APLICAÇÕES NUCLEARES E INTEGRAIS
E
A PROPRIEDADE DE RADON NIKODYM

Raymundo Luiz de Alencar

TESE APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jorge Mujica

Área de concentração: ANÁLISE

setembro de 1982

SÃO PAULO

À Luiza e Vicente , meus pais.

À Cléo, minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Com exceção do último capítulo, todo o trabalho foi desenvolvido quando visitávamos a University College, Dublin (UCD) e Trinity College of Dublin (TCD) na Irlanda, durante o ano de 1981.

Agradecemos aos professores R. Aron da TCD e S. Dineen da UCD pelo franqueamento de todos os serviços oferecidos por estas universidades e que, juntamente com J.Mujica, professor visitante na UCD, nos facilitaram ao máximo a nossa adaptação e vivência na Irlanda.

Aos professores C.S. Honig e César Polcino, então diretor e chefe de departamento do I.M.E.-USP, pelo empenho mostrado para que nossa viagem se realizasse.

Ao professor Mário Matos e ao Grupo de Estudos da UNICAMP, de cujos seminários tenho participado nos últimos anos.

Aos professores J. Aragona e R. Salvitti do IME-USP, amigos de longa data, pelo incentivo e apoio recebido.

Ao professor R. Aron pelas discussões proveitosas sobre alguns dos tópicos deste trabalho.

Ao professor S. Dineen pela sugestão e orientação de tópicos aqui abordados e também pelo apoio que nos deu durante toda a nossa estada em Dublin.

Em especial quero agradecer ao meu orientador professor J. Mujica, da UNICAMP pela sugestão da maioria dos problemas e pela orientação segura sobre todos os aspectos de nosso trabalho e também, por sua paciência e dedicação que nos tem dado nestes últimos anos.

ABSTRACT

Through vector measures we study the relationship between the spaces of multilinear mappings of nuclear and integral types between Banach spaces and the Radon Nikodym Property on the dual of domain space.

If we denote by $L_N(^mE,F)$ and $L_{PI}(^mE,F)$ the spaces of nuclear and Pietsch-integral m-linear mappings from E^m to F, we stablish in the linear case that the Radon Nikodym Property on the dual E^* is equivalent to the equality $L_N(E,F) = L_{PI}(E,F)$ for all Banach space F. In the m-linear case we prove that the Radon Nikodym Property on E^* imply the equality $L_N(^mE,F) = L_{PI}(^mE,F)$ for all Banach space F.

We apply the results to m-homogeneous polynomials, given a necessary and sufficient condition to be a reflexive space the space $P(^mE)$ of all continuous m-homogeneous polynomials on E scalar valued. After, we use the infinite dimensional Banach space constructed by B.S. Tsirel'son, denoted by T, to show that the space $P(^mT)$ is reflexive for all integers m.

Finally we apply the results to locally convex space stablishing conditions to get the equality $L_N(^mE,F) = L_{PI}(^mE,F)$, when E is a locally convex space and F is a Banach space.

CONTEÚDO

Pág.

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO I - Preliminares Gerais 4

§1 - Aplicações Multilineares - Polinômios -Produto tensorial 4

§2 - Espaços de Banach 9

§3 - Espaços localmente convexos 11

CAPÍTULO II - Medidas Vetoriais 12

§1 - A integral de Bochner 12

§2 - Medidas Vetoriais 15

§3 - Operadores em $C(\Omega)$ 21

§4 - Operadores absolutamente somáveis 23

§5 - Operadores Nucleares e Pietsch-integrais.. 24

§6 - Operadores Grothendieck-integrais..... 26

CAPÍTULO III - Coincidência dos Espaços $L_{PI}(^mE,F)$ e $L_N(^mE,F)$..... 28

§1 - O caso linear ; $L_{PI}(E,F) = L_N(E,F)$ 28

§2 - O caso m-linear; $L_{PI}(^mE,F) = L_N(^mE,F)$..... 40

§3 - Comentários e Observações 52

§4 - Um Teorema de Fatoração para Polinômios integrais 58

CAPÍTULO IV - Reflexividade e Base no Espaço $P(^mE)$ 65

§1 - Preliminares 65

§2 - Condição Necessária e Suficiente para a Reflexividade de $P(^mE)$ 72

Pág.

§3 - Reflexividade de $P(^mT)$, para todo inteiro m, quando T é o espaço de Tsirelson..... 74

CAPÍTULO V - Aplicações m-lineares Integrais e Nucleares em Espaços Localmente Convexos..... 84

§1 - Preliminares 84

§2 - Coincidência dos Espaços $L_{PI}(^mE,F)$ e $L_N(^mE,F)$..... 85

§3 - O Dual do Espaço $(P(^mE), \tau_o)$..... 97

BIBLIOGRAFIA 100

INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é estudar os espaços $L_N(^mE,F)$ e $L_{PI}(^mE,F)$, das aplicações m-lineares contínuas de tipo nuclear e Pietsch-integral, entre espaços de Banach.

Em geral, o espaço $L_N(^mE,F)$ está contido em $L_{PI}(^mE,F)$ e portanto surge naturalmente, a questão de quando que estes espaços coincidem. Esta questão se mostrou intimamente ligada com a Teoria das Medidas Vetoriais bem como com a Propriedade de Radon Nikodym em espaços de Banach, motivando assim a maior parte deste nosso trabalho.

No capítulo I introduzimos alguma notação e certos requisitos de caracter geral sobre aplicações multilineares, produto tensorial e espaços localmente convexos. Nos capítulos IV e V introduzimos também notações e alguns resultados conhecidos, que são específicos para os respectivos capítulos.

Neste trabalho usamos principalmente resultados da Teoria das Medidas Vetoriais e, por esta razão reunimos no capítulo II todos os resultados desta teoria, que usaremos ao longo do texto. No capítulo II, em geral, não indicaremos a referência bibliográfica dos resultados enunciados, mas todos eles podem ser encontrados sem nenhuma exceção no livro de Diestel-Uhl(|3|).

No capítulo III, estudamos a questão mencionada no início, ou seja, condições para que tenhamos a igualdade dos espaços $L_N(^mE,F)$ e $L_{PI}(^mE,F)$.

O caso linear (m=1), foi bastante estudado no livro de Diestel-Uhl, onde se estabelece uma condição necessária e suficiente para a igualdade dos espaços $L_N(E,F)$ e $L_{PI}(E,F)$ (teor.2.5.2).

Curiosamente, logo no início de nossos estudos percebemos que as hipóteses daquele teorema (teor.2.5.2), não eram suficientes para obtermos a igualdade dos espaços $L_N(^mE,F)$ e $L_{PI}(^mE,F)$, como mostra a observação 3.3.(3).

No parágrafo 1 do capítulo III, verificamos que a propriedade de Radon Nikodym sobre o dual E^* é uma condição necessária e suficiente para a igualdade dos espaços $L_N(E,F)$ e $L_{PI}(E,F)$ para todo espaço de Banach F (teor. 3.1.1), em seguida no parágrafo 2 mostramos pelo teorema 3.2.1 que a mesma condição do caso linear é suficiente para obtermos a igualdade dos espaços $L_N(^mE,F)$ e $L_{PI}(^mE,F)$. Como consequência obtemos resultados análogos para os polinômios m-homogêneos.

A seguir no capítulo IV, fazemos um estudo de reflexividade do espaço $P(^mE)$, dos polinômios m-homogêneos sobre E a valores escalares, obtendo como consequência do capítulo III, uma condição necessária e suficiente para a reflexividade do espaço $P(^mE)$. No caso em que o espaço de Banach E tem base de Schauder, verificamos que a reflexividade de $P(^mE)$ fica equivalente à existência de uma certa base de Schauder para $P(^mE)$.

Finalizando este capítulo, mostramos no parágrafo 3, que o espaço de Banach de dimensão infinita construído por B.S. Tiserel'son, denotado por T, assegura a reflexividade do espaço $P(^mT)$, para todo inteiro m.

No último capítulo, fazemos uma aplicação dos resultados do capítulo III, aos espaços localmente convexos, estabelecendo condições suficientes para a coincidência dos espaços $L_N(^mE,F)$ e $L_{PI}(^mE,F)$, quando E é um espaço localmente convexo e F é um espaço de Banach. No parágrafo 3, caracterizamos o dual do espaço

$(P(^mE), \tau_o)$, onde τ_o é a topologia compacto-aberta, como sendo o espaço dos polinômios m-homogêneos sobre E_c^* de tipo integral.

Raymundo Luiz de Alencar

São Paulo, setembro de 1982.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES GERAIS

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam respectivamente os conjuntos dos números naturais, reais e complexos.

E e F denotarão espaços normados, de Banach ou localmente convexos, especificado sempre quando necessário.

§ 1 - Aplicações Multi-lineares - Polinômios - Produto tensorial.

- Aplicações Multi-lineares:

Sejam E e F espaços localmente convexos (e.l.c), indicamos por $L(^mE,F)$, o espaço vetorial de todas as aplicações m-lineares de $E^m = E\times \ldots \times E$ em F que são contínuas.

Uma aplicação $A\varepsilon L(^mE,F)$ se diz simétrica se for válido

$A(x_1,\ldots,x_m) = A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)})$ para qualquer $x_1,\ldots,x_m \varepsilon E$ e qualquer permutação $\sigma\varepsilon S_m$, onde S_m representa o conjunto de todas as permutações dos m-primeiros números naturais.

$L^s(^mE,F)$ indica o espaço vetorial de todas as aplicações m-lineares, simétricas e contínuas de E^m em F.

No caso em que E e F são espaços normados, definimos em $L(^mE,F)$ a norma

$$||A|| = \sup_{\substack{||x_i||\leq 1 \\ 1\leq i\leq m}} ||A(x_1,\ldots,x_m)||, \quad A\varepsilon L(^mE,F), \; x_1,\ldots,x_m \varepsilon E$$

Nestas condições indicamos $(L(^mE,F),|| \; ||)$.

<u>Definição</u>: Dada uma aplicação $A\varepsilon L(^mE,F)$, definimos a sua <u>simetrizada</u> $A^s \varepsilon L^s(^mE,F)$ por:

$$A^s(x_1,\ldots,x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma\varepsilon s_m} A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}), \quad x_1,\ldots,x_m \; E$$

<u>Definição</u>: Se $A\varepsilon L(^mE,F)$, $x_1,\ldots,x_k$ E e $n_1,\ldots,n_k \varepsilon \mathbb{N}$ com $n_1+\ldots+n_k=n < m$, definimos a aplicação

$$Ax_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k} \; \varepsilon \; L(^{m-n}E,F) \text{ por:}$$

$$Ax_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}(y_1,\ldots,y_{m-n}) = A(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{n_1},\ldots,\underbrace{x_k,\ldots,x_k}_{n_k}, y_1,\ldots,y_{m-n})$$

com $y_1,\ldots,y_{m-n}\varepsilon E$.

<u>Lema</u> (Fórmula de Newton). Se $A\varepsilon L^s(^mE,F)$ então para $x_1,x_2 \varepsilon E$ temos

$$A(x_1+x_2)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} Ax_1^k \, x_2^{m-k}$$

<u>Lema</u> (Fórmula de Polarização). Seja $A \varepsilon L^s(^mE,F)$. Então para qualquer $x_1,\ldots,x_m \varepsilon E$ temos

$$A(x_1,\ldots,x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i=\pm 1 \\ 1\leq i\leq m}} \varepsilon_1\ldots\varepsilon_m \, A(\varepsilon_1 x_1+\ldots+\varepsilon_m x_m)^m$$

- <u>Polinômios</u>

Dizemos que uma aplicação $P:E \longrightarrow F$ é um <u>polinômio m--homogêneo</u> contínuo se existir uma aplicação $A \varepsilon L(^mE,F)$ tal que

$P(x) = A(x,\ldots,x)$ para todo $x \varepsilon E$.

Neste caso indicamos que $P=\hat{A}$.

$P(^mE,F)$ denota o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de E em F.

No caso que E e F são espaços normados, definimos em $P(^mE,F)$ a norma

$$||P|| = \sup_{||x||\leq 1} ||P(x)|| \;, \; P \varepsilon (^mE,F) \;, \quad x \varepsilon E.$$

Indicamos então $(P(^mE,F), || \; ||)$

<u>Proposição</u>: Sejam E e F espaços normados. Então a aplicação $A \varepsilon L(^mE,F) \longrightarrow \hat{A} \varepsilon P(^mE,F)$ é linear e sobrejetiva. Além disso induz um isomorfismo topológico entre $L^s(^mE,F)$ e $P(^mE,F)$. Se $A \varepsilon L^s(^mE,F)$ é válido

$$||\hat{A}|| \leq ||A|| \leq \frac{m^m}{m!} ||\hat{A}||$$

- Produto Tensorial

No que segue agora indicaremos por E_1, E_2 e F espaços de Banach.

$E_1 \otimes E_2$ denota o produto tensorial dos espaços E_1 e E_2. Cada elemento $u \varepsilon E_1 \otimes E_2$ tem representação na forma

$$u = \sum_{j=1}^{r} x_{1j} \otimes x_{2j} \quad \text{onde } x_{ij} \varepsilon E_i \quad i = 1,2 \quad 1 \leq j \leq r.$$

Indicamos por $E_1 \otimes_\pi E_2$ o espaço $E_1 \otimes E_2$ normado com a norma: $u \varepsilon E_1 \otimes_\pi E_2$

$$||u||_\pi = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{r} ||x_{1j}|| \cdot ||x_{2j}|| : u = \sum_{j=1}^{r} x_{1j} \otimes x_{2j} \right\},$$

sendo o inf calculado sobre todas as representações de u.

O espaço $E_1 \otimes_\pi E_2$ é chamado o <u>produto tensorial projetivo</u>.

- Propriedade Universal do Produto Tensorial

Dada uma aplicação bilinear T de $E_1 \times E_2$ em F então existe uma única aplicação linear contínua $\tilde{T}: E_1 \otimes_\pi E_2 \longrightarrow F$ tal que o diagrama comuta,

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \times E_2 \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "T"] & \\
E_1 \otimes_\pi E_2 \arrow[rr, "\tilde{T}"] & & F
\end{tikzcd}$$

onde h denota aplicação natural.

Se E é um espaço normado, para $\phi_1, \phi_2 \varepsilon E^*$ (o dual de E) a aplicação m-linear contínua definida por

$$(x_1, x_2) \varepsilon E^2 \longrightarrow \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \varepsilon \mathbb{C}$$

é denotada por $\phi_1 \cdot \phi_2$.

$L_f(^2E)$ denota o subespaço de $L(^2E)$ gerado pelas aplicações da forma $\phi_1 \cdot \phi_2$, $\phi_i \varepsilon E^*$ $i = 1,2$.

Seja α_2 a aplicação bilinear contínua

$\alpha_2 : E^* \times E^* \longrightarrow L(^2E)$ definida por

$\alpha_2(\phi_1, \phi_2) = \phi_1 \cdot \phi_2$.

Pela propriedade universal, existe uma única aplicação linear contínua

$\tilde{\alpha}_2 : E^* \otimes_\pi E^* \longrightarrow L(^2E)$ tal que

$\tilde{\alpha}_2(\phi_1 \otimes \phi_2) = \alpha_2(\phi_1, \phi_2)$.

Notamos que o subespaço gerado por $\alpha_2(E^* \times E^*)$ é exatamente $L_f(^2E)$, portanto pela comutatividade do diagrama na propriedade universal, vemos que

$\tilde{\alpha}_2(E^* \otimes_\pi E^*) = L_f(^2E)$.

Notamos ainda que a aplicação $\tilde{\alpha}_2$ é injetora e portanto podemos identificar $E^* \otimes E^*$ com $L_f(^2E)$, algebricamente.

Frequentemente escreveremos $E^* \otimes E^* = L_f(^2E)$.

O completamento do espaço $E_1 \otimes_\pi E_2$ será indicado por $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$.

1.1.1 - Teorema ([7]- Cap. I - § 2.1). Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach. Então todo elemento $u \varepsilon E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$ é a soma de uma série absolutamente convergente da forma

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} x_{1j} \otimes x_{2j} \ , \ x_{ij} \varepsilon E_i \quad i=1,2 \text{ e } j=1,2.... \ .$$

Além disso é válido

$$||u||_\pi = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} ||x_{1j}|| \ ||x_{2j}|| , \quad = \sum_{j=1}^{\infty} x_{1j} \otimes x_{2j} \right\}$$

- A Propriedade de Aproximação (P.A.)

Definição: Dizemos que um espaço de Banach E possui a propriedade de aproximação, se para cada compacto $K \subset E$ e $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação linear contínua de posto finito $T: E \longrightarrow E$ tal que

$$||T(x) - x|| \leq \varepsilon \qquad \text{para todo } x \varepsilon K.$$

1.1.1 - Proposição ([7]- Cap. I - § 5.1). Seja E um espaço de Banach e E^* o seu dual. Se E^* tem a (P.A.) então a aplicação canônica (i.e., a estensão da aplicação $\tilde{\alpha}_2$) de $E^* \hat{\otimes}_\pi E^*$ em $(L(^m E), || \ ||)$ é injetiva.

§ 2 - Espaços de Banach

- Topologias Fracas num Espaço Normado

Definição (i) - Seja E um espaço normado e E^* o seu dual. Indicamos por $\sigma(E,E^*)$ a topologia localmente convexa sobre E, chamada a topologia fraca sobre E, gerada pela família de semi-normas

$\{q_{x^*}: x^* \varepsilon E^*\}$, onde q_{x^*} é a semi-norma definida por

$$q_{x^*}(x) = |\langle x, x^* \rangle| \ , \quad x \varepsilon E.$$

(ii) Indicaremos por $\sigma(E^*,E)$ a topologia localmente convexa sobre E^*, chamada a topologia fraca* (topologia fraca estrela), gerada pela família de semi-normas $\{q_x : x \varepsilon E\}$ onde $q_x(x^*) = |\langle x, x^* \rangle|$, $x^* \varepsilon E^*$.

Frequentemente usaremos a letra w e w* para nos referirmos às topologias fraca e fraca*, respectivamente.

- Subespaço Complementado

Definição: Seja E um espaço normado. Dizemos que um subespaço M de E é complementado em E, se existir um outro subespaço N de E tal que

$$p = M \oplus N \quad \text{(soma direta topológica).}$$

Associamos à M uma projeção p,

$$p: E \longrightarrow M, \ p(x+y) = x \ , \ x \varepsilon M \ , \ y \varepsilon N$$

Dizemos que o subespaço M é complementado em E por projeção de norma 1, se a projeção associada a M é um operador de norma 1.

Observação: dado um espaço de Banach E, frequentemente usaremos o fato que o dual E^* é complementado em E^{***}, por projeção de norma 1 de maneira natural (a projeção é dada por

$$x^{***} \varepsilon E^{***} \longrightarrow x^{***}|_E \varepsilon E^*).$$

§ 3 - Espaços Localmente Convexos

No que segue E indicará um espaço localmente convexo. Se E^* é o dual de E, indicaremos por E^*_b e E^*_c o espaço E^* munido da topologia da convergência uniforme sobre os limitados de E e os compactos de E respectivamente.

Indicaremos por $\mathcal{V}(E)$ um sistema fundamental de vizinhanças convexas e equilibradas do zero em E. Se $V \varepsilon \mathcal{V}(E)$, q_V denota o funcional de Minkowski de V e E_V denota o espaço quociente de E pelo subespaço $N(V) = \{x \varepsilon E : q_V(x) = 0\}$.

<u>Definição:</u> Um e.l.c separado E é um <u>espaço de Schwartz</u> se para cada $V \varepsilon \mathcal{V}(E)$, existir uma $W \varepsilon \mathcal{V}(E)$ tal que a aplicação identidade

$$E_W \longrightarrow E_V \quad \text{é precompacta.}$$

Agora, se B denota um subconjunto convexo, equilibrado e limitado de E, então E_B denota a envoltória linear de B, sendo E_B um espaço normado por q_B.

1.3.1 - <u>Proposição</u> ([16] - 0.11.3). Para cada $V \varepsilon \mathcal{V}(E)$ os espaços de Banach $[E_V]^*_b$ e $[E^*]_{V^o}$ são isométricos.

V^o denota o polar da vizinhança V.

CAPÍTULO 2

MEDIDAS VETORIAIS

§1 - A Integral de Bochner

E e F denotam espaços de Banach.

2.1.1 - Definição : (a) Um par (Ω,Σ) é chamado um espaço mensurável, quando Σ for uma σ-álgebra de subconjuntos de um conjunto Ω.

(b) Uma terna (Ω,Σ,μ) é chamada um espaço de medida quando μ for uma medida não negativa extendida, σ-aditiva, definida sobre a σ-álgebra Σ do espaço mensurável (Ω,Σ).

O espaço de medida (Ω,Σ,μ) é chamado finita se $\mu(\Omega)< \infty$.

2.1.2 - Definição : Seja (Ω,Σ,μ) um espaço de medida finita.

(a) Uma função $f : \Omega \longrightarrow F$ é chamada simples se existem pontos $x_1,\ldots,x_n$ em F e conjuntos $A_1,\ldots,A_n$ em Σ tais que $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$ onde χ_{A_i} é a função característica do conjunto A_i.

(b) Uma função $f : \Omega \longrightarrow F$ é chamada <u>μ-mensurável</u> se existe uma sequência (f_n), de funções simples, tal que

$$\lim_n ||f_n - f|| = 0 \qquad \mu - q.s$$

2.1.3 - <u>Definição</u> : Uma função μ-mensurável $f : \Omega \longrightarrow F$ é chamada <u>μ-Bochner integrável</u> se existir uma seqüência (f_n), de funçoes simples, tal que

$$\lim_n \int_\Omega ||f_n - f|| \, d\mu = 0 .$$

Para cada $A \varepsilon \Sigma$, definimos $\int_A f \, d\mu = \lim_n \int_A f_n \, d\mu$, onde $\int_A f_n \, d\mu$ é definida de maneira óbvia.

Uma caracterização de funções Bochner-integráveis é o teorema:

2.1.1 - <u>Teorema</u> : Uma função μ-mensurável $f : \Omega \longrightarrow F$ é μ-Bochner integrável se e somente se $\int_\Omega ||f|| \, d\mu < \infty$.

2.1.1 - <u>Lema</u> : Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita e $f : \Omega \longrightarrow F$ uma aplicação μ-Bochner integrável. Então para cada $\varepsilon > 0$ existem sequências (y_n) em F e (A_n) em Σ tais que

(i) a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \chi_{A_n}$ converge para f absolutamente μ-q.s.

(ii) $\int_{\Omega} ||f||\, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||y_n||\, \mu(A_n) \leq \int_{\Omega} ||f||\, d\mu + \varepsilon$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} ||y_n||\, \chi_{A_n}(s) \leq ||f(s)|| + \varepsilon/\mu(\Omega)$ μ-q.s $(\mu \neq 0)$

Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita e F um espaço de Banach.

Então para $1 \leq p < \infty$, $L_p(\mu, F)$ denota o espaço de funções (i.e. classe de funções) f definidas em Ω com valores em F que são μ-Bochner integráveis (def. 2.1.3), com

$$\int_{\Omega} ||f||^p \, d\mu < \infty$$

A norma $|| \; ||_p$ é definida por

$$||f||_p = \left(\int_{\Omega} ||f||^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad f \in L_p(\mu, F).$$

$L_\infty(\mu, F)$ denota o espaço das funções f, definidas em Ω com valores em F que são μ-Bochner integráveis tais que

$$||f||_\infty = \text{ess sup} \left\{ ||f(\omega)|| : \omega \in \Omega \right\} < \infty \qquad \text{(supremo essencial)}$$

§2 - Medidas Vetoriais

Seja (Ω,Σ) um espaço mensurável

2.2.1 - Definição : (a) Uma função $G : \Sigma \longrightarrow F$ é chamada uma medida vetorial finitamente aditiva ou simplesmente uma medida vetorial, se dados A e B em Σ disjuntos então

$$G(A \cup B) = G(A) + G(B).$$

Se para toda sequência (A_n) de elementos em Σ mutuamente disjuntos tais que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$, for válido que

$$G\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} G(A_n) \quad \text{(convergência na norma de F)}$$

então G é chamada uma medida vetorial σ-aditiva.

(b) Dizemos que uma medida vetorial G é fortemente aditiva se para qualquer sequência (A_n) em Σ de elementos mutuamente disjuntos, a série $\sum_{n=1}^{\infty} G(A_n)$ converge.

2.2.2 - Definição : Seja $G : \Sigma \longrightarrow F$ uma medida vetorial.

(a) A variação de G é a função $|G| : \Sigma \longrightarrow [0,\infty]$ definida por:

$$|G|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} ||G(A_i)|| \right\}, \quad A \in \Sigma,$$ onde o supremo é calculado sobre todas as partições finitas de A.

Dizemos que G é de variação limitada se $|G|(\Omega) < \infty$.

(b) A semi-variação de G é a função $||G||:\Sigma \longrightarrow [0,\infty]$ definida por:

$$||G||(A) = \sup \left\{ |x^*G|\ (A) \ : \ x^* \in F^* \ , \ ||x^*|| \leq 1 \right\},$$ onde $|x^*G|$ indica a variação da medida escalar x^*G.

Se $||G||(\Omega) < \infty$, dizemos que G é de <u>semi-variação limitada</u> ou simplesmente <u>limitada</u>.

Denotamos por $ba(\Sigma,F)$ o espaço vetorial das medidas definidas em Σ a valores em F que são limitadas. No espaço $ba(\Sigma,F)$ temos a norma

$$||G|| = \sup \left\{ ||G(A)|| \ : \ A \in \Sigma \right\}, \ G \in ba(\Sigma,F).$$

Denotamos $bva(\Sigma,F)$ e $bvca(\Sigma,F)$ os subespaços de $ba(\Sigma,F)$, das medidas de variação limitada, das medidas de variação limitada e σ-aditivas respectivamente. No espaço $bva(\Sigma,F)$ temos a norma

$$|G| = |G|(\Omega) \quad , \quad G \in bva(\Sigma,F).$$

<u>Observações</u>:

(i) a variação é uma função monótona finitamente aditiva.

(ii) a semi-variação é uma função monótona subaditiva.

(iii) é válida em geral a desigualdade

$$||G||(A) \leq |G|(A) \quad \text{qualquer } A \in \Sigma.$$

(iv) uma medida vetorial G de variação limitada é σ-aditiva se e só se $|G|$ é σ-aditiva.

(v) os espaços $ba(\Sigma,F)$ e $bva(\Sigma,F)$ são espaços de Banach com as normas dadas.

(vi) o subespaço $bvca(\Sigma,F)$ é um subespaço fechado do espaço de Banach $bva(\Sigma,F)$.

2.2.3 - Definição : Seja Ω um espaço topológico. A σ-álgebra gerada pelos abertos de Ω é chamada de álgebra de Borel de Ω, denotada por $\beta(\Omega)$. Os elementos de $\beta(\Omega)$ são chamados conjuntos de Borel.

2.2.4 - Definição : Seja Ω um espaço topológico compacto e separado. Uma medida vetorial $G : \beta(\Omega) \longrightarrow F$ é chamada regular, se para cada $B \in \beta(\Omega)$ e cada $\varepsilon>0$ existir um conjunto compacto C e um conjunto aberto A, com $C \subset B \subset A$ tal que $||G||(A \setminus C) < \varepsilon$.

Observação: É claro que se $|G|$ for regular então G é regular.

No lema 3.1.3 veremos que o recíproco vale se G é σ-aditiva e de variação limitada.

A integração com relação a uma medida vetorial de semi-variação limitada.

Seja (Ω,Σ) um espaço mensurável. Uma função com valores escalares $f : \Omega \longrightarrow C$ é chamada simples se existem escalares $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ não nulos e elementos $A_1,\ldots,A_n$ em Σ mutuamente disjuntos tais que $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde χ_{A_i} é a função característica do conjunto A_i.

2.2.5 - Definição : Denotamos por $B(\Sigma)$ o espaço vetorial de todas as funções definidas em Ω com valores complexos que são limites uniformes de funções simples.

Seja $G : \Sigma \longrightarrow F$ uma medida vetorial limitada (isto é, $||G||(\Omega) < \infty$). Definimos uma aplicação T_G sobre o espaço das funções simples (escalares), tomando valor em F, por

$$T_G(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, G(A_i) \quad , \quad f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \chi_{A_i}$$

Notamos que T_G está bem definida, é linear e que se colocamos $||f|| = \sup \left\{ |f(\omega)| : \omega \in \Omega \right\}$ então vale

$$||T_G(f)|| \leq ||f|| \; ||G|| \; (\Omega).$$

Considerando o espaço $B(\Sigma)$ com a norma do supremo, segue que o espaço das funções simples é um subespaço denso, portanto a aplicação T_G admite uma única extensão contínua, denotada ainda por T_G, ao espaço $B(\Sigma)$.

2.2.6 - Definição : Seja (Ω,Σ) um espaço mensurável e $G:\Sigma \longrightarrow F$ uma medida vetorial limitada.

Para cada $f \in B(\Sigma)$ a integral $\int_\Omega f \, dG$ é definida por:

$$\int_\Omega f \, dG = T_G(f)$$

As seguintes propriedades são imediatas:

(i) $\quad ||\int_\Omega f \, dG|| \leq ||f|| \; ||G|| \; (\Omega).$

(ii) para cada $x^* \in F^*$ temos:

$$x^*\left(\int_\Omega f\, dG\right) = \int_\Omega f\, d(x^*G).$$

2.2.1 - Teorema : (Convergência limitada de Bartle). Seja (Ω,Σ) um espaço mensurável, F um espaço de Banach, $G : \Sigma \longrightarrow F$ uma medida vetorial σ-aditiva e (f_n) uma sequência uniformemente limitada em $B(\Sigma)$. Se $\lim_n f_n = f$ pontualmente então

$$\lim_n \int_\Omega f_n\, dG = \int_\Omega f\, dG$$

2.2.7 - Definição : Seja (Ω,Σ) um espaço mensurável e μ uma medida não negativa finita sobre Σ.

Se $G : \Sigma \longrightarrow F$ é uma medida vetorial tal que $\lim_{\mu(A)\to 0} G(A) = 0$, então G é chamada μ-contínua e isto será indicado por $G \ll \mu$.

Observamos que se μ e G forem σ-aditivas então a definição acima é equivalente a dizer que G se anula em todo conjunto onde μ é nula.

- A Propriedade de Radon-Nikodym

2.2.8 - Definição : Um espaço de Banach F tem a propriedade de Radon-Nikodym (abrev. PRN), com respeito ao espaço de medida finita (Ω,Σ,μ), se para cada medida vetorial $G : \Sigma \longrightarrow F$ de variação limitada que é μ-contínua então existe $g \in L_1(\mu,F)$ tal que

$$G(A) = \int_A g\, d\mu \quad \text{para todo } A \in \Sigma$$

Dizemos que o espaço de Banach F tem a PRN se F tiver a PRN com respeito a todo espaço de medida finita.

Alguns espaços que possuem a propriedade de Radon Nikodym são os seguintes:

- espaços reflexivos
- espaços duais que são separáveis
- espaços duais que são gerados por compactos fracos.
- espaços com base de Schauder limitadamente completa.
- $\ell_1(\Gamma)$, onde Γ é um conjunto qualquer

A propriedade de Radon Nikodym no dual de um espaço de Banach.

Sejam Ω e Y espaços topologicos sendo Ω completamente regular. Denotamos por $R_1(\Omega)$ o conjunto de todas as medidas μ, de Borel regular, definidas sobre $\beta(\Omega)$, não negativas tais que $\mu(\Omega) \leq 1$.

2.2.9 - Definição : Seja $f : \Omega \longrightarrow Y$ uma aplicação.

(a) Se $\mu \in R_1(\Omega)$, a aplicação f é chamada μ-Lusin mensurável se para todo compacto K de Ω e para todo $\varepsilon>0$ existir um compacto $K_\varepsilon \subset K$, tal que $\mu(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ e a restrição de f em K_ε seja contínua.

(b) A aplicação f é chamada universalmente mensurável se f for μ-Lusin mensurável para toda $\mu \in R_1(\Omega)$.

2.2.2 - Teorema : (Schwartz). Seja E um espaço de Banach e E* o seu dual. Então o espaço E* tem a PRN se e somente se a apli-

cação identidade

$$I : (E^*, \sigma(E^*,E)) \longrightarrow (E^*, ||\ ||) \text{ for universalmente mensurável.}$$

§3 - Operadores em $C(\Omega)$

Denotamos por Ω um espaço topológico compacto e separado, e $C(\Omega)$ denota o espaço de todas as funções contínuas sobre Ω com valores escalares.

O teorema de Representação de Riesz

2.3.1 - <u>Teorema</u> : Seja F um espaço de Banach e $T : C(\Omega) \longrightarrow F$ um operador linear contínuo. Então existe uma medida vetorial $G : \beta(\Omega) \longrightarrow F^{**}$, ω^*-σ-aditiva tal que:

(i) para cada $x^* \varepsilon F^*$ $x^*G(\ )$ é uma medida de Borel regular σ-aditiva.

(ii) a aplicação $x^* \varepsilon F^* \longrightarrow x^*G(\ ) \varepsilon C(\Omega)^*$ é contínua em relação as respectivas topologias ω^*.

(iii) para cada $f \varepsilon C(\Omega)$ e cada $x^* \varepsilon F^*$, temos

$$x^*T(f) = \int_\Omega f\, d(x^*G)$$

(iv) $||T|| = ||G||(\Omega)$.

Reciprocamente: Se $G : \beta(\Omega) \longrightarrow F^{**}$ é uma medida que satisfaz (i) e (ii) então (iii) define um operador $T : C(\Omega) \longrightarrow F$ linear e contínuo satisfazendo (iv).

A medida G satisfazendo de (i) a (iv) no teorema anterior será chamada medida <u>representante de T</u>.

2.3.2 - Teorema : (Bartle-Dunford-Schwartz): Se $T : C(\Omega) \longrightarrow F$ é um operador linear e contínuo com medida representante G, então são equivalentes:

(a) T é fracamente compacto

(b) G toma todos seus valores em F

(c) G é σ-aditiva

(d) G é fortemente aditiva

(e) G é regular

2.3.1 - Corolário: Se $T : C(\Omega) \longrightarrow F$ é um operador linear e contínuo com medida representante G, então T é fracamente compacto se e somente se G é regular.

Observamos que se um operador linear e contínuo, $T : C(\Omega) \longrightarrow F$ satisfaz uma das condições do teorema anterior, então o teorema de representação de Riesz (teor. 2.3.1) permite escrever

$$T(f) = \int_{\Omega} f \, dG \qquad \text{para todo } f \in C(\Omega)$$

2.3.3 - Teorema (Stone-Sikorski [20] - §4.4). Seja Ω um espaço compacto separado e μ uma medida de Borel regular sobre Ω. Então existe um compacto $\tilde{\Omega}$ separado, totalmente desconexo e uma medida de Borel regular λ sobre $\tilde{\Omega}$ tal que

$$L_1(\mu) = L_1(\lambda) \quad \text{e} \quad L_\infty(\mu) = C(\tilde{\Omega}) \text{ , isometricamente.}$$

§4 - Operadores Absolutamente Somáveis

Sejam E e F espaços de Banach.

2.4.1 - <u>Definição</u> : Um operador $T : E \longrightarrow F$ é chamado <u>absolutamente somável</u>, se existir uma constante $k>0$ tal que para qualquer conjunto finito $x_1,\ldots,x_n \in E$ é válida a desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{n} ||T(x_i)|| \leq k \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)| \ : \ x^* \in E^*, \ ||x^*|| \leq 1 \right\}$$

O ínfimo das constantes k que verificam a desigualdade acima é chamado <u>norma absolutamente somável</u> de T, indicado por $||T||_{as}$

2.4.1 - <u>Teorema</u> : Um operador linear e contínuo $T : C(\Omega) \longrightarrow F$ é absolutamente somável se e somente se a sua medida representante G é de variação limitada. Neste caso temos $||T||_{as} = |G|(\Omega)$.

2.4.1 - <u>Corolário</u> : Seja μ uma medida de Borel regular não negativa sobre Ω e $J : C(\Omega) \longrightarrow L_1(\mu)$ a aplicação inclusão. Então J é absolutamente somável e $||J||_{as} = \mu(\Omega)$.

2.4.2 - <u>Corolário</u> : Um operador linear e contínuo $T : C(\Omega) \longrightarrow F$ é absolutamente somável se e somente se existir uma medida de Borel regular, não negativa μ sobre Ω e um operador linear e contínuo $S : L_1(\mu) \longrightarrow F$ tal que T admite a fatoração

$$\begin{tikzcd} C(\Omega) \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "J"'] & & F \\ & L_1(\mu) \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

onde J é a inclusão natural. Neste caso μ e S podem ser escolhidos de modo que $\mu(\Omega) = ||T||_{as}$ e $||S|| \leq 1$.

2.4.3 - Corolário : Todo operador $T : C(\Omega) \longrightarrow F$ absolutamente somável é fracamente compacto.

§5 - Operadores Nucleares e Pietsch-integrais

Sejam E e F espaços normados e denotamos por U_{E^*} a bola unitária e fechada do dual E^*, munida da topologia $\sigma(E^*,E)$.

2.5.1 - Definição : Seja $T : E \longrightarrow F$, um operador linear e contínuo

(a) T é chamado nuclear se existirem sequências (ϕ_n) em E^* e (y_n) em F tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||\phi_n|| \; ||y_n|| < \infty \quad \text{e} \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n \rangle y_n \quad \text{para todo } x \in E$$

(b) T é chamado Pietsch-integral se existir uma medida $G : \beta(U_{E^*}) \longrightarrow F$, σ-aditiva, (regular) e de variação limitada tal que

$$T(x) = \int_{U_{E^*}} \langle x^*, x \rangle \, dG(x^*) \quad \text{para todo } x \in E$$

Denotamos por $L_N(E,F)$ (respectivamente $L_{PI}(E,F)$) o espaço de todos os operadores de E em F que são nucleares (respectivamente Pietsch-integrais).

Consideramos as normas $|| \; ||_N$ e $|| \; ||_I$ sobre $L_N(E,F)$ e $L_{PI}(E,F)$ respectivamente, definidas por:

$$||T||_N = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} ||\phi_n|| \; ||y_n|| \right\}$$, sendo o infimo calculado sobre todas as sequências (ϕ_n) em E^* e (y_n) em F que satisfazem (a):

$||T||_I = \inf \{|G|(U_{E^*})\}$ sendo o ínfimo calculado sobre todas as medidas G que satisfazem (b).

Observamos que o espaço $L_{PI}(E,F)$ com a norma $|| \ ||_I$ é um espaço de Banach.

Enunciamos a seguir uma série de resultados envolvendo aplicações integrais e nucleares e a PRN.

2.5.1 - <u>Teorema</u> : Um operador linear e contínuo $T : E \longrightarrow F$ é Pietsch-integral se e somente se T admite a fatoração:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & F \\ C(\Omega) \arrow[r, "J"] & L_1(\mu) \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

Onde μ é uma medida de Borel regular sobre Ω, R e S são operadores lineares e contínuos e J é a inclusão natural.

<u>Observação</u>: em particular temos que todo operador P-integral é absolutamente somável (ver Corolário 2.4.2).

2.5.1 - <u>Proposição</u> : Sejam E, F, Z e W espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$, $S : F \longrightarrow Z$ e $R : Z \longrightarrow W$ operadores lineares e contínuos. Se o operador S é Pietsch-integral então $R \circ S \circ T$ é Pietsch-integral e vale

$$||R \circ S \circ T||_I \leq ||R|| \ ||S||_I \ ||T||$$

2.5.2 - <u>Proposição</u> : Se μ é uma medida de Borel regular não negativa sobre Ω então a inclusão natural $J : C(\Omega) \longrightarrow L_1(\mu)$ é Pietsch-integral com $||J||_I = \mu(\Omega)$.

2.5.2 - Teorema : Um espaço de Banach F tem a PRN se e somente se $L_{PI}(E,F) = L_N(E,F)$ isometricamente para todo espaço de Banach E.

2.5.3 - Teorema : (Figel-Johnson) (a) Existe um espaço de Banach E com a propriedade de aproximação (PA), mas não a propriedade de aproximação limitada, sendo o dual E* separável.

(b) existe um operador não nuclear $T : E \longrightarrow E$ tal que a adjunta T* é nuclear.

2.5.4 - Teorema : Seja E um espaço de Banach tal que E* tem a P.A. Se um operador linear e contínuo $T : E \longrightarrow F$ tem a adjunta T* nuclear, então T é nuclear.

2.5.5 - Teorema : Todo operador nuclear $T : E \longrightarrow F$ tem adjunta $T^* : F^* \longrightarrow E^*$ nuclear.

§6 - Operadores Grothendieck-integrais

2.6.1 - Definição : (a) Uma forma bilinear contínua T sobre E×F é Grothendieck-integral se e somente se existe uma medida de Borel regular μ sobre $U_{E^*} \times U_{F^*}$ tal que

$$T(x,y) = \int_{U_{E^*} \times U_{F^*}} \langle x,\phi\rangle\langle y,\Psi\rangle \, d\mu(\phi,\Psi)$$

(b) Uma aplicação linear contínua $T : E \longrightarrow F$ é Grothendieck-integral se e somente se a forma bilinear τ sobre E×F* definida por $\tau(x,\Psi) = \langle T(x),\Psi\rangle$ for integral segundo (a).

Denotamos por $L_{GI}(E\times F)$ o espaço de todas as formas bi

lineares sobre E×F que são Grothendieck-integrais. No caso em que E=F indicamos $L_{GI}(E\times F) = L_{GI}(^2E)$.

2.6.1 - Teorema : Se $T : E \longrightarrow F$ é um operador Pietsch-integral então T é Grothendieck-integral. Reciprocamente, se F é complementado em F** com projeção de norma 1, então cada operador Grothendieck-integral $T : E \longrightarrow F$ é Pietsch-integral.

2.6.2 - Teorema : Um operador linear contínuo $T : E \longrightarrow F$ é Grothendieck-integral se e somente se a adjunta $T^* : F^* \longrightarrow E^*$ é Grothendieck-integral.

2.6.3 - Teorema : Uma forma bilinear T sobre E×F é Grotehndieck-integral se e somente se o operador linear contínuo $\tilde{T} \times E \longrightarrow F^*$ definido por $\tilde{T}(x)(y) = T(x,y)$ for Grothendieck-integral.

2.6.4 - Teorema : Seja E um espaço de Banach tal que E* tem a P.A . Então E* tem a PRN se e somente se $L_{GI}(E,F) = L_N(E,F)$ isometricamente para todo espaço de Banach F.

CAPÍTULO 3

COINCIDÊNCIA DOS ESPAÇOS $L_{PI}(^mE,F)$ e $L_N(^mE,F)$

§1 - O Caso Linear, isto é, $L_{PI}(E,F) = L_N(E,F)$

O principal resultado do parágrafo é o teorema.

3.1.1 - Teorema : Seja E um espaço de Banach. Então o dual E^* tem a propriedade de Radon Nikodym se e somente se $L_{PI}(E,F) = L_N(E,F)$ isometricamente para todo espaço de Banach F.

A demonstração do teorema será dada depois de vários lemas.

3.1.1 - Lema : Seja X um espaço compacto separado, $\mu \in R_1(X)$ e F um espaço de Banach.

Se uma aplicação $f : X \longrightarrow F$ é μ-Lusin mensurável então f é μ-mensurável.

Prova: desde que X é compacto e f é μ-Lusin-mensurável, dado $\varepsilon = 1$ existe um conjunto compacto $K_1 \subset X$ tal que $\mu(X \setminus K_1) < 1$ e $f|_{K_1} : K_1 \longrightarrow F$ é contínua.

Para cada $x \in K_1$ consideramos a bola aberta de F,

$$U_x = \left\{ y \in F : ||f(x)-y|| < 1 \right\} = B(f(x),1)$$

A família $\left\{ f^{-1}(U_x) \cap K_1 : x \in K_1 \right\}$ é uma cobertura aberta de K_1, portanto existe um nº finito de pontos: $x_{1j} \in K_1$ $j=1....k_1$ tais que:

$$K_1 = \bigcup_{j=1}^{k_1} f^{-1}(U_{1j}) \cap K_1 \qquad \text{onde } U_{1j} = U_{x_{1j}}$$

Portanto existem conjuntos de Borel mutuamente disjuntos S_{1j} , $j=1...k_1$ tais que

$$K_1 = \bigcup_{j=1}^{k_1} S_{1j} \qquad e \qquad S_{1j} \subset f^{-1}(U_{1j}) \cap K_1 \quad j=1....k_1$$

Agora definimos uma função simples $f_1 : X \longrightarrow F$ dada por

$$f_1(x) = f(x_{1j}) \qquad se \qquad x \in S_{1j} \qquad j=1....k_1$$

$$f_1(x) = 0 \qquad se \qquad x \in K \setminus K_1$$

Portanto obtivemos o seguinte:

Dado $\varepsilon=1$, existe um compacto K_1 e uma função simples f_1 tais que:

$$\mu(X \setminus K_1) < 1 \qquad e \qquad ||f(x)-f_1(x)||<1 \text{ para todo } x \in K_1$$

Dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe um compacto $K_2 \subset X$ tal que

$$\mu(X \setminus K_2) < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f|_{K_2} : K_2 \longrightarrow F \text{ é contínua.}$$

Como K_1 e K_2 são fechados, a função restrição $f|_{K_1 \cup K_2} : K_1 \cup K_2 \longrightarrow F$ é contínua e desde que $K_1 \cup K_2$ é compacto, pelo mesmo processo anterior encontramos uma função simples $f_2 : X \longrightarrow F$ tal que

$$||f(x) - f_2(x)|| < \frac{1}{2} \quad \text{para todo } x \in K_1 \cup K_2 \quad \text{e em adição temos } \mu(X \setminus K_1 \cup K_2) < \frac{1}{2}.$$

Por indução, construímos uma sequência (f_n) de funções simples e uma sequência crescente (L_n) de conjuntos compactos, sendo $L_n = K_1 \cup \ldots \cup K_n$, tais que

$$||f(x) - f_n(x)|| < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } x \in L_n \quad \text{e}$$

$$\mu(X \setminus L_n) < \frac{1}{n}.$$

Agora seja $x \in X$ tal que $||f(x) - f_n(x)||$ não convirja para 0, logo $x \notin L_n$ $n=1,2\ldots\ldots$ portanto $x \in X \setminus \bigcup^{\infty} L_n$ mas $\mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n) \leq \mu(X - L_k) < \frac{1}{k}$ para qualquer k, logo $\mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n) = 0$, o que significa que f é μ-mensurável.

No que segue indicamos por U_{E^*} a bola unitária e fechada do dual E^* de um espaço de Banach E. Munimos U_{E^*} da topologia $\sigma(E^*,E)$ e observamos que $(U_{E^*}, \sigma(E^*,E))$ é um compacto. (Teor. de Alaoglu).

Se μ é uma medida de Borel sobre U_{E^*} existe uma extensão $\tilde{\mu}$ de μ à álgebra de Borel de $(E^*, \sigma(E^*,E))$ onde $\tilde{\mu}$ é dada por:

$\tilde{\mu}(A) = \mu(A \cap U_{E^*})$, A um Borel de $(E^*, \sigma(E^*,E))$.

Denotamos por

$h : U_{E^*} \longrightarrow (E^*, ||\ ||)$ a aplicação dada por $h(\phi) = \phi$ (restrição da identidade).

3.1.2 - Lema : Se E^* tem a P.R.N. e μ é uma medida de Borel regular não negativa sobre U_{E^*} , então a aplicação h é Bochner integrável com respeito a μ.

Prova: desde que E^* tem a P.R.N., pelo teorema 2.2.2 a identidade $I : (E^*, \sigma(E^*,E)) \longrightarrow (E^*, ||\ ||)$ é universalmente mensurável, portanto a aplicação h como restrição de I é universalmente mensurável, logo h é μ-Lusin mensurável.

Como U_{E^*} é compacto pelo lema anterior, h é μ-mensurável. Agora, desde que $||h(\phi)|| \leq 1$ para todo $\phi \in U_{E^*}$ segue-se que

$$\int_{U_{E^*}} ||h(\phi)|| d\mu(\phi) < \infty, \quad \text{pelo teorema 2.1.1}$$

concluímos que h é Bochner integrável com respeito a μ.

Observação: Na definição de operador Pietsch integral não se exigiu a regularidade da medida envolvida, entretanto é sempre possível escolher a medida como sendo regular. De fato: se $T:E \longrightarrow F$ é um operador P-integral, existe uma medida $G : \beta(U_{E^*}) \longrightarrow F$ σ-aditiva e de variação limitada tal que

$$T(x) = \int_{U_{E^*}} \langle x, x^* \rangle \, dG(x^*)$$

Definimos um operador $V : C(U_{E^*}) \longrightarrow F$ por

$$V(f) = \int_{U_{E^*}} f(x^*)\, dG(x^*) \quad , \quad f \in C(U_{E^*})$$

Notamos que a medida G não é necessariamente a medida representante de V no sentido de Riesz (ver teor. 2.3.1). Pela demonstração do teorema 2.4.1 é possível concluir que V é absolutamente somável (pois na demonstração usa-se apenas o fato que G é de variação limitada) e pelo corolário 2.4.3 o operador V é fracamente compacto e daí pelo corolário 2.3.1 segue que a medida representante $\tilde{G}$ de V no sentido de Riesz é regular e portanto V se escreve como

$$V(f) = \int_{U_{E^*}} f(x^*)\, d\tilde{G}(x^*) \qquad \text{com } \tilde{G} \text{ regular.}$$

Como consequência, sempre podemos supor que a medida de um operador P-integral é regular.

A observação acima é válida também com relação as aplicações m-lineares Pietsch-integrais (def. 3.2.1), polinômios Pietsch-integrais (def. 3.2.2(a)) e as aplicações bilineares Grothendieck-integrais (def. 2.6.1).

3.1.3 - <u>Lema</u> : Seja Ω um espaço compacto separado e Σ a álgebra de Borel de Ω. Seja $G : \Sigma \longrightarrow F$ uma medida de variação limitada. Se G é regular e σ-aditiva então a variação $|G|$ é regular.

<u>Prova</u>: provemos primeiro que se $A \in \Sigma$ e tal que

$$||G||(A) = 0 \qquad \text{então} \qquad |G|(A) = 0$$

Por definição

$$||G||(A) = \sup\left\{|x^*G|(A) \ : \ ||x^*||\leq 1, \ x^*\varepsilon F^*\right\}$$

sendo $||G||$ uma função subaditiva monótona.

Se $H \ \varepsilon \ \Sigma$ é tal que $H \subset A$, temos:

$$||G(H)|| = \sup\left\{|x^*G(H)| \ : \ ||x^*||\leq 1, \ x^*\varepsilon F^*\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{|x^*G|(H) : \ ||x^*||\leq 1, \ x^*\varepsilon F^*\right\} =$$

$$= ||G||(H) \leq ||G||(A)$$

Portanto se $||G||(A) = 0$ então $||G(H)|| = 0$ para todo $H \ \varepsilon \ \Sigma$ com $H \subset A$.

Por definição

$$|G|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} ||G(A_i)|| \ : \ \left\{A_i\right\}_{i=1}^{n} \text{ partição de } A\right\}$$

Consequentemente se $||G||(A) = 0$ então $\sum_{i=1}^{n} ||G(A_i)||=0$ para qualquer partição finita $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{n}$ de A logo $|G|(A) = 0$.

Suponhamos que $|G|$ não é regular, então existe $H \ \varepsilon \ \Sigma$ e $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer compacto $K \subset H$ e qualquer aberto $M \supset H$ temos $|G|(M \setminus K) \geq \varepsilon$.

Agora, como $||G||$ é regular, existe uma sequência $(L_n)_n$ onde $L_n = M_n \setminus K_n$ e $K_n \subset H \subset M_n$ tal que

$$||G||(L_n) \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad |G|(L_n) \geq \varepsilon \text{ para todo } n.$$

Seja $A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} L_i$ e $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

portanto

$$||G||(A) \leq ||G||(A_n) \leq \sum_{i=n}^{\infty} ||G||(E_i) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} ,$$

ou seja $||G||(A) = 0$

Agora, desde que $A_n \supset L_n$ vemos que

$$|G|(A_n) \geq |G|(L_n) \geq \varepsilon$$

Como $|G|(A_1) < \infty$ concluimos que $|G|(A) \geq \varepsilon$, uma contradição com a 1ª parte da prova.

3.1.4 - <u>Lema</u> : Um operador linear e contínuo $T : E \longrightarrow F$ é Pietsch-integral se e somente se admite uma fatoração na forma:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & F \\ L_\infty(\mu) \arrow[r, "I"] & L_1(\mu) \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

Sendo μ uma medida de Borel regular sobre Ω, R e S operadores contínuos e I é a inclusão.

<u>Prova</u>: Suponhamos que T seja P-integral, pelo teorema 2.5.1, T admite a fatoração:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R_1"'] & F \\ C(\Omega) \arrow[r, "J"] & L_1(\mu) \arrow[u, "S_1"'] \end{tikzcd}$$

Agora, desde que temos a inclusão contínua de $C(\Omega)$ em $L_\infty(\mu)$, vemos que J é a restrição a $C(\Omega)$ da inclusão $I : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_1(\mu)$, logo T admite a fatoração anunciada.

Reciprocamente - Se T admite a fatoração, pelo teorema de Stone-Sikorski (2.3.3) existe um compacto $\tilde{\Omega}$ separado, totalmente desconexo e uma medida de Borel regular λ sobre $\tilde{\Omega}$ tal que

$L_1(\mu) = L_1(\lambda)$ e $L_\infty(\mu) = C(\tilde{\Omega})$ isometricamente, consequentemente, pelo teorema 2.5.1, T é P-integral.

3.1.5 - <u>Lema</u> : Seja E um espaço de Banach. Suponhamos que $E^* \subset E$ e que a aplicação inclusão $J : E^* \longrightarrow E$ seja fracamente compacta. Se $J^* : E^* \longrightarrow E^{**}$ é a adjunta de J então $J^*(E^*) \subset E$.

<u>Prova</u>: Denotemos por $^{\circ}$ e $^{\cdot}$ os polares com relação aos pares $\langle E, E^* \rangle$ e $\langle E^*, E^{**} \rangle$ respectivamente.

Seja U a bola unitária e fechada de E.

Existe então um conjunto $K \subset E$, $\sigma(E,E^*)$-compacto logo $\sigma(E^{**},E^*)$-compacto tal que $U^{\circ} \subset K$.

Da identidade

$\langle J^* \Psi, \phi \rangle = \langle \Psi, J\phi \rangle = \langle \Psi, \phi \rangle$ para qualquer $\Psi \in U^{\circ}$ e qualquer $\phi \in K^{\circ} = K^{\cdot}$ segue que

$$J^*(U^o) \subset K^{\cdot\cdot} = K \subset E \text{ , portanto } J^*(E^*) \subset E$$

3.1.1 - <u>Corolário</u> : Se $I : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_1(\mu)$ é a aplicação inclusão então $I^*(L_\infty(\mu)) \subset L_1(\mu)$.

<u>Prova</u>: A aplicação I é claramente Pietsch-integral pelo teorema de Stone-Sikorski e a proposição 2.5.2, logo, I é absolutamente somável (obs.: após teor. 2.5.1) e agora, pelo corolário 2.4.3 segue que I é fracamente compacto.

3.1.1 - <u>Proposição</u>: Se um operador $T \in L_{PI}(E,F)$ então a adjunta $T^* \in L_{PI}(F^*,E^*)$.

<u>Prova</u>: pelo lema 4, T admite a fatoração

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & F \\ L_\infty(\mu) \arrow[r, "I"] & L_1(\mu)^{**} \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

Tomando as adjuntas obtemos

$$\begin{tikzcd} F^* \arrow[r, "T^*"] \arrow[d, "S^*"'] & E^* \\ L_\infty(\mu) \arrow[r, "I^*"] & L_1(\mu)^{**} \arrow[u, "R^*"'] \end{tikzcd}$$

Agora, pelo lema 5, I^* toma valores em $L_1(\mu)$ e portanto T^* admite a fatoração do lema 4, ou seja T^* é Pietsch-integral.

- <u>Prova do teorema 3.1.1</u>:

Se $T \in L_N(E,F)$ é claro que $T \in L_{PI}(E,F)$ e que

$$||T||_I \leq ||T||_N$$

Suponhamos que E^* tenha a PRN e seja $T \in L_{PI}(E,F)$, logo T se escreve como

$$T(x) = \int_{U_{E^*}} \langle x,\phi\rangle \, dG(\phi)$$

onde G é σ-aditiva de variação limitada e além disso podemos supor G regular (obs. após lema 3.1.2) e portanto $|G|$ é regular pelo lema 3.1.3.

Como a variação $|G|$ é uma medida de Borel regular não negativa sobre U_{E^*}, segue pelo lema 3.1.2 que a aplicação $h : U_{E^*} \longrightarrow (E^*, || \; ||)$ é Bochner-integrável com respeito a $|G|$.

Pelo lema 2.1.1 existe uma sequência (ϕ_n) em E^* e uma sequência (A_n) em $\beta(U_{E^*})$ tal que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \, \chi_{A_n}(\phi) \quad \text{converge para } h(\phi) \text{ absolutamente}$$

$|G|$ - q.s.

Portanto, podemos escrever

$$T(x) = \int_{U_{E^*}} \langle x,\phi\rangle \, dG(\phi) = \int_{U_{E^*}} \langle x \, , \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \, \chi_{A_n}(\phi) \rangle \, dG(\phi)$$

$$= \int_{U_{E^*}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \, \chi_{A_n}(\phi) \, dG(\phi).$$

Agora consideramos a sequência (h_j) definida por

$$h_j(\phi) = \sum_{n=1}^{j} \phi_n \, \chi_{A_n}(\phi)$$

Então $h_j : U_{E^*} \longrightarrow E^*$ e é claro que $h_j(\phi)$ converge para ϕ $|G|$ - q.s.

Pela parte (iii) do lema 2.1.1, dado $\varepsilon > 0$ podemos escrever

$$||h_j(\phi)|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||\phi_n|| \; \chi_{A_n}(\phi) \leq ||h(\phi)|| + \frac{\varepsilon}{|G|(U_{E^*})}$$

$$\leq 1 + \frac{\varepsilon}{|G|(U_{E^*})} \qquad |G| \text{ - q.s.}$$

Portanto a sequência (h_j) é uniformemente limitada em U_{E^*}. (exceto sobre um conjunto $|G|$-nulo).

Pelo teorema 2.2.1, T se escreve como

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \int_{U_{E^*}} \chi_{A_n}(\phi) \, dG(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \; G(A_n)$$

para todo $\chi \varepsilon E$.

Pela parte (ii) do lema 2.1.1 segue-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||\phi_n|| \; ||G(A_n)|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||\phi_n|| \; |G|(A_n) \leq |G|(U_{E^*}) < \infty,$$

logo

$$T \varepsilon L_N(E,F) \qquad \text{e} \qquad ||T||_N \leq ||T||_I$$

<u>Reciprocamente</u> - Pelo teorema 2.5.2 é suficiente provar que $L_{PI}(F,E^*) = L_N(F,E^*)$, para todo espaço de Banach F. Seja então $T \varepsilon L_{PI}(F,E^*)$, logo, pela proposição 3.1.1 segue que $T^* \varepsilon L_{PI}(E^{**},F^*)$.

Seja $S = T^*|_E$, portanto pela hipótese, temos que $S \varepsilon L_{PI}(E,F^*) = L_N(E,F^*)$.

Consequentemente $S^* \in L_N(F^{**},E^*)$ pelo teorema 2.5.5 . Agora, se $y \in F$ e $x \in E$, temos

$$\langle x, S^*(y)\rangle = \langle S(x),y\rangle = \langle T^*(x),y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$$

para todo $x \in E$ e todo $y \in F$, portanto $S^*|_F = T$ e em consequência $T \in L_N(F,E^*)$, o que demonstra o teorema, uma vez que a inclusão $L_N(E,F) \subset L_{PI}(E,F)$ é válida sempre.

Observação: Podemos sintetizar os resultados desse parágrafo enunciando o seguinte teorema:

3.1.2 - Teorema : Dado um espaço de Banach E, as seguintes condições são equivalentes:

(a) E^* tem a PRN

(b) A aplicação identidade $(E^*, (E^*,E)) \longrightarrow (E^*,\|\ \|)$ é μ-Lusin mensurável para qualquer μ-medida de Borel regular não negativa finita sobre $(E^*,\sigma(E^*,E))$.

(c) A aplicação inclusão $(U_{E^*},\sigma(E^*,E)) \longrightarrow (E^*,\|\ \|)$ é μ-mensurável para qualquer μ medida de Borel regular não negativa finita sobre $(U_{E^*},\sigma(E^*,E))$.

(d) A aplicação inclusão $(U_{E^*},\sigma(E^*,E)) \longrightarrow (E^*,\|\ \|)$ é μ-Bochner-integrável para quálquer medida de Borel regular não negativa finita sobre $(U_{E^*},\sigma(E^*,E))$

(e) $L_{PI}(E,F) = L_N(E,F)$ para todo espaço de Banach F.

Prova:

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) é o teorema 2.2.2 (Schwartz)

(b) $\Longrightarrow$ (c) é consequência da demonstração do lema 3.1.2

(c) $\Longleftrightarrow$ (d) é consequência imediata do teorema 2.1.1

(d) $\Longrightarrow$ (e) é a demonstração do teorema 3.1.1 (direta)

(e) $\Longrightarrow$ (a) é a demonstração do teorema 3.1.1 (recíproco)

§2 - A Igualdade $L_{PI}(^mE,F) = L_N(^mE,F)$

- <u>Definições e Notações</u>

Denotamos $(U_{E^*})^m = \underbrace{U_{E^*}\times\ldots\times U_{E^*}}_{m}$, onde cada U_{E^*} tem a topologia $\sigma(E^*,E)$.

3.2.1 - <u>Definição</u> : (a) Uma aplicação $T \in L(^mE,F)$ é chamada <u>Pietsch-integral</u> se existir uma medida G definida sobre $\beta((U_{E^*})^m)$ a valores em F, σ-aditiva, de variação limitada tal que

$$T(x_1,\ldots,x_m) = \int_{(U_{E^*})^m} \langle x_1,\phi_1\rangle\ldots\langle x_m,\phi_m\rangle \, dG(\phi_1,\ldots,\phi_m) \text{ para}$$

todo $x_1\ldots x_m$ em E.

Denotamos por $L_{PI}(^mE,F)$ o espaço de todas as aplicações $T \in L(^mE,F)$ que são Pietsch-integrais.

Notamos que $L_{PI}(^2E,C) = L_{GI}(^2E,C)$ (ver definição 2.6.1).

Consideramos o espaço $L_{PI}(^mE,F)$ com a norma

$||T||_I = \inf\left\{|G|((U_{E^*})^m)\right\}$, onde o ínfimo é calcula-

do sobre todas as medidas G que verificam a definição.

(b) Uma aplicação $T \in L(^mE,F)$ é chamada <u>nuclear</u> se existir sequências $(\phi_{nj})_{j=1}^{\infty}$, $n=1,\ldots,m$ em E^* e $(Y_j)_{j=1}^{\infty}$ em F tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||\phi_{1j}||\ldots||\phi_{mj}|| \; ||Y_j|| < \infty \qquad \text{e}$$

$$T(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_1,\phi_{1j}\rangle \ldots \langle x_m,\phi_{mj}\rangle \, Y_j$$

Para todo $x_1,\ldots,x_m$ em E.

Denotamos $L_N(^mE,F)$ o espaço de todas as aplicações $T \in L(^mE,F)$ que são nucleares.

No espaço $L_N(^mE,F)$ colocamos a norma

$$||T||_N = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} ||\phi_{1j}||\ldots||\phi_{mj}|| \; ||Y_j|| \right\}$$ sendo o ínfimo calculado sobre todas as representações de T.

3.2.2 - <u>Definição</u> : (a) Um polinômio $P \in P(^mE,F)$ se diz <u>Pietsch-integral</u> se existir uma medida $G : \beta(U_{E^*}) \longrightarrow F$, σ-aditiva de variação limitada tal que

$$P(x) = \int_{U_{E^*}} \langle x,\phi\rangle^m \, dG(\phi)$$

$P_{PI}(^mE,F)$ denota o espaço de todos os polinômios $P \in P(^mE,F)$ que são Pietsch-integrais.

No espaço $P_{PI}(^mE,F)$ temos a norma:

$||P||_I = \inf \left\{ |G|(U_{E^*}) \right\}$ ínfimo sobre todas as medidas G que satisfazem a definição.

(b) Um polinômio $P \in P(^mE,F)$ se diz nuclear se existir sequências (ϕ_j) em E^* e (Y_j) em F tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||\phi_j^m|| \; ||Y_j|| < \infty \quad \text{e} \quad P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^m(x) \, Y_j \quad \text{para todo}$$

x em E.

$P_N(^mE,F)$ denota o espaço de todos os polinômios.

$P \in P(^mE,F)$ que são nucleares.

No espaço $P_N(^mE,F)$ consideramos a norma:

$||P||_N = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} ||\phi_j^m|| \; ||Y_j|| \right\}$ sendo o ínfimo calculado sobre todas as representações de P.

O resultado do parágrafo será o teorema:

3.2.1 - <u>Teorema</u>: Seja E um espaço de Banach. Se E^* tem a PRN então $L_{PI}(^mE,F) = L_N(^mE,F)$. isometricamente para todo inteiro m e qualquer espaço de Banach F.

Antes da demonstração do teorema daremos algumas propriedades dos espaços $L_{PI}(^mE,F)$ e $L^s_{PI}(^mE,F)$.

3.2.1 - <u>Proposição</u> : (a) Seja $P \in P_{PI}(^mE,F)$ e $A \in L^s(^mE,F)$ tal que $\hat{A} = P$. Então $A \in L^s_{PI}(^mE,F)$ e $||A||_I \leq ||P||_I$.

(b) Seja $A \in L_{PI}(^mE,F)$ e $P = \hat{A}$. Então $P \in P_{PI}(^mE,F)$ e $||P||_I \leq \frac{m^m}{m!} ||A||_I$.

<u>Prova</u>: (a) Seja $P \in P_{PI}(^mE,F)$, logo P se escreve como

$$P(x) = \int_{U_{E^*}} \langle x,\phi\rangle^m \, dG(\phi)$$

Se $A \in L^s(^mE,F)$ é tal que $\hat{A} = P$, pela aplicação da fórmula de polarização (duas vezes) obtemos:

$$A(x_1,\ldots,x_m) = \int_{U_{E^*}} \langle x_1,\phi\rangle \ldots \langle x_m,\phi\rangle \, dG(\phi)$$

Agora consideramos a aplicação

$$J : U_{E^*} \longrightarrow (U_{E^*})^m \quad \text{definida por}$$

$$J(\phi) = (\phi,\ldots,\phi)$$

Definimos uma medida $\tilde{G}$ sobre a álgebra de Borel de $(U_{E^*})^m$ por

$$\tilde{G}(H) = G(J^{-1}(H)) \quad , \quad \text{para qualquer } H \in \beta((U_{E^*})^m)$$

$$|\tilde{G}|((U_{E^*})^m) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} ||\tilde{G}(A_i)|| \ : \ \{A_i\} \text{ partição de } (U_{E^*})^m\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} ||G(J^{-1}(A_i))|| \ : \ \{A_i\} \ \ldots\right\} \leq |G| \ (U_{E^*})$$

$$|G|(U_{E^*}) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} ||G(B_i)|| \ : \ \{B_i\} \text{ partição de } U_{E^*}\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} ||\underbrace{G(J^{-1}(J(B_i))}_{\tilde{G}(J(B_i))}|| \ : \ \{B_i\}\right\} \leq |\tilde{G}|((U_{E^*})^m)$$

temos então $|\tilde{G}| = |G|$.

Agora, desde que $\tilde{G}(H) = 0$ se $H \cap \Delta(U_{E*})^m = \emptyset$ (diagonal) temos

$$\int_{(U_{E*})^m} \langle x_1,\phi_1\rangle\ldots\langle x_m,\phi_m\rangle \, d\tilde{G}(\phi_1\ldots\phi_m) = \int_{\Delta(U_{E*})^m} \langle x_1,\phi_1\rangle\ldots\langle x_m,\phi_m\rangle \, d\tilde{G}(\phi_1\ldots\phi_m) =$$

$$= \int_{U_{E*}} \langle x_1,\phi\rangle\ldots\langle x_m,\phi\rangle \, d\tilde{G}(\phi\ldots\phi) = \int_{U_{E*}} \langle x_1,\phi\rangle\ldots\langle x_m,\phi\rangle \, dG(\phi) = A(x_1\ldots x_m)$$

e além disso $||A||_I \leq ||P||_I$.

(b) Seja $A \in L_{PI}(^mE,F)$, logo existe

$$G : \beta((U_{E*})^m) \longrightarrow F \quad \text{tal que}$$

$$A(x_1\ldots x_m) = \int_{(U_{E*})^m} \langle x_1,\phi_1\rangle\ldots\langle x_m,\phi_m\rangle \, dG(\phi_1\ldots\phi_m)$$

Portanto

$$P(x) = \hat{A}(x,\ldots,x) = \int_{(U_{E*})^m} \langle x,\phi_1\rangle\ldots\langle x,\phi_m\rangle \, dG(\phi_1\ldots\phi_m)$$

Agora, pela fórmula de polarização, escrevemos:

$$\langle x,\phi_1\rangle\ldots\langle x,\phi_m\rangle = \frac{1}{m!\,2^m} \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \varepsilon_1\ldots\varepsilon_m \langle x, \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \phi_i \rangle^m =$$

$$= \frac{m^m}{m!\,2^m} \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \varepsilon_1\ldots\varepsilon_m \langle x, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \phi_i \rangle^m$$

Portanto

$$P(x) = \frac{m^m}{m!\,2^m} \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \int_{(U_{E^*})^m} \langle x, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \phi_i \rangle^m \, dG(\phi_1, \ldots, \phi_m)$$

Agora, para cada m-upla $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, definimos uma aplicação

$$J_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m} : (U_{E^*})^m \longrightarrow U_{E^*} \qquad \text{por}$$

$$J_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m} (\phi_1, \ldots, \phi_m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \phi_i \quad \text{(contínua)} \quad \text{e}$$

definimos também uma medida

$$g_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m} : \beta(U_{E^*}) \longrightarrow F \qquad \text{por}$$

$$g_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m} (B) = G(J^{-1}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m} (B)) \text{ para qualquer } B \in \beta(U_{E^*})$$

e temos

$$\left| g_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m} \right| (U_{E^*}) \leq |G| \; ((U_{E^*})^m)$$

Mas

$$\int_{(U_{E^*})^m} \langle x, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \phi_i \rangle^m \, dG(\phi_1, \ldots, \phi_m) = \int_{U_{E^*}} \langle x, \Psi \rangle^m \, dG_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m}(\Psi)$$

Portanto

$$P(x) = \frac{m^m}{m!\,2^m} \sum_{\varepsilon_1=\pm} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \int_{U_{E^*}} \langle x, \Psi \rangle^m \, dG_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m}(\Psi)$$

Definimos agora uma medida:

$$g : \beta(U_{E^*}) \longrightarrow F \quad \text{por}$$

$$g = \frac{m^m}{m!\,2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \; g_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m}$$

consequentemente:

$$P(x) = \int_{U_{E^*}} \langle x, \Psi \rangle^m \, dg(\Psi) \quad , \quad \text{ou seja } P \in P_{PI}(^mE,F).$$

Além disso:

$$|g| \leq \frac{m^m}{m!\,2^m} \, 2^m \, |G| = \frac{m^m}{m!} \, |G|$$

logo

$$||P||_I \leq \frac{m^m}{m!} \, ||A||_I$$

3.2.1 - <u>Corolário</u> : Se $A \in L_{PI}(^mE,F)$ então $A^s \in L^s_{PI}(^mE,F)$

e $$||A^s||_I \leq \frac{m^m}{m!} \, ||A||_I$$

consequência imediata da proposição.

3.2.2 - <u>Corolário</u> : Seja $A \in L_{PI}(^mE,F)$ e A^s a simetrizada de A. Dado $\varepsilon > 0$ existe uma medida g de variação limitada e σ-aditiva sobre U_{E^*} a valores em F tal que

$$A^s(x_1, \ldots, x_m) = \int_{U_{E^*}} \langle x_1, \phi \rangle \ldots \langle x_m, \phi \rangle \, dg(\phi) \quad \text{e} \quad |g| \leq \frac{m^m}{m!} \, ||A||_I + \varepsilon .$$

<u>Prova</u>: Seja $P \in P_{PI}(^mE,F)$ tal que $\hat{A} = P$, pela parte (b) da proposição existe $g : \beta(U_{E^*}) \longrightarrow F$ tal que

$$P(x) = \int_{U_{E^*}} \langle x,\phi\rangle^m \, dg(\phi) \quad e \quad |g| \leq \frac{m^m}{m!} ||A||_I + \varepsilon.$$

Seja $B \in L^s(^mE,F)$ definida por

$$B(x_1,\ldots,x_m) = \int_{U_{E^*}} \langle x_1,\phi\rangle \ldots \langle x_m,\phi\rangle \, dg(\phi) \quad e \quad \text{temos} \quad \hat{B} = P$$

Desde que a correspondência $P \in P(^mE,F) \longleftrightarrow L^s(^mE,F)$ é um a um, temos que $A^s = B$, uma vez que $\hat{A}^s = \hat{B} = P$.

3.2.1 - <u>Lema</u> : Seja $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ um produto de espaços topológicos e μ uma medida de Borel sobre Ω com $\mu(\Omega) = 1$. Sejam F_1 e F_2 espaços de Banach e $f_1 : \Omega_1 \longrightarrow F_1$, $f_2 : \Omega_2 \longrightarrow F_2$ funções limitadas. Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Borel sobre Ω_1 e Ω_2 definidas por

$$\mu_1(A_1) = \mu(A_1 \times \Omega_1) \qquad A_1 \in \beta(\Omega_1)$$

$$\mu_2(A_2) \quad \mu(\Omega_1 \times A_2) \qquad A_2 \in \beta(\Omega_2)$$

Se f_1 é μ_1-mensurável e f_2 é μ_2-mensurável então a aplicação

$$f_1 \otimes f_2 : \Omega \longrightarrow F_1 \hat{\otimes}_\pi F_2 \quad \text{é } \mu\text{-mensurável.}$$

<u>Prova</u>: Sejam (f_{jn}) $j=1,2$ sequências de funções simples, $f_{jn} : \Omega_j \longrightarrow F_j$ $j=1,2$, tais que

$$||f_j - f_{jn}|| \longrightarrow 0 \quad \mu_j - q.s \qquad j=1,2$$

Então, cada função $f_{1n} \otimes f_{2n} : \longrightarrow F_1 \otimes_\pi F_2$ $n=1,2,\ldots$ é simples e temos:

$$||f_{1n} \otimes f_{2k} - f_1 \otimes f_2||_\pi = ||(f_{1n}-f_1+f_1) \otimes (f_{2k}-f_2+f_2) - f_1 \otimes f_2||_\pi =$$

$$= ||(f_{1n}-f_1) \otimes (f_{2k}-f_2) + (f_{1n}-f_1) \otimes f_2 + f_1 \otimes (f_{2k}-f_2)||_\pi$$

$$\leq ||f_{1n}-f_1|| \; ||f_{2k}-f_2|| + ||f_{1n}-f_1|| \; ||f_2|| + ||f_1|| \; ||f_{2k}-f_2||$$

Pela hipótese, existem conjuntos $A_1 \varepsilon \beta(\Omega_1)$ e $A_2 \varepsilon \beta(\Omega_2)$ tais que

$$\mu_1(A_1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_n ||f_{1n}-f_1|| = 0 \text{ em } \Omega_1 \setminus A_1$$

$$\mu_2(A_2) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_n ||f_{2n}-f_2|| = 0 \text{ em } \Omega_2 \setminus A_2$$

logo $f_{1n} \otimes f_{2k}$ converge pontualmente para $f_1 \otimes f_2$ em $\Omega \setminus (A_1 \times A_2)$.

Por outro lado, temos $\mu_1(\Omega_1 \setminus A_1) = 1$ e $\mu_2(\Omega_2 \setminus A_2) = 1$ logo $\mu((\Omega_1 \setminus A_1) \times (\Omega_2 \setminus A_2)) = 1$ em consequência temos

$$\mu(\Omega \setminus [(\Omega_1 \setminus A_1) \times (\Omega_2 \setminus A_2)]) = 0 \quad \text{e desde que}$$

$$(\Omega_1 \setminus A_1) \times (\Omega_2 \setminus A_2) \subset \underbrace{\Omega_1 \times \Omega_2}_{\Omega} \setminus A_1 \times A_2 \quad \text{e } \mu \text{ é positiva, temos}$$

$$\mu(\Omega \setminus (\Omega \setminus A_1 \times A_2)) = \mu(A_1 \times A_2) = 0.$$

Logo $f_1 \otimes f_2$ é μ-mensurável.

Observação: No lema poderíamos ter suposto $\mu(\Omega) = c$ (constante positiva).

3.2.3 - Corolário: Seja E um espaço de Banach e suponhamos que o dual E^* tenha a PRN. Seja $h : U_{E^*} \longrightarrow E^*$ definida por $h(\phi) = \phi$ e μ uma medida de Borel regular sobre $U_{E^*} \times U_{E^*}$.

Então a aplicação

$$h \otimes h : U_{E^*} \times U_{E^*} \longrightarrow E^* \hat{\otimes}_\pi E^* \text{ é Bochner integrável}$$

Prova: como no lema, definimos

$$\mu_1(A_1) = \mu(A_1 \times U_{E^*}) \quad \text{e} \quad \mu_2(A_2) = (U_{E^*} \times A_2)$$

logo μ_1 e μ_2 são de Borel regulares.

Pela demonstração do lema 3.1.2, vemos que h é μ_1-mensurável e μ_2-mensurável, logo, pelo lema anterior a aplicação $h \otimes h$ é μ-mensurável.

Mas

$$\int_{U_{E^*} \times U_{E^*}} ||h \otimes h(\phi, \Psi)||_\pi \, d\mu(\phi, \Psi) \leq \int_{U_{E^*} \times U_{E^*}} ||h(\phi)|| \, ||h(\Psi)|| \, d\mu(\phi, \Psi) \leq$$

$$\leq \mu(U_{E^*} \times U_{E^*}) < \infty$$

logo, pelo teorema 2.1.1 segue que $h \otimes h$ é μ-Bochner integrável.

Prova do teorema 3.2.1: (no caso m=2 para simplificar a notação)

É claro que se $T \in L_N(^2E,F)$ implica que $T \in L_{PI}(^2E,F)$ e $||T||_I \leq ||T||_N$.

Reciprocamente, seja $T \in L_{PI}(^2E,F)$ e $\varepsilon>0$.

Escolhemos $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon'(||T||_I + \varepsilon' + 2) < \varepsilon$.

Podemos escolher $G : \beta(U_{E^*} \times U_{E^*}) \longrightarrow F$ tal que

$$T(x,y) = \int_{U_{E^*}\times U_{E^*}} \langle x,\phi\rangle\langle y,\Psi\rangle \, dG(\phi,\Psi) \quad \text{com} \quad |G|(U_{E^*}\times U_{E^*}) \leq ||T||_I+\varepsilon'$$

Agora desde que G é uma medida σ-aditiva, regular, de variação limitada, pelo lema 3.1.3 segue que a variação $|G|$ é uma medida de Borel regular não negativa finita sobre $U_{E^*} \times U_{E^*}$.

Portanto pelo corolário 3.2.3 $h\otimes h$ é Bochner integrável com respeito a $|G|$.

Pelo lema 2.1.1 existem sequências (A_j) em $\beta(U_{E^*}\times U_{E^*})$ e (u_j) em $E^* \otimes_\pi E^*$ tais que, dado $\varepsilon'> 0$ a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(\phi,\Psi)u_j \quad \text{converge absolutamente para } h\otimes h$$

$|G|$- q.s. e além disso:

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||u_j||_\pi |G|(A_j) \leq \int_{U_{E^*}\times U_{E^*}} ||h\otimes h(\phi,\Psi)||_\pi d|G|(\phi,\Psi)+\varepsilon' \leq |G|(U_{E^*}\times U_{E^*})+\varepsilon'$$

Consequentemente $T(x,y)$ se escreve como

$$T(x,y) = \int_{U_{E^*}\times U_{E^*}} \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x,y) \, \chi_{A_j}(\phi,\Psi) \, dG(\phi,\Psi)$$

Agora, com argumento análogo ao usado na demonstração do teorema 3.1.1 e com a aplicação do teorema 2.2.1 é valido escrever:

$$T(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x,y) \int_{U_{E^*}\times U_{E^*}} \chi_{A_j}(\phi,\Psi)\, dG(\phi,\Psi) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x,y)\, G(A_j) .$$

Agora , por uma das propriedades do produto tensorial [teor. 1.1.1], dado ε', para cada j existem sequências (ϕ_{jn}) e (Ψ_{jn}) em E^* tais que

$$u_j = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{jn} \otimes \Psi_{jn} \quad \text{e} \quad ||u_j||_\pi \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||\phi_{jn}||\, ||\Psi_{jn}|| \leq ||u_j||_\pi + \frac{\varepsilon'}{2^j}$$

Portanto, T se escreve como

$$T(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_{jn}(x)\, \Psi_{jn}(y) \right) G(A_j).$$

Além disso temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ||\phi_{jn}||\,||\Psi_{jn}||\, |G|(A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(||u_j||_\pi + \frac{\varepsilon'}{2^j}\right) |G|(A_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} ||u_j||_\pi\, |G|(A_j) + \varepsilon' \sum_{j=1}^{\infty} |G|(A_j)/2^j \leq$$

$$\leq |G|(U_{E^*} \times U_{E^*}) + \varepsilon' + \varepsilon' |G|(U_{E^*} \times U_{E^*}) =$$

$$= |G|(U_{E^*} \times U_{E^*})(1 + \varepsilon') + \varepsilon'$$

Observando que $||G(A_j)|| \leq |G|(A_j)$ para todo j segue que $T \in L_N(^mE,F)$.

Por outro lado, temos a desigualdade

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} ||\phi_{jn}|| \; ||\Psi_{jn}|| \; |G|(A_j) \leq (||T||_I + \varepsilon')(1+\varepsilon') + \varepsilon' =$$

$$= ||T||_I + \varepsilon'(||T||_I + \varepsilon' + 2)$$

$$\leq ||T||_I + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, temos que

$$||T||_N \leq ||T||_I \quad \text{e portanto} \quad ||T||_I = ||T||_N$$

3.2.4 - <u>Corolário</u> : Seja E um espaço de Banach tal que E^* tem a PRN. Então $P_{PI}(^mE,F) = P_N(^mE,F)$, com normas equivalentes, para todo inteiro m e qualquer espaço de Banach F.

§3 - Comentários e Observações

(1) Com auxílio de um resultado de Figiel-Johnson veremos que o recíproco da proposição 3.1.1 não é válido em geral, ou seja existe $T^* \in L_{PI}(F^*,E^*)$ tal que $T \notin L_{PI}(E,F)$, para convenientes espaços de Banach E e F.

<u>De Fato</u>: Pelo teorema 2.5.3, existe um espaço de Banach E com o dual E^* separável (portanto E^* tem a PRN) e um operador $T:E \longrightarrow E$ não nuclear tal que o adjunto T^* é nuclear.

Se o operador T fosse Pietsch-integral, T seria nuclear pelo teorema 3.1.1, uma contradição, temos então T* Pietsch-integral com T não Pietsch-integral.

Entretanto, qualquer uma das seguintes condições assegura o recíproco da proposição 3.1.1.

(a) Quando o espaço F é complementado em F** por projeção de norma 1.

De Fato: seja $T^* \in L_{PI}(F^*,E^*)$, pelo teorema 2.6.1 $T^* \in L_{GI}(F^*,E^*)$, portanto do teorema 2.6.2 segue-se que $T \in L_{GI}(E,F)$, novamente pelo teorema 2.6.1, $T \in L_{PI}(E,F)$.

(b) Quando o dual E* tem a PRN e a PA.

De Fato: seja $T^* \in L_{PI}(F^*,E^*)$, desde que E* tem a PRN pelo teorema 2.5.2 segue-se que T* é nuclear, como E* tem a PA, pelo teorema 2.5.4 segue que T é nuclear e portanto Pietsch-integral.

(c) Quando o espaço F for um dual.

De Fato: basta aplicar (a), uma vez que F = H* e que o dual H* é complementado em H*** por projeção de norma 1.

(2) Agora comparamos o teorema 2.6.4 com o teotema 3.1.1. Os dois teoremas se prestam para uma caracterização da PRN no dual de um espaço de Banach, sendo que no teorema 3.1.1 não há nenhuma hipótese adicional sobre o dual, enquanto no teorema 2.6.4 há a P.A.

Além disso o teorema 2.6.4 pode ser entendido como uma consequência do teorema 3.1.1.

De Fato: na hipótese (do recíproco) do teorema 2.6.4 temos que

$L_{GI}(E,F) = L_N(E,F)$ para todo F, em particular temos que $L_{PI}(E,F) = L_N(E,F)$, para todo F, logo pelo teorema 3.1.1 E* tem a P.R.N.

Agora seja E* com a P.A e a PRN, se $T \in L_{GI}(E,F)$ então $T^* \in L_{GI}(F^*,E^*)$, logo $T^* \in L_{PI}(F^*,E^*)$ pelo teorema 2.6.1, uma vez que E* é complementado em E***.

Agora, como E* tem a PRN e a P.A , segue da observação 1.b que $T \in L_{PI}(E,F)$ e além disso pelo teorema 3.1.1 segue que $T \in L_N(E,F)$, ou seja

$$L_{GI}(E,F) = L_{PI}(E,F) = L_N(E,F).$$

(3) Agora, com referência ao teorema 2.5.2, é natural, perguntar se a PRN sobre o espaço F não seria suficiente para obtermos a igualdade

$$L_{PI}(^mE,F) = L_N(^mE,F) \quad \text{para todo espaço de Banach}$$

E e todo inteiro m (ver teorema 3.2.1).

Com o exemplo seguinte veremos que a resposta é não.

Pela proposição 3.2.1 é suficiente dar o exemplo no caso das Simétricas.

Seja $E = C[0,1]$ o espaço de Banach das funções contínuas a valores complexos.

Sejam m a medida de Lebesgue sobre $[0,1]$, definimos uma aplicação bilinear simétrica sobre E×E por

$$T(f,g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dm(x) \quad \text{e é claro que } T \in L^s(^2E)$$

Seja δ a aplicação

$\delta : [0,1] \longrightarrow (E^*,\sigma(E^*,E))$ definida por $\delta_x(f)=f(x)$, $x \in [0,1]$.

Observamos que δ é uma aplicação contínua e portanto o conjunto $\delta([0,1])$ é um compacto de $(E^*,\sigma(E^*,E))$.

Além disso, se U_{E^*} é a bola unitária e fechada de E^*, uma vez que $|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$, temos então que $\delta([0,1]) \subset U_{E^*}$. Agora definimos uma medida de Borel regular μ sobre $(U_{E^*},\sigma(E^*,E))$ por:

$$\mu(B) = m(\{x : \delta_x \in B\}) \quad , \quad B\text{: Borel de } U_{E^*}$$

Temos então:

$$\int_{U_{E^*}} \langle f,\phi\rangle\langle g,\phi\rangle \, d\mu(\phi) = \int_{\delta([0,1])} \langle f,\phi\rangle\langle g,\phi\rangle \, d\mu(\phi) =$$

$$= \int_{[0,1]} \langle f,\delta_x\rangle\langle g,\delta_x\rangle \, d\mu(\delta_x) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dm(x) = T(f,g)$$

Portanto a aplicação T pertence a $L_{PI}(^2E)$. Vamos usar agora o fato de que uma aplicação $L \in L(^2E)$ é nuclear se e só se a aplicação $\tilde{L} \in L(E,E^*)$ definida por $\tilde{L}(x)(y) = L(x,y)$ é nuclear.

A aplicação $\tilde{T} \in L(E,E^*)$ não é nuclear:

<u>De Fato</u>: consideramos a sequência $(f_n)_n$ em E dada por $f_n(x) = e^{in\pi x}$, $n \in \mathbb{N}$.

Desde que $||f_n|| = 1$ para qualquer n, temos que

$f_n \in U_E$ para todo n, portanto $\frac{1}{2}(f_n - f_k) \in U_E$ para todo $n,k \in \mathbb{N}$.

Temos para $n,k \in \mathbb{N}$ fixados:

$$||\tilde{T}(f_n - f_k)|| = \sup_{g \in U_E} |\tilde{T}(f_n - f_k)(g)| = \sup_{g \in U_E} \left| \int_0^1 (f_n - f_k)(x) g(x) dm(x) \right|$$

Desde que $\frac{1}{2}\overline{(f_n - f_k)} \in U_E$, segue-se que

$$||\tilde{T}(f_n - f_k)|| \geq \frac{1}{2} \left| \int_0^1 (f_n - f_k)(x) \overline{(f_n - f_k)}(x) \, dm(x) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left| f_n(x) - f_k(x) \right|^2 dm(x)$$

Mas $\left| f_n(x) - f_k(x) \right|^2 = 2 - 2\cos(n-k)\pi x$

Portanto:

$$||\tilde{T}(f_n - f_k)|| \geq \frac{1}{2} \int_0^1 (2 - 2\cos(n-k)\pi x) \, dm(x) =$$

$$= 1 - \int_0^1 \cos(n-k)\pi x \, dm(x)$$

Se $n \neq k$ $\int_0^1 \cos(n-k)\pi x \, dm(x) = 0$, logo

$$||\tilde{T}(f_n - f_k)|| \geq 1 \quad \forall\, n,k \in \mathbb{N}, \text{ com } n \neq k.$$

Consequentemente isto mostra que $\tilde{T}(U_E)$ não é relativamente compacto em E^*, ou seja, $\tilde{T}$ não é uma aplicação compacta, logo $\tilde{T}$ não é nuclear e consequentemente T não é nuclear.

(4) Se E^* tem a PRN então valem as identidades

$$L_{GI}(^2E) = L_{PI}(^2E) = L_N(^2E).$$

<u>De Fato</u>: por definição temos que $L_{GI}(^2E) = L_{PI}(^2E)$ e pelo teorema 3.2.1 segue que $L_{PI}(^2E) = L_N(^2E)$.

(5) É fácil provar a seguinte fórmula:

$$L_N(^mE,F) = L_N(E,L_N(^{m-1}E,F)),$$ para quaisquer que sejam os espaços de Banach E e F.

Quando o dual E^* tem a P.R.N é claro que a fórmula acima é válida para as aplicações m-lineares P-integrais.

Não sabemos no entanto, se é válido em geral a fórmula

$$L_{PI}(^mE,F) = L_{PI}(E,L_{PI}(^{m-1}E,F)).$$

Aparentemente para o estabelecimento dessa fórmula seria necessário uma espécie de teorema de Fubini para medidas vetoriais.

Observo ainda que se a fórmula acima fosse verdadeira ela forneceria uma outra demonstração para o teorema 3.2.1.

(6) O teorema 2.2.2 (Schwartz) foi provado usando medidas de Borel regulares de massa menor ou igual a 1. Ao longo do texto não nos referimos mais à essa hipótese porque todas as medidas consideradas aqui são de variação limitadas.

§4 - Um Teorema de Fatoração para Polinômios Integrais

Um polinômio $P \in P(^mE,F)$ é chamado P-integral se existe uma medida $G : \beta(U_{E^*}) \longrightarrow F$, σ-aditivo de variação limitada tal que

$$P(x) = \int_{U_{E^*}} \langle x,\phi\rangle^m \, dG(\phi) \qquad \text{para todo } x \in E$$

O objetivo deste parágrafo é demonstrar o teorema:

3.4.1 - <u>Teorema</u> : Um polinômio $P \in P(^mE,F)$ é P-integral se e somente se P admite a fatoração

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "R"'] & F \\ C(\Omega) \arrow[r, "J^m"] & L_1(\Omega,\mu) \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

Onde Ω é um espaço topológico compacto separado, μ é uma medida de Borel regular sobre Ω, R e S são operadores lineares e contínuos e J^m é a aplicação dada por $J^m(f) = J(f^m)$ onde J é a inclusão natural de $C(\Omega)$ em $L_1(\Omega,\mu)$.

Necessitamos de dois lemas:

3.4.1 - <u>Lema</u>: Sejam C, D, E e F espaços de Banach, $T : C \longrightarrow D$ e $R : E \longrightarrow F$ operadores lineares e contínuos e $S \in P_{PI}(^2D,F)$. Então $R \circ S \circ T \in P_{PI}(^2C,F)$.

<u>Prova</u>: temos o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "RoSoT"] \arrow[d, "T"'] & F \\ D \arrow[r, "S"] & E \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$

Consideramos as aplicações $T^2 : C\times C \longrightarrow D\times D$ e $A \varepsilon L(^2D,F)$ tais que $T^2(c_1,c_2) = (T(c_1), T(c_2))$ e $\hat{A} = S$.

Temos então o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} C\times C \arrow[r, "RoAoT^2"] \arrow[d, "T^2"'] & F \\ D\times D \arrow[r, "A"] & E \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$

e é claro que a aplicação $RoAoT^2 \ \varepsilon \ L(^2C,F)$

$$\widehat{RoAoT^2}\,(c) = RoAoT^2(c,c) = RoA(T(c),T(c)) = RoS(T(c)) = RoSoT(c)$$

portanto $RoSoT \ \varepsilon \ P(^2C,F)$.

Como $S \ \varepsilon \ P_{PI}(^2D,E)$, S tem a forma:

$$S(x) = \int_{U_{D^*}} \langle x,x^*\rangle^2 \ dG(x^*)$$

Agora, se T^* é a adjunta de T, $T^* : D^* \longrightarrow C^*$, definimos um operador:

$U : C(U_{C^*}) \longrightarrow F$ por

$$(*) \qquad U(f) = ||T||^2 \int_{U_{D*}} f\left(\frac{T^*(x^*)}{||T||}\right) d(RoG)\ (x^*)$$

Desde que $|RoG|(M) \leq ||R||\,|G|(M)$, para M um subconjunto de Borel de U_{D*} , segue-se que

$$||U(f)|| \leq ||T||^2\ ||R|| \int_{U_{D*}} \left| f\left(\frac{T^*(x^*)}{||T||}\right)\right| d|G|(x^*) \text{ para todo } f \in C(U_{C*})$$

Como G é de variação limitada, U é um operador contínuo.

Sejam $f_1,\ldots,f_n \in C(U_{C*})$, então

$$\sum_{m=1}^{n} ||U(f_m)|| \leq ||T||^2||R||\left[\sum_{m=1}^{n} \int_{U_{D*}} \left| f_m\left(\frac{T^*(x^*)}{||T||}\right)\right| d|G|(x^*)\right] =$$

$$= ||T||^2||R|| \left[\int_{U_{E*}} \left(\sum_{m=1}^{n} |f_m|\right) d|G|\right] \leq ||T||^2||R|| \left|\left|\sum_{m=1}^{n} |f_m|\right|\right| |G|(U_{D*})$$

consequentemente, como U_{C*} é compacto (topologia fraca*) existe $C^* \in U_{C*}$ tal que

$$\left|\left|\sum_{m=1}^{n} |f_m|\right|\right| = \sum_{m=1}^{n} |f_m(c^*)|$$

Segue então que

$$\sum_{m=1}^{n} ||U(f_m)|| \leq ||T||^2||R||\,|G|(U_{D*}) \sum_{m=1}^{n} |f_m(c^*)| \leq$$

$$\leq ||T||^2||R||\,|G|(U_{D*}) \sup\left\{\sum_{m=1}^{n} |\mu(f_m)| : \mu \in C(U_{C*})^*, ||\mu|| \leq 1\right\}$$

Isto mostra que o operador U é absolutamente somável. Pelo teorema 2.4.1 existe uma medida H sobre a álgebra de Borel de U_{C^*}, de variação limitada a valores em F tal que

$$(**) \qquad U(f) = \int_{U_{C^*}} f \, d\, H \qquad \text{para todo } f \in C(U_{C^*})$$

Agora consideramos a aplicação

$$c \in C \xrightarrow{\delta^2} C(U_{C^*}) \quad , \quad \delta_c^2(c^*) = \langle c, c^* \rangle^2$$

Portanto, usando (*)

$$U(\delta_c^2) = ||T||^2 \int_{U_{D^*}} \langle c, \frac{T^*(x^*)}{||T||} \rangle^2 \, d(RoG)(x^*) =$$

$$= ||T||^2 \int_{U_{D^*}} \frac{1}{||T||^2} \langle T(c), x^* \rangle^2 \, d(R_o G)(x^*)$$

$$= \int_{U_{D^*}} \langle T(c), x^* \rangle^2 \, d(RoG)(x^*) = R\left(\int_{U_{D^*}} \langle T(c), x^* \rangle^2 dG(x^*)\right) =$$

$$= RoSoT(c)$$

Por outro lado, usando (**), temos

$$U(\delta_c^2) = \int_{U_{C^*}} \delta_c^2(c^*) \, dH(c^*) = \int_{U_{C^*}} \langle c, c^* \rangle^2 \, dH(c^*) \quad , \qquad \text{portanto}$$

$$RoSoT \in P_{PI}(^2C,F)$$

3.4.2 - <u>Lema</u> : Se $J^2 : C(\Omega) \longrightarrow L_1(\Omega,\mu)$ é a aplicação definida por $J^2(f) = f^2$, $f^2(x) = [f(x)]^2$, então

$$J^2 \in P_{PI}(^2C(\Omega),\ L_1(\Omega,\mu))$$

<u>Prova</u>: Pelo corolário 2.4.1 a aplicação J é absolutamente somável, portanto pelo teorema 2.4.1 a sua medida representante G é de variação limitada, logo G é fortemente aditiva e pelo teorema 2.3.2 segue-se que G toma todos seus valores em $L_1(\Omega,\mu)$.

Temos então:

$$J^2(f) = J(f^2) = \int_\Omega [f(x)]^2\, dG(x)$$

Agora consideramos a aplicação contínua

$$x \in \Omega \longrightarrow \delta_x \in U_{C(\Omega)^*} \quad , \ \delta_x(f) = f(x)$$

Definimos uma medida H sobre a álgebra de Borel de $U_{C(\Omega)^*}$ a valores em $L_1(\Omega,\mu)$ dada por:

$$H(B) = G(\{x \in \Omega : \delta_x \in B\}).$$

Portanto:

$$\int_{U_{C(\Omega)^*}} \langle f,\lambda\rangle^2\, dH(\lambda) = \int_{\delta(\Omega)} \langle f,\lambda\rangle^2\, dH(\lambda) = \int_\Omega \langle f,\delta_x\rangle^2\, dH(\delta_x) =$$

$$= \int_\Omega [f(x)]^2\, dG(x) = J^2(f) \quad \text{consequentemente}$$

$$J^2 \in P_{PI}(^2C(\Omega),\ L_1(\Omega,\mu))$$

<u>Prova do teorema</u>: faremos a demonstração no caso m=2

Seja $P \in P_{PI}(^2E,F)$, $P(x) = \int_{U_{E^*}} \langle x,x^*\rangle^2 \, dG(x^*)$

Como a medida G é de variação limitada o operador $h : C(U_{E^*}) \longrightarrow F$ definido por

$h(g) = \int_{U_{E^*}} g(x^*)\, dG(x^*)$ é absolutamente somável (Teor. 2.4.1).

Pelo corolário 2.4.2 podemos escrever:

$$\begin{tikzcd} C(U_{E^*}) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "J"'] & & F \\ & L_1(U_{E^*},\mu) \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

Onde S é um operador linear contínuo e μ é uma medida de Borel regular não negativa sobre U_{E^*}.

Agora, seja V o operador

$V : C(U_{E^*}) \longrightarrow F$ definido por $V(f) = h(f^2)$, logo V tem representação:

$V(g) = \int_{U_{E^*}} (g(x^*))^2 \, dG(x^*)$ e observo que $V = S \circ J^2$.

Seja $R : E \longrightarrow C(U_{E^*})$ definido por $R(x)(x^*) = \langle x,x^*\rangle$

Portanto:

$$S \circ J^2 \circ R(x) = S \circ J^2(R(x)) = V(R(x)) = \int_{U_{E^*}} \langle x, x^* \rangle^2 \, dG(x) = P(x)$$

e isto significa que P admite a fatoração.

Reciprocamente: suponhamos que P admite a fatoração, logo pelo lema 3.4.2, $J^2 \in P_{PI}(^2C(\Omega), L_1(\Omega,\mu))$ e consequentemente pelo lema 3.4.1 segue que $P \in P_{PI}(^2E,F)$.

CAPÍTULO 4

REFLEXIVIDADE E BASE NO ESPAÇO $P(^mE)$

E e F indicam espaços de Banach.

§ 1 - Preliminares

4.1.1 - Definição: Indicamos por h^mE o subespaço de $\underbrace{E\otimes\ldots\otimes E}_{m \text{ vezes}}$ gerado pelos elementos da forma:

$$x^{(m)} = x\otimes\ldots\otimes x \quad , \; x\in E$$

$h^m_\pi E$ é o espaço h^mE com a norma induzida de $E\otimes_\pi\ldots\otimes_\pi E$ e $\hat{h}^m_\pi E$ é o completamento de $h^m_\pi E$ em $E\hat{\otimes}_\pi\ldots\hat{\otimes}_\pi$

Se $x_1,\ldots,x_m\in E$, $x_1\odot\ldots\odot x_m$ é o elemento de $E\otimes\ldots\otimes E$ dado por

$$x_1\odot\ldots\odot x_m = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} x_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma(m)}$$

(produto tensorial simétrico).

4.1.2 - Definição: Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty$ e $(y_j)_{j=1}^\infty$ duas sequências de

E e F respectivamente. Os produtos $(x_j \otimes y_k)$ de $E \otimes F$ podem ser ordenados segundo o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
x_1\otimes y_1 \arrow[r] & x_1\otimes y_2 \arrow[d] & x_1\otimes y_3 \arrow[d] & \cdots \\
x_2\otimes y_1 \arrow[u] & x_2\otimes y_2 \arrow[l] & x_2\otimes y_3 \arrow[d] & \cdots \\
x_3\otimes y_1 \arrow[u] & x_3\otimes y_2 \arrow[l] & x_3\otimes y_3 \arrow[l] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Esta ordem, chamamos de <u>ordem quadrada</u>; $\square$.

Se J é a ordem do par (j,k), na ordenação quadrada, então indicamos $(x_j \otimes y_k)_{J \varepsilon \square}$ para significar que a sequência $(x_j \otimes x_k)_J$ está ordenada na ordem quadrada.

A ordem $\square$ para uma sequência $(x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_{m+1}})$ em $E_1 \otimes \ldots \otimes E_{m+1}$ é aquela definida para o produto

$$E \otimes E_{m+1} \quad \text{onde } E = E_1 \otimes \ldots \otimes E_m .$$

Seja agora E com base de Schauder $(e_j)_j$. Para cada m inteiro seja $\square_m$ o subconjunto de $\mathbb{N}^m$ consistindo de todos os multi-índices $(j_1, \ldots, j_m)$ para os quais $j_1 \geq j_2 \geq \ldots \geq j_m$, sendo $\square_m$ ordenado com a ordem induzida $\square$ de $\mathbb{N}^m$.

Para cada $J=(j_1, \ldots, j_m) \varepsilon \square_m$, o polinômio m-homogêneo Z^J é definido sobre E por

$$Z^J(x) = e^*_{j_1}(x) \ldots e^*_{j_m}(x) .$$

Z^J são chamados os <u>monômios de grau m</u> .Observamos que o conjunto $\{(e_{j_1} \odot \ldots \odot e_{j_m}), Z^J\}$ forma um sistema biortogonal para o espaço de Banach $\hat{h}^m_\pi E$ quando $J \varepsilon \square_m$.

4.1.1 - Teorema ([17]). Seja E um espaço de Banach com base de Schauder $(e_j)_j$. Então para todo m, $(e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_m})_J \in \square_m$ é uma base de Schauder para $\hat{h}^m_\pi E$.

4.1.2 - Teorema ([17]). Seja E um espaço de Banach. Então os espaços $P(^mE)$ e $[\hat{h}^m_\pi E]^*$ são isométricos.

4.1.3 - Teorema ([13]). Seja E um espaço de Banach com base de Schauder (e_j). Então E é reflexivo se e somente se (e_j) é contratil e limitadamente completa.

4.1.4 - Teorema ([13]). Seja E um espaço de Banach com base de Schauder (e_j). Os funcionais biortogonais (e_j^*) formam uma base para E* se e somente se a base (e_j) é contratil.

Apresentamos agora, dois resultados que, embora já conhecidos aqui demonstraremos, uma vez que são resultados específicos sobre polinômios nucleares e integrais.

- Notações

$P_f(^mE)$ denota o espaço dos polinômios de tipo finito, ou seja, os polinômios m-homogêneos do tipo:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{r} \phi_j^m(x) \quad \text{onde} \quad \phi_j \in E^*.$$

$P_c(^mE) = \overline{P_f(^mE)}$ sendo o fêcho tomado na topologia da norma de $P(^mE)$ indicada $\| \ \|$.

4.1.5 - Teorema (S.Dineen [4b]). Seja E um espaço de Banach re

flexivo, então os espaços $(P_{PI}(^mE^*), \|\ \|_I)$ e $P_c^*(^mE)$ são isométricos para todo inteiro m.

- Prova: Observamos primeiro que cada $P \varepsilon P_f(^mE)$ é $\sigma(E,E^*)$-contínuo, uma vez que cada $\phi \varepsilon E^*$ é $\sigma(E,E^*)$-contínua.

Consequentemente, se $C(U_E)$ é o espaço das funções contínuas (com a norma do supremo) sobre o compacto $(U_E, \sigma(E,E^*))$, temos a inclusão

$P_c(^mE) \longrightarrow C(U_E)$ pela aplicação restrição.

Seja agora $T \varepsilon P_c^*(^mE)$, portanto pelo teorema de Hahn-Banach existe uma extensão $\tilde{T}$ de T à $C(U_E)$ com $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Em consequência do Teorema de Representação de Riesz, $\tilde{T}$ se escreve como:

$$\tilde{T}(f) = \int_{U_E} f(x)\, d\mu(x)$$ onde μ é uma medida de Borel regular sobre U_E e $|\mu|(U_E) = \|T\|$.

Dado $P \varepsilon P_c(^mE)$, $\tilde{T}(p) = T(P) = \int_{U_E} P(x)\, d\mu(x)$.

Agora, se $\phi \varepsilon E^*$ definimos Q_T por

$Q_T(\phi) = T(\phi^m) = \int_{U_E} \langle x, \phi \rangle^m\, d\mu(x)$, é claro que

$Q_T \varepsilon P_{PI}(^mE^*)$.

Além disso temos:

$\|Q_T\|_I \leq |\mu|(U_E) = \|T\|$.

Reciprocamente:

Seja $Q \varepsilon P_{PI}(^m E^*)$, $Q(\phi) = \int_{U_E} \langle x, \phi \rangle^m \, d\mu(x)$, seja então

$B \varepsilon L^s(^m E^*)$ tal que $\hat{B} = Q$.

Pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma única forma linear contínua $S: E^* \otimes_\pi \ldots \otimes_\pi E^* \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $B(\phi_1, \ldots, \phi_m) = S(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_m)$.

Agora, desde que $E^* \otimes_\pi \ldots \otimes_\pi E^* = L_f(^m E)$, definimos uma aplicação linear T sobre $P_f(^m E)$ por: dado $P \varepsilon P_f(^m E)$ seja $A \varepsilon L_f^s(^m E)$ tal que $\hat{A} = P$.

$$P = \sum_{j=1}^{r} \phi_j^m$$

$$T(P) = S(A) = S\left(\sum_{j=1}^{r} \phi_j \otimes \ldots \otimes \phi_j\right) = \sum_{j=1}^{r} S(\phi_j \otimes \ldots \otimes \phi_j) = \sum_{j=1}^{r} B(\phi_j, \ldots, \phi_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} Q(\phi_j) = \sum_{j=1}^{r} \int_{U_E} \langle x, \phi_j \rangle^m d\mu(x) = \int_{U_E} \left(\sum_{j=1}^{r} \langle x, \phi_j \rangle^m \right) d\mu(x)$$

ou seja, $T(P) = \int_{U_E} P(x) \, d\mu(x)$ está bem definido e é linear, além disso temos

$$|T(P)| \leq ||P|| \; |\mu|(U_E)$$

portanto $T \varepsilon P_f^*(^m E)$ e $||T|| \leq ||Q||_I$

T admite uma única extensão T_Q à $P_c(^m E)$, com $||T_Q|| \leq ||Q||_I$, o que conclui a demonstração.

<u>Observação</u>: seja E um espaço de Banach e consideramos a aplicação

linear e contínua (1 a 1).

$$\tilde{\alpha}_2 : E^* \otimes_\pi E^* \longrightarrow L(^2E) \qquad \text{(ver Cap. I § 1)}$$

e lembramos que $\tilde{\alpha}_2(E^* \otimes_\pi E^*) = L_f(^2E)$.

Seja Λ a aplicação que leva $A \varepsilon L(^2E)$ em $\hat{A} \varepsilon P(^2E)$, como $\tilde{\alpha}_2(h^2_\pi E^*) = L^s_f(^2E)$, vemos que a aplicação

$$\alpha = \Lambda o\ \tilde{\alpha}_2 : h^2_\pi E^* \longrightarrow P_f(^2E) \quad \text{é dada por}$$

$$\alpha(\phi^{(2)}) = \phi^2, \text{ para todo } \phi \varepsilon E^* \quad \text{(ver def. 4.1.1).}$$

Por uma proposição de Ryan ([17] prop. 1.5) a aplicação α é um isomorfismo.

Agora se $|| \ ||$ é a norma em $P_f(^2E)$ dada pelo supremo na bola unitária de E então é fácil ver que se $u \varepsilon h^2_\pi E^*$ então $||\alpha(u)|| \leq ||u||_\pi$. Portanto podemos considerar α como uma aplicação linear contínua de $h^2_\pi E^*$ em $(P(^2E).|| \ ||)$.

Portanto a aplicação α se estende de maneira única a uma aplicação linear contínua, denotada por $\dot{\alpha}$, de $\hat{h}^2_\pi E^*$ em $(P(^2E, || \ ||)$.

Por uma consequência do teorema 1.1.1 (Grothendieck) é fácil ver que os elementos $u \varepsilon h^2_\pi E^*$ são da forma $u = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(2)}$ e além disso

$$(*) \quad ||u||_\pi = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} ||\phi_j||^2 : u = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(2)} \right\}$$

Em consequência obtemos que a imagem de $\hat{h}^2_\pi E^*$ pela aplicação $\dot{\alpha}$ é o subespaço $P_N(^2E)$ de $P(^2E)$. Supondo agora que E^* tem a (P.A), pela proposição 1.1.1 (Grothendieck), a extensão da aplicação α_2 à $E^* \hat{\otimes}_\pi E^*$ é injetiva. Denotando por $\dot{\tilde{\alpha}}_2$ esta exten-

são, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} E^*\otimes_\pi E^* \arrow[r, "\dot{\tilde{\alpha}}_2"] & L(^2E) \\ E^*\otimes_\pi E^* \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{\alpha}_2"] & L_f(^2E) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Portanto, a restrição da aplicação Ao $\dot{\alpha}_2$ ao subespaço $h^2_\pi E^*$ é exatamente a aplicação $\dot{\alpha}$, logo $\dot{\alpha}$ é biunívoca.

Agora se $u \varepsilon \hat{h}^2_\pi E^*$, $u = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(2)}$ então

$\dot{\alpha}(u) = P_u = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^2 \varepsilon P_N(^2E)$ e usando $(*)$ obtemos

$$||P_u||_N = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} ||\phi_j||^2 : P_u = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^2 \right\} = ||u||_\pi$$

logo $\dot{\alpha}$ é uma isometria entre $\hat{h}^2_\pi E^*$ e $(P_N(^2E), || \ ||_N)$. Em particular α é uma isometria entre $h^2_\pi E^*$ e $(P_f(^2E), || \ ||_N)$.

4.1.6 - <u>Teorema</u> ([8]). Seja E um espaço de Banach tal que E* tem a P.A. Então os espaços $(P_N(^mE), || \ ||_N)^*$ e $P(^mE^*)$ são isométricos para todo inteiro m.

<u>Prova</u>: Seja $T \varepsilon (P_N(^mE), || \ ||_N)^*$, definimos uma aplicação Q_T de E* em $\mathbb{C}$ por $Q_T(\phi) = T(\phi^m)$, $\phi \varepsilon E^*$. Temos que $|Q_T(\phi)| \leq ||T|| \ ||\phi^m||$, logo $Q_T \varepsilon P(^mE^*)$.

Reciprocamente: seja $Q \varepsilon P(^mE^*)$, se $P \varepsilon P_f(^mE)$ com $P(x) = \sum_{j=1}^{r} \phi_j^m(x)$, definimos uma forma linear sobre $P_f(^mE)$ por

$$T(P) = \sum_{j=1}^{r} T(\phi_j^m) = \sum_{j=1}^{r} Q(\phi_j^m) .$$

Notamos que T está bem definido (ver demonstração do teorema anterior) e vale:

$$|T(P)| \leq ||Q|| \sum_{j=1}^{r} ||\phi_j^m|| \quad \text{qualquer que seja a representação} \quad \sum_{j=1}^{r} \phi_j^m \text{ de } P.$$

Pela observação que antecede o teorema, podemos escrever que $T \varepsilon (P_f(^mE), \ || \ ||_N)^*$ com

$$|T(P)| \leq ||Q|| \ ||P||_N, \text{ ou seja } ||T|| \leq ||Q||.$$

Pela densidade de $P_f(^mE)$ em $(P_N(^mE), || \ ||_N)$ vemos que T admite uma única extensão T_Q à $(P_N(^mE), || \ ||_N)$ com $||T_Q|| < ||Q||$.

§ 2 - Condição necessária e suficiente para a reflexividade de $P(^mE)$.

4.2.1 - <u>Teorema</u>: Seja E um espaço de Banach reflexivo com a P.A. Então o espaço $P(^mE)$ é reflexivo se e somente temos $P(^mE) = P_c(^mE)$.

<u>Prova</u>: Primeiro observo que E tem a PRN, uma vez que E é reflexivo. Pelo corolário 3.2.4 temos que

$$(P_{PI}(^mE^*), || \ ||_I) = (P_N(^mE^*), || \ ||_N) \text{ topologicamente.}$$

Combinando este resultado com os teoremas 4.1.5 e 4.1.6 obtemos as identidades:

$$P(^mE) = \left[P_N(^mE^*), || \ ||_N\right]^* = \left[P_{PI}(^mE^*), || \ ||_I\right]^* = \left[P_c(^mE), || \ ||\right]^{**}$$

Para concluir a demonstração basta observar que $P_c(^mE)$ é um subespaço fechado de $P(^mE)$.

No caso em que o espaço E tem base de Schauder, temos uma reformulação do teorema anterior.

4.2.2 - <u>Teorema</u> 2: Seja E um espaço de Banach reflexivo com base de Schauder. Então $P(^mE)$ é reflexivo se e somente se os monômios formam uma base de Schauder para $P(^mE)$.

<u>Prova</u>: Seja (e_j) base de Schauder para E e suponhamos $P(^mE)$ reflexivo. Pelo teorema 4.1.1 a seqüência $(e_{j_1} \otimes .. \otimes e_{j_m})_{J\varepsilon \square}$ é base de Schauder para $\hat{h}^m_\pi E$.

Agora, desde que $[\hat{h}^m_\pi E]^* = P(^mE)$ (teor. 4.1.2), e como $P(^mE)$ é reflexivo, segue que $\hat{h}^m_\pi E$ é reflexivo, logo, pelo teorema 4.1.4 a base $(e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_m})_{J\varepsilon \square}$ é contratil e portanto pelo teorema 4.1.4 os monômios (os funcionais biortogonais) Z^J formam uma base de Schauder para

$$[\hat{h}^m_\pi E]^* = P(^mE).$$

<u>Reciprocamente</u>: Suponhamos que os monômios Z^J, $Z^J(x) = e^*_{j_1}(x) \ldots e^*_{j_m}(x)$ formam uma base de Schauder para $P(^mE)$.

Agora se $P \varepsilon P(^mE)$ então $P = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j Z^J_j$, logo dado $\varepsilon > 0$ existe j_o inteiro tal que

$$||P - \sum_{j=1}^{j_o} \lambda_j Z^J_j|| \leq \varepsilon .$$

Como cada Z^J é um polinômio do tipo finito segue-se pela definição de $P_c(^mE)$, que $P \varepsilon P_c(^mE)$, ou seja $P(^mE) = P_c(^mE)$. Para concluirmos basta aplicar o teorema anterior.

§ 3 - Reflexividade de $P({}^{m}T)$, para todo inteiro m, quando T é o espaço de Tsirel'son.

Inicialmente introduzimos alguma notação e alguns resultados conhecidos:

Se (e_j) é uma base de Schauder para o espaço de Banach E, para $n < k$ inteiros, denotamos

$$q_n(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j e_j, \quad q^k(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j \quad \text{e} \quad q_n^k(x) = \sum_{j=n+1}^{k} \alpha_j e_j$$

onde $x \in E$ e $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$.

Observamos que os operadores $q^k : E \longrightarrow E$ são uniformemente limitados e a constante $c = \sup ||q^k||$ é chamada a constante da base (e_j) e notamos que $|| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j || \leq c||x||$ para todo k.

Dizemos que uma seqüência (x_i) em E é um <u>sistema de bloco normalizado</u> com respeito à base (e_j), se para cada i, temos

$$x_i = \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \lambda_j e_j \quad \text{com} \quad < n_i < n_{i+1} < \ldots \quad \text{e} \quad ||x_i|| = 1.$$

Nestas condições dizemos que os x_i tem suporte disjuntos.

- <u>O Espaço de Tsirel'son</u>

B.S. Tsirel'son construiu um espaço de Banach, que denotaremos por T, de dimensão infinita, reflexivo, com uma base de Schauder (e_j), tal que, T não contém nenhum dos espaços ℓ_p

$1 \leq p < \infty$ ou c_o como subespaços fechados. Na demonstração dêsse resultado, Tsirel'son verifica que o espaço T tem a seguinte propriedade:

Se (x_i) é um sistema de bloco normalizado em relação à base (e_j) então vale:

- Propriedade (T):

$$||q_N(\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_N x_N)|| \leq 2 \max_{1 \leq i \leq N} \{|\beta_i|\}$$

quaisquer que sejam os escalares β_i e para todo inteiro N. (q_N é a projeção definida acima).

4.3.1 - Teorema ([17]) . Seja E um espaço de Banach reflexivo com a P.A. Então o espaço $P(^mE)$ é reflexivo se e somente se todo polinômio $P \varepsilon P(^mE)$ atinge sua norma em um ponto da bola unitária e fechada de E.

O próximo Lema embora conhecido, daremos a sua demonstração uma vez que descreve uma propriedade especifica de polinômios.

4.3.1 Lema ([4a]) . Seja E um espaço de Banach, $P \varepsilon P(^mE)$ e k um inteiro positivo. Seja $(x_j)_{j=1}^{2^k}$ uma seqüência em E tal que $|P(x_j)| > \delta > 0$ para $j=1,..,2^k$. Então existem escalares λj , $|\lambda_j| \leq 1$ $j = 1 \ldots 2^k$ tais que

$$|P(\sum_{j=1}^{2^k} \lambda_j x_j)| > \delta(\sqrt{2})^k$$

Prova: Inicialmente observamos o seguinte fato:

se $a_o + a_1\lambda + \ldots + a_m\lambda^m$ é um polinômio na variável complexa λ, onde $a_o, a_1, \ldots, a_m$ são constantes, vale a relação

$$(*) \qquad \sup_{|\lambda| \leq 1} \left| \sum_{j=o}^{m} a_j \lambda^j \right|^2 \geq \sum_{j=1}^{m} |a_j|^2$$

<u>De fato</u>:

desde que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \cdot e^{-in\theta} \, d\theta = \begin{cases} 1 \text{ se } k = n \\ 0 \text{ se } k \neq n \end{cases}$$

podemos escrever:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left| a_o + a_1 e^{i\theta} + \ldots + a_m e^{im\theta} \right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_o + a_1 e^{i\theta} + \ldots + a_m e^{im\theta}) \overline{(a_o + a_1 e^{i\theta} + \ldots + a_m e^{im\theta})} \, d\theta$$

$= \sum_{j=1} |a_j|^2$, logo segue a relação anunciada.

A demonstração se faz por indução sobre k.

Seja então $P \varepsilon P(^mE)$ como na hipótese, e $A \varepsilon L^s(^mE)$ tal que $\hat{A} = P$.

Se x_1 e x_2 os dois primeiros elementos da sequência $(x_j)_{j=1}^{2^k}$ e λ um número complexo, temos então

$$P(x_2 + \lambda x_1) = P(x_2) + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} A \, x_2^j \, x_1^{m-j} \, \lambda^{m-j} + \lambda^m P(x_1).$$

Portanto $P(x_2 + \lambda x_1)$ é um polinômio na variável complexa λ e pela observação inicial $(*)$ temos

$$\sup_{|\lambda| \leq 1} \left| P(x_2 + \lambda x_1) \right|^2 \geq \left| P(x_2 \right|^2 + \left| P(x_1) \right|^2 > 2 \, \delta^2$$

Em conseqüência existe λ_1, $|\lambda_1| \leq 1$ tal que

$|P(x_2+\lambda_1 x_1)|^2 > 2\,\delta^2$ ou seja $|P(x_2+\lambda_1 x_1)| > \delta\sqrt{2}$

O mesmo argumento aplicado aos pontos x_3 e x_4 fornece λ_3, $|\lambda_3| \leq 1$ tal que $|P(x_4+\lambda_3 x_3\ | > \delta\sqrt{2}$.

Agora, aplicando o argumento aos pontos

$x_2+\lambda_1 x_1$ e $x_4+\lambda_3 x_3$, obtemos λ', $|\lambda'| \leq 1$ tal que

$$|P(x_4+\lambda_3 x_3+\lambda'(x_2+\lambda_1 x_1))|^2 > (\delta\sqrt{2})^2+(\delta\sqrt{2})^2 = 2\delta^2(\sqrt{2})^2$$

ou seja

$$|P(x_4+\lambda'_3 x_3+\lambda'_2 x_2+\lambda'_1 x_1)| > \delta(\sqrt{2})^2 \quad \text{com} \quad |\lambda'_j| \leq 1.$$

Suponhamos a relação válida para k-1, ou seja, existem λ_j, $j=1\ldots 2^k$, $|\lambda_j| \leq 1$ tais que

$$\left|P\left(\sum_{j=1}^{2^{k-1}} \lambda_j x_j\right)\right| > \delta(\sqrt{2})^{k-1} \quad \text{e} \quad \left|P\left(\sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} \lambda_j x_j\right)\right| > \delta\sqrt{2})^{k-1}$$

consequentemente, existe λ', $|\lambda'| \leq 1$ tal que

$$\left|P\left(\sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} \lambda_j x_j+\lambda'\left(\sum_{j=1}^{2^{k-1}} \lambda_j x_j\right)\right)\right|^2 > \left(\delta(\sqrt{2})^{k-1}\right)^2+\left(\delta(\sqrt{2})^{k-1}\right)^2 = 2(\delta(\sqrt{2})^{k-1})^2$$

Portanto

$$\left|P\left(\sum_{j=1}^{2^k} \lambda'_j x_j\right)\right| > \sqrt{2}(\delta(\sqrt{2})^{k-1})=\delta(\sqrt{2})^k, \quad \text{com } |\lambda'_j| \leq 1.$$

Para estabelecer o resultado, precisamos de dois lemas preliminares:

4.3.2 - Lema: Seja T o espaço de Tsirel'son com base (e_j) e constante básica c. Seja (x_n) é uma seqüência em T tal que x_n converge fracamente para 0. Então para qualquer polinômio $P \in P(^m T)$, temos $P(x_n)$ convergindo para 0.

Prova: A seqüência (x_n) é limitada, logo existe $\theta > 0$ tal que $||x_n|| \leq \theta$ para todo n.

Suponhamos por absurdo que a seqüência $P(x_n)$ não converge a 0, em conseqüência existe $\delta > 0$ e uma subseqüência de (x_n), denotada ainda por (x_n), tal que $|P(x_n)| > \delta$ para todo n. Agora, desde que $P(x_1) > \delta$ e que as projeções $q^n(x_1)$ converge para x_1, na norma de T, quando $n \to \infty$, podemos escolher n_1 tal que $P(q^{n_1}(x_1)) > \delta$.

Por outro lado, como a projeção q^{n_1} é fracamente contínua, temos que $q^{n_1}(x_j)$ converge fracamente para 0, quando $j \to \infty$, no subespaço de dimensão finita $q^{n_1}(E)$ de E. Consequentemente $q^{n_1}(x_j)$ converge para 0 na norma de E. Portanto, existe m_1 tal que $||q^{n_1}(x_j)|| \leq 1/2$ para todo $j \geq m_1$.

Desde que $q^n(x_{m_1})$ converge para x_{m_1} na norma de T quando $n \to \infty$, podemos escolher n_2 $(n_2 > n_1)$, tal que $|P(q^{n_2}(x_{m_1}))| > \delta$.

Com argumento anterior, podemos escolher m_2 tal que $||q^{n_2}(x_j)|| \leq \frac{1}{2^2}$ para todo $j \geq m_2$.

Por indução, podemos escolher inteiros n_j e m_j tais que $|P(q^{n_j}(x_{m_{j-1}}))| > \delta$ e $||q^{n_j}(x_k)|| \leq 1/2^j$ para todo $k \geq m_j$.

Agora, pelo lema anterior, se ℓ é um inteiro positivo qualquer, com respeito a seqüência $(q^{n_j}(x_{m_{j-1}}))_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}$ existe

uma sequência $(\lambda_j)_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}$, $|\lambda_j| \leq 1$ $j = 1 \ldots 2^\ell$, tal que

$$(*) \qquad |P(\sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j \, q^{n_j}(x_{m_{j-1}}))| > \delta(\sqrt{2})^\ell$$

Agora, desde que $q^{n_j}(x) = q^{n_{j-1}}(x) + q_{n_{j-1}}^{n_j}(x)$ para todo $x \varepsilon T$, podemos escrever:

$$\left\| \sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j \, q^{n_j}(x_{m_{j-1}}) \right\| \leq \left\| \sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{n_{j-1}}(x_{m_{j-1}}) \right\| + \left\| \sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q_{n_{j-1}}^{n_j}(x_{m_{j-1}}) \right\|$$

Afirmamos que

$$\left\| \sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{n_j}(x_{m_{j-1}}) \right\| \leq 1 + 4.c.\theta \, .$$

De fato:

$$\left\| \sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{n_{j-1}}(x_{m_{j-1}}) \right\| \leq \sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} |\lambda_j| \; 1/2^{j-1} \leq 1 \, .$$

Agora, com respeito ao vetor $\sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q_{n_{j-1}}^{n_j}(x_{m_{j-1}})$, considero seqüências

$(\beta_j)_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}$ e $(Y_j)_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}$ definidas por:

$$\beta_j = \lambda_j \left\| q_{n_{j-1}}^{n_j}(x_{m_{j-1}}) \right\| \quad \text{e}$$

$$Y_j = \begin{cases} e_{n_j} \quad \text{(vetor da base)} & \text{se } q^{n_j}_{n_{j-1}}(x_{m_{j-1}}) = 0 \\ \dfrac{q^{n_j}_{n_{j-1}}(x_{m_{j-1}})}{\left\| q^{n_j}_{n_{j-1}}(x_{m_{j-1}}) \right\|} & \text{se } q^{n_j}_{n_{j-1}}(x_{m_{j-1}}) \neq 0 \end{cases}$$

$$j = 2^{\ell}+1, \ldots, 2^{\ell+1}$$

É claro que os vetores Y_j tem suportes mutuamente disjuntos e $||Y_j|| = 1$ para $j=2^{\ell}+1,\ldots,2^{\ell+1}$.

Portanto a seqüência $(Y_j)_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}}$ pode ser completada a um sistema de bloco normalizado em relação à base (e_j). Observamos ainda que:

(a) $\displaystyle\sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{n_j}_{n_{j-1}}(x_{m_{j-1}}) = \sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \beta_j Y_j$.

(b) a projeção $q_{2^{\ell}}$ não altera o vetor $\displaystyle\sum_{j=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \beta_j Y_j$.

De fato:

(a) é claro;

(b) basta verificar que a projeção $q_{2^{\ell}}$ não altera o vetor $Y_{2^{\ell}+1}$:

$$Y_{2^\ell+1} = e_{n_{2^\ell+1}} \quad \text{ou} \quad Y_{2^\ell+1} = \frac{q_{n_{2^\ell}}^{n_{2^\ell+1}}(x_{m_{2^\ell}})}{\left\| q_{n_{2^\ell}}^{n_{2^\ell+1}}(x_{m_{2^\ell}}) \right\|}$$

Desde que $n_{2^\ell} \geq 2^\ell$ segue-se que

$q_{2^\ell}(Y_{2^\ell+1}) = Y_{2^\ell+1}$, consequentemente

$$q_{2^\ell}\left(\sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \beta_j Y_j\right) = \sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \beta_j Y_j .$$

Pela propriedade (T), temos

$$\left\| \sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \beta_j Y_j \right\| \leq 2 \max_{2^\ell+1 \leq j \leq 2^{\ell+1}} \{|\beta_j|\} \leq 2.2.c.\theta = 4\ c.\theta.$$

Portanto qualquer que seja o ℓ escolhido, temos

$$\left\| \sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j q^{n_j}(x_{m_{j-1}}) \right\| \leq 1 + 4\ c.\theta \ .$$

Como o polinômio P é m-homogêneo contínuo, segue que

$$|P(\sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \lambda_j\ q^{n_j}(x_{m_{j-1}}))| \leq ||P||\ (1+4\ c.\theta\ )^m, \text{ qualquer}$$

que seja o ℓ escolhido, logo, uma contradição com (*).

4.3.3 - Lema: Seja T o espaço de Tsirel'son. Então todo polinômio $P \varepsilon P(^m T)$, atinge sua norma num ponto da bola unitária e fechada U_T de T.

Prova: Seja $P \varepsilon P(^m T)$ e $||P|| = \sup\left\{ |P(x)| : ||x|| \leq 1 \right\}$, logo existe uma seqüência (y_j) na bola U_T, tal que $|P(y_j)|$ converge para $||P||$ quando $j \longrightarrow \infty$.

Como T é reflexivo, existe uma subseqüência de (y_j), denotada ainda por (y_j) tal que y_j converge fracamente para um elemento y de U_T (Ver Taylor [21] - teor. 4.41-B).

Seja $A \varepsilon L^s(^m T)$ tal que $\hat{A} = P$, então

$$P(y_j) - P(y) = P(y_j - y + y) - P(y) = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} A(y_j - y)^k \, y^{m-k}.$$

Para cada $k=1,\ldots,m$ a aplicação

$x \varepsilon E \longrightarrow \binom{m}{k} A \, x^k \, y^{m-k}$ é um polinômio k-homogêneo contínuo.

Desde que $y_j - y \xrightarrow{w} 0$, pelo lema anterior segue-se que

$$\left| \binom{m}{k} A \, (y_j - y)^k \, y^{m-k} \right| \underset{j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{para } k=1,\ldots,m$$

consequentemente

$$| P(y_j) - P(y) | \underset{j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Portanto P atinge sua norma no ponto $y \varepsilon U_T$.

Como conseqüência do teorema 4.13 e do lema 4.3.3 obtemos o teorema:

4.3.2 - Teorema: Seja T o espaço de Tsirel'son. Então o espaço $P(^mT)$ é reflexivo para todo inteiro m.

Observação: Se (e_j) é base de Schauder para T, então pelo teorema 4.2.2 os monômios formam uma base de Schauder para $P(^mT)$, para cada m inteiro.

- Comentários:

(a) R.Aron mostrou que $P(^m\ell_p)$ é não reflexivo para todo inteiro m,p com $m > p > 1$. Em conseqüência disso, um espaço de Banach reflexivo E para o qual $P(^mE)$ seja reflexivo para todo m, deveria pelo menos ter a propriedade de não conter os espaços ℓ_p como subespaços fechados, propriedade esta satisfeita pelo espaço de Tsirel'son.

(b) R.Ryan ([17]) termina sua tese com o problema: exemplo de um espaço de Banach reflexivo E, de dimensão infinta para o qual o espaço $P(^mE)$ seja reflexivo para todo m. O teorema 4.3.2 mostra que o espaço de Tsirel'son é um exemplo.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES m-LINEARES INTEGRAIS E NUCLEARES EM ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS

§ 1 - Preliminares

E denota um e.l.c. separado e F um espaço de Banach

5.1.1 - Definição: (a) Dizemos que uma aplicação $T \varepsilon L(^mE,F)$ é Pietsch-integral se existir uma vizinhança V de 0 em E, convexa e equilibrada tal que

$$T \varepsilon L_{PI}(^mE_V,F)$$

(b) Dizemos que uma aplicação $T \varepsilon L(^mE,F)$ é nuclear se existir uma vizinhança V de 0 em E, convexa e equilibrada tal que

$$T \varepsilon L_N(^mE_V,F).$$

Agora, se $\mathcal{V}(E)$ é um sistema fundamental de vizinhanças convexas e equilibradas de 0 em E, escrevemos

$$L_{PI}(^mE,F) = \bigcup_{V \varepsilon \mathcal{V}} L_{PI}(^mE_V,F) \quad \text{e} \quad L_N(^mE,F) = \bigcup_{V \varepsilon \mathcal{V}} L_N(^mE_V,F)$$

5.1.2 - Definição: Um subconjunto K de um e.l.c E é chamado um compacto-estrito se existir um subconjunto B de E, convexo, equilibrado e limitado tal que K está contido e é compacto em E_B.

Seja (x_n) uma seqüência em E convergindo para 0. Denotamos:

$$\Gamma_{\ell_1}(x_n)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n : (\lambda_n)\in\ell_1 \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\leq 1\right\}.$$

5.1.1 - Teorema ([19]): Seja E um espaço de Banach (ou Fréchet). Dado um compacto $K\subset E$ existe uma seqüência (x_n) em E com $||x_n||\longrightarrow 0$ e tal que

$$K\subset\overline{\Gamma(x_n)}=\Gamma_{\ell_1}(x_n)$$

5.1.2 - Teorema ([3]). Todo espaço de Banach que é um dual separável tem a PRN.

5.1.3 - Teorema ([14]). Seja E um e.l.c quasi-completo.

Então são equivalentes:

(i) E'_c é um espaço de Schwartz.

(ii) Todo compacto de E é um compacto estrito.

5.1.4 - Teorema ([10]). Seja F um espaço de Banach. Se existir uma topologia localmente convexa e separada, τ, sobre F, tal que a bola unitária e fechada U_F de F é τ-compacta então F é um dual.

§ 2 - Coincidência dos Espaços $L_{PI}(^mE,F)$ e $L_N(^mE,F)$.

5.2.1 - Proposição: Seja E um e.l.c. quasi-completo onde todo

compacto é estrito. Seja (x_n) uma seqüência em E tal que $x_n \longrightarrow 0$. Então o conjunto $L=\Gamma_{\ell_1}\{x_n\}$ é um compacto de E e o espaço de Banach E é separável.

<u>Prova</u>: Provemos que o conjunto $L=\Gamma_{\ell_1}\{x_n\}$ é um compacto de E:

Desde que $\{x_n : n=1,2...\} \cup \{0\}$ é um compacto de E pela hipótese, existe um subconjunto convexo equilibrado e limitado B de E tal que $\{x_n : n=1,2...\} \cup \{0\}$ está contido e é compacto no espaço de Banach E_B. Afirmamos que $x_n \to 0$ na topologia de E_B: Suponhamos que $x_n \not\to 0$ em E_B, logo existe $\varepsilon > 0$ e uma subseqüência $(x_{n_i})_i$ de (x_n) tal que $||x_{n_i}||_B \geq \varepsilon$ para todo i.

Como $(x_{n_i})_i$ é uma seqüência do compacto $\{x_n : n=1,2...\} \cup \{0\}$ de E_B, $(x_{n_i})_i$ tem uma subseqüência convergente para algum ponto de $\{x_n : n=1,2...\} \cup \{0\}$. Seja $(x_{n_{ij}})_j$ tal subseqüência, portanto $x_{n_{ij}} \longrightarrow x_o \in \{x_n : n=1,2...\} \cup \{0\}$.

Em conseqüência da inclusão $E_B \longrightarrow E$ ser contínua segue que $x_{n_{ij}} \longrightarrow x_o$ na topologia de E.

Como $(x_{n_{ij}})$ é uma subseqüência da seqüência original $(x_n)_n$, convergente a 0, segue-se que $x_o=0$, contradição, uma vez que $||x_{n_{ij}}||_B \geq \varepsilon$ para todo j, portanto $x_n \longrightarrow 0$ em E_B.

Pelo teorema 5.1.1, $\Gamma_{\ell_1}(x_n) = \overline{\Gamma(x_n)}$ ou seja $\Gamma_{\ell_1}(x_n)$ é um compacto de E_B e consequentemente um compacto de E.

Provemos agora que o espaço E_L é separável.

Suponhamos que o espaço E seja sobre o corpo dos reais (a demonstração se adapta facilmente ao caso complexo). Desde que L é um compacto (convexo e equilibrado) de E, E_L é um espaço de

Banach.

Seja D o conjunto:

$$D = \left\{ \sum_{n=1}^{N} r_n x_n : \sum_{n=1}^{N} |r_n| \leq 1 \ , \ r_n \varepsilon \mathbb{Q} \text{ e } N \varepsilon \mathbb{N} \right\}$$

Seja $x \varepsilon L$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ e $\varepsilon > 0$.

Logo para cada $n \varepsilon \mathbb{N}^*$, existe $r_n \varepsilon \mathbb{Q}$ tal que $|\lambda_n - r_n| \leq \varepsilon/2^n$ e os r_n escolhidos de modo que $|r_n| \leq |\lambda_n|$ e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} |r_n| \leq 1$.

Consideremos o vetor $x_D = \sum_{n=1}^{N} r_n x_n$, sendo N escolhido de modo que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n| \leq \varepsilon$ e portanto $x_D \varepsilon D$.

Se $r_n = 0$ para $n > N$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - r_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - r_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda| \leq 2\varepsilon \text{ , logo}$$

$$x - x_D = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - r_n) x_n \ \varepsilon \ 2\varepsilon L \text{ ou seja } ||x - x_D||_L \leq 2\varepsilon$$

Provamos então que o conjunto enumerável D é denso na bola unitária L de E_L. Consequentemente o conjunto enumerável

$M = \{r.x_D : r \varepsilon Q \ , \ x_D \varepsilon D\}$ é denso em E_L, ou seja E_L é separável.

<u>Observação</u>: No lema anterior o espaço E_L tem a P.R.N., de fato: desde que L é um compacto de E, pelo teorema 5.1.4 o espaço de Banach E_L é um dual. Como E_L é separável segue-se pelo teorema 5.1.2 que E_L tem a P.R.N.

5.2.1 - Teorema: Seja E um e.l.c e $\mathcal{V}$ uma base de vizinhanças convexas e equilibradas em E. Se $(E_V)^*_b$ tem a P.R.N para toda $V \in \mathcal{V}$ então $L_{PI}(^mE,F) = L_N(^mE,F)$, para todo inteiro m e qualquer espaço de Banach F.

Prova: A prova será feita no caso m=2.

Seja $T \in L_{PI}(^2E,F)$, então existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $T \in L_{PI}(^2E_V,F)$. Se $\hat{E}_V$ é o completado de E_V então T admite extensão única $\hat{\hat{T}}$ pertencente a $L_{PI}(^2\hat{E}_V,F)$, e além disso se

$$T(x,y) = \int_{U^2} \langle x,\phi\rangle \langle y,\psi\rangle \, d\, G(\phi,\psi)$$

onde U é a bola unitária e fechada de $(E_V)^*_b = (\hat{E}_V)^*_b$ com a topologia w^*, $\hat{T}(\hat{x},\hat{y}) = \int_{U^2} \langle \hat{x},\phi\rangle \langle \hat{y}\ \psi\rangle \, d\, G(\phi,\psi)$ a mesma medida G.

De fato: se $\hat{x}$, $\hat{y} \in \hat{E}_V$ existem seqüências (x_n) e (y_n) em E_V tais que $x_n \longrightarrow \hat{x}$ e $y_n \longrightarrow \hat{y}$.

Desde que $(T(x_n,y_n)$ é uma seqüência de Cauchy em F, definimos

$\hat{T}(\hat{x},\hat{y}) = \lim_{n\to\infty} T(x_n,y_n)$ e é claro que esse limite independe das sequências (x_n) e (y_n) escolhidas.

Provemos que $\hat{T} \in L_{PI}(^2\hat{E}_V,F)$:

$$\hat{T}(\hat{x},\hat{y}) = \lim_{n\to\infty} T(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{U^2} \langle x_n,\phi\rangle \langle y_n,\psi\rangle \, d\, G(\phi,\psi)$$

Agora

$$\int_{U^2} \langle x_n,\phi\rangle\langle y_n,\psi\rangle \, dG(\phi,\psi) - \int_{U^2} \langle \hat{x},\phi\rangle\langle \hat{y},\psi\rangle \, dG(\phi,\psi) =$$

$$= \int_{U^2} \left[\langle x_n,\phi\rangle\langle y_n,\psi\rangle - \langle \hat{x},\phi\rangle\langle \hat{y},\psi\rangle\right] dG(\phi,\psi)$$

Em conseqüência, como G é de variação limitada, temos:

$$\left|\left|T(x_n,y_n) - \int_{U^2} \langle \hat{x},\phi\rangle\langle \hat{y},\psi\rangle dG(\phi,\psi)\right|\right| \leq (||x_n-\hat{x}||\,||y_n||+||\hat{x}||\,||y_n-\hat{y}||)\,|G|(U^2)$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n,y_n) = \int_{U^2} \langle \hat{x},\phi\rangle\langle \hat{y},\psi\rangle dG(\phi,\psi) = \hat{T}(\hat{x},\hat{y}) \quad \text{e}$$

$\hat{T} \in L_{PI}({}^2\hat{E}_V,F)$, como $(\hat{E}_V)_b^* = (E_V)_b^*$ e $(E_V)_b^*$ tem a P.R.N., pelo teorema 3.2.1 segue que $\hat{T} \in L_N({}^2E_V,F)$, conseqüentemente $T \in L_N({}^2E_V,F)$ e portanto $T \in L_N({}^2E,F)$.

5.2.1 - <u>Corolário</u>: Seja H um e.l.c quasi-completo tal que todo compacto é estrito. Se $E = H_c^*$ então E possui uma base de vizinhança $\mathcal{V}$ tal que $(E_V)_b^*$ tem a P.R.N. para toda $V \in \mathcal{V}$.

<u>Prova</u>: Seja $U = K^o$ vizinhança de zero em E, sendo K um compacto convexo e equilibrado de H. Pela hipótese segue que K é um compacto de um espaço de Banach H_B para algum B, convexo, equilibrado limitado e fechado de H. Logo existe uma seqüência $(x_n), x_n \to 0$ em H_B tal que

$$K \subset \overline{\Gamma(x_n)}^{H_B} .$$

Seja $L = \overline{\Gamma(x_n)}^{H_B} = \Gamma_\ell(x_n)$, logo pela proposição 5.2.1, L é um compacto de H_B (e portanto de H) e H_L tem a P.R.N. Seja $V = L^o \subset K^o = U$, mas

$$\left[E_V\right]_b^* = \left[E^*\right]_{V^o} = \left[(H_c^*)^*\right]_{V^o} = H_L \quad , \text{ logo}$$

$\left[E_V\right]_b^*$ tem a P.R.N.

5.2.2 - Corolário: Seja H um e.l.c quasi-completo tal que todo compacto é estrito. Se $E \simeq H_c^*$ então

$L_{PI}(^mE,F) = L_N(^mE,F)$ para todo inteiro m e qualquer espaço de Banach F.

Prova: Pelo corolário anterior E possui uma base $\mathcal{V}$ de vizinhanças tal que $(E_V)_b^*$ tem a P.R.N. para toda $V \in \mathcal{V}$, para concluir basta aplicar o teorema 5.2.1.

5.2.2 - Teorema: Seja E um espaço de Schwartz. Então E possui uma base $\mathcal{U}$ de vizinhanças convexas, equilibradas e fechadas, tal que $\left[E_U\right]_b^*$ tem a P.R.N. para cada $U \in \mathcal{U}$.

Prova: Pela definição de espaço de Schwartz, dada uma vizinhança convexa equilibrada e fechada V de zero, existe uma outra vizinhança convexa, equilibrada e fechada W de zero tal que a aplicação canônica $E_W \longrightarrow E_V$ é precompacta e portanto a inclusão

$$(E^*)_{V^o} = (E_V)_b^* \longrightarrow (E_W)_b^* = (E^*)_{W^o} \quad \text{é compacta.}$$

Segue então que V^o é relativamente compacto em $(E^*)_{W^o}$. Como $(E^*)_{W^o}$ é um espaço de Banach, existe uma sequência (ϕ_n) em $(E^*)_{W^o}$, $\phi_n \to 0$, tal que $V^o \subset \overline{\Gamma(\phi_n)}$. Seja $L = \overline{\Gamma(\phi_n)} = \Gamma_{\ell_1}(\phi_n)$.

Pela proposição 5.2.1, L é compacto em $(E^*)_{W^o}$ e $(E^*)_L$ é separável.

Seja $U=L^o \subset E$. Como L é limitado em $(E^*)_{W^o}$, temos que $U=L^o$ absorve W e portanto, U é uma vizinhança (convexa, equilibrada e fechada) de zero em E.

Como L é compacto em $(E^*)_{W^o}$, logo L é compacto em $(E^*,\sigma(E^*,E))$.

Temos que L é $\sigma(E^*,E)$-fechado e segue do teorema dos bipolares que $U^o = L^{oo} = L$, portanto $(E^*)_L=(E^*)_{U^o}$ é um espaço de Banach dual separável, logo com a P.R.N. Como $V^o \subset L$ temos que $U=L^o \subset V^{oo}=V$. Assim toda vizinhança de zero V contem uma vizinhança convexa, equilibrada e fechada U de zero em E tal que $(E_U)^*_b = (E^*)_{U^o}$ tem a P.R.N.

5.2.3 - <u>Corolário</u>: Se E é um espaço de Schwartz então $L_{PI}(^mE,F) = L_N(^mE,F)$ para todo espaço de Banach F.

<u>Prova</u>: Pelo teorema anterior E possui uma base de vizinhanças $\mathcal{U}$ tal que $(E_U)^*_b$ tem a P.R.N. para toda $U \in \mathcal{U}$, basta agora aplicar o teorema 5.2.1.

Exemplos de e.l.c onde todo compacto é compacto estrito:

- Espaços de Fréchet

- Espaços de Silva
- Espaços que são limites indutivo limitadamente retroativo de espaços de Banach. (ver Mujica [15]).
- Espaços satisfazendo a condição de convergência de Mackey estrita (Ver Mujica[15])

Além disso, observamos que o teorema 5.1.3 (Meise [14]) dá uma caracterização dos e.l.c. onde todo compacto é compacto estrito: se H é um e.l.c. quasi completo, então são equivalentes.

(i) H'_c é um espaço de Schwartz.

(ii) todo compacto de H é um compacto estrito.

Observações: A seguir demonstramos um caso particular do corolário 5.2.2 cuja demonstração é inteiramente diferente e independente daquela dada no corolário 5.2.2. Embora o método de demonstração usado neste caso particular, seja totalmente diferente daqueles usados no capítulo III e por conseguinte daqueles usados neste capítulo, até o momento, vale dizer que o resultado deste caso particular foi a motivação de todo o estudo desenvolvido no capítulo III.

5.2.3 - Teorema: Seja E um e.l.c. quasi-completo onde todo compacto é compacto estrito. Então, temos

$$P_{PI}({}^mE^*_c) = P_N({}^mE^*_c) \text{ , para todo inteiro m.}$$

Prova: Faremos a demonstração para m=2.Observamos que é suficiente provar a inclusão $P_{PI}({}^mE^*_c) \subset P_N({}^mE^*_c)$. Seja $Q \in P_{PI}({}^mE^*_c)$, logo

$Q \varepsilon P_{PI}(^m(E^*)_{K^o})$ para algum compacto K convexo e equilibrado de E.

Portanto Q tem a representação:

(1) $Q(\phi) = \int_K <x,\phi>^m d\mu(x)$ onde μ é uma medida de Borel regular sobre K, e observamos que a bola unitária e fechada do dual $\left[(E^*)_{K^o}\right]^*_b$ é exatamente o compacto K.

Desde que o compacto K é um compacto estrito, $K \subset \Gamma_{\ell_1}(x_n) = L$ para alguma sequência (x_n) em E convergindo a zero.

Definindo uma medida $\tilde{\mu}$ sobre L por

$\tilde{\mu}(A) = \mu(A \cap K)$, vemos que

$$Q(\phi) = \int_L <x,\phi>^m d\tilde{\mu}.$$

A medida de Borel regular $\tilde{\mu}$ define um funcional linear T sobre C(L) (esp. das funções contínuas sobre L) dado por

(2) $T(f) = \int_L f(x)\, d\tilde{\mu}(x)$ $f \varepsilon C(L)$, além disso notamos que $T(\phi^m) = Q(\phi)$ para todo $\phi \varepsilon E^*$.

Da equação (2) segue que

(2') $|T(f)| \leq |\tilde{\mu}|(L)\ ||f||_L$, $||\ ||_L$ norma de C(L).

Agora, se $P \varepsilon P_f(^mE)$, $P(x) = \sum_{j=1}^{r} \phi_j^m(x)$ então para $x \varepsilon L$ podemos escrever:

$$P(x) = P(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n) = \sum_{j=1}^{r} \phi_j^m (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n) = \sum_{j=1}^{r} (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_j(x_n))^m$$

e notamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \phi_j(x_n)| < \infty \quad \text{para } j = 1,\ldots,r.$$

Portanto a série

$$\sum_{n_1 \ldots n_m} \lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_m} \phi_j(x_{n_1}) \ldots \phi(x_{n_m}) \text{ converge para}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_j(x_n)\right)^m \quad \text{para qualquer arranjo dos produtos}$$

$\lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_m} \phi_j(x_{n_1}) \ldots \phi_j(x_{n_m})$. Em conseqüência $P(x)$ se escreve como:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{n_1,\ldots,n_m} \lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_m} \phi_j(x_{n_1}) \ldots \phi_j(x_{n_m}) \quad \text{para}$$

todo $x \in L$.

Agora, desde que $\sum_{n_1 \ldots n_m} \lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_m} \phi_j(x_{n_1}) \ldots \phi_j(x_{n_m})$

é absolutamente convergente para cada $j = 1 \ldots r$, então

$$P(x) = \sum_{n_1 \ldots n_m} \lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_m} \sum_{j=1}^{r} \phi_j(x_{n_1}) \ldots \phi_j(x_{n_m}) \quad \text{para}$$

todo $x \in L$.

Pela fórmula de polarização, temos:

$$P(x) = \sum_{n_1 \ldots n_m} \lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_m} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{2^m m!} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le m}} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \phi_j^m(\varepsilon_1 x_{n_1} + \ldots + \varepsilon_m x_{n_m}) =$$

$$= \sum_{n_1 \ldots n_m} \lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_m} \frac{m^m}{2^m . m!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \sum_{j=1}^{r} \phi_j^m \left(\frac{\varepsilon_1 x_{n_1} + \ldots + \varepsilon_m x_{n_m}}{m}\right)$$

$$= \sum_{n_1 \ldots n_m} \lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_m} \frac{m^m}{2^m . m!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m P\left(\frac{\varepsilon_1 x_{n_1} + \ldots + \varepsilon_m x_{n_m}}{m}\right)$$

Notamos que $\frac{1}{m}(\varepsilon_1 x_{n_1}+..+\varepsilon_m x_{n_m})\varepsilon L$ e

$$\frac{1}{m}(\varepsilon_1 x_{n_1}+..+\varepsilon_m x_{n_m}) \longrightarrow 0 \text{ quando } n_i \to \infty$$

$$i = 1 \ldots m$$

Agora consideramos o conjunto

$$\left\{\frac{1}{m}(\varepsilon_1 x_{n_1}+..+\varepsilon_m x_{n_m}) : \varepsilon_i = \pm 1 , n_i \varepsilon \mathbb{N} , 1 \leq i \leq m\right\}$$

e podemos escrevê-lo como uma sequência $(y_k)_{k \varepsilon \mathbb{N}}$ onde $y_k \varepsilon L$ para todo k e $y_k \longrightarrow 0$ quando $k \to \infty$.

Portanto é válido escrever

$$|P|_L = \sup_{x\varepsilon L}\{|P(x)|\} \leq \frac{m^m}{2^m.m!} \sup_{(\lambda_{n_j})\varepsilon \ell_1}\left\{\sum_{n_1..n_m} |\lambda_{n_1}..\lambda_{n_m}|\right\}.2^m \sup_k |P(y_k)| =$$

$$= \frac{m^m}{m!} \sup_{\substack{(\lambda_n)\varepsilon \ell_1 \\ \Sigma|\lambda_n| \leq 1}}\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|\right)^m\right\} \sup |P(y_k)| \leq$$

$$\leq \frac{m^m}{m!} \sup_k |P(y_k)| \leq \frac{m^m}{m!} |P|_L$$

Então, em particular, segue da equação (2') que se $P\varepsilon P_f(^mE)$

$$|T(P)| \leq |\tilde{\mu}| (L) \frac{m^m}{m!} \sup_k |P(y_k)| \quad \text{sendo}$$

que $P(y_k) \longrightarrow 0$ quando $k \to \infty$.

Agora consideramos o espaço quociente normado

$P_f(^mE)/_{||\ ||_L}$ e a aplicação:

$$P \varepsilon P_f(^mE)/_{||\ ||_L} \longrightarrow (P(y_k))_{k=1}^{\infty} \ \varepsilon \ c_o$$

A aplicação está bem definida e é uma isometria. Portanto o espaço $P_f(^mE)/_{||\ ||_L}$ é isométrico ao seguinte subespaço de c_o:

$$c_o(P_f) = \left\{ (P(y_k))_{k=1}^{\infty} \ : \ P \varepsilon P_f(^mE) \right\}$$

Segue então que a restrição do funcional T ao espaço $P_f(^mE)$, admite uma extensão contínua $\tilde{T}$ sobre o espaço c_o.

Agora, observando que $c_o^* = \ell_1$, existe (β_k) em ℓ_1 tal que para todo $(\alpha_k) \ \varepsilon \ c_o$, temos:

$$\tilde{T}((\alpha_k)) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$$

Em particular, se $\phi \ \varepsilon \ E^*$, $\phi^m \ \varepsilon \ P_f(^mE)$ temos que

$\phi^m \equiv (\phi^m(y_k)) \ \varepsilon \ c_o(P_f)$ e portanto

$\tilde{T}(\phi^m(y_k)))=T(\phi^m)= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \phi^m(y_k) = Q(\phi)$ para todo $\phi \ \varepsilon \ (E^*)_{L^o}$ onde

$y_k \varepsilon \ L \subset \left[(E^*)_{L^o}\right]_{\beta}^{*} = E_L$ logo $Q \varepsilon P_N(^m(E^*)_{L^o})$ ou seja

$$Q \ \varepsilon \ P_N(^mE_c^*).$$

§ 3 - O Dual do Espaço $(P(^mE), \tau_o)$

Temos o seguinte teorema:

5.3.1- <u>Teorema</u>: Seja E um e.l.c. quasi-completo com a P.A. Então os espaços $P_{PI}(^mE_c^*)$ e $(P(^mE), \tau_o)^*$ são isomorfos.

<u>Prova</u>: Seja $Q \varepsilon P_{PI}(^mE_c^*)$, portanto Q se escreve como:

$$Q(\phi) = \int_K \langle x, \phi \rangle^m \, d\mu(x)$$

para algum compacto convexo e equilibrado K de E e μ uma medida de Borel regular sobre K.

Seja $B \varepsilon L^s(^mE_c^*)$ tal que $Q = \hat{B}$.

Pela fórmula de polarização, temos:

$$B(\phi_1, \ldots, \phi_m) = \frac{1}{2^m \, m!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \, Q(\varepsilon_1 \phi_1 + \ldots + \varepsilon_m \phi_m) =$$

$$= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_i} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \int_K (\varepsilon_1 \phi_1(x) + \ldots + \varepsilon_m \phi_m(x))^m \, d\mu(x) =$$

$$= \int_K \left[\frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_i} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \, (\varepsilon_1 \phi_1(x) + \ldots + \varepsilon_m \phi_m(x))^m \right] d\mu(x) =$$

$$= \int_K \phi_1(x) \ldots {}_m(x) \quad \mu(x) \, .$$

Pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma única aplicação linear S, $S: L_f(^mE) = E^* \otimes \ldots \otimes E^* \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$S(\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_m) = B(\phi_1, \ldots, \phi_m)$$

Se $P \varepsilon P_f(^mE)$, $P = \sum_{j=1}^{r} \phi_j^m$, seja $A \varepsilon L_f^s(^mE)$ tal que $\hat{A} = P$.

Agora definimos uma aplicação T sobre $P_f(^mE)$ por:

$$T(\sum_{j=1}^{r} \phi_j^m) = \sum_{j=1}^{r} T(\phi^m) = \sum_{j=1}^{r} S(\phi_j \otimes \ldots \otimes \phi_j) = \sum_{j=1}^{r} B(\phi_j, \ldots, \phi_j) = \sum_{j=1}^{r} Q(\phi_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \int_K \langle x_i \phi_j \rangle^m \, d\mu(x) = \int_K \sum_{j=1}^{r} \phi_j^m(x)) \, d\mu(x) .$$

Em consequência T está bem definida e linear sobre $P_f(^mE)$ e além disso temos:

$$|T(P)| \leq |\mu|(K) \, ||P||_K \quad \text{para todo} \quad P \varepsilon P_f(^mE).$$

Desde que $P_f(^mE)$ é denso em $P(^mE)$ para a topologia τ_0 (ver Mujica [15]), podemos estender a aplicação contínua T de maneira única à todo o espaço $P(^mE)$ e portanto $T \varepsilon [P(^mE), \tau_0]^*$.

Reciprocamente, seja $T \varepsilon [P(^mE), \tau_0]^*$, então existe um compacto K de E e uma constante $c > o$ tal que $T(P)| \leq c \, ||P||_K$ para todo $P \varepsilon P(^mE)$.

Consideremos agora, o espaço C(K) de todas as funções contínuas sobre K a valores complexos, munido da norma do supremo em K.

Pela aplicação restrição $P \varepsilon P(^mE) \longrightarrow P|_K \varepsilon C(K)$ podemos considerar o espaço $P(^mE)$ como um subespaço de C(K).

Agora, pelo teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{T}$ uma estensão de T à C(K), tal que $|\tilde{T}(f)| \leq c \, ||f||_K$ para toda $f \varepsilon C(K)$.

Pelo teorema de Representação de Riesz, existe uma medida de Borel regular μ sobre K tal que

$$\tilde{T}(f) = \int_K f(x)\, d\mu(x) \quad \text{para toda} \quad f \varepsilon C(K) \ , \text{ com}$$

$$||\tilde{T}|| = |\mu|\ (K) = ||T||_K \ .$$

Desde que $\tilde{T}\big|_{P_f(^mE)} = T\big|_{P_f(^mE)}$, se $\phi \ \varepsilon \ E^*$, definimos uma aplicação Q_T sobre E^* por:

$$Q_T(\phi) = T(\phi^m) = \int_K <x\ \phi>^m d\mu(x) \ .$$

Portanto a aplicação Q_T é um polinômio m-homogêneo sobre E^*. Além disso, temos $|Q_T(\phi)| < c||\phi^m||_K$, ou seja

$$Q_T \varepsilon P_{PI}(^mE^*_c) \ .$$

<u>Observação</u>: O isomorfismo do teorema 1 é estabelecido pela aplicação:

$$[P(^mE)\ \tau_o]^* \longrightarrow P_{PI}(^mE^*_c)$$

$$T \longrightarrow Q_T \ , \ Q_T(\phi) = T(\phi^m)$$

O isomorfismo acima é algébrico, mas considerando a topologia forte em $[P(^mE)\ , \tau_o]^*$ e uma topologia conveniente sobre $P_{PI}(^mE^*_c)$, obtemos um isomorfismo topológico entre os espaços, com algumas hipóteses adicionais sobre o espaço E.

BIBLIOGRAFIA

(1) ALENCAR, R.L. Exemplo de um espaço $P(^mE)$ de dimensão infinita reflexivo para todo inteiro m. Seminário Brasileiro de Análise, 15º, 1982, p. 243-251

(2) ARON, R.M. Compact polynomials and compact differentiable mappings between Banach spaces. Sém. Pierre Lelong 74/75, Lecture Notes in Math., 524, Springer-Verlag, 1976, p, 213-222.

(3) DIESTEL, J. & UHL, J.J. Vector Measures. Math.Surveys, A.M.S.; 15, 1977.

(4a) DINEEN, S. Complex Analysis in Locally Convex Spaces. Math. Studies, 57. North-Holland, 1981.

(4b) ——— Holomorphy types on a Banach space. Studia Math., 39, 1971, p. 241-288.

(5) FIGIEL, T. & JOHNSON, W.B. The approximation property does not imply the bounded approximation property. Proc. of the A.M.S., 41, nº 1, 1973, p. 197-200.

(6) GELBAUM, B.R. & GIL DE LAMADRID, J. Bases of tensor products of Banach spaces. Pacific J. Math., 11,1961, p. 1281-1286.

(7) GROTHENDIECK, A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. A.M.S., 16, 1955.

(8) GUPTA, C.P. Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space. Thesis, The University of Rochester, 1966.

(9) HALMOS, P.R. Measure theory. The University Series in Higher Math., Van Nostrand, 1962.

(10) HOLMES, R.B. Geometric functional analysis and its applications. Graduate Texts in Math., 24, Springer-Verlag, 1975.

(11) HONIG, C.S. Análise funcional e aplicações. São Paulo, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da USP, 1970.

(12) KNOPP, K. Infinite sequences and series. New York, Dover, c1956.

(13) LINDESTRAUSS, J. & TZAFRIRI, L. Classical Banach Spaces, I. Erg. der Math., 92, Springer-Verlag, 1977.

(14) MEISE, R. Spaces of differentiable functions and the approximation property. Approximation Theory and Functional Analysis, (J.B.Prolla, ed.), North-Holland, Amsterdam, 1979.

(15) MUJICA, J. Gérmenes holomorfos y funciones holomorfas en espacios de Fréchet. Departamento de Teoría de Funciones, Universidad de Santiago de Compostela, 1978.

(16) PIETSCH, A. Nuclear locally convex spaces. Erg. der Math. 66, Springer-Verlag, 1972 (2.ed.).

(17) RYAN, R.A. Applications of topological tensor products to infinite dimensional homomorphy. Thesis, Trinity College of Dublin, 1980.

(18) SAAB, E. The Radon-Nikodym property in dual spaces: a theorem of Laurent Schwartz. Thesis, University of Illinois.

(19) SCHAEFER, H. H. Topological vector spaces. Graduate Texts in Mathematics, 3, Springer-Verlag, 1971.

(20) SIKORSKI, R. Boolean Algebras. Erg. der Math., 25 , Springer-Verlag, 1964 (2.ed.).

(21) TAYLOR, A.E. Introduction to functional analysis. New York, John Wiley & Sons, c1958.

(22) TREVES, F. Topological vector spaces, distributions and kernels. Pure and Appl. Math., 25, Academic Press , 1967.

(23) TSIREL'SON, B.S. Not every Banach space contains an imbedding of ℓp or c_o. Functional Anal. Appl., 8, 1974, p. 138-141.