UTILIZAÇÃO DE MÉTODOS ESPECTRAIS PARA CONSTRUÇÃO DE INTERVALOS DE CONFIANÇA EM SIMULAÇÕES

ENIVALDO CARVALHO DA ROCHA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATÍSTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROBABILIDADE

ORIENTADOR: PROF. DR. CARLOS ALBERTO BARBOSA DANTAS

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES e UFPe

- SÃO PAULO, JANEIRO DE 1983 -

À Jacira
e Leonardo

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Carlos Alberto Barbosa Dantas pela atenção e dedicação com que me orientou durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Doutor Pedro Alberto Morettin pelas sugestões apresentadas.

Aos colegas que direta ou indiretamente me apoiaram no decorrer do Programa de Mestrado, e em especial a Antonio Guilherme C. Q. Monteiro.

As funcionárias da Biblioteca pelo bom atendimento oferecido durante a pesquisa.

Ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira pelo eficiente trabalho de datilografia.

ÍNDICE

Cap. 1 - INTRODUÇÃO 1

Cap. 2 - CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA ESPECTRAL. 4

2.1 - Introdução 4

2.2 - Definições 4

2.3 - Periodograma 8

2.4 - Estimadores Suavizados 12

2.5 - Largura da Faixa 15

Cap. 3 - ESTIMAÇÃO DO ESPECTRO NA FREQÜÊNCIA ZERO 18

3.1 - Introdução 18

3.2 - Estimador Espectral Suavizado de Covariância na freqüência zero 20

3.3 - Regressão no Periodograma. 23

3.4 - Aplicações 32

BIBLIOGRAFIA. 42

APÊNDICE. 46

- 0 -

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Em geral, a seqüência $X_1, X_2, \ldots$, gerada na simulação de um sistema é correlacionada e, portanto, para construirmos intervalos de confiança para a média μ dessa seqüência é fundamental substituirmos as técnicas estatísticas clássicas por métodos que levam em consideração a estrutura de dependência entre as observações.

Algumas aproximações têm sido utilizadas como, por exemplo, agrupar as observações em blocos aproximadamente independentes e, em seguida, aplicar os métodos clássicos.

Um procedimento semelhante, o método de réplicas, consiste em gerarmos rodadas independentes da simulação de maneira tal que as observações sejam aproximadamente independentes e identicamente distribuídas, e utilizarmos os métodos clássicos para construirmos intervalos de confiança para μ.

Uma outra maneira, o método regenerativo, é utilizado quando o processo simulado tem a propriedade de reiniciar-se probabilisticamente em uma seqüência de instantes aleatórios. As observações entre instantes de regeneração sucessivos formam blocos de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídos, e a partir daí procedemos como nos métodos clás-

sicos.

Além disso têm sido considerados métodos de análise de séries temporais, que podem ser no domínio do tempo, o qual ajusta o processo de saída da simulação a um modelo auto-regressivo de determinada ordem (Fishman, 1978), ou no domínio da freqüência, supondo-se que o processo simulado tem distribuição estacionária e, que em regime estacionário, pode ser representado por um processo estocástico de segunda ordem (Heidelberger & Welch, 1981).

Como a literatura nesta área é bastante extensa, iremos neste trabalho nos restringir à análise no domínio da freqüência.

No Capítulo 2, abordamos inicialmente alguns conceitos fundamentais sobre a análise espectral.

No Capítulo 3, estimamos a variância da média amostral através do quociente do estimador do espectro na freqüência zero pelo tamanho da amostra. A estimação do espectro na freqüência zero foi feita de duas maneiras: primeiramente foram considerados os estimadores espectrais suavizados de covariância para diferentes janelas espectrais e finalmente utilizamos a técnica proposta por Heidelberger & Welch, que consiste em ajustar o logaritmo do periodograma médio a um polinômio de determinado grau, e neste caso o estimador do espectro na freqüência zero será o intercepto da função de regressão ajustada.

Ainda neste capítulo apresentamos algumas aplicações, que

consistem na simulação de uma fila M/M/1, com tempos entre chegadas exponencialmente distribuídos com parâmetro $\lambda = 4,0$ e tempos de atendimento também exponencialmente distribuídos com parâmetro $\mu = 5,0$. Na simulação deste processo geramos então os intervalos de confiança para o estimador do espectro na freqüência zero, através dos quais foi possível analisar a variabilidade entre os estimadores propostos.

Foram também construídos intervalos de confiança para a média L do número de clientes no sistema, a partir dos quais calculamos as probabilidades de cobertura para ambos os métodos.

Para isto implantamos um programa de computação em linguagem Fortran, no qual utilizamos algumas sub-rotinas do pacote IMSL do CCE-USP. Uma delas foi a FFTRC, que calcula a transformada discreta de Fourier através do algoritmo de Cooley-Tukey (ver Apêndice).

CAPÍTULO 2

CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA ESPECTRAL

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo trataremos brevemente de alguns fundamentos básicos da análise espectral, definindo um processo estocástico, função de densidade espectral e alguns estimadores espectrais clássicos, os quais serão utilizados nos próximos capítulos.

2.2 - DEFINIÇÕES

DEFINIÇÃO 2.2.1 - Seja T um conjunto arbitrário. Um processo estocástico é uma família $X = \left\{X(t,\omega), t\in T, \omega\in\Omega\right\}$ tal que para cada $t\in T$, $X(t,\omega)$ é uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade (Ω, F, P), a qual denotaremos, no que segue, simplismente por $X(t)$. Se T for finito ou infinito enumerável, temos um processo estocástico a parâmetro discreto. Se T for um intervalo de $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ temos um processo estocástico a parâmetro contínuo.

Observamos que para cada ω fixo $X(t)$ é uma realização ou trajetória do processo estocástico (série temporal).

DEFINIÇÃO 2.2.2 - Um processo estocástico $X(t)$, $t\in T$ é dito es-

tritamente estacionário se:

$$P[X(t_1+t)\in T_1, X(t_2+t)\in T_2, \ldots, X(t_n+t)\in T_n] =$$

$$= P[(X(t_1)\in T_1, X(t_2)\in T_2, \ldots, X(t_n)\in T_n],$$

quaisquer que sejam $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $t\in T$.

DEFINIÇÃO 2.2.3 - Um processo estocástico $X(t)$, $t\in T$ é dito estacionário de 2ª ordem (ou estacionário de covariância) se e somente se:

i) $E[X(t)] = \mu$, constante para todo $t\in T$.

ii) $E[X^2(t)] < \infty$, para todo $t\in T$.

iii) $Cov[X(t), X(s)]$ é uma função apenas de $t-s$, $t\in T$ e $s\in T$.

Sem perda de generalidade iremos supor $\mu = 0$ e então escrevemos:

$$\gamma(k) = cov[X(t), X(t+k)] = E[X(t)\ X(t+k)], \quad (2.2.1)$$

onde $\gamma(k)$ é denominado função de autocovariância do processo estacionário de 2ª ordem, tendo as seguintes propriedades:

i) $\gamma(0) > 0$

ii) $\gamma(-k) = \gamma(k)$

iii) $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$

iv) $\gamma(k)$ é positiva definida, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \gamma(k_i - k_j) \geq 0,$$

quaisquer que sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ números reais e $k_1, k_2, \ldots, k_N \in T$.

TEOREMA 2.2.1 - Se o processo, como definido em (2.2.3), tem função de autocovariância $\gamma(k)$, então $\gamma(k)$ pode ser representada por:

$$\gamma(K) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega k} dP(\omega), \qquad (2.2.2)$$

onde $P(\omega)$ é uma função não negativa, não decrescente, limitada e denominada função de distribuição espectral.

TEOREMA 2.2.2 - Se $X(t)$ é um processo estacionário de 2ª ordem, então está associado a ele um processo $Z(\omega)$ de incrementos ortogonais e $X(t)$ pode ser representado na forma:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega), \qquad (2.2.3)$$

onde $Z(\omega)$ é tal que:

i) $EZ(\omega) = 0$

ii) $E|Z(\omega)|^2 = P(\omega)$

iii) $E dZ(\omega) \overline{dZ(\lambda)} = \begin{cases} dP(\omega), & \text{se } \omega = \lambda \\ 0, & \text{se } \omega \neq \lambda. \end{cases}$

Se $P'(\omega) = p(\omega)$, ou seja, se $P(\omega)$ é derivável, então (2.2.2) pode ser escrita da forma:

$$\gamma(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega) e^{i\omega k} d\omega, \qquad -\infty < k < \infty. \qquad (2.2.4)$$

onde $p(\omega)$ é a função de densidade espectral do processo $X(t)$. Se $\gamma(k)$ é absolutamente integrável, então $p(\omega)$ pode ser representado como a transformada inversa de Fourier:

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(k)\, e^{-ik\omega} dk, \qquad -\infty < \omega < \infty. \qquad (2.2.5)$$

As expressões (2.2.4) e (2.2.5) constituem as relações de Weiner-Khintchine, as quais formam a base da análise harmônica.

A importante contribuição da função de densidade espectral para a análise de processos estacionários de 2ª ordem surge do fato que $p(\omega)$ contém informações a respeito da composição da variância do processo.

TEOREMA 2.2.3 - Supondo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|\, d\tau < \infty,$$

o espectro $p(\omega)$ definido por (2.2.5) é limitado, não negativo, uniformemente contínuo, par e periódico de período 2π.

Como $p(\omega)$ tem período de 2π, basta considerarmos $\omega \in (-\pi, \pi)$ e representarmos $p(\omega)$ no intervalo $(0, \pi)$, pois ele é par.

Consideremos $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ um processo estocástico estacionário de 2ª ordem, discreto, substituindo os limites de integração de (2.2.2):

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} p(\omega)\, e^{i\omega k} d\omega, \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad (2.2.6)$$

e se $\gamma(k)$ é absolutamente somável

$$\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty\right\},$$

então:

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i\omega k}, \qquad \omega \in (-\pi, \pi). \qquad (2.2.7)$$

2.3 - PERIODOGRAMA

Consideremos agora $X(1), X(2), \ldots, X(N)$ observações de um processo estacionário de 2ª ordem. Então a transformada de Fourier finita desse processo é definida por:

$$T_\omega^N = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{j=1}^{N} X(j) e^{-i\omega j}, \qquad -\infty < \omega < \infty \qquad (2.3.1)$$

onde T_ω^N tem período 2π e $\overline{T_{-\omega}^N} = T_\omega^N$.

Portanto, basta considerar $\omega \in (-\pi, \pi)$ e T_ω^N será calculada nas freqüências de Fourier, dadas por:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{N}, \qquad -\left[\frac{N-1}{2}\right] \le n \le \left[\frac{N}{2}\right]$$

então (2.3.1) fica:

$$T_n^N = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{j=1}^{N} X(j) e^{-i\omega_n j}, \qquad -\left[\frac{N-1}{2}\right] \le n \le \left[\frac{N}{2}\right]. \qquad (2.3.2)$$

Substituindo (2.2.3) em (2.3.2), temos:

$$T_n^N = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{j=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega j} dZ(\omega) e^{-i\omega_n j} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{j=1}^{N} e^{i(\omega-\omega_n)j} dZ(\omega) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(\omega-\omega_n) dZ(\omega),$$

onde $|\Delta(\omega-\omega_n)|^2$ é o núcleo de Féjer, e portanto comporta-se como uma função delta de Dirac quando $N \to \infty$ (ver Figueiredo, D. Guedes, 1977).

Logo:

$$E\left[|T_n^N|^2\right] = E\left[T_n^N \overline{T_n^N}\right] =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^N(\omega-\omega_n) \overline{\Delta^N(\lambda-\omega_n)} E[dZ(\omega) \overline{dZ(\lambda)}] =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta^N(\omega-\omega_n)|^2 E[|dZ(\omega)|^2],$$

para $\omega = \lambda$.

Do Teorema 2.2.2 temos:

$$E\left[|T_n^N|^2\right] = \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta^N(\omega-\omega_n)|^2 p(\omega) d\omega,$$

$p(\omega)$ contínua.

Passando ao limite quando $N \to \infty$:

$$E\left[|T_n^N|^2\right] \simeq p(\omega),$$

pois para N grande ω_n se concentra em torno da origem e $p(\omega)$ tende a ficar constante pois é muito pequena nesta região.

Logo, a estatística T_n^N nos conduz a um estimador assintoticamente não viciado para $p(\omega)$, expresso por:

$$I_n^N = |T_n^N|^2 = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{j=1}^{N} X(j)e^{-i\omega_n j}\right|^2$$

denominado periodograma.

DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA DO PERIODOGRAMA

TEOREMA 2.3.1 - Seja $X(1),\ldots,X(N)$ observações de um processo estacionário de 2ª ordem, normal e com média zero. Então as variáveis aleatórias T_n^N são assintoticamente independentes e com distribuição aproximadamente normal complexa com média zero e variância $p(\omega_n)$ se $n \neq 0, \frac{N}{2}$ e $N(0, p(\omega_n))$ se $N = 0, \frac{N}{2}$.

Supondo as condições do Teorema 2.2.1, consideremos:

$$T_n^N = U_n - iV_n,$$

onde

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{j=1}^{N} X(j)\cos\omega_n j$$

e

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{j=1}^{N} X(j)\operatorname{sen}\omega_n j .$$

Como U_n e V_n é uma combinação linear dos T_n^N. Então também são assintoticamente independentes e normais com média zero e variância $\frac{p(\omega_n)}{2}$. Por outro lado de (2.3.3) temos:

$$I_n^N = |U_n - iV_n|^2 = U_n^2 + V_n^2 .$$

Os U_n^2 e V_n^2 dividido por $\frac{p(\omega_n)}{2}$ tem distribuição aproximadamente χ_1^2. Logo I_n^N é proporcional a um χ_2^2, ou seja:

$$I_n^N \simeq \begin{cases} \frac{1}{2}p(\omega_n)\chi_2^2, \text{se } n \neq 0, \frac{N}{2} \\ p(\omega_n)\chi_1^2, \text{ se } n = 0, \frac{N}{2}. \end{cases}$$

Observamos que o periodograma tem as seguintes propriedades:

I) $\lim_{N\to\infty} EI_n^N = p(\omega_n)$

II) $\lim_{N\to\infty} \operatorname{Var} I_n^N = p^2(\omega_n)$

III) $\lim_{N\to\infty} \operatorname{Cov}(I_\omega^N, I_\lambda^N) = 0, \qquad \omega \neq \lambda.$

2.4 - ESTIMADORES SUAVIZADOS

Da expressão (2.2.7) um estimador natural de $p(\omega)$ será obtido substituindo $\gamma(k)$ pelo estimador viciado, baseado nas N observações, definido por:

$$\hat{\gamma}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} [X(t)-\bar{X}][X(t+|k|)-\bar{X}], & |k| \leq N-1 \\ 0, & |k| > N-1 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

onde $\bar{X}$ é a média amostral, a qual, sem perda de generalidade podemos supor igual a zero, logo (2.4.1) fica:

$$\hat{\gamma}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} X(t)X(t+|k|), & |k| \leq N-1 \\ 0, & |k| > N-1. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Um estimador não viciado de $\gamma(k)$ será obtido se substituirmos N no denominador por $N-|k|$, porém este estimador tem um erro médio quadrático maior do que o estimador definido em (2.4.2).

Logo, estimando-se $p(\omega)$ por:

$$\widehat{p(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k}\hat{\gamma}(k). \tag{2.4.3}$$

Pode-se demonstrar que este estimador coincide com o periodograma e, portanto, tem as mesmas propriedades.

Com o objetivo de eliminar a inconsistência do periodograma, de maneira que se conserve as outras propriedades, va-

mos ponderar a função de autocovariância e, conseqüentemente, a transformada de Fourier de $\hat{\gamma}(k)$ ponderada será denominada estimador suavizado de covariâncias, dado por:

$$\widehat{p(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} h_M(k)\hat{\gamma}(k) \qquad (2.4.4)$$

onde, para um inteiro $M < N$ a seqüência de pesos $h_M(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ tem as seguintes propriedades:

i) $0 \leq h_M(k) \leq h_M(0) = 1$

ii) $h_M(-k) = h_M(k)$, para todo k

iii) $h_M(k) = 0$, $|k| > M$, (2.4.5)

onde M é denominado ponto de truncamento ou "lag number", a função peso $h_M(k)$ é denominada "lag window", e a transformada de Fourier de $h_M(k)$ é denominada janela espectral, dada por:

$$H_M(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} h_M(k). \qquad (2.4.6)$$

De (2.4.5) segue-se que:

i) $H_M(-\omega) = H_M(\omega)$, para todo ω.

ii) $\int_{-\pi}^{\pi} H_M(\omega)d\omega = 1.$ (2.4.7)

Logo como $\widehat{p(\omega)}$ é transformada de Fourier do produto

$$h_M(k) \cdot \hat{\gamma}(k),$$

podemos obter $p(\omega)$ através da convolução das transformadas de

Fourier, ou seja:

$$\widehat{p(\omega)} = \int_{-\pi}^{\pi} H_M(\omega-\lambda) I_n^N(\lambda) d\lambda \qquad (2.4.8)$$

e

$$E[\widehat{p(\omega)}] = \int_{-\pi}^{\pi} H_M(\omega-\lambda) E[I_n^N(\lambda)] d\lambda \simeq \int_{-\pi}^{\pi} H_M(\omega-\lambda) p(\lambda) d\lambda. \qquad (2.4.9)$$

Substituindo a integral pela soma de Riemann:

$$\widehat{p(\omega)} = \frac{2\pi}{N} \sum_{\nu=-[\frac{N-1}{2}]}^{[\frac{N}{2}]} H_M(\omega-\omega_\nu) I_n^N(\omega_\nu) \qquad (2.4.10)$$

mas como

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{\nu=-[\frac{N-1}{2}]}^{[\frac{N}{2}]} H_M(\omega_\nu) = \int_{-\pi}^{\pi} H_M(\omega) d\omega = 1$$

para qualquer função $H(\omega)$ real, simétrica, periódica e tal que:

$$\sum_{\nu=-[\frac{N-1}{2}]}^{[\frac{N}{2}]} H_M(\omega_\nu) = 1,$$

temos que o estimador dado em (2.4.4) é assintoticamente equivalente ao estimador:

$$\tilde{p}(\omega) = \sum_{\nu-[\frac{N-1}{2}]}^{[\frac{N}{2}]} H(\omega-\omega_\nu) I_{\omega_\nu}^N \qquad (2.4.11)$$

denominado estimador suavizado de periodograma.

2.5 - LARGURA DA FAIXA

A partir da covariância assintótica entre os estimadores suavizados nas diferentes freqüências, pode-se demonstrar que: (ver Jenkins e Watts, 1969)

$$\mathrm{Var}[\hat{p}(\omega)] = p^2(\omega)\cdot\frac{2\pi}{N}\int_{-\pi}^{\pi} H_M^2(\alpha)\,d\alpha \qquad (2.5.1)$$

Seja $h(k/M) = h_M(k)$, tal que $h(\lambda) = h(-\lambda)$, $0 \le h(\lambda) \le h(0) = 1$, $|\lambda| < 1$ e pela relação de Parseval:

$$2\pi\int_{-\pi}^{\pi} H_M^2(\alpha)\,d\alpha = \sum_{k=-M}^{M} h^2(k/M) = M\sum_{k=-M}^{M}\frac{1}{M}\,h^2(k/M) \simeq M\int_{-1}^{1} h^2(\lambda)\,d\lambda = I$$

$$\therefore\ \mathrm{Var}[\hat{p}(\omega)] = p^2(\omega)\frac{I}{N} \qquad (2.5.2)$$

onde $\frac{I}{N}$ mede a redução da variância de acordo com a janela espectral utilizada. Um parâmetro importante dos estimadores suavizados é a largura da base de uma janela retangular que forneceria a mesma variância que a do estimador suavizado por uma janela espectral não retangular, ou seja:

$$\frac{p^2(\omega)}{N}\cdot\frac{1}{b} = \frac{p^2(\omega)}{N}\cdot I.$$

Portanto:

$$b = \frac{1}{I} = \frac{1}{M\int_{-1}^{1} h^2(\lambda)d\lambda}. \qquad (2.5.3)$$

A Tabela 2.1, a seguir, relaciona algumas janelas espectrais e suas respectivas larguras de faixa, (Jenkins & Watts, 1968, p.252).

TABELA 2.1

	Função peso $(h_M(k))$	Janela espectral $(H_M(\omega))$	b	$\frac{I}{N}$
retangular	$1, \lvert k\rvert \le M$ $0, \lvert k\rvert > M$	$2M\frac{\text{sen}2\pi\omega M}{2\pi\omega M}$ $-\infty < \omega < \infty$	$\frac{1}{2M}$	$\frac{2M}{N}$
Bartlett	$1-\frac{\lvert k\rvert}{M}, \lvert k\rvert \le M$ $0, \lvert k\rvert > M$	$M\left(\frac{\text{sen}\pi\omega M}{\pi\omega M}\right)^2 \quad -\infty < \omega < \infty$	$\frac{3}{2M}$	$0{,}667\frac{M}{N}$
Turkey	$\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{k\pi}{M}\right), \lvert k\rvert \le M$ $0, \quad \lvert k\rvert > M$	$M\left(\frac{\text{sen}2\pi\omega M}{2\pi\omega M}\right)\left(\frac{1}{1-(2\omega M)^2}\right)$ $-\infty < \omega < \infty$	$\frac{2\pi}{M}$	$0{,}75\frac{M}{N}$

OBSERVAÇÕES - I) À medida que M aumenta diminui a largura da faixa.

II) A variância do estimador espectral suavizado é inversamente proporcional à largura da faixa. Assim, a uma maior largura da faixa está associada uma menor variância, entretanto, aumentando a largura da faixa também aumentará o vício do estimador e vice-versa.

Vantagens de se trabalhar no domínio da freqüência:

i) Se a seqüência é altamente correlacionada, o periodograma é aproximadamente não correlacionado;

ii) não precisamos conhecer a distribuição das variáveis a serem transformadas;

iii) a distribuição do periodograma é conhecida.

CAPÍTULO 3

ESTIMAÇÃO DO ESPECTRO NA FREQÜÊNCIA ZERO

3.1 - INTRODUÇÃO

O nosso objetivo é estimar a variância de um processo estacionário de segunda ordem utilizando o estimador espectral na freqüência zero, denotado por $p(0)$.

Podemos fazer isso de duas maneiras: através do estimador espectral suavizado de covariância (ver (2.4.4)) ou considerando o espectro uma função suavizada na região próxima de zero, e em seguida aplicar as técnicas de regressão. Neste caso, o espectro estimado na freqüência zero será o intercepto da função de regressão ajustada.

Suponhamos que a simulação gera uma amostra $X(1),\ldots,X(N)$ de um processo estacionário de segunda ordem. Seja a função de autocovariância como definida em (2.2.1) e suponhamos que ela seja absolutamente somável. Seja $\bar{X}$ o estimador da média μ, dado por:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X(j). \tag{3.1.1}$$

Tendo em vista que nossa seqüência é correlacionada é óbvio que a variância de $\bar{X}$ será expressa em termos da função de

covariância, ou seja:

$$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{cov}(X(i),X(j)). \qquad (3.1.2)$$

Supondo $\mu = 0$ e sabendo que $\gamma(-K) = \gamma(K)$, a soma da expressão (3.1.2) fica:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{cov}(X(i),X(j)) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} E[X(i)X(j)] =$$

$$= N\gamma(0) + \sum_{K=1}^{N-1} (N-K)\gamma(K) + \sum_{K=-(N-1)}^{-1} (N-|K|)\gamma(K) =$$

$$= \sum_{K=-(N-1)}^{N-1} (N-|K|)\gamma(K)$$

$$\therefore \sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{N} \sum_{K=-(N-1)}^{N-1} ((N-|K|)/N)\gamma(K). \qquad (3.1.3)$$

De (2.2.7) e (3.1.3) e como $\sum_{K=-\infty}^{\infty} |\gamma(K)| < \infty$, temos:

$$\lim_{N\to\infty} N\sigma^2(\bar{X}) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \gamma(K) = 2\pi p(0),$$

ou seja:

$$\sigma^2(\bar{X}) \simeq \frac{2\pi p(0)}{N}. \qquad (3.1.4)$$

Portanto, para N suficientemente grande, para estimarmos $\sigma^2(\bar{X})$ necessitamos apenas estimar $p(0)$, o espectro na freqüência zero.

3.2 - ESTIMADOR ESPECTRAL SUAVIZADO DE COVARIÂNCIA NA FREQÜÊNCIA ZERO

No capítulo anterior, o estimador espectral dado por (2.4.4) foi definido por:

$$\widehat{p(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{K=-(M-1)}^{M-1} e^{-i\omega K} h_M(K) \widehat{\gamma(K)}, \qquad -\infty < \omega < \infty \quad (3.2.1)$$

onde $h_M(K)$ é função peso,

$$H_M(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{K=-\infty}^{\infty} h_M(K) e^{-i\omega K} \quad (3.2.2)$$

à respectiva janela espectral e

$$\hat{\gamma}(K) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|K|} [X(t)-\bar{X}][X(t+|K|)-\bar{X}], \qquad |K| \leq N-1 \quad (3.2.3)$$

é a função de autocovariância amostral.

Seja:

$$\overline{p(0)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{K=-(M-1)}^{M-1} h_M(K) \gamma(K), \quad (3.2.4)$$

o espectro ponderado na freqüência zero.

Mostraremos, a partir de (3.2.3), que:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi} E[\widehat{\gamma(K)} - \gamma(K)] = -p(0) \quad (3.2.5)$$

e

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi} E[\widehat{\overline{p(0)}} - \overline{p(0)}] = -p(0) H_M(0), \quad (3.2.6)$$

onde $H_M(0)$ é obtido de (3.2.2) para $\omega = 0$.

Então:

$$E[\widehat{\gamma(K)}] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|K|} E[X(t)-\bar{X}][X(t+|K|)-\bar{X}] =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|K|} E[(X(t)-\mu-(\bar{X}-\mu))(X(t+|K|)-\mu-(\bar{X}-\mu))] =$$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_{t=1}^{N-|K|} E[(X(t)-\mu)(X(t+|K|)-\mu)] - \right.$$

$$\left. - 2NE[\bar{X}-\mu]^2 + (N-|K|)E[\bar{X}-\mu]^2 \right] =$$

$$= \frac{N-|K|}{N} \gamma(K) - \sigma^2(\bar{X}) + \frac{|K|}{N} \sigma^2(\bar{X}) =$$

$$= \gamma(K) - \sigma^2(\bar{X}) + \frac{|K|}{N} (\sigma^2(\bar{X}) - \gamma(K)).$$

Então:

$$\frac{N}{2\pi} E[\widehat{\gamma(K)}-\gamma(K)] \simeq -\frac{N}{2\pi} \sigma^2(\bar{X}) + \frac{|K|}{2\pi}(\sigma^2(\bar{X})-\gamma(K)).$$

Supondo que as autocovariâncias convergem para zero e de (3.1.4), temos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi} E[\widehat{\gamma(K)}-\gamma(K)] = -p(0).$$

Substituindo (3.2.4) em (3.2.6) temos:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi} E[\overline{\widehat{p(0)}} - \overline{p(0)}] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi} E\left[\frac{1}{2\pi} \sum_{K=-(M-1)}^{M-1} h_M(K)\widehat{\gamma(K)} - \frac{1}{2\pi} \sum_{K=-(M-1)}^{M-1} h_M(K)\gamma(K)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{K=-(M-1)}^{M-1} h_M(K) \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi} E[\widehat{\gamma(K)} - \gamma(K)].$$

De (3.2.5) temos:

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{K=-(M-1)}^{M-1} h_M(K)(-p(0)) = -p(0)H_M(0), \text{ ou seja:}$$

$$E[\overline{\widehat{p(0)}}] \simeq \overline{p(0)} - \frac{2\pi}{N} p(0)H_M(0).$$

O estimador $\overline{\widehat{p(0)}}$ tem dois vícios, um devido à suavização e o outro devido ao processo de covariâncias.

Assumindo-se que o vício da suavização é desprezível (Fishman, 1978), isto é:

$$\overline{p(0)} \simeq p(0).$$

Então:

$$E[\overline{\widehat{p(0)}}] \simeq p(0) - \frac{2\pi}{N} p(0)H_M(0) = p(0)\left[1 - \frac{2\pi}{N} H_M(0)\right].$$

Corrigindo o vício, temos que:

$$\widehat{p(0)} = \frac{\overline{\widehat{p(0)}}}{1 - \frac{2\pi}{N} H_M(0)},$$

ou seja:

$$\widehat{p(0)} = \frac{1}{1 - \frac{2\pi}{N} H_M(0)} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{K=-(M-1)}^{M-1} h_M(K) \widehat{\gamma(K)} .$$

De (3.14) temos:

$$\widehat{\sigma^2(\bar{X})} = \frac{2\pi}{N} \widehat{p(0)} .$$

Então:

$$\widehat{\sigma^2(\bar{X})} = \frac{1}{N} \left[\sum_{K=-(M-1)}^{M-1} h_M(K) \widehat{\gamma(K)} \right] \frac{1}{1 - \frac{2\pi}{N} H_M(0)} .$$

Das funções peso descritas na Tabela 2.1 as janelas espectrais correspondentes, calculadas na freqüência zero, são dadas na Tabela 3.1, abaixo:

TABELA 3.1 - Valores das janelas na freqüência zero

Janela	Função peso	$H_M(0)$
Retangular	$1, \quad \lvert K \rvert < M$	$\frac{2M-1}{2\pi}$
Bartlett	$1 - \frac{\lvert K \rvert}{M}, \quad \lvert K \rvert < M$	$\frac{M}{2\pi}$
Tukey	$\frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{K\pi}{M}\right)\right], \quad \lvert K \rvert < M$	$\frac{M}{2\pi}$

3.3 - REGRESSÃO NO PERIODOGRAMA

Como foi visto no capítulo anterior, o periodograma é assintoticamente não correlacionado, não viciado e com variân-

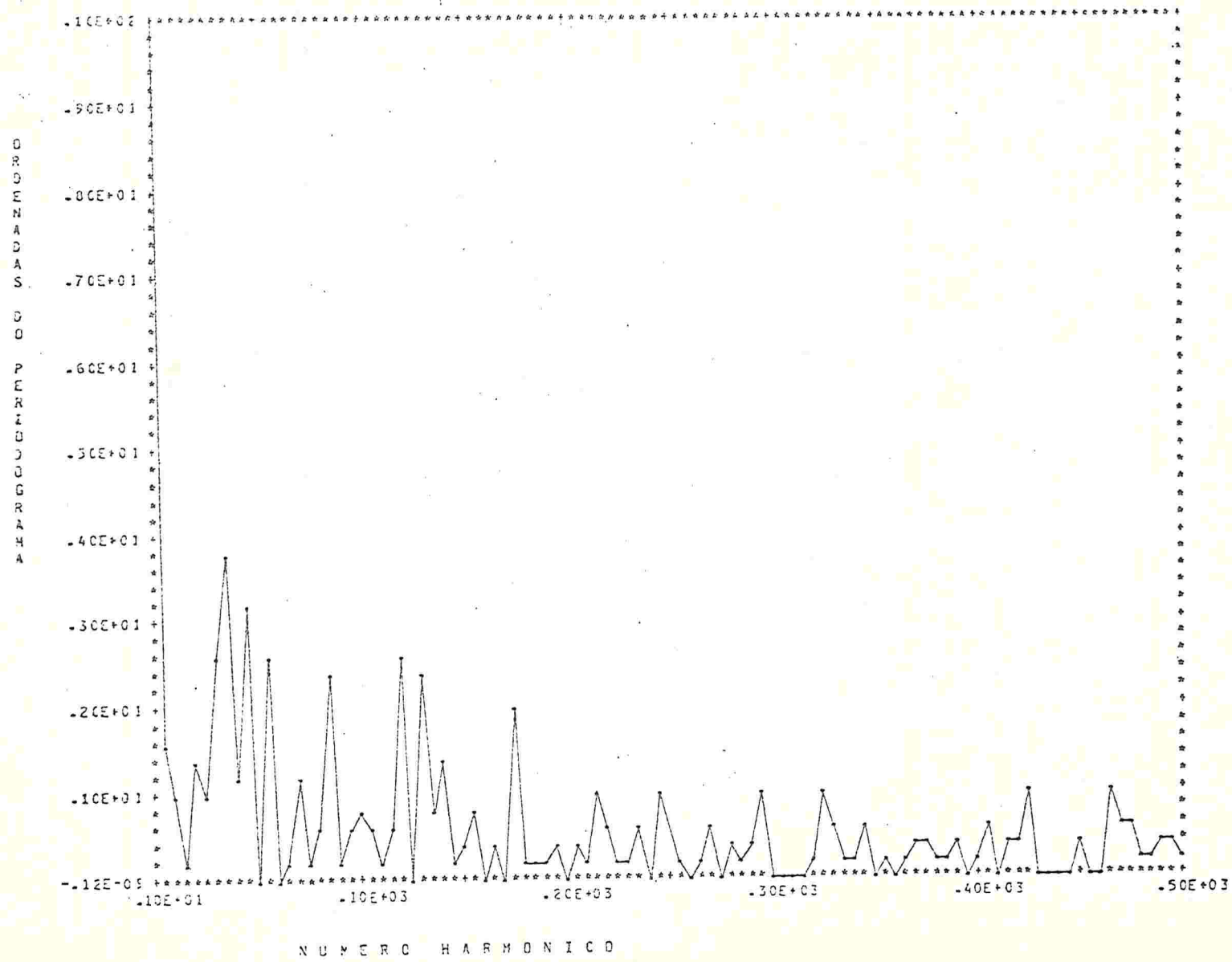

Figura 1 - Periodograma

cia $p^2(\omega)$.

Portanto, a aplicação das técnicas de regressão diretamente no periodograma se torna inadequada por dois motivos, (Heidelberger & Welch, 1981):

i) A inconsistência do periodograma;

ii) A forte assimetria de sua distribuição (ver Figura 1).

Então se tomarmos o $(\log I_n^N)$, podemos facilmente mostrar, através da técnica de transformação de variáveis que:

i) $E[\log (I_n^N)] \simeq \log p(\frac{n}{N}) - 0,577, \quad 0 < n < \frac{N}{2}$;

ii) $Var[\log(I_n^N)] \simeq 1,645$;

iii) $Cov[\log(I_n^N), \log(I_m^N)] \simeq 0, \quad n \neq m$ (3.2.1)

Entretanto, a pesar de termos a variância constante, observamos através da Figura 2 que a distribuição do $\log(I_n^N)$ tem uma forte inclinação negativa (ver Figura 2).

Felizmente a inclinação negativa pode ser reduzida pelas médias sobre os valores adjacentes do periodograma antes de tomarmos o logaritmo.

Seja

$$J(f_n) = \log \left\{ \left[I^N_{(2n-1)} + I^N_{(2n)} \right] / 2 \right\},$$

onde

$$f_n = \frac{4n-1}{2N}, \qquad 0 < n < \frac{N}{4}. \qquad (3.2.2)$$

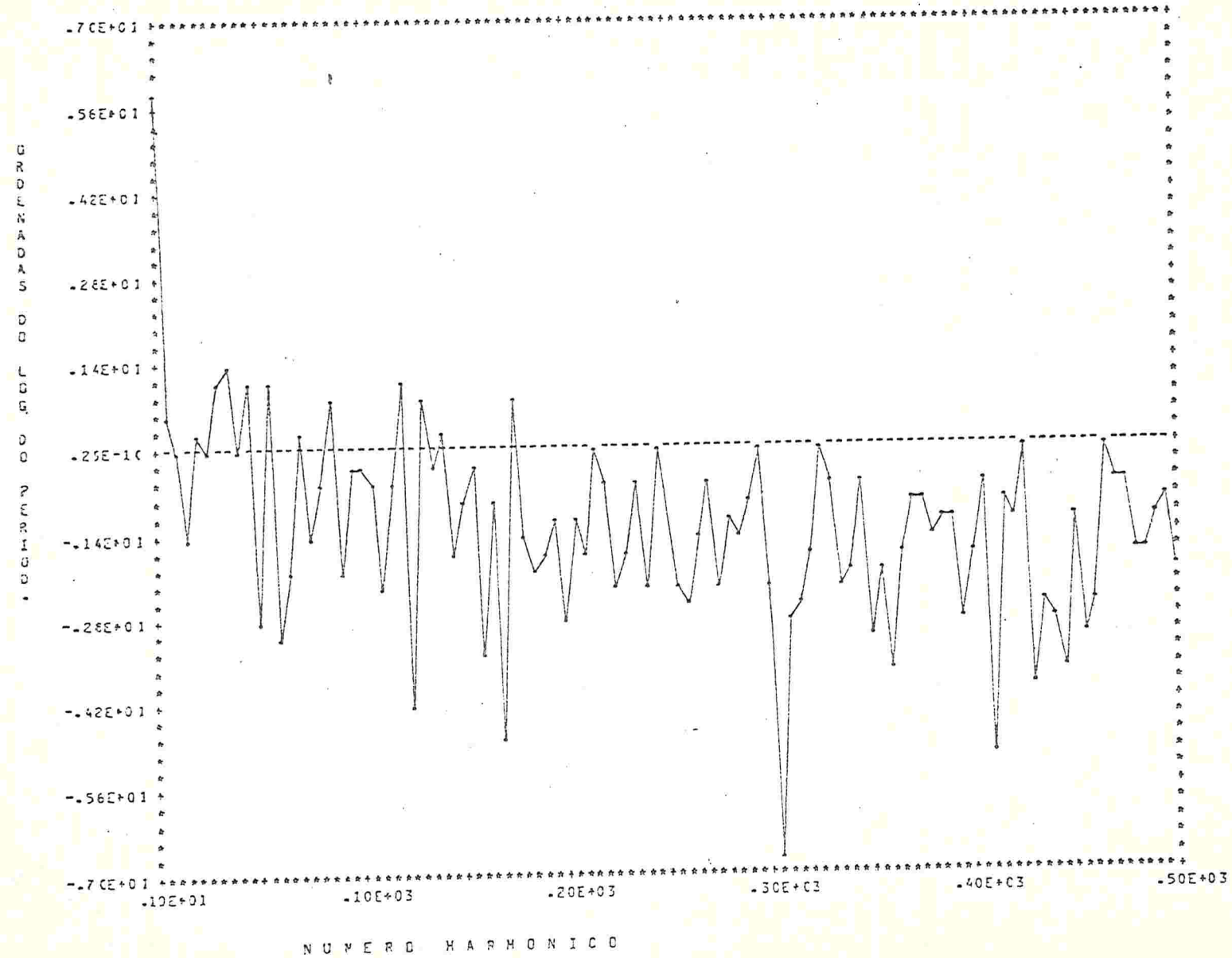

Figura 2 - Log do Periodograma

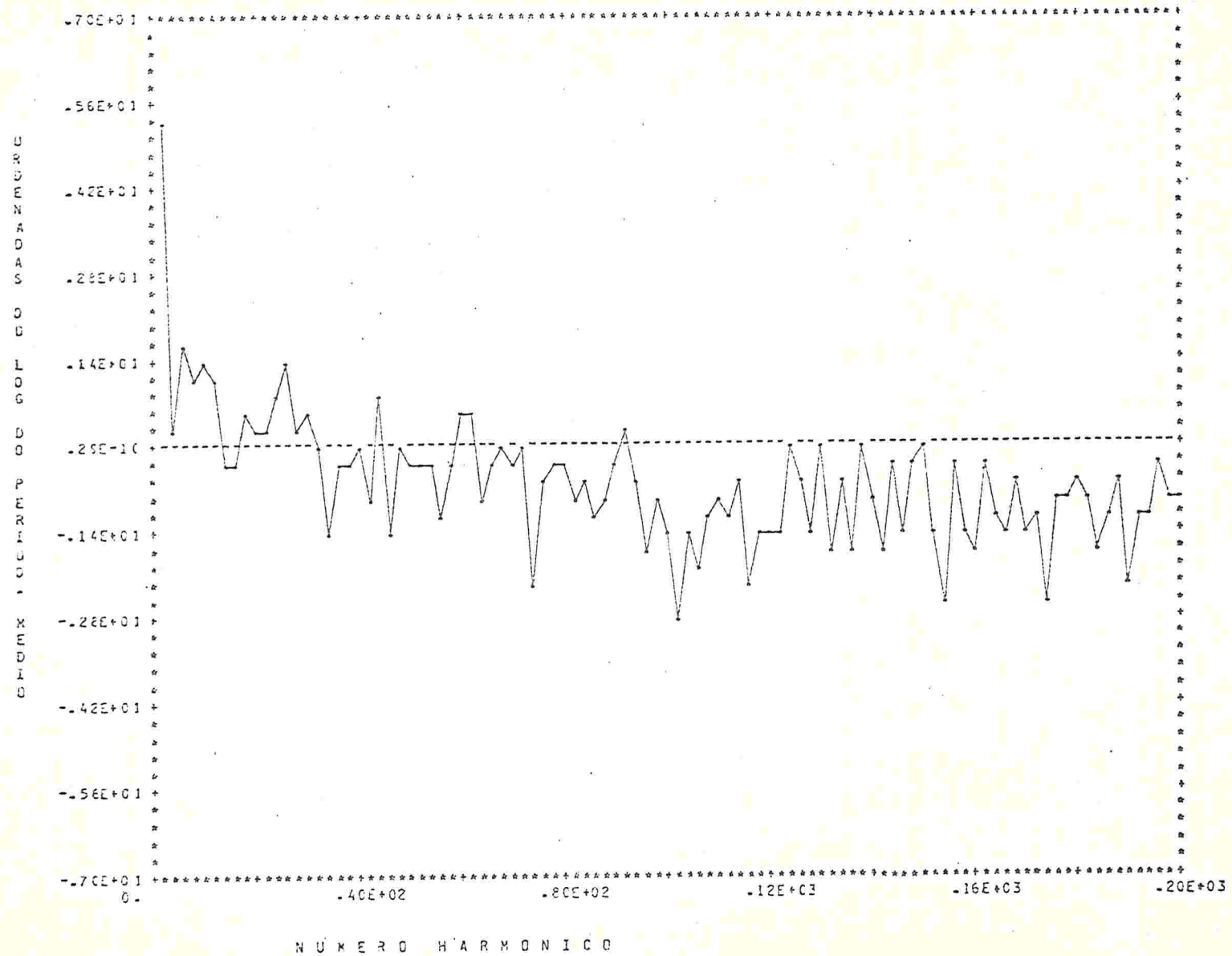

Figura 3 - Log do Periodograma Médio

OBSERVAÇÃO - Supondo normalidade

$$\left[I^N_{(2n-1)} + I^N_{(2n)}\right]/2$$

tem distribuição $\chi^2_{(4)}$. A distribuição do $\log(\chi^2_4)$ é mais simétrica do que a distribuição do $\log(\chi^2_2)$, (Bartlett & Kendall, 1946) e $J(f_n)$ tem as seguintes propriedades:

i) $E[J(f_n)] \simeq \log p(f_n) - 0,27$;

ii) $Var[J(f_n)] \simeq 0,645$,

iii) $Cov[J(f_n), J(f_m)] \simeq 0, \qquad n \neq m.$ (3.2.3)

Através do gráfico 3 notamos a diminuição da variância e a ausência da inclinação negativa, ou seja, $J(f_n)$ é bem ajustado pela aplicação do método de regressão para estimar $p(0)$, (ver Figura 3).

3.3.1 - Ajustamento

Consideremos o seguinte modelo:

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\alpha + \underset{\sim}{\varepsilon},$$

onde $Y_i = J(f_i) + 0,270$, $i = 1,\ldots,K$, e os ε_i, $i = 1,\ldots,K$, são não correlacionados e com variância 0,645.

Supondo normalidade, $E(\varepsilon_i) = 0$, $\forall i = 1,\ldots,K$, então $E(Y) = X\alpha$, onde:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & f_1 & \dots & f_1^d \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_k & \dots & f_k^d \end{bmatrix} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix}.$$

Então:

$$\varepsilon'\varepsilon = [Y - X\alpha]'[Y - X\alpha] = Y'Y - 2\alpha'X'Y + \alpha'X'X\alpha$$

como $\dfrac{\partial \varepsilon'\varepsilon}{\partial \alpha} = -2X'Y + 2\,X'X\hat{\alpha} = 0$

$$(X'X)\hat{\alpha} = X'Y, \text{ se existe } (X'X)^{-1}$$

$$\hat{\alpha} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$E(\hat{\alpha}) = (X'X)^{-1}X'E(Y) = (X'X)^{-1}(X'X)\alpha = \alpha$$

Logo,

$$E(\hat{a}_0) = a_0 = \log p(0) \qquad (3.3.1)$$

Seja $\underset{\sim}{\Sigma}$ a matriz de covariâncias de $\hat{\alpha}$.

$$\underset{\sim}{\Sigma} = E[\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})][\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})]' =$$

$$= E[(X'X)^{-1}X'Y - (X'X)^{-1}X'EY][(X'X)^{-1}\,X'Y - (X'X)^{-1}X'EY]' =$$

$$= (X'X)^{-1}X'E[Y-E(Y)][Y-E(Y)]'X(X'X)^{-1} =$$

$$= (X'X)^{-1}X'Var(\varepsilon_i)IX(X'X)^{-1} = 0{,}645(X'X)^{-1}.$$

Logo,

$$\mathrm{Var}(\hat{a}_0) = 0{,}645 S_{00}(K,d), \qquad (3.3.1.1)$$

onde $S_{00}(K,d)$ é o primeiro elemento da matriz $(X'X)^{-1}$.

Segue então que:

$$\hat{a}_0 \simeq N(\log p(0);\sigma^2), \qquad (3.3.1.2)$$

onde $\sigma^2 = 0{,}645 S_{00}(K,d)$.

DEFINIÇÃO 3.3.1.1 - Seja X uma variável aleatória positiva, e definimos $Y = \ell n\, X$. Se Y tem distribuição normal com média μ e variância σ^2, então X tem distribuição lognormal com

$$E\,X = e^{\mu+\sigma^2/2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}\,X = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}.$$

Logo $e^{\hat{a}_0}$ tem distribuição lognormal, com:

$$E[e^{\hat{a}_0}] = e^{\log p(0)+\sigma^2/2} = e^{\log p(0)} \cdot e^{\sigma^2/2} =$$

$$= p(0)e^{\sigma^2/2} \qquad (3.3.1.3)$$

$$\mathrm{Var}[e^{\hat{a}_0}] = e^{2\log p(0)+2\sigma^2} - e^{2\log p(0)+\sigma^2} =$$

$$= [p(0)]^2[e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}] \qquad (3.3.1.4)$$

De (3.3.1.3), temos:

$$\widehat{p(0)} = T(K,d) \cdot e^{\hat{a}_0}$$

é aproximadamente um estimador não viciado de p(0), onde

$$T(K,d) = e^{-\sigma^2/2},$$

e de (3.3.1.4) segue que:

$$Var[\widehat{p(0)}] = [T(K,d)]^2 Var[e^{\hat{a}_0}] =$$

$$= e^{-\sigma^2}[p(0)]^2[e^{2\sigma^2}-e^{\sigma^2}] = [p(0)]^2[e^{\sigma^2}-1] \quad (3.3.1.5)$$

Então o coeficiente de variação de $\widehat{p(0)}$ é definido por:

$$C = \frac{\sqrt{Var\ \widehat{p(0)}}}{E[\widehat{p(0)}]} = \frac{p(0)\sqrt{e^{\sigma^2}-1}}{p(0)} = \sqrt{e^{\sigma^2}-1}$$

$$\therefore\ C^2 = e^{\sigma^2}-1. \quad (3.3.1.6)$$

A escolha dos parâmetros K, o número de pontos usados no ajustamento, e d, o grau do polinômio, será analisada através da Tabela 3.2, onde obtivemos empiricamente os valores de C^2 para K e d.

TABELA 3.2 - Quadrado do Coeficiente de variação de $\widehat{p(0)}$

K \ d	1	2	3	4
15	0,199	0,567	1,535	5,199
25	0,112	0,288	0,629	1,356
50	0,054	0,129	0,254	0,444
75	0,035	0,083	0,156	0,264
100	0,026	0,061	0,113	0,187

Observamos que a variância de $\widehat{p(0)}$ diminui à medida que d decresce, e para um K grande temos uma variância pequena.

Embora um d grande se adaptaria melhor à complexidade do

espectro, olhando para o gráfico da Figura 3 é razoável pensarmos num polinômio de grau 2.

Logo, em nossa aplicação, um K grande e um d pequeno serão considerados.

3.4 - APLICAÇÕES

Os resultados foram obtidos baseados na simulação da seqüência $\{X_t, t \geq 0\}$ do número de clientes no sistema em um processo M/M/1, com tempos entre chegadas exponencialmente distribuídos com parâmetro $\lambda = 4,0$ e tempos de atendimentos também exponencialmente distribuídos com parâmetro $\mu = 5,0$, resultando em uma taxa de ocupação $\rho = 0,8$.

A simulação deste processo nos permite observar $X(t)$, o número de clientes no sistema, continuamente. Mas, por conveniência computacional, é desejável discretizar $X(t)$ em intervalos de tempo Δt igualmente espaçados.

Entretanto, se certos cuidados não forem tomados no processo de amostragem, o espectro estimado através da série discreta pode ser bastante diferente do espectro da série original.

Isto acarreta um problema na determinação do intervalo amostral, onde a amostra consiste de observações $X(t)$ nos instantes $\Delta t, 2\Delta t, \ldots, N\Delta t$.

Neste caso, a maior freqüência observada é $\pi/\Delta t$, denominada freqüência de Nyquist.

Entretanto, se o espectro de $X(t)$ não se anula para freqüências maiores que $\pi/\Delta t$, é impossível distinguirmos entre freqüências no intervalo $[0,\pi/\Delta t]$ e freqüências que estão fora deste intervalo.

Tal fenômeno é denominado "aliasing".

Logo, toda freqüência ω tal que $\omega \notin [0,\pi/\Delta t]$ tem um alias neste intervalo, denominado alias principal.

Uma maneira de se evitar o "aliasing" é escolher Δt tal que o espectro põe massa zero em freqüências maiores que a freqüência de Nyquist.

Em nosso exemplo analisamos Δt a partir de uma aproximação teórica do espectro para uma fila M/M/1, obtida por Morse, (Morse, 1955).

Construímos o gráfico de $p(\omega)$ (ver Figura 4), onde notamos que a maior freqüência observada ocorre na freqüência π, o que nos leva a um intervalo amostral $\Delta t = 1$.

Para gerar os intervalos de confiança foram utilizados os métodos de réplicas e de blocos.

O método de réplicas consiste em gerar ℓ rodadas independentes de simulação com n observações em cada uma, sob as mesmas condições iniciais e usando-se seqüências diferentes de números aleatórios.

Denotemos por X_{ij}, $i = 1,\ldots,\ell$; $j = 1,\ldots,n$, as $N = \ell \cdot n$ observações.

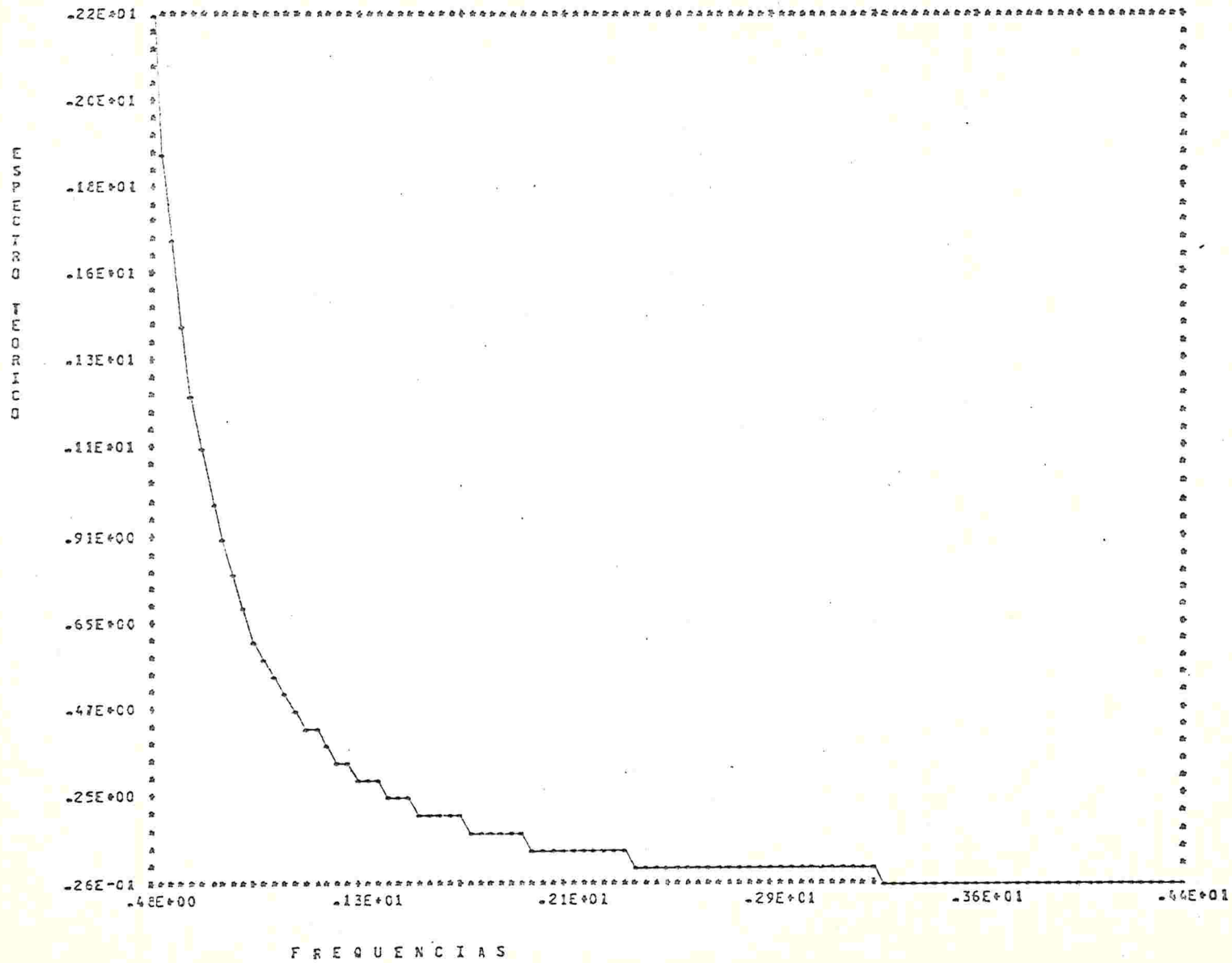

Figura 4 - Espectro de uma fila M/M/1

Designamos $\bar{X}_i$ a média da i-ésima réplica, dada por:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}, \qquad i = 1,\ldots,\ell \tag{3.4.1}$$

e a média geral por:

$$\bar{X} = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \bar{X}_i . \tag{3.4.2}$$

Seja $\mu(n) = E(\bar{X}_i)$, $i = 1,\ldots,\ell$ e notemos que

$$\mu(n) \longrightarrow \mu \text{ quando } N \longrightarrow \infty.$$

Fazendo uma aproximação que consiste em supor os $\bar{X}_i$ independentes e identicamente distribuídos com distribuição normal pode-se aplicar o Teorema do Limite Central para construir um intervalo de confiança para μ, com $(1-\alpha)\%$ de confiança que será dado por:

$$(\bar{X} - \sqrt{\widehat{\sigma^2(\bar{X})}} \cdot t_{(\ell-1,1-\alpha/2)},\ \bar{X} + \sqrt{\widehat{\sigma^2(\bar{X})}} \cdot t_{(\ell-1,1-\alpha/2)}) \tag{3.4.3}$$

Baseado no estimador espectral visto anteriormente, o estimador de $2\pi p(0)$ será denotado por $\hat{\omega} = 2\pi\widehat{p(0)}$.

De (3.4.3), um intervalo de confiança para a média μ é dado por:

$$(\bar{X} \pm \sqrt{\hat{\omega}/n} \cdot t_{(\ell-1,1-\alpha/2)}), \tag{3.4.4}$$

TABELA 3.3 - Resultados da Simulação para réplicas

Estimador Espectral	Lags M	Pontos K	Média $\overline{\hat{\omega}}$	Desvio Padrão $S_{\hat{\omega}}$	Intervalo de 90% de Confiança para ω		Intervalo de 90% de Confiança para L	
					Inferior	Superior	Inferior	Superior
Janela Retangular	50	-	196,188	213,920	79,285	313,090	3,028	4,614
	150	-	291,251	464,402	37,466	545,036	2,854	4,788
	250	-	250,661	338,910	65,454	435,868	2,924	4,718
	350	-	324,384	366,724	123,977	524,790	2,801	4,801
Janela de Bartlett	50	-	185,123	173,198	90,475	279,772	3,050	4,592
	150	-	218,653	258,090	77,613	359,694	2,983	4,659
	250	-	241,413	314,413	69,593	413,233	2,941	4,701
	350	-	253,730	324,740	76,267	431,193	2,919	4,723
Janela de Tukey	50	-	200,088	189,403	96,584	303,593	3,020	4,622
	150	-	222,930	265,877	77,634	368,226	2,975	4,667
	250	-	250,661	338,910	65,454	435,868	2,924	4,718
	350	-	266,142	366,313	65,960	466,324	2,897	4,745
Regressão (d=2)	-	50	535,742	459,458	284,659	786,826	2,510	5,132
	-	75	450,100	359,967	253,896	647,324	2,619	5,023
	-	100	343,405	226,528	219,613	467,198	2,771	4,871
	-	125	278,951	175,037	183,297	374,605	2,875	4,767

OBSERVAÇÃO - Os dados dessa tabela foram obtidos através dos programas listados no Apêndice.

onde

$$\bar{\hat{\omega}} = 2\pi\overline{\widehat{p(0)}}, \quad \overline{\widehat{p(0)}} = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell}\widehat{p_i(0)} \text{ e } \widehat{p_i(0)}$$

é o estimador espectral da i-ésima réplica ($1 \leq i \leq \ell$).

Os intervalos de confiança para ω, através dos quais poderemos observar a variabilidade dos estimadores espectrais entre réplicas, são dados por:

$$(\bar{\hat{\omega}} \pm S_{\hat{\omega}}/\sqrt{\ell} \cdot t_{(\ell-1,1-\alpha/2)}), \qquad (3.4.5)$$

onde

$$S^2_{\hat{\omega}} = \frac{1}{\ell-1}\sum_{i=1}^{\ell}(\hat{\omega}_i - \bar{\hat{\omega}})^2.$$

O valor teórico de ω foi determinado através de integração numérica de $\gamma(K)$ por Duket, (Duket & Pritsker, 1978), e para uma fila M/M/1 com $\lambda = 4,0$ e $\mu = 5,0$, ω assume o valor 361.

A Tabela 3.3 apresenta os resultados de 10 rodadas de simulação de comprimento $N = 1.024$ cada uma, onde foram gerados intervalos de confiança para ω e para a média $L = 4,0$ do número de clientes no sistema, com coeficiente de confiança 90%.

A partir da Tabela 3.3 podemos observar os seguintes fatos:

i) grande variação de $\hat{\omega}$ entre réplicas para ambos os métodos.

ii) Para os estimadores suavizados de covariância notamos a presença de um vício negativo para todos os valores de $\bar{\hat{\omega}}$ (são menores que 361), independentemente da janela escolhida e do M utilizado.

iii) Para o ajustamento polinomial obtido pela regressão observamos que os intervalos, os quais realmente contém ω, apresentam menor variação entre réplicas.

iv) Verificou-se também uma redução de 75% no tempo de computação para o método da regressão em relação a utilização das janelas espectrais, fato que já esperávamos devido às somas sobre funções de autocovariância quando um M grande é escolhido.

O outro método utilizado na geração de intervalos de confiança foi o método de blocos, que consiste em obter-se uma única rodada de simulação de comprimento N, e então dividir as observações em ℓ blocos, com n observações em cada um.

Interpretamos $\bar{X}_i$ dado por (3.4.1) como a média das observações do i-ésimo bloco, e então $\bar{X}$ dado por (3.4.2) será a média das médias dos blocos.

Suponhamos que para n suficientemente grande os $\bar{X}_i$ são não correlacionados.

A aproximação adotada aqui consiste em supor que os $\bar{X}_i$ são normalmente distribuídos, e portanto independentes.

Sob essas mesmas condições e interpretando $\sigma^2(\bar{X})$ por

TABELA 3.4 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO PARA BLOCOS

Estimador Espectral	Desvio Padrão $S_{\bar{X}}$	Intervalo de 90% de confiança para média L	
		Inferior	Superior
Janela Retangular (M=30)	0,196	3,340	3,988
	0,161	3,688	4,222
	0,115	3,804	4,185
	0,135	3,706	4,154
	0,153	3,479	3,983
	0,087	3,774	4,062
	0,050	4,011	4,178
	0,338	3,456	4,574
Janela de Bartlett (M=30)	0,165	3,391	3,937
	0,149	3,708	4,202
	0,196	3,671	4,318
	0,139	3,700	4,160
	0,190	3,417	4,044
	0,173	3,633	4,204
	0,203	3,759	4,430
	0,256	3,592	4,438
Janela de Tukey (M=30)	0,168	3,385	3,942
	0,146	3,714	4,197
	0,207	3,652	4,337
	0,139	3,699	4,160
	0,200	3,400	4,462
	0,180	3,620	4,216
	0 212	3,745	4,444
	0,260	3,586	4,444
Regressão (d = 2) (K=50)	0,250	3,251	4,077
	0,255	3,534	4,376
	0,294	3,509	4,480
	0,195	3,608	4,252
	0,306	3,225	4,237
	0,312	3,402	4,434
	0,381	3,464	4,725
	0,202	3,682	4,348

OBSERVAÇÃO - Os dados dessa tabela foram obtidos através dos programas listados no Apêndice.

$$\frac{2\pi\widehat{p(0)}}{\ell},$$

a fórmula (3.4.3) nos dá um intervalo de confiança para a média μ com $(1-\alpha)\%$ de confiança.

Comparações entre réplicas e blocos foram feitas por Law, (Law, 1977).

Para este método realizamos uma única rodada de comprimento 11.000, utilizando a mesma seqüência de números aleatórios para os diversos estimadores. As 1.000 primeiras observações foram desprezadas com a finalidade de eliminar os efeitos da fase transitória.

As $N = 10.000$ observações restantes foram divididas em 200 blocos de comprimento $n = 50$.

A título de ilustração apresentamos na Tabela 3.4 os oito primeiros intervalos de confiança de uma seqüência de 200 intervalos gerados para a média L do número de clientes no sistema com nível de confiança de 90%.

Observamos aqui uma melhora significante nos intervalos de confiança para L em relação àqueles gerados no método anterior (ver última coluna da Tabela 3.3).

Finalmente geramos 200 intervalos de confiança sob as mesmas condições anteriores e, para cada um deles, foi verificado se ele realmente continha o valor teórico de L ou não, obtendo-se as seguintes probabilidade de cobertura apresentadas na Tabela 3.5.

TABELA 3.5 - Probabilidades de cobertura

Estimador Espectral	Probabilidade de cobertura
Janela Retangular	0,74
Janela de Tukey	0,86
Janela de Bartlett	0,87
Regressão	0,98

OBSERVAÇÃO - Os dados dessa tabela foram obtidos através do programas listados no Apêndice.

Com estes resultados podemos concluir que o método da regressão se adapta melhor aos problemas de simulação. Quanto aos outros irá depender muito da escolha de uma janela espectral adequada, restando ainda o problema da elevação do tempo de computação, citado anteriormente.

A baixa cobertura da janela retangular pode ser justificada devido à própria estrutura da janela, pois ela subestima $\widehat{p(0)}$ devido às altas ponderações nos extremos.

Para maiores detalhes consultar Duket & Pritsker (1978) e Heidelberger & Welch (1981).

B I B L I O G R A F I A

BARTLETT, M.S. & KENDALL, D.G. 1946. The statistical analysis of variance-heterogeneity and the lograrithmic transformation. *Journal of the Royal Statistical Society*, *8*(2):128-138. Supplement.

BEAMISH, N. & PRIESTLEY, M.B. 1981. A study of autoregressive and window spectral estimation. *Applied Statistics*, *30*(1):41-58.

BLOOMFIELD, P. 1976. *Fourier analysis of time series: an introduction*. New York, John Wiley. 258p. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics)

BRILLINGER, D.R. 1969. Asymptotic properties of spectral estimates of second order. *Biometrika*, *56*(2):375-390.

BRILLINGER, D.R. 1973. Estimation of the mean of a stationary time series by sampling. *Journal of Applied Probability*, *10*(2):419-431.

COOLEY, J.W.; LEWIS, P.A.W.; WELCH, P.D. 1969. The finite Fourier transform. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, *AU-17*(2):77-85.

DANTAS, C.A.B. *Análise estatística em simulação.* (a ser publicado)

DANTAS, C.A.B. & RODRIGUES, F.W. 1977. *Tópicos de processos estocásticos.* Rio de Janeiro, IMPA. 223p. Trab. apres. ao 11º Colóquio Brasileiro de Matematica, Poços de Caldas, 1977.

DUKET, S.D. & PRITSKER, A.B. 1978. Examination of simulation output using spectral methods. *Mathematics and Computers in Simulation, 20*:53-60.

FIGUEIREDO, D.G. de. 1977. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Rio de Janeiro, IMPA. 274p. (Projeto Euclides)

FISHMAN, G.S. 1971. Estimating sample size in computing simulation experiments. *Management Science, 18*(1):21-38

FISHMAN, G.S. 1978. *Principles of discrete event simulation.* New York, John Wiley. 514p. (Wiley Series on Systems Engineering and Analysis)

FISHMAN, G.S. & KIVIAT, P.J. 1967. The analysis of simulation-generated time series. *Management Science, 13*(7): 525-557.

GRANGER, C.W.J. & HUGHES, A.O. 1968. Spectral analysis of short series - a simulation study. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 131*(1):83-99.

HEIDELBERGER, P. & WELCH, P.D. 1981. A spectral method for confidence interval generation and run length control in simulations. *Communications of ACM, 24*(4):233-245.

JENKINS, G.M. & WATTS, D.G. 1968. *Spectral analysis and its applications*. San Francisco, Holden-Day. 525p.

KLEINROCK, L. 1975-76. *Queueing systems*. New York, John Wiley & Sons. 2v.

KOOPMANS, L.H. 1974. *The espectral analysis of time series* New York, Academic Press. 366p. (Probability and Mathematical Statistics, 22)

LAW, A.M. 1977. Confidence intervals in discrete event simulation: a comparison of replication and batch means. *Naval Research Logistics Quarterly*, 24:667-678.

LAW, A.M. & CARSON, J.S. 1979. A sequential procedure for determining the length of a steady-state simulation. *Operations Research*, 27(5):1011-1025.

MORETTIN, P.A. 1979. *Análise harmônica de processos estocásticos*. Rio de Janeiro, IMPA. 176p. Trab. apres. ao 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1979.

MORETTIN, P.A. & TOLOI, C.M.C. 1981. *Modelos para previsão de séries temporais*. Rio de Janeiro, IMPA. 2v. Trab. apres. ao 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1981.

MORSE, P.M. 1955. Stochastic properties of waiting lines. *Journal of the Operations Research Society of America*, 3 (3):255-261.

NAYLOR, T.H.; WERTZ, K.; WONNACOTT, T.H. 1969. Spectral analysis of data generated by simulation experiments with econometric models. *Econometrica*, 37(2):333-352.

NESS, J.W. van. 1966. Asymptotic normality of bispectral estimates. *Annals of Mathematical Statistics*, 37(5):1257-1272.

NURI, W.A. & HERBST, L.J. 1969. Fourier methods in the study of variance fluctuations in time series analysis. *Technometrics*, *11*(1):103-113.

WAHBA, G. 1980. Automatic smoothing of the log periodogram. *Journal of the American Statistical Association*, 75(369): 122-132.

WOODROOFE, M.B. & NESS, J.W. van. 1967. The maximum deviation of sample spectral densities. *Annals of Mathematical Statistics*, *38*(5):1558-1569.

APÊNDICE

B L O C O S C N D I S K
= = = = = = = = = = = = = =

```
C     ESTE PROGRAMA GERA INTERVALOS DE CONFIANCA PARA MEDIA, USANDO O **
C     METODO DE BLOCOS E ESTIMA A VARIANCIA ATRAVES DO ESTIMADOR ESPEC-
C     TRAL NA FREQUENCIA ZERO ***********************************************
C     NB        NUMERO DE BLOCOS ************************************************
C     N         COMPRIMENTO DE CADA BLOCO ***************************************
C     XC        TAXA DE CHEGADA *************************************************
C     XS        TAXA DE SERVICO *************************************************
C     INC       INTERVALO DE AMOSTRAGEM *****************************************
C     KEX       SEMENTE *********************************************************
C     ALFA      NIVEL DE SIGNIFICANCIA ******************************************
C     TM        NUMERO MEDIO NO SISTEMA TEORICO *********************************
C     ID        GRAU DO POLINOMIO ***********************************************
C     KK        NUMERO DE PONTOS DO AJUSTAMENTO *********************************
C     M         LAG WINDOW ******************************************************

      DIMENSION IWK(513),WK(513),WKAREA(7),SN(1024),XN(300),UF(512)
      DIMENSION Z(512),Y(150,5),Y1(5,150),Y3(5,5),Y3INV(5,5)
      COMPLEX X(513)
      DATA XC/4.0/,XS/5.0/,INC/1/
      READ(5,/) M,N,NB,LF

      002:000F:1  IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT
      READ(5,/) KEX,ALFA,TM,ID,KK
      002:0020:1  IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT
      READ(5,/) I1,I2,I3,I4
      002:002F:1  IS THE LOCATION FOR EXCEPTIONAL ACTION ON THE I/O STATEMENT
      DO 200 LP=1,LF
      JJ=0
      REL=INC
      R=2**19*(2*KEX+1)
C     ***** FASE TRANSITORIA *****
      DO 39 LL=1,20
   39 CALL SIM(N,XC,XS,INC,SN,R,REL,JJ,PC,FS)
C     ***************************
      DO 96 LL=1,NB
      CALL SIM(N,XC,XS,INC,SN,R,REL,JJ,PC,FS)
      SM=0.0
      DO 69 I=1,N
   69 SM=SM+SN(I)
   96 XN(LL)=SM/N
      SM=0.0
      DO 10 I=1,NB
      SN(I)=XN(I)
   10 SM=SM+SN(I)
      SM=SM/NB
      WRITE(6,1) XC,XS,TM,NB,N,SM,M,ID,KK
```

```
C     ************** AJUSTAMENTO POLINOMIAL ***************************
      CALL FFTRC(SN,NB,X,IWK,WK)
      DO 30 I=1,NB/2
   30 Z(I)=(REAL(X(I))**2+AIMAG(X(I))**2)/NB
      DO 40 I=1,NB/4
      UF(I)=(4*FLOAT(I)-1)/(2*NB)
   40 Z(I)=ALOG((Z(2*I-1)*Z(2*I))/2)
      KD=ID+1
      DO 60 I=1,KK
      Y(I,1)=1.0
      Y1(1,I)=Y(I,1)
      DO 60 J=2,KD
      Y(I,J)=UF(I)**(J-1)
   60 Y1(J,I)=Y(I,J)
      DO 70 J=1,KD
      DO 70 K=1,KD
      Y3(J,K)=0.0
      DO 70 I=1,KK
   70 Y3(J,K)=Y3(J,K)+Y1(J,I)*Y(I,K)
      IDGT=0
      CALL LINVIF(Y3,KD,5,Y3INV,IDGT,WKAREA,IER)
      DO 80 I=1,KD
      SN(I)=0.0
      DO 80 J=1,KK
   80 SN(I)=SN(I)+Y1(I,J)*(Z(J)+0.27)
      AO=0.0
      DO 90 J=1,KD
   90 AO=AO+Y3INV(1,J)*SN(J)
      VAR=0.645*Y3INV(1,1)
      C1KD=EXP(-VAR/2)
      C2=2/(EXP(VAR)-1)
      POT=C1KD*EXP(AO)
C     ***********************************************************************
      WRITE(6,2)
      CALL CONFIA(POT,NB,ALFA,SM,TM,I1)
      DO 100 I=1,NB
  100 SN(I)=XN(I)
      CALL FISHM(UF,SN,SM,NB,M)
      WRITE(6,3)
      CALL TUKEY(UF,NB,M,POT)
      CALL CONFIA(POT,NB,ALFA,SM,TM,I2)
      WRITE(6,4)
      CALL BARTL(UF,NB,M,POT)
      CALL CONFIA(POT,NB,ALFA,SM,TM,I3)
      WRITE(6,5)
      CALL RETAN(UF,NB,M,POT)
      CALL CONFIA(POT,NB,ALFA,SM,TM,I4)
  200 KEX=KEX+1
      PRO1=FLOAT(I1)/LF
      PRO2=FLOAT(I2)/LF
      PRO3=FLOAT(I3)/LF
      PRO4=FLOAT(I4)/LF
      WRITE(6,2)
      WRITE(6,7) PRO1
      WRITE(6,3)
      WRITE(6,7) PRO2
      WRITE(6,4)
      WRITE(6,7) PRO3
      WRITE(6,5)
      WRITE(6,7) PRO4
```

```
1 FORMAT(///,2X,"TAXA DE CHEGADA :",F6.3,/,
 C          2X,"TAXA DE SERVICO :",F6.3,/,
 C          2X,"N. MEDIO TEORICO :",F6.3,/,
 C          2X,"NUMERO DE BLOCOS :",I3,/,
 C          2X,"COMPRIMENTO DE CADA BLOCO :",I3,/,
 C          2X,"MEDIA AMOSTRAL :",F6.3,/,
 C          2X,"LAG WINDOW :",I3,/,
 C          2X,"GRAU DO POLINOMIO  :",I3,/,
 C          2X,"N. DE PONTOS AJUSTADOS :",I3)
2 FORMAT(///,2X,"**** AJUSTAMENTO POLINOMIAL ****")
3 FORMAT(///,2X,"**** JANELA DE TUKEY ****")
4 FORMAT(///,2X,"**** JANELA DE BARTLETT ****")
5 FORMAT(///,2X,"**** JANELA RETANGULAR ****")
7 FORMAT(///,2X,"PROB. DE COBERTURA = ",F8.3,///,
 C          2X,"*********************************")
  STOP
  END
```

```
      SUBROUTINE CONFIA(POT,NB,ALFA,SM,TM,I)
C     ESTA SUROTINA CALCULA E IMPRIME O INTERVALO DE CONFIANCA PARA ****
C     MEDIA ***********************************************************
C     VARIAVEIS DE ENTRADA ********************************************
C     POT - ESTIMADOR DE 2*PI*P(0) ************************************
C     NB - NUMERO DE BLOCOS *******************************************
C     ALFA - NIVEL DE SIGNIFICANCIA ***********************************
C     SM - MEDIA AMOSTRAL *********************************************
C     TM - MEDIA TEORICA ******************************************
C     VARIAVEL DE SAIDA ***********************************************
C     I - CONTADOR DE COBERTURA ***************************************
      REAL INFX
      IF(POT.LE.0) RETURN
      DPO=SQRT(POT/NB)
      TL=NB-1
      CALL MDSTT(ALFA,TL,TC,IER)
      INFX=SM-TC*DPO
      SUPX=SM+TC*DPO
      IF(TM.LT.INFX.OR.TM.GT.SUPX) GO TO 5
      I=I+1
    5 WRITE(6,6) DPO,TC,INFX,SUPX
    6 FORMAT(//,2X,"DESVIO PADRAO :",F8.3,/,
 C          2X,"T STUDENT :",F8.3,/,
 C          2X,"INTERVALO P/ MEDIA :  INFERIOR =",F8.3,/,
 C          2X,"                      SUPERIOR =",F8.3)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SIM(N,XC,XS,INC,SN,R,REL,JJ,PC,FS)
C     ESTA SUBROTINA SIMULA UMA FILA M/M/1 OBTENDO O NUMERO *********
C     DE CLIENTES NO SISTEMA EM INTERVALOS DE TEMPO INC *************
C     VARIAVEIS DE ENTRADA: N,XC,XS,INC E R ***************************
C     VARIAVEL DE SAIDA: SN ***************************************
      DIMENSION SN(1024)
      II=0
      IF(REL-1)99,99,101
   99 PC=-1/XC*ALOG(RANDOM(R))
  100 T=-1/XS*ALOG(RANDOM(R))
      FS=PC+T
  101 IF(PC-FS)105,102,102
  102 IF(REL-FS)104,103,103
  103 JJ=JJ-1
      IF(JJ)100,100,70
   70 T=-1/XS*ALOG(RANDOM(R))
      FS=FS+T
      GO TO 101
  104 IF(II-N)111,110,110
  111 II=II+1
      SN(II)=JJ
      REL=REL+INC
      GO TO 102
  105 IF(REL-PC)108,106,109
  106 JJ=JJ+1
      IF(II-N)112,110,110
  112 II=II+1
      REL=REL+INC
      SN(II)=JJ
  107 T=-1/XC*ALOG(RANDOM(R))
      PC=PC+T
      GO TO 101
  108 IF(II-N)113,110,110
  113 II=II+1
      SN(II)=JJ
      REL=REL+INC
      GO TO 105
  109 JJ=JJ+1
      GO TO 107
  110 RETURN
      END
```

==========

```
      SUBROUTINE FISHM(UF,SN,SM,N,M)
C     ESTA SUBROUTINE CALCULA AS AUTOCOVARIANCIAS AMOSTRAIS
C     ENTRADA                                SAIDA
C     SN    SERIE DE VALORES ORIGINAL        UF(K) COVARIANCIA, K=0,M-1
C     N     COMPRIMENTO DA SERIE
C     SM    MEDIA AMOSTRAL
C     M     LAG WINDOW
      DIMENSION UF(512),SN(1024)
      DO 600 J=1,M
      UF(J)=0.0
      DO 500 K=1,N-J+1
      KJ=K+J-1
  500 UF(J)=UF(J)+(SN(K)-SM)*(SN(KJ)-SM)
  600 UF(J)=UF(J)/N
      RETURN
      END
```

==========

```
      SUBROUTINE TUKEY(UF,N,M,POT)
C     ESTA SUBROUTINE SUAVIZA AS COVARIANCIAS ATRAVES DA
C     JANELA DE TUKEY
C     ENTRADA                                SAIDA
C     UF(K) COVARIANCIA, K=0,M-1             POT  ESTIMADOR ESPECTRAL NA
C                                            FREQUENCIA ZERO
C     N      COMPRIMENTO DA SERIE
C     M      LAG WINDOW
      DIMENSION UF(512)
      DATA PI/3.141593/
      SOMA=0.0
      DO 700 J=1,M-1
      KJ=J+1
      PESO=1+COS(PI*FLOAT(J)/FLOAT(M))
  700 SOMA=SOMA+PESO*UF(KJ)
      POT=(SOMA+UF(1))/(1-FLOAT(M)/FLOAT(N))
      RETURN
      END
```

==========

```
      SUBROUTINE BARTL(UF,N,M,POT)
C     ESTA SUBROUTINE SUAVIZA AS COVARIANCIAS ATRAVES DA
C     JANELA DE BARTLETT
C     ENTRADA                                SAIDA
C     UF(K) COVARIANCIA, K=0,M-1             POT  ESTIMADOR ESPECTRAL NA
C                                            FREQUENCIA ZERO
C     N      COMPRIMENTO DA SERIE
C     M      LAG WINDOW
      DIMENSION UF(512)
      SOMA=0.0
      DO 300 J=1,M-1
      KJ=J+1
      PESO=2*(1-FLOAT(J)/FLOAT(M))
  300 SOMA=SOMA+PESO*UF(KJ)
      POT=1-FLOAT(M)/FLOAT(N)
      POT=(SOMA+UF(1))/POT
      RETURN
      END
```

==========

```
      SUBROUTINE RETAN(UF,N,M,POT)
C     ESTA SUBROTINA SUAVIZA AS COVARIANCIAS ATRAVES DA
C     JANELA RETANGULAR
C     ENTRADA                                SAIDA
C     UF(K) COVARIANCIA, K=0,M-1             POT  ESTIMADOR ESPECTRAL NA
C                                            FREQUENCIA ZERO
C     N      COMPRIMENTO DA SERIE
C     M      LAG WINDOW
      DIMENSION UF(512)
      SOMA=0.0
      DO 400 J=1,M-1
      KJ=J+1
  400 SOMA=SOMA+2*UF(KJ)
      POT=1-(2*FLOAT(M)-1)/FLOAT(N)
      POT=(SOMA+UF(1))/POT
      RETURN
      END
```

G R A F I C O S 4 C A D I S K

```
FILE  6=FILE6
C     ESTE PROGRAMA UTILIZA A SUBROTINA SIM PARA OBTER A SERIE DE ***
C     VALORES SN, ESTIMA O ESPECTRO ATRAVES DO ALGORITMO FFT E ******
C     FORNECE O GRAFICO DA SERIE ORIGINAL, DO PERIODOGRAMA, DO ******
C     LOG DO PERIODOGRAMA E DO LOG DO PERIODOGRAMA MEDIO ************

      DIMENSION IWK(10),WK(1),ITITLE(144),RANGE(4),ICHAR(10)
      DIMENSION IMAG4(5151),SN(1024),Z(512),HX(500)
      COMPLEX X(513)
      DATA ICHAR(1)/1H./,RANGE/4*0.0/,KEX/10/,PI/3.141593/
      DATA N/1024/,XC/3.0/,XS/5.0/,IRC/2/
      R=2**KEX+7
      CALL SIM(N,XC,XS,IRC,SN,R)
      DO 10 I=1,500
   10 HX(I)=1
      READ(5,1) (ITITLE(I),I=1,144)

      CALL USPLT(HX,SN,500,100,1,1,ITITLE,RANGE,ICHAR,1,IMAG4,IER)
      CALL FFTRC(SN,N,X,IWK,WK)
      DO 20 I=1,N/2
      Z(I)=(REAL(X(I))**2+AIMAG(X(I))**2)/(2*PI*N)
   20 SN(I)=ALOG(Z(I))
      RANGE(4)=10
      READ(5,1) (ITITLE(I),I=1,144)
      CALL USPLT(HX,Z,500,500,1,5,ITITLE,RANGE,ICHAR,1,IMAG4,IER)
      RANGE(3)=-7
      RANGE(4)=7
      READ(5,1) (ITITLE(I),I=1,144)
      CALL USPLT(HX,SN,500,500,1,5,ITITLE,RANGE,ICHAR,1,IMAG4,IER)
      DO 40 I=1,N/4
   40 Z(I)=ALOG((Z(2*I-1)+Z(2*I))/2)
      RANGE(2)=200
      READ(5,1) (ITITLE(I),I=1,144)
      CALL USPLT(HX,Z,500,200,1,2,ITITLE,RANGE,ICHAR,1,IMAG4,IER)
    1 FORMAT(72A1)
      STOP
      END
```

==========