminação dêstes, obtém-se um sistema de equações diferenciais na forma normal, nas funções incógnitas $q_j = q_j(t)$. Se, sob determinadas condições iniciais, tal sistema admitir uma solução $q = \varphi(t)$, esta função nos permitirá escrever os multiplicadores λ_i também como funções de t : $\lambda_i = \lambda_i\,(t)$, $i = 1,\ldots,\ell$.

A dedução que se segue é baseada em [2] , páginas 90 e seguintes.

a) Derivando (1) com relação ao tempo, vem :

$$\sum_{r=1}^{n} A_{ir}\, \ddot{q}_r + \sum_{r=1}^{n} \frac{dA_{ir}}{dt}\, \dot{q}_r + \frac{dC_i}{dt} = 0 \qquad i = 1,\ldots,\ell \qquad (7)$$

Vamos mostrar, em primeiro lugar, que os sistemas (1) e (7) são equivalentes, entendendo-se a palavra equivalente no seguinte sentido :

1º) que tôda solução de (1) é também solução de (7) ;

2º) que tôda solução de (7) com valôres iniciais satisfazendo (1) é solução de (1).

A 1ª) é evidente. Para provar a 2ª), indiquemos

$$\sum_{r=1}^{n} A_{ir}\,\dot{q}_r + C_i = F_i\,(q,\dot{q},t)$$

Assim, os sistemas (1) e (7) se escrevem :

$$F(q,\dot{q},t) = 0 \qquad (1')$$

$$\frac{d}{dt}\,F(q,\dot{q},t) = 0 \qquad (7')$$

Seja, então, $\varphi(t)$ uma solução de (7') tal que

$$\varphi(t_o) = q_o \qquad \text{e} \qquad F(q_o,\dot{q}_o,t_o) = 0$$

e com intervalo de definição $m_1 < t < m_2$ contido em $\mathcal{J}$.

Sendo assim, tem-se, para todo t, $m_1 < t < m_2$:

$$\frac{d}{dt}\,F(\,\varphi(t),\,\dot{\varphi}(t),\,t\,) = 0$$

donde $F(\,\varphi(t),\,\dot{\varphi}(t),\,t\,) = \text{constante}$.

Mas pelas hipóteses $F(\,\varphi(t_o),\,\dot{\varphi}(t_o),\,t_o\,) = 0$, donde $F(\,\varphi(t),\,\dot{\varphi}(t),\,t\,) = 0$ para todo t, $m_1 < t < m_2$. Isto mostra que $\varphi(t)$ é solução de (1').

b) Vamos agora escrever as equações (6) na forma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_j\partial\dot{q}_k}\,\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial q_k\partial\dot{q}_j}\,\dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial t\,\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ij} \qquad (8)$$

$$j = 1,\ldots,n$$

Como $\dfrac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_j\,\partial\dot{q}_k} = \alpha_{jk}$ e a matriz (nxn) $\alpha = (\alpha_{jk})$ é suposta não singular, existe sua inversa $\gamma = (\gamma_{jk})$. Vamos então multiplicar (8) por γ_{rj} e somar segundo j , de 1 a n :

$$\ddot{q}_r = \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{rj} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k =$$

$$= \sum_{\substack{i=1,\dots,\ell \\ j=1,\dots,n}} \gamma_{rj} \lambda_i A_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{rj} \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial q_k \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_j} \right]$$

$$r = 1,\dots,n \qquad (9)$$

Podemos agora substituir $\ddot{q}_r$ na equação (7), obtendo :

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,\ell \\ r,j=1,\dots,n}} A_{sr} \gamma_{rj} \lambda_i A_{ij} +$$

$$+ \sum_{j,r=1}^{n} A_{sr} \gamma_{rj} \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial q_k \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_j} \right] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} \frac{dA_{sr}}{dt} \dot{q}_r + \frac{dC_s}{dt} = 0 \qquad s = 1,\dots,\ell \qquad (10)$$

Neste sistema (10) a matriz dos coeficientes das quantidades incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ é a matriz $(\ell \times \ell)$ dada por :

$$S = A \gamma A'$$

onde $A = (A_{sr})$, $\gamma = (\gamma_{rj})$ e A' é a matriz transposta de A.

c) Vamos provar que S é uma matriz não singular. Para isto, lembremos que S pode ser considerada uma transformação linear $S : \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ tal que a cada elemento $x \in \mathbb{R}^\ell$ associa o elemento $y \in \mathbb{R}^\ell$ dado por $y = Sx$. Indiquemos por $S(\mathbb{R}^\ell)$ a imagem de $\mathbb{R}^\ell$ segundo a transformação S e por N(S) o núcleo da transformação, isto é, o conjunto

$$N(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}^\ell : Sx = 0 \right\}$$

Conhece-se a propriedade seguinte, relativa às dimensões dêsses conjuntos, (que são espaços vetoriais) :

$$\dim N(S) + \dim S(\mathbb{R}^\ell) = \ell$$

Se provarmos que $\dim S(\mathbb{R}^\ell) = \ell$, isto irá garantir que a

matriz S é uma transformação sobrejetora, portanto tem característica máxima e é, por isso mesmo, não singular. Assim sendo, devemos provar que $\dim N(S) = 0$ isto é, que $N(S) = \{0\}$.

Tomemos então $x \in \mathbb{R}^{\ell}$ tal que $Sx = 0$ e provemos que $x = 0$. Podemos calcular o produto escalar

$$< Sx, x > = < A \gamma A' x , x > = < \gamma A' x , A'x >$$

Mas γ é uma matriz (nxn) simétrica, como inversa da matriz simétrica α. Existe então uma matriz ortogonal T tal que

$$T' \gamma T = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \gamma_n \end{bmatrix}$$

onde γ_i são os valôres próprios de γ.

Então, sendo $y = T' A' x$, pode-se escrever

$$< \gamma A' x , A' x > = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i^2$$

Assim, se $Sx = 0$, vem :

$$< Sx , x > = 0 \qquad \text{ou seja,} \qquad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i^2 = 0$$

e como γ é definida positiva, os γ_i são positivos e portanto $y = 0$, isto é : $A'x = 0$.

Esta última equação corresponde a um sistema linear homogêneo de n equações a ℓ incógnitas ($\ell < n$) no qual a matriz dos coeficientes, A', tem característica ℓ. A única solução é a trivial, $x = 0$.

d) Uma vez demonstrado que S é não singular, conclui-se que o sistema (10) determina unìvocamente os multiplicadores λ_i, como funções de q, $\dot{q}$, t :

$$\lambda_i = \lambda_i (q, \dot{q}, t) \qquad i = 1,\ldots, \ell \qquad (11)$$

Êstes valôres, substituídos em (9) fornecem finalmente o sistema de equações diferenciais normalizado :

$$\ddot{q}_r = f_r (q, \dot{q}, t) \qquad r = 1,\ldots,n \qquad (12)$$

Se o sistema (12) admitir uma solução $q = \varphi(t)$, correspondente a condições iniciais determinadas, esta função substituída em (11) nos dá os multiplicadores λ_i como funções de t :

$$\lambda_i = \lambda_i(t) \qquad i = 1,\ldots,\ell$$

CAPÍTULO II

MOVIMENTOS ESTACIONÁRIOS DE UM SISTEMA MATERIAL SUJEITO A VÍNCULOS NÃO HOLÔNOMOS.

1. Hipóteses iniciais. Integrais primeiras. Sistema Auxiliar.

a) Consideraremos agora um sistema material cuja configuração é determinada em cada instante pelas n coordenadas generalizadas

$$q_1, q_2, \ldots, q_r, u_1, u_2, \ldots, u_s$$

$(r + s = n)$, sujeito a vínculos não holônomos, perfeitos, representados por ℓ $(\ell \leq r)$ equações diferenciais não integráveis, da forma

$$\sum_{k=1}^{r} A_{ik} \dot{q}_k = 0 \qquad i = 1, \ldots, \ell \tag{13}$$

onde os coeficientes são funções ùnicamente das coordenadas $q_1, q_2, \ldots, q_r$, isto é,

$$A_{ik} = A_{ik}(q) \qquad \text{com} \qquad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \end{bmatrix}$$

Sendo k o grau de liberdade do sistema, tem-se

$$n = r + s = k + \ell$$

Admitiremos que as funções A_{ik} são de classe C^2 num aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^r$, onde

$$\mathcal{A} = \left\{ q \in \mathbb{R}^r : a_i < q_i < b_i \ , \ i = 1, \ldots, r \right\}$$

e ainda que a matriz $(\ell \times r)$ $A = (A_{ik})$ tem característica ℓ para todo ponto $q \in \mathcal{A}$.

b) Suporemos ainda que para todo $q \in \mathcal{A}$ a energia cinética é uma forma quadrática definida positiva nas variáveis $\dot{q}$ e $\dot{u}$, independente de u e de t, isto é,

$$2T = \sum_{i,j=1}^{s} \alpha_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j + 2 \sum_{\substack{i=1,\ldots,s \\ j=1,\ldots,r}} \beta_{ij} \dot{u}_i \dot{q}_j + \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{14}$$

onde
$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \alpha_{ij}(q)$$
$$\beta_{ij} = \beta_{ij}(q)$$
$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \gamma_{ij}(q)$$
são funções de classe C^2 em $\mathcal{A}_\varphi$.

c) Vamos admitir que o sistema material é sujeito à ação de um sistema posicional conservativo de fôrças, tal que a energia potencial não depende de u , isto é, $\pi = \pi(q)$, função de classe C^2 em $\mathcal{A}_\varphi$.

d) As coordenadas $q_1, \ldots, q_r$ são chamadas <u>principais</u> e as restantes $u_1, \ldots, u_s$ <u>secundárias</u> ou <u>cíclicas</u> .

e) Considerando as hipóteses feitas, o sistema de equações (1) e (6) fica reduzido às $\ell + n$ equações abaixo :

$$\sum_{k=1}^{r} A_{ik}\,\dot{q}_k = 0 \qquad i = 1,\ldots,\ell \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_h} = 0 \qquad h = 1,\ldots,s \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \pi}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ik} \qquad k = 1,\ldots,r \tag{16}$$

As equações (15) fornecem então s integrais primeiras do movimento :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_h} = c_h \qquad h = 1,\ldots,s$$

as quais são da forma

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_{hi}\,\dot{u}_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_{hi}\,\dot{q}_i = c_h \qquad h = 1,\ldots,s$$

ou, vetorialmente : $\alpha\,\dot{u} + \beta\,\dot{q} = c$ (17)

onde $\alpha = (\alpha_{hi})$, $\beta = (\beta_{hi})$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix}$

f) Conforme foi visto no capítulo I, o sistema formado pelas equações (13), (15), (16) é normalizável, podendo ser escrito

$$\begin{cases} \ddot{q} = f(q, \dot{q}, \dot{u}) \\ \ddot{u} = g(q, \dot{q}, \dot{u}) \end{cases} \tag{18}$$

Através da mudança de variável $\dot{q} = y$, $\dot{u} = v$ obtemos o novo sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = y \\ \dot{y} = f\ (q,\ y,\ v) \\ \dot{u} = v \\ \dot{v} = g\ (q,\ y,\ v) \end{cases} \qquad (19)$$

Isolemos a equação $\dot{u} = v$, obtendo o novo sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = y \\ \dot{y} = f\ (q,\ y,\ v) \\ \dot{v} = g\ (q,\ y,\ v) \end{cases} \qquad (20)$$

ao qual pode-se aplicar o clássico teorema de existência e unicidade, uma vez que as funções $\alpha_{ij}\ (q)$, $\beta_{ij}\ (q)$, $\gamma_{ij}\ (q)$, $\pi\ (q)$ e $A_{ik}(q)$ foram supostas de classe C^2 em $\mathcal{A}$. Portanto, dado o ponto

$$(q_o,\ y_o,\ v_o,\ t) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}$$

existe uma única solução (maximal) $q = q(t)$, $y = y(t)$, $v = v(t)$ correspondente a esta condição inicial.

Dada uma solução de (20), encontram-se soluções de (19) por integração. Inversamente, cada solução de (19) define uma solução de (20).

Ainda utilizando a mudança de variável $\dot{q} = y$, $\dot{u} = v$, a equação (17) fica :

$$\alpha\ v + \beta\ y = c \qquad (21)$$

As relações (21), juntamente com $q = q$, $y = y$, definem uma aplicação

$$\Psi : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathcal{B}$$
$$(q,\ y,\ v) \longrightarrow (q,\ y,\ c)$$

onde $\mathcal{B} = \left\{ (q,\ y,\ c) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \ :\ a_i < q_i < b_i\ ,\ i = 1,\ldots,r \right\}$.

Ψ é um difeomorfismo de classe C^2 .

De fato : para todo ponto de $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ as relações (21) determinam c, e portanto um ponto de $\mathcal{B}$. Inversamente, dado um ponto de $\mathcal{B}$, em (21) resulta um único v (pois det $\alpha \neq 0$) e portanto um único ponto de $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$.

g) De (21) tem-se $v = \alpha^{-1}\ (c - \beta\ y)$. Substituindo nas duas primeiras equações de (20) êste valor, obtemos o novo sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = y \\ \dot{y} = h\ (q,\ y,\ c) \end{cases} \qquad (22)$$

o qual será chamado <u>sistema auxiliar</u> . As equações (22) representam na realidade uma família de sistemas, um para cada c. Uma solução de (22) se representa por uma curva contida numa variedade V(c) de $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, correspondente a c = const.

2. Movimentos estacionários. Pontos de equilíbrio do sistema auxiliar.

a) Chama-se movimento estacionário uma solução de (19) tal que

$$q = q_o \quad (\text{const}) \quad \text{e} \quad \mathring{u} = v_o \quad (\text{const})$$

b) É imediato que tais condições, satisfeitas para um movimento estacionário, correspondem às condições para que o ponto $(q_o, y=0, v_o)$ seja um ponto de equilíbrio do sistema (20).

Assim, suposta a existência de um movimento estacionário do sistema (19), com $q = q_o$, $\mathring{u} = v_o$, a êsse movimento corresponde um ponto de equilíbrio $(q_o, y=0, v_o)$ do sistema (20) e, através da transformação Ψ , teremos em correspondência no aberto $\mathcal{B}$ um ponto de equilíbrio $(q_o, y=0, c_o)$ do sistema (22).

c) Os pontos de equilíbrio de (22) são pontos (q, y, c) do aberto $\mathcal{B}$, tais que

$$y = 0$$
$$h\,(q, y=0, c) = 0 .$$

Vamos examinar de que modo tais pontos podem ser determinados. Temos, em primeiro lugar :

$$\frac{\partial T}{\partial \mathring{q}_k} = \sum_{i=1}^{s} \beta_{ik}\, \mathring{u}_i + \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ik}\, \mathring{q}_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathring{u}_h} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ih}\, \mathring{u}_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_{hj}\, \mathring{q}_j$$

donde :
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathring{q}_k} = \sum_{i=1}^{s} \frac{d\beta_{ik}}{dt}\, \mathring{u}_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_{ik}\, \mathring{\mathring{u}}_i + \sum_{i=1}^{r} \frac{d\gamma_{ik}}{dt}\, \mathring{q}_i + \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ik}\, \mathring{\mathring{q}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_h} = \sum_{i=1}^{s} \frac{d\alpha_{ih}}{dt}\dot{u}_i + \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ih}\ddot{u}_i + \sum_{j=1}^{r} \frac{d\beta_{hj}}{dt}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{r} \beta_{hj}\ddot{q}_j$$

e ainda :

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_k}\dot{u}_i\,\dot{u}_j + \sum_{\substack{i=1,\dots,s\\ j=1,\dots,r}} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial q_k}\dot{u}_i\,\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\,\dot{q}_j$$

Para um movimento estacionário, tem-se : $\dot{q} = 0$, $\ddot{q} = 0$, $\ddot{u} = 0$. Colocando êstes valôres nas equações (16) obtemos então

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_k}\dot{u}_i\,\dot{u}_j + \frac{\partial \pi}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ik} \qquad k = 1,\dots,r \qquad (16')$$

Vamos indicar por T^* a expressão :

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \alpha_{ij}\,\dot{u}_i\,\dot{u}_j$$

Com esta notação, a equação (16') pode ser escrita

$$-\frac{\partial T^*}{\partial q_k} + \frac{\partial \pi}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ik} \qquad k = 1,\dots,r \qquad (23)$$

Por outro lado, fazendo $y = 0$ em (21) obtemos $\alpha\, v = c$, donde $v = \alpha^{-1} c$. Se substituirmos $\dot{u} = v = \alpha^{-1} c$ nas equações (23), vamos obter as equações

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\pi + \frac{1}{2} c'\,\alpha^{-1} c\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ik} \qquad k = 1,\dots,r \qquad (24)$$

onde c' é o transposto de c. Justifiquemos esta última equação. Podemos escrever, em forma matricial,

$$2T^* = v'\,\alpha\, v = (\alpha^{-1} c)'\,\alpha\,(\alpha^{-1} c) = c'\,\alpha^{-1}\,\alpha\,\alpha^{-1} c = c'\,\alpha^{-1} c$$

e ainda $\quad 2\dfrac{\partial T^*}{\partial q_k} = v'\dfrac{\partial \alpha}{\partial q_k} v$

Provemos agora que $\quad v'\dfrac{\partial \alpha}{\partial q_k} v = -\, c'\dfrac{\partial \alpha^{-1}}{\partial q_k} c$

De fato : sendo $\alpha\,\alpha^{-1} = I$, vem

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q_k}\,\alpha^{-1} + \alpha\,\frac{\partial \alpha^{-1}}{\partial q_k} = 0$$

ou
$$\frac{\partial \alpha}{\partial q_k} = -\,\alpha\,\frac{\partial \alpha^{-1}}{\partial q_k}\,\alpha$$

Assim, $$v'\,\frac{\partial \alpha}{\partial q_k}\,v = -\,c'\,\alpha^{-1}\,\alpha\,\frac{\partial \alpha^{-1}}{\partial q_k}\,\alpha\,\alpha^{-1}\,c = -\,c'\,\frac{\partial \alpha^{-1}}{\partial q_k}\,c$$

Sendo assim, as equações (23) ficam :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_k} + \frac{1}{2}\,c'\,\frac{\partial \alpha^{-1}}{\partial q_k}\,c = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ik} \qquad k = 1,\ldots,r$$

e, finalmente : $$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\pi + \frac{1}{2}\,c'\,\alpha^{-1}\,c\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ik} \qquad k=1,\ldots,r \qquad (24)$$

Aqui, as derivações são feitas supondo c independente de q_k.

Estas equações (24) constituem uma condição necessária e suficiente para que o ponto $(q,\ y=0,\ c)$ seja ponto de equilíbrio do sistema (22) e, conseqüentemente, corresponda a um movimento estacionário de (19).

3. Função potencial de Routh.

a) As hipóteses feitas garantem, para o sistema (19) considerado, a existência de uma integral primeira, correspondente à conservação da energia mecânica :

$$E = T + \pi = \text{const.}$$

a qual é uma função

$$E(q,\ y,\ v) = T(q,\ y,\ v) + \pi(q)$$

definida em $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$.

De (21) tem-se $v = \alpha^{-1}\,(c - \beta\,y)$, valor que, substituído na expressão de $T(q,\ y,\ v)$ conduz a uma nova função $\overline{T}\,(q,\ y,\ c)$ definida no aberto $\mathcal{B}$. Em consequência, obtemos

$$\overline{E}\,(q,\ y,\ c) = \overline{T}\,(q,\ y,\ c) + \pi(q)$$

que representa, para cada valor de c , uma integral primeira do sistema (22).

b) Efetuemos por extenso a substituição. Em forma matricial, a energia cinética se escreve :

$$2T = v' \alpha v + 2 v' \beta y + y' \gamma y$$

donde $$2\overline{T} = (c' - y'\beta')\alpha^{-1} \alpha \alpha^{-1} (c - \beta y) + 2(c' - y'\beta')\alpha^{-1}\beta y + y' \gamma y =$$

$$= (c' - y'\beta')\alpha^{-1}(c + \beta y) + y' \gamma y =$$

$$= c'\alpha^{-1}c + c'\alpha^{-1}\beta y - y'\beta'\alpha^{-1}c - y'\beta'\alpha^{-1}\beta y + y' \gamma y$$

Obtemos então :

$$2\overline{T} = c' \alpha^{-1}c + y' (\gamma - \beta' \alpha^{-1} \beta) y \qquad (25)$$

c) A matriz $\gamma - \beta' \alpha^{-1} \beta$ que comparece na segunda parcela de (25) é, evidentemente, simétrica, de modo que a expressão

$$y' (\gamma - \beta' \alpha^{-1} \beta) y$$

é uma forma quadrática em y. Além disto, essa forma quadrática é definida positiva, pois se para $y_o \neq 0$ fôsse

$$y'_o (\gamma - \beta' \alpha^{-1} \beta) y_o < 0$$

então, fazendo $c = 0$ teríamos $2\overline{T} < 0$ contrariando o fato de que $T(q, y, v)$ e $\overline{T}(q, y, c)$ são formas quadráticas definidas positivas. Indiquemos

$$\gamma - \beta' \alpha^{-1} \beta = (a_{ij}) \qquad i,j = 1,\ldots,r$$

onde as funções $a_{ij} = a_{ji} = a_{ij}(q)$ são de classe C^2 em $\mathcal{A}$.

A energia total se escreve, então :

$$\overline{E}(q, y, c) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij} y_i y_j + \frac{1}{2} c' \alpha^{-1} c + \pi$$

d) A função de classe C^2 em $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^s$:

$$R(q, c) = \pi + \frac{1}{2} c' \alpha^{-1} c \qquad (26)$$

será chamada <u>função potencial de Routh</u>.

e) Com a definição acima, as equações (24) podem ser escritas:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} R(q, c) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i A_{ik} \qquad k = 1,\ldots,r \qquad (27)$$

Estas equações (27) constituem uma condição necessária e suficiente para que o ponto $(q, y=0, c)$ seja um ponto de equilíbrio do sistema (22) e corresponda, portanto, a um movimento estacionário do sistema (19).

CAPÍTULO III

ESTABILIDADE DOS MOVIMENTOS ESTACIONÁRIOS.

1. Energia total como função de Liapunov.

Vamos agora estudar a estabilidade daquêles pontos de equilíbrio do sistema (22) determinados através de (27). Não iremos, entretanto, fazer um estudo completo. Sòmente nos interessarão os pontos para os quais a energia total seja uma função de Liapunov.

Como já vimos anteriormente, a energia total do sistema é dada por

$$\bar{E}(q, y, c) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij} y_i y_j + R(q, c)$$

Esta função, para um valor fixado $c = c_o$ é definida em todo o espaço de fase $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^r$ dos pontos (q, y) com $q \in \mathcal{A}$ e $y \in \mathbb{R}^r$. É claro, entretanto, que só há interêsse em estudar o comportamento dessa função restrita à superfície $\Sigma \subset \mathcal{A} \times \mathbb{R}^r$ determinada pelas equações vinculares

$$\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(q)\, y_j = 0 \qquad i=1,\dots,\ell \ .$$

Para que $\bar{E}$ seja uma função de Liapunov para o ponto de equilíbrio $Q_o(q_o, y=0, c_o)$, deve existir um aberto de Σ, contendo Q_o, para o qual :

1) $\bar{E}(q_o, 0, c_o) = 0$

2) $\bar{E}(q, y, c_o) > 0$ se $(q, y) \neq (q_o, 0)$

3) $\dot{\bar{E}}(q, y, c_o) \leq 0$.

Mas a terceira destas condições já é satisfeita , pois de acôrdo com a conservação da energia do sistema tem-se $\dot{\bar{E}}(q, y, c_o) = 0$.

As condições 1) e 2) equivalem a dizer que $\bar{E}$ apresenta um mínimo forte no ponto Q_o.

Seja agora o conjunto $\{(q, y, c_o) \in \Sigma : y = 0\}$ o qual é isomorfo do próprio $\mathcal{A}$ e seja $\bar{E}(q, 0, c_o)$ a restrição de $\bar{E}$ a êsse conjunto. É claro que se $\bar{E}$ apresenta um mínimo forte em Q_o, como função de-

finida em Σ, a restrição $\bar{E}(q, 0, c_o)$ também apresentará um mínimo forte em Q_o, como função definida em $\mathcal{A}$. Mas

$$\bar{E}(q, 0, c_o) = R(q, c_o)$$

donde se conclui que a função $R(q, c_o)$ deve admitir mínimo forte em Q_o.

Assim, os pontos de equilíbrio do sistema (22) cuja estabilidade é susceptível de ser estudada tendo a energia total como função de Liapunov, são os pontos que satisfazem as condições (27) no caso particular em que

$$\frac{\partial}{\partial q_k} R(q_o, c_o) = 0 \quad , k = 1, \ldots, r .$$

2. Teorema de estabilidade.

Vamos reproduzir aqui a demonstração de um teorema que se encontra no trabalho "Stability of steady motions", de M.O.Cesar, a ser publicado na revista "Research in Celestial Mechanics" - Annual Technical Report nº 4. Ali o teorema é demonstrado tendo-se em vista um sistema material sujeito a vínculos holônomos. Observa-se, entretanto, que no caso particular de vínculos não holônomos por nós focalizado a demonstração é válida, sem que qualquer alteração seja necessária.

TEOREMA : Se a função $R(q, c_o)$ tem um mínimo forte para $q = q_o$, então o ponto $Q_o(q_o, y=0, c_o)$ é L-estável com respeito ao sistema (22).

Demonstração.

Seja a função (energia total)

$$\bar{E}(q, y, c) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij} y_i y_j + R(q, c)$$

para a qual se tem $\dot{\bar{E}}(q, y, c) = 0$, o que reflete a conservação da energia do sistema.

Seja $V(c_o)$ a variedade de $\mathbb{R}^{2r+s}$ definida por $c = c_o$. Como $R(q, c_o)$ tem um mínimo forte no ponto $q = q_o$, segue que existe um aberto U, $U \subset V(c_o)$, tal que

$$R(q, c_o) > R(q_o, c_o) \quad , q \in U \quad , q \neq q_o .$$

Sendo assim, indiquemos por $B_\varepsilon(Q_o)$ a bola fechada de $\mathbb{R}^{2r+s}$:

$$B_{\varepsilon}(Q_o) = \left\{ (q, y, c) \in \mathbb{R}^{2r+s} : \left(|q-q_o|^2 + y^2 + |c-c_o|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \right\}$$

Podemos afirmar que $\bar{E}(q, y, c)$ é positiva na fronteira do conjunto

$$V(c_o) \cap B_{\varepsilon}(Q_o)$$

Então, pela continuidade dessa função, conclui-se que ela será positiva no compacto K dado por

$$K = \left\{ (q, y, c) \in Fr(B_{\varepsilon}(Q_o)) : |c - c_o| \leq \rho , \quad 0 < \rho < \varepsilon \right\}$$

Seja $m > 0$ o mínimo de $\bar{E}(q, y, c)$ em K. Em correspondência a m podemos determinar $\delta(m) > 0$, $\delta < \rho$, tal que

$$(q, y, c) \in B_{\delta}(Q_o) \Longrightarrow |\bar{E}(q, y, c)| < m$$

onde $B_{\delta}(Q_o)$ é a bola fechada de $\mathbb{R}^{2r+s}$:

$$B_{\delta}(Q_o) = \left\{ (q, y, c) \in \mathbb{R}^{2r+s} : \left(|q-q_o|^2 + y^2 + |c-c_o|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta \right\}$$

Considere-se a solução $(q(t), y(t))$ do sistema (22), correspondente a $c = c^*$, com valôres iniciais (q^*, y^*) tais que

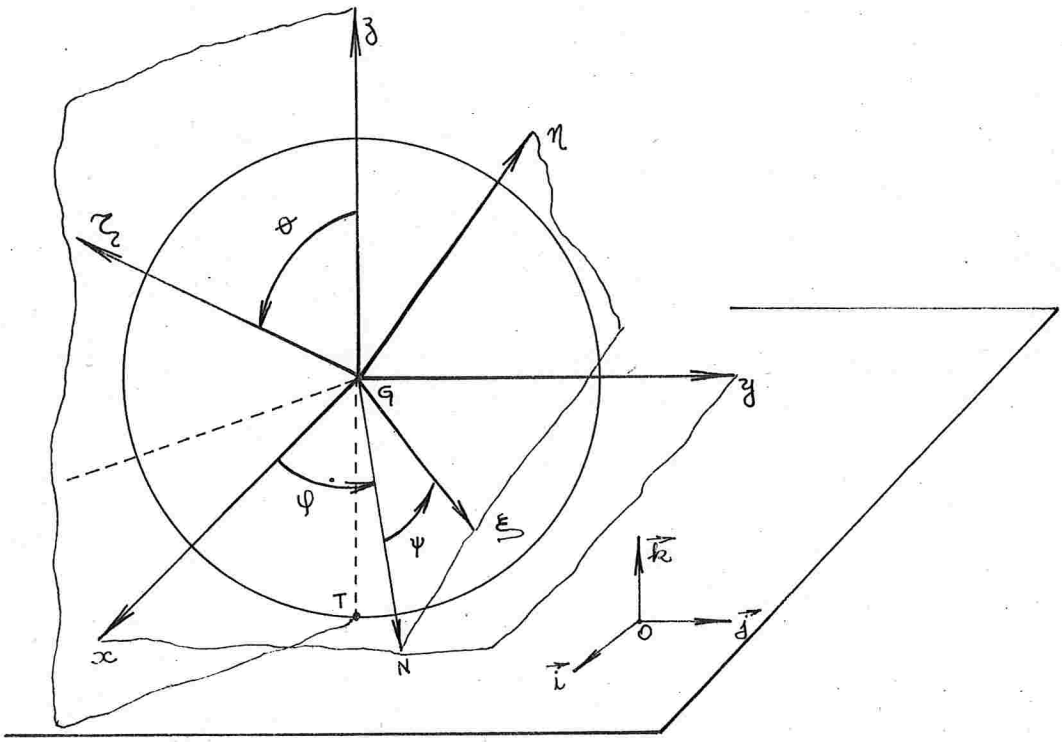
$$(q^*, y^*, c^*) \in B_{\delta}(Q_o) .$$

Como $\mathring{\bar{E}}(q, y, c) = 0$ e a trajetória deve se manter em $V(c^*)$, conclui-se que a solução não pode encontrar a fronteira de $B_{\varepsilon}(Q_o)$.

Com isto, fica provado que o ponto Q_o é L-estável com respeito ao sistema (22).

<u>NOTA</u>. A transformação $\psi : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathcal{B}$ definida através de (21) permite concluir que o ponto $P_o(q_o, y=0, v_o)$ é também L-estável com respeito ao sistema (20). Isto implica na estabilidade (na acepção reduzida do têrmo) do movimento estacionário de (19) correspondente.

E X E M P L O



a) Consideremos uma esfera não homogênea, que pode rolar sem escorregar sôbre um plano horizontal fixo. Vamos supor que a esfera tem seu baricentro G coincidindo com o seu centro geométrico e que ela apresenta uma simetria material em relação a um eixo $G\zeta$. Adotaremos um sistema de eixos $(G\xi\eta\zeta)$ rìgidamente ligados à esfera, de tal modo que os momentos de inércia relativos a $G\xi$ e $G\eta$ são iguais a A e o momento de inércia relativo a $G\zeta$ é C. Indicaremos por M a massa da esfera e por a o seu raio. Consideremos também um sistema de eixos fixo $(O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k})$, onde O pertence ao plano fixo e $\vec{k}$ se dirige verticalmente para cima. Vamos adotar ainda um terceiro sistema de eixos (G x y z), no qual Gx, Gy, Gz permanecem paralelos respectivamente a $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Sejam x, y, a as coordenadas do ponto G relativamente a $(O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k})$ e sejam θ, φ, ψ os ângulos de Euler do sistema $(G\xi\eta\zeta)$. O eixo nodal GN é a intersecção dos planos $(\xi\eta)$ e (x y).

b) <u>Equações vinculares</u>

A condição de não escorregamento se escreve $\vec{v}_T = \vec{0}$, T sendo

o ponto de contacto da esfera com o plano fixo. Daí vem :

$$\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge (G - T) \qquad (1)$$

onde $\vec{\omega}$ indica o vetor de rotação da esfera.

Vamos escrever a equação (1) em componentes segundo (O x y z). Obtemos :

$$\vec{v}_G = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\,\vec{i} + \omega_y\,\vec{j} + \omega_z\,\vec{k}$$

$$G - T = a\,\vec{k}$$

Assim, $\vec{\omega} \wedge (G - T) = -a\,\omega_x\,\vec{j} + a\,\omega_y\,\vec{i}$, donde

$$\dot{x} = a\,\omega_y$$

$$\dot{y} = -a\,\omega_x$$

Mas, por outro lado, $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k} + \dot{\psi}\,\vec{\zeta} + \dot{\theta}\,\vec{N}$

onde se tem

$$\vec{\zeta} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} - \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{N} = \cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}$$

e assim :

$$\omega_x = \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$$

$$\omega_y = -\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \dot{\theta} \operatorname{sen}\varphi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$$

Com isto, as equações vinculares ficam :

$$\dot{x} + a\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi - a\,\dot{\theta} \operatorname{sen}\varphi = 0$$

$$\dot{y} + a\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + a\,\dot{\theta}\cos\varphi = 0$$

Observa-se então que a escôlha do sistema (O x y z) para representar a equação (1) não revela qualquer coordenada secundária, segundo a definição adotada no cap. II , ítem 1d.

Vamos então passar ao sistema ($G\xi\eta\zeta$). Sejam

$$\vec{v}_G = \dot{u}\,\vec{\xi} + \dot{v}\,\vec{\eta} + \dot{w}\,\vec{\zeta}$$

$$\vec{\omega} = \omega_1\,\vec{\xi} + \omega_2\,\vec{\eta} + \omega_3\,\vec{\zeta}$$

e $G - T = a\,\vec{k} = a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi\,\vec{\xi} + a \operatorname{sen}\theta \cos\psi\,\vec{\eta} + a\cos\theta\,\vec{\zeta}$

donde $\dot{u} = a\,\omega_2 \cos\theta - a\,\omega_3 \operatorname{sen}\theta \cos\psi$

$$\dot{v} = a\,\omega_3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi - a\,\omega_1 \cos\theta$$

$$\dot{w} = a\,\omega_1 \operatorname{sen}\theta \cos\psi - a\,\omega_2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi$$

Mas

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_2 = \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \dot{\theta} \operatorname{sen}\psi \\ \omega_3 = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi} \end{cases} \qquad (2)$$

Assim, tem-se as novas equações vinculares

$$\begin{aligned} &\dot{u} + a\,\dot{\theta} \operatorname{sen}\psi \cos\theta + a\,\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \cos\psi = 0 \\ &\dot{v} + a\,\dot{\theta} \cos\psi \cos\theta - a\,\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi = 0 \qquad (3) \\ &\dot{w} - a\,\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta = 0 \end{aligned}$$

Nota-se que φ e $\dot{\varphi}$ não comparecem nestas equações vinculares.

c) <u>Energia cinética</u>

A energia cinética da esfera se exprime na forma

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} A (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} C\,\omega_3^2$$

Se substituirmos aqui as expressões de ω_1, ω_2, ω_3 dadas em (2), obteremos

$$(4) \quad T = \frac{1}{2} M (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} A (\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} C (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi})^2$$

d) <u>Energia potencial</u>

Como a fôrça pêso é a única fôrça ativa considerada e como a coordenada de G segundo $O\vec{k}$ é a (constante) tem-se, para a energia potencial :

$$\pi = \text{constante.} \qquad (5)$$

e) <u>Coordenadas principais e secundárias</u>

Conforme a definição adotada, pelo fato de φ e $\dot{\varphi}$ não comparecerem em (3) e de φ não comparecer em (4) e (5), tem-se que φ é a coordenada secundária ou cíclica e que as demais coordenadas são principais.

f) Integral primeira

À coordenada cíclica φ corresponde a integral primeira

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = K$$

que se escreve $\quad A\,\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}^2\theta + C\cos\theta\,(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = K$

donde se tira $\quad \dot{\varphi} = \dfrac{K - C\,\dot{\psi}\cos\theta}{S} \qquad (6)$

sendo S a expressão $\quad S = A\,\mathrm{sen}^2\theta + C\cos^2\theta$

g) Função potencial de Routh

Se substituirmos $\dot{\varphi}$ dado em (6) na expressão (4), vem :

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}A\left[\frac{(K - C\,\dot{\psi}\cos\theta)^2}{S^2}\,\mathrm{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}C\left[\frac{K - C\,\dot{\psi}\cos\theta}{S}\cdot\cos\theta + \dot{\psi}\right]^2$$

Desenvolvendo, obtemos

$$T = \left[\frac{1}{2}M(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + A\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{C}{S}A\,\mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\psi}^2\right] + \frac{K^2}{S}$$

A expressão entre colchetes é uma forma quadrática definida positiva em $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$. Conclui-se então que a função potencial de Routh é dada por

$$R = \frac{K^2}{S} + \pi \qquad (7)$$

onde $\quad S = A\,\mathrm{sen}^2\theta + C\cos^2\theta$

h) Movimentos estacionários

Como vimos, os movimentos estacionários são obtidos através das equações

$$\frac{\partial R}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i A_{ik} \qquad k = 1,\ldots,r$$

1a) Para u : $\quad 0 = \lambda_1$

2a) Para v : $\quad 0 = \lambda_2$

3ª) Para w : $0 = \lambda_3$

4ª) Para ψ : $0 = \lambda_1 \, a \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \lambda_2 \, a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi$

isto é : $0 = 0$

5ª) Para θ : $-\frac{K^2}{S^2} 2 (C - A) \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0$

Esta última equação se satisfaz nos casos seguintes :

I) $K = 0$

II) $C = A$

III) $\theta = \frac{\pi}{2}$

Note-se que o caso $\operatorname{sen} \theta = 0$ está excluído, devido à definição dos ângulos de Euler, segundo a qual se tem $0 < \theta < \pi$.

<u>CASO I)</u> : $K = 0$. Tem-se, de (6) :

$$\dot{\varphi} = \frac{K - C \dot{\psi} \cos \theta}{S} = 0 \quad (\text{pois } \dot{\psi} = 0)$$

Neste caso, tem-se o <u>repouso</u> . Além disso, $R = \pi = \text{constante}$.

<u>CASO II)</u> : $C = A$. É o caso em que o elipsóide central de inércia da esfera é uma esfera. A esfera executa um movimento de <u>pivotamento</u> com $\dot{\varphi} = \frac{K}{A} = \text{const.}$ Tem-se $R = \frac{K^2}{A} + \pi = \text{const.}$

<u>CASO III)</u> : $\theta = \frac{\pi}{2}$. O movimento da esfera é ainda um <u>pivotamento</u> , com velocidade angular $\dot{\varphi} = \frac{K}{A} = \text{const.}$ Tem-se

$$R = \frac{K^2}{A \operatorname{sen}^2\theta + C \cos^2\theta} + \pi$$

i) <u>Estabilidade dos movimentos estacionários</u>.

O teorema de estabilidade demonstrado no cap. III, ítem 2 não é aplicável aos casos I e II , pois sendo R = const, esta função não admite mínimo forte no ponto de equilíbrio correspondente (veja-se cap.II, ítem 2).

Assim, só estudaremos a estabilidade do movimento estacionário determinado no CASO III : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $K \neq 0$, $C \neq A$. Tem-se :

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{K^2\ 2\ (C - A)\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta}{(A\ \text{sen}^2\theta + C\ \cos^2\theta)^2}$$

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ tem-se $\frac{dR}{d\theta} = 0$

Para $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}-$ tem-se $\frac{dR}{d\theta} < 0$ se $C > A$

Para $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}+$ tem-se $\frac{dR}{d\theta} > 0$ se $C > A$

Assim, resulta que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ a função R assume um mínimo forte desde que $C > A$.

Isto implica que o movimento estacionário correspondente é L - estável se $C > A$.

R E F E R Ê N C I A S

[1] PARS, L.A. - A Treatise on Analytical Dynamics - Heinemann - London

[2] OLIVA, W.M. - Lagrangian Systems on Manifolds II - Artigo publicado em "Research in Celestial Mechanics" - Annual Technical Repat nº 2.

[3] CESAR, M.O. - Stability of steady motions - Artigo publicado em "Research in Celestial Mechanics" - Annual Technical Report nº 2.

[4] SEMENOVA, L.N. - On Routh theorem for nonholonomic systems - Artigo publicado em "Journal of Applied Mathematics and Mechanics" - Vol 29 - nº1 - 1965.

O U T R A S O B R A S C O N S U L T A D A S

WHITTAKER, E.T. - A Treatise on the Analytical Dynamics of particles and rigid bodies - Cambridge - 1937.

PÉRÈS, J. - Mécanique Générale - Masson e Cie. - Paris - 1953.

GANTMACHER, F. - Lectures in Analytical Mechanics - M I R publishers - Moscow - 1970.