DIFERENTES CONCEITOS DE FUNÇÃO DE VARIAÇÃO LIMITADA

MARIA ELENA SAN MARTIN ARIAS
Instituto de Matemática - Universidad Austral de Chile
Valdivia - Chile

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre.

SÃO PAULO - BRASIL
1971

DIFERENTES CONCEITOS DE FUNÇÃO DE VARIAÇÃO LIMITADA

MARIA ELENA SAN MARTIN ARIAS
Instituto de Matemática - Universidad Austral de Chile
Valdivia - Chile

Orientador: Prof. Dr. Chaim S. Hönig

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre.

SÃO PAULO - BRASIL
1971

1977

A meu espôso,

aos meus filhos e

aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Desejamos expressar nossos sinceros agradecimentos a todos aquêles que, de uma forma ou de outra, contribuiram para a execução do presente trabalho, e de maneira especial às seguintes pessoas e entidades:

Professor Dr. Chaim S. Hönig, Conselheiro Principal, cujos ensinamentos, orientação e estímulos constantes, tornaram possível a execução dêste trabalho;

Professor Dr. Cândido Lima da Silva Dias, pelas facilidades concedidas como Diretor do Instituto de Matemárica e Estatística da Universidade de São Paulo;

Professor Galdino C. da Rocha Filho, pelas sugestões e críticas construtivas na realização do trabalho;

Ao colega e amigo César Polcino M., pelas proveitosas discussões e auxílios no decorrer dos cursos de pós-graduação que fizemos no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo;

À Universidad Austral de Chile, pela oportunidade de aperfeiçoamento concedida;

À Organização dos Estados Americanos (OEA), Programa Multinacional de Matemática, pela bôlsa de estudos recebida durante todo o período de pós-graduação.

María Elena San Martin A.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por finalidade apresentar uma sistematização dos conceitos de função de variação limitada, - quando esta é definida num intervalo $[a,b]$ da reta, assumindo valôres num espaço de Banach X, real ou complexo, assim como fazer uso dêstes para algumas aplicações.

Quando $X = \mathbb{R}$, é possível caracterizar as funções de variação limitada, usando o conceito de função monótona porém, para o caso geral em que X é um espaço de Banach qualquer, não contando com a estrutura de conjunto ordenado completo da reta, não é possível fazer uso dêste conceito para chegar a uma tal caracterização.

As funções de variação limitada na reta, servem para representar os funcionais lineares contínuos definidos sôbre $C([a,b])$ (espaço das funções numéricas contínuas); assim, o Teorema de Riesz diz que, dado um funcional linear contínuo $F \varepsilon C([a,b])'$, existe uma função α de variação limitada, tal que $F(\phi) = \int_a^b \phi(t)\, d\,\alpha(t)$, para tôda $\phi \varepsilon C([a,b])$. O mesmo teorema ainda vale se $F \varepsilon C([a,b], X)'$ e nêste caso a representação é feita por uma função de variação limitada a valôres em X' (ver Capítulo IV, Teorema 4.1.3).

Se, mais geralmente, consideramos $F \varepsilon L(C([a,b]), X)$ (espaço das funções lineares, contínuas de $C([a,b])$ em X), somos obrigados a introduzir a noção de função de variação limitada fraca e nêste caso a representação de F é dada por uma destas funções assumindo valôres em X'' (ver Capítulo IV, Teorema 4.2).

Finalmente, no caso mais geral em que $F \in L[C([a,b], X), Y]$ é preciso introduzir a noção de função de semivariação limitada para representar estas aplicações lineares (ver Capítulo ~~VI~~ IV, Teorema 4.3).

Tudo isto justifica o estudo das funções de variação limitada e mostra a conveniência de uma sistematização das diversas definições e propriedades delas.

Com respeito às definições dadas no decorrer do presente trabalho, elas podem ser feitas para espaços normados, mas as apresentamos apenas para espaços de Banach, pois é nêsses espaços que valem as mais importantes propriedades destas funções.

A matéria foi distribuida em quatro capítulos; o Capítulo I foi dividido em duas secções; na seção I.1 apresentamos quatro diferentes categorias de função de variação limitada e na seção I.2 damos mais detalhes sôbre as funções de variação forte - limitada, incluindo o caso real. Para maior informação a respeito, pode-se consultar (8); o caso das funções de variação limitada fraca é tratado em parte em (5) e (6), e o caso das funções de semivariação limitada pode ser encontrado em (4).

O Capítulo II foi dividido em duas seções; na seção II.1 damos o conceito de função de B-semivariação limitada, sistematizando os dados no Capítulo I, e na seção II.2 mostramos que em alguns casos particulares, obtemos as categorias dadas anteriormente.

No Capítulo III, também dividido em duas seções, damos a integral de Riemann-Stieltjes, a existência desta quando o integrando é uma função contínua e o integrador é de B-semivariação limitada (seção III.1), e o caso particular dos quatro conceitos anteriores (seção III.2). A teoria da integral de Riemann--Stieltjes na reta é discutido amplamente por (1) e (7).

O Capítulo IV foi dividido em três seções; na seção IV.1 damos a generalização do Teorema de Riesz, isto é, a representação dos funcionais lineares contínuos sôbre $C([a,b], X)$; na seção IV.2 damos a representação das aplicações lineares contínuas - de $C(|a,b|)$ em X e finalmente, na seção IV.3 damos a representação das aplicações lineares contínuas de $C([a,b], X)$ em Y. Êste último teorema foi demonstrado pelo Professor Dr. Chaim S. Hönig no " Seminário sôbre Equações Diferenciais" dado no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, no ano de 1971.

Finalmente, observamos que os elementos de Análise-Funcional empregados nêste trabalho, podem ser encontrados em (7).

CAPÍTULO I

NOÇÕES BÁSICAS

I.1 - DEFINIÇÕES E EXEMPLOS.

Dado um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, indicamos com $D_{[a,b]}$ (ou simplesmente D) o conjunto das sequências $d = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ onde $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ (que denominanos de PARTIÇÕES do intervalo $[a,b]$) e escrevemos

$$|d| = n$$

$$\Delta d = \max_{i=1,\ldots,n} (t_i - t_{i-1})$$

Dados $d, d' \in D$ escrevemos $d \leq d'$ (d é menos fina que d') se todo ponto de d fôr um ponto de d'; dados $d_1, d_2 \in D$ indicamos por $d_1 \cup d_2$ a partição de $[a,b]$ obtida reunindo os pontos de d_1 e de d_2.

Definição 1.1.1: Seja α uma função definida em $[a,b]$ a valôres num espaço de Banach X e $d \in D$; chamamos VARIAÇÃO de α na partição d a

$$V_d[\alpha] = \sum_{i=1}^{|d|} \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \|$$

α diz-se FORTEMENTE DE VARIAÇÃO LIMITADA (ou simplesmente de VARIAÇÃO LIMITADA) se

$$V[\alpha] = \sup_{d \in D} V_d[\alpha]$$

é finito.

Chamaremos $BV([a,b], X)$ o conjunto das funções de $[a,b]$ em X que são fortemente de variação limitada. Se $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ escreveremos $BV([a,b])$. É facil ver que $BV([a,b], X)$ é um espaço vetorial e que a aplicação

$$\alpha \in BV([a,b], X) \to V[\alpha] \in R$$

é uma seminorma sôbre êle.

Uma DIVISÃO δ do intervalo $[a,b]$ é um conjunto de pontos $\{s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_n, t_n\}$ tais que

$$a \leqslant s_1 < t_1 \leqslant s_2 < t_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n < t_n \leqslant b$$

Chamaremos $\Delta_{[a,b]}$ (ou simplesmente Δ) o conjunto de tôdas as divisões δ de $[a,b]$

DEFINIÇÃO 1.1.2: Seja α uma função de $[a,b]$ num espaço de Banach X, e $\delta \in \Delta$. O número

$$W_\delta[\alpha] = \| \sum_{i=1}^{n} [\alpha(t_i) - \alpha(s_i)] \|$$

denomina-se VARIAÇÃO FRACA de α na divisão δ.

α diz-se FRACAMENTE DE VARIAÇÃO LIMITADA se

$$W[\alpha] = \sup_{\delta \in \Delta} W_\delta[\alpha]$$

é finito.

Anotaremos com $BW([a,b], X)$ o conjunto das funções de $[a,b]$ em X que são fracamente de variação limitada. Se $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, escreveremos $BW([a,b])$. É fácil ver que $BW([a,b], X)$ é um espaço vetorial e que a aplicação

$$\alpha \in BW([a,b], X) \to W[\alpha] \in R$$

é uma seminorma sôbre êle.

PROPOSIÇÃO 1.1.1 :

$$BV([a,b], X) \subset BW([a,b], X) \qquad \text{e}$$

$$W[\alpha] \leq V[\alpha]$$

para tôda $\alpha \in BV([a,b], X)$.

DEMONSTRAÇÃO: seja $\alpha \in BV([a,b], X)$ e $\delta \in \Delta$ dado por

$$a \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n \leq b.$$

$$W_\delta[\alpha] = \| \sum_{i=1}^{n} [\alpha(t_i) - \alpha(s_i)] \|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \| \alpha(t_i) - \alpha(s_i) \|$$

$$\leq \sum_{j=2}^{2n} \| \alpha(t'_j) - \alpha(t'_{j-1}) \|$$

onde $t'_1 = s_1$, $t'_2 = t_1$, $t'_3 = s$, ... $t'_{2n} = t_n$

logo

$$W_\delta[\alpha] \leq \sum_{j=2}^{2n} \| \alpha(t'_j) - \alpha(t'_{j-1}) \|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{|d|} \| \alpha(t'_j) - \alpha(t'_{j-1}) \qquad (*)$$

$$\leq V[\alpha]$$

(*) onde d é a partição gerada pelos t'_j, isto é, obtém-se d juntando a e b aos t'_j se fôr necessário.

Daí segue que:

$$W\,[\alpha] \leqslant V\,[\alpha]$$

e portanto $\qquad \alpha \in BW\,([a,b],\, X).$

PROPOSIÇÃO 1.1.2: Se $X = \mathbb{R}$ então $BW\,([a,b],\mathbb{R}) = BV\,([a,b],\mathbb{R})$ e

$$W\,[\alpha] \leqslant V\,[\alpha] \leqslant 2\,W\,[\alpha]$$

α ; $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$

DEMONSTRAÇÃO: seja $\alpha \in BW\,([a,b],\mathbb{R})$ e

d: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$

$$V_d\,[\alpha] = \sum_{i=1}^{|d|} \left|\, \alpha\,(t_i) - \alpha(t_i - 1) \,\right|$$

Consideremos os pares de pontos (t_{i-1}, t_i) onde a diferença $\alpha\,(t_i) - \alpha\,(t_{i-1})$ é positiva ou nula; anotemos por δ_1 a divisão associada a êles e por δ_2 a divisão associada aos pares de pontos restantes; então

$$V_d\,[\alpha] = \sum_{\delta 1} |\alpha\,(t_i) - \alpha\,(t_{i-1})| + \sum_{\delta 2} |\alpha\,(t_j) - \alpha\,(t_{j-1})|$$

$$= \Big|\sum_{\delta 1} [\,\alpha\,(t_i) - \alpha\,(t_{i-1})]\Big| + \Big|\sum_{\delta 2} [\,\alpha\,(t_j) - \alpha\,(t_{j-1})]\Big|$$

$$= W_{\delta 1}\,[\alpha] + W_{\delta 2}\,[\alpha]$$

$$\leqslant 2\,W\,[\alpha]$$

logo

$$V\,[\alpha] \leqslant 2\,W\,[\alpha]$$

e, da proposição anterior segue a nossa afirmação.

PROPOSIÇÃO 1.1.3 $\quad BV([a,b],\mathbb{R}^n) = BW([a,b],\mathbb{R}^n)$

DEMONSTRAÇÃO:

i) Mostraremos que $\alpha \in BV([a,b],\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \alpha_j \in BV([a,b],\mathbb{R})$ para $j = 1, 2, \ldots, n$:

Seja d uma partição de $[a,b]$, dada por

$d: a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Das desigualdades

$$|\alpha_j(t_i) - \alpha_j(t_{i-1})| \leqslant \left[\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j(t_i) - \alpha_j(t_{i-1})|^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j(t_i) - \alpha_j(t_{i-1})|$$

segue que

$$V_d[\alpha_j] < V_d[\alpha] \leqslant \sum_{j=1}^{n} V_d[\alpha_j]$$

e portanto

$$V[\alpha_j] \leqslant V[\alpha] \leqslant \sum_{j=1}^{n} V[\alpha_j].$$

ii) Mostraremos agora que $\alpha \in BW([a,b],\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \alpha_j \in BW([a,b],\mathbb{R})$

para $j = 1, 2, \ldots n$:

Se $\delta : a \leqslant s_1 < t_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n < t_n \leqslant b$, é uma divisão de $[a,b]$, então:

$$W_\delta[\alpha_j] = \left|\sum_{i=1}^{m} [\alpha_j(t_i) - \alpha_j(s_i)]\right|$$

$$\leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^{m}[\alpha_1(t_i) - \alpha_1(s_i)]\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m}[\alpha_n(t_i) - \alpha_n(s_i)]\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant \left|\sum_{i=1}^{m}[\alpha_1(t_i) - \alpha_1(s_i)]\right| + \ldots + \left|\sum_{i=1}^{m}[\alpha_n(t_i) - \alpha_n(s_i)]\right|$$

logo

$$W_\delta[\alpha_j] \leqslant W_\delta[\alpha] \leqslant \sum_{j=1}^{n} W_\delta[\alpha_j]$$

e portanto

$$W[\alpha_j] \leqslant W[\alpha] \leqslant \sum_{j=1}^{n} W[\alpha_j]$$

iii) De (i), (ii) e da proposição anterior segue a nossa afirmação.

COROLÁRIO: Seja X um espaço normado de dimensão finita n. Uma função α de $[a,b]$ a valôres em X é de variação limitada, se e sòmente se, cada uma de suas componentes, com relação a uma base qualquer, é de variação limitada. Temos também $BV([a,b], X) = BW([a,b], X)$.

DEMONSTRAÇÃO: Como num espaço de dimensão finita tôdas as normas são equivalentes, podemos trocar a norma de X pela norma

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in X \longrightarrow \| x \|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \in \mathbb{R} .$$

Além disso, existem $k_1\ k_2 > 0$ tais que

$$k_1 \| x \|_X \leqslant \| x \|_1 \leqslant k_2 \| x \|_X$$

para todo $x \in X$, logo α é de variação limitada com a $\| \ \|_X$ se e sòmente se ela é de variação limitada com a $\| \ \|_1$. O resto da demonstração é análoga à anterior.

OBSERVAÇÕES E EXEMPLOS

1. Em geral, para espaços de dimensão infinita, não é verdade que $BV([a,b], X)$ seja igual a $BW([a,b], X)$; de fato, façamos $X = C_o(N)$, espaço das sequências $x = (x_n)_{n \in N}$ de números complexos tais que $X_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$ com a norma

$$x = (x_n)_{n \in N} \in C_o(N) \longmapsto \| x \| = \sup_{n \in N} | x_n |$$

Se $\overline{e}_n$ é a sequência cujos n primeiros têrmos são 1 e o resto 0, definamos $\alpha : [0,1] \longmapsto C_o(N)$ como sendo:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \bar{e}_1 & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \bar{e}_n & \text{se } t \in \left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right], \ n \geq 2 \\ 0 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

Dado $k \in \mathbb{R}$ podemos escolher $d \in D_{[0, 1]}$ com $|d| > k$ e tal que os seus pontos estejam em diferentes intervalos da forma $\left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right]$.

Então,

$$V_d[\alpha] = \sum_{i=1}^{|d|} || \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) || = |d| > k$$

e portanto

$$V[\alpha] = +\infty.$$

Se tomamos uma divisão $\delta \in \Delta_{[0, 1]}$

δ: $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 < \ldots \leq s_n < t_n \leq 1$

temos duas possibilidades:

a) Se s_i e t_i pertencem ao mesmo subintervalo, $\alpha(t_i) - \alpha(s_i)$ é nulo.

b) Se $s_i \in \left(1 - \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k+1}\right]$ e $t_i \in \left(1 - \frac{1}{\ell}, 1 - \frac{1}{\ell+1}\right]$ com $k < \ell$, então

$\alpha(t_i) - \alpha(s_i) = (0 \ldots 011\, 1 \ldots 1\, 0 \ldots)$.

onde o primeiro 1 aparece na posição $k + 1$ e o último na posição ℓ, logo

$$W_\delta[\alpha] = || \sum_{i=1}^{n} [(t_i) - \alpha(s_i)] || \leq 1$$

o que implica

$W[\alpha] = 1$.

2. É fácil ver que tôda função α de variação limitada, é limitada. De fato, para todo $t \in [a,b]$

$|| \alpha(t) || \leq || \alpha(a) || + V[\alpha]$.

O mesmo vale para as funções de variação limitada fraca.

3. Nem tôda função contínua é de variação limitada, mesmo se $X = \mathbb{R}$; por exemplo, seja

$\alpha: [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por: no ponto de abcissa

$\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\alpha(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$; no intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ ela é linear; $\alpha(0) = 0$.

É claro que α é contínua e sua variação é

$$(1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \ldots = +\infty .$$

Outro exemplo é o seguinte:

$$\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ \alpha(t) = t \cos \frac{\pi}{2t} \text{ se } t \neq 0 \text{ e } \alpha(0) = 0.$$

Da proposição 1.1.2 segue que a mesma observação vale para as funções fracamente de variação limitada.

4. Se $\alpha : [a,b] \to X$ é lipschitziana ela é de variação limitada (e portanto fracamente de variação limitada). De fato, se

$$\| \alpha(t_1) - \alpha(t_2) \| \leq k |t_1 - t_2| \quad \text{para todo} \quad t_1, t_2 \in [a,b]$$

então

$$V[\alpha] \leq k(b - a)$$

5. Da observação anterior segue que se α é uma função de $[a,b]$ - em X, derivável e com derivada limitada, ela é de variação limitada.

6. Tôda função α de $[a,b]$ em X, absolutamente contínua, é de variação limitada. De fato, por ser α absolutamente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \| \alpha(t_i) - \alpha(s_i) \| < 1 \quad \text{se} \quad \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i| < \delta \ ;$$

se $d \in D$, tomamos $d_1 \in D$ tal que $d \leq d_1$, $\Delta d_1 < \delta$, então

$$V_d[\alpha] \leq V_{d_1}[\alpha] \leq 1 + \frac{b - a}{\delta}$$

e portanto $\alpha \in BV([a,b], X)$.

7. Uma função α de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, monótona por partes, é de variação limitada; de fato, suponhamos que existem n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, com $t_o = a$ e $t_n = b$, tais que em cada (t_{i-1}, t_i) α é monótona; então, a variação de α será

$$V[\alpha] = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i-) - \alpha(t_{i-1}+)| + \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_i-)| + $$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha(t_i+) - \alpha(t_i)| .$$

Dados dois espaços normados X e Y, indicaremos com L (X, Y) o conjunto das aplicações lineares contínuas de X em Y. L (X, Y) é munido da norma

$$u \in L(X, Y) \to ||u|| = \sup_{||x|| < 1} ||u(x)|| \in \mathbb{R}$$

Quando $Y = \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) indicaremos por $X' = L(X,C)$ (ou $L(X, \mathbb{R})$) o dual topológico de X, isto é, o conjunto das formas lineares contínuas sôbre X.

DEFINIÇÃO 1.1.3: Se α é uma aplicação de $[a,b]$ num espaço de Banach X, diz-se que α é ESCALARMENTE DE VARIAÇÃO LIMITADA, se para todo $x' \in X'$, $x' \circ \alpha \in BV([a,b])$.

DEFINIÇÃO 1.1.4: Sejam X e Y espaços de Banach, α uma aplicação de $[a,b]$ em L (X, Y) e $d \in D$; chamamos SEMIVARIAÇÃO de α na partição d a

$$S_d[\alpha] = \sup_{\substack{||x_i|| \leq 1 \\ i=1,\ldots|d|}} \left|\left| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})](x_i) \right|\right|$$

Dizemos que α é de SEMIVARIAÇÃO LIMITADA se

$$S[\alpha] = \sup_{d \in D} S_d[\alpha] < \infty .$$

Indicaremos com SV ($[a,b]$, L (X, Y)) o conjunto das aplicações de $[a,b]$ em L (X, Y) que são de semivariação limitada.
SV ($[a,b]$, L(X,Y)) é um espaço vetorial e a aplicação

$$\alpha \in SV([a,b], L(X,Y)) \to S[\alpha] \in \mathbb{R}$$

é uma seminorma sôbre êle.

No capítulo II daremos outras propriedades válidas para os quatro conceitos já enunciados e mostraremos a equivalência das definições 1.1.2 e 1.1.3.

1.2 FUNÇÕES DE VARIAÇÃO FORTE LIMITADA

Se α é uma aplicação de $[a,b]$ num espaço de Banach X, indicaremos com $\alpha(c+)$ (resp. $\alpha(c-)$) o limite de $\alpha(t)$ quando t converge a c por valôres maiores que c o que anotamos $t \to c+$ (resp. o limite de $\alpha(t)$ quando $t \to c-$ isto é quando $t \to c$ por valôres menores que c).

No que segue vamos supor sempre que α é uma função de $[a,b]$ num espaço de Banach X, a menos de menção explícita em contrário.

PROPOSIÇÃO 1.2.1: Se $d \leqslant d'$ então

$$V_d[\alpha] \leqslant V_{d'}[\alpha].$$

DEMONSTRAÇÃO: É só observar que se $d' = d \cup \{c\}$, $t_{k-1} < c < t_k$ então

$$\|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| \leqslant \|\alpha(c) - \alpha(t_{k-1})\| + \|\alpha(t_k) - \alpha(c)\|$$

PROPOSIÇÃO 1.2.2: Se $a < c < b$,

$$V_{[a,b]}[\alpha] = V_{[a,c]}[\alpha] + V_{[c,b]}[\alpha].$$

DEMONSTRAÇÃO: Sejam d_1 e d_2 partições de $[a,c]$ e $[c,b]$ respectivamente; então $d = d_1 \cup d_2$ é uma partição de $[a,b]$ e

$$V_{d_1}[\alpha] + V_{d_2}[\alpha] = V_d[\alpha] \leqslant V_{[a,b]}[\alpha]$$

o que implica

$$V_{[a,c]}[\alpha] + V_{[c,b]}[\alpha] \leqslant V_{[a,b]}[\alpha]$$

Seja agora d_o uma partição de $[a,b]$ e façamos

$d = d_o \cup \{c\}$, $d_1 = d \cap [a,c]$, $d_2 = d \cap [c,b]$;

se $t_k < c < t_{k+1}$, temos

$$V_{d_o}[\alpha] = \sum_{i=1}^{|d_o|} \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \| + \| \alpha(c) - \alpha(t_k) \| +$$

$$+ \| \alpha(t_{k+1}) - \alpha(c) \| + \sum_{i=k+2}^{|d_o|} \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \|$$

$$= V_{d_1}[\alpha] + V_{d_2}[\alpha]$$

$$\leq V_{[a,c]}[\alpha] + V_{[c,b]}[\alpha]$$

logo

$$V_{[a,b]}[\alpha] \leq V_{[a,c]}[\alpha] + V_{[c,b]}[\alpha]$$

Corolário: Se $\alpha \in BV([a,b], X)$ então

$\alpha|_{[c,d]} \in BV([c,d], X)$ quaisquer que sejam $a \leq c < d \leq b$.

OBSERVAÇÃO: Em geral, se α é só de variação fraca limitada, não vale a igualdade da proposição 1.2.2. Por exemplo, seja $\ell_\infty([a,b])$ o espaço das funções numéricas, limitadas, definidas no intervalo $[a,b]$, com a norma

$$f \in \ell_\infty(|a,b|) \to \|f\| = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \in \mathbb{R},$$

e definamos

$$\alpha : [0,1] \to \ell_\infty([0,1]) \qquad \text{como sendo}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ \chi_{[0,t]} & \text{se } t \neq 0 \quad \text{(função característica do intervalo } [0,t]\text{).} \end{cases}$$

É fácil ver que, para todo intervalo $[s,t] \subset [0,1]$

$$W_{[s,t]}[\alpha] = \sup_{\delta \in \Delta_{[s,t]}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \chi_{(s_i,\, t_i]} \right\| = 1$$

e $V_{[s,t]}[\alpha] = +\infty$

Logo para $0 < c < 1$

$$W_{[0,1]}[\alpha] < W_{[0,c]}[\alpha] + W_{[c,1]}[\alpha]$$

Teorema 1.2.3: Uma função definida, sôbre um intervalo $[a,b]$ com valores reais é de variação limitada se e sòmente se ela é a diferença de duas funções crescentes, (positivas).

<u>Demonstração</u>: Suponhamos $\alpha \in BV([a,b], \mathbb{R})$ e definamos

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}^+ \quad \text{dada por:}$$

$$F(t) = V_{[a,t]}[\alpha] \qquad \text{se} \quad t \neq a$$

$$F(a) = 0 \quad .$$

para G ser positiva devem definir
$F(t) = V_{[a,t]}[\alpha] + |\alpha(a)|, t \neq a$
$F(a) = |\alpha(a)|$

F é positiva e da proposição anterior segue que F é crescente.

A função $G = F - \alpha$ é positiva, pois

$|\alpha(t)| \leq F(t)$ para todo $t \in [a,b]$; se $t_1 < t_2$

$$G(t_2) - G(t_1) = F(t_2) - F(t_1) - (\alpha(t_2) - \alpha(t_1))$$

$$= V_{[t_1, t_2]}[\alpha] - (\alpha(t_2) - \alpha(t_1))$$

$$\geq 0$$

pois $|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \leq V_{[t_1,t_2]}[\alpha]$, logo

G é crescente

Pomos então, $\alpha = F - G$

Recìprocamente, como tôda função monótoma é de variação limitada e $BV([a,b], \mathbb{R})$ é um espaço vetorial, a diferença de duas funções crescentes positivas será de variação limitada.

Teorema 1.2.4: Seja $\alpha \in BV([a,b], X)$; a função definida por

$F(t) = V_{[a,t]}[\alpha]$ se $t \neq a$, $F(a) = 0$ é contínua a esquerda em $c \in (a,b]$ (resp. a direita em $c \in [a,b)$) se e sò - mente se α é contínua a esquerda (resp. direita) em c.

Demonstração: Provaremos a equivalência para continuidade a esquerda; a outra faz-se em forma análoga.

Seja $c \in (a,b]$; afirmamos que:

i) $\quad V_{[a,t]}[\alpha] \to V_{[a,c)}[\alpha]$ quando $t \to c-$

onde $\quad V_{[a,c)}[\alpha] = \sup\limits_{d \in D_{[a,c)}} V_d[\alpha]$

De fato , sendo $V_{[a,t]}[\alpha]$ uma função crescente em $[a,b]$, ela tem limite $\leqslant V_{[a,c)}[\alpha]$ quando $t \to c-$. Agora, dado $V < V_{[a,c)}[\alpha]$ existe, por definição, uma partição

$d_{[a,c)}: \; a = t_o < t_1 < \ldots < t_n < c$ tal que

$$V \leqslant V_d[\alpha] \leqslant V_{[a,c)}[\alpha]$$

Para $t_n < t < c$ temos

$$V \leqslant V_d[\alpha] \leqslant V_{[a,t_n]}[\alpha] \leqslant V_{[a,t]}[\alpha] \leqslant V_{[a,c)}[\alpha]$$

o que prova a nossa afirmação.

ii) $V_{[a,c]}[\alpha] = V_{[a,c)}[\alpha]$ se e sômente se α é contínua a esquerda em c. De fato: sempre vale que

$V_{[a,c)}[\alpha] \leqslant V_{[a,c]}[\alpha]$. Suponhamos que α é contínua a esquerda em c; assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$c - \delta \leqslant t < c \quad \text{implica} \quad \| \alpha(c) - \alpha(t) \| \leqslant \varepsilon/2$$

Existe também $d_{[a,c]}$: $a = t_o < t_1 < \ldots < t_n = c$

tal que $V_{[a,c]}[\alpha] - V_d[\alpha] \leqslant \varepsilon/2$ (1)

Podemos supor ainda $c - \delta \leqslant t_{n-1}$ (se não, fazemos $d' = d \cup \{c - \delta\}$ e (1) continua valendo com d' em lugar de d); assim, $V_{[a,c]}[\alpha] \leqslant V_d[\alpha] + \varepsilon/2$

$$\leqslant V_{[a,t_{n-1}]} + \| \alpha(c) - \alpha(t_{n-1}) \| + \varepsilon/2$$

$$\leqslant V_{[a,c)} + \varepsilon$$

e como isto vale para qualquer ε , temos certamente que

$$V_{[a,c]}[\alpha] = V_{[a,c)}[\alpha]$$

Recìprocamente, se vale esta igualdade, existe

$d_{[a,c)}$: $a = t_o < t_1 < \ldots < t_n < c$ tal que

$$V_{[a,c]}[\alpha] - \varepsilon \leqslant V_d [\alpha]$$

logo, para $t_n \leqslant t < c$ temos que

$$V_{[a,c]}[\alpha] - \varepsilon \leqslant V_d [\alpha]$$

$$\leqslant V_d [\alpha] + \| \alpha(c) - \alpha(t) \|$$

$$\leqslant V_{[a,c]} [\alpha]$$

o que implica $\| \alpha(c) - \alpha(t)\| \leqslant \varepsilon$ para $t_n \leqslant t < c$

logo α é contínua a esquerda em c.

(Se α não é de variação limitada em $[a,c]$, também não é em $[a,c)$ e tem-se que

$$V_{[a,c]}[\alpha] = V_{[a,c)}[\alpha] = +\infty$$

mesmo se α não é contínua a esquerda em c).

iii) De (i) e (ii) segue que α é contínua a esquerda em

$$c \in (a,b| \iff V_{[a,c)}[\alpha] = \lim_{t \to c-} V_{[a,t]}[\alpha] = V_{[a,c]}[\alpha]$$

$\iff V_{[a,t]}[\alpha]$ é contínua a esquerda em c.

Corolário: Se $\alpha \in BV([a,b], X)$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de α é enumerável

Demonstração: Da proposição anterior segue que α é descontínua em $c \in [a,b]$ se e sòmente se $V_{[a,t]}[\alpha]$ é descontínua em c.

Mas $V_{[a,t]}[\alpha]$ é uma função real a valores reais, monótona crescente e portanto só pode ter um número enumerável de descontinuidades.

OBSERVAÇÃO: O corolário anterior não vale para as funções fracamente de variação limitada; por exemplo, se tomamos novamente a função da observação da proposição 1.2.2.

$$\alpha : [0,1] \to \ell_\infty([0,1]) \qquad \text{dada por}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ \chi_{[0,t]} & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

vemos que se $a < t_o \leqslant b$

$$W_{[0,t_o]}[\alpha] = 1$$

mas,

$$\| \alpha(t) - \alpha(t_o) \| = 1 \qquad \text{para} \quad t \in [a,b] \ , \ t \neq t_o$$

e portanto, α é descontínua em todo ponto de $(a,b]$

Proposição 1.2.5: Seja $\alpha \in BV([a,b], X)$ contínua a esquerda em $[a,b)$ (ou a direita); então

$$V[\alpha] = \lim_{\Delta d \to 0} V_d[\alpha]$$

Demonstração: Devemos provar que, dado $V_1 < V[\alpha]$ existe $\delta > 0$ tal que se d é uma partição de $[a,b]$ com $\Delta d < \delta$, então

$$V_1 \leqslant V_d[\alpha]$$

Sejam $V_1 < V_2 < V[\alpha]$; por definição, existe

$d_o : a = t_o < t_1 < \ldots < t_n = b$, tal que $V_2 \leqslant V_{d_o}[\alpha]$.

Como α é contínua a esquerda, existe $\delta_1 > 0$ tal que, se

$t_i - \delta_1 \leqslant t < t_i$

$$\|\alpha(t_i) - \alpha(t)\| \leqslant \frac{V_2 - V_1}{4\,|do|} \quad \text{para } i = 1, \ldots, |do|$$

Escolhamos $\delta < \min\{\Delta d_o, \delta_1\}$ e seja d uma partição de $[a,b]$ com $\Delta d < \delta$; façamos $d_1 = d \cup d_o$, então

$$V_{d_1}[\alpha] - V_d[\alpha] \leqslant 2\,|do|\,\frac{V_2 - V_1}{4\,|do|} = \frac{V_2 - V_1}{2}$$

$\sum_{i=1}^{|d_1|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^{|d|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \leqslant \sum_{i \in d_o} \|\alpha($

logo,

$$V_d[\alpha] \geqslant V_{d_1}[\alpha] - \frac{V_2 - V_1}{2}$$

Mas, $d_o \leqslant d_1$, implica $V_2 \leqslant V_{d_1}[\alpha]$ e portanto

$$V_d[\alpha] \geqslant V_2 - \frac{V_2 - V_1}{2} = \frac{V_2 + V_1}{2} > V_1$$

OBSERVAÇÃO: É fácil ver que no caso em que

$$X = \mathbb{R}, \quad V[\alpha] = \lim_{\Delta d \to 0} V_d[\alpha] \quad \text{se, e sòmente se}$$

$\alpha(t)$ está compreendido entre $\alpha(t-)$ e $\alpha(t+)$, para todo

$t \in [a,b]$

Teorema 1.2.6: Seja X um espaço de Banach e $\alpha \in BV([a,b], X)$ então, para todos $c \in [a,b]$ existem $\alpha(c+)$, $\alpha(c-)$

(bem entendido que se $c = a$ existe só o limite a direita e se $c = b$ existe só o limite à esquerda).

Demonstração: Mostraremos a existência do limite de $\alpha(t)$ quando $t \to c+$; a outra demonstração é análoga.

i) Seja $t_1 > t_2 > \ldots > t_n > \ldots$ uma sequência de pontos de $[a,b]$, $t_n \to c+$; mostraremos que $(\alpha(t_n))_{n \in N}$ é uma sequência de Cauchy em X.

De fato, se $d_n \in D$ com $\Delta d_n = 1/n$, $n \geqslant 1$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \| \alpha(t_1) - \alpha(t_{i-1}) \| \leqslant V[\alpha] \quad \text{para todo } n,$$

logo $(S_n)_{n \in N}$ é uma sequência de números reais crescente e limitada e portanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \| < +\infty$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in N$ tal que

$$\| \alpha(t_n) - \alpha(t_m) \| \leq \sum_{i=n+1}^{m} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| < \varepsilon \quad \text{para } n, m > n_o$$

Sendo X um espaço de Banach, $\alpha(t_n) \to x$.

ii) Este limite é independente da sequência escolhida; de fato, seja $(y_n)_{n \in N}$ (an) uma outra sequência de pontos de $[a,b]$, $y_n \to c+$ (x_0); pelo mesmo raciocínio anterior $\alpha(y_n) \to x_1$ ($\alpha(a_n) \to L_u$); afirmamos que $x_1 = x$; se não, reordenando as sequências $(t_n)_{n \in N}$, $(y_n)_{n \in N}$ podemos formar uma nova sequência $(z_n)_{n \in N}$ tal que $z_n \to c+$; mas por (i) $(\alpha(z_n))_{m \in N}$ é convergente e por (ii) não é convergente já que têm duas subsequências com diferentes limites. Logo $x_1 = x$. //

iii) Mostraremos que $\alpha(c+) = x$

Se assim não fôsse, existiria $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ poderíamos achar um t_n, $c < t_n \leq c + 1/n$ com $\| \alpha(t_n) - x \| > \varepsilon$; assim $t_n \to c+$ e $\alpha(t_n)$ não converge para x o que é absurdo por (i) e (ii).

Corolário: Seja X um espaço de Banach e $\alpha \in BV([a,b], X)$; se $\{ t_1, \ldots, t_n\} \subset [a,b]$ tem-se que:

i) $$\sum_{i=1}^{n} \| \alpha(t_i+) - \alpha(t_i-) \| \leq V[\alpha]$$

ii) $$\sum_{i=1}^{n} \| \alpha(t_i+) - \alpha(t_i) \| \leq V[\alpha]$$

iii) $$\sum_{i=1}^{n} \| \alpha(t_i+) - \alpha(t_{i-1}+) \| \leq V[\alpha]$$

Demonstração:

i) Da existência dos limites a esquerda e direita de α para todo ponto de $[a,b]$ existe $\eta > 0$ tal que, para $t_i - \eta$, $t_i + \eta$ temos:

$$\| \alpha(t_i - \eta) - \alpha(t_i -) \| < \varepsilon/2n$$

$$\| \alpha(t_i + \eta) - \alpha(t_i +) \| < \varepsilon/2n \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{n} \| \alpha(t_i+) - \alpha(t_i-) \| \leq \sum_{i=1}^{n} \| \alpha(t_i+) - \alpha(t_i + \eta) \| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \| \alpha(t_i + \eta) - \alpha(t_i - \eta) \| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \| \alpha(t_i - \eta) - \alpha(t_i -) \|$$

$$< V[\alpha] + \varepsilon$$

e como isto vale para qualquer ε,

$$\sum_{i=1}^{n} || \alpha (t_i+) - \alpha (t_i-) || \leqslant V [\alpha]$$

ii) . iii) A demonstração é análoga à anterior

OBSERVAÇÃO: A proposição 1.8 não é verdade se $\alpha \in BW ([a,b], X)$ tomemos o exemplo da observação 1 da proposição 1.1.3 onde

$\alpha : [0,1] \to C_o (N)$ é dada por:

$\alpha (t) = \bar{e}_1$ se $t \in [0, \frac{1}{2}]$

$\alpha (t) = \bar{e}_n$ se $t \in (1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}]$, $n \geqslant 2$

$\alpha (1) = 0$

Já vimos que $\alpha \in BW ([a,b], C_o (N)$ mas α não é de variação forte limitada.

É fácil ver que uma sequência $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$, $t_n \to 1-$, contém uma subsequência t_{n_k} tal que

$$|| \alpha |t_{n_k}) - \alpha (t_{n_{k-1}}) ||= 1 \quad \text{para todo } k,$$

logo não pode existir o limite $\alpha(1-)$ quando $t \to 1-$.

Na verdade êste limite existe, mas em X'' com a topologia (fraca) $\sigma(X'', X')$. Demonstra-se também que se X é reflexivo, então existem os limites $\alpha (t+)$, $\alpha (t-)$ em X, com a convergência dada pela norma de X.

CAPÍTULO II

FUNÇÕES DE B-SEMIVARIAÇÃO LIMITADA

II. 1 - DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES.

Sejam X, Y, Z espaços de Banach, $B: X \times Y \to Z$, $(x, y) \to B(x, y) = x.y$ uma aplicação não nula, bilinear contínua.

Os seguintes exemplos servirão também para ilustrar as definições e proposições contidas nêste capítulo e no seguinte:

Exemplo 1: Sendo X espaço de Banach sôbre $\mathbb{C}$, tomamos $Y = X'$, $Z = \mathbb{C}$ e $B(x, x') = \langle x', x \rangle$.

Exemplo 2: Seja X um espaço de Banach sôbre $\mathbb{C}$, $Y = \mathbb{C}$, $Z = X$ e ponhamos $B(x, \lambda) = \lambda x$.

Exemplo 3: Se E, F são espaços de Banach tomamos $X = L(E, F)$, $Y = E$, $Z = F$ e $B(u, y) = u(y)$.

Exemplo 4: Sendo E, F, G espaços de Banach, pomos $X = L(F, G)$, $Y = L(E, F)$, $Z = L(E, G)$ e $B(u,v) = u \circ v$.

DEFINIÇÃO 2.1.1: Seja α uma função de $[a,b]$ em X $d \in D$; chamaremos B-SEMIVARIAÇÃO em d de α a:

$$S_{B,d}[\alpha] = \sup_{\substack{||y_i|| \leq 1 \\ y_i \in Y}} \left|\left| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \, y_i \right|\right| ;$$

α díz-se de B-SEMIVARIAÇÃO LIMITADA se

$$S_B[\alpha] = \sup_{d \in D} S_{B,d}[\alpha] \quad \text{é finito}$$

Indicaremos com $SV_B([a,b], X)$ o conjunto das funções de $[a,b]$ em X, de B-semivariação limitada.

A seguinte proposição é de demonstração imediata.

PROPOSIÇÃO 2.1.1: $SV_B([a,b], X)$ é um espaço vetorial e a aplicação

$$\alpha \in SV_B([a,b], X) \mapsto S_B[\alpha] \in \mathbb{R}$$

é uma semi-norma sôbre êle

PROPOSIÇÃO 2.1.2: Se $d_1 \leqslant d_2$ então,

$$S_{B,d_1}[\alpha] \leqslant S_{B,d_2}[\alpha]$$

DEMONSTRAÇÃO: Basta considerar que uma somatoria - sôbre a partição d_1 é um caso particular de uma somatoria sôbre- a partição d_2.

PROPOSIÇÃO 2.1.3: Se $\alpha \in SV_B([a,b], X)$ então, para todo c tal que $a < c < b$,

$$\alpha|_{[a,c]} \in SV_B([a,c], X)$$

e

$$S_B[\alpha|[a,c]] \leqslant S_B[\alpha]$$

DEMONSTRAÇÃO: Basta considerar que uma somatoria - sôbre uma partição de $[a,c]$ é um caso particular de uma somatotia sôbre uma partição de $[a,b]$.

COROLÁRIO: A função F, definida de $[a,b]$ em R, por:

$$F(t) = S_{B,[a,t]}[\alpha] \qquad \text{se } t \neq a$$

$$F(a) = 0$$

é uma função crescente.

PROPOSIÇÃO 2.1.4: Seja $\alpha \in SV_B([a,b], X)$, e tal que $a < c < b$, então

$$S_{B,[a,b]}[\alpha] \leqslant S_{B,[a,c]}[\alpha] + S_{B,[c,b]}[\alpha]$$

PROPOSIÇÃO 2.1.5: Seja $(\alpha_n)_{n \in N}$ uma sequência de funções pertencentes a $SV_B([a,b], X)$, tal que $\alpha_n(t) \to \alpha(t)$ para todo $t \in [a,b]$ e $S_B[\alpha_n] \leqslant M$ para todo n; então $S_B[\alpha] \leqslant M$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $d \in D$, $y_i \in Y$ com $\| y_i \| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots |d|$ temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha_n(t_i) - \alpha_n(t_{i-1})] \circ y_i \right\| \leqslant M$$

para todo $n \in N$ logo, no limite

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ y_i \right\| \leqslant M .$$

Como isto vale para tôda $d \in D$ e tôda família $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant |d|}$ de vetôres de Y com norma $\leqslant 1$, temos que

$S_B[\alpha] \leqslant M$.

PROPOSIÇÃO 2.1.6: Tôda $\alpha \in SV_B([a,b], X)$ é limitada se, e sòmente se, existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo $x \in X$, temos

$$\| x \| \leqslant c \sup_{\|y\| \leqslant 1} \| B(x,y) \|$$

DEMONSTRAÇÃO: i) Mostraremos que se não existe $c > 0$ tal que, para todo $x \in X$

$$\| x \| \leqslant c \sup_{\|y\| \leqslant 1} \| B(x,y) \|$$

então, existe $\alpha \in SV_B([a,b], X)$ não limitada.

Dado uma constante k_n positiva qualquer, existe- $x_n \in X$ (que podemos supor de norma 1) tal que

$$\| x_n \| > k_n \sup_{\|y\| \leq 1} \|B (x_n , y)\|$$

Logo, tomando $k_n = \frac{2^n}{3^n}$, podemos construir uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ de vetôres de X tais que, $\| x_n \| = 3^n$ e

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \| B (x_n , y) \| < \frac{1}{2^n}$$

Seja agora, $a = t_o < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$, uma sequência de pontos de $[a,b]$ convergindo a b, e definamos α de $[a,b]$ em X pondo:

$$\alpha(a) = 0$$
$$\alpha(t) = x_1 + \ldots + x_n \quad , \text{ se } \quad t_{n-1} < t \leq t_n \quad , n \geq 1$$
$$\alpha(b) = 0$$

Indiquemos com d_n a partição de $[a,b]$ dada por

$$d_n : a = t_o < t_1 < \ldots < t_n < b$$

então

$$S_{B,d_n} [\alpha] = \sup_{\substack{\|y_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \| \sum_{i=1}^{n} B (\alpha(t_i) - \alpha (t_{i-1}), y_i) + B(\alpha(b) - \alpha(t_n), y) \|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{\|y_i\| \leq 1} \| B (x_i , y_i) \| + \sup_{\|y\| \leq 1} \| B (x_1 + \ldots x_n , y) \|$$

$$< 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Mas, sendo esta série convergente e observando - que, para qualquer partição $d \in D$, existe $n \in N$ tal que - $S_{B,d} [\alpha] \leq S_{B,d_n} [\alpha]$, temos que

$\alpha \in SV_B([a,b], X)$.

Se $t_{n-1} < t \leq t_n$

$$|| \alpha(t) || = || x_1 + \ldots + x_n ||$$

$$\geq || x_n || - || x_1 + \ldots + x_{n-1} ||$$

$$\geq || x_n || - (|| x_1 || + \ldots + || x_{n-1} ||)$$

$$= 3^n - (3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1})$$

logo, α não é limitada pois esta série não é convergente

ii) Recíprocamente, se existe $c > 0$ tal que, para todo $x \in X$

$$|| x || \leq c \sup_{||y|| \leq 1} || B(x,y) ||$$

então

$$|| \alpha(t) - \alpha(a) || \leq c \sup_{||y|| \leq 1} || B(\alpha(t) - \alpha(a), y) || \leq c\, S_B[\alpha]$$

e portanto $|| \alpha(t) || < || \alpha(a) || + c\, S_B[\alpha]$.

Assim, tôda $\alpha \in SV_B([a,b], X)$ é limitada.

II. 2 EXEMPLOS.

No começo da seção II.1 demos quatro exemplos de funções bilineares, contínuas; mostraremos agora que com essas funções B, obtemos precisamente as categorias de função de variação-limitada, dadas no Capítulo I. Além disso, nêsses quatro casos, - tôda função α de B-semivariação limitada, é limitada pois B - satisfaz a condição da Proposição 2.1.6 e vale mesmo que

$$|| x || = \sup_{||y|| \leq 1} || B(x,y) ||$$

Para simplificar, em cada um dêsses exemplos, indicaremos $SV_B([a,b], X)$ como sendo:

Exemplo 1: $SV_{<,>}([a,b], X)$

Exemplo 2: $SV_{\mathbb{C}}([a,b], X)$

Exemplo 3: $SV_{(\ )}([a,b], X)$

Exemplo 4: $SV_o([a,b], X)$

PROPOSIÇÃO 2.2.1:

$$SV_{<,>}([a,b], X) = BV([a,b], X) \quad \text{e}$$

$$S_{<,>}[\alpha] = V[\alpha]$$

para tôda $\alpha \in SV_{<,>}([a,b], X)$.

DEMONSTRAÇÃO: Para tôda $d \in D$, temos

$$S_{<,>\,d}[\alpha] = \sup_{\substack{\|x_i'\| \leq 1 \\ x_i' \in X'}} \left| \sum_{i=1}^{|d|} \langle x_i', \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \rangle \right|$$

$$\leq \sup_{\substack{\|x_i'\| \leq 1 \\ x' \in X'}} \sum_{i=1}^{|d|} | \langle x_i', \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \rangle |$$

$$\leq \sum_{i=1}^{|d|} \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \|$$

$$= V_d[\alpha]$$

Reciprocamente pelo teorema de Hahn - Banach, existem $\tilde{x}_i' \in X'$ -
tais que $\| \tilde{x}_i' \| \leq 1$ e =

$< \bar{x}_1, \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) > = \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$, $i = 1, \ldots, |d|$, logo

$$V_d [\alpha] = \sum_{i=1}^{|d|} || \alpha (t_i) - \alpha (t_{i-1}) ||$$

$$= \sum_{i=1}^{|d|} < \tilde{x}_i' , \alpha (t_i) - \alpha (t_{i-1})>$$

$$\leqslant \sup_{\substack{||x_i'||\leqslant 1 \\ x_i' \in X'}} | \sum_{i=1}^{|d|} <x_i' , \alpha (t_i) - \alpha (t_{i-1})>|$$

$$= S_{<,>} , d [\alpha]$$

PROPOSIÇÃO 2.2.2:

$$SV_{\mathbb{C}} ([a,b], X) = BW ([a,b], X) \quad , \text{ e}$$

$$W [\alpha] \leqslant S_{\mathbb{C}} [\alpha] \leqslant 2 W [\alpha]$$

para tôda $\alpha \in SV_{\mathbb{C}} ([a,b], X)$.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $\alpha \in SV_{\mathbb{C}} ([a,b], X)$, δ uma divisão de $[a,b]$ dada por - $a \leqslant s_1 < t_1 \leqslant s_2 < t_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n < t_n \leqslant b$ e seja d a - partição gerada por δ , então

$$W_\delta [\alpha] = || \sum_{i=1}^{n} [\alpha (t_i) - \alpha (s_i)] || \qquad (1)$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{|d|} [\, \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\,]\, \tilde{\lambda}_j \right\| \qquad (*)$$

$$\leqslant \sup_{\substack{|\lambda_j| \leqslant 1 \\ \lambda_j \in \mathbb{C}}} \left\| \sum_{j=1}^{|d|} [\, \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\,]\, \lambda_j \right\|$$

$$\leqslant S_{\mathbb{C}}[\alpha]$$

(*) Onde $\tilde{\lambda}_j = 1$ se $\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})$ aparece em (1) e $\tilde{\lambda}_j = 0$ nos outros casos.

Logo

$$W[\alpha] = \sup_{\delta \in \Delta} W_\delta[\alpha] \leqslant S_{\mathbb{C}}[\alpha]$$

Suponhamos agora que $\alpha \in BW([a,b], X)$ e seja $d \in D$, $\lambda_i \in C$ com $|\lambda_i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots |d|$. Então, para todo $x' \in X$ temos,

$$\left|x'\left(\sum_{i=1}^{|d|}\left[\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\ \lambda_i\right)\right]\right| = \left|\sum_{i=1}^{|d|}\left[x' \circ \alpha(t_i) - x' \circ \alpha(t_{i-1})\right]\ \lambda_i\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{|d|} \left|x' \circ \alpha(t_i) - x' \circ \alpha(t_{i-1})\right|$$

$$\leqslant V\left[x' \circ \alpha\right]$$

$$\leqslant 2\, W\left[x' \circ \alpha\right]$$

$$\leqslant 2\, W[\alpha]\ \|x'\|$$

de onde segue, pelo teorema de Hahn-Banach, que

$$\left\|\sum_{i=1}^{d}\left|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\right|\lambda_i\right\| \leqslant 2\, W[\alpha] \qquad , \text{ logo}$$

$$S_{\mathbb{C},d}[\alpha] = \sup_{\substack{|\lambda_i|\leqslant 1 \\ \lambda_i \in \mathbb{C}}} \left\|\sum_{i=1}^{|d|}\left[\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\right]\ \lambda_i\right\| \leqslant 2\, W[\alpha]$$

e como isto vale para tôda partição $d \in D$ temos que

$$S_{\mathbb{C}}[\alpha] \leqslant 2\, W[\alpha]$$

Teorema 2.2.3: $\alpha \in EW([a,b], X) \Longleftrightarrow x' \circ \alpha \in BV([a,b])$ para todo $x' \in X'$, onde $x' \circ \alpha(t) = \langle x', \alpha(t)\rangle$.

Demonstração: Seja $\alpha \in BW([a,b], X)$, $x' \in X'$ e $d \in D$ dada por:

$a = t_o < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Para cada $i = 1, \ldots, |d|$ existe $\tilde{\lambda}_i \in \mathbb{C}$ tal que $|\tilde{\lambda}_i| \leqslant 1$ e

$$[x' \circ \alpha(t_i) - x' \circ \alpha(t_{i-1})] \cdot \tilde{\lambda}_i = |x' \circ \alpha(t_i) - x' \circ \alpha(t_{i-1})|$$

de onde

$$\sum_{i=1}^{|d|} |(x' \circ \alpha(t_i) - x' \circ \alpha(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{|d|} [x' \circ \alpha(t_i) - x' \circ \alpha(t_{i-1})]\tilde{\lambda}_i$$

$$= x' \left(\sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \tilde{\lambda}_i\right)$$

$$\leqslant \| x' \| \sup_{\substack{|\lambda_i| \leqslant 1 \\ \lambda_i \in C}} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \lambda_i \right\|$$

$$\leqslant \| x' \| \; S_{\mathbb{C}} [\alpha]$$

$$\leqslant 2 \| x' \| \; W [\alpha]$$

o que implica,

$$V [x' \circ \alpha] \leqslant 2 \| x' \| W [\alpha]$$

Suponhamos agora que $x' \circ \alpha \in BV([a,b])$ para todo $x' \in X'$ e definamos uma família $(F_\delta)_{\delta \in \Delta}$ de funções de X' em $\mathbb{C}$, pondo:

$$F_\delta : x' \in X' \longmapsto \langle x', \sum_{i=1}^{n} [\alpha(t_i) - \alpha(s_i)] \rangle \in \mathbb{C}$$

onde δ é a divisão de $[a,b]$ dada por:

$$a \leqslant s_1 < t_1 \leqslant s_2 < t_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n < t_n \leqslant b$$

As F_δ são lineares e contínuas ; de fato a linearidade segue da linearidade de x' e a continuidade segue de:

$$|F_\delta (x')| = |\langle x' , \sum_{i=1}^{n} [\alpha(t_i) - \alpha(s_i)] \rangle |$$

$$\leqslant M \| x' \|$$

onde $M = \| \sum_{i=1}^{n} [\alpha(t_i) - \alpha(s_i)] \|$

Para todo $\delta \in \Delta$ e para todo $x' \in X'$ temos que

$$|F_\delta(x')| = | \langle x' , \sum_{i=1}^{n} [\alpha(t_i) - \alpha(s_i)] \rangle |$$

$$= | \sum_{i=1}^{n} [x' \circ \alpha(t_i) - x' \circ \alpha(s_i)] |$$

$$\leqslant W [x' \circ \alpha]$$

$$\leqslant V [x' \circ \alpha]$$

e portanto $\sup\limits_{\delta \in \Delta} |F_\delta (x')| \leqslant V [x' \circ \alpha] < + \infty$

Logo, pelo princípio da limitação uniforme,

$$\sup_{\delta \in \Delta} \| F_\delta \| = \sup_{\delta \in \Delta} \sup_{\| x' \| \leq 1} | F_\delta (x') |$$

$$= \sup_{\delta \in \Delta} \sup_{\| x' \| \leq 1} | x'(\sum_{i=1}^{n} [\alpha(t_i) - \alpha(s_i)]) |$$

$$= \sup_{\delta \in \Delta} \| \sum_{i=1}^{n} [\alpha(t_i) - \alpha(s_i)] \|$$

é finito e portanto $\alpha \in BW([a,b], X)$.

Teorema 2.2.4: $\alpha \in BW([a,b], X') \iff$ para todo $x \in X$,

$x \circ \alpha \in BV([a,b])$, onde

$$x \circ \alpha : t \in [a,b] \to < \alpha(t), x > \in \mathbb{C}$$

Demonstração: Análoga à anterior.

Proposição 2.2.5:

$$SV_{()} ([a,b], L (E,F)) = SV ([a,b], L(E,F)).$$

Demonstração: Ambas definições coincidem.

Proposição 2.2.6:

$$SV_0([a,b], L(F,G)) = SV([a,b], L (F,G)), \quad e$$

$$S_o\,[\alpha] \;=\; SV\,[\alpha]$$

para tôda $\alpha \in SV_o([a,b], L(F,G))$.

Demonstração: Se $\alpha \in SV([a,b], L(F,G))$ e $d \in D$, então:

$$S_{o,d}\,[\alpha] = \sup_{\substack{\|u_i\| \leq 1 \\ u_i \in L(E,F)}} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ u_i \right\|$$

$$= \sup_{\substack{\|u_i\| \leq 1 \\ u_i \in L(E,F)}} \; \sup_{\substack{\|e\| \leq 1 \\ e \in E}} \left\| \sum_{i=1}^{d} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\, u_i(e) \right\|$$

$$= \sup_{\substack{\|f_i\| \leq 1 \\ f_i \in F}} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\,(f_i) \right\| \qquad (*)$$

$$< SV\,|\alpha| \qquad (1)$$

(*) pois, $\| u_i(e)\| \leq \|u_i\| \; \|e\| \leq 1$, $i=1, \ldots, |d|$

Logo

$$S_o\,[\alpha] \leq SV\,[\alpha]$$

Seja agora $\alpha \in SV_o([a,b], L(F,G))$, $d \in D$, $f_i \in F$ com $\|f_i\| \leq 1$, $i=1, \ldots, |d|$. Existem $\tilde{e} \in E$ com $\|\tilde{e}\| = 1$ e aplicações $\tilde{u}_i \in L(E,F)$ tais que $\|\tilde{u}_i\| \leq 1$, $\tilde{u}_i(\tilde{e}) = f_i$

para $i=1, \ldots, |d|$. Assim

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\ f_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ \tilde{u}_i(\tilde{e}) \right\|$$

$$\leq \sup_{\substack{\|e\| \leq 1 \\ e \in E}} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ \tilde{u}_i(e) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i - \alpha(t_{i-1})] \circ \tilde{u}_i \right\|$$

$$\leq \sup_{\substack{\|u_i\| \leq 1 \\ u_i \in L(E,F)}} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ u_i \right\|$$

$$\leq S_o\ [\alpha]$$

Como isto vale para tôda família $(f_i)_{i=1, \ldots, |d|}$ de vetores de F com $\|f_i\| \leq 1$ é para tôda $d \in D$, temos que

$$SV\ [\alpha] \leq S_o\ [\alpha] \qquad (2)$$

De (1) e (2) segue,

$$SV\ [\alpha] = S_o\ [\alpha]$$

OBSERVAÇÃO: Dada $\alpha \in BW([a,b], Y)$ definamos:

$$\hat{\alpha} : t \in [a,b] \to \hat{\alpha}\ (t) \in L\ (X,Y) \qquad \text{dada por}$$

$$\hat{\alpha}(t)(x) = \langle x_o', x \rangle \alpha(t) \quad \text{com } x_o' \in X' \text{ fixo}, \| x_o' \| = 1$$

É fácil ver que α está bem definida. Provaremos que

$\hat{\alpha} \in SV([a,b], L(X,Y))$; de fato, se $d \in D$

$$SV_d[\hat{\alpha}] = \sup_{\substack{\| x_i \| \leq 1 \\ x_i \in X}} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\hat{\alpha}(t_i) - \hat{\alpha}(t_{i-1})] (x_i) \right\|$$

$$= \sup_{\substack{\| x_i \| \leq 1 \\ x_i \in X}} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \langle x_o', x_i \rangle [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\|$$

$$\leq \sup_{\substack{|\lambda_i| \leq 1 \\ \lambda_i \in C}} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \lambda_i [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\|$$

$$\leq 2\, W[\alpha]$$

pela proposição 2.2.1 ; logo $\hat{\alpha} \in SV([a,b], L(X,Y))$.

É fácil ver que se α é contínua, então $\hat{\alpha}$ também é contínua e que, mais geralmente, existe uma correspondência biunívoca entre as propriedades de α e as propriedades de $\hat{\alpha}$ É por isso que é suficiente dar exemplos e contra exemplos para as funções de variação fraca limitada.

CAPÍTULO III

INTEGRAL DE RIEMANN - STIELTJES

III.1 - DEFINIÇÃO - PROPRIEDADES E EXISTÊNCIA

Tal como no capítulo anterior, X, Y e Z indicarão espaços de Banach e

$$B: X \times Y \to Z , \quad B(x,y) = x \cdot y$$

uma aplicação bilinear, contínua, não nula.

Definição 3.1.1 : Sejam α e f funções definidas em $[a,b]$ a valores em X e Y respectivamente. Quando o limite existe definimos

$$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) = \lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{|d|} \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right] \cdot f(\xi_i)$$

onde ξ_i é um ponto qualquer do intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ para $1 \leqslant i \leqslant |d|$, e d é uma partição de $[a,b]$

As seguintes proposições são de demonstração imediata:

Proposição 3.1.1: Se existem as $\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$, $\int_a^b d\alpha(t) \cdot g(t)$ então existe a $\int_a^b d\alpha(t) \cdot (f(t) + g(t))$ e vale a seguinte igualdade.

$$\int_a^b d\alpha(t) \cdot [\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)] =$$

$$= \lambda_1 \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) + \lambda_2 \int_a^b d\alpha(t) \cdot g(t)$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Proposição 3.1.2: Se existem as $\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$, $\int_a^b d\beta(t) \cdot f(t)$, então exsite a $\int_a^b d(\alpha(t) + \beta(t)) \cdot f(t)$ e, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ vale a igualdade

$$\int_a^b d(\lambda_1 \alpha(t) + \lambda_2 \beta(t)) \cdot f(t) =$$

$$= \lambda_1 \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) + \lambda_2 \int_a^b d\beta(t) \cdot f(t)$$

Se $a < c < b$ é fácil ver que se existem as

$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$, $\int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t)$

(ou $\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$) então existe a $\int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t)$

(ou $\int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t)$) e tem-se que

$$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) = \int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t) + \int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t)$$

Mas podem existir as $\int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t)$, $\int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t)$ sem que exista a $\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$; de fato se, no Exemplo 1 - Capítulo II, tomamos $X = \mathbb{R}$ e definimos:

$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha(t) = 0 \quad \text{se} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2$$

$$\alpha(t) = 1 \quad \text{se} \quad 1/2 < t \leqslant 1 \text{,} \quad \text{e}$$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = -1 \quad \text{se} \quad 0 \leqslant t < 1/2$$

$$f(t) = 1 \quad \text{se} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1$$

então temos que:

i) Se $1/2 \in d_{[0,1]}$, $t_{k-1} < 1/2 < t_{k+1}$,

$$\sum_{i=1}^{|d|} f(\xi_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] = f(\xi_{K+1})\ \alpha(t_{K+1}) = 1$$

ii) Se $1/2 \notin d_{[0,1]}$ então a $\sum_{i=1}^{|d|} f(\xi_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]$ pode valer 1 ou -1 dependendo da escolha de ξ_{k+1}.

Logo, não pode existir o limite quando $\Delta d \to 0$.

Mas se d é uma partição de $[a,c]$ ou $[c,b]$ então necessaria mente $1/2 \in d$ e no primeiro caso a

$$\sum_{i=1}^{|d|} f(\xi_i)\left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\right]$$ vale 0 e no segundo caso vale

1, logo

$$\int_a^c f(t)\, d\alpha(t) = 0 \quad , \quad \int_c^b f(t)\, d\alpha(t) = 1$$

Mas, se f (ou α) é contínua, então vale a seguinte proposição:

Proposição 3.1.3 : Sejam α e f aplicações de $[a,b]$ em X e Y, respectivamente; se uma destas aplicações é contínua e a outra é limitada em $[a,b]$ então, se existem as $\int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t)$ e $\int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t)$ também existe a $\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$ e tem-se que:

$$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) = \int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t) + \int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t)$$

para todo c tal que $a < c < b$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que se $d_1 \in D_{[a,c]}$ com $\Delta d_1 < \delta_1$ e $d_2 \in D_{[c,b]}$ com $\Delta d_2 < \delta_2$ então:

$$\left\| \int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t) - \sum_{i=1}^{|d_1|} \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right] \cdot f(\xi_i) \right\| < \varepsilon/3$$

$$\left\| \int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t) - \sum_{j=1}^{|d_2|} \left[\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})\right] \cdot f(\eta_j) \right\| < \varepsilon/3$$

Suponhamos f contínua e α limitada em $[a,b]$; assim, existe $\delta_3 > 0$, tal que, se $|t_1 - t_2| < \delta_3$,

$$\| f(t_1) - f(t_2) \| < \frac{\varepsilon}{6\, M\, \| B \|}$$

onde $\| \alpha(t) \| \leqslant M$ para todo $t \in [a,b]$.

Logo, tomando $d \in D_{[a,b]}$ com $\Delta d < \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ e supondo que $c \in [t_k, t_{k+1}]$ e $\xi_{k+1} \in [t_k, c]$ (*)

temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right] \cdot f(\xi_i) - \int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t) - \int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{k} \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right] \cdot f(\xi_i) + \left[\alpha(t_{k+1}) - \alpha(t_k) + \alpha(c) - \alpha(c)\right] \cdot f(\xi_{k+1}) \right.$$

$$+ \sum_{i=k+2}^{d} \left[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\right] \cdot f(\xi_i) - \int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t) -$$

$$\left. - \int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t) + \left[\alpha(t_{k+1}) - \alpha(c)\right] \cdot f(c) - \left[\alpha(t_{k+1}) - \alpha(c)\right] \cdot f(c) \right\|$$

(*) Se $\xi_{k+1} \in [c, t_{k+1}]$ a demonstração é análoga.

$$\leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{k} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) + [\alpha(c) - \alpha(t_k)] \cdot f(\xi_{k+1}) -$$

$$- \int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t) \Big\|$$

$$+ \Big\| [\alpha(t_{k+1}) - \alpha(c)] \cdot f(c) + \sum_{i=k+2}^{|d|} [\alpha(t_i) - (t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - \int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t) \Big\|$$

$$+ \| B \| \; \| \alpha(t_{k+1}) - \alpha(c) \| \; \| f(\xi_{k+1}) - f(c) \|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \|B\| \; 2M \frac{\varepsilon}{6 \; \|B\| \; M} = \varepsilon$$

OBSERVAÇÕES:

1. Se definimos a

$$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) = \lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \; f(\xi_i)$$

usando o conjunto filtrante D, munido da relação de ordem

$d_1 \leqslant d_2 \Longleftrightarrow d_1 \subset d_2$ (ver (3)), então a proposição anterior é sempre válida, embora nem α ou f sejam contínuas; de fato;

se existem as $\int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t)$, $\int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t)$ então,

dado $\varepsilon > 0$ existem $d_1 \in D_{[a,c]}$ e $d_2 \in D_{[c,b]}$ tais que

$$\left\| \int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t) - \sum_{i=1}^{|\bar{d}_1|} [\alpha(\bar{t}_{i-1}) - \alpha(\bar{t}_{i-1})] \cdot f(\bar{\xi}_i) \right\| < \varepsilon/2$$

$$\left\| \int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t) - \sum_{j=1}^{|\bar{d}_2|} [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \cdot f(\eta_j) \right\| < \varepsilon/2$$

sempre que $d_1 \leqslant \bar{d}_1$, $d_2 \leqslant \bar{d}_2$.

Ponhamos $d_o = d_1 \cup d_2$; então $c \in d_o$, e se d é uma partição de $[a,b]$, $d_o \leqslant d$ dada por,

$$d : a = t_o < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = b$$

com $t_k = c$, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - \int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t) - \int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t) \right\|$$

$$\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - \int_a^c d\alpha(t) \cdot f(t) \right\|$$

$$+ \left\| \sum_{i=k+1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - \int_c^b d\alpha(t) \cdot f(t) \right\|$$

$$< \varepsilon$$

pois $d_1 \leqslant d \cap [a,c]$ e $d_2 \leqslant d \cap [c,b]$

2. Se existe a $\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$ segundo a nossa definição, existe também segundo a definição da observação anterior e ambas são iguais. De fato, por definição existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) - \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) \right\| < \varepsilon \qquad (1)$$

sempre que $\Delta d < \delta$

Assim, tomando uma partição d_o de $[a,b]$ com malha menor que δ, tôda outra partição mais fina que d_o, terá também malha menor que δ, e portanto valerá (1).

A observação anterior mostra que a recíproca não é verdade.

Proposição 3.1.4: Sejam $a \leqslant c < d \leqslant b$; então se existe $\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$ existem também a $\int_c^d d\alpha(t) \cdot f(t)$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se d_1, d_2 são partições de $[a,b]$ com Δd_1, $\Delta d_2 < \delta$, então:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - \sum_{j=1}^{|d_2|} [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \cdot f(\eta_j) \right\| \leqslant \varepsilon .$$

Sejam $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$ partições de $[c,d]$ tais que $\Delta\bar{d}_1$, $\Delta\bar{d}_2 < \delta$, $\bar{d}_1$ dada por $c = t_o < t_1 < \dots < t_n = d$. Completemos com os mesmos pontos $\bar{d}_1$ e $\bar{d}_2$ até formar partições de $[a,b]$ d_1 e d_2 respectivamente, de malha menor que δ, e ponhamos

$$d_1 : a = t_{-r-1} < t_{-r} < \dots < t_{-1} < t_o = c < t_1 < \dots < t_n =$$

$$= d < t_{n+1} < \dots < t_{n+m} = b$$

Assim:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|\bar{d}_1|} [\alpha(t_1) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - \sum_{j=1}^{|\bar{d}_2|} [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \cdot f(\eta_j) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{|\bar{d}_1|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) + \sum_{i=-r}^{0} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) \right.$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{|d_1|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - \sum_{i=-r}^{0} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i)$$

$$\left. - \sum_{i=n+1}^{|d_1|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - \sum_{j=1}^{|\bar{d}_2|} [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \cdot f(\eta_j) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=-r}^{|d_1|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - \sum_{j=-r}^{|\bar{d}_2|+m} [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \cdot f(\eta_j) \right\| \quad (*)$$

$$< \varepsilon$$

(*) onde $s_j = t_j$, $\eta_j = \xi_j$ para $j = -r-1, \dots, 0, |\bar{d}_2| + 1, \dots,,$ $|\bar{d}_2| + m$.

A última desigualdade vale pois d_1 e :

$d_2 = \bar{d}_2 \cup \{t_j: j = -r-1, -r, \ldots, 0, |\bar{d}_2|+1, \ldots, |\bar{d}_2|+ m\}$

são partições de $[a,b]$ com malha menor que δ.

Proposição 3.1.5: (Integração por partes):

$$\int_a^b d\alpha(t) \,.\, f(t) = \alpha(b) \,.\, f(b) - \alpha(a) \,.\, f(a) - \int_a^b \alpha(t) \,.\, df(t) \qquad (1)$$

Se existe uma das duas integrais da expressão (1) existe também a outra e vale a igualdade acima.

Demonstração: Suponhamos que exista a $\int_a^b d\alpha(t) \,.\, f(t)$; então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d_1 \in D$ com $\Delta d_1 < \delta$ temos que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \,.\, f(\xi_i) - \int_a^b d\alpha(t) \,.\, f(t) \right\| < \varepsilon \qquad (2)$$

para todo $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \ldots, |d_1|$.

Tomemos $d \in D$ com $\Delta d < \delta/2$; então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} \alpha(\xi_i) \,.\, [f(t_i) - f(t_{i-1})] - \alpha(b) \,.\, f(b) + \alpha(a) \,.\, f(a) + \int_a^b d\alpha(t) \,.\, f(t) \right\|$$

$$= \left\| \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(\xi_i) \cdot f(t_{i-1}) + \sum_{i=0}^{n} \alpha(\xi_i) \cdot f(t_i) \right\|$$

$$= \left\| \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) - \sum_{i=1}^{n+1} [\alpha(\xi_i) - \alpha(\xi_{i-1})] \cdot f(t_{i-1}) \right\| < \varepsilon \qquad (*)$$

(*) onde pomos $\xi_o = a$, $\xi_{n+1} = b$

Mas, $d_1 : a = \xi_o \leqslant \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n \leqslant \xi_{n+1} = b$

é uma partição de $[a,b]$ com $\Delta d_1 < \delta$ e $t_{i-1} \in [\xi_{i-1}, \xi_i]$ logo, por (2) vale a última desigualdade.

Indicaremos com $C([a,b], X)$ o conjunto das funções contínuas definidas em $[a,b]$ com valores em X munido da norma

$$f \in C([a,b], X) \longmapsto \| f \| = \sup_{t \in [a,b]} \| f(t) \| \in \mathbb{R}$$

$C^k([a,b], X)$ indicará o conjunto das funções de $[a,b]$ em X que são k vêzes contínuamente diferenciáveis.

Proposição 3.1.6: Seja $\alpha \in C^1([a,b], X)$ e f uma função de $[a,b]$ em Y que satisfaz o critério de Darboux, isto é

$$\lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{|d|} \omega_i(f)(t_i - t_{i-1}) = 0 .$$

onde $\omega_i(f) = \sup_{s,t \in [t_{i-1}, t_i]} \| f(s) - f(t) \|$

é a oscilação de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i=1, \ldots, |d|$

Então existe a

$$\int_a^b \alpha'(t) \circ f(t)\, dt = \lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{|d|} \alpha'(\xi_i) \circ f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \in Z \qquad (1)$$

e

$$\int_a^b d\alpha(t) \circ f(t) = \int_a^b \alpha'(t) \circ f(t)\, dt.$$

Demonstração: Observemos primeiro que se g é uma função dum intervalo $[a,b]$ num espaço de Banach E que satisfaz o critério de Darboux, então g é integrável segundo Riemann em E.

Agora, tôda função contínua de $[a,b]$ num espaço de Banach satisfaz o critério de Darboux, logo para provar a existência da integral (1) basta provar que se g e f são aplicações de $[a,b]$ em X e Y respectivamente, que satisfazem o critério de Darboux, então $g \cdot f$ satisfaz o mesmo critério como função de $[a,b]$ em Z. Mas isso segue de:

$$\| g(s) \cdot f(s) - g(t) \cdot f(t) \| \leq \| [g(s) - g(t)] \cdot f(s) \|$$

$$+ \| g(t) \cdot [f(s) - f(t)] \|$$

$$\leq \| B \| \| f \| \| g(s) - g(t) \|$$

$$+ \| B \| \| g \| \| f(s) - f(t) \|$$

$$\leq \| B \| \| f \| \omega_i(g) + \| B \| \| g \| \omega_i(f).$$

Da existência da integral (1) segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\| \sum_{i=1}^{|d|} \alpha'(\xi_i) \cdot f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \alpha'(t) \cdot f(t)\, dt \| < \varepsilon/2$$

para tôda $d \in D$ com $\Delta d < \delta_1$

Como α' é uniformemente contínua em $[a,b]$ existe $\delta_2 > 0$ tal que se $|\eta - \xi| < \delta_2$ então

$$\| \alpha'(\eta) - \alpha'(\xi) \| < \frac{\varepsilon}{2 \| f \| \| B \| (b-a)}$$

Logo, para $d \in D$ com $\Delta d < \delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ temos

$$\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) - \int_a^b \alpha'(t) \cdot f(t)\, dt \|$$

$$\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ f(\xi_i) - \sum_{i=1}^{|d|} \alpha'(\xi_i) \circ f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\|$$

$$+ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} \alpha'(\xi_i) \circ f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \alpha'(t) \circ f(t)\, dt \right\|$$

$$< \varepsilon/2 + \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) - \alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})] \circ f(\xi_i) \right\|$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + \| B \| \, \| f \| \sum_{i=1}^{|d|} \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) - \alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \|$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + \| B \| \, \| f \| \sum_{i=1}^{|d|} (t_i - t_{i-1}) \sup_{t_{i-1}<\eta<t_i} \| \alpha'(\eta) - \alpha'(\xi_i) \| \qquad (*)$$

$$= \varepsilon$$

(*) aplicando o Teorema do valor médio (ver (2)).

Teorema 3.1.7: Se $\alpha \in SV_B([a,b], X)$ e $f \in C([a,b], Y)$ então:

a) existe a $\int_a^b d\alpha(t) \circ f(t) \in Z$

b) $\| \int_a^b d\alpha(t) \circ f(t) \| \leqslant S_B[\alpha] \, \| f \|$

Demonstração:

a) Se $S_B[\alpha] = 0$, as somas da forma

$$\sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot y_i$$

são nulas para tôda $d \in D$, $y_i \in Y$ e portanto

$$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) = 0$$

Suponhamos então $S_B[\alpha] \neq 0$. Escrevamos

$$\sigma_{d,\xi} = \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i)$$

onde d é uma partição de $[a,b]$, e indiquemos com Σ_d o conjunto das somas da forma $\sigma_{d,\xi}$; se $d_1 \leqslant d_2$ então $\Sigma_{d_1} \supset \Sigma_{d_2}$ logo, se provarmos que o diâmetro dos Σ_d tende a 0 quando $\Delta d \to 0$, então $\bigcap_{d \in D} \overline{\Sigma}_d$, isto é, a intersecção das aderenças dos Σ_d, possuirá um único ponto que será o limite dos $\sigma_{d,\xi}$, isto é, a $\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$.

Como f é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|\xi_1 - \xi_2| < \delta \quad \text{implica} \quad \| f(\xi_1) - f(\xi_2) \| < \frac{\varepsilon}{2S_B[\alpha]}$$

Tomemos partições d_1 e d_2 de $[a,b]$ tais que $\Delta d_1, \Delta d_2 < \delta/2$ e provemos que

$$\| \sigma_{d_1,\xi} - \sigma_{d_2,\eta} \| \leqslant \varepsilon$$

Mas,

$$\|\sigma_{d_1,\xi} - \sigma_{d_2,\eta}\| \leq \|\sigma_{d_1,\xi} - \sigma_{d,\theta}\| + \|\sigma_{d,\theta} - \sigma_{d_2,\eta}\|$$

onde $d = d_1 \cup d_2$, e

$$\|\sigma_{d_1,\xi} - \sigma_{d,\theta}\| = \|\sum_{i=1}^{|d_1|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) -$$

$$- \sum_{j=1}^{|d|} [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \cdot f(\theta_j)\|$$

$$= \|\sum_{i=1}^{|d_1|} \sum_{j=k_i}^{k_i+p_i} [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \cdot [f(\xi_i) - f(\theta_j)]\| \qquad (*)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2S_B[\alpha]} \|\sum_{i=1}^{|d_1|} \sum_{j=k_i}^{k_i+p_i} [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \frac{[f(\xi_i) - f(\theta_j)]}{\frac{\varepsilon}{2S_B[\alpha]}}\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2S_B[\alpha]} \sup_{\substack{\|y_i\| \leq 1 \\ y_i \in Y}} \|\sum_{j=1}^{|d|} [\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})] \cdot y_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

(*) onde k_i e p_i são tais que $t_{i-1} = s_{k_i-1} < s_{k_i} < \ldots < s_{k_i+p_i} = t_i$

para $i = 1, \ldots, |d_1|$

Anàlogamente, demonstra-se que

$$\| \sigma_{d,\theta} - \sigma_{d_2, \eta} \| \leqslant \varepsilon/2$$

logo,

$$\| \sigma_{d_1,\xi} - \sigma_{d_2, \eta} \| \leqslant \varepsilon$$

e portanto o diâmetro dos conjuntos Σ_d tende a 0 quando $\Delta d \to 0$

b) Se $\|f\| = 0$, vale a desigualdade pois ambos os membros são nulos, logo podemos supor $\|f\| \neq 0$; neste caso, para tôda $d \in D$

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) \right\| = \|f\| \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot \frac{f(\xi_i)}{\|f\|} \right\|$$

$$\leqslant \|f\| \, S_{B,d} [\alpha]$$

$$\leqslant \|f\| \, S_B [\alpha]$$

Logo, no limite

$$\left\| \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) \right\| \leqslant \|f\| \, S_B [\alpha]$$

Proposição 3.1.8: Dados $a < c < b$ definimos $\alpha : [a,b] \to X$ como segue:

Os valores de $\alpha(a)$, $\alpha(c)$, $\alpha(b)$ são arbitrários;

$$\alpha(t) = \alpha(a) \quad \text{se} \quad a \leqslant t < c$$

$$\alpha(t) = \alpha(b) \quad \text{se} \quad c < t \leqslant b \; .$$

Se $f \in C([a,b], Y)$ então

$$\int_a^b d\alpha(t) \, . \, f(t) = [\alpha(c+) - \alpha(c-)] \circ f(c)$$

Demonstração: Como f é contínua e $\alpha \in SV_B([a,b], X)$ existe a $\int_a^b d\alpha(t) \circ f(t)$.

Sendo f uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{\|B\| \, \|\alpha(c+) - \alpha(c-)\|} , \frac{\varepsilon}{\|B\| \, \|\alpha(c+) - \alpha(c)\|} , \frac{\varepsilon}{\|B\| \, \|\alpha(c-) - \alpha(c)} \right\}$$

se $|t_1 - t_2| < \delta$,

Se $d \in D$ com $\Delta d < \delta$, temos duas possibilidades:

i) $c \in d$; suponhamos $t_{k-1} < c < t_{k+1}$, então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ f(\xi_i) - [\alpha(c+) - \alpha(c-)] \circ f(c) \right\|$$

$$= \| [\alpha(c) - \alpha(c-)] \circ [f(\xi_k) - f(c)] + [\alpha(c+) - \alpha(c)] \circ [f(\xi_{k+1}) - f(c)] \|$$

$$\leqslant \| B \| \| \alpha(c) - \alpha(c-) \| \| f(\xi_k) - f(c) \|$$

$$+ \| B \| \| \alpha(c+) - \alpha(c) \| \| f(\xi_{k+1}) - f(c) \|$$

$$< 2\varepsilon$$

ii) $c \not\in d$; suponhamos $c \in (t_{k-1}, t_k)$, então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_{i-1})] \circ f(\xi_i) - [\alpha(c+) - \alpha(c-)] \circ f(c) \right\|$$

$$\leqslant \| B \| \| \alpha(c+) - \alpha(c-) \| \| f(\xi_k) - f(c) \|$$

$$< \varepsilon \quad .$$

OBSERVAÇÃO: Na demonstração supusemos $\alpha(a) \neq \alpha(b) \neq \alpha(c)$ pois os outros casos são triviais

COROLÁRIO: Seja $\alpha : [a,b] \to X$, uma função em escada (isto é, existe um número finito de subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$ de $[a,b]$ tais que em cada (t_{k-1}, t_k) α é constante) com salto $\sigma_k [\alpha]$ em t_k, sendo $a \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$.

Se $f \in C([a,b], Y)$ então,

$$\int_a^b d\alpha(t) \circ f(t) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k [\alpha] \circ f(t_k)$$

onde $\sigma_k [\alpha] = \alpha(t_k+) - \alpha(t_k-)$ é o salto de α em t_k

OBSERVAÇÃO: A proposição 3.9 diz-nos que o valor da integral pode ser modificado alterando o valor de f num só ponto e é fácil ver que mesmo a existência da integral pode ser afetada por tal mudança. De fato, consideremos o exemplo seguinte: Sejam

$\alpha : [-1,1] \to X$ dada por

$\alpha(t) = 0$ se $t \neq 0$

$\alpha(0) = x_o$

e $f : [-1,1] \to Y$ dada por $f(t) = y_o$

Neste caso a integral existe e

$$\int_{-1}^{1} d\alpha(t) \circ f(t) = 0$$

Mas se definimos f como sendo

$$f(t) = y_o \quad \text{se } t \neq 0$$

$$f(o) = 2y_o$$

a integral não existirá pois tomando uma partição qualquer $d \in D$ temos:

i) se $0 \notin d$, e supondo $t_{k-1} < 0 < t_k$

$$\sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ f(\xi_i) = [\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})] \circ f(\xi_k) = 0$$

ii) se $0 \in d$,

$$\sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ f(\xi_i) = \alpha(o) \circ f(\xi_k) - \alpha(o) \circ f(\xi_{k+1})$$

e o valor desta soma é 0, $x_o \cdot y_o$, $- x_o \circ y_o$ dependendo da escolha de ξ_k e ξ_{k+1}.

Mas vale a seguinte proposição:

Proposição 3.1.9: Seja $\alpha \in SV_B([a,b], X)$; se alteramos o valor de α num número enumerável de pontos <u>internos</u> de $[a,b]$ de tal modo que a nova função $\tilde{\alpha}$ pertença ainda a $SV_B([a,b], X)$ então, para tôda $f \in C([a,b], Y)$,

$$\int_a^b d\alpha(t) \circ f(t) = \int_a^b d\tilde{\alpha}(t) \circ f(t)$$

Demonstração: Seja A o conjunto dos pontos onde α foi alterada. O complementar de A em $[a,b]$ ($\complement A$) é denso em $[a,b]$; de fato se $t_o \in A$, dado $\eta > 0$ existe $t \in \complement A \cap (t_o - \eta, t_o + \eta)$ pois senão teríamos $(t_o - \eta, t_o + \eta) \subset A$ e A não seria enumerável.

O $\complement A$ é separável (por ser subespaço de um separável) logo existe um conjunto $B \subset \complement A$, B enumerável e denso em $\complement A$.

Construímos uma sequência de partições (d_n) $n \in N$ tais que - $\Delta d_n = \frac{1}{n}$ e $d_n \cap A = \emptyset$ para todo n. Isto é possível pois se e xistir $t \in d_n \cap A$ para algum n, tomamos uma vizinhança de t - que não contenha outros pontos de d_n e nessa vizinhança existe pe lo menos um ponto t_k de B. Mudamos então t por t_k.

Como a integral existe para tôda $f \in C([a,b], Y)$ podemos - calcular o limite usando a sequência $(d_n)_{n \in N}$ e como nessa sequên cia α e $\tilde{\alpha}$ coincidem, o valor das integrais será o mesmo.

TEOREMA 3.1.10: Se existe a $\int_a^b d\,\alpha(t) \cdot f(t)$ para tôda - $f \in \mathcal{G}([a,b], Y)$, então $\alpha \in SV_B([a,b], X)$.

DEMONSTRAÇÃO: Considerando eventualmente a função $\alpha(t) - \alpha(a)$, podemos supor $\alpha(a) = 0$.
Dada $d \in D$, definimos α_d de $[a,b]$ em X, pondo

$$\alpha_d(t) = \alpha(t_i) \quad \text{se} \quad t_{i-1} < t \leqslant t_i \quad , \quad i = 1, \ldots, |d|$$

$$\alpha_d(a) = 0$$

i) Mostraremos que

$$S_{B,d}[\alpha] = S_B[\alpha_d] = \sup_{||f|| \leqslant 1} \left|\left| \int_a^b d\,\alpha_d(t) \cdot f(t) \right|\right| =$$

$$= \sup_{||f|| \leqslant 1} \left|\left| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(t_{i-1}) \right|\right|;$$

de fato, é fácil ver que

$$S_{B,d}[\alpha] = S_B[\alpha_d] = \sup_{\substack{||y_i|| \leqslant 1 \\ y_i \in Y}} \left|\left| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot y_i \right|\right|$$

e portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe uma família $(\bar{y}_i)_{1 \leqslant i \leqslant |d|}$ de vetô- res de Y, com $||\bar{y}_i|| \leqslant 1$ para $1 \leqslant i \leqslant |d|$ e tais que

$$S_B[\alpha_d] - \left|\left| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot \bar{y}_i \right|\right| \leqslant \varepsilon.$$

Definimos $\bar{f}$ de $[a,b]$ em Y pondo, para $1 \leq i \leq |d|$

$\bar{f}(t) = (1-\lambda)\,\bar{y}_i + \lambda\,\bar{y}_{i+1}$, se $t = (1-\lambda)\,t_{i-1} + \lambda\,t_i$, $0 \leq \lambda \leq 1$, onde $\bar{y}_{n+1} \in Y$ e $\|\bar{y}_{n+1}\| \leq 1$. É claro que $\bar{f} \in C([a,b], Y)$ e $\|\bar{f}\| \leq 1$

Da proposição 3.1.8 , segue

$$\int_a^b d\,\alpha_d(t) \cdot \bar{f}(t) = \sum_{i=1}^{|d|} \sigma_{t_{i-1}}[\alpha_d] \cdot \bar{f}(t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot \bar{y}_i$$

logo

$$S_B[\alpha_d] - \left\| \int_a^b d\alpha_d(t) \cdot f(t) \right\| \leq \varepsilon \quad .$$

o que prova a nossa afirmação.

ii) Se, $S_B[\alpha] = +\infty$, dado $n \in N$ existe $d_n \in D$ tal que, $d_n \leq d$ implica $S_{B,d}[\alpha] \geq n$.

Tomemos então $d_n \leq \bar{d}_n$ com $\Delta\bar{d}_n \leq 1/n$ e definamos uma sequência $(F_n)_{n\in N}$, de funções de $C([a,b], Y)$ em Z dadas por:

$$F_n(f) = \sum_{i=1}^{|\bar{d}_n|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(t_{i-1}) = \int_a^b d\alpha_{\bar{d}_n}(t) \cdot f(t)$$

Da linearidade da integral e de

$$\| F_n(f) \| = \left\| \int_a^b d\alpha_{\bar{d}_n}(t) \cdot f(t) \right\|$$

$$\leqslant \quad S_B\,[\alpha_{\bar{d}_n}]\ \|\ f\ \|$$

segue que $F_n \in L\left[C([a,b]\,,\,Y)\,,\,Z\right]$ para todo n.

Além disso, por hipótese, para tôda $f \in C([a,b]\,,\,Y)$

$F_n(f) \to \int_a^b d\alpha(t)\,.\,f(t)$ quando $n \to \infty$ e, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|\ F_n\ \| \leqslant M \qquad \text{para todo } n.$$

Mas, por (i) porém temos

$$\|\ F_n\ \| = \sup_{\|\ f\ \| \leqslant 1} \|\ F_n(f)\,\|$$

$$= \sup_{\|f\| \leqslant 1} \left\|\ \sum_{i=1}^{|\bar{d}_n|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\,.\,f(t_{i-1})\right\|$$

$$= S_{B,\bar{d}_n}[\alpha] \geqslant n$$

Logo, $S_B\,[\alpha]$ tem que ser finito. (*)

(*) Agradeço a demonstração dêste Teorema a meu Orientador, Prof. Dr. Chaim S. Hönig.

Proposição 3.1.11: Se a sequência $(f_n)_{n \in N} \subset C([a,b], Y)$ é tal que as $f_n \to f$ uniformemente e $\alpha \in SV_B([a,b], X)$, então

$$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f_n(t) \to \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$$

Demonstração: Como a convergência é uniforme $f \in C([a,b], Y)$ e portanto existe a $\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$.

Do mesmo fato segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in N$ tal que

$$\| f_n - f \| < \frac{\varepsilon}{S_B\ [\alpha]} \quad \text{para todo} \quad n > n_o \quad .$$

Logo, para $n > n_o$ temos:

$$\left\| \int_a^b d\alpha(t) \cdot f_n(t) - \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) \right\|$$

$$= \left\| \int_a^b d\alpha(t) \cdot [f_n(t) - f(t)] \right\|$$

$$\leqslant \| f_n - f \| \ S_B\ [\alpha] \quad < \quad \varepsilon$$

III.2 - EXEMPLOS

O teorema 3.1.7 nos dá a existência da integral de Riemann-Stieltjes quando $\alpha \in SV_B([a,b], X)$ e $f \in C([a,b], Y)$; veremos agora, o que isso significa no caso dos quatro exemplos dados no Capítulo II.

Exemplo 1: Neste caso temos

$$B : (x,x') \in X \times X' \longmapsto \langle x', x \rangle \in \mathbb{C}$$

Da proposição 2.2.1 e do Teorema e.3.1.7 segue que se $\alpha \in BV([a,b], X)$ e $f \in C([a,b], X')$ então existe a integral e

$$\int_a^b d\alpha(t) . f(t) = \int_a^b \langle d\alpha(t), f(t) \rangle = \lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{|d|} \langle \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}), f(\xi_i) \rangle \in \mathbb{C} .$$

Se $X = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) a nossa integral coincide com a integral habitual de Riemann-Stieltjes na reta (ou em $\mathbb{C}$).

Exemplo 2: Temos

$$B : (x,\lambda) \in X \times \mathbb{C} \longmapsto \lambda x \in X .$$

Da proposição 2.2.2 e do Teorema 3.1.7 segue que, se $\alpha \in BW([a,b], X)$ e $\phi \in C([a,b])$ existe a integral e

$$\int_a^b d\alpha(t) . \phi(t) = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha(t) = \lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{|d|} \phi(\xi_i) [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \in X .$$

Quando $X = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\alpha \in BV([a,b])$ e temos novamente a integral de Riemann-Stieltjes na reta (ou em $\mathbb{C}$).

Exemplo 3 : Neste exemplo,

$$B : (u,y) \in L(E,F) \times E \longmapsto u(y) \in F$$

e se $\alpha \in SV([a,b], L(E,F))$, $f \in C([a,b], E)$ então existe a integral

$$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) = \lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] (f(\xi_i)) \in F .$$

Exemplo 4 : Neste caso,

$$B : (u,v) \in L(F,G) \times L(E.F) \to u \circ v \in L(E,G) \quad ;$$

Se $\alpha \in SV([a,b], L(F.G))$ e $f \in C([a,b], L(E,F))$, existe a

$$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) = \int_a^b d\alpha(t) \circ f(t) = \lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ f(\xi_i) \in L(E,G)$$

Proposição 3.2.1: Seja α uma função de $[a,b]$ em X tal que, existe a $\int_a^b \phi(t)\, d(x' \circ \alpha(t)) \in \mathbb{C}$, para tôda $\phi \in C([a,b])$ e para todo $x' \in X'$.

Então, existe a $\int_a^b \phi(t)\, d\alpha(t) \in X$, para tôda $\phi \in C([a,b])$ e $\alpha \in BW([a,b], X)$.

Demonstração: No exemplo 2, façamos $X = \mathbb{C}$; então, do Teorema 3.1.10 segue que $x' \circ \alpha \in BV([a,b])$ para todo $x' \in X'$ e do Teorema 2.2.3, $\alpha \in BW([a,b], X)$. Agora, usando novamente o exemplo 2, temos a existência da integral.

Proposição 3.2.2. Se $\alpha \in BV([a,b], X)$ e $f \in C([a,b], Y)$, então

$$\left\| \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) \right\| \leq \| B \| \int_a^b \| f(t) \| \, dV_{[a,t]} [\alpha]$$

Demonstração: É claro que se $\alpha \in BV([a,b], X)$ então $\alpha \in SV_B([a,b], X)$ e portanto existe a $\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$.

A integral do segundo membro também existe pois $\| f(t) \|$ é uma função contínua e $V_{[a,t]} [\alpha]$ é crescente, e portanto de variação limitada em $[a,b]$ (Exemplo 2).

Para tôda $d \in D$, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i) \right\| \leq \| B \| \sum_{i=1}^{|d|} \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \| \, \| f(\xi_i) \|$$

$$\leq \| B \| \sum_{i=1}^{|d|} \| f(\xi_i) \| \, V_{[t_{i-1}, t_i]} [\alpha]$$

$$= \| B \| \sum_{i=1}^{|d|} \| f(\xi_i) \| \, (V_{[a,t_i]} [\alpha] - V_{[a,t_{i-1}]} [\alpha])$$

e portanto, no limite

$$\left\| \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t) \right\| \leq \| B \| \int_a^b \| f(t) \| \, dV_{[a,t]} [\alpha]$$

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

IV.1 - CARACTERIZAÇÃO DE $C([a,b], X)'$

Nesta seção, daremos a representação de um funcional linear contínuo $F \in C([a,b], X)'$ por meio de uma função α de variação limitada; para isso, introduziremos um novo espaço, que indicaremos com $\widetilde{BV}_o([a,b], X)$.

Definimos:

$$\widetilde{BV}_o([a,b], X) = \{\alpha \in BV([a,b], X) : \alpha(a) = 0, \ \alpha \text{ é contínua a direita em } (a,b)\}$$

Proposição 4.1.1:

i) $\widetilde{BV}_o([a,b], X)$ é um espaço vetorial

ii) a aplicação

$$\alpha \in \widetilde{BV}_o([a,b], X) \to V[\alpha] \in \mathbb{R}$$

é uma norma sôbre êle.

iii) $\widetilde{BV}_o([a,b], X)$ é completo com essa norma.

Demonstração:

i), ii) Trivial

iii) Seja $(\alpha_n)_{n \in N}$ uma sequência de Cauchy de funções de

$\widetilde{BV}_o([a,b], X)$; assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in N$ tal que

$$V[\alpha_n - \alpha_m] \leq \varepsilon \quad \text{para } n, m \geq n_o \qquad (1)$$

Pela mesma razão, a sequência $(\alpha_n)_{n \in N}$ é limitada e portanto

$$V[\alpha_n] \leq M \qquad \text{para todo } n \qquad (2)$$

Como

$$\| \alpha_n(t) - \alpha_m(t) \| \leq V[\alpha_n - \alpha_m] = \|\alpha_m - \alpha_n\|$$

a sequência $(\alpha_n(t))_{n \in N}$, $t \in [a,b]$, é de Cauchy em X

e portanto $\alpha_n(t) \to \alpha(t)$ (3)

Mostraremos agora que a convergência simples em $\widetilde{BV}_o([a,b], X)$ e a condição (2), implicam a convergência uniforme; daí seguirá que α é de variação limitada em $[a,b]$ e contínua a direita em (a,b); além disso, como $\alpha_n(a) = 0$ para todo n, $\alpha(a) = 0$ e portanto $\alpha \in \widetilde{BV}_o([a,b], X)$ o que prova que $\widetilde{BV}_o([a,b], X)$ é completo.

De (2), (3) e da proposição 2.1.5 segue que

$$V[\alpha] \leq M$$

logo, α é de variação limitada em $[a,b]$

De (1) segue,

$$\| \alpha_n(t) - \alpha_m(t) \| \leq V[\alpha_n - \alpha_m] \leq \varepsilon \quad \text{para } n, m \geq n_o, \ t \in [a,b]$$

e fazendo $m \to +\infty$ temos

$$\| \alpha_n(t) - \alpha(t) \| \leqslant V[\alpha_n - \alpha] \leqslant \varepsilon$$

para $n > n_o$, para todo $t \in [a,b]$, logo $\alpha_n \to \alpha$ uniformemente em $\widetilde{BV}_o([a,b], X)$.

Teorema 4.1.2: Dada $\alpha \in BV([a,b], X)$, existe uma única $\tilde{\alpha} \in \widetilde{BV}_o([a,b], X)$ tal que $V[\tilde{\alpha}] \leqslant V[\alpha]$ e

$$\int_a^b \phi(t)\, d\tilde{\alpha}(t) = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha(t)$$

para tôda $\phi \in C([a,b])$

Demonstração: Definamos $\tilde{\alpha} : [a,b] \to X$,

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = a \\ \alpha(t+) - \alpha(a) & \text{se } a < t < b \\ \alpha(b) - \alpha(a) & \text{se } t = b \end{cases}$$

A. Provaremos que $\tilde{\alpha} \in \widetilde{BV}_o([a,b], X)$

i) Seja $d \in D$ então

$$\sum_{i=1}^{|d|} \| \tilde{\alpha}(t_i) - \tilde{\alpha}(t_{i-1}) \| = \sum_{i=1}^{|d|} \| \alpha(t_i+) - \alpha(t_{i-1}+) \|$$

$$\leqslant V[\alpha]$$

por corolário do Teorema 1.2.6, logo α é de variação limitada, e

$$V[\tilde{\alpha}] \leqslant V[\alpha]$$

ii) $\tilde{\alpha}$ é contínua a direita: Chamemos A o conjunto dos pontos de descontinuidade de α; como A é enumerável, $\complement A$ é denso em $[a,b]$ logo, dado $c \in (a,b)$ existe uma sequência de pontos de $\complement A$, $t_1 > t_2 > \ldots > t_n > \ldots$, $t_n \to c+$.

Como α é de variação limitada, existe $\alpha(c+)$ e portanto

$$\| \alpha(t_n) - \alpha(c+) \| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > n_o$$

Sendo $\tilde{\alpha}$ de variação limitada, para tôda sequência $(\bar{t}_n)_{n \in N}$, $\bar{t}_n \to c+$, $\tilde{\alpha}(\bar{t}_n) \to \tilde{\alpha}(c+)$; mas para a sequência $(t_n)_{n \in N}$ temos,

$$\| \tilde{\alpha}(t_n) - \tilde{\alpha}(c) \| = \| \alpha(t_n+) - \alpha(c+) \| = \| \alpha(t_n) - \alpha(c+) \| < \varepsilon$$

para $n > n_o$, logo $\tilde{\alpha}(t_n) \to \tilde{\alpha}(c)$ e da unicidade do limite segue $\tilde{\alpha}(c+) = \tilde{\alpha}(c)$. Logo $\tilde{\alpha}$ é contínua a direita em c.

De (i), (ii) e sendo que $\tilde{\alpha}(a) = 0$, segue que $\tilde{\alpha} \in \widetilde{BV}_o([a,b], X)$.

B. $\int_a^b \phi(t)\, d\alpha(t) = \int_a^b \phi(t)\, d(\alpha(t) - \alpha(a)) = \int_a^b \phi(t)\, d\tilde{\alpha}(t)$

da Proposição 3.1.9 página 59

C. Unicidade de $\tilde{\alpha}$: Provaremos que se $\beta \in \widetilde{BV}_o([a,b], X)$ e $\int_a^b \phi(t)\, d\beta(t) = 0$ para tôda $\phi \in C([a,b])$, então $\beta \equiv 0$

pois nesse caso, se existir $\tilde{\alpha}_1 \in \widetilde{BV}_o([a,b], X)$ tal que

$\int_a^b \phi(t)\, d\tilde{\alpha}(t) = \int_a^b \phi(t)\, d\tilde{\alpha}_1(t)$ para tôda $\phi \in C([a,b])$,

então $\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_1 \in \widetilde{BV}_o([a,b], X)$ e

$$\int_a^b \phi(t)\, d(\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}_1(t)) = 0 \quad \text{para tôda} \quad \phi \in C([a,b])$$

o que implica

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 \equiv 0$$

ou

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 \quad .$$

Suponhamos $\beta \neq 0$; existe então $c \in (a,b]$ tal que $\beta(c) \neq 0$.

Se $c = b$ tomando ϕ a função constantemente igual a 1, temos que

$$\int_a^b \phi(t)\, d\beta(t) = \beta(c) \neq 0$$

o que contradiz a nossa hipótese.

Se $c < b$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 \notin B_\varepsilon[\beta(c)]$ (bola fechada de centro $\beta(c)$ e raio ε) ; por ser β contínua a direita existe $\delta > 0$ tal que, se $c < t \leq c + \delta$ então $\beta(t) \in B_\varepsilon[\beta(c)]$. Tomemos $\phi \in C([a,b])$ definida por:

$\phi(t) = 1$ se $t \in [a,c]$; é linear no intervalo $[c, c + \delta]$; $\phi(t) = 0$ se $t \in [c + \delta, b]$. Assim, dada uma partição qualquer de $[a,b]$, ajuntando a ela c e $c+\delta$ temos, se

$$d : a = t_o < t_1 < \ldots < t_k \leqslant c < t_{k+1} < \ldots < t_p \leqslant c+\delta < \ldots < t_n = b,$$

$$S_d = \sum_i \phi(t_i)\left[\beta(t_i)-\beta(t_{i-1})\right] = \beta(t_1)+\left[\beta(t_2)-\beta(t_1)\right] + \ldots + \left[\beta(t_k)-\beta(t_{k+1})\right]$$

$$+ \left[\beta(c) - \beta(t_k)\right] + \phi(t_{k+1})\left[\beta(t_{k+1}) - \beta(c)\right]$$

$$+ \phi(t_{k+2})\left[\beta(t_{k+2}) - \beta(t_{k+1})\right] + \ldots$$

$$+ \phi(t_p) \left[\beta(t_p) - \beta(t_{p-1})\right]$$

$$= \left[1 - \phi(t_{k+1})\right] \beta(c) + \left[\phi(t_{k+1}) - \phi(t_{k+2})\right] \beta(t_{k+1})$$

$$+ \ldots + \left[\phi(t_{p-1}) - \phi(t_p)\right] \beta(t_{p-1}) + \phi(t_p)\ \beta(t_p) .$$

Mas, $\beta(c)$, $\beta(t_{k+1})$, $\ldots$, $\beta(t_p)$ pertencem a $B_\varepsilon\left[\beta(c)\right]$ sendo os seus coeficientes números reais compreendidos entre 0 e 1 e a soma dêles igual a 1 logo, como $B_\varepsilon\left[\beta(c)\right]$ é convexa, $S_d \in B_\varepsilon\left[\beta(c)\right]$; como isto vale para tôda partição de $[a,b]$ temos

$$\lim_{\Delta d \to 0} S_d = \int_a^b \phi(t) \,.\, d\beta(t) \in B_\varepsilon\left[\beta(c)\right]$$

e portanto $\int_a^b \phi(t)\, d\beta(t) \neq 0$

o que contradiz a nossa hipótese; logo β tem que ser nula.

Corolário: Dado $F \in [C([a,b])]'$ existe uma única $\tilde{\alpha} \in \widetilde{BV}_0([a,b])$ tal que para tôda $\phi \in C([a,b])$ temos:

$$F(\phi) = \int_a^b \phi(t)\, d\tilde{\alpha}(t)$$

e

$$V[\tilde{\alpha}] = \| F \|$$

Demonstração: Pelo teorema de Riesz (ver (7)) existe $\alpha \in BV([a,b])$ tal que para tôda $\phi \in C([a,b])$ temos:

$$F(\phi) = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha(t)$$

e $V[\alpha] = \| F \|$

Do teorema anterior segue a unicidade de $\tilde{\alpha}$ e

$$V[\tilde{\alpha}] \leq V[\alpha] = \| F \|$$

Mas,

$$\| F \| = \sup_{\|\phi\| \leq 1} \left\| \int_a^b \phi(t)\, d\tilde{\alpha}(t) \right\| \leq V[\tilde{\alpha}]$$

e portanto

$$V[\tilde{\alpha}] = \| F \| .$$

Teorema 4.1.3: $\widetilde{BV}_0([a,b], X') = C([a,b], X)'$, isto é, dado um funcional linear contínuo F sôbre $C([a,b], X)$, existe uma única $\alpha \in \widetilde{BV}_0([a,b], X')$ tal que

$$F(f) = \int_a^b < d\alpha(t), f(t) >$$

para tôda $f \in C([a,b], X)$ e $V[\alpha] = \| F \|$.

Além disso, tôda aplicação $\alpha \in \widetilde{BV}_0([a,b], X')$ define um funcional linear, contínuo de $C([a,b], X)'$.

Demonstração:

A. Mostraremos primeiro a última afirmação:

A tôda $\alpha \in \widetilde{BV}_0([a,b], X)$, corresponde uma aplicação

$$F_\alpha : f \in C([a,b], X) \to \int_a^b < d\alpha(t), f(t) > \quad C \quad C$$

bem definida pois o Teorema 3.1.7 nos assegura a existência da integral. A linearidade de F_α segue da linearidade da integral, dada pela Proposição 3.1.1 e, a continuidade segue de

$$|F_\alpha(f)| = |\int_a^b < d\alpha(t), f(t)>| \leq V[\alpha] \| f \|$$

Logo, $F_\alpha \in [C([a,b], X)]'$ e $\| F_\alpha \| \leq V[\alpha]$.

B. i) Dados $\phi \in C([a,b])$, $x \in X$ definimos a aplicação

$$\phi x : t \in [a,b] \to \phi(t)x \in X .$$

De

$$\| \phi x(t_1) - \phi x(t_2) \| = \| \phi(t_1) x - \phi(t_2) x \|$$

$$= | \phi(t_1) - \phi(t_2) | \, \| x \|$$

segue que $\phi x \in C([a,b], X)$.

ii) Agora, dado $F \in [C([a,b], X)]'$ para cada $x \in X$ podemos definir a aplicação

$$F_x : \phi \in C([a,b]) \to F(\phi x) \in \mathbb{C} ,$$

que é linear e contínua; de fato, a linearidade segue da linearidade de F, e a continuidade segue de

$$|F_x(\phi)| = |F(\phi x)| \leq \| F \| \, \| \phi x \|$$

$$= \| F \| \sup_{t \in [a,b]} \| \phi(t) x \|$$

$$= \| F \| \sup_{t \in [a,b]} |\phi(t)| \, \| x \|$$

$$= \| F \| \, \| x \| \, \| \phi \| \quad . \qquad (1)$$

Logo $F_x \in [C([a,b])]'$ e pelo corolário do teorema anterior, existe uma única $\alpha_x \in \widetilde{BV}_o([a,b])$, tal que

$$V[\alpha_x] = \| F_x \| \qquad (2)$$

e $$F_x(\phi) = \int_a^b \phi(t) \, d \, \alpha_x(t)$$

para tôda $\phi \in C([a,b])$.

Se $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ é fácil ver que

$$F_{x_1 + x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}$$

$$F_{\lambda x_1} = \lambda F_{x_1}$$

logo,

$$\int_a^b \phi(t)\, d\alpha_{x_1+x_2}(t) = \int_a^b \phi(t)\, d(\alpha_{x_1}(t) + \alpha_{x_2}(t))$$

e $$\int_a^b \phi(t) d_{\lambda x_1}(t) = \int_a^b \phi(t)\, d(\lambda\alpha_{x_1}(t))$$

para tôda $\phi \in C(|a,b|)$, e como a representação garantida pelo corolário do teorema anterior é única, segue-se que

$$\begin{aligned} \alpha_{x_1 + x_2} &= \alpha_{x_1} + \alpha_{x_2} \\ \alpha_{\lambda x} &= \lambda\, \alpha_x \end{aligned} \qquad (3)$$

iii) Definimos agora

$\alpha : [a,b] \to X'$ dada por $\alpha(t)(x) = \alpha_x(t)$.

Observemos que α está bem definida, isto é, toma valores em X' pois, para todo $t \in [a,b]$, $\alpha(t)$ é uma aplicação de X em $\mathbb{C}$ linear (de (3)), e contínua, já que de (2) e (1) segue

$$|\alpha(t)(x)| = |\alpha_x(t)| \leq V[\alpha_x] = \| F_x\| \leq \| F\| \; \| x \| .$$

iv) Mostraremos que $\alpha \in \widetilde{BV}_o([a,b], X')$; de fato,

$\alpha(a)(x) = \alpha_x(a) = 0$ para todo $x \in X$, logo $\alpha(a) \equiv 0$

Se $d \in D$, temos

$$\sum_{i=1}^{|d|} \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \| = \sum_{i=1}^{|d|} \sup_{\|x\| \leqslant 1} | [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] (x) |$$

$$= \sup_{\| x \| \leqslant 1} \sum_{i=1}^{|d|} | \alpha_x(t_i) - \alpha_x(t_{i-1}) |$$

$$\leqslant \sup_{\| x \| \leqslant 1} V [\alpha_x]$$

$$\leqslant \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| F_x \|$$

$$= \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{\| \phi \| \leqslant 1} | F_x(\phi) |$$

$$\leqslant \sup_{\| x \| \leqslant 1} \sup_{\| \phi \| \leqslant 1} \| F \| \| x \| \| \phi \| \quad \text{de (1)}$$

$$\leqslant \| F \|$$

logo $V [\alpha] < \| F \|$ (4)

Mostraremos agora que α é contínua a direita em (a,b) :
Seja $t \in (a,b)$, $(t_n)_{n \in N}$ uma sequência de pontos de $[a,b]$ tal que $t_n \to t+$. Como α é de variação limitada $\alpha(t_n) \to \alpha(t+)$ e portanto, para cada $x \in X$

$< \alpha(t_n), x > \quad \to \quad < \alpha(t+), \quad x >$.

Mas, $< \alpha(t_n), x > = \alpha_x(t_n) \quad \to \alpha_x(t) = < \alpha(t), x)$

por ser α_x contínua a direita, logo

$< \alpha(t), x > = < \alpha(t+), x >$ para todo $x \in X$ e portanto

$$\alpha(t) = \alpha(t+)$$

v) $\quad F(f) = \int_a^b < d\alpha(t), f(t)>$

para tôda $f \in C([a,b], X)$; de fato, da parte A segue que existe $F_\alpha \in C([a,b], X)'$, tal que

$$F_\alpha(f) = \int_a^b < d\alpha(t), f(t) >$$

e $\quad \| F_\alpha \| \leqslant V[\alpha]$. $\qquad$ (5)

Mas,

$$F_\alpha(\phi x) = \int_a^b < d\alpha(t), \phi(t) x >$$

$$= \int_a^b \phi(t) \, d < \alpha(t), x >$$

$$= \int_a^b \phi(t) \, d\alpha_x(t)$$

$$= F_x(\phi) \qquad \text{de (2)}$$

$$= F(\phi x)$$

logo F e F_α coincidem no subespaço das combinações lineares finitas da forma $\sum_i \phi_i x_i$, com $\phi_i \in C([a,b])$, $x_i \in X$;

mas êste subespaço é denso em $C([a,b], X)$ e portanto F e F_α coincidem no espaço todo.

vi) De (4), (5) e (v) segue que

$$V[\alpha] = \| F \|$$

vii) Unicidade de α:

Suponhamos que existe $\beta \in \widetilde{BV}_o([a,b], X')$ tal que

$$F(f) = \int_a^b < d\beta(t), f(t) >$$

para tôda $f \in C([a,b], X)$ e $V[\beta] = \| F \|$.

Então

$$\int_a^b < d\beta(t), \phi(t)x> = \int_a^b < d\alpha(t), \phi(t)x >$$

o que implica

$$\int_a^b \phi(t)\, d < \beta(t), x > = \int_a^b \phi(t)\, d < \alpha(t), x >$$

para tôda ϕ C $c([a,b])$, $x \in X$. Mas, $x \circ \beta \in BV_o([a,b])$, $x \circ \alpha \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ e do corolário. Teorema 4.1.2 segue que $x \circ \beta = x \circ \alpha$ para todo $x \in X$, o que implica $\beta = \alpha$.

IV.2 : CARACTERIZAÇÃO DE $L[C([a,b]), X]$

Passaremos agora a dar a representação de uma função linear, contínua de $C([a,b])$ em $X = Z'$ para depois obter como corolário o caso mais geral em que X é um espaço qualquer.

Teorema 4.2: Se $F \in L[C([a,b], Z']$ então existe uma única $\alpha \in BW([a,b], Z')$ tal que

a) $F(\phi) = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha(t)$ para tôda $\phi \in C([a,b])$

b) $z \circ \alpha \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ para todo $z \in Z$.

Temos $W[\alpha] \leq \| F \| \leq 2\, W[\alpha]$.

Demonstração:

i) Construção de α: Para cada $z \in Z$, existe uma aplicação que leva:

$$\phi \in C(|a,b|) \to < F(\phi), z > \in \mathbb{C} .$$

Esta aplicação é linear e contínua; de fato, a linearidade segue da linearidade de F e a continuidade segue de:

$$|< F(\phi), z >| \leq \| F(\phi) \| \, \| z \| \leq \| F \| \, \| \phi \| \, \| z \| .$$

Logo, do corolário do Teorema 4.1.2, segue que existe uma única $\alpha_z \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ tal que

$$V[\alpha_z] \leq \| F \| \, \| z \|$$

e (1)

$$< F(\phi), z > = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha_z(t)$$

para tôda $\phi \in C([a,b])$.

Se $z_1, z_2 \in Z$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$< F(\phi), z_1 + z_2 > = < F(\phi), z_1 > + < F(\phi), z_2 >$$

$$< F(\phi), \lambda z_1 > = \lambda < F(\phi), z_1 >$$

logo de (1) segue que

$$\int_a^b \phi(t)\, d\alpha_{z_1+z_2}(t) = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha_{z_1}(t) + \int_a^b \phi(t)\, d\alpha_{z_2}(t) \quad \text{e}$$

$$\int_a^b \phi(t)\, d\alpha_{\lambda z_1}(t) = \int_a^b \phi(t)\, d(\lambda\alpha_{z_1}(t))$$

para tôda $\phi \in C([a,b])$ e da unicidade de α_z temos que

$$\begin{aligned} \alpha_{z_1+z_2}(t) &= \alpha_{z_1}(t) + \alpha_{z_2}(t) \\ \alpha_{\lambda z_1}(t) &= \lambda\alpha_{z_1}(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

Além disso, de (1) segue que

$$|\alpha_z(t)| \leq V[\alpha_z] \leq \| F \| \, \| z \| . \qquad (3)$$

Assim, por (2) e (3), podemos definir uma aplicação

$$\alpha : [a,b] \to Z' , \qquad \alpha(t)(z) = \alpha_z(t) .$$

ii) α é fracamente de variação limitada; de fato, para todo $z \in Z$, $z \circ \alpha = \alpha_z \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ (4)

e pelo Teorema 2.2.4, $\alpha \in BW([a,b], Z')$

iii) $$F(\phi) = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha(t)$$

para tôda $\phi \in C([a,b])$.

De fato, para todo $z \in Z$,

$$< F(\phi), z > = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha_z(t) \qquad \text{de (1)}$$

$$= \int_a^b \phi(t)\, d(z \circ \alpha(t))$$

$$= <\int_a^b \phi(t)\, d\, \alpha(t), z >$$

de onde segue a nossa afirmação. Logo, vale (a).

iv) Mostraremos que $W[\alpha] \leq \| F \| \leq 2 W[\alpha]$.

Seja δ uma divisão de $[a,b]$, então

$$W_\delta [\alpha] = \| \sum_{i=1}^{n} [\alpha (t_i) - (s_i)] \|$$

$$= \sup_{\|z\| \leq 1} | \sum_{i=1}^{n} [\alpha(t_i) - \alpha(s_i)] (z)|$$

$$= \sup_{\|z\| \leq 1} | \sum_{i=1}^{n} [\alpha_z(t_i) - \alpha_z(s_i)] |$$

$$\leq \sup_{\|z\| \leq 1} V[\alpha_z]$$

$$\leq \sup_{\|z\| \leq 1} \| F \| \, \| z \| \qquad \text{de (1)}$$

$$\leq \| F \|$$

logo $$W[\alpha] \leq \| F \| .$$

$$\| F \| = \sup_{\| \phi \| \leq 1} \| F(\phi) \| = \sup_{\| \phi \| < 1} \sup_{\| z \| < 1} | < F(\phi), z > |$$

$$= \sup_{\| \phi \| \leq 1} \sup_{\| z \| \leq 1} \left| \int_a^b \phi(t) \, d\alpha_z(t) \right|$$

$$\leq \sup_{\| \phi \| \leq 1} \sup_{\| z \| \leq 1} \| \phi \| \, V[\alpha_z]$$

$$\leq 2 \sup_{\| z \| \leq 1} W[\alpha_z]$$

$$= 2 \sup_{\| z \| \leq 1} W[z \circ \alpha]$$

$$\leq 2 \sup_{\| z \| \leq 1} \| z \| \, W[\alpha]$$

$$\leq 2 \, W[\alpha] \quad .$$

v) Unicidade de α.

Suponhamos que existe $\beta \in BW([a,b], Z')$ tal que

$$F(\phi) = \int_a^b \phi(t) \, d\beta(t) \quad \text{para tôda} \quad \phi \in C([a,b])$$

e, $z \circ \beta \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ para todo $z \in Z$.

Mas, então, do Corolário do Teorema 4.1.2 segue que

$$z \circ \beta = z \circ \alpha \quad \text{para todo} \quad z \in Z \text{ , e portanto}$$

$< \beta(t), z > = < \alpha(t), z)$ para todo $t \in [a,b]$, o que implica $\beta = \alpha$

Corolário: Se $F \in L(C([a,b]), X)$ então, existe uma única $\alpha \in BW([a,b], X'')$ tal que

a) $F(\phi) = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha(t)$ para tôda $\phi \in C([a,b])$

b) $x' \circ \alpha \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ para todo $x' \in X'$.

Temos, $W[\alpha] \leq \| F \| \leq 2\, W[\alpha]$.

IV.3 - CARACTERIZAÇÃO DE $L[C([a,b], X), Y]$.

Daremos agora o teorema de representação mais geral, em que $F \in L[C([a,b], X), Z']$ e, neste caso α será uma função de semivariação limitada a valores em $L(X,Z')$.

Introduziremos para isto o espaço $\widetilde{BW}_o([a,b], Z')$.

Definimos $\widetilde{BW}_o([a,b], Z')$ como sendo o conjunto das funções de $[a,b]$ em Z' tais que, para todo $z \in Z$, $z \circ \alpha \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ onde,

$$z \circ \alpha : t \in [a,b] \rightarrow \langle \alpha(t), z \rangle \in \mathbb{C} \quad .$$

Do teorema 2.2.4 e da definição acima segue que, se $\alpha \in \widetilde{BW}_o([a,b], Z')$ então α é de variação fraca limitada e $\alpha(a) = 0$.

Teorema 4.3: Sejam X e Z espaços de Banach, $F \in L[C([a,b],X),Z']$

Então existe uma única $\alpha \in SV([a,b], L(X,Z'))$ tal que

a) $F(f) = \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$ para tôda $f \in C([a,b], X)$

b) para todo $z \in Z$, $z \circ \alpha(x) \in \widetilde{BV}_o([a,b])$

onde $\quad z \circ \alpha(x) : t \in [a,b] \to \langle \alpha(t)(x), z\rangle = [\alpha(t)(x)](z) \in \mathbb{C}$

e $\quad \| F \| = SV[\alpha]$.

Demonstração:

i) Construção de α:

Dados $z \in Z$, $x \in X$, existe uma aplicação que leva

$$\phi \in C([a,b]) \mapsto \langle F(\phi x), z \rangle \in \mathbb{C}$$

(onde $\phi x : t \in [a,b] \to \phi(t)x \in X$), que é linear e contínua; de fato, a linearidade é trivial e a continuidade segue de

$$|\langle F(\phi x), z \rangle| \leqslant \| F(\phi x) \| \; \| z \| \leqslant \| F \| \; \| \phi \| \; \| x \| \; \| z \| \quad .$$

Pelo corolário do Teorema 4.1.2 existe uma única

$\alpha_{x,z} \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ tal que

$$\langle F(\phi x), z \rangle = \int_a^b \phi(t) \, d\alpha_{x,z}(t) \qquad (1)$$

e

$$| \alpha_{x,z}(t) | \leqslant V|\alpha_{x,z}| \leqslant \| F \| \; \| x \| \; \| z \| \qquad (2)$$

Se $z_1, z_2 \in Z$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle F(\phi x), z_1 + z_2 \rangle = \langle F(\phi x), z_1 \rangle + \langle F(\phi x), z_2 \rangle \qquad \text{e}$$

$$\langle F(\phi x), \lambda z \rangle = \lambda \langle F(\phi x), z \rangle \; .$$

Logo, de (1) segue que

$$\int_a^b \phi(t) \, d\alpha_{x,z_1+z_2}(t) = \int_a^b \phi(t) \, d(\alpha_{x,z_1}(t) + \alpha_{x,z_2}(t))$$

e

$$\int_a^b \phi(t)\, d\alpha_{x,\lambda z_1}(t) = \int_a^b \phi(t)\, d(\lambda d_{x,z_1}(t))$$

para tôda $\phi \in C([a,b])'$; como $\alpha_{x,z}$ é única temos que

$$\alpha_{x,z_1+z_2}(t) = \alpha_{x,z_1}(t) + \alpha_{x,z_2}(t) \qquad \text{e}$$

(3

$$\alpha_{x,\lambda z_1}(t) = \lambda\, \alpha_{x,z_1}(t) \quad .$$

Definimos agora

$$\alpha_x : [a,b] \to Z' , \qquad \alpha_x(t)\,(z) = \alpha_{x,z}(t)$$

e de fato α_x toma valores em Z' (de (3) segue a linearidade e de (2) a continuidade).

Além disso, para todo $z \in Z$

$$z \circ \alpha_x(t) = < \alpha_x(t), z > = \alpha_{x,z}(t)$$

logo, $z \circ \alpha_x \in \widetilde{BV}_0([a,b])$ para todo $z \in Z$ e portanto $\alpha_x \in \widetilde{BW}_0([a,b], Z')$.

Ainda temos

$$F(\phi x) = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha_x(t) \qquad (4)$$

pois para todo $z \in Z$

$$< F(\phi x), z > = \int_a^b \phi(t)\, d\alpha_{x,z}(t) \qquad \text{por (1)}$$

$$= \int_a^b \phi(t)\, d < \alpha_x(t), z >$$

$$= \int_a^b \phi(t)\, d(z \circ \alpha_x(t))$$

$$= < \int_a^b \phi(t)\; d\alpha_x(t)\,,\; z > \quad .$$

α_x é única pois se existir $\beta \in \widetilde{BW}_o([a,b], Z')$ tal que vale (4) então, para todo $z \in Z$,

$$\int_a^b \phi(t)\; d(\alpha_{x,z}(t) - z \circ \beta(t)) = 0 \quad \text{para tôda } \phi \in C([a,b]) \quad .$$

Mas $\alpha_{x,z} - z \circ \beta \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ logo, por corolário Teorema 4.1.2 , $\alpha_{x,z} = z \circ \beta$ para tôdo $z \in Z$ o que implica $\alpha_x = \beta$.

Provada a unicidade demonstra-se, anàlogamente ao feito para (3), que

$$\alpha_{x_1+x_2}(t) = \alpha_{x_1}(t) + \alpha_{x_2}(t) \qquad \text{e}$$

$$\alpha_{\lambda x_1}(t) = \lambda\, \alpha_{x_1} \qquad (5)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$; além disso

$$\| \alpha_x(t) \| = \sup_{\| z \| \leq 1} | \alpha_x(t)(z) |$$

$$= \sup_{\| z \| \leq 1} | \alpha_{x,z}(t) |$$

$$\leq \| F \| \; \| x \| \qquad (6)$$

onde a última desigualdade vale por (2).

Logo, por (5) e (6) , podemos definir

$$\alpha : [a,b] \to L(X,Z') \qquad \text{pondo}$$

$$\alpha(t)(x) = \alpha_x(t)$$

e é imediato que, para todo $z \in Z$,

$$z \circ \alpha(x) = \alpha_{x,z} \in BV_o([a,b]) \qquad (7)$$

ii) Se $z \in Z$, $z \circ F \in [C([a,b], X]' = \widetilde{BV}_o([a,b], X')$;
logo, existe uma única $\beta_z \in \widetilde{BV}_o([a,b], X')$ tal que

$$< z \circ F, f > = < F(f), z > = \int_a^b < d\beta_z(t), f(t)> \qquad (8)$$

(Teorema 4.1.3) .

Como β_z é única, a aplicação

$$\beta : z \in Z \rightarrow \beta_z \in BV_o([a,b], X') \text{ é linear.}$$

(a demonstração é análoga à feita em (i))
Provaremos que β é contínua: pelo Teorema do gráfico fechado (ver (7)) é suficiente provar que se $(z_n)_{n \in N}$ é uma sequência de pontos de Z, $z_n \rightarrow 0$ e tal que $\beta_{z_n} \rightarrow \widetilde{\beta}$ em $\widetilde{BV}_o([a,b],X')$ então $\beta \equiv 0$.

Mas $z_n \rightarrow 0$ implica $< F(f), z_n > \rightarrow 0$ por ser $F(f)$ linear contínua; por outra parte

$$< F(f), z_n > = \int_a^b < d\beta_{z_n}(t), f(t)> \qquad \text{de (8)}$$

e

$$\int_a^b < d\beta_{z_n}(t), f(t)> \rightarrow \int_a^b < d\widetilde{\beta}(t), f(t) >$$

pois

$$\left| \int_a^b < d(\beta_{z_n}(t) - \widetilde{\beta}(t), f(t)> \right| \leq \| f \| \; V\, [\beta_{z_n} - \widetilde{\beta}]$$

$$= \| f \| \, \| \beta_{z_n} - \widetilde{\beta} \| \; .$$

Logo $\int_a^b < d\tilde{\beta}(t), f(t) > = 0$ (9)

para tôda $f \in C([a,b], X)$.

Se $\tilde{\beta} \neq 0$, existem $t \in [a,b]$, $x_o \in X$ tais que

$< x_o, \tilde{\beta}(t)> \neq 0$. É fácil ver que

$x_o \cdot \tilde{\beta} \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ logo, da demonstração do Teorema 4.1.2 existe $\phi \in C([a,b])$ tal que

$$\int_a^b \phi(t)\, d(x_o \circ \tilde{\beta}(t)) \neq 0 .$$

Agora , tomando $f = \phi\, x_o$ temos

$$\int_a^b \phi(t)\, d\, (x_o \circ \tilde{\beta}(t)) = \int_a^b < d\tilde{\beta}(t), \phi(t)\, x_o > \neq 0$$

o que é absurdo por (9) e portanto $\tilde{\beta}$ tem que ser nula. Logo, β é contínua e

$$\| \beta(z) \| = \| \beta_z \| = V [\beta_z] \leq \| \beta \| \; \| z \| . \qquad (10)$$

iii) Mostraremos que $< \beta_z(t), x > = <\alpha(t)(x), z >$ para todo $z \in Z$, $x \in X$, $t \in [a,b]$. De fato, de (4) temos, para $z \in Z$, $\phi \in C([a,b])$

$< F(\phi x), z > = < \int_a^b \phi(t)\, d(\alpha(t)(x)), z >$. De (8) ,

$$< F(\phi x), z > = \int_a^b < d\beta_z(t), \phi(t)\, x >$$

logo,

$$\int_a^b \phi(t)\, d < \alpha(t)(x), z > = \int_a^b \phi(t)\, d < \beta_z(t), x>$$

para todo $z \in Z$, $\phi \in C([a,b])$

Mas $< \alpha(t)(x), z > = z \circ \alpha_x(t)$

$< \beta_z(t), x = x \circ \beta_z(t)$

e, $z \circ \alpha_x$, $x \circ \beta_z \in \widetilde{BV}_o([a,b])$ logo, pela unicidade da representação em $\widetilde{BV}_o([a,b])$, temos

$$< \alpha(t)(x), z > = < \beta_z(t), x >$$

para todo $z \in Z$, $x \in X$, $t \in [a,b]$

iv) Mostraremos que $\alpha \in SV([a,b], L(X.Z'))$.

Se $d \in D$

$$SV_d[\alpha] = \sup_{\| x_i \| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] (x_i) \right\|$$

$$= \sup_{\| x_i \| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i)(x_i) - \alpha(t_{i-1})(x_i)] \right\|$$

$$= \sup_{\| x_i \| \leq 1} \sup_{\| z \| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i)(x_i)\, z - \alpha(t_{i-1})(x_i) z] \right|$$

$$\leq \sup_{\| x_i \| \leq 1} \sup_{\| z \| \leq 1} \sum_{i=1}^{|d|} |\alpha(t_i)(x_i)\, z - \alpha(t_{i-1})(x_i) z|$$

$$= \sup_{\| x_i \| \leq 1} \sup_{\| z \| \leq 1} \sum_{i=1}^{|d|} |< x_i, \beta_z(t_i) - \beta_z(t_{i-1})> |$$

$$= \sup_{\| z \| \leqslant 1} \; \sup_{\| x_i \| \leqslant 1} \; \sum_{i=1}^{|d|} | < x_i , \beta_z(t_i) - \beta_z(t_{i-1}) > |$$

$$= \sup_{\| z \| \leqslant 1} \; \sum_{i=1}^{|d|} \| \beta_z(t_i) - \beta_z(t_{i-1}) \|$$

$$\leqslant \sup_{\| z \| \leqslant 1} V [\beta_z]$$

$$\leqslant \| \beta \| \qquad \text{de (10)} \quad .$$

v) Mostraremos que, para tôda $f \in C([a,b], X)$,

$$F(f) = \int_a^b d\alpha(t) \, . \, f(t) \quad .$$

Definamos uma aplicação linear, contínua

$$F_\alpha : f \in C([a,b], X) \rightarrow \int_a^b d\alpha(t) \, . \, f(t) \in Z'$$

Por (4) $\quad F_\alpha(\phi x) = F(\phi x)$

logo F e F_α coincidem no subespaço das combinações lineares finitas da forma $\sum_i \phi_i x_i$ com $\phi_i \in C([a,b])$, $x_i \in X$; mas êste subespaço é denso em $C([a,b], X)$ e portanto F e F_α coincidem no espaço todo.

Logo, vale (a).

vi) De (7) segue que $z \circ \alpha(x) \in \widetilde{BV}_o([a,b])$, para todo $z \in Z$. Além disso,

$$||F|| = \sup_{||f||\leq 1} ||\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)|| \leq SV[\alpha] \quad ,$$

e de (iv) ,

$$SV[\alpha] \leq ||\beta|| = \sup_{||z||\leq 1} ||\beta_z||$$

$$= \sup_{||z||\leq 1} \sup_{t\in[a,b]} ||\beta_z(t)||$$

$$= \sup_{||z||\leq 1} \sup_{t\in[a,b]} \sup_{||x||\leq 1} |<\beta_z(t), x>|$$

$$= \sup_{t\in[a,b]} \sup_{||x||\leq 1} \sup_{||z||\leq 1} |<\alpha(t)(x), z>|$$

$$= \sup_{t\in[a,b]} \sup_{||x||\leq 1} \sup_{||z||\leq 1} |\alpha_{x,z}(t)|$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} ||F|| \qquad \text{de (2)}$$

$$= ||F|| \quad .$$

Logo, $||F|| = SV[\alpha]$ e portanto vale (b).

vii) A unicidade de α segue novamente da unicidade da representação em $\widetilde{BV}_o([a,b])$.

Corolário: Se $F \in L[C([a,b], X), Y]$, então existe uma única $\alpha \in SV([a,b], L(X, Y''))$ tal que

a) $F(f) = \int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$ para tôda $f \in C([a,b], X)$

b) Para todo $y' \in Y'$, $y' \circ \alpha(x) \in \widetilde{BV}_o([a,b])$

onde $y' \circ \alpha(x) : t \in [a,b] \to \langle \alpha(t)(x), y' \rangle \in \mathbb{C}$.

Além disso, $\| F \| = SV[\alpha]$.

Demonstração: É só considerar a imersão canônica de Y em Y''.

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, T. M. - Análisis Matemático, Trad. por Francisco Vélez Cantarell. Barcelona, Reverté, 1960. 534 p.

2. Bourbaki, N. - Fonctions d'une Variable Reélle. Paris, Hermann, 1949. 184 p.

3. Bushaw, D. - Elements of General Topology. 3 rd. ed. New York , Wiley, 1967. 166 p.

4. Dinculeanu, N. - Vectors Measures. Oxford, Pergamon, 1967. 435 p.

5. Dunford, N. _ Uniformity in Linear Spaces. Trans. Amer. Math Soc. 44: 305-356. 1938.

6. Hille, E. and Phillips, R.S. - Functional Analysis and Semi--Groups. Americam Mathematical Society, 1957. 779 p.

7. Hönig, Chaim S. - Análise Funcional e Aplicações. Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1970. 2v. 671 p.

8. Schwartz, L. - Cours d'Analyse. Paris, Hermann, 1967. 830 p.