Instituto de Matemática e Estatística

S Ô B R E

E Q U A Ç Õ E S D I F E R E N C I A I S F U N C I O N A I S

E

S I S T E M A S A S S O C I A D O S

Tadao Yoshioka

Universidade de São Paulo - 1970

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Para as equações diferenciais ordinárias, L.R.Borges Vieira formulou e desenvolveu o conceito de sistemas associados (Ver. [0], [2], [3])(+). O objetivo do presente trabalho é estender êsse conceito ao âmbito das equações diferenciais funcionais (equações diferenciais com argumentos retardados), objetivo êste que é bem modesto: não pretendemos desenvolver aquí uma teoria sôbre o referido assunto como a que foi feita nos trabalhos de Borges Vieira. Limitar-nos-emos a dar uma formulação a êsse conceito no contexto das equações diferenciais funcionais e justificá-la. Esperamos que no futuro os resultados aquí obtidos venham a ser objeto de apreciação para estudos posteriores.

Procederemos abaixo a uma descrição rápida das questões abordadas neste trabalho:

A Parte 0 é um resumo dos fatos básicos da Teoria das equações diferenciais funcionais e sua estabilidade. A estabilidade que aí tratamos é de caráter local. Na exposição dêsses fatos, procuramos seguir, na medida do possível, [4] no que diz respeito a definições e notações, e, embora nenhum resultado original seja apresentado, alguns comentários são feitos afim de ressaltar questões mais importantes dentro do esquema do nosso trabalho.

Na Parte I, é feito um estudo de possíveis definições de derivada de um funcional de Lyapunov relativamente a uma dada equação. Uma tal definição figura na Parte 0. Essa definição é dada em têrmos de soluções da equação. O propósito central da Parte I é o da apresentação de tais definições de modo independente do conhecimento de soluções. Inicialmente, é dada uma definição neste sentido. A mesma é, porém, acompanhada de um inconveniente: o de nos vermos obrigados, em determinadas circunstâncias, a impor uma condição de lipschitzianeidade local aos funcionais de Lyapunov cuja

(+) Os números entre colchetes referem-se à bibliografia colocada no final do presente trabalho.

derivada desejamos calcular. Posteriormente, êsse inconveniente é eliminado por uma segunda definição.

Na Parte II, onde as equações diferenciais funcionais... passam a ser chamadas de sistemas, o conceito de família associada a um sistema é formulado. Nessa parte, a condição de associação, introduzida por Borges Vieira em [0] e [1], desempenha um papel decisivo. Na mesma parte ainda, são estabelecidos teoremas relacionando a estabilidade de um dado sistema com a estabilidade.. dos sistemas de uma sua família associada. Para tanto, os resultados obtidos na Parte I constituem-se em ferramenta principal.

Expressamos aquí nossos agradecimentos ao Prof.Dr. L.R. Borges Vieira pela inestimável dedicação com que nos orientou, ao Prof.Dr. M. de Oliveira Cesar pela bondosa ajuda que nos ofereceu, ao Prof.Dr. Chaim S. Hönig pelos excelentes cursos de pós-graduação que nos ministrou, ao Prof.Dr. Abrahão de Moraes pelos constantes incentivos que nos deu e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelas bôlsas de estudos que nos concedeu.

São Paulo, abril de 1970

Tadao Yoshioka

PARTE 0

PRELIMINARES

0-1. Definição de equação diferencial funcional.

Daremos aqui uma definição formal de equação diferencial. Uma discussão sôbre fatos e exemplos que motivaram esta definição pode ser encontrada, por exemplo, em [4] e [5].

Seja h, $0 \leq h < \infty$. Indiquemos por C o espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[-h,0]$ com valôres em R^n. Aqui R^n é o espaço n-dimensional real dotado de uma norma usual qualquer.. $|\cdot|$. A norma $||\cdot||$ no espaço C será a da covergência uniforme, isto é, $||\varphi|| = \sup_{-h\leq\vartheta\leq 0} |\varphi(\vartheta)|$, $\varphi \in C$, e com esta norma C é um espaço de Banach.

Sejam t_o, A, com $t_o \geq 0$, $0 < A \leq \infty$, e x uma função contínua definida no intervalo $[t_o-h, t_o+A)$ com valôres em R^n. Para cada t, $t_o \leq t < t_o+A$, a notação x_t indicará a translação, de $-t$, da restrição de x ao intervalo $[t-h,t]$; mais precisamente, x_t é um elemento de C definido por $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, $-h\leq\vartheta \leq 0$. Em outras palavras, o gráfico de x_t é nada mais do que o gráfico de x sôbre o intervalo $[t-h,t]$ deslocado ao intervalo $[-h,0]$. Apesar da semelhança dos gráficos, é importante distinguir x_t e $x|_{[t-h,t]}$, restrição de x ao intervalo $[t-h,t]$.

A figura 1 ilustra a relação entre x e x_t.

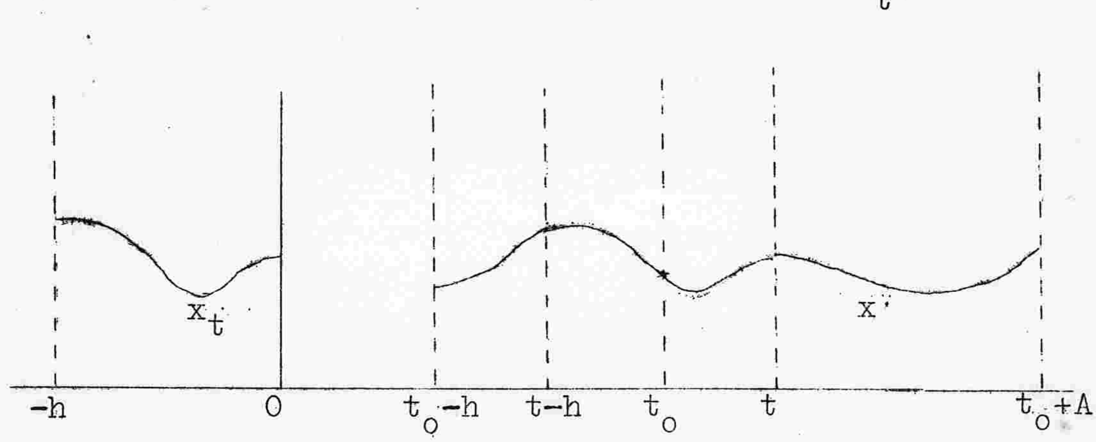


FIGURA 1

Seja H com $0 < H \leq \infty$. Usaremos a notação C_H para indicar o conjunto $\{\varphi \in C \mid \|\varphi\| < H\}$, bola aberta em C. No caso $H = \infty$ fica pois $C_H = C_\infty = C$.

Seja f uma aplicação de $C_H \times R_+$ em R^n, onde $R_+ = [0,\infty)$.

A equação

$$(0\text{-}1) \qquad \dot{x}(t) = f(x_t, t)$$

é chamada equação diferencial funcional.

Em (0-1), vemos que o vetor velocidade $\dot{x}(t)$ depende de t e de x_t, isto é, para se determinar $\dot{x}(t)$ deve-se conhecer, além do instante t, a trajetória de x no intervalo $[t-h,t]$. Nota-se que, no caso das equações diferenciais ordinárias, $\dot{x}(t)$ depende de t e do conhecimento apenas de $x(t)$, valor de x no instante t.

Uma outra observação é a de que, quando $h = 0$, uma equação diferencial funcional se reduz a uma equação diferencial ordinária em R^n uma vez que, neste caso, C_H pode ser considerado como uma bola aberta em R^n.

0-2. Existência e unicidade de soluções.

Sejam A, $0 < A \leq \infty$, $t_0 \geq 0$ e $\varphi \in C_H$.

Uma função x, contínua e definida no intervalo $[t_0-h, t_0+A)$, é dita uma solução de (0-1) com função inicial φ em t_0 se

(i) $x_t \in C_H$ para $t_0 \leq t < t_0+A$,

(ii) $x_{t_0} = \varphi$

(iii) $\dot{x}(t) = f(x_t, t)$ para $t_0 \leq t < t_0+A$

Observação: Para se verificar a condição (iii) acima só se supõe que x tenha derivada à direita em t_0, devendo-se entender $\dot{x}(t_0)$ como designando essa derivada. Pode ser dada uma definição análoga de solução num intervalo do tipo $[t_0-h, t_0+A]$.

O seguinte teorema dá uma condição suficiente para a existência e unicidade de soluções com função inicial num instante positivo ou nulo.

<u>Teorema 0-1</u>: Sejam $f: C_H \times R_+ \to R^n$ uma aplicação contínua e L uma constante tal que, para $\psi, \zeta \in C_H$ e $t \in R_+$, se tenha

$$|f(\psi,t) - f(\zeta,t)| \leq L \, ||\psi - \zeta|| \, .$$

Então, para qualquer $t_o \geq 0$ e para todo $\varphi \in C_H$, existem $A > 0$ e uma função x, definida no intervalo $[t_o-h, t_o+A]$, que é solução de (0-1) com função inicial φ em t_o.

Ainda mais, esta solução é única.

<u>Observação</u>: O Teorema 0-1, na forma como está acima enunciado, bem como uma sua demonstração podem ser encontrados em [4]. [6] apresenta um teorema e sua demonstração bastante compacta para o caso ... $H = \infty$. Em [5], o problema de existência e o de unicidade são tratados separadamente, num contexto mais geral do que o do teorema.. acima. Em todos os teoremas aqui citados, uma pricipal ferramenta para demonstração é o clássico teorema do ponto fixo de Banach.

A solução x de (0-1) com função inicial φ em t_o será denotada por $x(\varphi, t_o)$ e a correspondente função x_t por $x_t(\varphi, t_o)$. Os.. valôres dessas funções em u e em ϑ serão indicados respectivamente por $x(u; \varphi, t_o)$ e por $x_t(\vartheta; \varphi, t_o)$. Nota-se que, nessas notações, se tem $x(t_o; \varphi, t_o) = \varphi(0)$ e $x_{t_o}(\varphi, t_o) = \varphi$.

Apresentaremos a seguir as seguintes observações sôbre o problema de extensão de soluções, as quais se encontram feitas em [4].

Dentro das hipóteses do Teorema 0-1, temos:

(a) Se x, definida em $[t_o-h, t_o+A]$, é solução de (0-1) e se...... $|x(t)| < H$ neste intevalo, então x pode ser estendida à direita de t_o+A, tomando para função inicial em t_o+A

$$\varphi(\vartheta) = x(t_o+A+\vartheta) \, , \quad -h \leq \vartheta \leq 0 .$$

(b) Se x, definida em $[t_o-h, t_o+B)$, $0 < B < \infty$, é solução de (0-1) e se $|x(t)| \leq \bar{H} < H$ neste intervalo, então podemos prolongar x como solução de (0-1) a $[t_o-h, t_o+B]$ e, por conseguinte, pela observação (a), à direita de t_o+B.

(c) Seja $[t_o-h, t_o+M)$, $0 < M \leq \infty$, o intervalo maximal de uma solução x de (0-1).

Vê-se que se, neste intervalo, $|x(t)| \leq \bar{H} < H$, então $M = \infty$ em virtude da observação (b).
Em particular, se $H = \infty$ e se x é limitada no seu intervalo maximal $[t_o-h, t_o+M)$, então $M = \infty$.

(d) Seja $x(\varphi, t_o)$ solução de (0-1) definida no intervalo $[t_o-h, t_o+A)$. Em geral, não podemos estender $x(\varphi, t_o)$ à esquerda de t_o-h, isto é, não podemos garantir a existência de $c > 0$ e de uma função x, definida em $[t_o-h-c, t_o+A)$, coincidindo com $x(\varphi, t_o)$ em .... $[t_o-h, t_o+A)$ tal que

$$x(t) = f(x_t, t) \quad \text{para} \quad t_o-c \leq t < t_o+A \; .$$

Êste é o caso, por exemplo, se tomarmos $\varphi \in C_H$ não tendo derivada.

0-3. Estabilidade e funcionais de Lyapunov.

Para simplificar a linguagem introduziremos a seguinte denominação: dizemos que a equação (0-1) pertence à Classe ξ se

(i) f satisfaz às condições do Teorema 0-1, isto é, f é contínua e lipschitziana em $C_H \times R_+$,

(ii) $f(0,t) = 0$ para $t \geq 0$.

Quando a equação (0-1) pertence à Classe ξ indicaremos êste fato escrevendo $f \in \xi$. Observemos que se $f \in \xi$, a existência e unicidade de soluções de (0-1) são asseguradas e a função $x = 0$ é uma solução de (0-1) com o intervalo maximal contendo o intervalo $[-h, \infty)$.

Definição 0-1: Seja dada uma equação (0-1) com $f \in \xi$.

(a) A solução $x = 0$ de (0-1) é dita estável se, dados $\varepsilon > 0$ e $t_o \geq 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_o) > 0$ tal que

$$||\varphi|| < \delta, \; \varphi \in C_H \; , \text{ e } t \geq t_o \quad \text{implicam} \quad |x(t;\varphi, t_o)| < \varepsilon .$$

(b) A solução $x = 0$ de (0-1) é dita uniformemente estável se a condição (a) é satisfeita com δ independente de t_o.

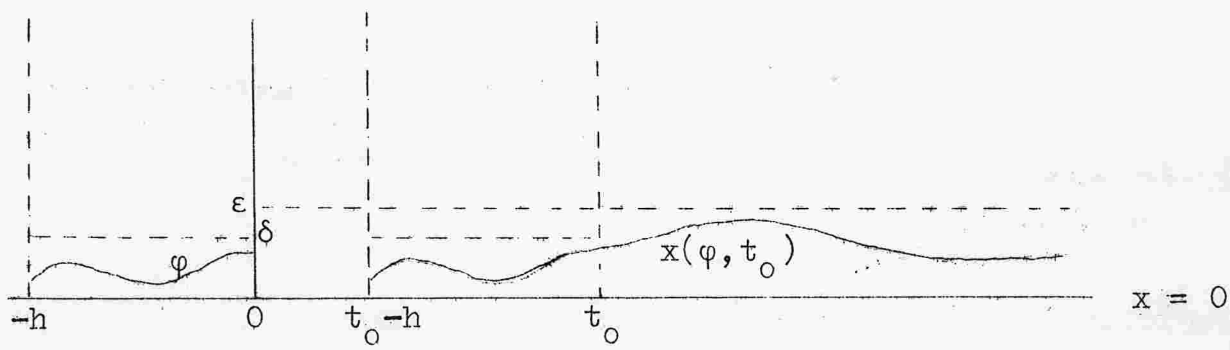
(c) A solução $x = 0$ de (0-1) é dita <u>assintòticamente estável</u> se a condição (a) é verificada e se, dado $t_o \geq 0$, existe $H_o = H_o(t_o) > 0$ tal que

$$||\varphi|| < H_o \,, \quad \varphi \varepsilon C_H \text{ implicam } x(t; \varphi, t_o) \to 0 \text{ quando } t \to 0.$$

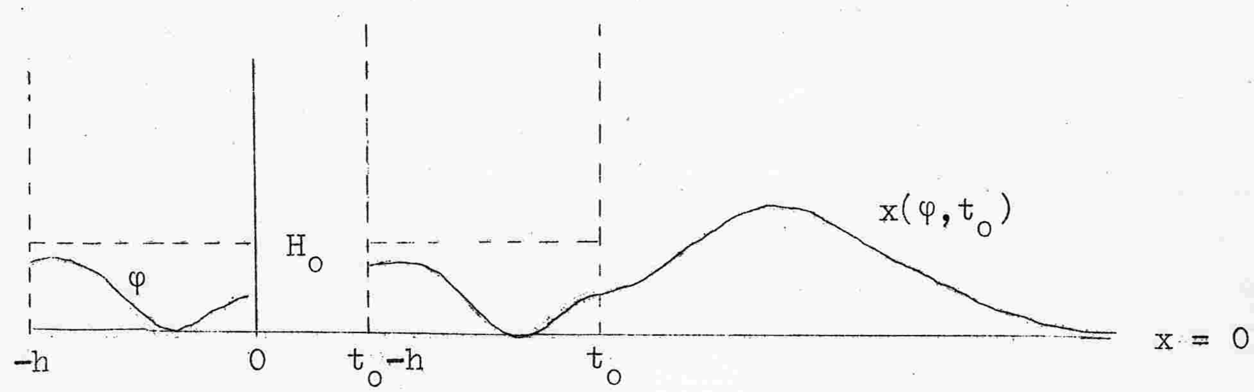
(d) A solução $x = 0$ é dita <u>uniformemente assintòticamente estável</u> se a condição (c) se verifica com δ e H_o independentes de t_o e se, para todo $\eta > 0$, existe $T = T(\eta) > 0$ tal que

$$||\varphi|| < H_o, \varphi \ \varepsilon \ C_H \text{ e } t \geq t_o + T \text{ implicam } |x(t; \varphi, t_o)| < \eta \,.$$

As figuras abaixo ilustram situações em que ocorrem a estabilidade simples e estabilidade assintótica.



<u>FIGURA 2</u>



<u>FIGURA 3</u>

Em [7], outros conceitos de estabilidade são considerados. De interêsse para êste trabalho são essencialmente (b) e (d).

Seja V um funcional contínuo em $C_H \times R_+$, isto é, V é uma aplicação contínua de $C_H \times R_+$ em R, espaço dos números reais. Um tal funcional será chamado <u>funcional de Lyapunov</u>. Através dos funcionais de Lyapunov podemos generalizar o uso das funções de Lyapunov nas equações diferenciais ordinárias para as equações diferenciais funcionais. Com tal propósito, definiremos abixo o que vem a ser "derivada de um funcional de Lyapunov relativamente a uma dada equação". Êste conceito é vital no estudo da estabilidade por meio de funcionais de Lyapunov, e, particularmente, dentro do esquema do nosso trabalho.

Definição 0-2: Consideremos uma equação (0-1) com $f \varepsilon \xi$ e um funcional de Lyapunov V. Dados $\varphi \varepsilon C_H$ e $t_o \geq 0$, $x(\varphi, t_o)$ indica solução de (0-1).

A derivada de V no ponto (φ, t_o) relativamente à equação (0-1), denotada por $\dot{V}(\varphi, t_o)$, é dada pela seguinte expressão:

$$\dot{V}(\varphi, t_o) = \overline{\lim_{k \to 0+}} \frac{V(x_{t_o+k}(\varphi, t_o), t_o+k) - V(x_{t_o}(\varphi, t_o), t_o)}{k}$$

$$= \overline{\lim_{k \to 0+}} \frac{V(x_{t_o+k}(\varphi, t_o), t_o+k) - V(\varphi, t_o)}{k}$$

Quando necessário, para indicar explicitamente que $\dot{V}(\varphi, t_o)$ está sendo calculada relativamente à equação (0-1), costuma-se usar a notação $\dot{V}_{(0-1)}(\varphi, t_o)$.

Nota-se que na definição acima de $\dot{V}(\varphi, t_o)$ empregámos um limite superior e não limite simples; isto por quê, dentro da hipótese de continuidade de V, êste último limite poderia não existir, enquanto que o primeiro certamente existe (finito ou não).

Para os funcionais de Lyapunov podemos, de maneira análoga à do caso de funções de Lyapunov, definir os conceitos de funcional positivo definido, negativo definido e funcional com extremo superior infinitésimo etc. Com êstes conceitos, é possível estender ao caso das equações diferenciais funcionais os conhecidos teoremas do segundo método de Lyapunov relativos ao caso das equações diferenciais ordinárias. Para êsses teoremas ver, por exemplo, [4],[5] e [6].

No que segue trabalharemos com o seguinte teorema, que é uma consequência dos teoremas acima aludidos.

<u>Teorema 0-2</u>: Seja dada uma equação (0-1) com $f \in \xi$.

Se existir um funcional contínuo $V: C_H \times R_+ \to R$ tal que

(i) $\alpha(|\psi(0)|) \leq V(\psi,t) \leq W(\psi)$ para $\psi \in C_H$ e $t \geq 0$, onde α é uma função escalar contínua em $[0,H)$ com $\alpha(r) > 0$ para $r > 0$ e W é um funcional contínuo em C_H com $W(0) = 0$,

(ii) $\dot{V}(\psi,t) \leq 0$ para $\psi \in C_H$ e $t \geq 0$,

então a solução $x = 0$ de (0-1) será <u>uniformemente estável</u>.

Ainda mais, se a condição (ii) fôr substituida pela seguinte condição mais forte:

(iii) $\dot{V}(\psi,t) \leq -\beta(||\psi||)$ para $\psi \in C_H$ e $t \geq 0$, onde β é uma função escalar contínua em $[0,H)$ com $\beta(r) > 0$ para $r > 0$,

então a mesma solução será <u>uniformemente assintòticamente estável</u>.

PARTE I

SÔBRE POSSÍVEIS DEFINIÇÕES DE DERIVADA DE UM FUNCIONAL DE LYAPUNOV

I-1. Motivação.

No caso das equações diferenciais ordinárias, por segundo método de Lyapunov (ou método direto de Lyapunov) entende-se, em geral, um método pelo qual se determina tipos de estabilidade pertinentes a um dado sistema por meio de funções de Lyapunov, sem a necessidade de resolver o sistema. Isto é possível, pricipalmente, pelo fato de a derivada de funções de Lyapunov poder ser expressa em têrmos apenas do sistema, não envolvendo soluções do mesmo.

Como se verá na Parte II, êste fato também será fundamental para a aplicação do conceito de sistemas associados ao estudo da estabilidade de equações diferenciais funcionais.

Seja

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = f(x,t)$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias e V uma função escalar contínua no campo de definição de f, isto é, V é uma função de Lyapunov para o sistema (1). Suponhamos que o campo de definição de f seja do tipo $G \times R_+$, onde G é um aberto em R^n e que a existência e unicidade de soluções de (1) estejam asseguradas.

Quando V é de classe C^1, como é usual, define-se $\dot{V}(x_o,t_o)$ derivada de V no ponto (x_o,t_o) relativamente ao sistema (1), por

$$(2) \qquad \dot{V}(x_o,t_o) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_o, t_o)f_i(x_o, t_o) + \frac{\partial V}{\partial t}(x_o, t_o),$$

definição esta que não envolve soluções de (1).

Quando V é de classe C, de modo que em geral a expressão do segundo membro de (2) não se pode considerar, $\dot{V}(x_o, t_o)$ é dada usualmente, por

$$(3) \qquad \dot{V}(x_o,t_o) = \overline{\lim_{k\to o+}} \frac{V(x(t_o+k),\ t_o+k) - V(x_o,t_o)}{k}$$

onde $x = x(t)$ é a solução de (1) com $x(t_o) = x_o$ (ver [8]); esta definição depende do conhecimento de soluções de (1) e corresponde à Definição 0-2 no caso das equações diferenciais funcionais.

La Salle, no seu artigo [9], emprega um outro tipo de derivada de V relativamente ao mesmo sistema, a saber, aquela dada por

$$(4) \qquad \overline{V}(x_o,t_o) = \overline{\lim_{k\to o+}} \frac{V(x_o+kf(x_o,t_o),\ t_o+k) - V(x_o,t_o)}{k} \qquad (+)$$

e afirma que se V fôr localmente lipschitziana (++), então

$$(5) \qquad \overline{V}(x_o,t_o) = \dot{V}(x_o,t_o). \qquad (+++)$$

A (4) mostra que é possível definir a derivada de V independente do conhecimento de soluções, e isto, mesmo quando V é de classe C.

No que segue procuraremos apresentar, para as equações diferenciais funcionais, fatos análogos àqueles que acabam de ser mencionados a propósito das (4) e (5).

I-2. Mais duas definições de derivada de um funcional de Lyapunov.

Neste parágrafo estaremos sempre dentro das hipóteses da definição 0-2, isto é, temos uma equação (0-1) com $f \varepsilon \xi$ e um funcional contínuo V em $C_H x\ R_+$.

Lembremos inicialmente que, de acôrdo com a Definição .. 0-2, para cada ponto $(\varphi, t_o) \varepsilon\ C_H \times R_+$, $\dot{V}(\varphi, t_o)$ é dada por

---

(+) - De acôrdo com citações feitas em [7] e [9], êste conceito de derivada bem como o uso do limite superior na definição de derivada foram introduzidos por Yoshizawa em [10].

(++) - V é localmente lipschitziana se para cada ponto (x,t), existem uma vizinhança M de x, e outra N de t, e uma constante L tal que
$$|V(y,s) - V(z,s)| \quad L|y - z| \quad \text{para} \quad y,z \varepsilon M \quad e \quad s \varepsilon N.$$

(+++) - Esta afirmação também foi feita inicialmente por Yoshizawa em [10].

$$(\mathrm{I}) \qquad \dot{V}(\varphi,t_o) = \overline{\lim_{k\to 0+}} \frac{V(x_{t_o+k}(\varphi,t_o),\ t_o+k) - V(\varphi,t_o)}{k}$$

onde $x(\varphi,t_o)$ é solução de (0-1).

a) Definição de $\bar{V}$.

Sejam dados $\varphi \in C_H$ e $t_o \geq 0$. Para cada k, $0 < k \leq h$, definimos $\varphi_{t_o,k} \in C$ por

$$(\mathrm{A}) \qquad \varphi_{t_o,k}(\vartheta) = \begin{cases} \varphi(k+\vartheta) & \text{para } -h \leq \vartheta \leq -k \\ \varphi(0) + [k+\vartheta]f(\varphi,t_o) & \text{para } -k \leq \vartheta \leq 0. \end{cases}$$

Do Lema I-2, que veremos adiante, segue que $\varphi_{t_o,k} \in C_H$ para k suficientemente pequeno.

Lembremos ainda que se $x(\varphi,t_o)$ é solução de (0-1), então $x_{t_o+k}(\varphi,t_o) \in C_H$ (+) é dada por

$$(\mathrm{B}) \qquad x_{t_o+k}(\vartheta;\varphi,t_o) = \begin{cases} \varphi(k+\vartheta) & \text{para } -h \leq \vartheta \leq -k \\ x(t_o+k+\vartheta;\varphi,t_o) & \text{para } -k \leq \vartheta \leq 0 \end{cases}$$

em virtude da condição $0 < k \leq h$.

A seguinte figura dá uma idéia de como estão relacionadas $\varphi_{t_o,k}$ e $x_{t_o+k}(\varphi,t_o)$.

(+) - k é suposto suficientemente pequeno de modo que t_o+k pertença ao intervalo maximal da solução $x(\varphi,t_o)$ e, por conseguinte, se tenha

$$x_{t_o+k}(\varphi,t_o) \in C_H.$$

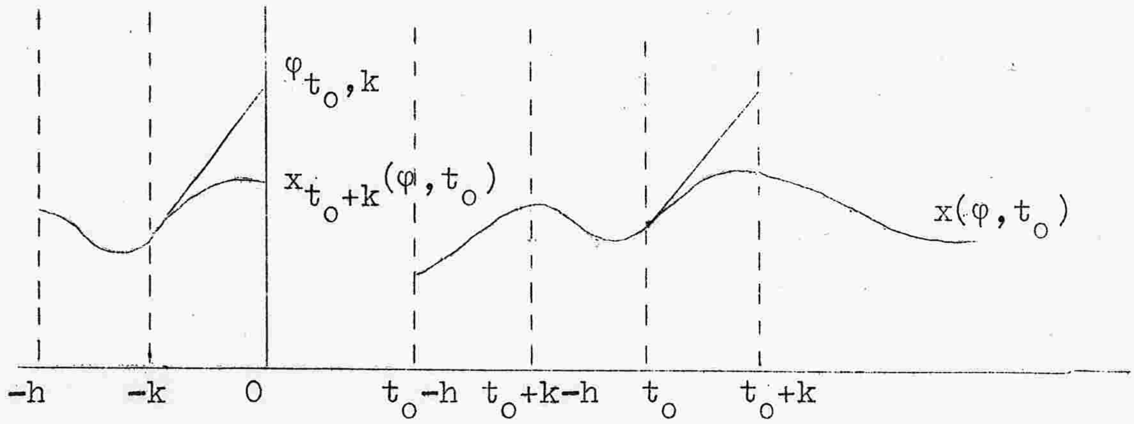


FIGURA 4

Notemos que se $x(t) = x(t;\ \varphi,\ t_o)$, então

(C) $$\dot{x}(t_o) = \lim_{k\to o+} \frac{x(t_o + k;\ ,t_o) - \varphi(0)}{k} = f(\varphi, t_o).$$

Definição I-1: Para cada ponto $(\varphi,t_o) \varepsilon C_H \times R_+$ definimos ... $\bar{V}(\varphi,t_o)$ por

(II) $$\bar{V}(\varphi,t_o) = \overline{\lim_{k\to o+}} \frac{V(\varphi_{t_o,k}, t_o + k) - V(\varphi,t_o)}{k}$$

O cálculo de $\bar{V}(\varphi,t_o)$ não depende do conhecimento da solução $x(\varphi,t_o)$ de (O-1).

Por conveniência adotaremos a seguinte definição para a lipschitzianeidade local de V: dizemos que V é localmente lipschitziano em $C_H \times R_+$ se para todo T, $0 < T < \infty$, e para cada $\tilde{H}$, $0 < \tilde{H} \leq H$, existe uma constante $M = M(T, \tilde{H})$ tal que

$$|V(\psi_1,t) - V(\psi_2,t)| \leq M||\psi_1 - \psi_2||$$

para $\psi_1,\psi_2 \ \varepsilon\ C_{\tilde{H}}$ e o $0 \leq t \leq T$ onde $C_{\tilde{H}}$ indica o conjunto dos elementos ψ de C com $||\psi|| < \tilde{H}$ (ver [7]).

Mostremos agora que se V fôr localmente lipschitziano, o conceito de $\bar{V}$ é equivalente ao de $\dot{V}$.

Para tanto o seguinte lema é essencial:

Lema I-1: Para cada ponto $(\varphi, t_o) \in C_H \times R_+$ temos,

$$\lim_{k\to o+} \frac{\|x_{t_o+k}(\varphi,t_o) - \varphi_{t_o,k}\|}{k} = 0.$$

Em outras palavras, a quantidade $\|x_{t_o+k}(\varphi,t_o) - \varphi_{t_o,k}\|$ é um infinitesimal de ordem superior a k.

Demonstração: Observemos inicialmente que em vista de (A) e (B) temos,

$$\|x_{t_o+k}(\varphi,t_o)-\varphi_{t_o,k}\| = \sup_{-k\leq\vartheta\leq 0} |x(t_o+k+\vartheta;\varphi,t_o) - \varphi(0) - [k+\vartheta]\, f(\varphi, t_o)|.$$

Por outro lado, em virtude de (C), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < k < \delta \quad \text{implica} \quad 0 \leq \frac{|x(t_o+ k;\varphi,t_o) - \varphi(0) - kf(\varphi,t_o)|}{k} < \varepsilon.$$

Portanto, se $0 < k < \delta$ e $-k < \vartheta \leq 0$ $(0 < k+\vartheta \leq k)$, então $0 < k+\vartheta < \delta$ e temos,

$$0 \leq \frac{|x(t_o+ k + \vartheta;\varphi,t_o) - \varphi(0) - [k+\vartheta]f(\varphi,t_o)|}{k} \leq$$

$$\leq \frac{|x(t_o+ k + \vartheta;\varphi,t_o) - \varphi(0) - [k+\vartheta]f(\varphi,t_o)|}{k+\vartheta} < \varepsilon.$$

Isto significa que se $0 < k < \delta$

$$0 \leq \frac{\sup\limits_{-k\leq\vartheta\leq 0} |x(t_o+ k + \vartheta;\varphi,t_o) - \varphi(0) - [k+\vartheta]f(\varphi,t_o)|}{k} \leq \varepsilon,$$

ou seja, se $0 < k < \delta$, então

$$0 \leq \frac{\|x_{t_o+k}(\varphi,t_o) - \varphi_{t_o,k}\|}{k} \leq \varepsilon,$$

o que mostra que

$$\lim_{k\to 0+} \frac{\|x_{t_0+k}(\varphi,t_0) - \varphi_{t_0,k}\|}{k} = 0.$$

C.Q.D.

Lema I-2: Sejam $\varphi \in C_H$ e $t_0 \geq 0$. Para todo $\tilde{H}$, $\|\varphi\| < \tilde{H} \leq H$, existe $K > 0$ tal que

$$0 < k \leq K \quad \text{implica} \quad \|x_{t_0+k}(\varphi,t_0)\| < \tilde{H} \text{ e } \|\varphi_{t_0,k}\| < \tilde{H}.$$

Demonstração: Em virtude de (A) e (B) podemos supor que $|x_{t_0+k}(\vartheta;\varphi,t_0)|$ e $|\varphi_{t_0,k}(\vartheta)|$ assumam seus máximos no intervalo $[-k, 0]$.

Se $f(\varphi,t_0) = 0$ podemos escrever $x(t_0+ s;\varphi,t_0) = \varphi(0) + P(s)s$ com $\lim_{s\to 0+} P(s) = 0$ por (C). Seja $K_1 > 0$ tal que $0 < s \leq K_1$ implica $|P(s)| < \tilde{H}$ e seja K_2 com

$$0 < K_2 < \frac{\tilde{H} - \|\varphi\|}{\tilde{H}} .$$

Basta tomar $K = \min\{K_1, K_2\}$. Com efeito, para k com $0 < k \leq K$ e $-k \leq \vartheta \leq 0$ $(0 \leq k+\vartheta \leq k)$ temos

$$|x(t_0+ k + \vartheta;\varphi,t_0)| \leq |\varphi(0)| + [k+\vartheta]|P(k+\vartheta)| < \|\varphi\| + k\tilde{H} \leq \|\varphi\| + K_2\tilde{H}$$

$$\leq \|\varphi\| + \frac{\tilde{H} - \|\varphi\|}{\tilde{H}} \cdot \tilde{H} = \tilde{H} \qquad \text{e}$$

$$|\varphi(0) + [k+\vartheta]f(\varphi,t_0)| \leq |\varphi(0)| + [k+\vartheta]|f(\varphi,t_0)| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\| < \tilde{H},$$

pois $f(\varphi,t_0) = 0$, o que mostra que

$$0 < k \leq K \quad \text{implica} \quad \|x_{t_0+k}(\varphi,t_0)\| < \tilde{H} \text{ e } \|\varphi_{t_0,k}\| < \tilde{H}.$$

Se $f(\varphi,t_0) \neq 0$ escrevemos $x(t_0+ s;\varphi,t_0) = \varphi(0) + sf(\varphi,t_0) + sR(s)$ com $\lim_{s\to 0+} R(s) = 0$ em vista de (C). Seja $K_1 > 0$ tal que $0 < s \leq K_1$ implica $|R(s)| < |f(\varphi,t_0)|$ e seja

K_2 com

$$0 < K_2 < \frac{\tilde{H} - \|\varphi\|}{2|f(\varphi,t_o)|}$$

De modo análogo, pode-se mostrar que basta tomar, neste caso, $K = \min\{K_1, K_2\}$.

C.Q.D.

Proposição I-1: Se V fôr localmente lipschitziano em $C_H \times R_+$, então

(D) $$\overline{V}(\varphi,t_o) = \dot{V}(\varphi,t_o)$$

para todo $(\varphi,t_o) \in C_H \times R_+$.

Demonstração: Dado $(\varphi,t_o) \in C_H \times R_+$, seja $\tilde{H}$ com $\|\varphi\| < \tilde{H} < H$. Pelo Lema I-2 existe $K > 0$ tal que para $0 < k \leq K$ temos $\|x_{t_o+k}(\varphi,t_o)\| < \tilde{H}$ e $\|\varphi_{t_o,k}\| < \tilde{H}$, e portanto, pela lipschitzianeidade local de V existe uma constante M tal que

$$0 \leq \frac{|V(x_{t_o+k}(\varphi,t_o),t_o+k) - V(\varphi_{t_o,k},t_o+k)|}{k} \leq M \frac{\| x_{t_o+k}(\varphi,t_o) - \varphi_{t_o,k}\|}{k}$$

para $0 < k \leq K$, o que mostra, pelo Lema I-1, que

(E) $$\lim_{k\to o+} \frac{V(x_{t_o+k}(\varphi,t_o)\ ,\ t_o+k) - V(\varphi_{t_o,k}\ ,\ t_o+k)}{k} = 0\ .$$

Lembremos agora uma propriedade conhecida do limite superior, a saber: se $\lim g$ existe, então $\overline{\lim}\,\{f + g\} = \overline{\lim}\, f + \lim g$.

Em virtude da propriedade acima e de (E) temos

$$\dot{V}(\varphi,t_o) = \overline{\lim_{k\to o+}} \frac{V(x_{t_o+k}(\varphi,t_o)\ ,\ t_o+k) - V(\varphi,t_o)}{k} =$$

$$= \overline{\lim_{k\to o+}} \frac{V(\varphi_{t_o,k},t_o+k)-V(\varphi,t_o)}{k} + \lim_{k\to o+} \frac{V(x_{t_o+k}(\varphi,t_o),t_o+k)-V(\varphi_{t_o,k},t_o+k)}{k}$$

$$= \overline{\lim_{k\to o+}} \frac{V(\varphi_{t_o,k},t_o+k) - V(\varphi,t_o)}{k} = \bar{V}(\varphi,t_o) .$$

C.Q.D.

Como uma consequência imediata do Teorema 0-2 e da Proposição I-1 temos o seguinte teorema:

<u>Teorema I-1</u>: Se V fôr <u>localmente lipschitziano</u> em $C_H \times R_+$ e fôr tal que

(i⁻) V satisfaz à condição (i) do Teorema 0-2 ,

(ii⁻) $\bar{V}(\psi,t) \leq 0$ para $\psi \in C_H$ e $t \geq 0$,

então a solução $x = 0$ de (0-1) será <u>uniformemente estável</u>.

Ainda mais, se a condição (ii⁻) fôr substituida pela seguinte condição mais forte:

(iii⁻) $\bar{V}(\psi,t) \leq -\beta(\|\psi\|)$ para $\psi \in C_H$ e $t \geq 0$, onde β é uma função escalar contínua em $[0,H)$ com $\beta(r) > 0$ para $r > 0$,

então a mesma solução será <u>uniformemente assintòticamente estável</u>.

A condição de Lipschitzianeidade local imposta a V para se obter a igualdade (D) da Proposição I-1 é um tanto incômoda: trata-se de uma condição restritiva. Por outro lado, a igualdade (D) nos foi necessária para a demonstração do Teorema I-1 acima, no qual a derivada $\bar{V}$ é empregada como no Teorema 0-2. Visando eliminar a condição de lipschitzianeidade local de V, ..

definiremos a seguir uma outra derivada de V, denotada por $\overset{\circ}{V}$, cujo cálculo também independe do conhecimento de soluções, e que, como veremos no Teorema I-2 adiante, é aplicável, <u>embora de modo mais restritivo do que $\dot{V}$</u> (+), no segundo método de Lyapunov, mas sem a condição de lipschitzianeidade local de V.

b) <u>Definição de $\overset{\circ}{V}$.</u>

Observemos inicialmente que, devido ao fato de a equação (0-1) pertencer à classe ξ, temos, para cada ponto $(\varphi, t_o) \in C_H \times R_+$

$$|f(\varphi, t_o)| = |f(\varphi, t_o) - f(0, t_o)| \leq L\, \|\varphi - 0\| = L\, \|\varphi\|,$$

onde L é uma constante de Lipschitz de f (ver o Teorema 0-1).

No que segue fixemos L.

Dado um ponto $(\varphi, t_o) \in C_H \times R_+$ seja $M = \|\varphi\| + 1$. Para cada s, $0 \leq s \leq h$, definimos:

$$(F) \quad \begin{cases} p(s) = \sup\limits_{0 \leq u \leq s} |f(\varphi, t_o + u) - f(\varphi, t_o)| \\[2ex] q(s) = \sup\limits_{-s \leq \vartheta \leq 0} |\varphi(\vartheta) - \varphi(0)| + s\,L\,M \\[2ex] r(s) = \sup\limits_{0 \leq u \leq s}\ \sup\limits_{-h \leq \vartheta \leq -u} |\varphi(u + \vartheta) - \varphi(\vartheta)| \\[2ex] w(s) = p(s) + L \cdot \max\{q(s), r(s)\}. \end{cases}$$

Notemos que as funções p e q são contínuas no intervalo $[0, h]$ e $\lim\limits_{s \to 0+} p(s) = \lim\limits_{s \to 0+} q(s) = 0$ pela continuidade de f no ponto (φ, t_o) e pela continuidade de φ em $\vartheta = 0$. Vemos também que r é contínua no mesmo intervalo e $\lim\limits_{s \to 0+} r(s) = 0$ pela .. continuidade uniforme de φ no intervalo $[-h, 0]$. Portanto, w é contínua em $[0, h]$ e $\lim\limits_{s \to 0+} w(s) = 0$.

(+) Estra frase será explicada no comentário após o Teorema I-2.

Feito isto, para cada k com $0 < k \leq h$, pomos

$$(G) \qquad O_k = \{\varkappa \in C_k^1 \mid |\varkappa(s)| \leq sw(s) \text{ para } 0 \leq s \leq k\} \quad (+),$$

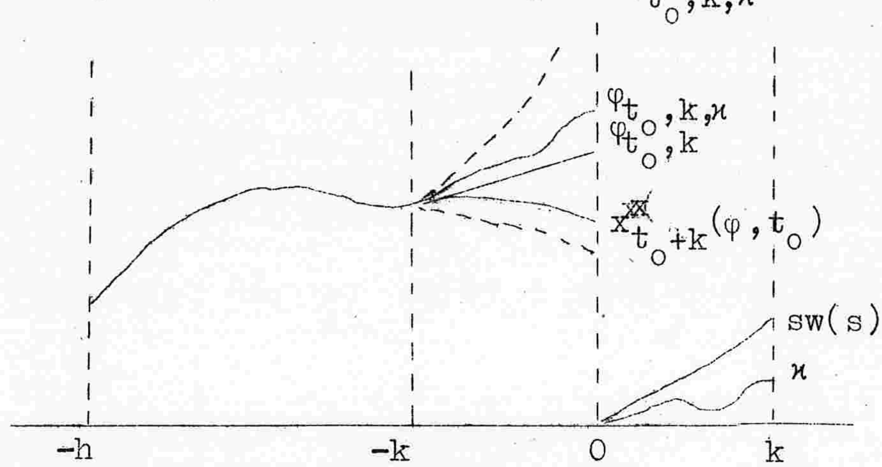
onde $C_k^1 = C^1(]0,k[\,, R^n) \cap C([0,k], R^n)$.

Definimos a seguir, para cada $\varkappa \in O_k$, a função $\varphi_{t_o,k,\varkappa} \in C$ por

$$(H) \qquad \varphi_{t_o,k,\varkappa}(\vartheta) = \begin{cases} \varphi(k+\vartheta) & \text{p/ } -h \leq \vartheta \leq -k \\ \varphi(0) + [k+\vartheta]f(\varphi,t_o) + \varkappa(k+\vartheta) & \text{p/ } -k \leq \vartheta \leq 0 \end{cases}$$

Como se pode constatar sem dificuldade, para k suficientemente pequeno, $\varphi_{t_o,k,\varkappa} \in C_H$ <u>para todo $\varkappa \in O_k$</u>.

A figura 5 ilustra a função $\varphi_{t_o,k,\varkappa}$



<u>FIGURA 5</u>

Daremos a seguinte definição:

<u>Definição I-2</u>: Para cada ponto $(\varphi,t_o) \in C_H \times R_+$ definimos $\overset{o}{V}(\varphi,t_o)$ por

$$(III) \qquad \overset{o}{V}(\varphi,t_o) = \overline{\lim_{k\to 0+}} \sup_{\varkappa \in O_k} \frac{V(\varphi_{t_o,k,\varkappa}, t_o+k) - V(\varphi,t_o)}{k}$$

(+) Por conveniência tomemos a norma $|.|$, em R^n, definida por

$$|x| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{onde } x = (x_1,\ldots,x_n).$$

O cálculo de $\overset{o}{V}(\varphi,t_o)$ também não exige o conhecimento prévio da solução $x(\varphi,t_o)$.

Estabereceremos agora uma relação entre $\overset{o}{V}$ e $\dot{V}$, a qual nos permite utilizar o conceito de $\overset{o}{V}$ no segundo método de Lyapunov.

<u>Lema I-3</u>: Seja $\varkappa_o$ uma função definida, em $[0,k]$, $0 < k \leq h$ (+), por

$$\varkappa_o(s) = x(t_o+s;\varphi,t_o) - \varphi(0) - sf(\varphi,t_o) ,$$

onde $x(\varphi,t_o)$ é solução de (0-1).

Então, para k suficientemente pequeno, tem-se <u>$\varkappa_o \in O_k$.</u>

<u>Demonstração</u>: Pelo Lema I-2, existe $K > 0$ tal que

$$0 < k \leq K \quad \text{implica} \quad \| x_{t_o+k}(\varphi,t_o) \| < M ,$$

onde $M = \|\varphi\| + 1$.

Tomemos k com $0 < k \leq K$ e mostremos $\varkappa_o \in O_k$.

É evidente que $\varkappa_o \in C_k^1$.

Seja

$$Q(s) = \begin{cases} 0 & \text{para } s = 0 \\ \dfrac{x(t_o+s;\varphi,t_o) - \varphi(0)}{k} - f(\varphi,t_o) & \text{para } 0 < s \leq k . \end{cases}$$

Então, $\varkappa_o(s) = sQ(s)$ para $0 \leq s \leq k$.

Afirmamos que $|Q(s)| \leq w(s)$ para $0 \leq s \leq k$.

Com efeito, tendo em vista a equação (0-1), pelo teorema da média para funções escalares temos, para $0 < s \leq k$,

---

(+) k é tomado covenientemente de modo a t_o+k pertencer ao intervalo maximal da solução $x(\varphi,t_o)$.

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1(t_o+s;\varphi,t_o) - \varphi_1(0)}{s} - f_1(\varphi,t_o) \\ \vdots \\ \dfrac{x_n(t_o+s;\varphi,t_o) - \varphi_n(0)}{s} - f_n(\varphi,t_o) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f_1(x_{t_o+u_1}(\varphi,t_o), t_o+u_1) - f_1(\varphi,t_o) \\ \vdots \\ f_n(x_{t_o+u_n}(\varphi,t_o), t_o+u_n) - f_n(\varphi,t_o) \end{bmatrix}$$

onde $0 < u_i < s$, $i = 1,\dots,n$, e portanto

$$|Q(s)| = \sup_{1\le i\le n} |f_i(x_{t_o+u_i}(\varphi,t_o), t_o+u_i) - f_i(\varphi,t_o)| =$$

$$= |f_p(x_{t_o+u_p}(\varphi,t_o) - f_p(\varphi,t_o)| \quad (\text{fazendo } u_p = u) \le$$

$$\le |f(x_{t_o+u}(\varphi,t_o), t_o+u) - f(\varphi,t_o)| \le$$

$$\le |f(x_{t_o+u}(\varphi,t_o), t_o+u) - f(\varphi,t_o+u)| + |f(\varphi,t_o+u) - f(\varphi,t_o)| \le$$

$$\le L\,||x_{t_o+u}(\varphi,t_o) - \varphi|| + p(s), \quad \text{com } 0 < u < s,$$

pela lipschitzianeidade de f e pela definição de p.

Por outro lado, tendo em vista (B), podemos escrever

$$||x_{t_o+u}(\varphi,t_o) - \varphi|| =$$

$$= \max\{\sup_{-h\le\vartheta\le -u} |\varphi(u+\vartheta) - \varphi(\vartheta)|, \sup_{-u\le\vartheta\le 0} |x(t_o+u+\vartheta;\varphi,t_o) - \varphi(\vartheta)|\}.$$

Pela definição de r temos

$$\sup_{-h\le\vartheta\le -u} |\varphi(u+\vartheta) - \varphi(\vartheta)| \le r(s).$$

Para majorar $\sup_{-u \leq \vartheta \leq 0} |x(t_o + u + \vartheta; \varphi, t_o) - \varphi(\vartheta)|$, escrevemos

$$x(t_o + u + \vartheta; \varphi, t_o) = \varphi(0) + \int_{t_o}^{t_o + u + \vartheta} f(x_z(\varphi, t_o), z)dz$$

visto que $x(\varphi, t_o)$ é solução de (0-1). Da expressão acima conclui-se que

$$|x(t_o + u + \vartheta; \varphi, t_o) - \varphi(\vartheta)| \leq |\varphi(\vartheta) - \varphi(0)| + [u + \vartheta]L\, M \leq |\varphi(\vartheta) - \varphi(0)| + s\, L\, M$$

pois

$$|f(x_z(\varphi, t_o), z)| \leq L \| x_z(\varphi, t_o) \| < L\, M .$$

Portanto, pela definição de q temos

$$\sup_{-u \leq \vartheta \leq 0} |x(t_o + u + \vartheta; \varphi, t_o) - \varphi(\vartheta)| \leq \sup_{-s \leq \vartheta \leq 0} |\varphi(\vartheta) - \varphi(0)| + sLM = q(s).$$

Reassumindo tudo que foi feito acima, vem

$$\| x_{t_o + u}(\varphi, t_o) - \varphi \| \leq \max\{q(s), r(s)\} \quad \text{desde que} \quad 0 < u < s,$$

ou seja

$$|Q(s)| \leq p(s) + L \, . \max\{q(s), r(s)\} = w(s) \quad \text{para} \quad 0 \leq s \leq k,$$

ou ainda

$$|\varkappa_o(s)| = s|Q(s)| \leq sw(s) \quad \text{para} \quad 0 \leq s \leq k,$$

o que mostra que $\varkappa_o \in O_k$.

C.Q.D.

Observemos que $\varphi_{t_o, k, \varkappa_o} = x_{t_o + k}(\varphi, t_o)$ e que se $\varkappa = 0$, $\varphi_{t_o, k, \varkappa} = \varphi_{t_o, k}$ podemos enunciar:

<u>Proposição I-2</u>: Para cada ponto $(\varphi, t_o) \in C_H \times R_+$, temos

(J) $$\overset{o}{V}(\varphi, t_o) \geq \dot{V}(\varphi, t_o).$$

(<u>continuação da Proposição I-2</u>)

(K) $$\overset{o}{V}(\varphi, t_o) \geq \bar{V}(\varphi, t_o).$$

Em virtude da desigualdade (J), se V satisfizer às condições (i) e (ii) (respec. (i) e (iii)) do Teorema 0-2 <u>com $\overset{o}{V}$</u> o mesmo ocorrerá <u>com $\dot{V}$</u>. Por conseguinte, podemos enunciar o seguinte teorema como uma consequência do Teorema 0-2 e da Proposição I-2:

<u>Teorema I-2</u>: Se V fôr tal que

(i^o) V satisfaz à condição (i) do Teorema 0-2,

(ii^o) $\overset{o}{V}(\psi, t) \leq 0$ para $\psi \in C_H$ e $t \geq 0$,

então a solução $x = 0$ de (0-1) será <u>uniformemente estável</u>.

Ainda mais, se a condição (ii^o) fôr substituída pela seguinte condição mais forte:

(iii^o) $\overset{o}{V}(\psi, t) \leq -\beta(\|\psi\|)$ para $\psi \in C_H$ e $t \geq 0$, onde β é uma função escalar contínua em $[0,H)$ com $\beta(r) > 0$ para $r > 0$.

então a mesma solução será <u>uniformemente assintòticamente estável</u>.

Foi dito anteriormente que $\overset{o}{V}$ é mais restritivo do que $\dot{V}$ quanto a sua utilidade no segundo método de Lyapunov. Isto quer dizer que o fato de V satisfazer às condições do Teorema .. 0-2 <u>com $\dot{V}$</u> não implica necessàriamente que V o faça <u>com $\overset{o}{V}$</u>, como mostra o primeiro exemplo abaixo.

Um exemplo adicional, que julgamos ser elucidativo, .. nos mostra uma situação em que $\dot{V}$ e $\bar{V}$ não são apenas distintas .. uma da outra, como também são incomparáveis, ao contrário do que ocorre com $\dot{V}$ e $\overset{o}{V}$.

c) <u>Exemplos</u>.

1.- Consideremos a equação

(1) $\dot{x}(t) = 0$

que òbviamente pertence á classe ξ .

Por simplicidade suponhamos que $R^n = R$, $L = 1$ e $C_H = C$. Se $\varphi \in C$ e $t_0 \geq 0$, a solução de (1) com função inicial φ em t_0 é dada por

$$(2) \qquad x(t;\varphi,t_0) = \begin{cases} \varphi(t - t_0) & \text{para } t_0-h \leq t \leq t_0 \\ \varphi(0) & \text{para } t_0 \leq t < \infty \end{cases}$$

Definimos $V : C \times R_+ \to R$ por $V(\phi,t) = \sqrt{\|\phi\|}$. Pode-se ver fàcilmente que o funcional V assim definido é contínuo e satisfaz à condição (i) do Teorema 0-2 com $\alpha(r) = \sqrt{r}$ e $W(\phi) = V(\phi,t)$. Para verificar que a condição (ii) do mesmo teorema também satisfeita por V tomemos $\varphi \in C$ e $t_0 \geq 0$. Então, por (2), temos

$$\| x_{t_0+k}(\varphi,t_0)\| \leq \max \{ \|\varphi\|, |\varphi(0)| \} = \|\varphi\| ,$$

e portanto

$$\dot{V}(\varphi,t_0) = \overline{\lim_{k\to 0+}} \frac{V(x_{t_0+k}(\varphi,t_0),\ t_0+k) - V(\varphi,t_0)}{k}$$

$$= \overline{\lim_{k\to 0+}} \frac{\sqrt{\| x_{t_0+k}(\varphi,t_0)\|} - \sqrt{\|\varphi\|}}{k} \leq 0.$$

Mostremos que se $\varphi = 0$ e $t_0 = 0$, então $\overset{o}{V}(\varphi,t_0) = 1$, enquanto que, como se verifica fàcilmente, $\dot{V}(\varphi,t_0) = 0$.

Com efeito, se $\varphi = 0$ e $t_0 = 0$, então $M = 1$. É fácil de.. ver que, neste caso, tem-se $w(s) = s$ para $0 \leq s \leq h$ e a função $\varkappa$, definida no intervalo $[0,k]$, $0 < k \leq h$, por $\varkappa(s) = s^2$ pertence ao conjunto O_k. Além disso, temos

$$\varphi_{t_0,k,\varkappa}(\vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{para } -h \leq \vartheta \leq -k \\ (k+\vartheta)^2 & \text{para } -k \leq \vartheta \leq 0 \end{cases}$$

e $\| \varphi_{t_0,k,\varkappa} \| = k^2$. Portanto

$$\overset{o}{V}(\varphi, t_0) = \overline{\lim_{k\to 0+}} \frac{V(\varphi_{t_0,k,\varkappa}, t_0+k) - V(\varphi, t_0)}{k} = \lim_{k\to 0+} \frac{k}{k} = 1,$$

visto que $V(\varphi_{t_0,k,\varkappa}, t_0+k) = \sqrt{\| \varphi_{t_0,k,\varkappa} \|} = \sqrt{k^2} = k$ e $V(\varphi, t_0) = \sqrt{\| \varphi \|} = \sqrt{0} = 0$.

Temos, portanto

(3) $\overset{o}{V}(\varphi, t_0) > \dot{V}(\varphi, t_0) = 0$ para $\varphi = 0$ e $t_0 = 0$.

Como V satisfaz às condições (i) e (ii) do Teorema 0-2 a solução $x = 0$ da equação (1) é uniformemente estável. A desigualdade estrita (3) nos diz que V jamais satisfaria à condição (ii) acima com $\overset{o}{V}$. Em outras palavras, se usássemos $\overset{o}{V}$ ao invés de $\dot{V}$ não chegariamos a uma conclusão útil sôbre a estabilidade da equação (1).

Para $\varphi = 0$ e $t_0 = 0$, temos $\varphi_{t_0,k} = 0$, e portanto

$$\overline{V}(\varphi, t_0) = \overline{\lim_{k\to 0+}} \frac{V(\varphi_{t_0,k}, t_0+k) - V(\varphi, t_0)}{k} = \lim_{k\to 0+} \frac{0-0}{k} = 0,$$

o que mostra que

(4) $\overset{o}{V}(\varphi, t_0) > \overline{V}(\varphi, t_0)$ para $\varphi = 0$ e $t_0 = 0$.

A desigualdade estrita (4) nos afirma que $\overset{o}{V}$ também é distinta de $\overline{V}$.

2.- Seja f uma aplicação de $C \times R_+$ em R^2, com $C = C([-h,0], R^2)$, de finida por

$$f(\psi,t) = \begin{pmatrix} -\psi_2(0) \\ \\ \psi_1(0) \end{pmatrix}$$ onde ψ_1 ψ_2 são as funções componentes de ψ.

Consideremos a equação

(5) $\dot{x}(t) = f(x_t, t)$

que pertence à classe ξ e que é equivalente ao sistema de equações escalares:

(6) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) \\ \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases}$.

A solução geral do sistema (6) tem a seguinte expressão:

(7) $\begin{cases} x_1(t) = A \cos(t + \rho) \\ \\ x_2(t) = A \operatorname{sen}(t + \rho) \end{cases}$ com $A \geq 0$ e $0 \leq \rho < 2\pi$.

Se tomarmos $\varphi \in C$, $\varphi \neq 0$, e $t_o \geq 0$, então a solução de (5) com função inicial φ em t_o será dada, como se deduz fàcilmente de (7), por

(8) $x(t;\varphi,t_o) = \begin{cases} \varphi(t-t_o) & \text{para } t_o-h \leq t \leq t_o \\ \\ |\varphi(0)| \begin{bmatrix} \cos(t+\rho) \\ \operatorname{sen}(t+\rho) \end{bmatrix} & \text{para } t_o \leq t < \infty \end{cases}$

onde ρ, $0 \leq \rho < 2\pi$, é a solução do sistema $\begin{cases} \cos(t_o+\rho) = \dfrac{\varphi_1(0)}{|\varphi(0)|} \\ \\ \operatorname{sen}(t_o+\rho) = \dfrac{\varphi_2(0)}{|\varphi(0)|} \end{cases}$

que sabemos existir e ser única.

Seja α a função escalar definida, em R_+, por

$$(9)\qquad \alpha(r) = \begin{cases} r & \text{para } 0 \leq r \leq 1 \\ 1 + \sqrt{r^2 - 1} & \text{para } 1 \leq r \leq 2 \\ 1 + \sqrt{3} - \sqrt{r^2 - 4} & \text{para } 2 \leq r \leq 3 \\ 1 + \sqrt{3} - \sqrt{5} + r - 3 & \text{para } 3 \leq r < \infty \end{cases}$$

Vê-se que a função α é contínua e $\alpha(r) > 0$ para $r > 0$.

A figura abaixo mostra o gráfico da função α , o qual apresenta tangentes verticais em $r = 1$ e $r = 2$.

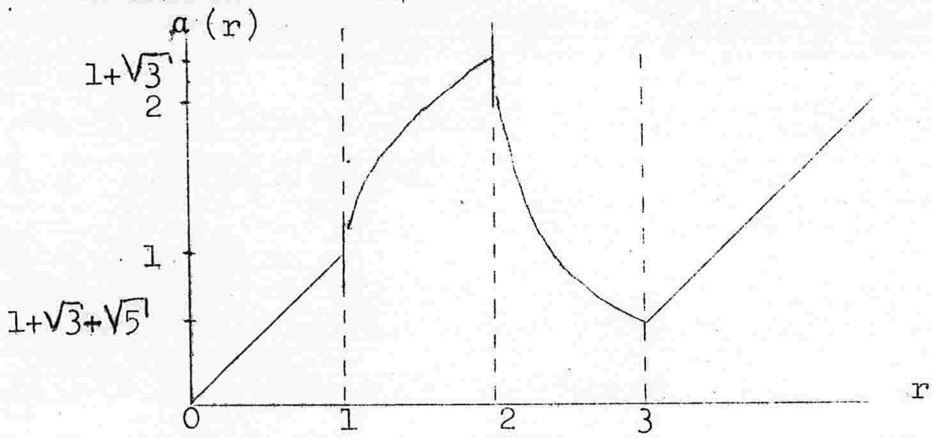


FIGURA 6

Se definirmos um funcional W em C por $W(\psi) = \alpha(|\psi(0)|)$, então W será contínuo e $W(0) = 0$.

Seja $V : C \times R_+ \to R$ um funcional definido por $V(\psi, t) = W(\psi)$. Então, V é contínuo e temos

$$\alpha(|\psi(0)|) = V(\psi, t) = W(\psi) \quad \text{para } \psi \in C \text{ e } t \geq 0,$$

o que mostra que V satisfaz à condição (i) do Teorema 0-2.

Para verificar que V também satisfaz à condição (ii) do mesmo teorema, tomemos $\varphi \in C$ e $t_o \geq 0$.

Se $\varphi = 0$, então $x(t; \varphi, t_o) = 0$ para $t_o - h \leq t < \infty$ e $\|\varphi\| = \|x_{t_o+k}(\varphi, t_o)\| = 0$, portanto, $V(\varphi, t_o) = V(x_{t_o+k}(\varphi, t_o), t_o + k) = 0$ e $\dot{V}(\varphi, t_o) = 0$.

se $\varphi \neq 0$, por (8), temos

$$|x_{t_o+k}(0; \varphi, t_o)| = |x(t_o+k; \varphi, t_o)| = |\varphi(0)| \sqrt{\cos^2(t_o+k+\rho) + \operatorname{sen}^2(t_o+k+\rho)}$$

$= |\varphi(0)|$ e $V(x_{t_o+k}(\varphi,t_o),\ t_o+k) = \alpha(|x_{t_o+k}(0;\varphi,t_o)|) = \alpha(|\varphi(0)|) =$

$= V(\varphi,t_o)$, portanto, $\dot{V}(\varphi,t_o) = 0$.

Assim, vemos que V satisfaz à condição (ii) do Teorema0-2; mais preciasamente, temos

$$(10) \qquad \dot{V}(\varphi,t_o) = 0 \quad \text{para } \varphi \in C \text{ e } t_o \geq 0.$$

A esta altura já podemos concluir que a solução $x = 0$ de (5) é <u>uniformemente estável</u>.

Mostremos a seguir que o conceito de $\bar{V}$ é diferente do de $\dot{V}$.

Para tanto, tomemos $\varphi \in C$ com $\varphi = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, isto é, $\varphi_1(\vartheta) = 1$ e $\varphi_2(\vartheta) = 0$ para $-h \leq \vartheta \leq 0$, onde φ_1 e φ_2 são as funções componentes de φ , Seja $t_o \geq 0$.

É fácil de ver que, neste caso, para $0 < k \leq h$, $\varphi_{t_o,k} \in C$ é dada por

$$\varphi_{t_o,k}(\vartheta) = \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & \text{para } -h \leq \vartheta \leq -k \\ \begin{bmatrix}1\\k+\vartheta\end{bmatrix} & \text{para } -k \leq \vartheta \leq 0 \end{cases}.$$

Por conseguinte, temos

$$V(\varphi_{t_o,k}, t_o+k) = \alpha(|\varphi_{t_o,k}(0)|) = \alpha(\sqrt{1+k^2}) = 1 + \sqrt{(1+k^2) - 1} =$$

$= 1 + k$ <u>para k suficientemente pequeno</u>.

Por outro lado, $V(\varphi,t_o) = \alpha(|\varphi(0)|) = \alpha(1) = 1$, portanto

$$\bar{V}(\varphi,t_o) = \overline{\lim_{k\to 0+}} \frac{V(\varphi_{t_o,k}, t_o+k) - V(\varphi,t_o)}{k} = \lim_{k\to 0+} \frac{1+k-1}{k} = 1.$$

Vimos que $\dot{V}(\varphi,t_o) = 0$ ((10)) e, consequentemente, podemos afirmar:

(11) $\qquad \bar{V}(\varphi,t_o) > \dot{V}(\varphi,t_o)$ para $\varphi = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ e $t_o \geq 0$.

Tomemos agora $\varphi \in C$ com $\varphi = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ e $t_o \geq 0$. Neste caso temos, para $0 < k \leq h$,

$$\varphi_{t_o,k}(\vartheta) = \begin{cases} \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} & \text{para } -h \leq \vartheta \leq -k \\ 2\begin{bmatrix}1\\k+\vartheta\end{bmatrix} & \text{para } -k \leq \vartheta \leq 0 \end{cases} \quad \text{e}$$

$V(\varphi_{t_o,k},t_o+k) = \alpha(|\varphi_{t_o,k}(0)|) = \alpha(2\sqrt{1+k^2}) = 1+\sqrt{3}-\sqrt{4(1+k^2)-4}$
$= 1+\sqrt{3}-2k.$

Por outro lado, temos

$$V(\varphi,t_o) = \alpha(|\varphi(0)|) = \alpha(2) = 1+\sqrt{3},$$

e portanto

$$\bar{V}(\varphi,t_o) = \overline{\lim_{k\to o+}} \frac{V(\varphi_{t_o,k},t_o+k) - V(\varphi,t_o)}{k} = \lim_{k\to o+} \frac{1+\sqrt{3}-2k-1-\sqrt{3}}{k}$$

$$= -2,$$

o que nos diz que

(12) $\qquad \bar{V}(\varphi,t_o) > \dot{V}(\varphi,t_o)$ para $\varphi = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ e $t_o \geq 0$,

pois, $\dot{V}(\varphi,t_o) = 0$ por (10).

As desigualdades (11) e (12) juntas nos afirmam que $\dot{V}$ e $\bar{V}$ são <u>incomparáveis</u>.

Notemos que os Vs nos exemplos acima <u>não</u> são localmente lipschitzianos. Como se pode esperar, se V o fôr poder-se-á mostrar que os três conceitos de derivada são equivalentes de acôrdo com a seguinte propasição cuja demonstração é análoga à da Proposição I-1.

<u>Proposição I-3</u>: Se V fôr localmente lipschitziano em $C_H \times R_+$, então

$$\text{(L)} \qquad \overset{\circ}{V}(\varphi, t_o) = \bar{V}(\varphi, t_o) = \dot{V}(\varphi, t_o) \qquad (+)$$

para todo $(\varphi, t_o) \in C_H \times R_+$.

(+) A igualdade entre o segundo membro e o terceiro em (L) é a da Proposição I-1. A igualdade entre o primeiro e o segundo pode ser demonstrada por um processo análogo ao que foi feito nos Lemas I-1 e I-2 e na Proposição I-1.

PARTE II

SÔBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS E FAMÍLIAS ASSOCIADAS.

Nesta parte, chamaremos uma equação diferencial funcional de sistema(de equações diferenciais funcionais escalares) para... conservarmos na terminologia a denominação "sistema associado" empregada em [0],[1],[2] e [3] .

II-1. Famílias associadas a um sistema.

Seja dado um sistema

(0-1) $\dot{x}(t) = f(x_t \ ,t)$

pertencente à classe ξ. Consideremos uma família de sistemas parametrizada pelos elementos de C_H:

(II-1) $x(t) = u(x_t,t;\zeta)$, $\zeta \in C_H$.

Para cada $\zeta \in C_H$ fixado temos um sistema. O símbolo $(II-1)_\zeta$ indicará o sistema da família (II-1) correspondente ao elemento ζ.

Definição II-1: Dizemos que a família é uma família associada ao sistema (0-1) se (II-1)

(FA-1) Para cada $\zeta \in C_H$ o sistema $(II-1)_\zeta$ pertence à classe ξ,

(FA-2) (Condição de associação) Para cada $\zeta \in C_H$ e para todo $t \geq 0$ tem-se

(A) $u(\zeta,t;\zeta) = f(\zeta,t)$

Referimo-nos aos sistemas de uma tal família como sistemas associados (ao sistema (0-1)).

A questão de existência de tais famílias é respondida trivialmente pelo seguinte exemplo ; podemos sempre considerar como associada ao sistema (0-1) a família (II-1) com $u(\psi,t;\zeta) = f(\psi,t)$ para $\psi, \zeta \in C_H$ e $t \geq 0$. Esta associação, que recebe o nome de <u>associação trivial</u>, porém, não é de interêsse na prática devido ao fato de todos os sistemas da família coincidirem com o sistema dado; uma associação desejável é aquela da qual resultem sistemas associados .. mais simples do que o sistema dado no que diz respeito ao estudo de estabilidade por meio de funcionais de Lyapunov.

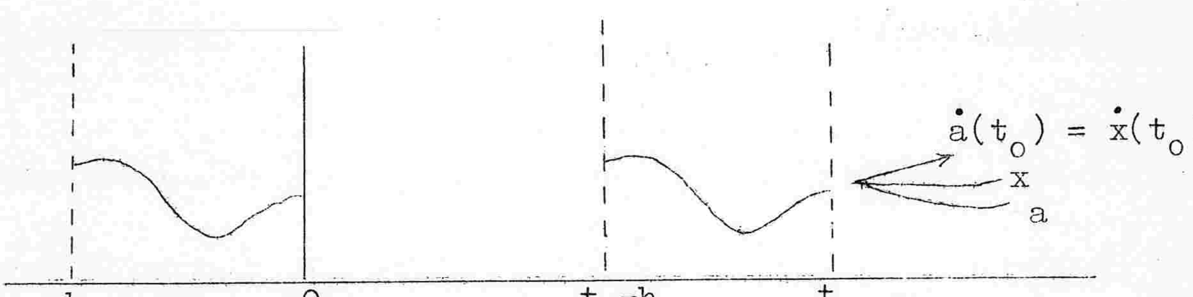
II-2. <u>Significado da condição de associação</u>.

Em vista da importância da condição de associação, procuraremos dar aqui um significado da mesma.

Sejam dados um sistema (0-1) pertencente à classe ξ e uma família (II-1) satisfazendo à condição (FA-1).

Sejam $x(t) = x(t;\zeta,t_o)$ solução de (0-1) e $a(t) = a(t;\zeta,t_o)$ solução do sistema $(II\text{-}1)_\zeta$. Se a família satisfizer à condição de associação, (FA-2), teremos

$$\dot{a}(t_o) = u(a_{t_o},t_o\ ;\zeta) = u(\zeta,t_o\ ;\zeta) = f(\zeta,t_o) = f(x_{t_o},\ t_o) = \dot{x}(t_o)$$



<u>FIGURA 7</u>

Reciprocamente, se a família (II-1) fôr tal que se para cada ponto $(\zeta,t_o) \in C_H \times R_+$ se tenha $\dot{x}(t_o) = \dot{a}(t_o)$ sempre que .... $x(t) = x(t;\zeta,t_o)$ e $a(t) = a(t;\zeta,t_o)$ são respectivamente soluções de (0-1) e de $(II\text{-}1)_\zeta$, então certamente a mesma família satisfará à.. condição de associação. Com efeito, temos

$$u(\zeta,t_0;\zeta) = u(a_{t_0},t_0;\zeta) = \dot{a}(t_0) = \dot{x}(t_0) = f(x_{t_0},t_0) = f(\zeta,t_0) .$$

A esta altura é natural fazer-se a conjectura de que a estabilidade de um sistema esteja relacionada de algum modo com a estabilidade dos seus sistemas associados, e justamente uma conjectura dêste tipo é que originou a Teoria dos Sistemas Associados para as equações diferenciais ordinárias (ver [0] e [1]).

II-3. Critérios para a estabilidade.

Veremos a seguir dois teoremas que darão critérios para se estabelecer a estabilidade de um dado sistema através de um funcional de Lyapunov, o qual é comum para todos os sistemas de uma sua família associada e pelo qual se estabelece a estabilidade dos mesmos.

No caso das equações diferenciais ordinárias, a demonstração do teorema correspondente é relativamente simples exceto em alguns detalhes. Isto se deve essencialmente à simplicidade da condição de associação e ao fato de a derivada de uma função de Lyapunov poder ser expressa em têrmos apenas do sistema. Aqui procuraremos manter a mesma simplicidade na demonstração dos teoremas acima aludidos e conseguiremos isto a custa dos resultados obtidos na ParteI.

Dados um sistema pertencente à classe ξ

(O-1) $\quad \dot{x}(t) = f(x_t,t) \quad ,$

uma família associada ao sistema (O-1)

(II-1) $\quad x(t) = u(x_t,t;\zeta) \ , \quad \zeta \in C_H \qquad$ e

um funcional contínuo

$$V : C_H \times R_+ \quad \rightarrow \quad R \quad ,$$

indiquemos por $\bar{V}(\psi,t)$ (respec. $\overset{o}{V}(\psi,t)$) a derivada $\bar{V}$ (respec. $\overset{o}{V}$), de V, no ponto (ψ,t) relativamente ao sistema (O-1), e por $\bar{V}(\psi,t;\zeta)$

(respec. $\overset{o}{V}(\psi,t;\zeta)$) a derivada $\bar{V}$ (respec. $\overset{o}{V}$), de V, no ponto (ψ,t).. relativamente ao sistema $(II-1)_\zeta$.

<u>Lema II-1</u>: Para cada ponto $(\psi,t) \varepsilon\ C_H \times R_+$, temos

(B) $\qquad \bar{V}(\psi,t;\psi) = \bar{V}(\psi,t)$

(C) $\qquad \overset{o}{V}(\psi,t;\psi) = \overset{o}{V}(\psi,t)$.

<u>Demonstração</u>: Sejam ψ , $\zeta\ \varepsilon\ C_H$, $t \geq 0$ e k tal que $0 < k \leq h$.
Lembremos que $\bar{V}(\psi,t)$ é dada por

$$\bar{V}(\psi,t) = \overline{\lim_{k\to 0+}} \frac{V(\psi_{t,k},\ t+k) - V(\psi,t)}{k} \tag{1}$$,

onde $\psi_{t,k}\ \varepsilon\ C$ é definida por

$$\psi_{t,k}(\vartheta) = \begin{cases} \psi(k+\vartheta) & \text{para } -h \leq \vartheta \leq -k \\ \psi(0) + [k+\vartheta]\, f(\psi,t) & \text{para } -k \leq \vartheta \leq 0 \end{cases} \tag{2}$$

e que $\psi_{t,k}\ \varepsilon\ C_H$ para k suficientemente pequeno.

Para cada k, $0 < k \leq h$, definimos $\psi^{\zeta}_{t,k}\ \varepsilon\ C$ por

$$\psi^{\zeta}_{t,k}(\vartheta) = \begin{cases} \psi(k+\vartheta) & \text{para } -h \leq \vartheta \leq -k \\ \psi(0) + [k+\vartheta]\, u(\psi,t;\zeta) & \text{para } -k \leq \vartheta \leq 0\ . \end{cases} \tag{3}$$

Então, como se pode verificar fàcilmente, para k suficientemente pequeno, tem-se

$$\psi^{\zeta}_{t,k}\ \varepsilon\ C_H$$

e

$$\bar{V}(\psi,t;\zeta) = \overline{\lim_{k\to 0+}} \frac{V(\psi^{\zeta}_{t,k},\ t+k) - V(\psi,t)}{k} \tag{4}$$,

Por outro lado, em virtude da condição de associação ... (ver (A)) e de (2) e (3), temos

$$\psi^{\psi}_{t,k} = \psi_{t,k}$$

e, por conseguinte, de (1) e (4) segue

$$\bar{V}(\psi, t;\psi) = \bar{V}(\psi, t).$$

Do mesmo modo, observando

$$(5) \qquad \psi_{t,k,\varkappa}(\vartheta) = \begin{cases} \psi(k+\vartheta) & \text{para } -h \leq \vartheta \leq -k \\ \psi(0)+[k+\vartheta]f(\psi,t)+\varkappa(k+\vartheta) & \text{para } -k \leq \vartheta \leq 0 \end{cases}$$

com $\varkappa \in O_k$,

$$(6) \qquad \overset{o}{V}(\psi, t) = \overline{\lim_{k \to o+}} \sup_{\varkappa \in O_k} \frac{V(\psi_{t,k,\varkappa}, t+k) - V(\psi, t)}{k},$$

$$(7) \qquad \psi^{\zeta}_{t,k,\varkappa}(\vartheta) = \begin{cases} \psi(k+\vartheta) & \text{para } -h \leq \vartheta \leq -k \\ \psi(0)+[k+\vartheta]\, u(\psi,t;\zeta)+\varkappa(k+\vartheta) & \text{para } -k \leq \vartheta \leq 0 \end{cases}$$

$$(8) \qquad \overset{o}{V}(\psi, t;\zeta) = \overline{\lim_{k \to o+}} \sup_{\varkappa \in O_k} \frac{V(\psi^{\zeta}_{t,k,\varkappa}, t+k) - V(\psi, t)}{k}$$

e considerando a condição de associação conclui-se que

$$\psi^{\psi}_{t,k,\varkappa} = \psi_{t,k,\varkappa} ,$$

e, portanto,

$$\overset{o}{V}(\psi, t;\psi) = \overset{o}{V}(\psi, t) .$$

C.Q.D.

Do Lema e do Teorema I-1 segue:

Teorema II-1: Se V fôr localmente lipschitziano em $C_H \times R_+$ e fôr tal que

(I^-) V satisfaz à condição (i) do Teorema 0-2

(II^-) $\bar{V}(\psi,t;\zeta) \leq 0$ para ψ , $\zeta \in C_H$ e $t \geq 0$

então a solução x = 0 de (0-1) será uniformemente estável.

Ainda mais, se a condição (II^-) fôr substituida pela seguinte condição mais forte:

(III^-) $\bar{V}(\psi,t;\zeta) \leq -\beta(\|\psi\|)$ para ψ, $\zeta \in C_H$ e $t \geq 0$, onde β é uma função escalar contínua em $[0,H)$ com $\beta(r) > 0$ para $r > 0$,

então a mesma solução será uniformemente assintòticamente estável.

Demonstração: A condição (I^-) é mesma que a condição (i^-) do Teorema I-1. Fazendo $\zeta = \psi$, $\bar{V}(\psi,t;\psi) = \bar{V}(\psi,t)$ pelo Lema II-1, e portanto temos a condição (ii^-) do Teorema I-1. Do mesmo modo, a condição (III^-) implica na condição (iii^-) do Teorema I-1.

Prescindindo da condição de lipschitzianeidade local de V temos, como uma consequência do Lema II-1 e do Teorema I-2, o seguinte teorema cuja demonstração é inteiramente análoga à do teorema precedente.

Teorema II-2: Se V fôr tal que

(I^o) V satisfaz à condição (i) do Teorema 0-2

(II^o) $\overset{o}{V}(\psi,t;\zeta) \leq 0$ para ψ , $\zeta \in C_H$ e $t \geq 0$

então a solução x = 0 de (0-1) será uniformemente estável.

Ainda mais, se a condição (II^o) fôr substituida pela seguinte condição mais forte:

(III^o) $\overset{o}{V}(\psi,t;\zeta) \leq -\beta(\|\psi\|)$ para ψ, $\zeta \in C_H$ e $t \geq 0$, onde β é uma função escalar contínua em $[0,H)$ com $\beta(r) > 0$ para $r > 0$,

então a mesma solução será uniformemente assintòticamente estável.

Notemos que quando se toma a associação trivial os Teoremas II-1 e II-2 se reduzem respectivamente aos Teoremas I-1 e I-2. Finalizando, é interessante observar que, em geral, se a associação não fôr trivial, não podemos concluir, por exemplo, que um sistema é estável mesmo quando todos os sistemas de uma sua família associada o sejam. De acôrdo com os Teoremas II-1 e II-2, só podemos tirar tal conclusão nos casos em que existe um funcional de ... Lyapunov que é comum para todos os sistemas da família, estabelecendo a estabilidade dos mesmos.

BIBLIOGRAFIA
(Por ordem de citação)

[0] L.R.BORGES VIEIRA, Relations entre la stabilité globale non linéaire et la stabilité linéaire. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Techniques, Vol. 10, Nº 2, ps 115 - 121 (1962).

[1] L.R.BORGES VIEIRA, Theory of associated systems for study of the stability in the large. Boletim da Sociedade de Matemática de.. São Paulo, Vol. 14 (1962).

[2] L.R.BORGES VIEIRA, Theory of associated systems for study of the stability in the large (continued). Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, Vol. 17 (1965).

[3] L.R.BORGES VIEIRA, Sôbre a teoria dos sistemas associados para estudo da estabilidade global. Tese de concurso à cátedra da Escola Politécnica da USP (1966).

[4] N.ONUCHIC, Equações diferenciais funcionais. Publicação do Instituto de Pesquisas Matemáticas da USP e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro da USP (1965).

[5] J.K.HALE, Functional Differential equations of retarded type. - Publicação do 7º Colóquio Brasileiro de Matemática (1969).

[6] A. HALANAY, Differential equations, stability, oscillations, - time legs. Academic Press, New York (1966).

[7] N. ONUCHIC, Estabilidade de sistemas perturbadores e comportamento no infinito de sistemas de equações diferenciais com retardamento no tempo. Tese de concurso à cátedra da Escola de Engenharia de São Carlos da USP (1968).

[8] W. HAHN, Theory and applications of Lyapunov's direct method. - Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1963).

[9] J.P. LA SALLE, Stability theory for ordinary differential equations. Journal of Differential Equations, Vol. 4, Nº 1, ps 57 - 65 (1968).

[10] T.YOSHIZAWA, Stability theory by Liapunov's second method. The Mathematical Society of Japan, Nº 9. (1966).

-----0000000-----