EQUAÇÃO DA ONDA - MÉTODOS ELEMENTARES

Trabalho de Mestrado de
Alcilêa Augusto Homem de Mello
Orientador: Professor Chaim
Samuel Hönig.

São Paulo
março 1971

Êste trabalho teve início com a aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach ao estudo da existência e unicidade da solução de um problema envolvendo a equação da onda (capítulo V). Encontram-se na literatura problemas análogos a êste, tratados pelo método das aproximações sucessivas. Damos, como exemplo, o método de Riemann (v. S.L.Sobolev - Partial Differential Equations of Mathematical Physics, lecture 5). Êste método, além de restringir-se a equações lineares, decompõe o problema em dois, de modo a aplicar o método de aproximações sucessivas quando as condições de contôrno sejam nulas. Também Garabedian (Partial Differential Equations, cap. 4) aplica o método depois da transformação que permite tomar condições de contôrno nulas.

Parecia dispensável, entretanto, partir de condições nulas no contôrno e a idéia era a de aplicar o Teorema do Ponto Fixo diretamente ao problema proposto. Isto está feito em E. Kamke - "Equações Diferenciais de Funções Reais" [Chelsea Publishing Company - New York 1947 (em alemão)], onde o problema resolvido é bastante semelhante a êste e a solução é determinada pelo método das aproximações sucessivas, como soma de uma série convergente. Embora a nossa forma de apresentar o problema seja mais moderna, os cálculos de Kamke foram muito úteis para a nossa demonstração. A vantagem maior da aplicação do Teorema do Ponto Fixo é a simplificação das demonstrações, além de deixar mais evidentes as possíveis generalizações.

Os capítulos anteriores apresentam outros métodos que têm sido aplicados ao estudo da equação da onda, sempre sob o ponto de vista clássico.

Começando pelo método de D'Alembert (cap. I), prossegue com o método de Hadamard (cap. II). A exposição dêstes dois capítulos é baseada no curso dado pelo Prof. C.S.Hönig, Introdução ao Estudo das Equações Diferenciais Parciais, no IME em 1969.

O capítulo III traz a classificação das equações diferenciais parciais de 2ª ordem no $\mathbb{R}^n$, localizando a equação da onda entre as equações hperbólicas.

O capítulo IV demonstra a unicidade e continuidade da solução de uma equação hiperbólica usando o método da energia. Esta exposição é feita como se encontra em Vladimirov, "Equações da Física Matemática" (em russo).

Êste trabalho foi sugerido, acompanhado e revisto pelo Professor Chaim Samuel Hönig. A êle, meu agradecimento.

São Paulo, março de 1 971

Alcilêa Augusto Homem de Mello.

ÍNDICE

***

I. EQUAÇÃO DA CORDA VIBRANTE

I.1. Método de D'Alembert (1746)

I.1.1 Corda infinita: Se consideramos uma corda ideal infinita, homogênea, flexível e elástica, sujeita a vibrações transversais, desprezados efeitos outros como resistência do ar, etc...., a corda vibrará sempre no mesmo plano. Tomado como eixo dos x a posição de equilíbrio, assumindo que cada ponto da corda se mova sòmente na direção do eixo dos y, chamando de $u(x, t)$ a ordenada, no instante t, do ponto da corda que tem abcissa x quando em equilíbrio, enquanto o afastamento da posição de equilíbrio for pequeno, a função u deve satisfazer à seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \tag{I.1}$$

chamada equação da onda ou da corda vibrante.

A constante γ é função da tensão e densidade da corda. Veremos logo que γ pode ser interpretada como velocidade de propagação de fenômenos ondulatórios.

O método de D'Alembert para resolver esta equação consiste em tomar as novas variáveis

$$\tau = x + \gamma t \quad , \quad \xi = x - \gamma t \tag{I.2}$$

em relação às quais, a equação (I.1) se escreve como

$$-4\gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} = 0 \quad , \tag{I.3}$$

cujas soluções são as funções da forma:

$$u(\xi, \tau) = f(\tau) + g(\xi) \quad , \quad f, g \in C^2(\mathbb{R}) \quad .$$

Ou seja, as soluções da equação da onda são as funções

$$u(x, t) = f(x + \gamma t) + g(x - \gamma t) \quad , \tag{I.4}$$

em que f, g sejam quaisquer funções duas vêzes continuamente diferenciáveis. Num conceito mais geral de solução (soluções generalizadas e teoria das distribuições), poderíamos considerar casos em que f e g não fôssem de $C^2(\mathbb{R})$. Neste texto, no entanto, consideraremos sempre soluções no sentido clássico.

À vista da quantidade de funções definidas em (I.4), surge a pergunta: como determinar uma única solução? Recorremos à interpretação física do problema, que nos sugere que a posição da corda esteja bem determinada, em qualquer instante, com o conhecimento da posição inicial $(t=0)$ e da velocidade inicial de cada ponto da corda.

De fato, dadas as funções $u_o \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, procuremos determinar a solução $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ da equação da onda tal que:

$$u(x,0) = u_o(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \,. \tag{I.5}$$

Estas são ditas <u>condições iniciais</u>.

Sendo $u(x,t) = f(x + \gamma t) + g(x - \gamma t)$, obtemos:

$$u(x,0) = f(x) + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \gamma\,[f'(x + \gamma t) - g'(x - \gamma t)] \,,$$

isto é, impondo as condições iniciais:

$$f(x) + g(x) = u_o(x)$$

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{\gamma}\, u_1(x)$$

donde obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{2}\, u_o(x) + \frac{1}{2\gamma} \int_0^x u_1(s)\,ds + k$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\, u_o(x) - \frac{1}{2\gamma} \int_0^x u_1(s)\,ds - k$$

e, finalmente:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_o(x+\gamma t) + u_o(x-\gamma t)\right] + \frac{1}{2\gamma}\int_{x-\gamma t}^{x+\gamma t} u_1(s)ds \quad , (I.6)$$

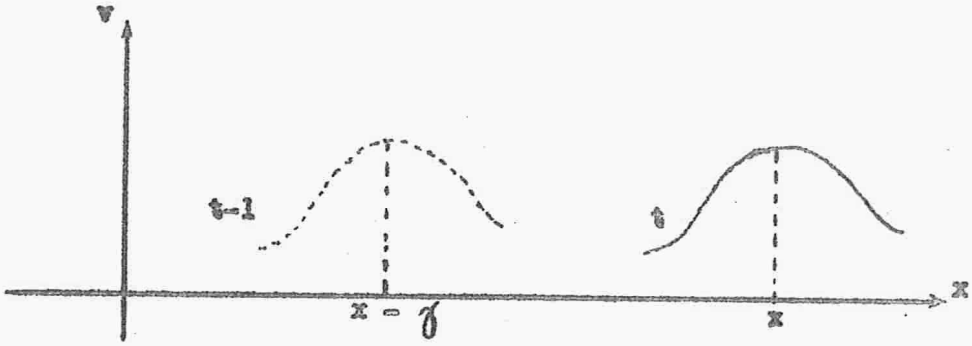
que, como queríamos, é uma solução e está unívocamente determinada a partir de u_o e u_1. Deduzimos, ainda de (I.6), que $u(x,t)$ varia continuamente com as condições iniciais, no seguinte sentido: dados $\varepsilon > 0$, $T > 0$ e $B > 0$, é possível determinar $\delta > 0$ e $A > 0$ tais que: se $\tilde{u}_o \in C^2(\mathbb{R})$ e $\tilde{u}_1 \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazem a $|u_o(x) - \tilde{u}_o(x)| < \delta$, $|u_1(x) - \tilde{u}_1(x)| < \delta$, para todo x com $|x| \leqslant A$ e se $\tilde{u}(x,t)$ é a solução da equação da onda relativamente a estas condições iniciais, então:

$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| < \varepsilon$, para $|t| \leqslant T$ e $|x| \leqslant B$ - com efeito, basta tomar $A = B + \gamma t$ e $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{1+T}$.

Vejamos agora uma <u>interpretação</u> <u>física</u> para as soluções desta equação:

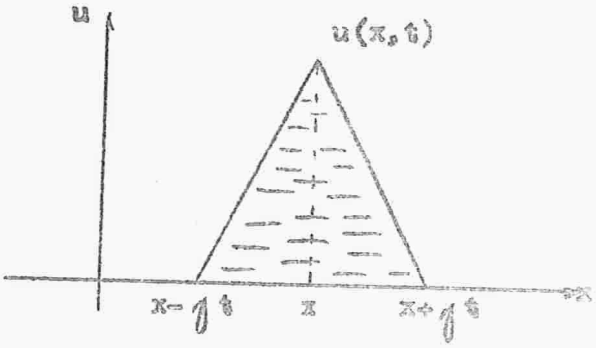
1º - se consideramos uma função $v(x,t) = f(x+\gamma t)$, vemos que:

$v(x,t) = v(x-\gamma, t-1)$, isto é $f(x+\gamma t)$ representa



um fenômeno que se propaga com velocidade γ. Anàlogamente, $g(x-\gamma t)$ representa um fenômeno que se propaga com velocidade $-\gamma$. Da maneira como obtivemos a solução $u(x,t)$, vemos que ela é uma superposição destas duas ondas, que se propagam com velocidades $+\gamma$ e $-\gamma$, respectivamente;

2º - pela fórmula (I.6) e como era de se esperar pelo que vimos acima, o afastamento do ponto x, no instante t, só depende das condições inicias no intervalo fechado de extremidades $x-\gamma t$ e $x+\gamma t$.



Outros problemas se reduzem a êste como, por exemplo:

I.1.2 Vibrações de uma <u>corda semi-infinita</u>: em que se supõe a corda prêsa num ponto, que tomaremos como $x=0$. O problema seria, então, o de determinar uma função u tal que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

satisfazendo as condições iniciais:

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad , \quad x \geq 0$$

e mais a <u>condição de contôrno</u>.

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \tag{I.7}$$

(por coerência, supomos $u_0(0) = 0$, $u_1(0) = 0$) .

Lembrando que a solução geral desta equação é dada por $u(x,t) = f(x + \gamma t) + g(x - \gamma t)$ e impondo a condição de contôrno, tiramos que:

$$f(s) = - g(-s) \quad ,$$

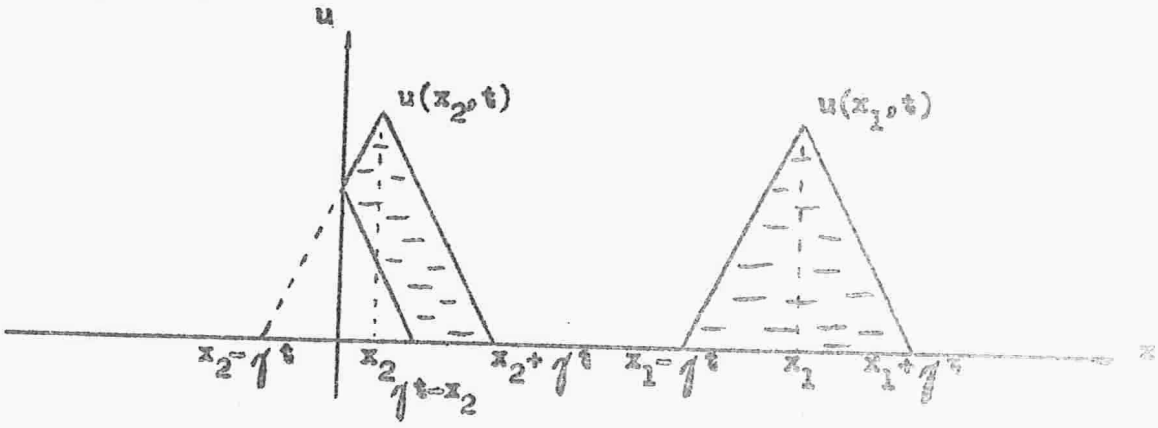
donde $u(x,t) = f(x + \gamma t) - f(-x + \gamma t)$ ($= -u(-x,t)$ se u estivesse definida para $x < 0$) , e, jogando com as condições iniciais obtemos, se $x - \gamma t \geq 0$, como anteriormente, a fórmula (I.6):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x + \gamma t) + u_0(x - \gamma t)\right] + \frac{1}{2\gamma}\int_{x-\gamma t}^{x+\gamma t} u_1(s)ds \quad ,$$

e se $x - \gamma t < 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_o(x+\gamma t) - u_o(\gamma t - x)\right] + \frac{1}{2\gamma}\int_{\gamma t - x}^{\gamma t + x} u_1(s)\,ds \qquad (I.8)$$

e esta coincide com a anterior se prolongarmos as funções u_o e u_1 ao semi eixo $x \leqslant 0$ de modo a obtermos funções ímpares. Isto é, se $x - \gamma t < 0$, tudo se passa como se houvesse uma reflexão em relação ao eixo $x = 0$.



I.1.3 Também o caso da <u>corda fixa nas duas extremidades</u> se reduz a êste. Se as extremidades da corda se situam nos pontos $x = 0$ e $x = L$ esta situação seria descrita pela equação da onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant L \, , \quad t \in \mathbb{R}$$

com as mesmas condições iniciais:

$$u(x,0) = u_o(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant L$$

e mais as condições de contôrno:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (I.9)$$

Por coerência, exigimos $u_o(0) = u_o(L) = u_1(0) = u_1(L) = 0$.

No caso da corda semi-infinita, já vimos que $u(0,t) = 0$ nos leva a:

$$u(x,t) = f(x+\gamma t) - f(-x+\gamma t), \; (= -u(-x,t))$$

agora temos $u(L,t) = 0 \Longleftrightarrow f(L+\gamma t) = f(-L+\gamma t), \; \forall \; t \in \mathbb{R}$

e isto só é possível se f fôr periódica de período $2L$.

Temos, então, para u e, conseqüentemente para u_0 e u_1, que estas podem ser estendidas ao intervalo $[-L,0]$ de modo a serem funções ímpares e do intervalo $[-L,L]$ para a reta de modo a serem periódicas, de período $2L$.

Recaímos então no caso de $x \in \mathbb{R}$ e isto pode ser interpretado como se os fenômenos ondulatórios sofressem reflexão tanto no eixo $x = 0$ como no eixo $x = L$.

I.1.4 Casos em dimensão maior $(x \in \mathbb{R}^n, n > 1)$, podem reduzir-se ao que acabamos de estudar.

i. Isto acontece, por exemplo, no caso da <u>propagação de ondas planas no espaço</u>. De fato, nesse caso, $u(x, y, z, t)$ só depende de t e da distância do ponto (x, y, z) ao plano fixo: $ax + by + cz = 0$. Tomada, então, a nova variável $X = ax + by + cz$, a equação no espaço:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \Delta u = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

transforma-se na equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0 .$$

ii. Outro caso dêstes é o das <u>ondas esféricas no espaço</u>, em que $u(x, y, z, t)$ só depende de t e da distância do ponto (x, y, z) a um ponto fixo, que se toma como origem.

Tomando, então, coordenadas esféricas, a equação inicial $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \Delta u = 0$ se transforma em:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] = 0 ,$$

onde $u = u(r, t)$ e, para $v(r, t) = r\, u(r, t)$, temos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0 .$$

No capítulo II, veremos outro caso que, embora de um modo mais

elaborado, também se reduz a êste: o da equação da onda em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ que, por sua vez, resolve também o problema em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Observações: Na equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \Delta u = 0 ,$$

em que $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$,

x se diz variável espacial e t variável temporal.

Pode-se sempre considerar $\gamma = 1$, já que uma mudança na variável temporal: $\tau = \gamma t$, nos leva à equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \Delta u = 0$$

I.2 Equação não homogênea

Resolvemos a equação da onda com uma variável espacial ($x \in \mathbb{R}$) e com 2º membro:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \qquad (I.10)$$

Procuramos determinar $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ que seja solução da equação acima, satisfazendo as seguintes condições: $u(x, 0) = u_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$. No decorrer do capítulo, mostraremos que: com $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ - bastava que fôsse continuamente derivável uma vez em relação a x e duas vêzes em relação a t - $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ o problema proposto admite uma, e uma só, solução.

Começamos por desdobrar o problema em dois:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = 0 , \\ \bar{w}(x, 0) = u_0(x) , \ \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{array}\right\} \qquad (I.11)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x, t) \\ w(x, 0) = 0 \quad , \ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{array}\right\} \qquad (I.12)$$

O problema (I.11) tem solução única, sob as condições impostas e, no parágrafo anterior, vimos que

$$\bar{w}(x, t) = \frac{1}{2}\left[u_o(x-t) + u_o(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy \quad .$$

Se encontrarmos também $w \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solução do problema (I.12), então a solução u do problema proposto será $u = \bar{w} + w$.

Estudemos (I.12): sendo $\tau \in \mathbb{R}$, começamos por considerar a solução $v_\tau(x, t)$ do seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_\tau}{\partial x^2} = 0 \\ &v_\tau(x, \tau) = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_\tau}{\partial t}(x, \tau) = f(x, \tau) \end{aligned} \qquad (I.13)$$

A menos de uma translação na variável t $(t' = t - \tau)$, êste é o problema resolvido no parágrafo anterior, com $u_o(x) = 0$ e $u_1(x) = f(x, \tau)$ (que é continuamente derivável em relação a x) .

Tomemos $v(x, t, \tau) = v_\tau(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, que é uma vez continuamente derivável em relação a τ e duas vêzes continuamente diferenciável em relação a x e t - com efeito, pois por I.1, podemos escrever

$$v(x, t, \tau) = v_\tau(x, t) = \frac{1}{2}\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y, \tau)dy \quad .$$

Definimos $w(x, t) = \int_0^t v(x, t, \tau)d\tau$ e mostremos que satisfaz a (I.12). É claro, pois: $w \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, por construção, $w(x, 0) = 0$ (basta substituir) e, como

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = v(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x, t, \tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x, t, \tau)d\tau \quad ,$$

temos, lembrando que $v_\tau(x, t)$ é solução de (I.13):

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad e$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) = \left[\frac{\partial v}{\partial t}(x, t, \tau)\right]_{t=\tau} + \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t, \tau)\,d\tau =$$

$$= f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t, \tau)\,d\tau = f(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad .$$

Isto encerra o problema.

II. EQUAÇÃO DA ONDA NO PLANO E NO ESPAÇO

II.1 Resolução da equação com a variável espacial em $\mathbb{R}^3$:

Procuramos uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ tal que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \; ; \qquad (II.1)$$

$$u(p, 0) = u_0(p) \; ; \; \frac{\partial u}{\partial t}(p, 0) = u_1(p) \quad , \quad p \in \mathbb{R}^3 \; ,$$

onde u_0 e u_1 são funções dadas em $\mathbb{R}^3$. De maneira mais artificiosa, também êste caso será reduzido à equação do capítulo anterior. Para tanto, introduzimos a seguinte notação: sendo $f(x, y, z, t)$ uma função definida em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, e fixado um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^3$, definimos:

$$\tilde{M} f = [\tilde{M}(r) f](p_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{||\nu||=1} f(t, p_0 + r\nu) d\omega \; , \qquad (II.2)$$

em que $\nu = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$ é o versor da normal exterior à esfera em $\mathbb{R}^3$ de centro p_0 e raio r e $d\omega$ o elemento do ângulo central.

Suponhamos que exista uma solução u da equação dada, definida em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Sendo $p_0 \in \mathbb{R}^3$ fixado, integramos $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u$ na bola B_r de centro p_0 e raio r. Das fórmulas de Green e com a definição acima, concluímos que a função de uma variável espacial (r) e de t: $v = r \tilde{M} u$ será solução de uma equação da ondas: $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0$. Esta equação foi resolvida no capítulo anterior pelo método de D'Alembert. Para êste cálculo, usaremos a 2ª fórmula de Green:

$$\int_\Omega \Delta h \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial \nu} \, dS \; , \qquad (II.3)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma região, cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma superfície regular, $h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e ν é a normal externa a $\partial\Omega$.

Com efeito, se $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ é solução de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ e se $p \in B_r(p_o)$, teremos:

$$\int_{B_r} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(p, t)\, dp - \int_{B_r} \Delta u\, dp = 0 \quad . \tag{II.4}$$

Por (II.3):

$$\int_{B_r} \Delta u\, dp = \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}(q, t)\, dS \quad ,$$

em que S_r é a superfície esférica de centro p_o e raio r. Têm-se, porém:

1º $$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\alpha_3 =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}(p_o + r\nu, t) \quad ,$$

2º $dS = r^2\, d\omega$, logo:

$$\int_{B_r} \Delta u\, dp = r^2 \int_{\|\nu\| = 1} \frac{\partial u}{\partial r}(p_o + r\nu, t)\, d\omega =$$

$$= 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[\tilde{M}(r)\, u\right](p_o, t) \quad .$$

Por outro lado, temos:

$$\int_{B_r} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(p, t)\, dp = \int_0^r \int_{S_\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(p_o + \rho\nu, t)\, dS\, d\rho \quad .$$

Reunindo êstes resultados, teremos:

$$\int_0^r \int_{S_\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(p_o + \rho\nu, t)\, dS\, d\rho - 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r}(\tilde{M} u)(p_o, t) = 0 \quad ,$$

expressão que derivada em relação a r, nos dá:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{S_r} u(p_o + r\gamma, t)\, dS - 4\pi \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \tilde{M} u\right] = 0$$

ou: $$4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r^2 \tilde{M} u) - 4\pi \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \tilde{M} u\right] = 0$$

ou ainda: $$4\pi r \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r \tilde{M} u) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r \tilde{M} u)\right] = 0$$

donde, como havíamos enunciado, concluímos que, se u é solução, então:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r \tilde{M} u) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r \tilde{M} u) = 0 \qquad (II.5)$$

Ora, pelo capítulo anterior, temos que $r \tilde{M} u$ deve ser, então, uma função da seguinte forma:

$$r \tilde{M} u = f(r + t) + g(r - t) \quad . \qquad (II.6)$$

Tentemos, agora, relacionar f e g com u_o e u_1, dados como condições iniciais.

As condições a que $r \tilde{M} u$ deve satisfazer são as seguintes: a partir da definição de $\tilde{M} u$ para $r > 0$, tiramos que:

$$\lim_{r \to 0_+} \tilde{M} u = u(p_o, t) \qquad e \qquad (II.7)$$

$$\lim_{r \to 0_+} r \tilde{M} u = 0 \quad ; \qquad (II.8)$$

ainda da definição de $\tilde{M} u$ e levando em conta as condições iniciais a que u deve satisfazer, tiramos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(r \tilde{M} u)\right]_{t=0} = r M(r)\, u_1 \quad , \quad e \qquad (II.9)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(r \tilde{M} u)\right]_{t=0} = \frac{\partial}{\partial r}\left[r M(r) u_o\right] \quad , \qquad (II.10)$$

onde, se h é uma função contínua em $\mathbb{R}^3$, entendemos por $M(r)h$ a seguinte integral:

$$M(r)h = \frac{1}{4\pi} \int_{||\nu||=1} h(p_0 + r\,\nu)\,d\omega \quad . \qquad (II.11)$$

Estamos agora em condições de conhecer melhor como devem ser as funções f e g. Senão vejamos: de (II.8) tiramos que $f(t) = -g(-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, isto é:

$$r\,\tilde{M}\,u = f(r+t) - f(-r+t) \qquad (II.12)$$

então $\lim_{r \to 0} \tilde{M}\,u = 2\,f'(t)$ e da (II.7) temos que

$$u(p_0, t) = 2\,f'(t) \quad . \qquad (II.13)$$

Para determinar $f'(t)$, começamos por derivar (II.12) em relação a t e em relação a r e obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\tilde{M}\,u) + \frac{\partial}{\partial t}(r\,\tilde{M}\,u) = 2\,f'(r+t) \quad ,$$

donde, fazendo $t = 0$ e levando em conta (II.9), (II.10) e (II.13) temos:

$$u(p_0, t) = t\,M(t)u_1 + \frac{\partial}{\partial t}\,t\,M(t)u_0 \qquad (II.14)$$

Até agora vimos que: se u é solução do problema pôsto neste capítulo (II.1), então vale a fórmula acima. Por outro lado, dadas as funções u_0 e u_1 contínuas em $\mathbb{R}^3$ (ou sòmente integráveis) já se pode obter uma função u pela fórmula (II.14). Será esta função uma solução? Nestas condições tão gerais a função u obtida em (II.14) pode nem mesmo ser diferenciável. Se, entretanto, tivermos $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ a função obtida será certamente de $C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$. Vejamos que, nestas condições a função u é realmente solução do problema: da definição de $M(t)h$ sai imediatamente que $u(p_0, 0) = u_0(p_0)$. Conclui-se também fàcilmente, que $\left[\frac{\partial}{\partial t}\,u(p_0, t)\right]_{t=0} = u_1(p_0)$, pois

$\lim_{t \to 0_+} \frac{\partial}{\partial t} M(t)\, h = 0$. Finalmente, para mostrar que a função $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ dada em (II.14) é tal que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$, vejamos o seguinte: 1º se $v(p, t) \in C^3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ é solução da equação da onda, então $\frac{\partial v}{\partial t}$ também o é. Imediato. 2º se $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, então $v(p, t) = t\, M(t) g$ é solução da equação da onda. Este 2º fato se verifica levando em conta que

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t) g = \frac{1}{4\pi} \int_{\|\nu\|=1} \frac{\partial}{\partial t} g(p_0 + t\nu)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\|\nu\|=1} \left[\frac{\partial g}{\partial x} \cos\alpha_1 + \frac{\partial g}{\partial y} \cos\alpha_2 + \frac{\partial g}{\partial z} \cos\alpha_3 \right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\|\nu\|=1} \frac{\partial g}{\partial \nu}(p_0 + t\nu)\, dS = \text{(pela 2ª fórmula de Green}$$

$$\text{(II.3))} = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{B_t} \Delta g\, dp = \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^t \int_{S_\rho} \Delta g\, dS\, d\rho \quad ,$$

que, derivada em relação a t, nos dá:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M(t) g = -\frac{1}{2\pi t^3} \int_{B_t} \Delta g\, dp + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S_t} \Delta g\, dS \, .$$

Daqui tiramos $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t} \Delta g\, dS$ o que completa a demonstração, visto que:

$$\Delta v = \Delta [\, t\, M(t) g \,] = \Delta \left[\frac{t}{4\pi} \int_{\|\nu\|=1} g(q)\, d\omega \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t} \Delta g\, dS \quad .$$

Escrevamos explicitamente a fórmula (II.14) a fim de examiná-la melhor: se, portanto, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$, o problema proposto admite uma única solução u, a saber:

$$u(p, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{\|\nu\|=1} u_1(p + t\nu)\, d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\|\nu\|=1} u_0(p+t\nu)\, d\omega +$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \int_{\|\nu\|=1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x}(p + t\nu) \cos\alpha_1 + \frac{\partial u_0}{\partial y} \cos\alpha_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_0}{\partial z} \cos\alpha_3 \right] d\omega \quad . \qquad \text{(II.15)}$$

Em vista disso, concluímos que:

1º A solução varia continuamente com as condições iniciais: se são dadas as funções $u_0, \tilde{u}_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $u_1, \tilde{u}_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ de modo que, numa região $D \subset \mathbb{R}^3$, se tenha:

$$\|\tilde{u}_0 - u_0\|_1 < \delta_0 \quad \text{e} \quad \|u_1 - \tilde{u}_1\| < \delta_1 \quad , \text{(II.16)}$$

(onde $\|g\| = \sup_{p \in D} |g(p)|$, $\|g\|_1 = \max\left\{\|g\|, \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|, \right.$

$\left. \left\|\frac{\partial g}{\partial y}\right\|, \left\|\frac{\partial g}{\partial z}\right\|\right\}$) ,

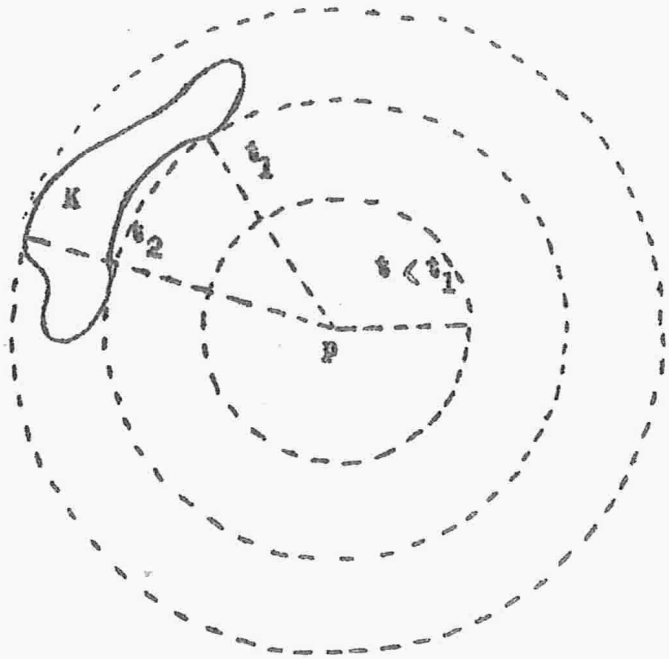
e se u e $\tilde{u}$ são as soluções da equação da onda, relativas às condições iniciais u_0, u_1 e $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$, respectivamente, então, para $|t| \leq T$ e p tal que $B_T(p) \subset D$, tem-se:

$$|u(p, t) - \tilde{u}(p, t)| < T\delta_1 + \delta_0 + 3T\delta_0 \quad .$$

A continuidade em relação as condições iniciais deve, pois, ser entendida no seguinte sentido: dados $\varepsilon > 0$, $T > 0$ e $a > 0$ e considerando funções $\tilde{u}_0$ e $\tilde{u}_1$ que satisfaçam (II.16) na bola (de $\mathbb{R}^3$) de centro na origem e raio $T + a$, com $\delta_0 < \frac{\varepsilon}{2 + 6T}$ e $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2T}$, então:

$$|u(p, t) - \tilde{u}(p, t)| < \varepsilon \ , \quad |t| \leq T \ \text{e} \ p \in B_a(0) \quad .$$

2º A fórmula (II.15) nos mostra ainda a "não-persistência" dos fenômenos vibratórios no espaço. Isto é:



se os estímulos iniciais u_o, u_1 são nulos fora de um compacto K e se $t_1 \leq d(p, k) \leq t_2, k \in K$, então, certamente, estas vibrações só chegarão até p enquanto $t \in [t_1, t_2]$. Fora dêste intervalo $u(p, t) = 0$. Isto porque u se calcula por meio de integrais sôbre a esfera de raio t. Êste fato não se dá no plano, como veremos no próximo parágrafo.

II.2 Método de abaixamento de ordem, devido a Hadamard, para resolução da equação da onda com a variável espacial no plano.

Consideremos o problema de determinar $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ tal que:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \\ &u(x,y,0) = \bar{u}_o(x, y) \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \bar{u}_1(x, y) \end{aligned} \qquad \text{(II.17)}$$

e vejamos que êle tem solução única quando $\bar{u}_o \in C^3(\mathbb{R}^2)$ e $\bar{u}_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Se f é uma função definida no plano, introduzimos a notação:

$$[\bar{M}(r)f](x_o, y_o) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_r(x_o,y_o)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{r^2 - (x-x_o)^2 - (y-y_o)^2}} \, dx\, dy$$

Vejamos que a solução procurada u é dada por

$$u(x, y, t) = \bar{M}(t)\bar{u}_1 + \frac{\partial}{\partial t}[\bar{M}(t)\bar{u}_o] \qquad \text{(II.18)}$$

De fato, o problema dado pode ser considerado como um problema de $\mathbb{R}^3$ em que as condições iniciais independem de z:

$$u_o(x, y, z) = \bar{u}_o(x, y)$$
$$u_1(x, y, z) = \bar{u}_1(x, y)$$

Pelo parágrafo II.1, o problema no espaço $\mathbb{R}^3$, com estas condições iniciais tem, como solução única, a função dada em (II.14):

$$u(x, y, z, t) = t\, M(t)u_1 + \frac{\partial}{\partial t}[t\, M(t)u_o]$$

e esta, evidentemente, também independe de z e podemos, portanto considerá-la como a solução do plano.

Para demonstrar que ela assume a forma (II.18) basta reduzir as integrais sôbre a esfera que aparecem em $M(t)u_1$ e $M(t)u_o$ a integrais sôbre a <u>bola</u> no plano e mostramos que: $t\, M(t)u_1 = \bar{M}(t)\bar{u}_1$, o mesmo para u_o.

Como conseqüências da fórmula (II.18) tiramos, de modo análogo ao que se fêz no parágrafo anterior, a continuidade da solução em relação às condições iniciais e a unicidade da solução.

Ao contrário do que se observa lá, no plano constatamos o fenômeno da persistência, isto é, um estímulo inicial provocado a uma distância t_1 do ponto (x, y) interfere no que acontece em (x, y) para <u>todo</u> $t \geqslant t_1$. Isto porque as integrais são estendidas à <u>bola</u> de raio t.

III. CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE 2ª ORDEM NO $\mathbb{R}^n$

III.1 Equações diferenciais parciais de 2ª ordem, quase-lineares: se $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, uma equação da forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x) \quad \text{(III.1)}$$

em que a_{ij}, a_i, a, f são funções definidas numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é uma equação dita linear. Podemos supor $a_{ij} = a_{ji}$ pois vamos nos restringir a $u \in C^2(\Omega)$.

Mais geralmente, a equação

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} = f(x_1, \dots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}), \quad \text{(III.2)}$$

diz-se quase-linear. As equações lineares são exemplos das equações quase-lineares e as equações estudadas nos capítulos precedentes são exemplos de equações lineares.

Dada uma equação quase-linear e fixado um ponto $x^0 \in \Omega$ obtém-se uma forma quadrática:

$$Q_{x^0}(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j , \quad \text{(III.3)}$$

A equação diferencial parcial (III.2) se diz elítica, ou hiperbólica, ou parabólica em x^0 conforme Q_{x^0} seja elítica ou hiperbólica ou parabólica. E a equação se diz elítica, ou hiperbólica, ou parabólica, num conjunto se o fôr em cada um de seus pontos.

Abrimos um parêntesis para lembrar alguns fatos algébricos sobre formas quadráticas: uma forma quadrática $\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i^2$ diz-se estar na forma canônica.

Se $Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j$, $a_{ij} = a_{ji}$, e tomamos uma mudança de coordenadas definida pela matriz (α_{ki}):

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \eta_k ,$$

a forma quadrática passa a ser escrita, em têrmos dos η, como:

$$\bar{Q}(\eta) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{a}_{k\ell}\, \eta_k\, \eta_\ell \,, \quad \text{onde} \quad \bar{a}_{k\ell} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_{ki}\, \alpha_{\ell j}$$

As formas Q e $\bar{Q}$ dizem-se equivalentes. Sabe-se que tôda forma quadrática é equivalente a alguma forma canônica e que, sendo os a_{ij} reais, esta forma canônica pode ser tal que seus coeficientes sejam 1, -1 ou 0 . Embora esta forma canônica não seja única, ela apresenta invariantes como, por exemplo, o valor absoluto da soma de seus coeficientes. A partir de tais invariantes, classifica-se a forma Q em: elíptica (quando todos os coeficientes são iguais a +1 ou todos iguais a -1), hiperbólica (nenhum coeficiente nulo, nem todos iguais entre si), parabólica (alguns coeficientes nulos).

Uma forma hiperbólica se diz hiperbólica normal se um só dos coeficientes tem sinal diferente dos demais. Uma forma parabólica se diz parabólica normal se um só dos coeficientes é nulo e os demais têm o mesmo sinal.

Fechado o parêntesis, voltemos às equações diferenciais parciais, de 2ª ordem, quase-lineares (III.2): elas se classificam em elípticas, hiperbólicas e parabólicas (num ponto x^0 ou num conjunto); vejamos que esta classificação independe do sistema de coordenadas utilizado. Com efeito, se

$$y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

é um outro sistema de coordenadas numa vizinhança de x^0, a equação (III.2) se escreve, nas coordenadas y como:

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{a}_{k\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} = \bar{f}\left(y_1, \ldots, y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_n}\right), \quad \text{(III.}$$

onde os $\bar{a}_{k\ell}$ se calculam como:

$$\bar{a}_{k\ell} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_j} \qquad \text{(III.5)}$$

Isto é, a forma quadrática $\bar{Q}(\eta) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{a}_{k\ell}\, \eta_k\, \eta_\ell$

é equivalente à forma Q, através da matriz jacobiana

$(\alpha_{kl}) = \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_l}\right)$, pertencendo, portanto à mesma classe que Q.

Lateralmente, observe-se que uma transformação de coordenadas conserva a "quase-linearidade" e a "linearidade" da equação.

Exemplos: exemplos de equações elíticas no $\mathbb{R}^n$ são as equações de Laplace $\Delta u = 0$, e de Poisson $\Delta u = \rho$. De equações hiperbólicas, a equação das ondas $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$, no $\mathbb{R}^{n+1}$ e de equação parabólica, a equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ também no $\mathbb{R}^{n+1}$.

No caso da equação no plano $(n = 2)$:

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\, b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \text{(III.6)}$$

esta classificação tem uma caracterização simples, em têrmos dos coeficientes. De fato, se $\Delta = b^2 - 4ac$, por recursos algébricos, sem dificuldade, demonstra-se que a equação (III.6) será elítica se, e só se, $\Delta < 0$; hiperbólica se, e só se, $\Delta > 0$ e parabólica se, e só se, $\Delta = 0$.

III.2 Segunda forma canônica da equação hiperbólica no plano: dada uma equação diferencial parcial, de 2ª ordem, quase-linear, (III.2), existe uma transformação de coordenadas que leva a forma quadrática Q_{x^0} numa forma canônica, no ponto x^0. Pergunta-se: sendo a equação de um só tipo numa região, será possível encontrar coordenadas nas quais a forma quadrática assuma a forma canônica em todos os pontos dessa região?

Se $n \geq 3$, isto só é possível em casos excepcionais, no caso das equações planas $(n = 2)$, entretanto, isto é sempre possível.

Neste parágrafo, faremos isto para as equações quase-lineares, no plano, do tipo hiperbólico. Estas são uma generalização da equação da onda em $t, x \in \mathbb{R}$. Partimos, portanto, da equação:

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\, b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \text{(III.6)}$$

com a, b, c contínuas em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\Delta = b^2 - ac > 0$ em Ω. Procuramos novas coordenadas (ξ, η) nas quais a equação tenha a forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \bar{f}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad \text{(III.7)}$$

dita <u>2ª forma canônica da equação hiperbólica</u>. Para passar desta à 1ª forma canônica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \bar{f}\left(s, t, u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \qquad \text{(III.8)}$$

basta tomar $s = \xi + \eta$, $t = \xi - \eta$.

Em muitos casos, a 2ª forma (III.7) é mais útil que a 1ª forma canônica (III.8), como vimos no método de D'Alembert (I.1) e ainda utilizaremos a seguir.

Adaptando as fórmulas (III.5) de transformação de coordenadas e impondo que a equação obtida tenha a forma (III.7), vemos que as novas coordenadas (ξ, η) devem ser tais que:

$$\begin{aligned} a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 &= 0 \\ a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(III.9)}$$

Se, numa vizinhança do ponto $(x^0, y^0) \in \Omega$, a curva $\xi(x, y) = \text{const.}$ se escreve como $y = \varphi(x)$ e $\eta(x, y) = \text{const.}$ se escreve como $y = \psi(x)$, então φ e ψ devem ser soluções da mesma equação diferencial (ordinária):

$$a(x, y)\, y'^2 - 2\, b(x, y)\, y' + c(x, y) = 0 \qquad \text{(III.10)}$$

(estamos supondo $a(x^0, y^0) \neq 0$). Exigindo ainda que os coeficientes da equação sejam de classe $C^1(\Omega)$ (bastaria em relação a y) e como $\Delta > 0$, as funções φ e ψ podem ser tomadas como soluções, respectivamente, das equações diferenciais em forma normal:

$$y' = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{a} \quad \text{e} \quad y' = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{a} \qquad \text{(III.11)}$$

Exemplos:

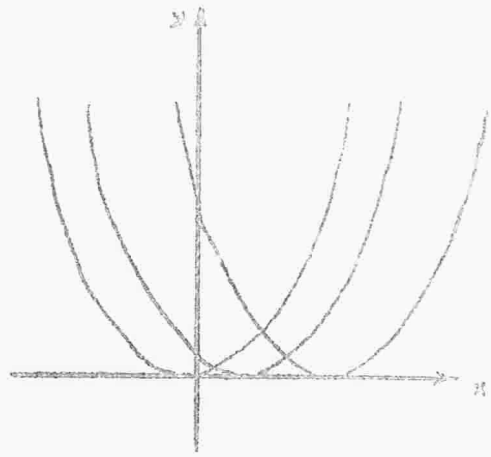
1. A equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, é hiperbólica no semi-plano $y > 0$ ($\Delta = y$). E as curvas $\xi = \text{const}$ e $\eta = \text{const}$ devem ser integrais primeiras da equação diferencial:

$$(y')^2 = y \ .$$

Nas novas coordenadas

$\xi = x - 2y$, $\eta = x + 2y$,

a equação acima se escreve como:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = \frac{1}{2(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

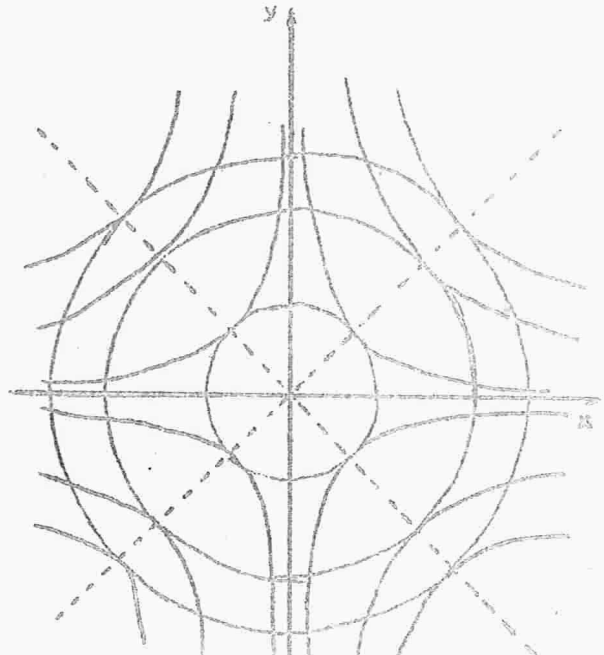
2. A equação

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

é hiperbólica no plano menos os pontos das retas $y = \pm x$ ($\Delta = (x^2 - y^2)^2$. As curvas $\xi = \text{const}$ e $\eta = \text{const}$ devem ser integrais primeiras, respectivamente, das equações

$$x\,dy + y\,dx = 0 \quad , \quad x\,dx + y\,dy = 0 \ .$$

Isto significa que as novas coordenadas $\xi = xy$, $\eta = x^2 + y^2$ nos interessam. De fato, nestas variáveis, a equação toma a forma:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = \frac{1}{4\xi^2 - \eta^2}\,\bar{f}$$

Observe-se que há possibilidade de escolha, pois esta transformação de coordenadas não é determinada univo

IV. MÉTODO DA ENERGIA

Vamos desenvolver o método da energia que demonstra a unicidade e continuidade em relação às condições iniciais da solução de uma equação hiperbólica no $\mathbb{R}^{n+1}$.

Êste caso generaliza o da corda vibrante prêsa nas duas extremidades.

Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, a equação

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left[p(x) \operatorname{grad} u \right] + q(x)\, u = f(x, t) \quad , \qquad (IV.1)$$

com $u = u(x, t)$, $\rho > 0$ e $p > 0$ já está na 1ª forma canônica e é hiperbólica.

Consideremos o seguinte problema: sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, com fronteira $\partial\Omega$ "suficientemente regular", com normal externa n, sendo $U = \Omega \times]0, +\infty[$ e $p \in C^1(\bar{\Omega})$, $p(x) > 0$ em $\bar{\Omega}$, $\rho \in C(\bar{\Omega})$, $\rho(x) > 0$ em $\bar{\Omega}$, $q \in C(\bar{\Omega})$, $q(x) \geq 0$ em Ω; $f \in C(\bar{U})$, $u_0 \in C^1(\bar{\Omega})$, $u_1 \in C(\bar{\Omega})$ e $\alpha, \beta \in C(\partial\Omega)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ não simultâneamente nulas. Nestas condições, determinar uma função $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ solução da equação diferencial (IV.1), satisfazendo às seguintes condições:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\alpha(y) u + \beta(y) \dfrac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{(condição mista de contôrno)} \\ \left.\begin{array}{l} u(x, 0_+) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0_+) = u_1(x) \end{array}\right\} \forall x \in \Omega \text{ (condições iniciais)} \end{array}\right\} \qquad (IV.2)$$

O estudo da existência da solução para êste problema está acima do nível dêste trabalho. Neste capítulo, nos ocuparemos em demonstrar que a solução, <u>se existir</u>, será única e dependerá continuamente de u_0, u_1 e do 2º membro f, num sentido a ser melhor explicado.

O método da energia consiste em majorar a solução e suas derivadas através de cálculos com uma integral cujo valor é ligado à energia nos casos que admitem interpretação física.

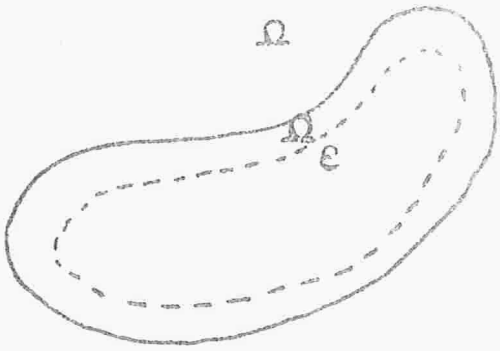
Assim sendo, supondo que u seja solução do problema proposto, definimos a função $J(t)$ como:

$$J^2(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p\,|\text{grad } u|^2 + q\,u^2 \right] dx + \\ + \frac{1}{2}\int_S p\,\frac{\alpha}{\beta}\,u^2\,dS \;, \qquad \text{(IV.3)}$$

$t \geq 0$, em que $S \subset \partial\Omega$ é o conjunto dos pontos y, onde $\alpha(y) \cdot \beta(y) > 0$. E vamos provar que

$$\frac{d}{dt}\left[J^2(t) \right] = \int_\Omega f(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx \;. \qquad \text{(IV.4)}$$

Para tanto, supomos $\partial\Omega$ suficientemente regular, de modo que se possa tomar para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, uma família de abertos Ω_ε com fronteira regular e tais que: $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ e $\Omega_\varepsilon \to \Omega$ quando $\varepsilon \to 0$ (basta, para isto, que $\partial\Omega$ admita uma vizinhança tubular em $\mathbb{R}^n$, por exemplo).



Para $T > 0$, pomos:

$U_T = \Omega \times]0, t[$.

Calculemos, então $I_\varepsilon(T) = \int_{\Omega_\varepsilon}\int_\varepsilon^T f(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt$,

onde u é solução do problema dado. Sendo f o 2º membro da equação, tem-se:

$$I_\varepsilon(T) = \int_{\Omega_\varepsilon}\int_\varepsilon^T \rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx\,dt + \\ + \int_{\Omega_\varepsilon}\int_\varepsilon^T \frac{\partial u}{\partial t}\left[-\text{div}(p\,\text{grad } u) + q\,u \right] dx\,dt \;;$$

calculemos cada uma destas integrais separadamente:

$$I_1 = \int_{\Omega_\varepsilon}\int_\varepsilon^T \rho \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dx\, dt = \int_{\Omega_\varepsilon}\left[\rho\int_\varepsilon^T \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dt\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \Big|_\varepsilon^T dx \quad ; \quad e$$

$$I_2 = \int_{\Omega_\varepsilon}\int_\varepsilon^T \frac{\partial u}{\partial t}\left[-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q\, u\right] dx\, dt =$$

$$= -\int_\varepsilon^T \left[\int_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} u + p\frac{\partial u}{\partial t}\Delta u - q\, u\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx\right] dt \quad ,$$

lembrando agora a 1ª fórmula de Green, se $g \in C^1(\bar{\Omega})$, $h \in C^2(\bar{\Omega})$:

$$\int_\Omega g\,\Delta h\, dx = \int_{\partial\Omega} g\frac{\partial h}{\partial n}\, dS - \int_\Omega \operatorname{grad} g \cdot \operatorname{grad} h\, dx \quad ,$$

vem, tomando-se, para cada $t \in [\varepsilon, T]$: $g = p\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $h = u$, relativamente ao conjunto Ω_ε , tem-se, como $p \in C^1(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ e $u \in C^2(\bar{\Omega}_\varepsilon \times [\varepsilon , T])$, que:

$$I_2 = \int_\varepsilon^T\int_{\Omega_\varepsilon} p \operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \operatorname{grad} u\, dx\, dt - \int_\varepsilon^T\int_{\partial\Omega_\varepsilon} p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\, dS +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} q\, u^2 \Big|_\varepsilon^T dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} p|\operatorname{grad} u|^2 \Big|_\varepsilon^T dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} q\, u^2 \Big|_\varepsilon^T dx - \int_\varepsilon^T\int_{\partial\Omega_\varepsilon} p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\, dS \quad .$$

Reunindo, temos:

$$I_\varepsilon(T) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p\,|\operatorname{grad} u|^2 + q\, u^2\right]\Big|_\varepsilon^T dx -$$

$$- \int_\varepsilon^T \int_{\partial\Omega_\varepsilon} p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\, dS \quad .$$

Façamos $\varepsilon \to 0_+$, como $u \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$ e $f \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$, temos:

$$\int_0^T\int_\Omega f(x,\ t)\ \frac{\partial u}{\partial t}\ dx\ dt\ =\ \lim_{\varepsilon\to 0_+} I_\varepsilon\ (T) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p\ |\ \text{grad}\ u\ |^2 + q\ u^2\right]\Big|_0^T\ dx\ -$$

$$- \int_0^T\int_{\partial\Omega} p\ \frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial u}{\partial n}\ d\ S\ dt$$

Mas em $\partial\Omega$, temos que $\alpha u + \beta\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, então: se $\alpha = 0$ e $\beta > 0$ temos $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, se $\alpha > 0$ e $\beta = 0$ temos $u = 0$, donde $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ também, então a última integral pode ser restrita à parte $S \subset \partial\Omega$, e aí $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta}\ u$. Logo:

$$- \int_0^T\int_{\partial\Omega} p\ \frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial u}{\partial n}\ d\ S\ dt\ =\ \int_S p\ \frac{\alpha}{\beta}\ \left(\int_0^T u\ \frac{\partial u}{\partial t}\ dt\right)\ d\ S =$$

$$= \frac{1}{2}\int_S p\ \frac{\alpha}{\beta}\ u^2\ \Big|_0^T\ d\ S\ .$$

E afinal:

$$\int_0^T\int_\Omega f(x,\ t)\ \frac{\partial u}{\partial t}\ dx\ dt = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p\ |\ \text{grad}\ u|^2 + \right.$$

$$\left. + q\ u^2\right]\Big|_0^T + \frac{1}{2}\int_S p\ \frac{\alpha}{\beta}\ u^2\ \Big|_0^T\ d\ S\ .$$

expressão esta que, derivada em relação a T demonstra (IV.4), isto é, que:

$$\frac{d}{dt}\ J^2(t) = \int_\Omega f(x,\ t)\ \frac{\partial u}{\partial t}\ dx \qquad \text{(IV.4)}$$

ou

$$J^2(t) = J^2(0) + \int_0^t\int_\Omega f(x,\ t)\ \frac{\partial u}{\partial t}\ dx\ . \qquad \text{(IV.5)}$$

e da definição de $J^2(t)$, em (IV.3), tiramos (por continuidade e fazendo $t \to 0_+$):

$$J^2(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\rho u_1^2 + p\,|\text{grad } u_o|^2 + q\, u_o^2)dx + \frac{1}{2}\int_S p\,\frac{\alpha}{\beta}\, u_o^2\, d\,S \quad . \tag{IV.6}$$

Manipulando um pouco mais estas fórmulas, chegaremos a desigualdades úteis para a verificação da continuidade e unicidade. Assim sendo, de(IV.4) tiramos:

$$2\,J(t)\,J'(t) = \int_\Omega f(x,\,t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx \quad , \qquad (J(t) \geqslant 0) \quad ,$$

(se $g \in C(\bar{\Omega})$, pomos: $||g||_2^2 = \int_\Omega |g(x)|^2\,dx$, é válida a desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\int_\Omega g\,h\,dx\,| \leqslant ||g||_2\,||h||_2$) , temos então:

$$2\,J(t)\,|\,J'(t)\,| \leqslant ||f||_2\,||\frac{\partial u}{\partial t}||_2 \quad \text{(em que o 2º membro é função de } t\text{ !)} \tag{IV.7}$$

Por outro lado, sendo $p \geqslant 0$ e $q \geqslant 0$ em $\bar{\Omega}$ e sendo $\alpha/\beta \geqslant 0$ em S , temos, da definição de $J^2(t)$ em (IV.3):

$$|\,J^2(t)\,| \geqslant \frac{1}{2}\,|\int_\Omega \rho\,(\frac{\partial u}{\partial t})^2\,dx\,| \geqslant \frac{\rho_o}{2}\,||\frac{\partial u}{\partial t}||_2^2 \quad , \text{ em que}$$

$\rho_o = \min_{\bar{\Omega}} \rho(x)$, logo $\rho_o > 0$ (pois $\rho(x) > 0$) ; também, sendo $p_o = \min_{\bar{\Omega}} p(x)$, têm-se: $p_o > 0$ e $|\,J^2(t)\,| \geqslant \frac{p_o}{2}\,||\,|\text{grad } u|\,||_2^2$,

das quais tiramos:

$$||\frac{\partial u}{\partial t}||_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{\rho_o}}\,J(t) \quad \text{e} \tag{IV.8}$$

$$||\,|\text{grad } u|\,||_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{p_o}}\,J(t) \quad . \tag{IV.9}$$

Levando (IV.8) em (IV.7) tem-se:

$$|\,J'(t)\,| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\,\rho_o}}\,||f||_2 \tag{IV.10}$$

No entanto, J é uma função continuamente derivável, logo, se $t \geqslant 0$: $J(t) = J(0) + \int_0^t J'(\xi)\,d\xi$.

Então, por (IV.10):

$$J(t) \leqslant J(0) + \frac{1}{\sqrt{2\,\rho_0}} \int_0^t ||f||_2 \, d\tau \ ,$$

e com esta desigualdade voltamos a (IV.8) e (IV.9), obtendo daí:

$$|| \frac{\partial u}{\partial t} ||_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\, J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t ||f||_2 \, d\tau \qquad \text{e} \qquad \text{(IV.11)}$$

$$|| \, | \operatorname{grad} u | \, ||_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{\nu_0}}\, J(0) + \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \nu_0}} \int_0^t ||f||_2 \, d\tau \qquad \text{(IV.12)}$$

Temos, por definição, para cada $t \geqslant 0$:

$$||u||_2^2 (t) = \int_\Omega |u(x, t)|^2 \, dx$$

donde:

$$2||u||_2 \; ||u||_2' \leqslant 2 \left| \int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial t} dx \right| \leqslant 2||u||_2 \; || \frac{\partial u}{\partial t} ||_2$$

logo, para os valores de t para os quais $||u||_2 \neq 0$, se tem:

$$||u||_2' \leqslant || \frac{\partial u}{\partial t} ||_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\, J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t ||f||_2 \, d\tau \ ,$$

Então, para todo $t \geqslant 0$:

$$||u||_2 \leqslant ||u_0||_2 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\, J(0)\, t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \int_0^s ||f||_2 \, d\tau \, d s \qquad \text{e,}$$

como: $\displaystyle\int_0^t \int_0^s ||f||_2 \, d\tau \, d s = \int_0^t (t - \tau) \, ||f||_2 \, d\tau$, vem:

$$||u||_2 \leqslant ||u_0||_2 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\, J(0) t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t (t - \tau) \, ||f||_2 \, d\tau \ . \qquad \text{(IV.13)}$$

Passamos, agora a considerar dois problemas no mesmo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

mas com 2ºs membros f e $\tilde{f}$, respectivamente, e condições iniciais u_0, u_1 e $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ respectivamente - conserva-se a condição de contôrno - e sejam u e $\tilde{u}$ as soluções correspondentes. Suponhamos que se tenha, em $\bar{\Omega}$: $||u_0 - \tilde{u}_0|| \leqslant \varepsilon_0$ (onde $||g|| = \sup_{\bar{\Omega}} |g(x)|$), $||\,|\text{grad } u_0 - \text{grad } \tilde{u}_0|\,||_2 \leqslant \varepsilon'_0$ (tomamos não só a limitação da função, como também de suas derivadas), e $||u_1 - \tilde{u}_1||_2 \leqslant \varepsilon_1$. Seja ε tal que para $0 \leqslant t \leqslant T$: $||f - \tilde{f}||_2 \leqslant \varepsilon$. Temos, por (IV.6), onde a função $J(t)$ é calculada relativa à função $v = u - \tilde{u}$:

$$J^2(0) \leqslant \frac{1}{2} ||\rho|| \, ||u_1 - \tilde{u}_1||_2^2 + \frac{||p||}{2} ||\,|\text{grad } u_0 - \text{grad } \tilde{u}_0|\,||_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} ||q|| \, ||u_0 - \tilde{u}_0||^2 V + \frac{1}{2} ||p \frac{\alpha}{\beta}|| \, ||u_0 - \tilde{u}_0||^2 \sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left[||\rho|| \, \varepsilon_1^2 + ||p|| \, \varepsilon_0'^2 + (||q|| V + ||p \frac{\alpha}{\beta}|| \sigma) \varepsilon_0^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c^2}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_0'^2 + \varepsilon_0^2) \leqslant c^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_0)^2 \quad ,$$

onde $V = \text{vol } \Omega$ e $\sigma = \text{área } S$ e c deve ser tomada de modo conveniente.

Temos, então, por (IV.13):

$$||v||_2 \leqslant \sqrt{V} \varepsilon_0 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} T c (\varepsilon_1 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_0) + \frac{T^2}{2 \rho_0} \varepsilon \quad , \quad \text{então:}$$

$$||v||_2 \leqslant k (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 T + \varepsilon'_0 T + \varepsilon \frac{T^2}{2} + \varepsilon_0 T) \quad , \qquad \text{(IV.14)}$$

com k convenientemente escolhido.

De (IV.12), tiramos:

$$||\,|\text{grad } u - \text{grad } \tilde{u}|\,||_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{p_0}} c (\varepsilon_1 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_0) + \frac{T}{\sqrt{\rho_0 p_0}} \varepsilon \quad ,$$

isto é:

$$||\,|\text{grad } u - \text{grad } \tilde{u}|\,||_2 \leqslant k_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_0 + \varepsilon T) \quad \text{(IV.15)}$$

Ainda de (IV.11), tiramos:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\, c(\varepsilon_1 + \varepsilon_0' + \varepsilon_0) + \frac{T}{\rho_0}\varepsilon \quad , \text{ donde:}$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right\|_2 \leq k_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_0' + \varepsilon_0 + \varepsilon T) \quad . \qquad \text{(IV.16)}$$

Agora, basta enunciar os teoremas.

<u>Unicidade</u> - Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, com fronteira regular $\partial\Omega$; e $U = \Omega \times]0, \infty[$, se existir $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ tal que:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q\, u = f \quad ,$$

$(\rho, q \in C(\bar{\Omega}),\ p \in C^1(\bar{\Omega}),\ \rho > 0,\ p > 0,\ q \geq 0,\ f \in C(\bar{U}))$,

satisfazendo também as condições de contôrno

$$\alpha\, u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad ,$$

$(\alpha, \beta \in C(\partial\Omega),\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$ não simultâneamente nulas) e as condições iniciais

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x) \end{aligned}\right\} \forall x \in \Omega,\ (u_0 \in C^1(\bar{\Omega}),\ u_1 \in C(\bar{\Omega}))$$

repetimos: se existir a solução u, ela será única.

<u>Demonstração</u>: imediata de (IV.14), pois $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_0' = \varepsilon = 0$.

<u>Continuidade</u>: Nas condições anteriormente enunciadas, se u e $\tilde{u}$ são soluções de problemas análogos com segundos membros f e $\tilde{f}$ e condições iniciais $u_0, \tilde{u}_0, u_1, \tilde{u}_1$, respectivamente, dados $T > 0$ e $\eta > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que:

$$\| u_0 - \tilde{u}_0 \|^{(1)} < \delta \quad (\text{em } \bar{\Omega}, \text{ com } \|f\|^{(1)} = \sup \{ \|f\|, \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|, \ldots, \left\| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\| \}) ,$$

$||u_1 - \tilde{u}_1|| < \delta$ e $|f(x, t) - \tilde{f}(x, t)| < \delta$, $x \in \Omega$ e $0 \leqslant t \leqslant T$, então:

$||u - \tilde{u}||_2 < \eta$, $||\,|\text{grad } u - \text{grad } \tilde{u}|\,||_2 < \eta$ e

$||\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}||_2 < \eta$, para todo $0 \leqslant t \leqslant T$.

V. O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Vamos demonstrar a existência e unicidade da solução de um problema que envolve uma equação quase-linear hiperbólica. O caminho seguido é tomar a equação já numa forma simplificada, reduzir o problema a uma equação integral à qual se aplica o Teorema do ponto fixo de Banach. Demonstra-se também a continuidade desta solução em relação às condições iniciais e ao 2º membro.

V.1 Colocação do problema:

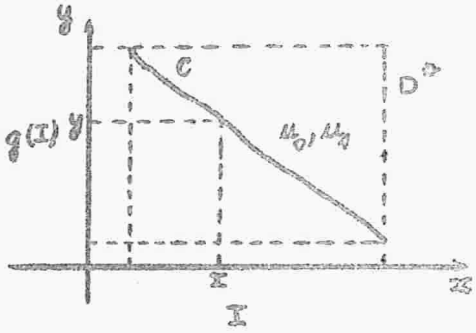
VI.1 O problema a ser resolvido é o seguinte:

1º dada a equação diferencial parcial de 2ª ordem, quase-linear, hiperbólica, já na 2ª forma canônica,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) , \qquad (V.1)$$

2º dada a curva no plano $g : I \to \mathbb{R}$, com $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, $g \in C^1(I)$ e $g'(x) \neq 0$, (para fixar idéias, suporemos $g'(x) \leqslant 0$, $\forall\, x \in I$), e

3º dadas sôbre a curva $C = \{(x, g(x)),\ x \in I\}$ as funções u_0, u_1, determinar a solução u da equação acima (V.1), em $D^a = I \times g(I)$, que satisfaça as seguintes condições de contôrno:



$$\left.\begin{aligned} u\,\Big|_C &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_C &= u_1 \end{aligned}\right\} \qquad (V.2)$$

VI.2 As condições de contôrno

Antes de transformar êste problema numa equação integral, vejamos que as condições (V.2) determinam também, sôbre a curva C, os valores de $\frac{\partial u}{\partial y}$.

De fato, conhecida $u \in C^2(D^a)$, satisfazendo as condições de contôrno (V.2) e se $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_C = u_2$, temos:

$$\frac{d}{dx}\, u_o[x, g(x)] = \frac{\partial u}{\partial x}[x, g(x)] + \frac{\partial u}{\partial y}[x, g(x)] \cdot g'(x) = \qquad (V.3)$$

$$= u_1[x, g(x)] + g'(x) \cdot u_2[x, g(x)] \quad .$$

São, portanto, equivalentes as condições de contôrno (V.2) - em que se determinam sôbre C os valores de u e de $\frac{\partial u}{\partial x}$ - e as seguintes condições:

$$\left.\begin{array}{l} u\,\Big|_C = u_o \\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_C = u_2 \end{array}\right\} \quad (V.4)$$

Sejam, portanto, consideradas as condições de contôrno (V.2) ou (V.4), admitimos conhecidas, em C, as funções u_o, u_1 e u_2, ligadas por (V.3).

Na verdade, não resolveremos o problema em todo o D^*, vamos decompô-lo em 2, construindo u "à direita" da curva C e "à esquerda" de C. Por motivos de ordem técnica, introduzimos as seguintes notações:

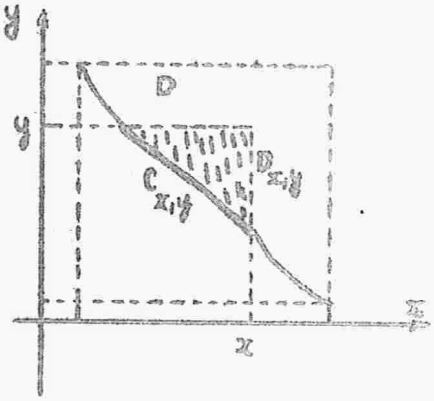
$$D = \left\{ (x, y) \in D \mid x \in I,\ y \geqslant g(x) \right\}$$

e se $(x, y) \in D$, pomos:

$$C_{x,y} = \left\{ (s, g(s)) \in C \mid g^{-1}(y) \leqslant s \leqslant x \right\}$$

e

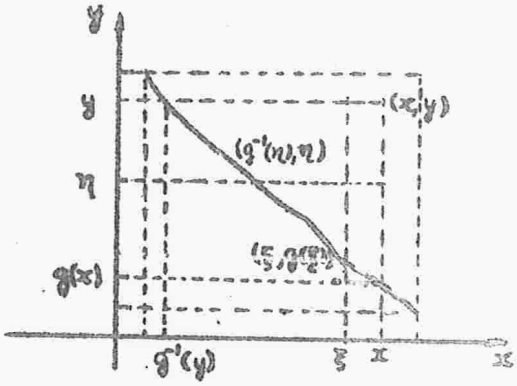
$$D_{x,y} = \left\{ (s,t) \in D \mid g^{-1}(y) \leqslant s \leqslant x,\ g(s) \leqslant t \leqslant y \right\} \quad .$$



VI.3 <u>A equação integral</u>: transformemos, então, o problema dado, restrito a D, numa equação integral. Para tanto, supomos $u \in C^2(D)$ (conseqüentemente, u_o, u_1 e u_2 são contínuas e continuamente deriváveis) e tomemos f contínua em seus argumentos (isto é, em $D \times \mathbb{R}^3$).

Se u é solução da equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f$, integrando em relação a y e se $(x, y) \in D$, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}[x, g(x)] + \int_{g(x)}^{y} f(x, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial \eta})\, d\eta$$



Integrando, agora, em relação a x, vem:

$$u(x,y) = u\left[g^{-1}(y),y\right] +$$

$$+ \int_{g^{-1}(y)}^{x} \frac{\partial u}{\partial \xi}[\xi , g(\xi)]\, d\xi +$$

$$+ \int_{g^{-1}(y)}^{x} \int_{g(\xi)}^{y} f(\xi ,\eta ,u, \frac{\partial u}{\partial \xi} , \frac{\partial u}{\partial \eta})\, d\eta \; d\xi$$, que pelas condições de contôrno, nos dá:

$$u(x, y) = u_o[g^{-1}(y), y] + \int_{g^{-1}(y)}^{x} u_1[\xi , g(\xi)]\, d\xi +$$

$$+ \int_{g^{-1}(y)}^{x} \int_{g(\xi)}^{y} f(\xi , \eta , u, \frac{\partial u}{\partial \xi} , \frac{\partial u}{\partial \eta})\, d\eta \; d\xi \;, \qquad (V.5)$$

que se escreve, abreviadamente:

$$u(x, y) = u_o[g^{-1}(y), y] + \int_{C_{x,y}} u_1 \, d\xi + \int_{D_{x,y}} f \, d\xi \, d\eta \qquad (V.6)$$

Ou, se integramos noutra ordem, obtemos também:

$$u(x, y) = u_o[x, g(x)] + \int_{g(x)}^{y} u_2[g^{-1}(\eta),\eta]\, d\eta +$$

$$+ \int_{g(x)}^{y} \int_{g^{-1}(\eta)}^{x} f(\xi , \eta , u, \frac{\partial u}{\partial \xi} , \frac{\partial u}{\partial \eta})\, d\xi \; d\eta \qquad (V.7)$$

que, abreviadamente, é:

$$u(x, y) = u_o[x, g(x)] + \int_{C_{x,y}} u_2 \, d\eta + \int_{D_{x,y}} f \, d\xi \; d\eta \;. \qquad (V.8)$$

Reciprocamente, se u é solução de (V.5) ($\equiv$ V.6) temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f \quad , \quad u[x, g(x)] = u_o[x, g(x)] \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}[x, g(x)] =$$

$$= u_1[x, g(x)]$$

e, anàlogamente, para o caso de (V.7) (= (V.8)), que nos leva à equação com as condições (V.4).

Então, se $v \in C^{(2)}(D)$ e definimos o operador:

$$T[v](x, y) = u_o[g^{-1}(y), y] + \int_{g^{-1}(y)}^{x} u_1[\xi, g(\xi)]\, d\xi +$$

$$+ \iint_{D_{x,y}} f(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta})\, d\xi\, d\eta \quad , \qquad (V.9)$$

uma função $u \in C^{(2)}(D)$ será solução do problema proposto em A se, e sòmente se, $u = T[u]$, isto é, se, e só se, u fôr um ponto fixo do operador T.

Observamos ainda que, como u_o, u_1 e u_2 estão ligadas por (V.3), uma integração nos leva a:

$$u_o[g^{-1}(y), y] + \int_{g^{-1}(y)}^{x} u_1[\xi, g(\xi)]\, d\xi = u_o[x, g(x)] +$$

$$+ \int_{g(x)}^{y} u_2[g^{-1}(\eta), \eta]\, d\eta \qquad (V.10)$$

e então o mesmo operador T de (V.9) escreve-se também como:

$$T[v](x, y) = u_o[x, g(x)] + \int_{g(x)}^{y} u_2[g^{-1}(\eta), \eta]\, d\eta +$$

$$+ \iint_{D_{x,y}} f[\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}]\, d\xi\, d\eta \, . \qquad (V.11)$$

V.2 <u>O Teorema do ponto fixo de Banach</u>: diz que se E é um espaço métrico completo ($\neq \emptyset$) e $T : E \to E$ é uma contração, isto é, se $\exists\, c < 1$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq c\, d(x, y) \quad , \forall\, x, y \in E \ ,$$

então T admite um, e um só, ponto fixo x_0 (isto é, $\exists !\, x_0 \in E$: $Tx_0 = x_0$). E mais, se $x \in E$ é um ponto qualquer, a seqüência $T^n x$ converge para x_0.

Êste Teorema admite a seguinte generalização, como

<u>Corolário</u>: Se E é um espaço métrico completo ($\neq \emptyset$) e se $T : E \to E$ é um operador tal que T^m ($m \geq 1$, inteiro) seja uma contração, então T admite um, e um só, ponto fixo x_0.

É fácil ver que se $x \in E$, a seqüência $T^k x \to x_0$, quando $k \to \infty$. É nesta segunda forma que aplicaremos o Teorema.

V.3 <u>Um Teorema de Existência e Unicidade da solução do problema exposto em V.1</u>. Dadas: a curva C (com $g \in C^1$ e $g'(x) < 0$) e as funções contínuas e diferenciáveis u_0 e u_1 (ou u_2) em C, determinar $u \in C^2(D)$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad f \in C(I \times g(I) \times \mathbb{R}^3) \ ,$$

$$u\Big|_C = u_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_C = u_1 \quad \left(\text{ou } \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_C = u_2\right) \tag{V.12}$$

Problema êste que equivale a achar um ponto fixo do operador T definido em (V.9) ou (V.11).

Começamos a resolver o problema no caso em que $I = [a, b]$ é um intervalo fechado e <u>limitado</u> e seja $[\alpha, \beta] = g(I)$. Sôbre a função f vamos impor uma condição de Lipschitz, em relação às 3 últimas variáveis, isto é, suponhamos que exista uma constante K tal que,

$$\left| f(x, y, r_1, s_1, t_1) - f(x, y, r_2, s_2, t_2) \right| \leq \tag{V.13}$$

$$\leq K \sup\left\{ |r_1 - r_2|, |s_1 - s_2|, |t_1 - t_2| \right\} \ , \forall\, x \in [a,b], y \in [\alpha, \beta] \ ,$$

$$r_1, r_2, s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Vamos tomar como E o espaço métrico completo $\mathbb{C}^1(D)$, com a seguinte norma: se $u \in \mathbb{C}^1(D)$, pomos:

$$||u||^{(1)} = \sup \left\{ ||u|| \, , \, ||\frac{\partial u}{\partial x}||, ||\frac{\partial u}{\partial y}|| \right\}, \quad \text{em} \tag{V.14}$$

que, se v é uma função contínua no compacto D:

$$||v|| = \sup_{(x,y) \in D} |v(x, y)| \, . \tag{V.15}$$

E passemos a mostrar que estamos nas condições de aplicar o Corolário do Teorema do ponto fixo:

A - O operador T definido em E, por (V.9) ou (V.11), nas condições acima, assume valores em E.

De fato, se $v \in C^1(D)$, $T v \in C^1(D)$, com derivada em relação a x dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} T v(x, y) = u_1 [x, g(x)] + \int_{g(x)}^{y} f(x, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) \, d\eta \tag{V.16}$$

e derivada em relação a y dada por:

$$\frac{\partial}{\partial y} T v(x, y) = u_2[g^{-1}(y), y] + \int_{g^{-1}(y)}^{x} f(\xi, y, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial y}) \, d\xi \, . \tag{V.17}$$

Logo $T(E) \subset E$.

B - Passamos a mostrar que, na métrica considerada em $E = C^1(D)$: $d(u, v) = ||u - v||^{(1)}$, existe um inteiro m tal que T^m seja contração. Para tanto, mostraremos, por indução, que se $n \geqslant 1$ é um inteiro qualquer tem-se:

$$|| T^n u - T^n v ||^{(1)} \leqslant c_n \, ||u - v||^{(1)} \, , \tag{V.18}$$

onde

$$c_n = \frac{(2 k \ell)^n}{2 \, n!} (b - a + \beta - \alpha)^n \, . \tag{V.19}$$

Como $c_n \to 0$ quando $n \to +\infty$, certamente, para $m \geq n_0$, tem-se $c_m < 1$ e T^m é uma contração, como queríamos, para aplicar o Corolário.

Na expressão (V.19) de c_n, K é a constante de Lipschitz de f (V.13) e ℓ é uma constante tomada como:

$$\ell = \max\left\{1, \frac{b-a}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right\} . \qquad (V.20)$$

Demonstremos, então, (V.18), que estará verificada se mostrarmos que:

$$\left.\begin{array}{l} \left| T^n u(x,y) - T^n v(x,y) \right| \leq c_n \|u-v\|^{(1)} \\ \left| \frac{\partial}{\partial x} T^n u(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} T^n v(x,y) \right| \leq c_n \|u-v\|^{(1)} \\ \left| \frac{\partial}{\partial y} T^n u(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} T^n v(x,y) \right| \leq c_n \|u-v\|^{(1)} \end{array}\right\} \forall (x,y) \in D \qquad (V.21)$$

Façamos $n = 1$ e mostremos que (V.21) vale. Das definições de $T u$ e $T v$, vem imediatamente que:

$$|T u(x,y) - T v(x,y)| \leq \iint_{D_{x,y}} \left| f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right| d\xi\, d\eta \leq K(y-\alpha)(x-a)\, \|u-v\|^{(1)} \leq$$

$$\leq K \ell (y - \alpha + x - a)\, \|u-v\|^{(1)} , \qquad (V.22)$$

porque pelo modo como ℓ foi definido em (V.20): $x - a \leq 2\ell$ e $y - \alpha \leq 2\ell$, logo:

$$(y-\alpha)(x-a) \leq \frac{1}{2}\left[(x-a)^2 + (y-\alpha)^2\right] \leq$$

$$\leq \ell\left[x - a + y - \alpha\right] .$$

De (V.16), tiramos que:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} T u(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} T v(x, y) \right| \leq \int_{g(x)}^{y} \left| f(x, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) - \right.$$

$$\left. - f(x, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial \eta}) \right| d\eta \leq K(y - \alpha) \, ||u - v||^{(1)} \leq$$

$$\leq K \ell (y - \alpha + x - a) \, ||u - v||^{(1)}, \quad \text{porque} \tag{V.23}$$

$$\ell \geq 1 \quad e \quad x - a \geq 0 \; ;$$

Anàlogamente, de (V.17) tiramos:

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} T u(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} T v(x, y) \right| \leq \int_{g^{-1}(y)}^{x} \left| f(\xi, y, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial y}) - \right.$$

$$\left. - f(\xi, y, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial y}) \right| d\xi \leq K(x - a) \, ||u - v||^{(1)} \leq$$

$$\leq K \ell (y - \alpha + x - a) \, ||u - v||^{(1)} . \tag{V.24}$$

Temos, então demonstrado (V.21) para o caso de $n = 1$, pois $y - \alpha \leq \beta - \alpha$ e $x - a \leq b - a$. Suponhamos que temos para $m = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\left.\begin{array}{l} | T^m u(x, y) - T^m v(x, y) | \\ \left| \frac{\partial}{\partial x} T^m u(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} T^m v(x, y) \right| \\ \left| \frac{\partial}{\partial y} T^m u(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} T^m v(x, y) \right| \end{array}\right\} \leq \frac{(2 K \ell)^m}{2 m !} (y - \alpha + x - a)^m \, ||u - v||^{(1)} \tag{V.25}$$

e mostremos que (V.25) vale também para $m = n$. Isto demonstra (V.18) completamente. Com efeito, temos:

$$T^n u(x, y) = T(T^{n-1} u)(x, y) = u_0[g^{-1}(y), y] + \int_{g^{-1}(y)}^{x} u_1[\xi, g(\xi)]\, d\xi +$$

$$\iint_{D_{x,y}} f(\xi, \eta, T^{n-1} u, \frac{\partial T^{n-1} u}{\partial \xi}, \frac{\partial T^{n-1} u}{\partial \eta})\, d\xi\, d\eta =$$

$$= u_0[x, g(x)] + \int_{g(x)}^{y} u_2[g^{-1}(\eta), \eta]\, d\eta +$$

$$+ \int_{g(x)}^{y} \int_{g^{-1}(\eta)}^{x} f(\xi, \eta, T^{n-1} u, \frac{\partial T^{n-1} u}{\partial \xi}, \frac{\partial T^{n-1} u}{\partial \eta})\, d\xi\, d\eta \quad , \qquad (V.26)$$

logo:

$$| T^n u(x, y) - T^n v(x, y) | \leqslant \iint_{D_{x,y}} |f(\xi, \eta, T^{n-1} u, - - -) -$$

$$- f(\xi, \eta, T^{n-1} v, \frac{\partial}{\partial \xi} T^{n-1} v, \frac{\partial}{\partial \eta} T^{n-1} v) |\, d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant K \int_{g(x)}^{y} \int_{g^{-1}(\eta)}^{x} \frac{(2 K \ell)^{n-1}}{2(n-1)!} (\eta - \alpha + \xi - a)^{n-1} ||u - v||^{(1)}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= K \frac{(2 K \ell)^{n-1}}{2(n-1)!} ||u - v||^{(1)} \int_{g(x)}^{y} [\frac{(\eta - \alpha + x - a)^n}{n} - \frac{(\eta - \alpha + g^{-1}(\eta) - a)^n}{n}]\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant K \frac{(2 K \ell)^{n-1}}{2\, n!} ||u - v||^{(1)} \int_{g(x)}^{y} (\eta - \alpha + x - a)^n\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant K \frac{(2 K \ell)^{n-1}}{2\, n!} ||u - v||^{(1)} \cdot 2\ell\, (y - \alpha + x - a)^n =$$

$$= \frac{(2 K \ell)^n}{2\, n!} (y - \alpha + x - a)^n ||u - v||^{(1)} \quad .$$

Também:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} T^n u(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} T^n v(x, y) \right| \leq$$

$$\leq \int_{g(x)}^{y} \left| f(x, \eta, T^{n-1} u, \frac{\partial}{\partial x} T^{n-1} u, \frac{\partial}{\partial \eta} T^{n-1} u) - \right.$$

$$\left. - f(x, \eta, T^{n-1} v, \frac{\partial}{\partial x} T^{n-1} v, \frac{\partial}{\partial \eta} T^{n-1} v) \right| d\eta \leq$$

$$\leq K \int_{g(x)}^{y} \frac{(2 K \ell)^{n-1}}{2(n-1)!} ||u - v||^{(1)} (\eta - \alpha + x - a)^{n-1} d\eta =$$

$$= K \frac{(2 K \ell)^{n-1}}{2 n!} ||u - v||^{(1)} \left[(y - \alpha + x - a)^n - (g(x) - \alpha + x - a)^n \right] \leq$$

$$\leq K \frac{(2 K \ell)^{n-1}}{2 n!} (y - \alpha + x - a)^n ||u - v||^{(1)} \leq \frac{(2 K \ell)^n}{2 n!} (y - \alpha + x - a)^n ,$$

porque $2\ell \geq 2 > 1$;

Anàlogamente, para a derivada em relação a y :

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} T^n u(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} T^n v(x, y) \right| \leq$$

$$\leq \int_{\varepsilon^{-1}(y)}^{x} \left| f(\xi, y, T^{n-1} u, \frac{\partial}{\partial \xi} T^{n-1} u, \frac{\partial}{\partial y} T^{n-1} u) - \right.$$

$$\left. - f(\xi, y, T^{n-1} v, \frac{\partial}{\partial \xi} T^{n-1} v, \frac{\partial}{\partial y} T^{n-1} v) \right| d\xi \leq$$

$$\leq \frac{(2 K \ell)^n}{2 n!} (y - \alpha + x - a)^n .$$

Está terminada a indução e, portanto, podemos aplicar o Corolário do Teorema do ponto fixo de Banach, para concluir que existe, em $C^{1}(\Sigma)$, uma, e uma só função u tal que $u = T u$, isto é, existe uma, e uma só, solução do problema estudado neste capítulo, desde que verificadas as condições impostas. Observe-se que das fórmulas (V.16) e (V.17), segue que

V. 4 Continuidade em relação às condições de contôrno e ao 2º membro:

Consideremos, agora, dois problemas do mesmo tipo, ambos satisfazendo às condições do Teorema de existência e unicidade relativos à mesma curva C e mostremos que é possível tomar as condições de contôrno e os 2ºs membros não muito "distantes" entre si de modo que as respectivas soluções também não se "afastem" muito.

Em têrmos precisos, sejam f e $\tilde{f}$ funções contínuas em $D \times \mathbb{R}^3$, lipschitzianas em relação às 3 últimas variáveis, sejam também dadas, em C, as funções diferenciáveis u_o, $\tilde{u}_o$, u_1, (ou u_2), $\tilde{u}_1$ (ou $\tilde{u}_2$) e consideremos os problemas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}) \\ u\Big|_C = u_o \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_C = u_1 \ (\text{ou } \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_C = u_2) \end{array}\right\} \qquad (V.27)$$

e

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} = \tilde{f}(x, y, \tilde{u}, \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial y}) \\ \tilde{u}\Big|_C = \tilde{u}_o \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\Big|_C = \tilde{u}_1 \ (\text{ou } \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\Big|_C = \tilde{u}_2) \end{array}\right\} \qquad (V.28)$$

Mostraremos que, se u e $\tilde{u}$ são as respectivas soluções e se é dado $\varepsilon > 0$, determina-se $\eta > 0$ tal que, para $||f - \tilde{f}|| < \eta$ (em $D \times \mathbb{R}^3$), $||u_o - \tilde{u}_o||^{(1)} < \eta$ (em C, onde

$$||u_o - \tilde{u}_o||^{(1)} = \max\left\{ \sup_{a \leq x \leq b} \{|u_o[x, g(x)]|\}, \sup_{a \leq x \leq b} \{|\frac{d}{dx} u_o[x, g(x)]|\} \right\}$$

e $||u_1 - \tilde{u}_1|| < \eta$ (em C), teremos: $||u - \tilde{u}||^{(1)} < \varepsilon$ (em D).

Para tanto, suponhamos: $||f - \tilde{f}|| < \delta$ (em $D \times \mathbb{R}^3$), sendo

K a constante de Lipschitz para f; e ainda: $||u_o - \tilde{u}_o||^{(1)} < \delta_o$ e $||u_1 - \tilde{u}_1|| < \delta_1$. Pela relação (V.3) entre u_o, u_1 e u_2, $\tilde{u}_o$, $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$, tiramos que: $||u_2 - \tilde{u}_2|| < \delta_2 (\delta_2 = \Lambda(\delta_o + \delta_1)$, com $g'(x) \leqslant -\frac{1}{\Lambda} < 0)$.

Calculamos, agora $||u - \tilde{u}||^{(1)}$ lembrando que se T e $\tilde{T}$ são os operadores tais que $u = T\,u$, $\tilde{u} = \tilde{T}\,\tilde{u}$, temos que:

$$T^k v \xrightarrow[k \to +\infty]{} u \text{ em } C^1(D), \text{ isto é, } ||T^k v - u||^{(1)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 .$$

Sendo dado $\varepsilon > 0$ podemos, então, considerar um inteiro k para o qual se tenha:

$$|| T^k \tilde{u} - u ||^{(1)} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (V.29)$$

e calculamos:

$$|| \tilde{u} - u||^{(1)} \leqslant || \tilde{T}^k \tilde{u} - T^k \tilde{u} ||^{(1)} + ||T^k \tilde{u} - u||^{(1)} \qquad (V.30)$$

Sendo, então, m um inteiro, calculemos, por indução sôbre m, $|| \tilde{T}^m \tilde{u} - T^m \tilde{u}||^{(1)}$. Ora, se $v \in C^1(D)$, têm-se:

$$| (\tilde{T}v - T\,v)(x, y) | \leqslant | (\tilde{u}_o - u_o)\,[g^{-1}(y), y] | + (x - a)||\tilde{u}_1 - u_1|| +$$

$$+ (x - a)(y - \alpha)\,||f - \tilde{f}|| < \delta_o + (x - a)\delta_1 + \ell(y - \alpha + x - a)\delta ,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{T}v - T\,v)(x, y) \right| \leqslant ||\tilde{u}_1 - u_1|| + (y - \alpha)|| f - \tilde{f} || < \delta_1 +$$

$$+ (y - \alpha)\,\delta \quad \text{e}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{T}\,v - T\,v)(x, y) \right| \leqslant ||\tilde{u}_2 - u_2|| + (x - a)\,||f - \tilde{f}|| < \delta_2 + (x-a)\delta$$

portanto, se pomos: $\bar{\delta} = \max\{ \delta_o + (b - a)\delta_1, \delta_1, \delta_2\}$ e

$B = \ell\,(b - a + \beta - \alpha)$, podemos garantir que:

$$|| \tilde{T}\,v - T\,v ||^{(1)} < \bar{\delta} + B\delta \qquad (V.31)$$

$$(\tilde{T}^m v - T^m v)(x, y) = (\tilde{u}_0 - u_0)[g^{-1}(y), y] +$$

$$+ \int_{g^{-1}(y)}^{x} (\tilde{u}_1 - u_1)[\xi, g(\xi)]\, d\xi +$$

$$+ \iint_{D_{x,y}} [\tilde{f}(\xi, \eta, \tilde{T}^{m-1} v, \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{T}^{m-1} v, \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{T}^{m-1} v) -$$

$$- f(\xi, \eta, T^{m-1} v \frac{\partial}{\partial \xi} T^{m-1} v, \frac{\partial}{\partial \eta} T^{m-1} v)]\, d\xi\, d\eta \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{T}^m v - T^m v)(x, y) = (\tilde{u}_1 - u_1)[x, g(x)] +$$

$$+ \int_{g(x)}^{y} \tilde{f}(x, \eta, \tilde{T}^{m-1} v, \ldots) - f(x, \eta, T^{m-1} v, \ldots)]\, d\eta$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tilde{T}^m v - T^m v)(x, y) = (\tilde{u}_2 - u_2)[g^{-1}(y), y] +$$

$$+ \int_{g^{-1}(y)}^{x} [\tilde{f}(\xi, y, \tilde{T}^{m-1} v, \ldots) - f(\xi, y, T^{m-1} v, \ldots)]\, d\xi$$

e mostra-se, sem maiores dificuldades, que: $||\tilde{T}^m v - T^m v||^{(1)} <$

$$< \bar{\delta} + B K \, || \tilde{T}^{m-1} v - T^{m-1} v ||^{(1)} \quad .$$

Agora, levando (V.31) em conta, afirmamos que:

$$|| \tilde{T}^m v - T^m v ||^{(1)} < (1 + B K + B^2 K^2 + \ldots + B^{m-1} K^{m-1}) \bar{\delta} + B^m K^{m-1} \delta \quad . \tag{V.32}$$

Então, tomando $m = k$ de modo que valha (V.29), podemos tomar $\eta > 0$ tal que:

$$(1 + B K + \ldots + B^{k-1} K^{k-1} + B^k K^{k-1}) \eta < \frac{\varepsilon}{2}$$

e tomamos $\bar{\delta} = \delta = \eta$ e teremos, por (V.30):

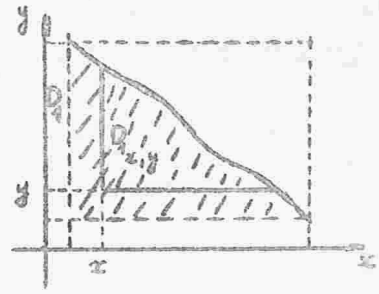
$$||\tilde{u} - u||^{(1)} \leq || \tilde{T}^k \tilde{u} - T^k \tilde{u}||^{(1)} + || T^k \tilde{u} - u||^{(1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad ,$$

c.q.d.

V.5 Algumas extensões:

A - Primeiramente o mesmo que se fêz em D pode ser feito em

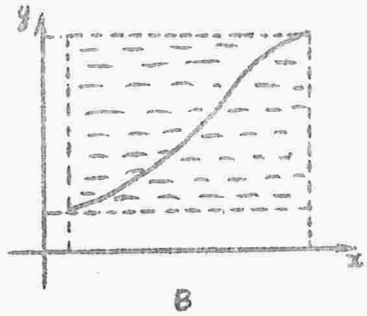
$$D_1 = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \ , \ y \leqslant g(x)\}$$



A

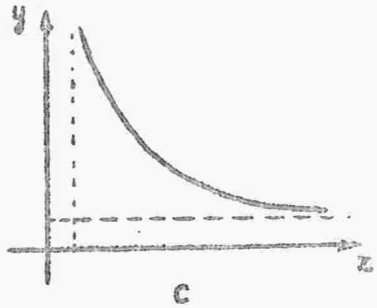
mudando convenientemente o operador T.

B - Outro caso que se trata de modo análogo a êste é quando $g'(x) \geqslant 0$.



B

C - Já quando o intervalo I considerado fôr aberto $]a, b[$, limitado, ou não, temos que modificar um pouco as hipóteses, impondo que o 2º membro satisfaça a uma condição de Lipschitz em relação às 3 últimas variáveis de modo que para cada ponto $(x, y) \in D$ se possa tomar a mesma constante K em todo o $D_{x,y}$. Sob esta condição e com algumas adaptações, demonstra-se a existência de uma, e uma só, solução do problema. Quanto à continuidade, os resultados se alteram pois devemos considerar as desigualdades sempre em compactos do tipo $D_{x,y}$.



C