FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA ORDENADA

JAIR MINORO ABE

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ÁREA: LÓGICA E FUNDAMENTOS

ORIENTADOR: PROF. DR. NEWTON CARNEIRO AFFONSO DA COSTA

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq,
Processo nº 10.2401/78

- SÃO PAULO, MAIO DE 1983 -

Aos meus pais,

Kinuko

e

Tadashi

(por ocasião de seu

sexagésimo aniversário),

por tudo que

lhes devo.

AGRADECIMENTOS

Desejamos expressar a mais profunda gratidão a várias pessoas que contribuíram para a nossa formação científica e para a consecução da presente monografia:

Aos Profs. Masakatsu Isoda e José Bartocci, prematuramente falecidos, pela valiosa ajuda em nossos primeiros passos da vida acadêmica.

Aos Profs. Julio Takara e Valentim Delponte, pelos saudosos tempos do C. E. Prof. Gabriel Ortiz.

Ao Prof. Dr. Francisco Miraglia Neto, pela orientação no Programa de Mestrado.

Ao Prof. Luiz Jean Lauand, pelo espontâneo e constante incentivo.

Aos Funcionários da Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra, pela eficiente solicitude que sempre nos dispensaram.

Ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira, pelo excelente trabalho de datilografia.

Ao Prof.Dr.Benedito Castrucci, pelo apoio recebido e pela orientação científica que nos dispensou. Em anos de convívio, em que temos tido o previlégio de ser seu discípulo, nele sempre encontramos não só o grande professor, mas, também, o amigo de todas as horas, tão próximo e acessível.

E ao Prof. Dr. Newton C.A. da Costa, os nossos agradecimentos especiais. Foi ele quem sugeriu o tema desta dissertação e graças à sua supervisão e paciente orientação foi possível a realização do presente trabalho. O Prof. Newton conseguiu, também, transmitir-nos grande parte do seu contagiante entusiasmo despertando-nos para a beleza e interesse do estudo dos Fundamentos da Geometria.

São Paulo, maio de 1983

O autor

SUMÁRIO

Sabe-se, especialmente pelos trabalhos pioneiros de Pasch (1882), seguidos pelos de Peano (1889), Hilbert (1899) e Veblen (1904), que a Geometria Ordenada pode ser o ponto de partida para a construção das Geometrias Afim e Absoluta. A partir destas últimas, edificam-se as Geometrias de Euclides e de Bolyai-Lobachevsky. A Geometria Ordenada originou-se da investigação de um núcleo de proposições comuns às Geometrias Afim e Absoluta. Verificou-se que a idéia central desse núcleo era a de "estar entre", implicitamente empregada por Euclides. Foi Pasch o primeiro a estudar em detalhe um sistema de axiomas baseado nessa idéia de ordem.

É nosso propósito, nesta dissertação, discutir as bases da Geometria Ordenada, apresentando-a de um modo sistemático e didático. São feitas duas axiomatizações da mesma (uma delas pela primeira vez estudada em detalhe neste trabalho), provando-se a sua eqüivalência. Em seguida, são apresentadas aplicações e estudados alguns resultados sobre a meta-teoria desse tipo de geometria.

Para finalizar, ainda é desejo do autor fazer justiça à potência e beleza das técnicas envolvidas e, em geral, captar algumas nuances fascinantes inerentes ao tema.

SUMMARY

It is known, especially from the pioneer work of Pasch (1882), followed by those of Peano (1889), Hilbert (1899), and Veblen (1904), that Ordered Geometry can be the starting point for the construction of the Affine and Absolute Geometries. Beginning with these last, one can build up the Geometries of Euclid and of Bolyai-Lobachevsky. Ordered Geometry had its origin in the investigation of a nucleus of propositions common to Affine Geometry and Absolute Geometry. It became clear that the central idea in these propositions is that of "betweenness", which was used implicitly by Euclid. It was Pasch who first studied in detail a system of axioms based on this idea of order.

It is our purpose, in this dissertation, to discuss the bases of Ordered Geometry, presenting it in a systematic way. We give two axiomatizations of this geometry (one of which is studied in detail for the first time in this work), and prove their equivalence. We then present some applications and study some results about the meta-theory of this type of geometry.

Finally, it is also the author's wish to do justice to the power and beauty of the techniques involved, and in general to capture some of the fascinating nuances inherent to this theme.

ÍNDICE

SUMÁRIO ix
SUMMARY xi
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1
1.1 - Objetivos. 1
1.2 - Nota Histórica 4
CAPÍTULO II - O SISTEMA AXIOMÁTICO I. 10
2.1 - Introdução 10
2.2 - Propriedades da relação "estar entre". 11
2.3 - Segmentos, segmentos abertos, semi-retas, e retas. 11
2.4 - Triângulos 14
2.5 - O Axioma de Pasch-Peano. 14
2.6 - As ordens dos pontos de uma reta 16
2.7 - Propriedades dos segmentos e segmentos abertos 26
2.8 - Topologia da reta. 31
2.9 - Propriedades das semi-retas. 32
2.10 - Orientação de uma reta. Eixos. 37
2.11 - Ordem dos pontos de um eixo. 39
CAPÍTULO III - O SISTEMA AXIOMÁTICO II E OUTRAS PROPRIEDADES DA ORDEM. 42
3.1 - O Sistema Axiomático II. 42
3.1.1 - Introdução 42
3.1.2 - Propriedades da relação de "precedência" 44
3.1.3 - Obtenção da relação "estar entre". . . 45
3.1.4 - Equivalência dos Sistemas Axiomáticos I e II 47
3.2 - Outras Propriedades da Ordem 47
3.2.1 - Propriedades dos triângulos. 47
3.2.2 - Planos 48
3.2.3 - Regiões convexas e regiões conexas . . 54
3.2.4 - Semi-planos. 56
3.2.5 - Ângulos. 60
3.2.6 - Triângulos abertos 68
3.2.7 - Topologia do plano 70
3.2.8 - Espaço 73
CAPÍTULO IV - APLICAÇÕES. 81
4.1 - O Teorema de Sylvester 82

4.2 - O Teorema de Jordan. 84

4.2.1 - Poligonais e polígonos 84
4.2.2 - Acessibilidade de pontos 85
4.2.3 - Intersecção de uma reta genérica com um polígono simples. Propriedades. . . 91
4.2.4 - O Teorema de Jordan. 98

CAPÍTULO V - ALGUNS RESULTADOS METAGEOMÉTRICOS. 102

5.1 - O Axioma de Continuidade 102
5.2 - Paralelismo. 104
5.3 - Obtenção da Geometria de Euclides. 107

5.3.1 - Homotetia e translações. 107
5.3.2 - Uma álgebra de pontos. 110
5.3.3 - Compatibilidade da relação de "precedência" com as operações "+" e ".". . . 115
5.3.4 - Uma base suficiente para a Geometria Euclidiana 117

5.4 - Obtenção da Geometria Hiperbólica. 121
5.5 - Categoricidade 122
5.6 - Sobre a independência dos axiomas. 122
5.7 - Geometria Ordenada n-dimensional 123

CONCLUSÕES. 125

BIBLIOGRAFIA. 127

Índice de Símbolos. 129

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

§1.1 - OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é estudar os fundamentos da Geometria Ordenada através do conceito de ordem[1]. Este conceito recebe sua primeira apresentação formal com Moritz Pasch (1882) e desenvolve-se com os trabalhos de Peano (1889), Hilbert (1899) e Veblen (1904).

Nesta dissertação investigaremos a axiomática da Geometria Ordenada, onde o conceito de ordem é aplicado. O interesse do trabalho torna-se patente a quem quer que compartilhe conosco a convicção de que não há adequado estudo de Geometria sem a cuidadosa consideração de seus fundamentos.

Com efeito, desde as publicações das obras dos autores acima citados, sabe-se que a Geometria Ordenada pode ser tomada como fundamento comum das Geometrias Afim e Absoluta, e destas, por sua vez, podem-se obter as Geometrias de Euclides e de Bolyai-Lobachevsky. Só a consideração desses fatos torna imediatamente claro a extraordinária importância que adquire a Geo-

---

(1) - No decurso deste trabalho, quando nos referimos ao termo "ordem", estamos adotando o uso que esse termo tem em geometria (exceto nos casos em que, pelo contexto, claramente se possa constatar que se trata de outro uso).

metria Ordenada na área de Fundamentos de Matemática.

Daí, nosso propósito nesta dissertação: discutir as bases da Geometria Ordenada e apresentá-la de um modo sistemático e didático.

O conteúdo, em linhas gerais, tem sua pauta no clássico artigo de Oswald Veblen (1904), intitulado "A system of axioms for geometry" ([19])(2) (que é, essencialmente, a tese de doutoramento de Veblen).

Passamos a descrever os principais assuntos por nós tratados.

No Capítulo I, de caráter introdutório, incluímos além disso, uma digressão histórica sobre a geometria que estudamos, observando-se especialmente a genial caracterização da noção de ordem por Pasch.

O Capítulo II consiste na apresentação da Geometria Ordenada através de um primeiro tratamento axiomático (Axiomática I). O sistema de axiomas empregado é devido a Veblen ([19]). Os únicos conceitos primitivos são *ponto* e a relação ternária "*estar entre*" (betweenness). São estudadas as principais propriedades dos segmentos e retas. O capítulo conclui com a obtenção da relação de "precedência" em uma reta.

O Capítulo III compreende dois parágrafos. No primeiro, é feita uma segunda axiomatização para a Geometria Ordenada (Axiomática II). Os elementos de um conjunto (reta) são, nes-

(2) - Ao longo desta dissertação, [n] é a abreviação que convencionamos para as obras citadas. Títulos e dados completos encontram-se na Bibliografia.

sa axiomática, ordenados especificando-se uma relação binária chamada "precedência". Um conjunto conveniente de axiomas é escolhido para o desenvolvimento da mesma. Várias proposições são estabelecidas e o parágrafo termina demonstrando-se a eqüivalência das Axiomáticas I e II.

No segundo parágrafo, são estudadas outras noções tais como plano, semi-plano e espaço, bem como as suas principais propriedades de incidência. Tais conceitos e propriedades servem, também, de base para as questões do Capítulo IV.

O Capítulo IV é dedicado às aplicações. São estudados dois teoremas, hoje clássicos na literatura matemática: o Teorema de Sylvester e o Teorema de Jordan. Os dois problemas tratados neste capítulo nos deixam ver, de forma cristalina, que vários conceitos geométricos usuais dependem, na realidade, apenas das propriedades de ordem e constituem portanto teoremas da Geometria Ordenada.

Finalmente, no Capítulo V, são abordados alguns resultados metageométricos. São introduzidos os Axiomas da Continuidade e das Paralelas. Obtemos as Geometrias de Euclides e Hiperbólica. Discute-se, também, a categoricidade da Axiomática I e faz-se uma indicação de como se obter a Geometria Ordenada n-dimensional.

Como em muitas das áreas da moderna matemática, os fundamentos da Geometria Ordenada são formulados na linguagem da Teoria dos Conjuntos. De maneira que, para aliviar nossa exposição, empregaremos, conscientemente, alguns abusos de linguagem, a maioria de uso corrente na literatura matemática.

A Bibliografia é sucinta; limita-se ao essencial para uma visão panorâmica dos assuntos tratados.

§1.2 - NOTA HISTÓRICA

Uma análise atenta do sistema de postulados sobre os quais Euclides se baseou no seu famoso "Os Elementos", faz ver que aí há muitos apelos à intuição em definições e demonstrações. Uma dessas definições — por sinal, famosa — é a seguinte:

"Uma reta é uma linha que jaz por igual (*ex ison*) entre suas extremidades"[3].

A idéia essencial que está por trás da definição é a de "estar entre" (betweenness). Tal idéia, ainda, subjaz em um significativo núcleo de proposições comuns às Geometrias Afim e Absoluta.

Estes fatos sugerem considerar "estar entre" como conceito primitivo, de maneira que, por exemplo, a definição de segmento de reta, ficaria sendo "o conjunto de todos os pontos *entre* dois pontos dados". Foi Pasch quem em 1882 observou, magistralmente, que a Geometria de Ordem podia ser desenvolvida sem fazer referência à medida. É interessante notar que a noção de ordem era praticamente desconhecida antes do século XIX.

O sistema de axiomas de Pasch foi gradualmente aperfeiçoado por Peano (1889), Hilbert (1899) e Veblen (1904).

Para o desenvolvimento da Geometria de Ordem, várias a-

---

(3) - Cf. [10], p. 153. Euclides empregou, ao que tudo indica, o termo "reta" para o que hoje conhecemos por "segmento de reta".

xiomáticas (ainda que, evidentemente, não com esse nome), foram propostas e estudadas na época. Mencionaremos, de forma breve (apenas a caracterização da geometria da reta), duas delas: a de Pasch-Peano e a de Vailati, que diferem nos seus conceitos primitivos e nos axiomas.

Passemos à descrição do sistema de Pasch-Peano.

Consideram-se, neste sistema, dois conceitos primitivos: ponto e "estar entre".

Se a, b e c são três pontos e se c está entre a e b, dizemos que c está em ab, ou c pertence à classe de pontos ab. A classe ab obedece, de acordo com Peano, aos seguintes postulados:

I. Os pontos a e b são distintos.

II. Se a e b são distintos, então existe um ponto entre eles.

III. Se c está entre a e b, então c também está entre b e a.

IV. a não está entre a e b.

Antes do quinto postulado, uma definição: se a e b são distintos, então $a'b$ é a classe de todos os pontos c tais que b está entre a e c. Similarmente, $b'a$ é a classe dos pontos d tais que a está entre b e d. Posto isto, retornemos à enunciação dos postulados.

V. Se a e b são pontos distintos, $a'b$ contém pelo menos um ponto.

VI. Se a, b, c e d são pontos, e c está entre a e d, e b es-

tá entre a e c, então b está entre a e d.

VII. Se b e c estão entre a e d, então b está entre a e c, ou é idêntico a c, ou está entre c e d.

VIII. Se c, d pertencem a $a'b$, então ou c e d são idênticos, ou c está entre b e d, ou b está entre a e d.

IX. Se b está entre a e c, e c está entre b e d, então c está entre a e d.

Passemos, agora, ao sistema de Vailati.

Neste sistema, consideramos uma classe K de relações (que vem a ser um conceito primitivo). Se R é uma relação da classe K, R define uma reta ρ; precisamente ρ é o domínio de R. A reunião dos domínios das relações pertencentes a K chamaremos de "corpo".

Os axiomas requeridos neste sistema são como se segue:

I. Existe uma classe de relações K, cujo corpo é definido como sendo a classe dos pontos.

II. Existe pelo menos um ponto.

Se R é um termo de K, temos:

III. R é aliorelativa, isto é, para qualquer x, temos $x \not R x$.

IV. R^{-1} é um termo de K (onde R^{-1} denota a relação inversa de R).

V. $R^2 = R$ (onde $R^2 = R \circ R$ (composição de relações)).

VI. $\bar{\rho}$ (domínio de R^{-1}) está contido em ρ (domínio de R).

VII. Para quaisquer dois pontos a e b, existe um termo S de K com aSb.

VIII. Se a e b são pontos de ρ, então temos aRb ou bRa.

Naturalmente, como foi dito acima, tais axiomas (tanto no sistema de Pasch-Peano quanto no de Vailati) caracterizam a geometria da reta. Em ambas teorias, se podem formular definições convenientes de reta, plano e espaços (para isto, evidentemente, acrescentam-se os axiomas necessários).

Bertrand Russell assevera em [17], Capítulo XLVI, que os dois métodos assim descritos são igualmente legítimos e, sob o ponto de vista matemático, não há distinção entre eles. Aliás, tal geometria assim considerada, foi por ele denominada de "Geometria Descritiva"(4). Aqui cabe uma observação terminológica: Russell não foi feliz ao escolher tal denominação. Claramente, o uso dessa expressão levaria a inevitáveis ambigüidades, uma vez que "Geometria Descritiva" já tinha outro significado que não o de Geometria de Ordem. Hoje, é mais aceita a denominação devida a Artin ([1]) (p.73) de "Geometria Ordenada", que é, aliás, a que empregamos neste trabalho.

As questões acima sobre a legitimidade dessas teorias, ou de elas serem ou não distintas, e, ainda, a possibilidade de uma abordagem rigorosa da Geometria de Ordem, foram, em nosso século, paulatinamente elucidados, e hoje é possível o tratamento dessas questões de forma clara e precisa. De fato, o sistema de axiomas de Veblen ([19]) caracteriza de modo claro e rigoroso a Geometria Ordenada. Este método de conceber o assunto leva a uma notável simplificação, e combina proveitos dos dois métodos anteriormente descritos. Também as idéias de

(4) - Para um desenvolvimento mais detalhado dos sistemas vistos, bem como sobre a "Geometria Descritiva", de Russell, consultar as obras [17] e [20].

Vailati se apresentam, hoje, de forma precisa, no que chamamos Axiomática II.

A eqüivalência entre ambas axiomáticas nos diz que as noções primitivas de uma delas são definíveis em termos das noções primitivas da outra, e os axiomas de cada uma são dedutíveis dos axiomas da outra. Por conseguinte, temos que todo modelo de uma é modelo da outra, e, reciprocamente. Assim, os dois estudos abstratos decorrentes são, na realidade, o mesmo.

Consideremos, agora, o espaço cartesiano E, cujos E-pontos são todas as ternas ordenadas $X = (x_1, x_2, x_3)$ de números reais. Para quaisquer E-pontos X, Y e Z, colocamos $[XYZ]_E$ se, e somente se, X, Y e Z são distintos e $d(X,Z) = d(X,Y) + d(Y,Z)$, onde "d" é a distância usual de R^3, ou seja, se $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$, então

$$d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2}$$

(onde as operações entre números reais são as operações usuais). Pode-se mostrar, sem dificuldade, que a interpretação E-pontos e $[XYZ]_E$ é um modelo para a Axiomática I. Vê-se, por conseguinte, que nossa geometria é consistente se a análise o for, isto é, a questão da legitimidade da Geometria Ordenada recai na da análise.

Os trabalhos de Pasch, Peano, Pieri, Hilbert, Veblen e outros, são ainda, responsáveis pelo alto grau de aperfeiçoamento lógico de um procedimento de grande importância em matemática: o método axiomático. A Geometria Ordenada, apresen-

tada neste trabalho, constitui-se em um exemplo por excelência da aplicação de tal método.

Este fato, junto com as observações anteriores, implica que nossos estudos estão sujeitos, naturalmente, às limitações inerentes ao método axiomático: com efeito, por exemplo, o teorema de Gödel se aplica à axiomática da Geometria de Euclides vista em §5.3, e nos diz que existem proposições nessa geometria tais que, nem elas, nem suas negações, são demonstráveis na axiomática em apreço (se essa geometria for consistente). Além disso, é impossível formalizar uma prova de consistência da axiomática em questão tendo por base tão somente essa mesma axiomática.

Como é natural, transcederia ao escopo e à natureza desta dissertação qualquer discussão dessas questões de ordem lógica; limitamo-nos a registrá-las.

CAPÍTULO II

O SISTEMA AXIOMÁTICO I

Apresentamos, neste capítulo, a Geometria Ordenada através da Axiomática I, que passamos a descrever.

§2.1 - INTRODUÇÃO

Na exposição da Axiomática I, utilizamos como referência as obras [3] e [7]. Como já foi observado no capítulo anterior, o sistema de axiomas aqui apresentado é devido a Veblen ([19]) (1904).

As noções primitivas da Axiomática I são um conjunto E e uma relação ternária T entre elementos de E. Os elementos do conjunto E chamam-se *pontos*. Denotamos os pontos pelas letras A, B, C, ...

A relação T é chamada relação "*estar entre*" ("betweenness"). Se $(A,B,C) \in T$, escrevemos [ABC]. A fórmula [ABC] é lida: "o ponto B está entre os pontos A e C". Se o ponto B não está entre os pontos A e C, dizemos simplesmente "não [ABC]". Se [ABC], dizemos, também, que os três pontos A, B e C estão na *ordem* ABC.

Empregamos, além disso, as notações e convenções usuais da Teoria dos Conjuntos.

Compõe-se o Sistema Axiomático I de dez axiomas que in-

troduziremos entre os diversos teoremas e definições, à medida que forem necessários.

AXIOMA I.1 - Existem pelo menos dois pontos.

AXIOMA I.2 - Se A e B são dois pontos distintos, existe pelo menos um ponto C tal que [ABC].

AXIOMA I.3 - Se [ABC], então os pontos A e C são distintos.

AXIOMA I.4 - Se [ABC], então [CBA], mas não [BCA].

§2.2 - PROPRIEDADES DA RELAÇÃO "ESTAR ENTRE"

TEOREMA 2.2.1 - Se [ABC], então não [CAB].

DEMONSTRAÇÃO - De fato, se tivéssemos [CAB], então, pelo Axioma I.4, teríamos não [ABC].

TEOREMA 2.2.2 - Se [ABC], então $A \neq B \neq C$.

DEMONSTRAÇÃO - De fato, se $B = C$, pelo Axioma I.4 temos [CBA] e não [BCA], o que é uma contradição. De modo análogo, não podemos ter $A = B$.

§2.3 - SEGMENTOS, SEGMENTOS ABERTOS, SEMI-RETAS E RETAS

DEFINIÇÃO 2.3.1 - Sejam A e B dois pontos distintos. Denominamos *segmento* determinado pelos pontos A e B ao conjunto $\{P \in E \mid [APB]\} \cup \{A,B\}$ e o denotamos por [AB]. O conjunto constituído somente dos pontos que estão entre A e B será chamado *segmento aberto* e será denotado por]AB[. Se $P \in [AB]$ (respectivamente]AB[), dizemos, também, que o ponto P *está* no segmento [AB] (respectivamente segmento aberto]AB[).

OBSERVAÇÃO - Os pontos A e B são ditos *extremidades* do segmento [AB] (respectivamente segmento aberto]AB[).

TEOREMA 2.3.2 - Dado um segmento aberto]AB[, tanto o ponto A como o ponto B não estão no segmento aberto]AB[.

DEMONSTRAÇÃO - Com efeito, se A ou B estivessem no segmento aberto]AB[, deveríamos ter [AAB] ou [ABB], o que é uma contradição, em virtude do Teorema 2.2.2.

DEFINIÇÃO 2.3.3 - Sejam A e B dois pontos distintos. Definimos a *semi-reta* $\overrightarrow{AB}$ como sendo o conjunto reunião do segmento aberto]AB[, do conjunto {B} e do conjunto dos pontos C tais que [ABC]. O ponto A é chamado *origem* de $\overrightarrow{AB}$. Definimos, ainda, a *reta* $\overleftrightarrow{AB}$ que consiste na reunião dos conjuntos $\{P \in E \mid [PAB]\}$, [AB] e $\{P \in E \mid [ABP]\}$.

OBSERVAÇÃO - Se $C \in \overleftrightarrow{AB}$, também dizemos que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ *passa* por C ou que C *está* na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

TEOREMA 2.3.4 - Se A e B são dois pontos distintos, então temos:

a) [AB] = [BA]

b)]AB[=]BA[

c) $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

AXIOMA I.5 - Se C e D são pontos distintos na reta $\overleftrightarrow{AB}$, então A está na reta $\overleftrightarrow{CD}$.

TEOREMA 2.3.5 - Se C e D são pontos distintos na reta $\overleftrightarrow{AB}$, então $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos, inicialmente, que B = D e mostremos

que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$. Para tal, seja $X \in \overleftrightarrow{AB}$. Como $C \in \overleftrightarrow{AB}$, pelo Axioma I.5 temos que $B \in \overleftrightarrow{CX}$. É claro que $C \in \overleftrightarrow{CX}$. Novamente, pelo Axioma I.5, tem-se que $X \in \overleftrightarrow{BC}$. Assim, mostramos que $\overleftrightarrow{AB} \subset \overleftrightarrow{BC}$. Reciprocamente, suponha-se que $X \in \overleftrightarrow{BC}$. Aplicando o Axioma I.5, tem-se que $A \in \overleftrightarrow{BC}$ e, portanto, $B \in \overleftrightarrow{AX}$. Como $A \in \overleftrightarrow{AX}$, novamente o Axioma I.5 nos diz que $X \in \overleftrightarrow{AB}$. Assim, $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$. Finalmente, se A, B, C e D são pontos distintos dois a dois, advém que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{CD}$.

OBSERVAÇÃO - O teorema anterior mostra que dois pontos distintos estão em uma única reta. Duas retas distintas não podem ter mais que um ponto em comum (naturalmente, se existir mais de uma reta). Tal ponto em comum, P, chama-se *ponto de intersecção* das retas, e diz-se também que as retas se *interceptam* ou se *cortam* no ponto P.

DEFINIÇÃO 2.3.6 - Chamamos de *colineares* aos pontos pertencentes a uma mesma reta.

COROLÁRIO 2.3.5.1 - Três pontos distintos quaisquer A, B e C, colineares, satisfazem uma só das seguintes relações: [ABC], [BCA] ou [CAB].

DEMONSTRAÇÃO - De fato, temos pelo Teorema 2.3.5 que A, B e C estão, por exemplo, na reta $\overleftrightarrow{AB}$. Mas,

$$C \in \overleftrightarrow{AB} = \{P \in E \mid [PAB]\} \cup [AB] \cup \{P \in E \mid [ABP]\},$$

donde resulta que [CAB] ou [ACB] ou [ABC].

AXIOMA I.6 - Se $\overleftrightarrow{AB}$ for uma reta, então existe um ponto C que não está em $\overleftrightarrow{AB}$.

TEOREMA 2.3.7 - Se o ponto C não está na reta $\overleftrightarrow{AB}$, então as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são distintas duas a duas.

DEMONSTRAÇÃO - Este teorema afirma, noutras palavras, que se C não está na reta $\overleftrightarrow{AB}$, então A, B e C não são colineares. Vamos à demonstração: se tivermos $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$, então $C \in \overleftrightarrow{AB}$, o que é uma contradição. Se $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$, também temos $C \in \overleftrightarrow{AB}$. Finalmente, se $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$, então A, B e C seriam colineares.

§2.4 - TRIÂNGULOS

DEFINIÇÃO 2.4.1 - Sejam A, B e C três pontos não colineares. Chama-se *triângulo* ΔABC, à reunião dos segmentos abertos]AB[,]BC[e]AC[com o conjunto {A,B,C}. Os segmentos abertos]AB[,]BC[e]AC[chamam-se *lados* do triângulo ΔABC. Os pontos A, B e C são ditos *vértices* do triângulo ΔABC. Dizemos, também, que o lado]AB[é *oposto* ao vértice C.

§2.5 - O AXIOMA DE PASCH-PEANO(5)

AXIOMA I.7 - Dado um triângulo ΔABC, se C e D são pontos tais que [BCD] e [CEA], existe um ponto F na reta $\overleftrightarrow{DE}$ tal que [AFB] (Figura 2.5.1).

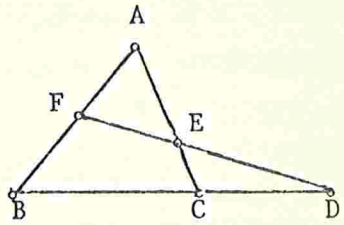

Figura 2.5.1

TEOREMA 2.5.1 - Dados dois pontos distintos A e B, existe um ponto X tal que

(5) - Pasch em 1882 expressou seu axioma como se segue: "Dados três pontos não colineares A,B e C, e uma reta r contida no plano determinado por A,B e C, se r não passa por nenhum dos pontos A,B ou C e contém um ponto E entre A e B, então contém um ponto entre B e C ou A e C". A formulação que adotamos é devida a Peano. Note-se que não empregamos o conceito de plano e a reta r em questão tem a restrição de que passe por um ponto de $\overrightarrow{CB}^*$ e intercepte o lado]AC[do triângulo ΔABC. Em nossa axiomática, a formulação devida a Pasch é um teorema, de modo que tal formulação é mais "forte" que a de Peano. Gupta, em [9] denominou o Axioma I.7 de "Forma Externa do Axioma de Pasch".

[AXB].

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Axioma I.6, existe um ponto E tal que $E \notin \overleftrightarrow{AB}$. Pelo Axioma I.2, existe um ponto C tal que [AEC] (Figura 2.5.2). O Teorema 2.3.5 nos diz que $\overleftrightarrow{AE} = \overleftrightarrow{AC}$. Logo, $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ e fica assim determinado o triângulo ΔABC. Aplicando novamente o Axioma I.2, obtemos um ponto D tal que [BCD]. Finalmente, pelo Axioma I.7, obtemos um ponto X tal que [AXB].

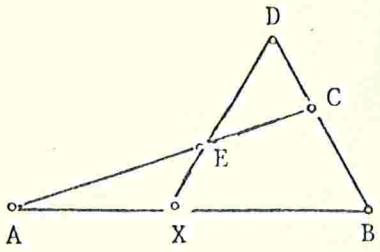

Figura 2.5.2

TEOREMA 2.5.2 - Sejam dados um triângulo ΔABC e D, E pontos tais que [BCD] e [CEA]. Vimos, pelo Axioma I.7, que existe um ponto F em $\overleftrightarrow{DE}$ com [AFB]. Afirmamos que o ponto F satisfaz ainda a condição [DEF].

DEMONSTRAÇÃO - Como $F \in \overleftrightarrow{DE}$, pelo Corolário 2.3.5.1 temos apenas cinco possibilidades: F = D; F = E; [EFD]; [FDE] ou [DEF]. Se F = D ou F = E, temos A, B e C colineares. Se F é tal que [EFD] (Figura 2.5.3), junto com [CEA] otemos X em $\overleftrightarrow{AF}$ tal que [DXC] (Axioma I.7). Como as retas $\overleftrightarrow{AF}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são distintas, não podem ter mais que um ponto em comum. Segue-se que X = B, ou seja [DBC], o que é uma contradição, já que [BCD] (Axioma I.4). Finalmente, se tivermos [FDE] (Figura 2.5.4), junto com [AEB], obtemos um ponto Y em $\overleftrightarrow{AE}$ tal que [AYE] (novamente se aplicou o Axioma I.7

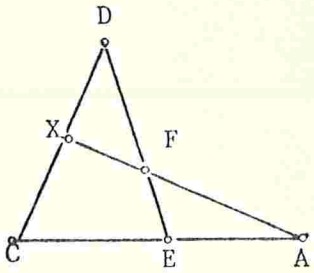

Figura 2.5.3

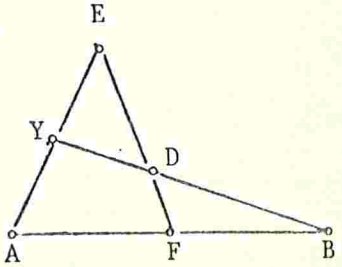

Figura 2.5.4

ao ΔAFE). Visto que as retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{DB}$ são distintas, só podem se interceptar em um único ponto. Segue-se então, que Y = C e assim [ACE], o que é uma contradição, pois temos [AEC] (Axioma I.4). Resta-nos assim, somente a possibilidade de termos [DEF].

TEOREMA 2.5.3 - Uma reta não pode cortar os três lados de um triângulo ΔABC.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos, por absurdo, que exista uma reta r que intercepte]AB[em C',]AC[em B' e]BC[em A' (Figura 2.5.5). O ponto A' é distinto de B', pois, caso contrário, temos [BA'C] e [AA'C], ou seja, A, A', D e C são colineares, o que é uma contradição. Repetindo o raciocínio, temos que A', B' e C' são distintos dois a dois. Se A', B' e C' fossem colineares, então pelo Corolário 2.3.5.1 teríamos somente as seguintes possibilidades: [A'B'C'] ou [B'C'A'] ou [C'A'B']. O ponto C' não está em $\overleftrightarrow{BA'}$. Fica assim determinado o triângulo ΔC'BA'. Se tivermos [A'B'C'], junto com [BA'C], obteremos um ponto X na reta $\overleftrightarrow{BC'}$ tal que [BXC'] (Axioma I.7 ao triângulo ΔC'BA'). Como as retas $\overleftrightarrow{CB'} = \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são distintas, elas se interceptam em um único ponto, a saber, em A. Portanto X = A, ou seja, temos [BAC'], o que contradiz a hipótese de que [AC'B]. Assim, [A'B'C'] é impossível. De maneira análoga, mostra-se que os outros casos são, também, impossíveis.

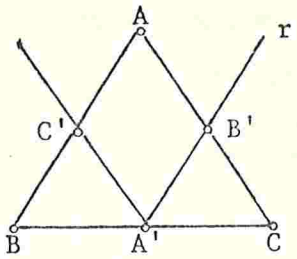

Figura 2.5.5

§2.6 - AS ORDENS DOS PONTOS DE UMA RETA

TEOREMA 2.6.1 - Se [ABC] e [BCD], então [ABD].

DEMONSTRAÇÃO - Observemos, inicialmente, que A, B, C e D são colineares (estão, por exemplo, na reta $\overleftrightarrow{BC}$). Pelo Axioma I.7 existe um ponto E que não está em $\overleftrightarrow{BC}$. O Axioma I.2 nos garante a existência de um ponto F com [BEF]. Obtemos, assim, o triângulo ΔABF, e, como temos [ABC] e [BEF], aplicando o Axioma I.7 e o Teorema 2.5.2, obtemos um ponto X em $\overleftrightarrow{AF}$ tal que [AXF] e [CEX] (Figura 2.6.1). Evidentemente, X não está na reta $\overleftrightarrow{CD}$ ($\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{AB}$). Fica determinado o triângulo ΔDCX. Como temos [DCB] e [CEX], obtemos um ponto Y com [XYD] e [BEY] (Axioma I.7 e Teorema 2.5.2). O ponto X não está na reta $\overleftrightarrow{AD}$. Assim, resulta o triângulo ΔAXD. O ponto X satisfaz ainda [AXF] e [XYD]. Logo, novamente do Axioma I.7 e do Teorema 2.5.2 ,advêm um ponto B' com [AB'D] e [FYB']. Tal ponto pertence às retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FY}$ ($\overleftrightarrow{FY} = \overleftrightarrow{FB}$). Observemos que as retas $\overleftrightarrow{FB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são distintas, portanto não podem ter mais que um ponto em comum. Forçosamente, então, temos B = B', ou seja, [ABD], o que completa a demonstração.

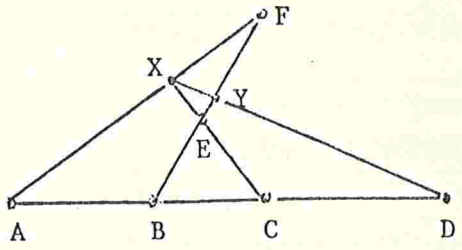

Figura 2.6.1

COROLÁRIO 2.6.1.1 - Sejam A, B, C e D como no teorema anterior. Vale, também, [ACD].

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Axioma I.4, temos [DCB] e [CBA].Assim decorre [ACD], pelo teorema anterior.

TEOREMA 2.6.2 - Se [ABC], [ABD] e $C \neq D$, então [BCD] ou [BDC].

DEMONSTRAÇÃO - Como os pontos A, B, C e D são colineares, pelo Corolário 2.3.5.1 temos as seguintes possibilidades para os

pontos B, C e D: [BCD] ou [BDC] ou [DBC].

Mostraremos que [CBD] é falsa. Para tal, suponhamos que ela seja verdadeira. Existem pontos E e F que não estão na reta $\overleftrightarrow{AC}$ com [ECF] (Axioma I.6 e Axioma I.2) e como [CBA], obtemos um ponto X em $\overleftrightarrow{AF}$ (Figura 2.6.2a), com [EBX] e [AXF] (Axioma I.7 e Teorema 2.5.2 ao triângulo ΔFAC). Por outro lado, como $F \notin \overleftrightarrow{CD}$, fica determinado o triângulo ΔFCD, e junto com [CBD] e [ECF], existe um ponto Y tal que [FYD] e [EBY] (Figura 2.6.2b)

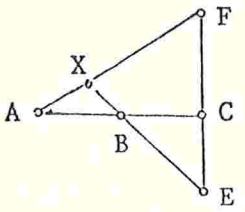

Figura 2.6.2a

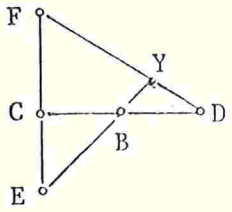

Figura 2.6.2b

(Axioma I.7 e Teorema 2.5.2). Como temos [EBX] e [EBY], segue-se que os pontos X, B e Y estão em uma mesma reta, cortando os três lados do triângulo ΔAFD, o que é uma contradição em virtude do Teorema 2.5.3. Assim, [CBD] é falsa; portanto, devemos ter [BCD] ou [BDC].

TEOREMA 2.6.3 - Se [ABD] e [ACD], com $B \neq C$, então [ABC] ou [ACB].

DEMONSTRAÇÃO - Dado que A, B e C são colineares e distintos dois a dois, temos [ABC] ou [ACB] ou [BAC] (Corolário 2.3.5.1). Se tivermos [BAC], junto com [ACD], obteremos [BAD] (Teorema 2.6.1), o que é uma contradição (Teorema 2.2.1 e Axioma I.4). Logo, vem [ABC] ou [ACB].

TEOREMA 2.6.4 - Se [ABC] e [ABD], com $C \neq D$, então [ACD] ou [ADC].

DEMONSTRAÇÃO - Com efeito, pelo Teorema 2.6.2 advém que [BCD] ou [BDC]. Pelo Teorema 2.6.1, [DCB] e [CBA] implicam [DCA]. Do mesmo modo, [CDB] e [DBA] implicam [CDA].

TEOREMA 2.6.5 - Se [ABC] e [ACD], então [BCD].

DEMONSTRAÇÃO - Como os pontos B, C e D são colineares, decorre que [BCD] ou [CBD] ou [CDB]. [CBD] é falsa, pois, em caso contrário, junto com [CBA] temos [CDA] ou [CAD] (teorema anterior) o que é uma contradição, desde que temos [ACD]. Finalmente, [CDB] também é falsa, pois, em caso contrário, junto com [ACD], resulta [ACB] (Teorema 2.6.1) o que também é uma contradição.

COROLÁRIO 2.6.5.1 - Sejam A, B, C e D como no teorema anterior. Tem-se ainda [ABD].

DEMONSTRAÇÃO - Pelo teorema anterior, vem [BCD]. Como temos [ABC], pelo Teorema 2.6.1 deduzimos [ABD].

TEOREMA 2.6.6 - Dados quatro pontos quaisquer A, B, C e D colineares, se [ABD], [ACD] e $B \neq C$, então [ACB] ou [BCD].

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Teorema 2.6.3 é verdadeira [ABC] ou [ACB]. Se [ACB], o teorema já está demonstrado. Por outro lado, se [ABC], então, com [ACD], temos [BCD] (Teorema 2.6.5).

TEOREMA 2.6.7 - Se [ABC] e $X \in \overleftrightarrow{AB}$, com $X \neq B$, então [ABX] ou [XBC].

DEMONSTRAÇÃO - Se [XBC] é falsa, vem [BXC] ou [BCX] ou $X = C$. Se [BCX] ou $X = C$, então junto com [ABC] deduz-se [ABX] (Teorema 2.6.1). Se [CXB], então com [CBA] advém [XBA] (Teorema 2.6.5).

DEFINIÇÃO 2.6.8 - Se A, B, C e D são pontos tais que [ABC] e [ACD], então escreveremos [ABCD]. (Esta definição é inspirada nos resultados do Teorema 2.6.5 e seu corolário.) Se [ABCD], dizemos também que os quatro pontos A, B, C e D estão na ordem ABCD.

TEOREMA 2.6.9 - Sejam A,B,C e D pontos tais que [ABCD]. Então, [ABC], [ACD], [BCD] e [ABD].

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata da definição acima e do Teorema 2.6.5 e seu corolário.

TEOREMA 2.6.10 - Se A,B,C e D são pontos tais que [ABD] e [BCD], então [ABCD].

DEMONSTRAÇÃO - De fato, [DCB] e [DBA] implicam [CBA] e [DCA] pelo Teorema 2.6.5 e seu Corolário 2.6.5.1. Pelo Axioma I.4, vem [ABC] e [ACD], donde, pela Definição 2.6.8, obtém-se [ABCD].

TEOREMA 2.6.11 - Se A,B,C e D são pontos tais que [ABD], [ACD] e $B \neq C$, então [ABCD] e [ACBD].

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Teorema 2.6.3 obtemos [ABC] ou [ACB]. Se tivermos [ABC], esta fórmula e [ACD] acarretam [ABCD]. Por outro lado, se tivermos [ACB], então com [ABD] vem [ACBD].

TEOREMA 2.6.12 - Se [ABCD], então [DCBA] e todas as outras ordens são falsas.

DEMONSTRAÇÃO - É uma conseqüência imediata dos teoremas anteriores.

TEOREMA 2.6.13 - Se C está em]AB[, então $]AB[=]AC[\dot{\cup} \{C\} \dot{\cup}]CB[$.

DEMONSTRAÇÃO - Temos que [AXB], [ACB] e $X \neq C$ implicam [AXC] ou [ACX] (Teorema 2.6.3). Se tivermos [ACX], então junto com [AXB] vem [CXB] (Teorema 2.6.5). Assim, $]AB[\subset]AC[\dot{\cup} \{C\} \dot{\cup}]CB[$. Reciprocamente, se X é tal que [AXC], então com [ACB] advém [AXB] (Corolário 2.6.5.1). Por outro lado, se [BXC], então novamente com [BCA] obtemos [BXA] (Corolário 2.6.5.1).

TEOREMA 2.6.14 - Se C está na semi-reta $\overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} =]AC[\dot{\cup} \{C\} \dot{\cup} \overrightarrow{CD}$, onde D é tal que [ACD].

DEMONSTRAÇÃO - Como $C \in \overrightarrow{AB}$, resultam três casos somente: [ACB] ou C = B ou [ABC]. O mesmo acontece com qualquer ponto $X \in \overleftrightarrow{AB}$.

Figura 2.6.3

CASO 1 - [ACB].

Se X é tal que [AXB], então com [ACB] temos [AXC] ou [ACX] (Teorema 2.6.3). Se [ACX], então com [ACD] vem [CXD] ou [CDX] (Teorema 2.6.2).

Se X = B, advém [ACX] e, junto com [ACD], [CXD] ou [CDX] (Teorema 2.6.2).

Finalmente, se [ABX], com [ACB], temos [ACX] (Corolário 2.6.5.1). [ACX] e [ACD] implicam [CXD] ou [CDX] (Teorema 2.6.2).

CASO 2 - C = B.

Se [AXB], então resulta [AXC].

Se X = B, então X = C.

Se [ABX], então [ACX], que, junto com [ACD], implica [CXD] ou [CDX] (Teorema 2.6.2).

CASO 3 - [ABC].

Se [AXB], com [ABC], obtém-se [AXC] (Corolário 2.6.5.1).

Se X = B, temos [AXC].

Se [ABX], junto com [ABC] temos [AXC] ou [ACX] (Teorema 2.6.4). Se tivermos [ACX], então com [ACD] decorre [CXD] ou [CDX] (Teorema 2.6.2).

Reciprocamente, seja X tal que [AXC] ou [CXD] ou [CDX].

CASO 1 - [ACB].

Se [AXC], com [ACB] vem [AXB] (Corolário 2.6.5.1).

Se [CXD], então [DXC] e com [DCA] temos [XCA] (Teorema 2.6.5). [ACX] com [ACB] implica [AXB] ou [ABX] (Teorema 2.6.4).

Se [CDX],com [ACD] temos [ACX] (Teorema 2.6.1). [ACX] e [ACB] implicam em [AXB] ou [ABX] (Teorema 2.6.4).

CASO 2 - C = B.

Se [AXC], decorre [AXB].

Se [CXD], temos [BXD]. [DXB] com [DBA] obtemos [XBA] (Teorema 2.6.5).

Se [CDX], então [BDX], que junto com [ABD] advém [ABX] (Teorema 2.6.1).

CASO 3 - [ABC].

Se [AXC], com [ABC] temos [AXB] ou [ABX] (Teorema 2.6.3).

Se [CXD], com [ACD] obtém-se [XCA] (Teorema 2.6.5). [XCA] com [ABC] acarreta [ABX] (Corolário 2.6.5.1).

Finalmente, se [CDX], com [ACD], decorre que [ACX] (Teorema 2.6.1). [ACX] e [ABC] implicam [ABX] (Corolário 2.6.5.1).

TEOREMA 2.6.15 - Dado um conjunto de n pontos ($n \geq 3$) $P = \{A,B,C,D,...\}$ colineares, existe uma bijeção f de $\{1,2,...,n\}$ em P tal que: se $1 \leq i < j < k \leq n$, então $[f(i)f(j)f(k)]$.

Por comodidade de notação, indiquemos f(i) por A_i, $i=1,2,...,n$.

DEMONSTRAÇÃO - Para $n = 3$ o teorema é válido, pois, se A,B e C são colineares, resulta que [ABC] ou [ACB] ou [BAC] (Corolário 2.3.5.1).

Suponhamos a proposição válida para $n-1 \geq 3$. Consideremos, então, um subconjunto V de n-1 pontos de um conjunto Q de n

pontos, de maneira que $Q-V = \{P\}$. Por hipótese, existe uma bijeção f tal que $f(i) = B_i$, $B_i \in V$ e se $1 \leq i < j < k \leq n-1$, então $[B_i B_j B_k]$.

Para os pontos P, B_1 e B_{n-1} temos as seguintes possibilidades: $[B_1 B_{n-1} P]$ ou $[P B_1 B_{n-1}]$ ou $[B_1 P B_{n-1}]$.

CASO 1 - $[B_1 B_{n-1} P]$.

De $[B_1 B_{n-1} P]$ e $[B_1 B_j B_{n-1}]$ $(1<j<n-1)$ concluímos $[B_j B_{n-1} P]$ (Teorema 2.6.5). $[B_j B_{n-1} P]$ e $[B_i B_j B_{n-1}]$ $(1<i<j<n-1)$ implicam $[B_i B_j P]$ (Teorema 2.6.1). Portanto, $[B_i B_j P]$ $\forall i,j$ com $1 \leq i < j \leq n-1$. Basta, então, definir $g:\{1,2,\ldots,n\} \to Q$ como $g(i) = f(i)$, $i = 1,2,\ldots,n-1$ e $g(n) = P$.

CASO 2 - $[P B_1 B_{n-1}]$.

Para $1<i<n-1$, vale $[B_1 B_i B_{n-1}]$ que, junto com $[P B_1 B_{n-1}]$, implica $[P B_i B_{n-1}]$ (Corolário 2.6.5.1). $[P B_i B_{n-1}]$ e $[B_i B_j B_{n-1}]$ $(1<i<j<n-1)$ acarretam $[P B_i B_j]$ (Teorema 2.6.5). Portanto, temos $[P B_i B_j]$, $\forall i,j$ com $1 \leq i < j \leq n-1$. Basta, então, definir $g:\{1,2,\ldots,n\} \to Q$ como $g(1) = P$ e $g(i) = f(i-1)$, $\forall i = 2,3,\ldots,n$.

CASO 3 - $[B_1 P B_{n-1}]$.

Afirmamos que existe $i \in \{1,2,\ldots,n-2\}$ tal que $[B_i P B_{i+1}]$. Para tanto, considere-se o conjunto $A = \{j \mid [B_1 P B_j]\}$. Pela hipótese $A \neq \emptyset$ e, portanto, pelo Princípio do Menor Número Natural, seja j_0 o mínimo de A. Temos, então, $[B_{j_0-1} P B_{j_0}]$, pois, em caso contrário há somente duas possibilidades:

1) $[B_{j_0-1} B_{j_0} P]$ ou

2) $[B_{j_0} B_{j_0-1} P]$.

No primeiro caso, $[B_{j_0-1} B_{j_0} P]$ junto com $[B_1 P B_{j_0}]$ acarreta

$[B_{j_0-1}B_{j_0}B_1]$ (Teorema 2.6.1) ou $[B_1B_{j_0}B_{j_0-1}]$, o que é uma contradição. No segundo caso, $[B_{j_0}B_{j_0-1}P]$ e $[B_1PB_{j_0}]$ implicam $[B_1PB_{j_0-1}]$ (Teorema 2.6.5), o que contradiz j_0 ser o mínimo de A. Assim, devemos ter $[B_{j_0-1}PB_{j_0}]$, o que prova nossa asserção inicial. Segue-se que existe i, $i\in\{1,2,\ldots,n-2\}$, tal que $[B_iPB_{i+1}]$. Se $1\leq j<i<i+1\leq n-1$, então $[B_jB_iB_{i+1}]$, o que com $[B_iPB_{i+1}]$ leva a $[B_jPB_{i+1}]$. Se $1\leq j<i+1<k\leq n-1$, então $[B_jB_{i+1}B_k]$, o qual, junto com $[B_jPB_{i+1}]$, acarreta $[B_jPB_k]$. Consideremos a aplicação g: $\{1,2,\ldots,n\}$ em Q tal que:

$$g(t) = f(t) = B_t \text{ para } t = 1,2,\ldots,i.$$

$$g(i+1) = P$$

$$g(t) = f(t-1) = B_{t-1} \text{ para } t = i+2,\ldots,n.$$

DEFINIÇÃO 2.6.16 - Sejam $P_1,P_2,\ldots,P_n$ $(n\geq 3)$ pontos como no teorema anterior. Diremos que tais pontos estão na ordem $P_1P_2\ldots P_n$ se tivermos $[P_{i-2}P_{i-1}P_i]$, $\forall i=3,4,\ldots,n$, e indicaremos este fato por $[P_1P_2\ldots P_n]$.

OBSERVAÇÕES 1 - Para $n=4$ a definição acima é a Definição 2.6.8.

2 - Se $[P_1P_2\ldots P_n]$, então há pontos P e Q tais que $[PP_1P_2\ldots P_nQ]$.

TEOREMA 2.6.17 - Sejam $P_1,P_2,\ldots,P_n$ $(n\geq 3)$ pontos como no Teorema 2.6.15. Condição necessária e suficiente para que tenhamos $[P_1P_2\ldots P_n]$ é que $P_1,P_2,\ldots,P_n$ sejam colineares e que decomponham a reta à qual pertencem em duas semi-retas, $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_nQ}$ (P e Q pontos como na Observação 2 acima), e n-1 segmentos abertos $]P_{i-1}P_i[$, $i=2,\ldots,n$, tais que a intersecção de quaisquer dois (distintos) dos conjuntos a-

cima citados sejam disjuntos (Figura 2.6.4).

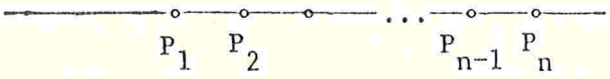

Figura 2.6.4

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

TEOREMA 2.6.18 - Se A,B e C são pontos não colineares tais que [AFB] e [BCD], então existe um ponto E com [CEA] e [DEF][6].

DEMONSTRAÇÃO - Há um ponto H com [FBH] (Axioma I.2). Os pontos F,B,D não são colineares, assim [FBH] e [BCD] nos dão um ponto R com [DRF] e [HCR] (Axioma I.7 e Teorema 2.5.2). De [AFB] e [FBH] vem [AFH] (Teorema 2.6.1). Como A,F,D não são colineares, e mais o fato de que [FRD], existe um ponto L com [DLA] e

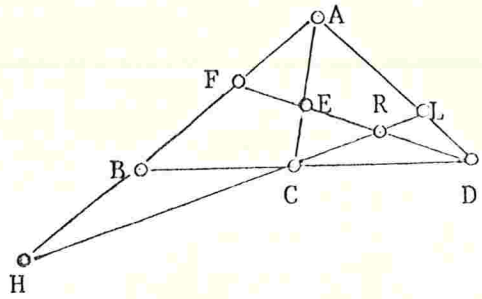

Figura 2.6.5

[HRL]. De [HCR] e [HRL], vem [LRC] (Teorema 2.6.5); e como A, L e C não são colineares, isto com [ALD] nos dá uma ponto E sobre $\overleftrightarrow{DR} = \overleftrightarrow{DF}$, com [CEA]. Finalmente, como A,B e C não são co-

(6) - Este teorema é também conhecido como "Forma Interna do Axioma de Pasch" (cf. Gupta ([9]),p.11). Coxeter, em [5], p.180, observa que apesar de a afirmação do Teorema 2.6.18 ter aparentemente a mesma força que a do Axioma I.7 (Pasch-Peano),não se pode inverter os papéis,isto é: se adotarmos o Teorema 2.6.18 como axioma, não poderemos deduzir o Axioma I.7 como teorema. No entanto,não é de nosso conhecimento qualquer resultado sobre a não eqüivalência dos mesmos tendo por base nossa axiomática.

lineares, [BCD] e [CEA] existe um ponto X sobre $\overleftrightarrow{AB}$ com [DEX] e, assim, concluímos que X = F.

§2.7 - PROPRIEDADES DOS SEGMENTOS E SEGMENTOS ABERTOS

TEOREMA 2.7.1 - Um segmento aberto]AB[é não vazio.

DEMONSTRAÇÃO - É uma conseqüência imediata do Teorema 2.5.1.

TEOREMA 2.7.2 - Um segmento aberto é um conjunto infinito.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos um segmento aberto]AB[. O teorema estará demonstrado se exibirmos uma seqüência de pontos $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, tal que:

i) $P_n \in]AB[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, e

ii) $P_n \neq P_m$, para $\forall m,n \in \mathbb{N}^*$, $m \neq n$.

Para tanto, definiremos a sequência $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ por indução: seja P_1 qualquer ponto entre A e B (teorema anterior); assumindo que o ponto P_n tenha sido especificado, tomamos P_{n+1} como sendo um ponto qualquer entre A e P_n (Teorema 2.5.1) (Figura 2.7.1).

Figura 2.7.1

Temos, então:

1) $[AP_1B]$

2) $[AP_{n+1}P_n]$ se $n \geq 1$.

Para mostrar i), procederemos por indução: de fato, para n = 1, $P_1 \in]AB[$ (1)). Suponhamos $P_n \in]AB[$, ou seja $[AP_nB]$.

$[AP_nB]$ e $[AP_{n+1}P_n]$ implicam $[AP_{n+1}B]$ (Corolário 2.6.5.1).

Finalmente, para mostrar ii), é suficiente provar que: (3) se $m < n$ então $[AP_nP_m]$. Usaremos indução sobre n. Para $n = 1$, (3) está satisfeita. Suponhamos (3) verdadeira para n, $n \geq 1$, e seja $m < n+1$. Se $m = n$, $[AP_{n+1}P_n]$ segue-se de (2). Se $m < n$, por hipótese da indução, temos $[AP_nP_m]$ que, junto com $[AP_{n+1}P_n]$ (2)) temos $[AP_{n+1}P_m]$ (Corolário 2.6.5.1).

TEOREMA 2.7.3 - Para três pontos quaisquer A,B e C, se [ABC], então]AB[e]AC[.

DEMONSTRAÇÃO - Se X é tal que [AXB], então com [ABC] temos [AXC] (Corolário 2.6.5.1).

TEOREMA 2.7.4 - Para três pontos distintos A, B e C, temos $]AB[\cap]BC[= \emptyset$, se, e somente se, [ABC].

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos [ABC]. Se X é tal que [AXB] e [BXC], então [ACB] ou [CAB] (Teorema 2.6.4). Assim $]AB[\cap]BC[= \emptyset$. Reciprocamente, suponha-se $]AB[\cap]BC[= \emptyset$. Temos somente as seguintes possibilidades para os pontos A,B e C: [ABC] ou [BAC] ou [ACB].

Pelo teorema anterior, [BAC] implica $]BA[\subset]BC[$, e [ACB] implica $]BC[\subset]AB[$. Em ambos os casos contraria-se a hipótese. Assim, [ABC].

TEOREMA 2.7.5 - Para três pontos distintos colineares A,B e C tem-se que $]AB[\cap]AC[\cap]BC[= \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO - É uma conseqüência imediata do teorema anterior.

TEOREMA 2.7.6 - Sejam A,B,C e D colineares e $A \neq B$, $C \neq D$. Então $]AB[\subset]CD[$, se, e somente se, $A,B \in [CD]$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $A,B \in [CD]$. Examinemos os seguintes casos:

CASO 1

$\{A,B\} = \{C,D\}$. É claro que $]AB[\subset]CD[$.

CASO 2

Somente um dos pontos de $\{A,B\}$ é idêntico a um dos pontos de $\{C,D\}$; por exemplo, $A = C$. Como temos $[CBD]$, então pelo Teorema 2.7.3 $]AB[=]CB[\subset]CD[$.

CASO 3

Finalmente, se $\{A,B\} \subset]CD[$, decorre então $[CAD]$ e $[CBD]$. Pelo Teorema 2.6.6, temos $[ABC]$ ou $[ABD]$, e, assim,

$$]AB[\subset]AC[\subset]CD[\text{ ou}$$

$$]AB[\subset]AD[\subset]CD[.$$

Reciprocamente, suponha-se que $]AB[\subset]CD[$. Admitamos, por absurdo, que um dos pontos de $\{A,B\}$ não pertença ao segmento $[CD]$, por exemplo $A \notin [CD]$. Temos, portanto, $[ACD]$ ou $[CDA]$. Se tivermos $[ACD]$, vem $]AC[\cap]CD[= \emptyset$ (Teorema 2.7.4). Como $]AB[\subset]CD[$, temos $]AC[\cap]AB[= \emptyset$, de onde $[BAC]$ (Teorema 2.7.4). $[ACD]$ e $[BAC]$ implicam $[BAD]$ (Teorema 2.6.1). Logo, $]BA[\cap]AD[= \emptyset$ (Teorema 2.7.4). De $[ACD]$ ainda obtemos $]CD[\subset]AD[$ e assim $]AB[\cap]CD[= \emptyset$ o que é uma contradição. De maneira análoga, não podemos ter $[CDA]$. Assim, $\{A,B\} \subset [CD]$.

TEOREMA 2.7.7 - Sejam A,B,C e D pontos colineares e $A \neq D$, $C \neq D$. Se $]AB[=]CD[$, então $\{A,B\} = \{C,D\}$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos, inicialmente, que $A \neq C, D$ e $B \neq C, D$. Pelo teorema anterior, advém

1) [CAD] e [CBD], bem como

2) [ACB] e [ADB].

De (1) concluímos [ABC] ou [ABD] (Teoremas 2.6.3 e 2.6.5) que contradizem (2). Portanto, A ou B coincide com C ou D. Por exemplo, seja $A = C$. Suponhamos $B \neq D$. Temos então [CBD] e [ADB], o que implica [CBD] e [CDB], que é impossível. Portanto, $B = D$ e completamos, assim, a demonstração.

TEOREMA 2.7.8 - Se A, B e C são colineares e distintos, então $]AC[- \{B\} \subset]AB[\cup]BC[$.

DEMONSTRAÇÃO - Temos os seguintes casos: [ABC], [BAC] ou [ACB].

CASO 1 - [ABC].

[ABC] e [AXC] implicam [AXB] ou [BXC] (Teorema 2.6.6), de modo que $]AC[- \{B\} \subset]AB[\cup]BC[$.

CASO 2 - [BAC].

[CAB] e [CXA] implicam [CXB] (Corolário 2.6.5.1), de modo que $]AC[\subset]BC[$.

CASO 3 - [ACB].

[ACB] e [AXC] implicam [AXB] (Corolário 2.6.5.1); logo $]AC[\subset]AB[$.

COROLÁRIO 2.7.8.1 - Se A, B e C são colineares e [ABC], então, $]AC[- \{B\} =]AB[\dot{\cup}]BC[$.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata do teorema anterior.

TEOREMA 2.7.9 - A parte comum de dois segmentos abertos con-

tidos na mesma reta, ou é um segmento aberto, ou é vazio.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos na reta r dois segmentos abertos arbitrários $]AB[$ e $]CD[$.

Se $]AB[\subset]CD[$, então $]AB[\cap]CD[=]AB[$.

Se os segmentos $]AB[$ e $]CD[$ possuem somente uma extremidade em comum, por exemplo $A = C$, então $B \neq D$ e temos um dos possíveis três casos: $[ABD]$ ou $[ADB]$ ou $[BAD]$. Assim, de acordo com os Teoremas 2.7.3 e 2.7.4 decorre uma das seguintes possibilidades:

$]AB[\cap]CD[=]AB[\cap]AD[= \emptyset$.

$]AB[\subset]AD[=]CD[$ e, portanto, $]AB[\cap]CD[=]AB[$.

$]CD[=]AD[\subset]AB[$ e, portanto, $]AB[\cap]CD[=]CD[$.

Estudemos agora o caso em que $]AB[$ não está contido em $]CD[$, de tal maneira que A,B,C e D são todos distintos. Do Teorema 2.7.6, segue-se que uma das extremidades A ou B do segmento aberto $]AB[$ não pertence ao segmento $]CD[$, por exemplo não $[CAD]$. Portanto, vem $[ACD]$ ou $[ADC]$. Suponhamos $[ACD]$. Três casos são possíveis:

CASO 1 - $[CBD]$.

$[CBD]$ e $[ACD]$ implicam $[ACB]$ (Teorema 2.6.5). Pelo Corolário 2.7.8.1, temos

$]AB[\cap]CD[= (]AB[-\{C\})\cap(]CD[-\{B\}) = (]AC[\cup]BC[)\cap(]BC[\cup]BD[) =$
$=]BC[$. Para isso basta notar que

$]AC[\cap]BC[= \emptyset$, $]AC[\cap]BC[\subset]AC[\cap]CD[= \emptyset$, $]BC[\cap]BD[= \emptyset$.

CASO 2 - $[BCD]$.

$[BCD]$ e $[ACD]$ implicam que $]CD[\subset]BD[\cap]AD[$ (Teorema 2.7.3).

Pelo Teorema 2.7.5, segue-se que $]AB[\cap]CD[\subset]AB[\cap]AD[\cap]BD[= \emptyset$.

CASO 3 - [BDC].

[BDC] e [ACD] implicam [ACB]. Então, $]CD[\subset]BC[\subset]AB[$ e, portanto, $]AB[\cap]CD[=]CD[$. Se tivermos [CDA], a demonstração é análoga.

Finalmente, se ocorrer não [CBD], a demonstração é análogo ao caso não [CAD].

§2.8 - TOPOLOGIA DA RETA

Seja r uma reta. Para o que se segue neste parágrafo, $\mathcal{U}$ denotará a classe de todos os segmentos abertos contidos em r.

TEOREMA 2.8.1 - Para quaisquer pontos distintos A e B em r, existem segmentos abertos $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tais que $A \in U_1$, $B \in U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja X um ponto em r tal que [AXB] e Y, Z pontos

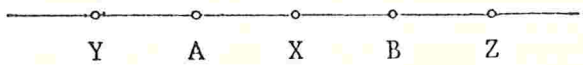

Figura 2.8.1

de r tais que [YAX] e [XBZ] (Figura 2.8.1). Os segmentos abertos $U_1 =]YX[$ e $U_2 =]XZ[$ satisfazem as condições requeridas.

TEOREMA 2.8.2 - Se $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ e $A \in U_1 \cap U_2$, então existe um segmento aberto $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $A \in U_0$ e $U_0 \subset U_1 \cap U_2$.

DEMONSTRAÇÃO- De fato, pelo Teorema 2.7.9, $U_1 \cap U_2$ é um segmento aberto.

TEOREMA 2.8.3 - A classe $\mathcal{U}$ de todos os segmentos abertos da reta r constitui uma base de abertos para a reta r.

DEMONSTRAÇÃO- É conseqüência imediata dos Teoremas 2.8.1 e 2.8.2.

OBSERVAÇÕES- 1. A topologia da reta r é a topologia determinada pela base $\mathcal{U}$ de todos os segmentos abertos.

2. É possível, então, para a reta r, definir todas as noções topológicas; em particular, as noções de ponto de acumulação, fecho e interior de um subconjunto arbitrário de r, as noções de conjuntos conexos, fechados e abertos e a noção de limite de uma seqüência de pontos. Vê-se, por exemplo, que um segmento aberto é um conjunto aberto, bem como qualquer semi-reta de r.

3. Pelo Teorema 2.8.1, a topologia definida em r satisfaz o Axioma de Hausdorff. Finalmente, todos os teoremas concernentes a espaços topológicos em geral valem para o espaço topológico r.

§2.9 - PROPRIEDADES DAS SEMI-RETAS

TEOREMA 2.9.1 - Dados dois pontos distintos A e B, se $C \in \overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

DEMONSTRAÇÃO - Basta analisar dois casos:

CASO 1 - [ACB]

Se X é tal que [AXB], então com [ACB] vem [AXC] ou [ACX] (Teorema 2.6.3). Por outro lado, se X é tal que [ABX], então com [ACB] temos [ACX] (Corolário 2.6.5.1). Se X = B, dado que [ACB], então $B \in \overrightarrow{AC}$.

CASO 2 - [ABC]

Se X satisfaz [AXB], então com [ABC] obtemos [AXC] (Corolário 2.6.5.1). Se X é tal que [ABX], então como [ABC], advém [AXC] ou [ACX] (Teorema 2.6.4). Finalmente se X = B, como [ABC], então $B \in \overrightarrow{AC}$.

Segue-se, portanto, que $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AC}$. A outra inclusão é análoga.

OBSERVAÇÃO - O teorema acima nos mostra que uma semi-reta é completamente determinada por sua origem e qualquer um de seus pontos.

COROLÁRIO 2.9.1.2 - Sejam A e B pontos distintos. Seja C tal que [CAB]. Fica assim determinada a semi-reta $\overrightarrow{AC}$ oposta a semi-reta $\overrightarrow{AB}$. Se D é um outro ponto qualquer tal que [DAB], então $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

DEMONSTRAÇÃO - [DAB] e [CAB] implicam [ADC] ou [ACD] (Teorema 2.6.2), de maneira que $D \in \overrightarrow{AC}$ e, portanto, pelo teorema anterior, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

OBSERVAÇÃO - Dada uma semi-reta $\overrightarrow{AB}$, então a semi-reta oposta a $\overrightarrow{AB}$ fica determinada por um ponto X qualquer tal que [XAB], pelo corolário acima. Denotaremos a semi-reta oposta a $\overrightarrow{AB}$ por $\overrightarrow{AB}^*$.

TEOREMA 2.9.2 - Dada a semi-reta $\overrightarrow{AB}$, então a semi-reta oposta $\overrightarrow{AB}^*$ é o conjunto dos pontos X tais que [XAB].

DEMONSTRAÇÃO- De fato, sabemos que $\overrightarrow{AB}^* = \overrightarrow{AC}$, onde [CAB]. Portanto, se X é tal que [AXC], então com [CAB] obtemos [XAB] (Teorema 2.6.5). Se [ACX], então novamente com [CAB] decorre que [BAX] (Teorema 2.6.1). Temos, então, $\overrightarrow{AB}^* \subset \{X \mid [XAB]\}$.

Reciprocamente, se X é tal que [XAB], então de [CAB] obtemos [ACX] ou [AXC] (Teorema 2.6.2), de modo que $\{X|[XAB]\}\subset\overrightarrow{AB}^*$, donde se conclui a igualdade dos conjuntos $\overrightarrow{AB}^*$ e $\{X|[XAB]\}$.

TEOREMA 2.9.3 - Dados dois pontos quaisquer A e B, distintos, qualquer ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$ exceto A, está em somente uma das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AB}^*$, ou seja:

$$\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^* \dot{\cup} \{A\} \dot{\cup} \overrightarrow{AB}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

OBSERVAÇÕES - 1. Com os resultados até agora obtidos neste parágrafo, temos que qualquer ponto A de uma reta r determina duas semi-retas com as propriedades citadas no Teorema 2.9.3.

2. É claro que uma semi-reta determina a reta na qual está contida.

3. Se A e B são pontos distintos, cada semi-reta contida em $\overleftrightarrow{AB}$ e com origem em A é distinta de cada semi-reta contida em $\overleftrightarrow{AB}$ com origem em B. Portanto, cada semi-reta determina sua origem e, conseqüentemente, também a semi-reta oposta.

TEOREMA 2.9.4 - Se A,B e C são pontos tais que [ABC],então $\overrightarrow{BC}$ é o conjunto dos pontos tais que [ABX].

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

TEOREMA 2.9.5 - Se A,B e C são pontos tais que [ABC],então todos os pontos de $\overrightarrow{BC}$ estão em $\overrightarrow{AB}$.

DEMONSTRAÇÃO - De fato, se [BXC], então com [ABC] advém que [ABX] (Teorema 2.6.5). Por outro lado, se [BCX], então novamente com [ABC] obtemos [ABX] (Teorema 2.6.1).

TEOREMA 2.9.6 - Se C está em $\overrightarrow{AB}$ e [ACD], então D está em $\overrightarrow{AB}$.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

Seja r uma reta. Indicaremos por S a classe de todas as semi-retas contidas em r. Às vezes indicaremos seus elementos por $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$

TEOREMA 2.9.7 - Sejam A e B pontos distintos em uma reta r. Seja $r = \vec{a} \cup \{A\} \cup \vec{a}^* = \vec{b} \cup \{B\} \cup \vec{b}^*$, onde $\vec{a}$, $\vec{a}^*$ e $\vec{b}$, $\vec{b}^*$ são as semi-retas determinadas na reta r pelos pontos A e B, respectivamente. Se $A \in \vec{b}$ e $B \in \vec{a}^*$, então

$$\vec{a} \subset \vec{b}, \ \vec{b}^* \subset \vec{a}^*, \ \vec{a} \cap \vec{b}^* = \emptyset, \ \vec{a}^* \cap \vec{b} = \,]AB[\,.$$

DEMONSTRAÇÃO - Se $X \in \vec{a}$, então [XAB]; portanto, não [ABX], don-

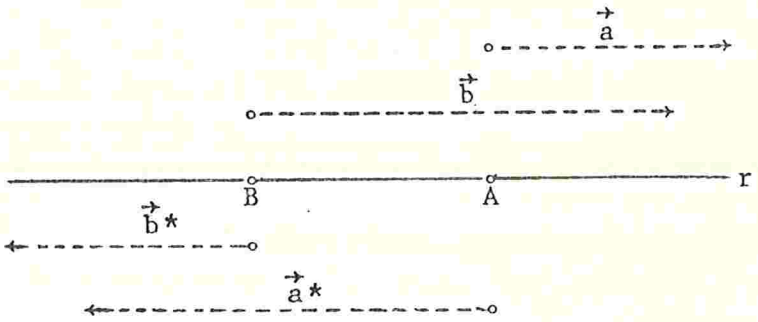

Figura 2.9.1

de $X \in \vec{b}$. Assim $\vec{a} \subset \vec{b}$. Logo, $\vec{b}^* \subset \vec{a}^*$ e $\vec{a} \cap \vec{b}^* = \emptyset$. Se $X \in \vec{a}^* \cap \vec{b}$, temos não [BAX] e não [ABX], donde [AXB], ou seja, $X \in \,]AB[$. Reciprocamente, se [AXB], então não [BAX] e não [ABX], portanto $X \in \vec{a}^* \cap \vec{b}$.

TEOREMA 2.9.8 - Se as semi-retas $\vec{a}$ e $\vec{b}$ estão contidas em r com origens A e B, respectivamente, onde $A \neq B$, então $\vec{a} \subset \vec{b}$ se, e somente se, $A \in \vec{b}$ e $B \notin \vec{a}$.

DEMONSTRAÇÃO - Somente quatro casos são possíveis:

CASO 1 - $A \in \vec{b}$ e $B \notin \vec{a}$.

Temos então $\vec{a} \subset \vec{b}$.

CASO 2 - $A \in \vec{b}^*$ e $B \in \vec{a}$.

Resulta pois $\vec{b} \subset \vec{a}$, e como $\vec{a} \neq \vec{b}$, segue-se que $\vec{a} \not\subset \vec{b}$.

CASO 3 - $A \in \vec{b}^*$ e $B \in \vec{a}^*$.

Tem-se $\vec{a} \cap \vec{b} = \emptyset$ e como $\vec{a} \neq \emptyset$, segue-se que $\vec{a} \not\subset \vec{b}$.

CASO 4 - $A \in \vec{b}$ e $B \in \vec{a}$.

Temos pois $\vec{a} \cap \vec{b} =]AB[$. Assim, se $\vec{a} \subset \vec{b}$, temos que $\vec{a} =]AB[$, o que é um absurdo.

TEOREMA 2.9.9 - Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ duas semi-retas em r com origens distintas A e B, respectivamente. Se $\vec{a} \subset \vec{b}$, então

$$b - \{A\} =]AB[\cup \vec{a} \quad \text{e} \quad]AB[\cap \vec{a} = \emptyset.$$

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

TEOREMA 2.9.10 - Para dois pontos distintos A e B quaisquer

$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} =]AB[.$$

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

TEOREMA 2.9.11 - Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S$. Se $\vec{b} \subset \vec{a}$ e $\vec{c} \subset \vec{a}$, então $\vec{b} \subset \vec{c}$ ou $\vec{c} \subset \vec{b}$.

DEMONSTRAÇÃO - Se duas das semi-retas $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são idênticas, então a asserção é óbvia. Suponhamo-las então distintas duas a duas. Sejam também A, B e C as origens das semi-retas $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, respectivamente. É claro que A, B e C são distintos. De acordo com o Teorema 2.9.8, temos

$$B \in \vec{a} \quad \text{e} \quad C \in \vec{a} \qquad (1),$$

e pelo Teorema 2.9.9 segue que

$$\vec{a}-\{B\} =]AB[\cup\vec{b},\ ]AB[\cap\vec{b} = \emptyset \qquad (2)$$

e

$$\vec{a}-\{C\} =]AC[\cup\vec{c},\ ]AC[\cap\vec{c} = \emptyset. \qquad (3).$$

De (1) vem [ABC] ou [ACB]. Se [ABC], então com (2) e (3), decorre que $C\in\vec{b}$ e $B\notin\vec{c}$, isto é, $\vec{c}\subset\vec{b}$. Por outro lado, se tivermos [ACB], então, de maneira análoga, obtemos $\vec{b}\subset\vec{c}$.

§2.10 - ORIENTAÇÃO DE UMA RETA - EIXOS

Neste parágrafo, estudaremos uma certa relação binária definida entre as semi-retas de uma reta r. Tal relação nos permitirá, posteriormente, definir uma relação de ordem total entre os pontos da reta r.

DEFINIÇÃO 2.10.1 - Seja S a classe das semi-retas de uma reta r como no parágrafo anterior. Definimos uma relação binária R em S pela seguinte condição:

$$\vec{a}R\vec{b}, \text{ se, e somente se, } \vec{a}\subset\vec{b} \text{ ou } \vec{b}\subset\vec{a}.$$

Se $\vec{a}R\vec{b}$, então dizemos também que a semi-reta $\vec{a}$ tem a *mesma orientação* da semi-reta $\vec{b}$.

TEOREMA 2.10.2 - A relação R definida acima é uma relação de equivalência.

DEMONSTRAÇÃO - Para qualquer $\vec{a}\in S$ temos $\vec{a}\subset\vec{a}$, portanto R é reflexiva. Se $\vec{a},\vec{b}\in S$ e $\vec{a}R\vec{b}$, então $\vec{a}\subset\vec{b}$ ou $\vec{b}\subset\vec{a}$. Obviamente, vê-se então que $\vec{b}R\vec{a}$. Finalmente, suponhamos $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in S$ tais que $\vec{a}R\vec{b}$ e $\vec{b}R\vec{c}$. Há quatro casos possíveis:

CASO 1 - $\vec{a}\subset\vec{b}$ e $\vec{b}\subset\vec{c}$.

Neste caso verifica-se $\vec{a}\subset\vec{c}$ e, assim, $\vec{a}R\vec{c}$.

CASO 2 - $\vec{b} \subset \vec{a}$ e $\vec{c} \subset \vec{b}$.

Temos $\vec{c} \subset \vec{a}$ e, portanto, $\vec{a} R \vec{c}$.

CASO 3 - $\vec{a} \subset \vec{b}$ e $\vec{c} \subset \vec{b}$.

Pelo Teorema 2.9.11 resulta $\vec{a} \subset \vec{c}$ ou $\vec{c} \subset \vec{a}$, e, assim, $\vec{a} R \vec{c}$.

CASO 4 - $\vec{b} \subset \vec{a}$ e $\vec{b} \subset \vec{c}$.

Temos $\vec{a}^* \subset \vec{b}^*$ e $\vec{c}^* \subset \vec{b}^*$. Novamente, pelo Teorema 2.9.11, concluímos que $\vec{a}^* \subset \vec{c}^*$ ou $\vec{c}^* \subset \vec{a}^*$, isto é, $\vec{a} \subset \vec{c}$ ou $\vec{c} \subset \vec{a}$, de onde $\vec{a} R \vec{c}$.

OBSERVAÇÃO - Como R é uma relação de eqüivalência, ela define uma partição em S. O próximo teorema nos dirá que tal partição consiste exatamente de duas classes de eqüivalência.

TEOREMA 2.10.3 - Para qualquer reta r, a classe S de todas as semi-retas de r pode ser representada unicamente como reunião disjunta de dois conjuntos não vazios S_1 e S_2, $S = S_1 \cup S_2$, possuindo as seguintes propriedades:

1) Se $\vec{a}, \vec{b} \in S_1$ ou $\vec{a}, \vec{b} \in S_2$, então as semi-retas $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma orientação.
2) Se $\vec{a} \in S_1$ e $\vec{b} \in S_2$, as semi-retas $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não tem a mesma orientação.

DEMONSTRAÇÃO - De fato, se $\vec{a}$ é uma semi-reta de S, temos $r = \vec{a} \cup \{A\} \cup \vec{a}^*$, onde A é a origem de $\vec{a}$. Assim $\vec{a} \not R \vec{a}^*$. Seja $\vec{b} \in S$, de origem B, distinta de $\vec{a}$ e $\vec{a}^*$. Vem, então, $B \neq A$ e apenas quatro casos são possíveis:

CASO 1 - $A \in \vec{b}$ e $B \in \vec{a}$.

Neste caso temos $\vec{a} \subset \vec{b}$ (Teorema 2.9.8).

CASO 2 - $A \in \vec{b}$ e $B \in \vec{a}$.

Neste caso $\vec{a} \subset \vec{b}$.

CASO 3 - $A \in \vec{b}^*$ e $B \in \vec{a}$

Neste caso $\vec{a}^* \subset \vec{b}^*$.

CASO 4 - $A \in \vec{b}^*$ e $B \in \vec{a}^*$

Neste caso $\vec{a} \subset \vec{b}$, ou seja $\vec{b} \subset \vec{a}^*$

Segue-se, pois, que $\vec{b} R \vec{a}$ ou $\vec{b} R \vec{a}^*$.

DEFINIÇÃO 2.10.4 - Denominamos cada um dos conjuntos S_1 e S_2 do teorema anterior de *orientação* ou *sentido* da reta r. Dizemos também que as orientações S_1 e S_2 são *opostas*. Se uma semi-reta $\vec{a}$ pertence a S_1 (ou S_2), dizemos também que $\vec{a}$ tem a orientação S_1 (ou S_2).

DEFINIÇÃO 2.10.5 - Chama-se *reta orientada*, ou *eixo*, ao par ordenado consistindo de uma reta e uma de suas orientações. Assim, a partir de uma reta r, há duas retas orientadas (r,S_1) e (r,S_2).

OBSERVAÇÕES - 1. Como uma reta é determinada por qualquer uma de suas semi-retas, então para se obter uma orientação em r é suficiente escolher nela uma semi-reta $\vec{a}$.

2. Seja (r,S_1) um eixo determinado pela reta r. Dizemos que o ponto P pertence ao eixo (r,S_1), ou que P está no eixo (r,S_1) — em símbolos, $P \in (r,S_1)$ — se $P \in r$.

3. Das duas semi-retas determinadas por um ponto P na reta r, apenas uma delas, digamos $\vec{a}$, tem a orientação S_1. Expressamos este fato dizendo que o ponto P *determina no eixo* (r,S_1) *a semi-reta* $\vec{a}$.

§2.11 - ORDEM DOS PONTOS SOBRE UM EIXO

Consideremos o eixo (r,S_1). Indiquemos por $\vec{a}_P$ a semi-re-

ta determinada no eixo (r,S_1) pelo ponto P, isto é, $\vec{a}_P \in S_1$.

DEFINIÇÃO - Sejam A e B pontos do eixo (r,S_1). Dizemos que o ponto A *precede* o ponto B no eixo (r,S_1) quando $\vec{a}_B \subset \vec{a}_A$ e indicamos este fato por $A \leqslant B$. Se $\vec{a}_A \neq \vec{a}_B$, dizemos que A *precede estritamente* B e indicamos este fato por $A<B$. Fica assim definida uma relação binária $\leq$ entre os elementos de r.

TEOREMA 2.11.2 - A relação $\leqslant$, definida acima, goza das seguintes propriedades:

P_1) $\forall A \in r$, $A \leqslant A$ (reflexividade).

P_2) $\forall A,B \in r$, se $A \leqslant B$ e $B \leqslant A$, então $A = B$ (anti-simétrica).

P_3) $\forall A,B,C \in r$, se $A \leqslant B$ e $B \leqslant C$ então $A \leqslant C$ (transitividade).

P_4) $\forall A,B \in r$, se $A \neq B$ então $A<B$ ou $B<A$ (linearidade).

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

OBSERVAÇÕES - 1. As propriedades P_1, P_2 e P_3 nos dizem que $\leq$ é uma relação de ordem em r e junto com P_4, $\leqslant$ é uma relação de ordem total. Portanto, a relação $\leqslant$ ordena os pontos de r relativa ao eixo (r,S_1).

2. Se $A \leq B$, escrevemos também $B \geqslant A$ e, neste caso, dizemos B *sucede* o ponto A.

3. Se o ponto A determina a semi-reta $\vec{a}_A$ no eixo (r,S_1), então $\vec{a}_A$ é constituido dos pontos P tais que $P > A$ e a semi-reta complementar $\vec{a}_A{}^*$ consiste dos pontos P tais que $P < A$.

TEOREMA 2.11.3- Sejam A, B e C três pontos quaisquer de um eixo (r,S_1). Então [ABC] se, e somente se, $A<B<C$ ou $C<B<A$.

DEMONSTRAÇÃO - Temos $]AB[= \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Se $A < B$, é fácil ver que $\overrightarrow{AB}$ tem a mesma orientação que (r,S_1) e a orientação de $\overrightarrow{BA}$ é opos-

ta à orientação do eixo (r,S_1). Segue-se que $]AB[= \{P \mid A<P<B\}$. Análogamente, se $B < A$, temos $]AB[= \{P \mid B<P<A\}$.

TEOREMA 2.11.4 - Consideremos um eixo (r,S_1). Então temos:

1) Para cada ponto $B \in (r,S_1)$, existem pontos $A,C \in (r,S_1)$, tais que $A < B < C$.
2) Se para os pontos $A,C \in (r,S_1)$ ocorre que $A < C$, então existe um ponto $B \in (r,S_1)$, tal que $A < B < C$.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

OBSERVAÇÕES - 1. Seja r uma reta. A ordem dos pontos da reta r depende da orientação escolhida. Mudando a orientação pela sua oposta, muda-se a ordem para a oposta.

2. O conjunto dos pontos de um eixo (r,S_1) com respeito a relação de ordem $\leqslant$ definida anteriormente é densa em si mesmo sem o primeiro e último pontos.

CAPÍTULO III

O SISTEMA AXIOMÁTICO II E OUTRAS PROPRIEDADES DA ORDEM

§3.1 - O SISTEMA AXIOMÁTICO II

Passaremos, agora, a descrever a Geometria Ordenada através da Axiomática II. Embora parte do tratamento já tenha sido indicado por alguns autores (ver, por exemplo [15],p.185), os resultados que desenvolveremos (a apresentação detalhada da Axiomática II e a equivalência das Axiomáticas I e II) nunca foram — ao que sabemos — antes tratados em detalhe.

§3.1.1 - Introdução

Como noções primitivas desta axiomática temos um conjunto S de pontos, uma classe L de subconjuntos de S e, para cada elemento r de L, uma relação binária $\leq_r$ entre os elementos de r.

Os elementos de S serão chamados de *pontos* e denotados pelas letras A, B, C, P, Q, ... Ao invés de escrever $A \in S$, diremos também: A é um ponto.

Os elementos da classe L serão chamados de *retas* e, também, como no caso dos pontos, $r \in L$ será escrito às vezes: r é uma reta.

A fórmula $A \in r$, que diz que o ponto A pertence à reta r, pode ser lida: o ponto A *está* na reta r ou a reta r *passa* por A.

Para cada reta r, a relação $\leq_r$ é denominada "relação de precedência na reta r". Se $A, B \in r$ e $(A,B) \in \leq_r$, escrevemos, também, $A \leq_r B$ que é lida: o ponto A *precede* o ponto B na reta r. Se tivermos $A \leq_r B$ e os pontos A e B são distintos, escreveremos $A <_r B$ que deverá ser lido: o ponto A *precede estritamente* o ponto B na reta r.

Seguem-se os axiomas, formulados entre as diversas definições e teoremas.

AXIOMA II.1 - Existem pelo menos dois pontos distintos.

AXIOMA II.2 - Para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que os contém.

AXIOMA II.3 - Para cada reta r, a relação binária $\leq_r$ é uma relação de ordem total densa, isto é:

O_1) $\forall A \in r$, temos $A \leq_r A$.

O_2) $\forall A, B \in r$, se $A \leq_r B$ e $B \leq_r A$, então $A = B$.

O_3) $\forall A, B, C \in r$, se $A \leq_r B$ e $B \leq_r C$, então $A \leq_r C$.

O_4) $\forall A, B \in r$, temos $A \leq_r B$ ou $B \leq_r A$.

O_5) $\forall A, B \in r$, se $A <_r B$, então existe um ponto $C \in r$ tal que $A <_r C <_r B$.

O_6) $\forall A, B \in r$, se $A \leq_r B$, então existem pontos C e D na reta r tais que $C <_r A <_r B$ e $A <_r B <_r D$.

OBSERVAÇÃO - A relação inversa da relação $\leq_r$ de uma reta r (que indicaremos por $\leq'_r$), é, também, por sua vez, uma relação de ordem total densa, isto é, satisfaz o Axioma II.3 precedente.

Isso mostra que não há uma única relação de precedência para pontos de uma mesma reta; é natural ordená-los tanto pela relação $\leq_r$, bem como pela sua inversa $\leq'_r$. De fato, não há método geométrico intrínseco para distinguir entre estas relações.

DEFINIÇÃO 3.1.1.1 - Seja r uma reta. Denomina-se reta orientada ao par $(r,\leq)$, onde $\leq$ é uma de suas ordens totais densas. Quando a ordem particular "$\leq$" escolhida é irrelevante diremos simplesmente "a reta orientada r".

OBSERVAÇÕES - 1. Note-se que, pelo Axioma II.3, o conjunto dos pontos de uma reta r, com relação a qualquer uma de suas relações de ordem, é densa em si mesma, sem primeiro e último pontos.

2. Se A e B constituem um par de pontos distintos, a expressão "reta orientada $\overleftrightarrow{AB}$" significa a reta orientada $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $A \leq B$.

3. Pontos de uma mesma reta são ditos *colineares*.

4. De um modo geral, utilizaremos, sem menção explícita as notações da Axiomática I para os conceitos "correspondentes" da Axiomática II.

§3.1.2 - Propriedades da Relação de "Precedência"

LEMA 3.1.2.1 - Sejam A, B e C pontos distintos de uma reta r. Então, temos $A < B < C$ ou $C < B < A$ se, e somente se, $A <' B <' C$ ou $C <' B <' A$.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

§3.1.3 - Obtenção da Relação "Estar Entre"

DEFINIÇÃO 3.1.3.1 - Para quaisquer pontos A, B e C, dizemos que o ponto B está entre A e C, se A, B e C são distintos dois a dois, A, B e C são colineares e $A \leq B \leq C$ ou $C \leq B \leq A$, onde $\leq$ é uma das relações de ordem definida na reta determinada por A, B e C. Note-se que, pelo lema anterior, a relação acima está bem definida.

OBSERVAÇÕES - 1. Se B está entre A e C, indicaremos este fato por $[ABC]_{II}$.

2. Naturalmente, para cada reta há uma relação "estar entre". No entanto, por abuso de linguagem, usaremos o mesmo símbolo para denotar todas as relações em apreço.

TEOREMA 3.1.3.2 - Se A e B são pontos distintos, existe pelo menos um ponto C tal que $[ABC]_{II}$.

DEMONSTRAÇÃO - De fato, pelo Axioma II.2 existe uma reta r que contém A e B e é única. Do Axioma II.3 temos $A \leq B$ ou $B \leq A$. Em qualquer um dos casos, ainda pelo mesmo axioma obtemos um ponto C com $A \leq B \leq C$ ou $C \leq B \leq A$, de onde $[ABC]_{II}$.

TEOREMA 3.1.3.3 - Se $[ABC]_{II}$, então $A \neq C$.

DEMONSTRAÇÃO - Conseqüência imediata da Definição 3.1.3.1.

TEOREMA 3.1.3.4 - Se $[ABC]_{II}$, então $[CBA]_{II}$, mas não [BCA].

DEMONSTRAÇÃO - De fato, se $[ABC]_{II}$, então é imediato que $[BCA]_{II}$. Por outro lado, se tivermos $[BCA]_{II}$, então vem $B \leq C \leq A$ ou $A \leq C \leq$ $\leq B$. Analisemos, pois, os dois casos:

CASO 1 - $B \leq C \leq A$

De $[ABC]_{II}$ temos $A \leq B \leq C$ ou $C \leq B \leq A$. De $B \leq C \leq A$ resulta

que $B \leq A$, do qual, com $A \leq B$, temos $A = B$, o que é uma contradição. De $B \leq C \leq A$ vem $B \leq C$, a qual, com $C \leq B$, nos dá $B = C$, o que novamente é uma contradição.

CASO 2 - $A \leq C \leq B$

Novamente de $[ABC]_{II}$ obtemos $A \leq B \leq C$ ou $C \leq B \leq A$. De $C \leq B$ e $B \leq C$ advém que $C = B$, o que é uma contradição. Da mesma maneira, de $A \leq B$ e $B \leq A$ temos $A = B$, o que novamente é uma contradição.

Segue-se, portanto, que temos não $[BCA]_{II}$.

TEOREMA 3.1.3.5 - Se C e D são pontos distintos na reta $\overleftrightarrow{AB}$, então A está na reta $\overleftrightarrow{CD}$.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata do Axioma II.2.

DEFINIÇÃO 3.1.3.6 - Se A e B são pontos distintos, definimos o segmento aberto $]AB[$ como sendo o conjunto dos pontos P de $\overleftrightarrow{AB}$ tais que $[APB]_{II}$. O segmento fechado $[AB]$ é definido como a reunião de $]AB[$ com $\{A,B\}$. Os pontos A e B são ditos *extremidades* do segmento aberto $]AB[$ (respectivamente, segmento fechado $[AB]$). Se $P \in]AB[$ (respectivamente $[AB]$), dizemos também que o ponto P *está* no segmento aberto $]AB[$ (respectivamente, segmento fechado $[AB]$).

AXIOMA II.4 - Dada uma reta r existe um ponto $A \notin r$.

DEFINIÇÃO 3.1.3.7 - Três pontos não colineares determinam o *triângulo* ΔABC que consiste desses pontos, chamados *vértices*, unido com os três segmentos abertos $]AB[$, $]AC[$ e $]BC[$ denominados *lados*.

Aclara-se, agora, os axiomas restantes da Axiomática II: são, a saber, o Axioma I.7 (de Pasch-Peano); Axioma I.8, Axioma I.9, Axioma K (continuidade) da Axiomática I que aqui, recebem, exatamente a mesma formulação.

§3.1.4 - Eqüivalência dos Sistemas Axiomáticos I e II

A eqüivalência das Axiomáticas I e II é uma decorrência do exposto em §2.11 e §3.1.3.

§3.2 - OUTRAS PROPRIEDADES DA ORDEM

§3.2.1 - Propriedades dos Triângulos

DEFINIÇÃO 3.2.1.1 - Um ponto X é *interior* ao triângulo ΔABC se, e somente se, X está entre dois pontos de lados diferentes do triângulo ΔABC.

TEOREMA 3.2.1.2 - Um ponto interior a um triângulo ΔABC está entre cada vértice e algum ponto do lado oposto a este vértice.

DEMONSTRAÇÃO - Se X é interior a ΔABC, há pontos M,N em lados diferentes, digamos $]AB[$ e $]AC[$, tais que $[MXN]$. Considerando inicialmente a reta $\overleftrightarrow{BX}$ e depois $\overleftrightarrow{AX}$, a asserção se segue do Teorema 2.5.2 e Corolário 2.6.5.1.

TEOREMA 3.2.1.3 - Se ΔABC é um triângulo e M, N e X são pontos tais que $[AMB]$, $[ANC]$ e $[BXC]$, então $]AX[$ encontra $]MN[$.

DEMONSTRAÇÃO - É decorrência imediata dos Teoremas 2.6.1 e 2.6.18.

TEOREMA 3.2.1.4 - Seja ΔABC um triângulo. Uma reta que passa por um ponto X interior a ΔABC e por um ponto Y de ΔABC, encontra novamente ΔABC em um ponto Z com [YXZ].

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Teorema 3.2.1.2, $\overleftrightarrow{AX}$ encontra]BC[em um ponto M. Se $Y \neq M$ está em]BC[, então [CMY] ou [BMY] (Teorema 2.6.7) e assim [MXA]. Do Teorema 2.5.2 decorre então nossa asserção.

TEOREMA 3.2.1.5 - Um ponto entre o vértice de um triângulo e um ponto do lado oposto é interior ao triângulo.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata do teorema anterior.

TEOREMA 3.2.1.6 - Seja o triângulo ΔABC e D, X_1 e X_2 pontos tais que [BCD] e $[AX_1X_2B]$. Temos então $[AY_1Y_2C]$, onde Y_i (i=1,2) é o ponto onde $\overleftrightarrow{DX_i}$ (i=1,2) encontra]AC[(Figura 3.2.1.1).

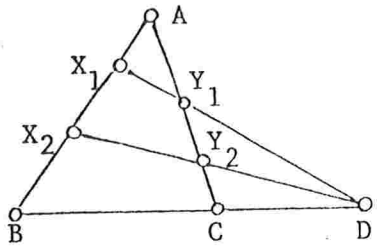

Figura 3.2.1.1

DEMONSTRAÇÃO - À luz do Teorema 2.6.18, $[AX_1B]$ e [BCD] implicam $[AY_1C]$ e $[X_1Y_1D]$. Do Teorema 3.2.1.3, $[X_1X_2B]$, $[X_1Y_1D]$ e [BCD] nos dão $[Y_1Y_2C]$ e $[X_2Y_2D]$.

§3.2.2 - Planos

Na Geometria Ordenada, é notável que simplesmente com os

Axiomas I.1 a I.7 podem-se demonstrar todas as propriedades conhecidas de incidência em um plano. Os mais importantes teoremas a serem demonstrados no plano são:

1) Quaisquer três pontos não colineares de um plano o determinam, e

2) Se uma reta tem dois pontos em comum com um plano então todos os pontos da reta estão no plano.

Já no enfoque tradicional estas propriedades, bem como o Teorema 3.2.2.2 que apresentaremos logo a seguir, são tomados como axiomas, como faz, por exemplo, Hilbert na famosa obra "Grundlagen der Geometrie" ([11]).

DEFINIÇÃO 3.2.2.1 - Sejam A, B e C pontos não colineares. Definimos o *plano* ABC como sendo o conjunto de todos os pontos das retas obtidas unindo-se dois pontos quaisquer do triângulo ΔABC.

OBSERVAÇÕES- 1. Segue-se da definição acima que os pontos do triângulo ΔABC pertencem ao plano ABC.

2. Conjunto de pontos de um mesmo plano são ditos *coplanares*.

3. Segue-se também da definição que ABC = BAC = BCA = CBA = = CAB = ACB.

4. Se uma reta r está contida num plano ABC, dizemos também que r *está* no plano ABC.

5. Denotaremos, às vezes, os planos por α, β, γ, ...

TEOREMA 3.2.2.2 - Se o ponto X pertence ao plano ABC e Y está em um lado de ΔABC, então a reta $\overleftrightarrow{XY}$ encontra o triângulo em um

ponto $Z \neq Y$.

DEMONSTRAÇÃO - Existem pontos M e N em ΔABC colineares com X. A asserção decorre do Axioma I.7 e dos Teoremas 2.6.18, 3.2.1.4 e 3.2.1.5 quando X está em uma das retas determinadas pelos lados de ΔABC, ou quando X não está em uma das retas determinadas pelos lados de ΔABC mas M ou N é um vértice de ΔABC, ou quando X é interior a ΔABC. Finalmente, se [MNX] e M e N estão em lados diferentes de ΔABC, digamos,]AB[e]AC[respectivamente, então de [AMB] e [MNX] obtemos Z, tal que [ANZ] e [XZB]. Como temos [ANC] e $Z \neq C$, resulta que [AZC] ou [ACZ], e considerando os triângulos ΔBCZ e ΔBZA e à luz do Teorema 2.6.18 ou Axioma I.7, advém o resultado desejado.

TEOREMA 3.2.2.3 - Sejam A, B e C pontos não colineares. Se X está em]AB[, então o plano ABC é o conjunto dos pontos das retas obtidas unindo-se X aos pontos de ΔABC.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata do teorema anterior.

TEOREMA 3.2.2.4 - Se D está no plano ABC e não em $\overleftrightarrow{BC}$, então o plano ABC é idêntico ao plano DBC.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos inicialmente que D pertença a uma das retas determinadas pelos lados de ΔABC, digamos $\overleftrightarrow{AB}$. Se [DAB], seja X tal que [AXB]; e, se [ADB], tal que [DXB]. Então, todas as retas que passam por X e que encontram ΔABC, encontram ΔDBC e reciprocamente (Axioma I.7 e Teorema 2.6.18). Assim, pelo teorema anterior, ABC = DBC. Segue-se, portanto, que se $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ e

1) [DAB] ou

2) [ADB], então ABC = DBC.

Concluímos ainda que, se [DBA], então BAC = DAC por 1) e se [ABD], então ADC = BDC por 2). Vem, então, que ABC = BAC = DAC = = ADC = BDC = DBC.

Suponha-se agora que D não esteja em qualquer reta determinada pelos lados de ΔABC. Seja X, tal que [CXB]. Como D está em ABC, $\overleftrightarrow{DX}$ encontra ΔABC em Y, Y ≠ X (Teorema 3.2.2.2) (Figura 3.2.2.1). O ponto Y está em]AB[ou]AC[ou é idêntico a A. Suponhamos sem perda de generalidade que Y∈]AB[∪{A}. Temos então ABC = ABX = YBX = DBX = DBC.

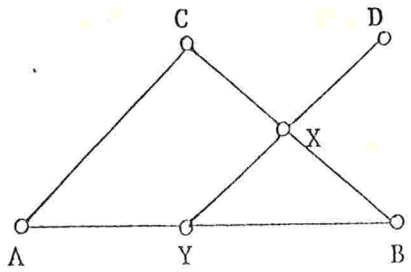

Figura 3.2.2.1

TEOREMA 3.2.2.5 - Se D, E, F são pontos distintos não colineares de ABC, então ABC = DEF. Assim um plano qualquer é totalmente determinado por três de seus pontos quaisquer não colineares.

DEMONSTRAÇÃO - Sem perda de generalidade, suponha-se D ∉ $\overleftrightarrow{BC}$, E ∉ $\overleftrightarrow{DC}$ e F ∉ $\overleftrightarrow{ED}$. Pelo teorema anterior, ABC = DBC. Como E∈ABC = = DBC, segue que BDC = EDC. De modo análogo, EDC = CED = FED = = DEF.

TEOREMA 3.2.2.6 - Se D, E são pontos distintos de ABC, vem que $\overleftrightarrow{DE}$ está em ABC.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $X \in ABC$ e $X \notin \overleftrightarrow{DE}$, então $ABC = XDE$ (Teorema anterior). É claro que $\overleftrightarrow{DE}$ está em XDE, e, portanto, em ABC.

A seguir enunciaremos três teoremas de demonstração imediata:

TEOREMA 3.2.2.7 - Se uma reta intercepta um plano que não a contém, a intersecção contém somente um ponto.

TEOREMA 3.2.2.8 - Dois planos distintos não podem se interceptar em três pontos não colineares.

TEOREMA 3.2.2.9 - Se dois planos distintos se interceptam em A e B, então elas se interceptam em $\overleftrightarrow{AB}$.

TEOREMA 3.2.2.10 - Se uma reta r está em ABC, distinta das retas determinadas pelos lados de ΔABC e X é um ponto de r interior a ΔABC ou está em um lado de ΔABC, então a reta r encontra ΔABC em dois, e somente dois, pontos.

DEMONSTRAÇÃO - Seja P um ponto em r distinto de X. Se X está em um lado de ΔABC a asserção decorre do Teorema 3.2.2.2. Se X é interior a ΔABC, então $\overleftrightarrow{AX}$ encontra]BC[em N, e assim $ABC = ABN$. A reta $\overleftrightarrow{PX}$ está em ABN e intercepta ΔABN e, portanto, também intercepta ΔABC em um ponto distinto de X (Teorema 3.2.2.2). Logo, $\overleftrightarrow{PX}$ intercepta ΔABC em dois pontos (Teorema 3.2.1.4), e em somente dois.

Mais três teoremas de demonstração imediata:

TEOREMA 3.2.2.11 - Uma reta r em ABC distinta de $\overleftrightarrow{AB}$, que intercepta]AB[, encontra]AC[ou]BC[ou passa por C.

TEOREMA 3.2.2.12 - Uma reta em ABC que não encontra [AC] e nem

[BC] não encontra [AB].

TEOREMA 3.2.2.13 - Uma semi-reta contida em ABC com origem num ponto interior a ΔABC intercepta o triângulo em somente um ponto.

TEOREMA 3.2.2.14 - Se A, B e C são pontos não colineares e [BDC], então todos os pontos interiores ao triângulo ΔABC, e somente esses pontos, são interiores ao triângulo ΔABD ou interior a ΔACD ou está em]AD[.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata dos Teoremas 3.2.12 e 3.2.15.

TEOREMA 3.2.2.15 - Sejam A, B e C pontos não colineares. Sejam também, $X, Y \in ABC$ não pertencentes a ΔABC e nem interiores ao mesmo, $[XY] \cap]AB[= \{L\}$ e [XLY]. Logo, [XY] corta ΔABC em mais um ponto Z distinto de L.

DEMONSTRAÇÃO - Segue-se que a reta $\overleftrightarrow{XY}$ intercepta]AB[em L. Logo, pelo Teorema 3.2.2.2, tal reta encontra novamente ΔABC em um ponto $Z \neq L$. Naturalmente $Z \notin [AB]$. Segue-se, então, que $\overleftrightarrow{XY}$ intercepta]AC[ou]BC[, ou ainda, $C \in \overleftrightarrow{XY}$. Analisemos os seguintes casos:

CASO 1 - $C \in \overleftrightarrow{XY}$.

Temos [LCY] ou [CLY] ou [LYC].

Se [LCY], então de [XLY] obtemos [XCY].

Se [CLY], então de [XLY] obtemos [LXC] ou [LCX]. [LXC] não é verdadeira, pois, do contrário, X é interior a ΔABC. Logo devemos ter [LCX] que, junto com [XLY], obtemos [XCY].

Se [LYC], Y seria interior a ΔABC o que é contrário à nossa hipótese.

Temos, assim, que $[XY] \cap \Delta ABC = \{L, C\}$, $L \neq C$, pois $C \notin \overleftrightarrow{AB}$.

CASO 2 - $[XY] \cap]AC[= \{Z\}$

Para os pontos L, Z e Y temos [LZY] ou [YLZ] ou [LYZ].

Se [LZY], então com [XLY] obtemos [XZY].

Se [YLZ], então pelo Teorema 2.6.2 obtemos [LZX] ou [LXZ]. [LXZ] é falsa e, portanto, temos [LZX] que, junto com [XLY], nos dá [XZY].

Se [LYZ], então Y é interior a ΔABC, o que é uma contradição.

Segue-se assim que $[XY] \cap \Delta ABC = \{L, Z\}$, $L \neq Z$.

TEOREMA 3.2.2.16 - Sejam X e Y pontos do plano ABC tais que [XY] intercepta]AB[em $L \neq Y$ e não intercepta]AC[nem]BC[, e também não contém C. Se X não é um ponto interior a ΔABC, então Y é interior a ΔABC.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata do teorema anterior.

§3.2.3 - Regiões Convexas e Regiões Conexas

DEFINIÇÃO 3.2.3.1 - Dada a seqüência finita de pontos $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ $(n \geq 2)$, todos distintos, chama-se *poligonal* $A_1A_2 \ldots A_n$ que une A_1 e A_n ao conjunto

$$[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup \ldots \cup [A_{n-1}A_n].$$

Ela será designada, às vezes, por $p_{A_1}^{A_n}$ ou simplesmente por p. Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são ditos *vértices* da poligonal e os segmentos $[A_1A_2], [A_2A_3], \ldots, [A_{n-1}A_n]$, *lados* da poligonal.

OBSERVAÇÃO - Dada a poligonal $p = A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geq 2)$, é claro que

esta é idêntica à poligonal $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_n}$ onde $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ é uma permutação circular de $(1,2,\ldots,n)$.

DEFINIÇÃO 3.2.3.2 - Um conjunto C de pontos é denominado de *região conexa* se, para dois pontos quaisquer A e B de C, existir uma poligonal p_A^B tal que $p_A^B \subset C$. Em geral, quando mencionamos uma região, entendemos que ela é conexa.

DEFINIÇÃO 3.2.3.3 - Um conjunto de pontos C é denominado de *região convexa* se para dois conjuntos quaisquer A e B de C, $[AB] \subset C$.

OBSERVAÇÃO - Segue-se das definições acima que segmentos, segmentos abertos, retas e semi-retas são regiões conexas e convexas. Também a intersecção de duas regiões convexas é convexa.

DEFINIÇÃO 3.2.3.4 - Um conjunto $S \neq \emptyset$ *separa* uma região C nas regiões $C_1 \neq \emptyset$ e $C_2 \neq \emptyset$ se:

a) $C = C_1 \cup S \cup C_2$.

b) $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

c) $C_1 \cap S = C_2 \cap S = \emptyset$.

d) $\forall A,B \in C$, se $A \in C_1$ e $B \in C_2$, então para qualquer $p_A^B \subset C$ segue-se que $p_A^B \cap S \neq \emptyset$.

TEOREMA 3.2.3.5 - Se S separa C em C_1 e C_2 e em C_1' e C_2', então $C_1 = C_1'$ e $C_2 = C_2'$ ou $C_1 = C_2'$ e $C_2 = C_1'$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $A \in C_1$. Logo, $A \in C_1'$ ou $A \in C_2'$. Suponhamos $A \in C_1'$. Se X é um ponto qualquer em C_1, então do mesmo modo, $X \in C_1'$ ou $X \in C_2'$. Se $X \in C_2'$, então para qualquer poligonal p_A^X, $p_A^X \cap S \neq \emptyset$, mas isso contradiz o fato de $X,A \in C_1$. Segue-se então que $X \in C_1'$ e as-

sim $C_1 \subset C_1'$. Reciprocamente se $Y \in C_1'$, de maneira similar, mostra-se que $Y \in C_1$ e assim $C_1 = C_1'$.

Finalmente, como $C_1 \cup C_2 \cup S = C_1' \cup C_2' \cup S = C$,

$$C_1 = C_1',\ C_1 \cap C_2 = \emptyset, C_1' \cap C_2' = \emptyset,\ C_1 \cap S = C_2 \cap S = C_1' \cap S = C_2' \cap S = \emptyset,$$

vem, também, $C_2 = C_2'$.

§2.3.4 - Semi-Planos

Fixemos uma reta r em um plano α. Estudaremos neste parágrafo, a relação μ definida para dois pontos A e B de $\alpha - r$ pela condição:

$$A \mu B, \text{ se, e somente se, } \nexists O \in r \text{ tal que } [AOB].$$

Por vezes, a fórmula $A \mu B$ é lida "os pontos A e B estão no *mesmo lado* da reta r (no plano α)".

TEOREMA 3.2.4.1 - μ é uma relação de eqüivalência em α-r.

DEMONSTRAÇÃO - As propriedades reflexiva e simétrica são imediatas. Seja então A,B e C $\in \alpha$-r tais que $A \mu B$ e $B \mu C$. Temos os seguintes casos:

CASO 1 - A,B e C são colineares

Suponha-se por absurdo que $A \not\mu C$. Portanto, existe um ponto $O \in r$ tal que [AOC]. Como temos $A \mu B$ e $B \mu C$, segue-se que

$$\text{não } [AOB] \tag{1}$$

e

$$\text{não } [BOC] \tag{2}$$

De (1) vem

$$[ABO] \tag{3}$$

ou

$$[BAO] \qquad (4).$$

De (2) decorre que

$$[CBO] \qquad (5)$$

ou

$$[BCO] \qquad (6).$$

A fórmula [AOC], com [ABO], nos dá [BOC] (Teorema 2.6.5), e, do mesmo modo, de [AOC] e [CBO] decorre [BOA], o que é uma contradição. Pelo Teorema 2.6.1, [AOC] e [BAO] nos dão [COB] e [AOC] com [BCO] implicam [AOB], o que novamente é contraditório com nossa hipótese. Assim $\nexists O \in r$ com [AOC], ou seja, temos $A \mu C$.

CASO 2 - A,B e C não são colineares

Se, por absurdo, tivermos $O \in r$ com [AOC], então, pelo Teorema 3.2.2.2, a reta r encontra ΔABC em um ponto $Z \neq \emptyset$. Tal ponto Z está em]AB[ou]AC[, contradizendo nossa hipótese. Segue-se, por conseguinte, que $\nexists O \in r$ com [AOC], ou seja, $A \mu C$.

TEOREMA 3.2.4.2 - O conjunto quociente α-r/μ tem somente dois elementos.

DEMONSTRAÇÃO - De fato, existem pontos $O \in r$, $A, B \notin r$, $A, B \in \alpha$ tais que [AOB]. É claro que A e B estão em classes de eqüivalência diferentes α_1 e α_2. Seja agora $X \in \alpha - r$. Consideremos dois casos:

CASO 1 - A,B e X são colineares.

Temos [ABX] ou [AXB] ou [BAX].

[ABX] e [AOB] acarretam [OBX], e assim $X \in \alpha_2$.

[BAX] e [AOB] acarretam [OAX], e assim $X \in \alpha_1$.

[AXB] e [AOB] acarretam [AXO] ou [OXB] de maneira que não [AOX] e não [BOX], e portanto $X \in \alpha_1$ ou $X \in \alpha_2$.

CASO 2 - A,B e X não são colineares

Temos então a reta r interceptando ΔABX em O. Pelo Teorema 3.2.2.2, a reta r corta ΔABX em um ponto Z distinto de O, com [AZX] ou [XZB]. Se [AZX], então $X \mu B$ e, portanto, $X \in \alpha_2$ e se [XZB] então $X \mu A$ e, por conseguinte, $X \in \alpha_1$.

DEFINIÇÃO 3.2.4.3 - Os dois subconjuntos α_1 e α_2 obtidos no teorema anterior denominam-se *semi-planos* de origem r. Os conjuntos $\alpha_1 \cup r$ e $\alpha_2 \cup r$ chamam-se *semi-planos fechados*. Dizemos também que os semi-planos α_1 e α_2 são *complementares* ou *opostos* um do outro.

OBSERVAÇÕES - 1. Dado o semi-plano α_1, o seu complementar (ou oposto) será denotado, às vezes, por α_1^*.

2. É claro que um semi-plano determina o plano α em que está contido.

3. Cada semi-plano é unicamente determinado por sua origem e qualquer um de seus pontos.

TEOREMA 3.2.4.4 - Como as notações do teorema anterior, α_1 e α_2 são regiões convexas.

DEMONSTRAÇÃO - Provemos a asserção para α_1. Sejam M e N pontos de α_1 e seja C tal que [MCN]. Temos os seguintes casos:

CASO 1 - M,N e B são colineares (Figuras 3.2.4.1a e 3.2.4.1b)

Como $M,N \in \alpha_1$ temos que $\exists O \in r$ com

$$[MOB] \tag{1}$$

e

[NOB]. (2)

De (1) e (2) concluímos

[MNO] (3)

ou

[NMO] (Teorema 2.6.2). (4)

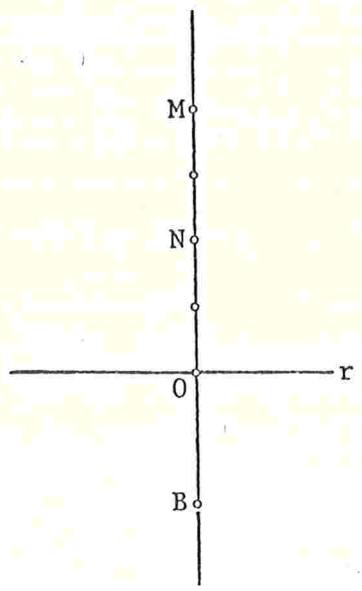

Figura 3.2.4.1a

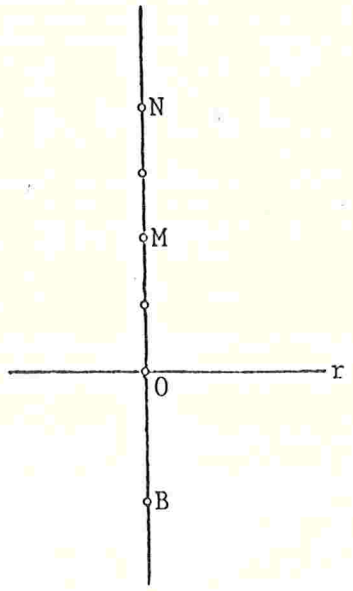

Figura 3.2.4.1b

De [MNO] e [MCN] obtemos [MCO] (Corolário 2.6.5.1) que, junto com [MOB], acarreta [COB], e assim $C \in \alpha_1$. Por outro lado, [NMO] e [MCN] implica [NCO], que, com [NOB] implica também [COB], e assim $C \in \alpha_1$.

Segue-se daí que $[MN] \subset \alpha_1$.

CASO 2 - M,N e B não são colineares

Temos $M, N \in \alpha_1$. Logo, existem pontos O e P em r com [MOB] e [NPB]. Seja C tal que [MCN]. Assim, pelo Teorema 3.2.1.3 temos que]BX[encontra]OP[em Q e assim $C \in \alpha_1$.

Por conseguinte, $[MN] \subset \alpha_1$ e α_1 é então convexo.

De modo análogo, mostra-se que α_2 é convexo.

TEOREMA 3.2.4.5 - A reta r separa α em α_1 e α_2.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam A, B pontos de α tais que $A \in \alpha_1$ e $B \in \alpha_2$ e seja p_A^B uma poligonal qualquer unindo A e B,

$$p_A^B = A_1A_2 \ldots A_n \ (n \geq 2) \text{ onde } A_1 = A \text{ e } A_n = B.$$

Seja $A = \{i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid A_i \in \alpha_2\}$. $A \neq \emptyset$ pois $n \in A$. Pelo Princípio do Menor Número Natural, seja $n_0 = \min A$. Temos assim $A_{n_0} \in \alpha_2$ e $A_{n_0-1} \in r$ ou $A_{n_0-1} \in \alpha_1$. Se A_{n_0-1} pertence a r, então $p_r^B \cap r \neq \emptyset$. Se $A_{n_0-1} \in \alpha_1$, temos que existe $O \in r$ com $[A_{n_0-1}OA_{n_0}]$, o que completa a demonstração.

TEOREMA 3.2.4.6 - Se a origem O de uma semi-reta $\vec{s}$ pertence à origem r de um semi-plano α_1 e $A \in \vec{s} \cap \alpha_1$, então $\vec{s} \subset \alpha_1$.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

§3.2.5 - Ângulos

DEFINIÇÃO 3.2.5.1 - Consideremos duas semi-retas de mesma origem $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, não contidas numa mesma reta. Chama-se *ângulo* $B\hat{A}C$ à reunião das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e do conjunto $\{A\}$. As semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são chamadas *lados* do ângulo $B\hat{A}C$. A origem comum A das semi-retas é chamada *vértice* do ângulo $B\hat{A}C$.

OBSERVAÇÕES - 1. Se as semi-retas $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tiveram mesma origem O, não contidas numa mesma reta, o ângulo determinado por eles será indicado por $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$.

2. Segue-se da definição acima que $B\hat{A}C = C\hat{A}B$.

TEOREMA 3.2.5.2 - Um ângulo $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$ separa o plano que determina em duas regiões.

DEMONSTRAÇÃO - Denominemos de α o plano determinado pelas semi-retas $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Seja a a reta determinada pela semi-reta $\vec{a}$, e seja b a reta determinada por $\vec{b}$. A reta a separa α em duas regiões α_1 e α_2. Suponhamos $\vec{b}\subset\alpha_1$. Da mesma forma a reta b separa α em duas regiões β_1 e β_2, e suponhamos $\vec{a}\subset\beta_1$.

Consideremos os conjuntos:

$$I = \alpha_1\cap\beta_1 \tag{1}$$

e

$$E = \alpha_2\cup\beta_2 \tag{2}$$

Demonstraremos, a seguir, propriedades referentes aos conjuntos I e E:

a) $I \neq \emptyset$. De fato, sejam $A\in\vec{a}$, $B\in\vec{b}$ e X tal que [AXB]. Como $B\in\vec{b}\subset\alpha_1$, segue-se que $\overrightarrow{AB}\subset\alpha_1$ pelo Teorema 3.2.4.6 e assim $X\in\alpha_1$. De modo análogo temos $X\in\beta_1$ e assim $X\in\alpha_1\cap\beta_1 = I$; portanto $I \neq \emptyset$.

b) $E \neq \emptyset$. Sejam A e B como no item anterior. Seja Y tal que [YAB]. Segue-se que $Y\in\alpha_2$ e assim $Y\in\alpha_2\cup\beta_2 = E$, e portanto $E \neq \emptyset$.

c) I é região convexa, pois é intersecção de regiões convexas.

d) E é região. Com efeito, sejam $X,Y\in E$. Se ambos pontos pertencerem a α_2 ou β_2, então $[XY]\subset E$. Suponha-se então $X\in\alpha_2$ e $Y\notin\alpha_2$. Portanto, $Y\in\beta_2$. Temos os seguintes casos:

CASO 1 - $Y\in\vec{a}^*$

Como $X\in\alpha_2$, segue-se que $]XY[\cup\{X\}\subset\alpha_2$. Logo,

$$[XY] = \{Y\}\cup\{X\}\cup]XY[\subset\alpha_2\cup\beta_2 = E.$$

CASO 2 - $Y \in \alpha_1$ e $Y \notin \vec{a}^*$

Como $X \in \alpha_2$ e $Y \in \alpha_1$, temos que $[XY] \cap a = \{P\}$. Se o ponto $P \in \vec{a}^*$, temos que $[PX] \subset E$ e $[PY] \subset \beta_2$, e assim $[XY] \subset E$. Se $P \in \{O\} \cup \vec{a}$, seja $Q \in \vec{a}^*$. É imediato que $[QX] \subset E$ e $[QY] \subset E$. Assim a poligonal $p_X^Y = XQY \subset E$, e, portanto, E é uma região.

e) $\alpha = I \cup E \cup \vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}$. De fato, seja $X \in \alpha$. Temos então os seguintes casos: $X \in \alpha_1$ ou $X \in a$ ou $X \in \alpha_2$.

CASO 1 - $X \in \alpha_1$

Como a reta b separa α em β_1 e β_2, o ponto X pode pertencer a β_1 ou a $\vec{b}$ ou a β_2.

i) Se $X \in \beta_1$, então $X \in \alpha_1 \cap \beta_1 = I$.

ii) Se $X \in \beta_2$, então $X \in E$.

Em qualquer um dos itens, $X \in I \cup E \cup \vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}$.

CASO 2 - $X \in \alpha_2$

Se $X \in \alpha_2$, então $X \in E$ e assim $X \in I \cup E \cup \vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}$.

CASO 3 - $x \in a$

Se $X \in \vec{a}^*$, então $X \in \beta_2$ e assim $X \in E$. O ponto X ainda pode pertencer a $\vec{a} \cup \{O\}$, mas em ambos os casos temos $X \in I \cup E \cup \vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}$.

Concluímos portanto que $\alpha = I \cup E \cup \vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}$.

f) $I \cap E = \emptyset$. Demonstração imediata.

g) $I \cap (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}) = \emptyset$ e $E \cap (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}) = \emptyset$. Demonstração imediata.

h) $\forall X, Y \in \alpha$, se $X \in I$ e $Y \in E$ então para qualquer poligonal p_X^Y contida em α temos $p_X^Y \cap (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}) \neq \emptyset$. Demonstraremos inicialmente para a poligonal $p_X^Y = XY$. Seja $X \in I$ e $Y \in E$.

Segue-se que $X \in \alpha_1 \cap \beta_1$ e $Y \in \alpha_2 \cup \beta_2$. Assim, $Y \in \alpha_2$ ou $Y \in \beta_2$.

Suponhamos que $Y \in \alpha_2$. Como $X \in \alpha_1$, segue-se que $[XY] \cap a = \{L\}$.

Tal ponto L pode estar em $\vec{a}^*$ ou $\{O\} \cup \vec{a}$.

CASO 1 - $L \in \vec{a} \cup \{O\}$.

Neste caso, $[XY] \cap (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}) = \{L\}$.

CASO 2 - $L \in \vec{a}^*$.

Como $\vec{a}^* \subset \beta_2$, segue-se que $L \in \beta_2$. Mas $X \in \beta_1$, portanto $[LX] \cap b = \{S\}$. Como $L \in a$ e $X \in \alpha_1$ então $]LX[\subset \alpha_1$, e, portanto $S \in \alpha_1$. Como $\vec{b}^* \subset \alpha_2$ segue-se que $S \in \vec{b} \cup \{O\}$.

Em qualquer um dos casos acima vemos que

$$p_X^Y \cap (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}) \neq \emptyset.$$

Suponha-se agora que $Y \in \beta_2$. É claro que $Y \in \alpha_1$ ou $Y \in \vec{a}^*$ ou $Y \in \alpha_2$. Basta analisar o caso em que $Y \in \alpha_1$ ou $Y \in \vec{a}^*$. Por outro lado, como $X \in \beta_1$, segue-se que $[XY] \cap b = \{R\}$. Se $Y \in \vec{a}^*$, como $X \in \alpha_1$ segue-se que $]YX[\subset \alpha_1$ e assim $R \in \alpha_1$. Portanto $R \in \vec{b}$, e, assim, temos $p_X^Y \cap (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}) \neq \emptyset$. Se $Y \in \alpha_1$, temos $[XY] \subset \alpha_1$ e, assim, $R \in \alpha_1$ e, do mesmo modo, concluímos $R \in \vec{b}$ e $p_X^Y \cap (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}) \neq \emptyset$.

Demonstramos, assim, que $p_X^Y \cap (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}) \neq \emptyset$, quando $p_X^Y = XY$.

Consideremos agora uma poligonal qualquer $p_X^Y = A_1 \ldots A_n$ $(n \geq 2)$ com $A_1 = X \in I$, $A_n = Y \in E$ e $p_X^Y \subset \alpha$. Consideremos o conjunto $A = \{i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid A_i \in E\}$. $A \neq \emptyset$, pois $n \in A$. Logo, pelo Princípio do Menor Número Natural, seja $n_0 = \min A$. Assim $A_{n_0-1} \in I$ ou $A_{n_0-1} \in (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b})$.

Se $A_{n_0-1} \in (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b})$, então $p_X^Y \cap (\vec{a} \cup \{O\} \cup \vec{b}) \neq \emptyset$.

Se $A_{n_0-1} \in I$, como $A_{n_0} \in E$, segue-se da demonstração acima

que $[A_{n_0-1}A_{n_0}]\cap(\vec{a}\cup\{O\}\cup\vec{b}) \neq \emptyset$ e assim $p_X^Y\cap(\vec{a}\cup\{O\}\cup\vec{b}) \neq \emptyset$, o que conclui a demonstração do teorema.

DEFINIÇÃO 3.2.5.3 - Com as notações do teorema anterior, o conjunto I se chama *interior* do ângulo $a\hat{O}b$ e E *exterior* do ângulo $a\hat{O}L$. Os pontos de I são ditos *internos* (ou *interiores*) ao ângulo $a\hat{O}b$ e os de E, *externos* (ou *exteriores*) ao ângulo $a\hat{O}b$.

TEOREMA 3.2.5.4 - Dado um ângulo $a\hat{O}b$, se uma semi-reta $\vec{c}$ de origem O possui um ponto X interior ao ângulo, então todos os seus pontos são interiores a $a\hat{O}b$.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata do Teorema 3.2.4.6.

DEFINIÇÃO 3.2.5.5 - Seja $a\hat{O}b$ um ângulo. Uma semi-reta $\vec{c}$ de origem O contida no interior de $a\hat{O}b$ chama-se semi-reta interna ao ângulo $a\hat{O}b$.

COROLÁRIO 3.2.5.4.1 - Uma semi-reta $\vec{c}$ de origem O que tem um ponto Y externo ao ângulo $\vec{a}O\vec{b}$, tem todos os seus pontos externos a $a\hat{O}b$.

DEFINIÇÃO 3.2.5.6 - Uma semi-reta $\vec{c}$ de origem O é dita externa a $a\hat{O}b$ se possuir todos os seus pontos externos a $a\hat{O}b$.

TEOREMA 3.2.5.7 - Dado um ângulo $a\hat{O}b$, se $A\in\vec{a}$, $B\in\vec{b}$ e $\vec{c}$ é uma semi-reta de origem O tal que $\vec{c}\cap]AB[= \{X\}$, então $\vec{c}$ é uma semi-reta interna a $a\hat{O}b$.

DEMONSTRAÇÃO - Com as notações do Teorema 3.2.5.2, temos $B\in\vec{b}\subset\alpha_1$ e $A\in a$. Segue-se que $\overleftrightarrow{AB}\subset\alpha_1$, e, como temos $[AXB]$, então $X\in\alpha_1$. De modo semelhante, $X\in\beta_1$. Logo $X\in I$, e, assim, pelo teorema anterior, $\vec{c}$ é semi-reta interna a $a\hat{O}b$.

TEOREMA 3.2.5.8 - Seja $\hat{a}O\hat{b}$ um ângulo e $A \in \vec{a}$, $B \in \vec{b}$ e $\vec{c}$ uma semi-reta interna. Então $\vec{c} \cap [AB] = \{X\}$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja Y um ponto de $\vec{c}$. Estudemos os seguinte casos:

CASO 1 - $Y \in \overleftrightarrow{AB}$ (Figura 3.2.5.1a)

Temos as seguintes possibilidades para A, B e Y:[YAB] ou

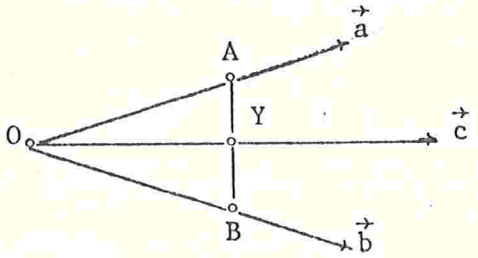

Figura 3.2.5.1a

[AYB] ou [ABY].

Se [YAB], como $A \in \alpha$ e $B \in \alpha_1$, segue-se que $Y \in \alpha_2$ e, portanto, $Y \in E$, o que é uma contradição. Logo, [YAB] é falsa.

Se [ABY], de maneira similar, $Y \in \beta_2$, e assim $Y \in E$, o que novamente é uma contradição.

Segue-se, então, [AYB], e o teorema está provado.

CASO 2 - O e Y estão em semi-planos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ (Figura 3.2.5.1b).

Pela hipótese, existe um ponto $X \in \overleftrightarrow{AB}$ com $[YO] \cap \overleftrightarrow{AB} = \{X\}$.

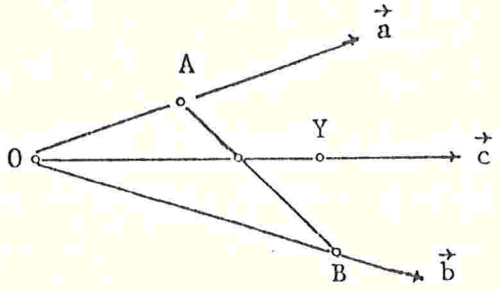

Figura 3.2.5.1b

Para os pontos A, B e X temos [ABX] ou [BAX] ou [AXB].

De modo análogo ao caso 1, [ABX] e [BAX] são falsos e assim temos [AXB].

CASO 3 - O e Y estão em um mesmo semi-plano em relação a $\overleftrightarrow{AB}$ (Figura 3.2.5.1c).

Seja Z um ponto tal que [AZB]. Se $Z \in \vec{c}$, o teorema está pro-

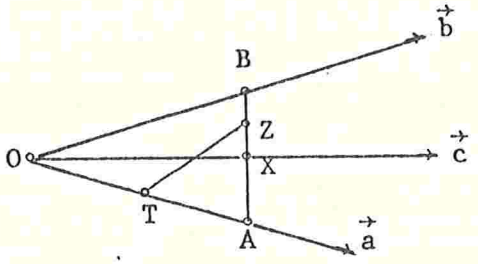

Figura 3.2.5.1c

vado. Suponhamos, então, que $Z \notin \vec{c}$. Como $Y \notin \overleftrightarrow{AB}$, pelo Teorema 3.2.2.2 a reta $\overleftrightarrow{YZ}$ corta o triângulo ΔOAB em um ponto T distinto de Z. Tal ponto deve estar em]OA[ou]OB[. Suponha que se $\overleftrightarrow{YZ}$ corte]OA[em T. Por outro lado, temos [AZB], $A \in \alpha$ e $B \in \vec{b} \subset \alpha_1$. Segue-se que $Z \in \alpha_1$. De $Y \in \vec{c} \subset \alpha_1$, $Z \in \alpha_1$ e $T \in]OA[\subset \vec{a} \subset \alpha$, temos [TYZ] ou [TZY]. Mostremos que [TZY] é falsa. Para tal, suponha-se verdadeira. Como O, Y e T não são colineares, [OTA] e [TZY] nos dão um ponto M com [OMY] e [AZM] (Axioma I.7 e Teorema 2.5.2) o que mostra que Y e O estão em semi-planos opostos em relação a $\overleftrightarrow{AB}$, o que é uma contradição. Assim [TZY] é falsa.

Como T, A e Z não são colineares, as fórmulas [OTA] e [TYZ] nos dão um ponto X com [ZXA] e [OYX] (Axioma I.7 e Teorema 2.5.2). [ZXA] e [BZA] nos dão [AXB] pelo Corolário 2.6.5.1. Como temos [OYX], segue-se que $X \in \overrightarrow{OY} = \vec{c}$ e assim o teorema está provado.

TEOREMA 3.2.5.9 - Seja $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$ um ângulo. Uma semi-reta $\vec{c}$ de origem O é interna a $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$ se, e somente se, existem pontos H, K e X em $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ respectivamente com [HXK].

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos, inicialmente, que $\vec{c}$ é interna a $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$. É claro que existem pontos $H \in \vec{a}$ e $K \in \vec{b}$. Pelo teorema anterior, $[HK] \cap \vec{c} = \{X\}$ e assim [HXK].

Reciprocamente seja $\vec{c}$ de origem O, e pontos H, K e X em $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ respectivamente com [HXK]. Pelo teorema 3.2.5.7, $\vec{c}$ é interna a $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$.

TEOREMA 3.2.5.10 - Seja $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$ um ângulo. O conjunto dos pontos interiores I a $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$ coincide com o conjunto dos pontos das semi-retas internas a $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

TEOREMA 3.2.5.11 - Seja $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$ um ângulo. Se A e B são pontos tais que $[AB] \cap \vec{a}\hat{O}\vec{b} = \{X\}$, e $X \in \vec{a}$, então $A \in I$ e $B \in E$, ou $A \in E$ e $B \in I$.

DEMONSTRAÇÃO - Como $X \in \vec{a}$, temos $A \in \alpha_1$ e $B \in \alpha_2$, ou $A \in \alpha_2$ e $B \in \alpha_1$. Suponhamos que $A \in \alpha_1$ e $B \in \alpha_2$.

Por outro lado, $A \in \beta_1$ ou $A \in \beta_2$ ou $A \in \vec{b}$.

Se $A \in \vec{b}$, $\vec{a}\hat{O}\vec{b} \cap [AB] \supset \{A, X\}$, o que é uma contradição.

Se $A \in \beta_2$, como $X \in \beta_1$, temos $[AX] \cap b = \{Y\}$. É claro que $Y \neq O$. Y não pode pertencer a $\vec{b}^*$, pois, caso contrário, $Y \in \alpha_2$ e, como $X \in a$ e $A \in \alpha_1$, temos $]AX[\subset \alpha_1$, donde se conclui que $Y \in \alpha_1$, o que é uma contradição. Temos, portanto, $Y \in \vec{b}$. De [AYX] e [AXB] concluímos [AYB], e, assim, $[AB] \cap \vec{a}\hat{O}\vec{b} = \{X, Y\}$, o que é uma contradição. Segue-se que $A \notin \beta_2$.

Concluímos então que $A \in \beta_1$. De $A \in \alpha_2$ e $A \in \alpha_1$ segue-se que $A \in \beta_1$.

Como $B \in \beta_2 \subset \alpha_2 \cup \beta_2 = E$, finaliza a demonstração.

§3.2.6 - Triângulos Abertos

No parágrafo 3.2.1 definimos quando um ponto X é interior a um triângulo ΔABC. Definiremos, a seguir, triângulo aberto (ou interior do triângulo ΔABC) e, logo após, faremos uma caracterização do mesmo, seguido de algumas de suas propriedades.

DEFINIÇÃO 3.2.6.1 - Sejam A, B e C pontos não colineares. O conjunto dos pontos interiores a ΔABC é chamado de *triângulo aberto*, ou *interior do triângulo*, e será denotado por $\mathring{\Delta}ABC$.

TEOREMA 3.2.6.2 - Sejam A, B e C pontos não colineares. Então o triângulo aberto $\mathring{\Delta}ABC$ é constituído dos pontos da intersecção dos interiores dos ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ (Figura 3.2.6.1).

DEMONSTRAÇÃO - Seja X um ponto de $\mathring{\Delta}ABC$. Pelo Teorema 3.2.1.2,

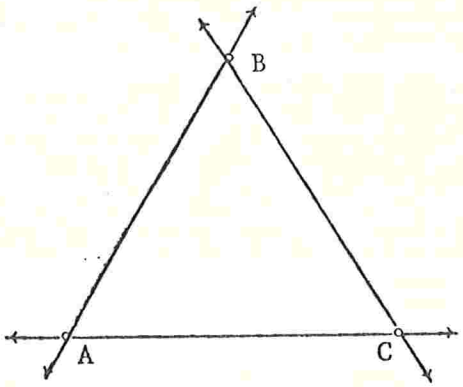

Figura 3.2.6.1

o ponto X está entre cada vértice e algum ponto do lado oposto. Suponhamos [AXD] e [BDC]. Logo, pelo Teorema 3.2.5.7, temos que $\overrightarrow{AX}$ é interna a $B\hat{A}C$, donde se conclui que X é interno

a $B\hat{A}C$. De modo inteiramente análogo, concluímos que X é interno a $A\hat{C}B$ e $A\hat{B}C$.

Reciprocamente, suponha-se que X é interno a $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{A}C$. Pelo Teorema 3.2.5.8, $[BC] \cap \overrightarrow{AX} = \{Y\}$. Como X é interior a $A\hat{B}C$, segue-se que [AXD]. Pelo Teorema 3.2.1.5, X é interior a ΔABC.

OBSERVAÇÕES - 1. Se α_1 é o semi-plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que contém C, α_2 o semi-plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que contém A, e α_3 o semi-plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AC}$ e que contém B, então decorre do teorema anterior que $\mathring{\Delta}ABC = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$.

2. Os pontos A, B e C são ditos vértices do triângulo aberto $\mathring{\Delta}ABC$ e]AB[,]AC[e]BC[, lados do mesmo. Note-se que nenhum dos conjuntos citados está contido em $\mathring{\Delta}ABC$.

3. Designaremos, às vezes, os triângulos abertos de regiões triangulares.

A seguir, três teoremas de demonstração imediata:

TEOREMA 3.2.6.3 - Consideremos num plano α um triângulo aberto $\mathring{\Delta}ABC$ e um segmento aberto]XY[. Temos $]XY[\subset \Delta ABC$ se, e somente se, $[XY] \subset \Delta ABC$, $[XY] \not\subset \overleftrightarrow{AB}$, $[XY] \not\subset \overleftrightarrow{BC}$ e $[XY] \not\subset \overleftrightarrow{AC}$.

TEOREMA 3.2.6.4 - Seja α_1 um semi-plano com origem r e um triângulo aberto $\mathring{\Delta}ABC$ no plano α determinado por α_1. Temos $\mathring{\Delta}ABC \subset \alpha_1$ se, e somente se, A, B e C pertencem a $\alpha_1 \cup r$.

TEOREMA 3.2.6.5 - Dados os triângulos abertos $\mathring{\Delta}ABC$ e $\mathring{\Delta}DEF$ em um plano α, $\mathring{\Delta}ABC \subset \mathring{\Delta}DEF$, se, e somente se, A, B e $C \in \Delta DEF$.

TEOREMA 3.2.6.6 - Seja um triângulo aberto $\mathring{\Delta}ABC$ em um plano α

e um ponto $X \in \alpha$. Então $X \in \mathring{\Delta}ABC$ se, e somente se, cada semi-reta de α com origem em X intercepta ΔABC em exatamente um ponto.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $X \in \mathring{\Delta}ABC$ e seja $\vec{a}$ uma semi-reta com origem em X, contida em α. Há os seguintes casos:

CASO 1 - A semi-reta $\vec{a}$ passa por um dos vértices A, B ou C. Neste caso, é óbvio que $\vec{a} \cap \Delta ABC \neq \emptyset$.

CASO 2 - A semi-reta oposta $\vec{a}^*$ passa por um dos vértices, digamos A. Então pelo Teorema 3.2.1.2, $\vec{a} \cap]BC[\neq \emptyset$.

CASO 3 - Suponha-se, agora, que a reta a, determinada por $\vec{a}$, não passa por nenhum dos vértices A, B ou C. Então, pelo Teorema 3.2.1.2, existe um ponto D tal que [BDC] e [AXD]. Dos dois pontos B ou C, somente um, por exemplo B, está no mesmo semi-plano da reta $\overleftrightarrow{AD}$ em que $\vec{a}$ está contida. Como os pontos A, B e D não são colineares e a reta a intercepta]AD[, então pelo Teorema 3.2.2.2, a reta a volta a interceptar ΔABC em um ponto E, $E \neq X$, donde concluímos $\vec{a} \cap (]AB[\cup]BD[) \neq \emptyset$.

A recíproca é imediata.

§3.2.7 - Topologia do Plano

TEOREMA 3.2.7.1 - Seja α um plano e α_1 um semi-plano de α determinado pela reta $r \subset \alpha$. Então, para qualquer ponto $X \in \alpha_1$, existe um triângulo aberto $\mathring{\Delta}ABC \subset \alpha_1$, tal que $X \in \mathring{\Delta}ABC$.

DEMONSTRAÇÃO - Basta tomar pontos B, D e C em r e A em α_1 com [BDC] e [DXA]. Então, $X \in \mathring{\Delta}ABC \subset \alpha_1$.

TEOREMA 3.2.7.2 - A parte comum de qualquer triângulo aberto

$\mathring{\Delta}ABC$ e de uma reta contida no plano determinado pelo triângulo é ou um conjunto vazio; ou um segmento aberto.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata da Definição 3.2.1.1 e dos Teoremas 3.2.6.6, 3.2.1.4 e 3.2.6.3.

Seja α um plano. Para o que se segue neste parágrafo, denotaremos por $\mathcal{V}$ a classe de todos os triângulos abertos contidos em α.

TEOREMA 3.2.7.3 - Para quaisquer dois pontos distintos A e B de α, existem triângulos abertos $U_1 U_2 \in \mathcal{V}$, tal que $A \in U_1$, $B \in U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO - É fácil ver que existe uma reta r em α, tal que A está em um dos semi-planos α_1 determinado por r, e B no semi-plano oposto α_2. Pelo Teorema 3.2.7.1 existem triângulos abertos $U_1, U_2 \in \mathcal{V}$, tal que $A \in U_1 \subset \alpha_1$, $B \in U_2 \subset \alpha_2$ e temos ainda $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

TEOREMA 3.2.7.4 - Se $U_1, U_2 \in \mathcal{V}$ e $X \in U_1 \cap U_2$, então existe um triângulo aberto $U_0 \in \mathcal{V}$, tal que $X \in U_0$ e $U_0 \subset U_1 \cap U_2$.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam r e s duas retas distintas por X. Sejam

$$I_1^{(r)} = U_1 \cap r \quad \text{e} \quad I_2^{(r)} = U_2 \cap r$$

$$I_1^{(s)} = U_1 \cap s \quad \text{e} \quad I_2^{(s)} = U_2 \cap s$$

Pelo Teorema 3.2.7.2, $I_1^{(r)}$, $I_2^{(r)}$, $I_1^{(s)}$ e $I_2^{(s)}$ são segmentos abertos. Pelo Teorema 2.7.9,

$$I^{(r)} = I_1^{(r)} \cap I_2^{(r)} \quad \text{e} \quad I^{(s)} = I_1^{(s)} \cap I_2^{(s)}$$

são ainda segmentos abertos. É claro que $I^{(r)}$ e $I^{(s)}$ estão con-

tidos em $U_1 \cap U_2$.

Sejam $I^{(r)} =]A_1A_2[$ e $I^{(s)} =]B_1B_2[$. Sejam C e D pontos tais que $[A_1CB_1]$ e $[A_2DB_2]$ (Figura 3.2.7.1) e seja $U_0 = \mathring{\Delta}A_2CD$.

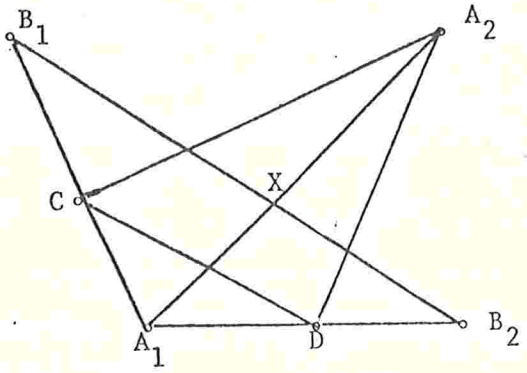

Figura 3.2.7.1

Dos Teoremas 3.2.1.2, 3.2.1.5 e 3.2.6.5, segue facilmente que $X \in U_0$ e $U_0 \subset U_1 \cap U_2$.

TEOREMA 3.2.7.5 - A classe V de todos os triângulos abertos contidos no plano α constitui uma base de abertos para α.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata dos Teoremas 3.2.7.3 e 3.2.7.4.

OBSERVAÇÕES - 1. Naturalmente, a topologia do plano α é a topologia obtida pela base V de todos os triângulos abertos contidos em α.

2. A topologia de α induz uma topologia em cada reta $r \subset \alpha$. É fácil mostrar que essa topologia coincide com a topologia definida no parágrafo 2.8 do Capítulo II para a reta r. Isto é uma decorrência do Teorema 3.2.6.6 e do fato de que todo segmento aberto $]AB[$ em uma reta r pode ser considerado como parte comum de r com algum triângulo aberto de α.

3. Todas as noções e resultados sobre espaços topológicos gerais valem para o espaço topológico α.

4. Finalmente, o Teorema 3.2.7.3 nos diz que o espaço topológico α satisfaz o Axioma de Hausdorff.

Enunciaremos, a seguir, sem demonstração, algumas propriedades topológicas de um plano α:

TEOREMA 3.2.7.6 - Cada semiplano $\alpha_1 \subset \alpha$ é um conjunto aberto.

TEOREMA 3.2.7.7 - Para qualquer semi-plano $\alpha_1 \subset \alpha$ com origem em r, temos $\alpha_1 \cup r = \overline{\alpha_1}$, onde $\overline{\alpha_1}$ é o fecho de α_1. Segue-se deste teorema que um semi-plano junto com sua origem é um conjunto fechado cuja fronteira é r.

TEOREMA 3.2.7.8 - Para qualquer triângulo aberto $\mathring{\Delta}ABC$, o triângulo ΔABC é a fronteira de $\mathring{\Delta}ABC$, e $\mathring{\Delta}ABC$ é o interior, no sentido topológico, de $\Delta ABC \cup \mathring{\Delta}ABC$.

§3.2.8 - Espaço

Nosso conjunto de pontos, junto com os Axiomas I.1 a I.7 e o Axioma I.8' que enunciaremos a seguir, formam a Geometria Ordenada bidimensional. Para obter pelo menos uma Geometria Ordenada tridimensional, devemos substituir o Axioma I.8' pelo Axioma I.8, o que faremos ainda neste parágrafo, mostrando, também, as principais propriedades da incidência de retas e planos.

AXIOMA I.8' - Todos os pontos estão em um mesmo plano.

AXIOMA I.8 - SE ABC é um plano, existe um ponto D que não pertence ao mesmo plano.

Daqui para a frente, neste parágrafo, assumiremos o Axioma I.8.

TEOREMA 3.2.8.1 - Dado um conjunto finito de planos, existe uma infinidade de pontos não pertencentes a eles.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

DEFINIÇÃO 3.2.8.2 - Sejam A, B, C e D pontos distintos não coplanares. Definimos o tetraedro $\Delta ABCD$ como sendo o conjunto de todos os pontos dos triângulos ΔABC, ΔABD, ΔACD e ΔBCD unido com os respectivos interiores. Então

$$\Delta ABCD = \Delta ABC \cup \Delta ABD \cup \Delta ACD \cup \Delta BCD \cup \mathring{\Delta} ABC \cup \mathring{\Delta} ABD \cup \mathring{\Delta} ACD \cup \mathring{\Delta} BCD$$

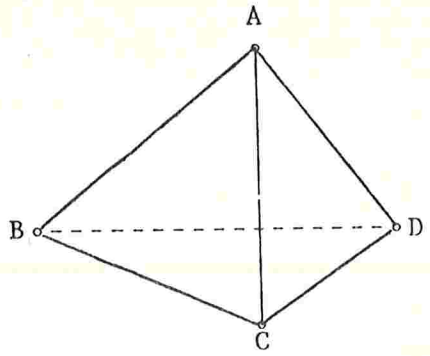

Figura 3.2.8.1

Os pontos A, B, C e D são chamados *vértices* de $\Delta ABCD$; os segmentos abertos $]AB[$, $]AC[$, $]AD[$, $]BC[$, $]CD[$ e $]BD[$, *arestas* de $\Delta ABCD$; os triângulos abertos $\mathring{\Delta} ABC$, $\mathring{\Delta} ABD$, $\mathring{\Delta} ACD$ e $\mathring{\Delta} BCD$, *faces* de $\Delta ABCD$. Duas arestas são ditas *opostas* se não tiverem extremidades em comum.

DEFINIÇÃO 3.2.8.3 - Sejam A, B, C e D pontos distintos não coplanares. O espaço ABCD é definido como sendo o conjunto de todos os pontos das retas obtidas unindo-se dois pontos quaisquer de $\Delta ABCD$.

OBSERVAÇÃO - Decorre da definição acima que ABCD = BACD e todas as permutações entre os pontos A, B, C e D produzem o mesmo espaço.

DEFINIÇÃO 3.2.8.4 - Um ponto X é interior a ΔABCD se existem pontos M, N em faces diferentes de ΔABCD tal que [MXN].

TEOREMA 3.2.8.5 - Se o ponto X é interior a ΔABCD, então $\overleftrightarrow{AX}$ encontra o plano BCD em um ponto P interior a ΔBCD com [AXP].

DEMONSTRAÇÃO - Existem pontos M, N em faces diferentes de ΔABCD, com [MXN]. Assim, pelo menos um dos pontos M ou N está em uma face com vértice A, digamos, M ∈ ∆ABC. Segue-se que $\overleftrightarrow{AM}$ encontra $\overleftrightarrow{BC}$ em V com [AMV] e [BVC]. Há os seguintes casos:

CASO 1 - Se N está também em uma face com vértice A, digamos,

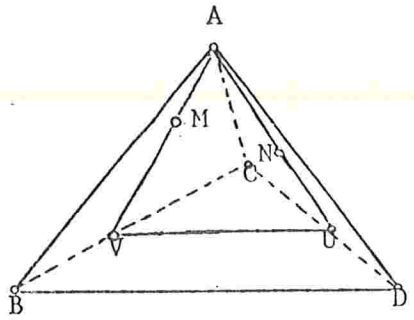

Figura 3.2.8.2a

N∈∆ACD, então $\overleftrightarrow{AN}$ encontra $\overleftrightarrow{CD}$ em U com [ANU] e [DUC]. Então, pela Definição 3.2.1.1 e Teorema 3.2.1.2, X é interior a ΔAVU e obtemos um ponto P em]VU[com [AXP] e [VPU]. Como temos [BVC] e U∉[BC], P∈∆BCD.

CASO 2 - Se N não está em uma face com vértice A, então N∈∆BCD. Então há um ponto U∉[BC], tal que [VNU] (Teorema 3.2.1.4). Novamente pela Definição 3.2.1.1 e Teorema 3.2.1.2, concluímos

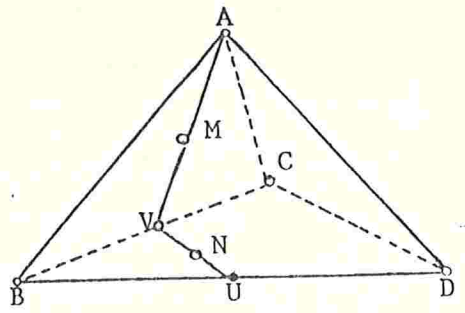

Figura 3.2.8.2b

que $X \in \mathring{A}AVU$ e $\overleftrightarrow{AX}$ encontra $\overleftrightarrow{VU}$ em P com [AXP] e [VPU].

TEOREMA 3.2.8.6 - Consideremos o tetraedro $\Delta ABCD$. Se P pertence à face $\mathring{A}BCD$ e X é tal que [AXP], então X é interior a $\Delta ABCD$.

DEMONSTRAÇÃO - Como $P \in \mathring{A}DBC$, existem pontos V e U em lados diferentes de $\mathring{A}BCD$ com [VPU]. Como temos [AXP], segue-se que $X \in \mathring{A}AVU$ (Teorema 3.2.1.5). Assim, há pontos Y e Z em lados diferentes de $\mathring{A}AVU$ com [YXZ] e, é claro, Y e Z estão em faces diferentes de $\Delta ABCD$.

TEOREMA 3.2.8.7 - Sejam P e Q pontos de $\Delta ABCD$ e que estejam em planos diferentes determinados pelas faces de $\Delta ABCD$. Se R é um ponto tal que [PRQ], então R é interior a $\Delta ABCD$.

DEMONSTRAÇÃO - Basta considerarmos o caso em que P está em uma aresta, digamos,]AB[e Q na aresta oposta a]AB[ou em uma face. Se $Q \in]CD[$, consideramos o triângulo ΔPCD e as fórmulas [PXQ] e [CQD], donde concluímos, de maneira análoga à demonstração do teorema anterior, que X está no interior de $\Delta ABCD$. Para o caso em que Q está numa face, a demonstração é similar.

TEOREMA 3.2.8.8 - Seja X um ponto interior a $\Delta ABCD$ e Y em $\Delta ABCD$ ou no seu interior. Então $\overleftrightarrow{XY}$ encontra $\Delta ABCD$ em dois pontos Q e R com [QXR] (Figura 3.2.8.3).

DEMONSTRAÇÃO - É claro que o ponto Y não está em todas as faces de $\Delta ABCD$. Suponha-se por exemplo que $Y \notin \mathring{\Delta}BCD \cup BCD$.

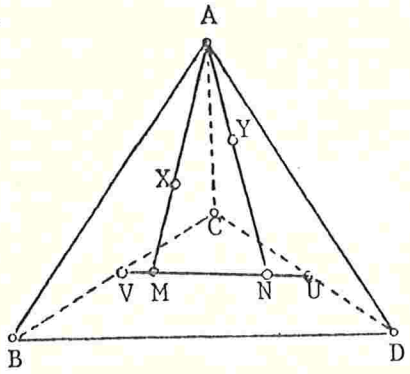

Figura 3.2.8.3

Se $Y = A$, a asserção decorre do Teorema 3.2.8.5.

Se $Y \neq A$, então existem pontos $M \in \mathring{\Delta}BCD$ e $N \in \Delta BCD \cup \mathring{\Delta}BCD$ com $[AXM]$ e $[AYN]$ (Teoremas 3.2.8.5 e 3.2.1.2). Portanto, $\overleftrightarrow{MN}$ encontra ΔBCD em dois pontos U e V com $[VMU]$ e $N = U$ ou V, ou $[VNU]$ (Teoremas 3.2.2.10 e 3.2.1.4). Assim, X é interior e Y interior ou sobre ΔAVU (Teorema 3.2.1.5). Segue-se que $\overleftrightarrow{XY}$ encontra ΔAVU em dois pontos Q e R com $[QXR]$ e, é claro, que Q e R estão em $\Delta ABCD$ (Teoremas 3.2.2.10 e 3.2.1.4).

TEOREMA 3.2.8.9 - Se M e N são pontos pertencentes a diferentes faces de $\Delta ABCD$, O é um ponto tal que $[MNO]$, e P é um ponto em qualquer face de $\Delta ABCD$; então a reta $\overleftrightarrow{OP}$ encontra $\Delta ABCD$ em um ponto Q, $Q \neq P$.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos os seguintes casos:

CASO 1 - Suponhamos que P esteja na mesma face à qual M per-

tence e seja X um ponto ainda da mesma face com [MPX]. Então, $\overleftrightarrow{OP}$ encontra $\overleftrightarrow{NX}$ em Y com [NYX], e assim Y é interior a ΔABCD. A reta $\overleftrightarrow{PY} = \overleftrightarrow{PO}$ encontra ΔABCD novamente em Q, pelo teorema anterior. Se P e N estão em uma mesma face, a demonstração é análoga.

CASO 2 - Suponhamos agora que P pertença a uma face, digamos ÂBCD, tal que não contenha M nem N. Então, as retas $\overleftrightarrow{AM}$ e $\overleftrightarrow{AN}$ encontram lados de ΔBCD, digamos em X e Y, com [AMX] e [ANY]. Seja Z um ponto com [XZY]. Então, ou a reta $\overleftrightarrow{OZ}$ encontra ΔAXY em W com [WZO] ou [ZWO]; ou O está em $\overleftrightarrow{XY}$ (Definição 3.2.2.1 e Teorema 3.2.2.2). É claro que [ZOW] é impossível. Se [ZWO] ou [WZO], temos o caso 1 anterior, pois P está na mesma face que Z. Finalmente, se O está na reta $\overleftrightarrow{XY}$ e P está no triângulo ΔBCD, o teorema é trivial.

TEOREMA 3.2.8.10 - Se o ponto O está no espaço ABCD e P em uma face de ΔABCD, então $\overleftrightarrow{OP}$ encontra ΔABCD novamente em um ponto distinto de P.

DEMONSTRAÇÃO - Pela Definição 3.2.8.3, existem pontos M e N em ΔABCD com $O \in \overleftrightarrow{MN}$. Se M e N estão em faces diferentes de ΔABCD, a asserção decorre dos Teoremas 3.2.8.8 e 3.2.8.9. Se tivermos [MON] com M e N em faces distintas, a asserção decorre dos Teoremas 3.2.8.7 e 3.2.8.8. Nos casos restantes, a demonstração é análoga à demonstração do Teorema 3.2.8.7.

TEOREMA 3.2.8.11 - Se E e F são pontos distintos no espaço ABCD, então todos os pontos de $\overleftrightarrow{EF}$ estão em ABCD.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que E e F não estejam em ΔABCD. Con-

sideremos um ponto P em uma face de ΔABCD e não pertencente a $\overleftrightarrow{EF}$. Então, $\overleftrightarrow{PE}$ e $\overleftrightarrow{PF}$ encontram ΔABCD nos pontos Q e R de ΔABCD, ambos distintos de P. E, portanto, P, Q e R não são colineares. Assim, $\overleftrightarrow{EF}$ está contida no plano PQR. Segue-se então, que qualquer ponto X está em uma reta obtida, unindo-se dois pontos Y e Z do triângulo ΔPQR, e, como P, Q e R estão no tetraedro ΔABCD, segue-se que Y e Z estão em ΔABCD ou no seu interior. Logo $\overleftrightarrow{YZ}$ encontra ΔABCD em dois pontos L e M. Mas X está em $\overleftrightarrow{LM}$, e, portanto no espaço ABCD.

TEOREMA 3.2.8.12 - Se E, F, G e H são pontos distintos — não coplanares — do espaço ABCD, então o espaço EFGH é idêntico ao espaço ABCD.

DEMONSTRAÇÃO - É claro que o ponto E não está em todos os planos determinados pelas faces de ΔABCD. Suponhamos que E não esteja no plano BCD. Pela Definição 3.2.8.3 e Teorema 3.2.8.11, concluímos que todos os pontos das arestas de ΔEBCD estão no espaço ABCD, e, portanto, todos os pontos das faces de ΔEBCD também estão no espaço ABCD e, conseqüentemente, todos os pontos do espaço EBCD estão no espaço ABCD.

Mostraremos a seguir que todos os pontos do espaço ABCD estão no espaço EBCD. Para tal, seja X um ponto de ÅBCD. Então $\overleftrightarrow{EX}$ encontra ΔABCD novamente em Y, onde Y está, digamos, em ΔACD ou no seu interior.

Se [XEY], então E é interior a ΔABCD e, assim, $\overleftrightarrow{AE}$ encontra o interior de ΔBCD.

Se E = Y, então E = A ou $\overleftrightarrow{AE}$ encontra [CD].

Se [EXY], então, ou Y = A; ou $\overleftrightarrow{AY}$ encontra [CD] em Z com

[AYZ]; e, então, $\overleftrightarrow{AX}$ encontra]EZ[em um ponto de ΔECD ou do seu interior. E, assim, A está em uma reta determinada por um ponto de ÅBCD e um ponto de ΔECD ou ÅECD.

AXIOMA I.9 - Todos os pontos estão num mesmo espaço.

Nosso conjunto de pontos, junto com os Axiomas I.1 a I.9, formam a Geometria Ordenada (sem o Axioma de Continuidade) tridimensional.

Uma decorrência do axioma acima, é o seguinte teorema:

TEOREMA 3.2.8.13 - Dois planos que se encontram em um ponto, tornam-se a encontrar em outro ponto (distinto), e assim a intersecção é uma reta.

DEMONSTRAÇÃO - Seja P o ponto comum e α e β os planos. Sejam A, B e C pontos em α, tal que P seja interior a ΔABC. Sejam, também, D e P pontos em β, tal que D, P e Q formem um triângulo (Figura 3.2.8.4). Se D ou Q está em α, então α e β têm dois

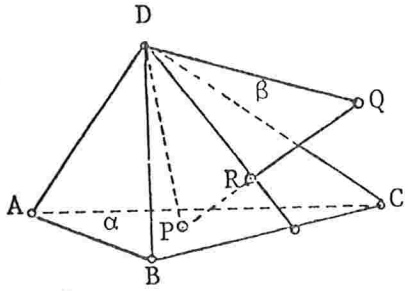

Figura 3.2.8.4

pontos em comum. Se não, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ encontra o tetraedro ΔABCD em um ponto R distinto de P; e a reta $\overleftrightarrow{DR}$, contida em β, encontra o triângulo ΔABC em um ponto comum a α e a β.

OBSERVAÇÃO - Às vezes chamaremos os Axiomas I.1 a I.9 de Axiomas de ordem 0.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

Aplicaremos, neste capítulo, o que foi estudado na Axiomática I. Trataremos de apresentar teoremas clássicos na literatura matemática: O Teorema de Sylvester[7] e o Teorema de Jordan[8].

Em relação ao primeiro teorema, observamos que apenas os Axiomas I.1 a I.7 e os teoremas decorrentes são suficientes para tratar eficazmente da Conjectura de Sylvester (problema que manteve os matemáticos de todo o mundo em desconcerto durante quarenta anos). Hoje, vê-se de maneira clara que esse problema de colinearidade pertence à Geometria Ordenada.

---

(7) - James J.Sylvester propôs seu problema no final do século passado em "Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times, 59 (1893), p. 98 (Pergunta 11.851)". Nem Sylvester e nenhum de seus contemporâneos conseguiram dar uma demonstração satisfatória na época. Uma primeira solução foi dada por T.Gallai em 1933, porém, com um argumento bastante complicado. L. M. Kelly, em "American Mathematical Society, 55 (1948), p. 28" deu uma outra demonstração apoiando-se no conceito de distância.

(8) - Camile Jordan em 1877 deu uma primeira demonstração do resultado que ficou conhecido como Teorema de Jordan: "Uma curva fechada do $\mathbb{R}^2$, sem auto-intersecções, separa o plano em exatamente duas componentes conexas E e I, e o seu traço é a fronteira de E e I". No entanto, tal demonstração não era satisfatória; além de algumas imperfeições, admitiu em sua prova o teorema verdadeiro no caso de a curva ser uma poligonal. A primeira prova convincente foi dada por O.Veblen em 1905, em "Theory of plane curves in non metrical analysis situs", Transactions A.M.S, 6 (1905), pp. 83-98. Este teorema é de importância para a topologia e muitas outras provas foram feitas posteriormente.

Quanto ao segundo teorema, o instrumental necessário para tratá-lo, também consiste dos Axiomas I.1 a I.7 e dos teoremas decorrentes. Além desses resultados, um estudo mais detalhado envolvendo poligonais – acessibilidade de pontos, regiões, fronteira e separação – será necessário. Isso será feito neste capítulo. Cumpre ressaltar que não faremos uso do Axioma da Continuidade e nem do Axioma das Parelelas. Assim, tais teoremas valem no contexto da Geometria Absoluta sem o Axioma de Continuidade (por exemplo, na Geometria de Euclides e na Hiperbólica, sem o Axioma de Continuidade).

Teoricamente caberia que não nos restringíssemos apenas à análise das aplicações propostas do sistema em apreço. Não obstante, pensamos que os tópicos escolhidos são suficientes para mostar a força, o interesse, e, mesmo, a beleza da teoria. De modo que optamos por não nos alongar em demasia.

§4.1 - O PROBLEMA DE SYLVESTER

A formulação que daremos aqui é devida a Motzkin[9].

TEOREMA 4.1.1 - Dados n pontos não todos colineares, existe pelo menos uma reta que contém exatamente a dois deles.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos o conjunto $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ dos n pontos e, sem perda de generalidade, podemos supor que P_1, P_2 e P_3 são não colineares (Figura 4.1.1a). As retas que unem P_1 aos demais pontos do conjunto P encontram a reta $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ em

(9) - T. Motzkin, "Transactions of The American Mathematical Society", 70 (1951), p. 452.

não mais que n-1 pontos. Seja $Q \in \overleftrightarrow{P_2P_3}$, distinto das intersecções acima. Segue-se, portanto, que $P_i \notin \overleftrightarrow{P_1Q}$ para $i = 2,3,\ldots,n$.

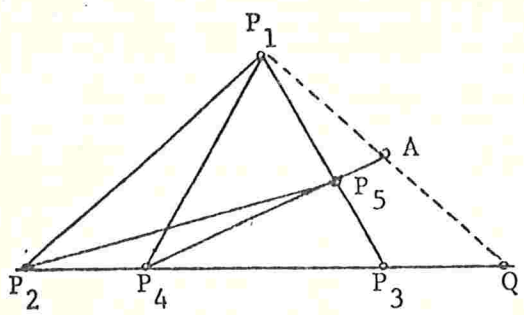

Figura 4.1.1a

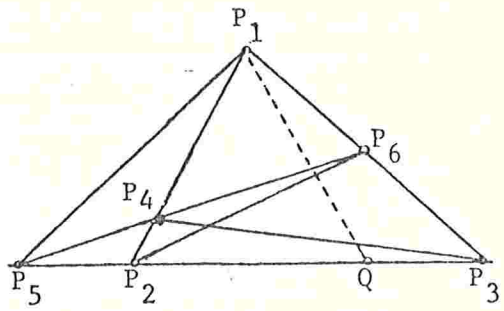

Figura 4.1.1b

As retas determinadas por pares de pontos P_j $(j=1,2,\ldots,n)$ encontram a reta $\overleftrightarrow{P_1Q}$ em não mais de $\binom{n-1}{2}+1$ pontos. Sejam eles $A_1,\ldots,A_k$, $k \leq \binom{n-1}{2}+1$, onde $P_1 = A_j$ para algum $j=1,2,\ldots,k$. Consideremos o segmento aberto $]P_1A[$, onde $A = A_{j-1}$ ou A_{j+1}. Então, $]P_1A[\cap \overleftrightarrow{P_iP_j} = \emptyset$, $\forall i$, $\forall j$, $i \neq j$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

Por outro lado, o ponto A está em uma das retas $\overleftrightarrow{P_iP_j}$ e, sem perda de generalidade, podemos supor $A \in \overleftrightarrow{P_4P_5}$. Se P_4 e P_5 são os únicos pontos de $\mathcal{P}$ em $\overleftrightarrow{P_4P_5}$ (Figura 4.1.1b), nosso teorema já está demonstrado; caso contrário, há pelo menos três pontos P_4, P_5 e P_6 na reta $\overleftrightarrow{P_4P_5}$ e podemos supor $P_4 \in [AP_5]$ e $P_6 \notin [AP_5]$ (posto que A decompõe a reta em duas semi-retas opostas e um deles contém pelo menos dois ou três pontos P_i: esta escolha é sempre possível).

Afirmamos que a reta $\overleftrightarrow{P_1P_5}$ não contém mais que dois pontos de $\mathcal{P}$. De fato, se a reta $\overleftrightarrow{P_1P_5}$ contiver mais um ponto de $\mathcal{P}$, digamos P_7, dois casos podem ocorrer:

CASO 1 - $[P_1P_7P_5]$

Aplicando o Axioma I.7 e o Teorema 2.6.1.18 ao triângulo ΔP_1P_5A (Figura 4.1.1c), vemos que a reta $\overleftrightarrow{P_6P_7}$ encontra $]P_1A[$, o que é uma contradição.

CASO 2 - $[P_1P_5P_7]$ ou $[P_5P_1P_7]$

Novamente com base no triângulo ΔAP_1P_5, Axioma I.7 e o

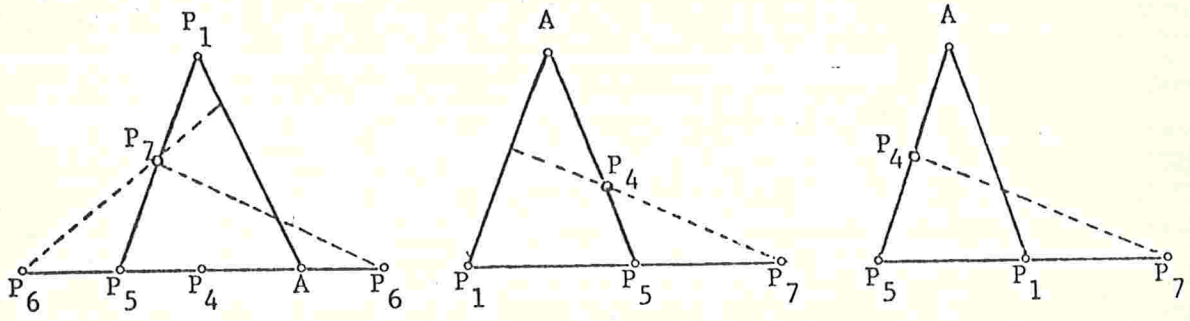

Figura 4.1.1c Figura 4.1.1d Figura 4.1.1e

Teorema 2.6.18, deduzimos que a reta $\overleftrightarrow{P_7P_4}$ encontra $]AP_1[$ (Figuras 4.1.1d e 4.1.1e) o que novamente nos leva a uma contradição.

Percebe-se, por conseguinte, que o problema de Sylvester constitui questão típica da Geometria Ordenada. Com seus recursos, podemos demonstrar a conjectura de modo claro e rigoroso.

§4.2 - O TEOREMA DE JORDAN

Para o que se segue neste parágrafo, todas as considerações serão feitas num certo plano α.

§4.2.1 - Polígonos

DEFINIÇÃO 4.2.1.1 - Dada uma seqüência finita de pontos $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ $(n \geq 3)$, onde três pontos consecutivos são não-colineares (considerando-se também consecutivos A_{n-1}, A_n, A_{n+1} e A_n, A_1, A_2), chama-se *polígono* ao conjunto

$$[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup \ldots \cup [A_{n-1}A_n] \cup [A_nA_1].$$

Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são ditos *vértices* do polígono e os intervalos abertos $]A_1, A_2[,]A_2A_3[, \ldots,]A_{n-1}A_n[,]A_nA_1[$ *lados* do polígono. Designamos tal polígono por $A_1A_2\ldots A_n$ e, às vezes, por p,q,...,etc.

OBSERVAÇÃO - Decorre da definição acima que os polígonos

$$A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_n}$$

– onde $(i_1 i_2 \ldots i_n)$ é uma permutação circular de (1 2 ... n) – são iguais.

DEFINIÇÃO 4.2.1.2 - Um polígono se diz simples, se a intersecção de dois lados não consecutivos é vazia.

§4.2.2 - Acessibilidade de Pontos

DEFINIÇÃO 4.2.2.1 - Dado um polígono simples $p = A_1 \ldots A_n$ $(n \geq 3)$, um ponto P é *acessível* a um ponto Q relativamente a p se,e somente se, existe uma poligonal q que une P e Q tal que:

a) $P, Q \notin p \longrightarrow q \cap p = \emptyset$.

b) $P \in p$ e $Q \notin p \longrightarrow q \cap p = \{P\}$.

c) $P \notin p$ e $Q \in p \longrightarrow q \cap p = \{Q\}$.

d) $P, Q \in p \longrightarrow q \cap p = \{P, Q\}$.

Se P é acessível a Q relativamente a p, escrevemos $P \overset{p}{\sim} Q$.

TEOREMA 4.2.2.2 - A relação de acessibilidade no conjunto α-p é uma relação de eqüivalência.

DEMONSTRAÇÃO - Verifiquemos as seguintes propriedades:

i) Propriedade reflexiva: Seja $P \in \alpha$-p. Consideremos duas semi-retas $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de origem P, tal que $\vec{a} \cap p \neq \emptyset$ e $\vec{b} \cap p \neq \emptyset$.

Seja $X = \{X_1, \ldots, X_s\}$ o conjunto das intersecções de $\vec{a}$ com p indexadas de tal forma que $P \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_s$. De modo análogo, seja $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ o conjunto das intersecções de $\vec{b}$ com p, indexadas de tal maneira que $P \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_k$.

Tomemos D tal que $[PDX_1]$. Consideremos as retas $\overleftrightarrow{DA_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) e consideremos as intersecções de tais retas com $\vec{b}$, obtendo o conjunto $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ de maneira que $P \leq Z_1 \leq Z_2 \leq \ldots \leq Z_m$. Seja E tal que $[PEZ_1]$, e consideremos o segmento [DE]. Afirmamos que $[DE] \cap p = \emptyset$. De fato, se um lado de p intercepta]DE[, como não intercepeta [PD] e nem [PE], segue-se que existe um vértice A_j, interior a ΔPDE, e, portanto, $\overleftrightarrow{DA_j}$ intercepta [PE] em X tal que [PXE] (Teorema 3.2.1.2), o que contradiz a construção feita dos pontos Z_i. Portanto, o polígono ΔPED é tal que $\Delta PED \cap p = \emptyset$, donde $P \mathcal{R} P$.

ii) As propriedades simétrica e transitiva são imediatas.

TEOREMA 4.2.2.3 - Se $P \mathcal{R} C$ e $C \in]A_iA_{i+1}[$, então $P \mathcal{R} A_i$.

DEMONSTRAÇÃO - Como $P \mathcal{R} C$, existe uma poligonal $q = PB_1B_2 \ldots B_rC$ com $q \cap p = \{C\}$. Seja $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_s\}$ o conjunto das intersecções das retas $\overleftrightarrow{A_iA_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$ e $k \neq i$) com $]B_rC[$, de tal maneira que $C \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_s \leq B_r$. Seja D, tal que $[CDX_1]$. Afirmamos que $]A_iD[\cap p = \emptyset$. Com efeito, se um lado de p corta $]A_iD[$, então tal lado tem um vértice A_m interno a ΔA_iDC e portanto, $\overleftrightarrow{A_iA_m}$ corta [DC] em X com [CXD] (Teorema 3.2.1.2), o que contradiz a construção dos pontos X_i. Logo a poligonal $PB_1B_2 \ldots B_rDA_i$ intercepta p somente em A_i, donde se conclui que $P \mathcal{R} A_i$.

TEOREMA 4.2.2.4 - Se $P \mathcal{R} A_i$ e $C \in]A_iA_{i+1}[$, então $P \mathcal{R} C$.

DEMONSTRAÇÃO - As retas $\overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$ e $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ são distintas e interceptam-se em A_i. Por outro lado, como $P \not\in A_i$, existe uma poligonal $q = PB_1B_2\ldots B_rA_i$, tal que $q \cap p = \{A_i\}$. Seguem-se os seguintes casos:

CASO 1 - A semi-reta $\overrightarrow{A_iB_r}$ é interna ao ângulo $A_{i-1}\hat{A}_iA_{i+1}$ (Figura 4.2.2.1a). Seja $\{X_1, X_2, \ldots, X_s\}$ o conjunto das intersec-

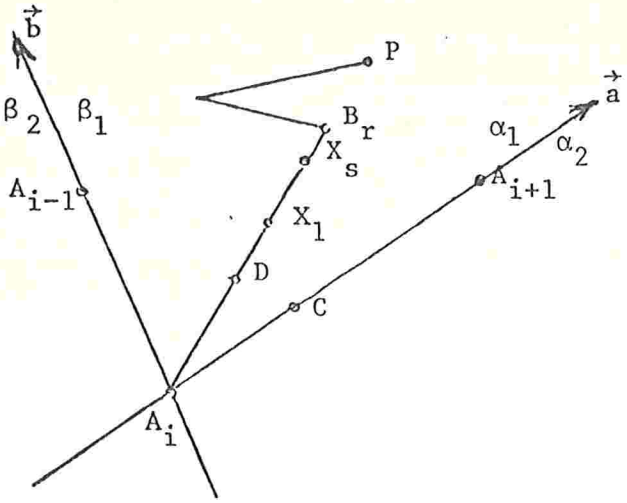

Figura 4.2.2.1a

ções de $[A_iB_r]$ com $\overleftrightarrow{CA_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ de tal maneira que $A_i \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_s \leq B_r$. Seja D tal que $[A_iDX_1]$ e consideremos o segmento $[DC]$. Naturalmente, $]A_iD[\cap p = \emptyset$. Segue-se, então, que $[DC] \cap p = \emptyset$ (conseqüência do Teorema 3.2.1.2). Temos, portanto, que $P \not\in C$.

CASO 2 - A semi-reta $\overleftrightarrow{A_iB_r}$ é interna ao ângulo $A_{i-1}\hat{A}_iM$, onde $\overrightarrow{A_iM}$ é a semi-reta oposta a $\vec{a}$ (Figura 4.2.2.1b). Seja $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_s\}$ o conjunto das intersecções $[A_iB_r] \cap \overleftrightarrow{CA_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ de maneira que $A_i \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_s \leq B_r$. Seja D um ponto tal que $[A_iDX_1]$. Indiquemos por $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ o conjunto

das intersecções $\vec{a}^* \cap p$ (se um lado de p está contido em $\vec{a}^*$, con-

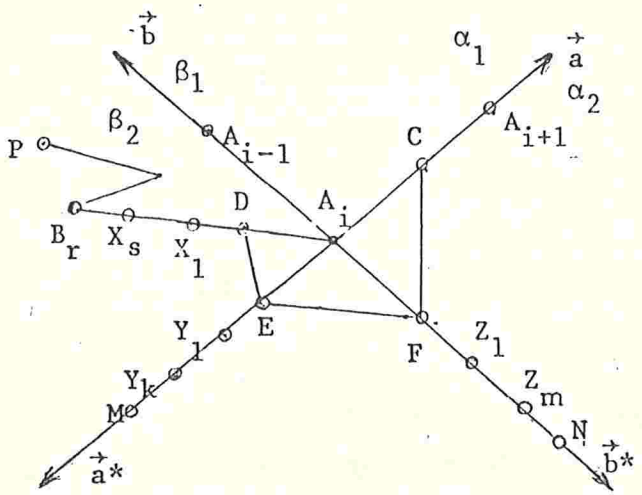

Figura 4.2.2.1b

sideram-se somente os vértices), de maneira que $A_i \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_k$. Seja E tal que $[A_iEY_1]$. Como $D \in \beta_2$ e $E \in \beta_2$, tem-se que $[DE] \cap [A_iA_{i-1}] = \emptyset$ e $[DE] \cap [A_iA_{i+1}] = \emptyset$. Como conseqüência da construção dos pontos D e E temos $p \cap [DA_i] = \{A_i\}$ e $p \cap [EA_i] = \{A_i\}$. Pelo fato de p ser simples e do Teorema 3.2.1.2, segue-se que $[DE] \cap p = \emptyset$.

Consideremos, agora, o conjunto $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ das intersecções $\vec{b}^* \cap p$ (novamente, se algum lado de p estiver contido em $\vec{b}^*$, consideram-se somente os vértices), $\overleftrightarrow{EA_j} \cap \vec{b}^*$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ e $\overleftrightarrow{CA_j} \cap \vec{b}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, de maneira que $A_i \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_n$. Tomemos F tal que $[A_iFZ_1]$. Do fato de $p \cap [EA_i] = \{A_i\}$, $p \cap [A_iF] = \{A_i\}$ e p ser polígono simples, decorre pelo Teorema 3.2.1.2 que $[EF] \cap p = \emptyset$.

Resta mostrar que $[FC] \cap p = \{C\}$. Para tal, notemos que $]A_iF[\cap p = \emptyset$, $F \notin p$ e p é simples. Portanto, novamente pelo Teorema 3.2.1.2 deduzimos que $p \cap [FC] = \emptyset$. Assim, $[FC] \cap p = \{C\}$.

Segue-se, portanto, que $PB_1B_2\ldots B_rDEFC \cap p = \{C\}$, donde $P \not\sim C$.

CASO 3 - $B_r \in \vec{a}^*$ (Figura 4.2.2.1c). Seja $X = \{X_1X_2,\ldots,X_s\}$ o con-

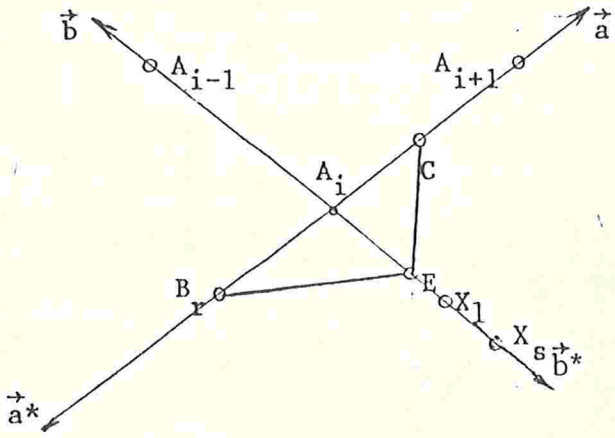

Figura 4.2.2.1c

junto das intersecções $\vec{b}^* \cap p$, $\vec{b}^* \cap \overleftrightarrow{B_rA_k}$, $(k=1,2,\ldots,n)$ e $\vec{b}^* \cap \overleftrightarrow{CA_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$, de maneira que $A_i \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_s$. Tomemos E tal que $[A_iEX_1]$. Temos que $]A_iE[\cap p = \emptyset$, $]B_rA_i[\cap p = \emptyset$, $E \notin p$ e $B_r \notin p$. Como p é simples, pelo Teorema 3.2.1.2 $[B_rE] \cap p = \emptyset$. Do mesmo modo, concluímos que $]EC[\cap p = \emptyset$ (basta agora considerar o triângulo ΔA_iCE). Temos, assim, que $PB_1B_2\ldots B_rEC \cap p = \{C\}$ e, portanto, $P \not\sim C$.

CASO 4 - $\overrightarrow{A_iB_r}$ é interna ao ângulo $M\hat{A}_iN$, onde $N \in \vec{b}^*$ (Figura 4.2.2.1d). Seja $X = \{X_1,\ldots,X_s\}$ o conjunto das intersecções $\overleftrightarrow{CA_k} \cap]A_iB_r[$ $(k=1,2,\ldots,n)$ de maneira que $A_i \leq X_1 \leq \ldots \leq X_s \leq B_r$. Seja D tal que $[A_iDX_1]$. Indiquemos por $Y = \{Y_1,Y_2,\ldots,Y_m\}$ o conjunto das intersecções $\vec{b}^* \cap \overleftrightarrow{DA_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$, $\vec{b}^* \cap p$ e $\vec{b}^* \cap \overleftrightarrow{CA_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ de maneira que $A_i \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_m \leq B_r$. Seja E tal que $[A_iEY_1]$. Do fato de $]A_iD[\cap p = \emptyset$, p ser simples, $]A_iE[\cap p = \emptyset$, $D \notin p$, $E \notin p$ e do Teorema 3.2.1.2, segue-se que $[DE] \cap p = \emptyset$. Do mesmo modo,

considerando o triângulo ΔA_iCE concluímos que $]EC[\cap p = \emptyset$, ou seja, $PB_1B_2 \ldots B_rDEC \cap p = \{C\}$, donde $P \not\sim C$.

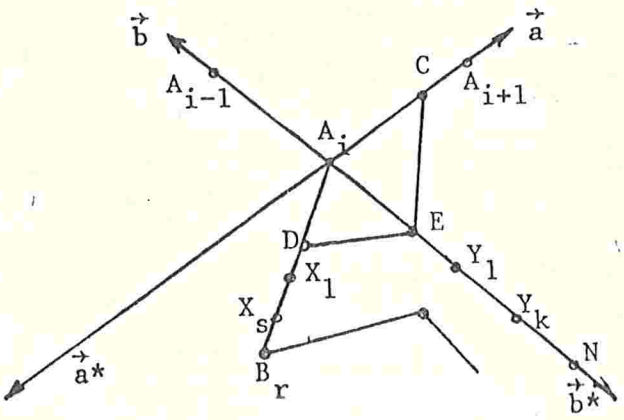

Figura 4.2.2.1d

CASO 5 - $B_r \in \vec{b}^*$ (Figura 4.2.2.1e). Seja $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_s\}$ o con-

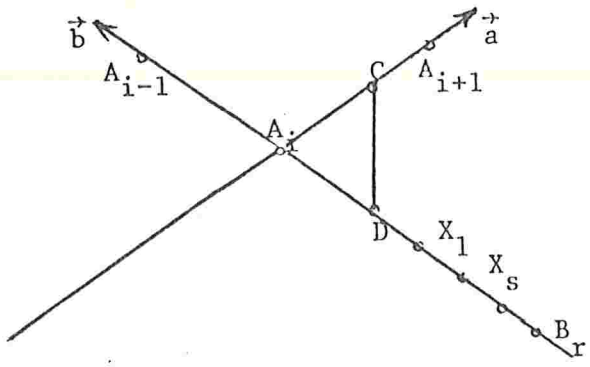

Figura 4.2.2.1e

junto das intersecções $\overleftrightarrow{CA_k} \cap]A_iB_r[$ $(k=1,2,\ldots,n)$ de maneira que $A_i \leq X_1 \leq \ldots \leq X_s \leq B_r$. Seja D tal que $[A_iDX_1]$. Temos $]CD[\cap p = \emptyset$ e, portanto, $PB_1 \ldots B_rC \cap p = \{C\}$, e, assim, $P \not\sim C$.

CASO 6 - $\overrightarrow{A_iB_r}$ é interna ao ângulo $A_{i+1}\hat{A}_iN$ (Figura 4.2.2.1f). Novamente, seja $X = \{X_1, \ldots, X_s\}$ o conjunto das intersecções $\overleftrightarrow{CA_k} \cap]A_iB_r[$ $(k=1,2,\ldots,n)$ de maneira que $A_i \leq X_1 \leq \ldots \leq X_s \leq B_r$.

Seja D com $[A_iDX_1]$. Segue-se por raciocínios anteriores que $PB_1 \ldots B_rDC \cap p = \{C\}$ e assim $P \overset{p}{\sim} C$.

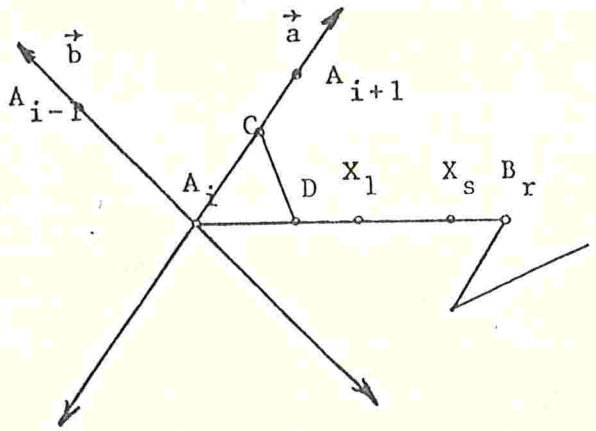

Figura 4.2.2.1f

COROLÁRIO 4.2.2.4.1 - Se $P \notin p$ e $C \in p$, então $P \overset{p}{\sim} C$.

DEMONSTRAÇÃO - É aplicação sucessiva e conveniente dos dois teoremas precedentes.

§4.2.3 - Intersecção de uma reta (semi-reta) genérica com um polígono simples. Propriedades

DEFINIÇÃO 4.2.3.1 - Denomina-se *reta genérica* (respectivamente *semi-reta genérica*) em relação ao polígono p a uma reta (respectivamente semi-reta) que não passa por nenhum de seus vértices.

TEOREMA 4.2.3.2 - Se P é um ponto qualquer que não seja vértice de um polígono simples p, então existe uma reta genérica r que passa por P.

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos uma reta s qualquer, tal que $P \notin s$. E seja $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ o conjunto das intersecções $\overleftrightarrow{PA_k} \cap s$ $(k=1,2,\ldots,n)$, de maneira que $X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n$. Seja D, tal que

$[X_i D X_{i+1}]$ e consideremos a reta $\overleftrightarrow{DP} = r$. É claro que r é genérica em relação à p.

TEOREMA 4.2.3.3 - Uma reta genérica r, relativa a um polígono simples p, corta p num número par de pontos.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $p = A_1A_2 \ldots A_n$. Procederemos a prova por indução no número de lados de p.

Com efeito, para $n = 3$ o resultado se segue do Teorema 3.2.2.2, que é, aliás, a formulação original do Axioma de Pasch.

Para $n = 4$, isto é, para o polígono $p = A_1A_2A_3A_4$, temos os casos:

CASO 1 - r intercepta o segmento aberto $]A_4A_2[$. Neste caso, pelo Teorema 3.2.2.2 anteriormente citado, r intercepta outro lado de $\Delta A_1A_4A_2$ e $\Delta A_4A_3A_2$, donde, portanto, r intercepta p em exatamente dois pontos.

CASO 2 - $r \cap p = \emptyset$ ou r intercepta p não passando por $]A_4A_2[$. Novamente, como conseqüência imediata do Teorema 3.2.2.2, deduzimos que r intercepta p em zero ou dois pontos exatamente.

Suponha-se agora que $p = A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ $(n+1>4)$ é um polígono simples e r uma reta genérica a p. Se considerarmos o polígono $p' = A_1A_2 \ldots A_n$ temos um polígono de n lados, e é claro que r é genérica a p'.

Por hipótese da indução, r encontra p' em um número par de pontos. Tal reta r pode ou não interceptar o segmento aberto $]A_nA_1[$. Consideremos os seguintes casos:

CASO 1 - $r \cap]A_nA_1[= \emptyset$. Neste caso, r encontra mais uma vez o

$\Delta A_n A_{n+1} A_n$ em $]A_1 A_{n+1}[$ ou $]A_{n+1} A_n[$, de onde $\# \, r \cap p$ é ainda par.

CASO 2 - $r \cap]A_n A_1[= \emptyset$. É claro que, novamente sob a luz do Teorema 3.2.2.2, a paridade é ainda preservada.

TEOREMA 4.2.3.3 - Seja p um polígono simples e $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$ um ângulo tal que $O \notin p$ e cujos lados são semi-retas genéricas de O relativas a p. Então, o ângulo $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$ corta p num número par de pontos.

DEMONSTRAÇÃO - Procederemos pelo princípio da indução finita, aplicando-se sobre o número de lados de p. Seja, então, n o número de lados de p.

Inicialmente, demonstraremos a asserção para $n = 3$. Então, o polígono em p em questão é um triângulo ΔABC. Observemos que se $\vec{a} \cap p = \emptyset$ e $\vec{b} \cap p = \emptyset$, nada há a demonstrar. Suponhamos, então, que um dos lados de $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$, digamos $\vec{a}$, intercepte ΔABC em X. Denotemos por a a reta determinada por $\vec{a}$. Pelo Teorema 3.2.2.2, advém que a reta b encontra novamente o triângulo ΔABC em um ponto Y, $Y \neq X$. Consideremos, então, os seguintes casos.

CASO 1 - O ponto Y coincide com o vértice C.

Neste caso, para os pontos X, O e C é possível somente uma das seguintes possibilidades: [XOC], [XCO] ou [OXC] (Corolário 2.3.5.1). Naturalmente, $\vec{a} = \overrightarrow{OX}$. Logo, [OXC] e [XCO] são impossíveis pela hipótese. Temos então [XOC] (Figura 4.2.3.1a).

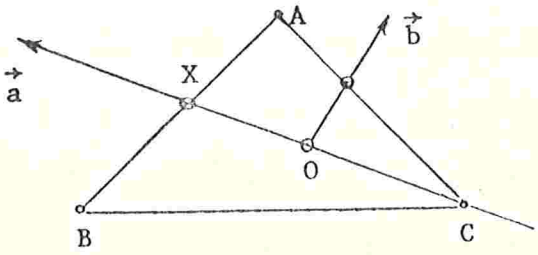

Figura 4.2.3.1a

Afirmamos que $\vec{b}$ intercepta um (e somente um) dos lados de ΔABC. Com efeito, os pontos A, X, B e C determinam os triângulos ΔAXC e ΔBXC. A fórmula [XOC] indica que a reta b, determinada por $\vec{b}$, encontra o lado]XC[de tais triângulos no ponto O, de maneira que, pelo Teorema 3.2.2.2, a reta b encontra novamente os triângulos citados em algum lado distinto]XC[. Este fato e o Teorema 2.5.3, nos permitem concluir a afirmação do teorema.

CASO 2 - O ponto Y é distinto de C.

Sem perda de generalidade, podemos supor que Y é um ponto pertencente ao lado]BC[. Novamente, uma única das seguintes possibilidades é verdadeira para os pontos X,O e Y: [OXY], [XOY] ou [XYO] (Corolário 2.3.5.1). Analisemo-las:

i) [OXY]

Se a semi-reta $\vec{b}$ não cortar nenhum lado de ΔABC, o teoma já está demonstrado. Suponha-se então que $\vec{b}$ intercepte p, digamos em Z. Denotemos por b a reta determinada por $\vec{b}$. Aplicando, então, o Teorema 3.2.2.2, temos que a reta b encontra novamente o triângulo num ponto W, distinto de Z (Figura 4.2.3.1b). Como O é exterior a ΔABC, decorre do Corolário 2.3.5.1

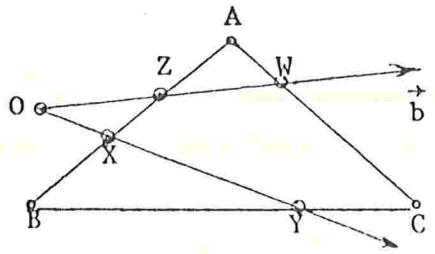

Figura 4.2.3.1b

que as únicas ordens possíveis para O, D e E são [ODE] ou [DEO]. Notando-se que $\overrightarrow{OD} = \vec{b}$, temos que $D, E \in \vec{b}$. Observando-se que uma reta não pode cortar os três lados de um triângulo (Teorema 2 5.3), fica demonstrado o teorema para o caso i).

ii) [XOY] (Figura 4.2.3.1c)

Consideremos os triângulos ΔBXY e ΔAXY. Como no caso 1,a

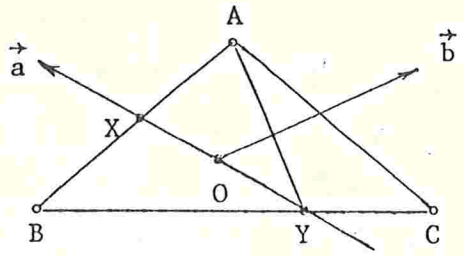

Figura 4.2.3.1c

reta b determinada por $\vec{b}$, encontra novamente tais triângulos em algum lado distinto de]XY[, e, se $]XY[\cap b = \emptyset$, o teorema está provado. Na hipótese de $b \cap]XY[\neq 0$, aplicando-se o Teorema 3.2.2. 2, $\vec{b}$ deverá cortar]AC[ou]YC[, de maneira que o teorema é verdadeiro para este caso ii).

iii) [XYO] (Figura 4.2.3.1d)

Este caso é inteiramente análogo à parte i).

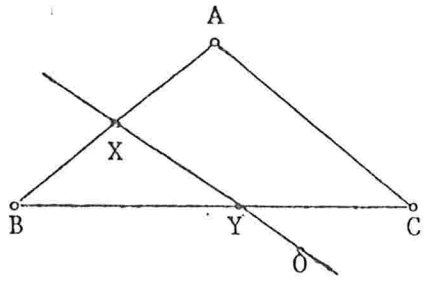

Figura 4.2.3.1d

Segue-se, portanto, que o teorema é verdadeiro para n=3.

Suponha-se agora, que a asserção seja válida para n ($n \geq 3$) e consideremos um polígono $p = A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ de n+1 lados, e, $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$, um ângulo tal que $O \notin p$ e cujos lados são semi-retas genéricas de O relativas a p. Se os pontos A_{n-1}, A_n e A_1 não forem colineares e se $O \notin]A_nA_1[$, consideremos o polígono $p' = A_1 \cdot A_2 \ldots A_n$. Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ genéricas de O relativos a p, também a são em relação a p'. Pela hipótese da indução, $\vec{a}\hat{O}\vec{b}$ corta p' em um número par de pontos. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não tiverem intersecção com o triângulo $\Delta A_nA_{n+1}A_1$, o teorema já está provado. Caso contrário, observando-se a asserção para n = 3 provado anteriormente, concluímos ainda, que $p \cap (a\hat{O}b)$ contém um número par de pontos. Por outro lado, se A_{n-1}, A_n e A_1 forem colineares, basta considerar o polígono $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ (Figura 4.2.3.1e) e a demons-

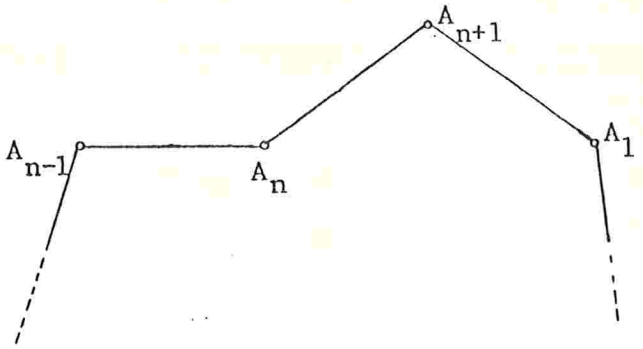

Figura 4.2.3.1e

ção e inteiramente análoga ao que foi discutido acima. Finalmente, se $O \in]A_{n-1}A_n[$, contorna-se o problema escolhendo-se outros três pontos consecutivos para aplicar a hipótese da indução.

TEOREMA 4.2.3.4 - Se $P \notin p$ e uma semi-reta genérica de P corta

p num número par (respectivamente ímpar) de pontos, o mesmo acontece com qualquer outra semi-reta genérica de P.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata do teorema anterior e do Teorema 4.2.3.3.

TEOREMA 4.2.3.5 - Se $P \overset{p}{\sim} Q$ $(P,Q \notin p)$, $[PQ] \cap p = \emptyset$ e uma semi-reta genérica $\vec{s}$ de origem P corta p num número par de pontos (respectivamente ímpar), então, o mesmo acontece com qualquer semi-reta genérica de origem Q.

DEMONSTRAÇÃO - Analisemos os seguintes casos:

CASO 1 - $\overleftrightarrow{PQ}$ é reta genérica. Se A é um ponto tal que [APQ], então $|\vec{PA} \cap p|$ é par, pois $|\vec{s} \cap p|$ é par (Teorema 4.2.3.4). Como $[PQ] \cap p = \emptyset$, se X é um ponto tal que [PQX], segue-se então que $|\overleftrightarrow{QX} \cap p|$ é par, pois $\overleftrightarrow{PQ}$ sendo genérica, $|\overleftrightarrow{PQ} \cap p|$ é par. Novamente, pelo Teorema 4.2.3.4, $|\vec{t} \cap p|$ é par, onde $\vec{t}$ é uma semi-reta genérica qualquer de Q.

CASO 2 - $\overleftrightarrow{PQ}$ não é reta genérica. Seja M tal que [PMQ] e r uma reta por M distinta de $\overleftrightarrow{PQ}$. Seja $X = \{X_1 X_2, \ldots, X_m\}$ o conjunto das intersecções $\overleftrightarrow{QA_i} \cap r$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $\overleftrightarrow{PA_i} \cap r$ $(i=1,2,\ldots,n)$ e $p \cap r$ (se r contiver algum lado de p consideram-se somente os vértices). Temos $M = X_j$ para algum j. Consideremos agora L tal que $[MLX_{i+1}]$. Pela hipótese, temos que $[PL] \cap p = \emptyset$ e como $\overleftrightarrow{PL}$ é é genérica, qualquer semi-reta genérica de L corta p num número par de pontos (conseqüência do caso anterior). Analogamente, temos $[LQ] \cap p = \emptyset$ e como $\overleftrightarrow{QL}$ também é genérica, segue-se que $|\vec{t} \cap p|$ é par, se $\vec{t}$ é uma semi-reta genérica de Q (novamente pelo caso anterior).

COROLÁRIO 4.2.3.5.1 - Se $P \overset{p}{\sim} Q$ $(P,Q \notin p)$ e uma semi-reta genérica de P corta p num número par (respectivamente ímpar) de pontos, então uma semi-reta genérica de Q também corta p num número par (respectivamente ímpar) de pontos.

DEMONSTRAÇÃO - Basta observar que se $P \overset{p}{\sim} Q$, então existe uma poligonal $PP_1 \ldots P_n Q$, tal que $PP_1 \ldots P_n Q \cap p = \emptyset$, e, portanto, $[PP_1] \cap p = \emptyset$, $[P_1 P_2] \cap p = \emptyset, \ldots, [P_n Q] \cap p = \emptyset$ e aplicar o teorema anterior.

§4.2.4 - O Teorema de Jordan

TEOREMA 4.2.4.1 - Um polígono simples $p = A_1 A_2 \ldots A_n$ $(n \geq 3)$ separa o plano α em duas regiões.

DEMONSTRAÇÃO - Seja X tal que $[A_i X A_{i+1}]$. Por X passa uma reta r genérica que corta p num número s par de pontos $X_1, X_2, \ldots, X_s$ de maneira que $X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_s$. Consideremos P e Q tais que $[PX_1X_2]$ e $[X_1QX_2]$.

Definamos os seguintes conjuntos:

$$E = \{x \in \alpha - p \mid X \overset{p}{\sim} P\}$$

$$I = \{x \in \alpha - p \mid X \overset{p}{\sim} Q\}.$$

Verifiquemos que p separa α em E e I:

1) $E \neq \emptyset$

De fato, como $P \overset{p}{\sim} P$, segue-se que $P \in E$.

2) $I \neq \emptyset$.

De fato, $Q \overset{p}{\sim} Q$, segue-se que $Q \in I$.

3) $\alpha = I \cup E \cup p$

Seja $Y \in \alpha - p$. Uma semi-reta genérica de Y corta p num número k de pontos que pode ser par ou ímpar. Consideremos então os casos:

caso 1 - k é par

Pelo Corolário 4.2.2.4.1 sabemos que $Y \mathcal{R} X_1$. Portanto, existe uma polinomial $YB_1B_2 \ldots B_rX_1$ tal que $YB_1 \ldots B_rX_1 \cap p = \{X_1\}$. Seja $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ o conjunto das interesecções $]B_rX_1[\cap \overleftrightarrow{PA_k}$

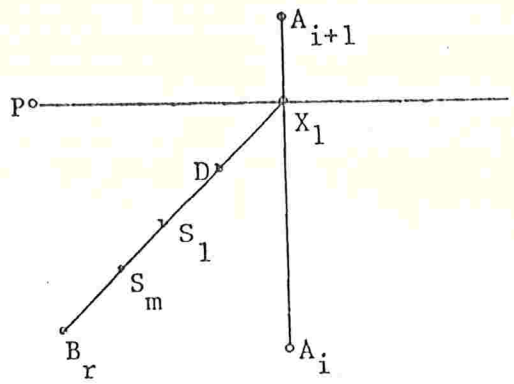

Figura 4.2.4.1

$(k=1,2,\ldots,n)$ de maneira que $X_1 \leq S_1 \leq \ldots \leq S_m \leq B_r$. Seja D, tal que $[S_1DX_1]$. É claro que

$$[PX_1] \cap p = \{X_1\} \text{ e}$$

$$[DX_1] \cap p = \{X_1\}.$$

Afirmamos que $[PD] \cap p = \emptyset$. De fato, se algum segmento $[A_kA_{k+1}]$ de p cortar $[PD]$, só há duas possibilidades: ou tal segmento passa por X_1, ou tem algum vértice A_{k+1} interno a ΔPDX_1.

Se $[A_kA_{k+1}]$ passar por X_1, segue-se que $[A_kA_{k+1}] = [A_iA_{i+1}]$ (pois é simples). Logo $[A_iA_{i+1}] \cap [PD] = \{L\}$ com $[PLD]$. Como uma

semi-reta genérica de Y corta p num número par de pontos e temos $YB_1 \ldots B_r D \cap p = \emptyset$, o mesmo acontece com qualquer semi-reta genérica de D. A semi-reta $\overrightarrow{DP}$ é genérica de D, portanto $|\overrightarrow{DP} \cap p|$ é par. Por outro lado, a semi-reta $\vec{a}$ contida em $\overrightarrow{DP}$ de origem P e que não contém D, é genérica de P e, portanto, corta p também num número par de pontos. Como $[PD] \cap p = \{L\}$, segue-se que $|\overrightarrow{DP} \cap p| = |\vec{a} \cap p| + |[PD] \cap p|$ = número ímpar, o que é uma contradição. Portanto, devemos ter $[A_i A_{i+1}] \cap [PD] = \emptyset$.

Se A_{k+1} é interno a ΔPX_1D, então $\overleftrightarrow{PA}_{k+1}$ corta $[DX_1]$ em S com $[DSX_1]$ o que é uma contradição com a maneira com que foram construídos os pontos S_i. Segue-se, portanto — mais uma vez — que $[PD] \cap p = \emptyset$.

Temos, assim, que $YB_1 \ldots B_r DP \cap p = \emptyset$ e, portanto, $Y \not\mathcal{R} P$; de onde, $Y \in I \cup E \cup p$.

Resta examinar a hipótese em que $\overleftrightarrow{B_r X_1} = \overleftrightarrow{PX_1}$. Nesse caso, não podemos ter $[PX_1B_r]$, pois a semi-reta $\overrightarrow{B_r X_1}$ corta p em X_1 e e, portanto, num número ímpar de pontos, o que é uma contradição, pois como $Y \not\mathcal{R} B_r$, qualquer semi-reta genérica por B_r deveria cortar p em um número par de pontos. Logo temos $[PD] \cap p = \emptyset$ e $YB_1 \ldots B_r DP \cap p = \emptyset$, e, assim, $Y \not\mathcal{R} p$, donde $Y \in I \cup E \cup p$.

Portanto, $\alpha = I \cup E \cup p$.

CASO 2 - k é ímpar

Nesse caso, como $Y \not\mathcal{R} X_1$, pode-se demonstrar — de maneira análoga ao caso anterior — que $Y \not\mathcal{R} Q$, donde temos $Y \in I$. Segue-se, portanto, que $\alpha = I \cup E \cup p$.

4) $I \cap E = \emptyset$. De fato, se $Z \in I \cap E$, segue-se que $Z \not\mathcal{R} P$ e $Z \not\mathcal{R} Q$.

De $Z \overset{p}{\sim} P$, vem que uma semi-reta genérica de Z corta p em um número par de pontos. E de $Z \overset{p}{\sim} Q$, decorre que uma semi-reta genérica de Z corta p em um número ímpar de pontos, o que é uma contradição.

5) $I \cap p = \emptyset$ e $E \cap p = \emptyset$. Decorre da definição de E e I.

6) $\forall Y \in E$, $\forall Z \in I$ e para qualquer poligonal q_Y^Z temos $q_Y^Z \cap p = 0$. De fato, se $q_Y^Z \cap p = \emptyset$, então $Y \overset{p}{\sim} Z$. Como uma semi-reta genérica de Y corta p em um número par de pontos, o mesmo acontece com uma semi-reta genérica de Z. Mas isso contradiz o fato de que $Z \in I$, pois uma semi-reta genérica de Z corta p em um número ímpar de pontos. Segue-se, então, que $p \cap q_Y^Z \neq \emptyset$.

COROLÁRIO 4.2.4.1.1 - O conjunto quociente $\alpha\text{-}p/\overset{p}{\sim}$ tem apenas dois elementos I e E.

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata do teorema anterior.

DEFINIÇÃO 4.2.4.2 - O conjunto I obtido dos teoremas anteriores se chama *interior de* p e E *exterior de* p.

Novamente, da exposição anterior, percebe-se a grande força da Axiomática I e a relevância da Geometria de Ordem. Vários conceitos geométricos usuais dependem, na realidade, apenas das propriedades de ordem e, por conseguinte, constituem-se teoremas da geometria em apreço.

CAPÍTULO V

ALGUNS RESULTADOS METAGEOMÉTRICOS

§5.1 - O AXIOMA DE CONTINUIDADE

Para introduzir o Axioma de Continuidade (que denotaremos por Axioma K), há vários possíveis caminhos a seguir: um deles se deve a Cantor e Weierstrass, com um axioma que afirma que toda seqüência monótona limitada tem um limite. Uma outra, apresentada por Dedekind, obtém um ponto arbitrário de uma reta como origem comum de duas semi-retas opostas. Empregaremos, aqui, a formulação devida a Dedekind, que é de aplicação mais simples.

AXIOMA K (Dedekind) - Para cada divisão de todos os pontos de uma reta em dois conjuntos não vazios, tal que nenhum ponto de um esteja entre dois do outro, existe um ponto de um dos conjuntos que está entre todo ponto desse conjunto (exceto de próprio) e todo ponto do outro.

OBSERVAÇÃO - Este axioma possui várias formulações equivalentes. Em vez de "pontos de uma reta", poderíamos considerar "pontos de uma semi-reta", "pontos de um segmento aberto", "pontos de um segmento fechado". Há, ainda, várias outras formulações, como a que Veblen empregou no seu famoso artigo de 1904 ([19]), p. 346), que hoje é conhecida como a "Proprieda-

de de Heine-Borel". Daremos, a seguir, uma outra versão (Forder [8], p. 299), que necessitaremos no próximo parágrafo.

TEOREMA 5.1.1 - Para cada divisão de todas as semi-retas interiores a um ângulo em dois conjuntos não vazios, tal que nenhuma semi-reta de um esteja entre duas do outro, há uma semi-reta de um dos conjuntos que está entre toda semi-reta desse conjunto (exceto ela própria) e toda semi-reta do outro conjunto.

DEMONSTRAÇÃO (em resumo) - Sejam A e B dois pontos sobre lados diferentes do ângulo em questão (Figura 5.1.1). Pelo Teo-

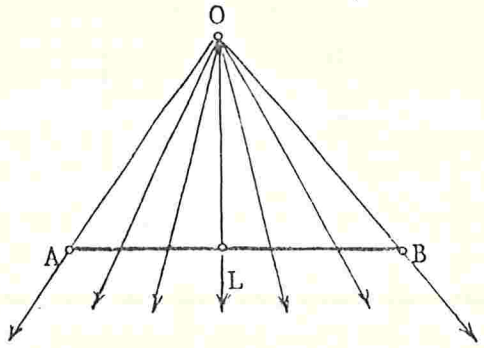

Figura 5.1.1

rema 3.2.5.8, cada semi-reta interna ao ângulo encontra o segmento aberto]AB[. Logo, as semi-retas internas ao ângulo determinam uma divisão nos pontos de]AB[em dois conjuntos não vazios, tal que nenhum ponto de um esteja entre dois do outro. Aplicando a versão para "segmentos abertos" do Axioma K, obtemos um ponto L em um dos conjuntos de antes tal que, L está entre todo ponto deste (exceto do próprio) e todo ponto do outro. Segue-se, assim, que $\overrightarrow{OL}$ tem as propriedades requeridas do teorema.

TEOREMA 5.1.2 - O conjunto dos pontos de uma reta orientada

$(r,\leq)$ satisfaz o Axioma do Supremo.

DEMONSTRAÇÃO (em resumo) - De fato, seja $A \subset r$, $A \neq \emptyset$, tal que A seja limitado superiormente, isto é, existe um ponto P de r tal que $A \leq P$, para todo A de A. Consideremos então o conjunto β de todos os pontos de r pertencentes a A e dos pontos que são precedidos por algum ponto de A, e seja C os demais pontos de r. Então β e C são não vazios e cada ponto de r está em β ou C. Pelo Teorema 2.11.3 e Axioma K, existe um ponto D, com $X \leq D$ e $D \leq Y$ para cada ponto $X \in \beta$ e $Y \in C$. Em vista do Teorema 2.5.1, é claro que D é o supremo de β e portanto de A.

§5.2 - PARALELISMO

Os matemáticos Gauss, Bolyai e Lobachevsky, desenvolveram, independentemente, a idéia de definir duas semi-retas paralelas a uma reta (em sentidos opostos) que passam por um mesmo ponto. Mostraremos, a seguir, alguns resultados acerca de semi-retas paralelas por um mesmo ponto a uma reta, culminando com um resultado que afirma que dada uma reta e um ponto a ela não pertencente, existe pelo menos uma reta que passa por esse ponto e paralela à reta dada (no plano determinado por eles).

TEOREMA 5.2.1 - Sejam A um ponto e r uma reta que não passe por A. Então há somente duas semi-retas com origem comum A no plano determinado por A e r, que não encontram a reta r e que estabelecem uma separação entre:

a) o conjunto de todas as semi-retas com origem em A e e que encontram r; e

b) o conjunto das demais semi-retas de origem A e que não encontram r.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam B e C dois pontos distintos de r. Fica assim determinado o ângulo $C\hat{A}D$, onde $D \in \overrightarrow{AB}^*$ (Figura 5.2.1). É

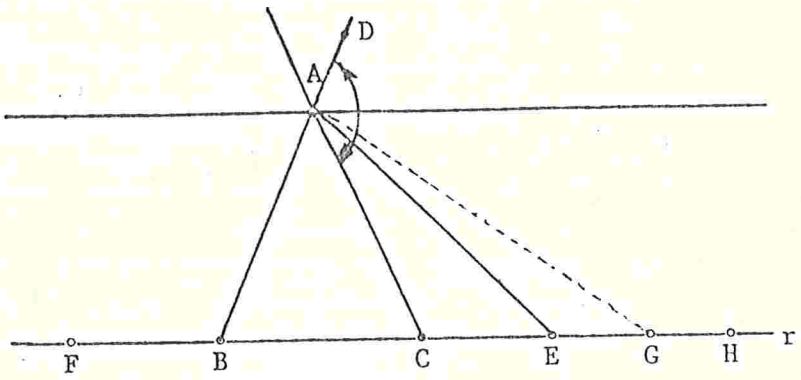

Figura 5.2.1

óbvio que há semi-retas de origem A e que sejam interiores a $C\hat{A}D$. Consideremos então a divisão de todas as semi-retas de origem em A e interiores a $C\hat{A}D$ em dois conjuntos, segundo encontrem ou não a semi-reta $\overrightarrow{CB}^*$. É fácil mostrar que se E é um ponto tal que [BCE], então $\overrightarrow{AE}$ é interna a $C\hat{A}D$ e, se F é tal que [FBC], então $\overrightarrow{AF}^*$ é é interna a $C\hat{A}D$ e não encontra $\overrightarrow{CB}^*$. Logo, os dois conjuntos anteriormente mencionados não são vazios. É claro, também, que nenhuma semi-reta de um está entre duas do outro.

Pelo Teorema 5.1.1, existe em um dos conjuntos uma semi-reta especial $\vec{s}$, tal que $\vec{s}$ está entre toda semi-reta desse conjunto (exceto ela própria) e toda semi-reta do outro. Afirmamos que $\vec{s}$ está no conjunto das semi-retas que não encontram $\overrightarrow{CB}^*$. De fato, se por absurdo temos $\vec{s} \cap \overrightarrow{CB}^* = \{G\}$, o ponto G é tal que [BCG]. Tomemos agora, um ponto H com [CGH] (Axioma I.2). [CGH] e [BCH] nos dão [BCG] (Teorema 2.6.1), de maneira que

$\overrightarrow{AH}$ é interna a $C\hat{A}D$. Como temos [EGH], segue-se que $\vec{s}$ é interna $E\hat{A}H$ o que é absurdo. Portanto $\vec{s}$ não encontra r.

Invertendo-se os papéis de B e C, por um raciocínio análogo obtemos outra semi-reta especial $\vec{t}$, no semi-plano com origem $\overleftrightarrow{AB}$, oposto ao semi-plano que contém $\vec{s}$. Como a reta r consiste das semi-retas $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CB}^*$ e do ponto C, temos encontrado duas semi-retas $\vec{s}$ e $\vec{t}$ que separam todas as semi-retas de origem em A e que encontram r das demais semi-retas com origem em A e que não encontram r.

DEFINIÇÃO 5.2.2 - Seguindo as notações do teorema anterior, as duas semi-retas obtidas $\vec{s}$ e $\vec{t}$ com origem em A são denominadas *paralelas* à reta r em dois sentidos: $\vec{s}$ é paralela a $\overrightarrow{CB}^*$ e $\vec{t}$ paralela a $\overrightarrow{CB}$ (duas semi-retas têm o mesmo sentido se estão contidas em um mesmo semi-plano cuja origem contém as origens das semi-retas. Se o ponto A estiver em r, definimos as semi-retas paralelas a r com origem A, as duas semi-retas contidas em r determinadas pelo ponto A). Indicaremos este fato por $\vec{s} \parallel \overrightarrow{CB}^*$ e $\vec{t} \parallel \overrightarrow{CB}$.

TEOREMA 5.2.3 - Com as notações e hipóteses do teorema anterior, existe pelo menos uma reta no plano Ar que passa por A e que não encontra r.

DEMONSTRAÇÃO (em resumo) - Pelo teorema anterior existem semi-retas $\vec{s}$ e $\vec{t}$ tais que $\vec{s} \parallel \overrightarrow{CB}^*$ e $\vec{t} \parallel \overrightarrow{CB}$. Afirmamos que $\vec{s}^* \cap r = \emptyset$. De fato, suponha-se, por absurdo, que $\vec{s}^* \cap r \neq \emptyset$. E seja $\vec{u}$ uma semi-reta interna a $\vec{t}\hat{A}\vec{s}^*$ (Figura 5.2.2). Naturalmente, $\vec{u}$ encontra r e $\vec{s}$ está entre $\overrightarrow{AB}^*$ e $\vec{u}^*$. Assim $\vec{u}^* \cap r = \emptyset$, o que é uma contradição em vista do Teorema 2.3.5. Logo, a reta determinada

por $\vec{s}$ não encontra r.

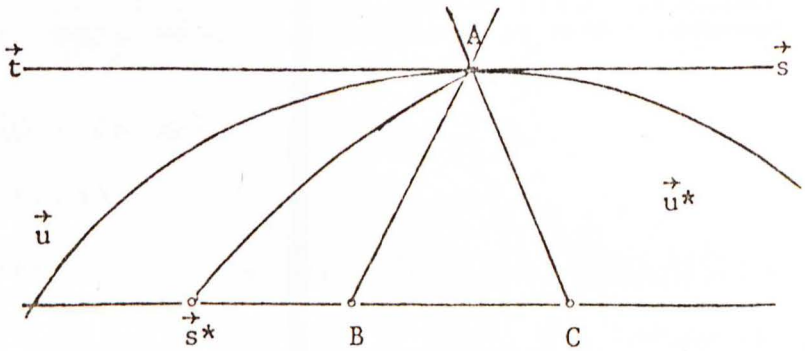

Figura 5.2.2

§5.3 - OBTENÇAO DA GEOMETRIA DE EUCLIDES

Começaremos este parágrafo com um axioma fundamental, que indicaremos por Axioma P (Euclides):

AXIOMA P - Seja A um ponto qualquer e r uma reta qualquer à qual A não pertence. Então por A passa no máximo uma reta s (no plano Ar) que não encontra r.

Quando as retas r e s são tais que $r = s$ ou $r \cap s = \emptyset$, diremos que as retas r e s são paralelas, e indicaremos este fato por $r \parallel s$.

Com base nos axiomas de ordem I.1 - I.9, Axioma K de continuidade e Axioma P das paralelas precedente, é possível introduzir a noção de congruência por definição. Assim, a partir delas, todas as proposições contidas, por exemplo, em [11] da Geometria Euclidiana podem ser mostradas sem a necessidade de quaisquer outras suposições. É o que faremos neste parágrafo.

§5.3.1 - Homotetia e Translações

TEOREMA 5.3.1.1 - Se as retas $\overleftrightarrow{DA}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ não passam pelo pon-

to O e são paralelas às retas $\overleftrightarrow{D'A'}$, $\overleftrightarrow{A'B'}$ e $\overleftrightarrow{B'C'}$ respectivamente, onde D', A', B' e C' estão em $\overleftrightarrow{OD}$, $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{OC}$ respectivamente, então $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{C'D'}$

DEMONSTRAÇÃO - Se $B \notin \overleftrightarrow{OD}$, então aplicando o Teorema de Desargues(10) nos triângulos ΔDBA e $\Delta D'A'B'$ obtemos que $\overleftrightarrow{DB} \parallel \overleftrightarrow{D'B'}$ (Figura 5.3.1.1a) e, se aplicarmos aos triângulos ΔDBC e $\Delta D'B'C'$,

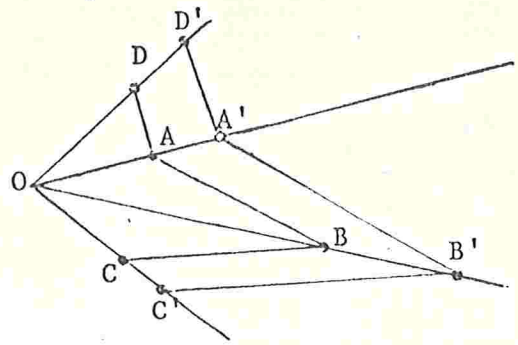

Figura 5.3.1.1a

obteremos $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{C'D'}$ (os casos quando $\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{BC}$ são triviais).

Se $B \in \overleftrightarrow{OD}$, seja E um ponto tal que E não pertença a $\overleftrightarrow{OD}$ e e nem a $\overleftrightarrow{OC}$, com a condição que $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{A'E'}$, onde E' é um ponto de $\overleftrightarrow{OE}$ (Figura 5.3.1.1b). Se considerarmos os triângulos ΔEDA e

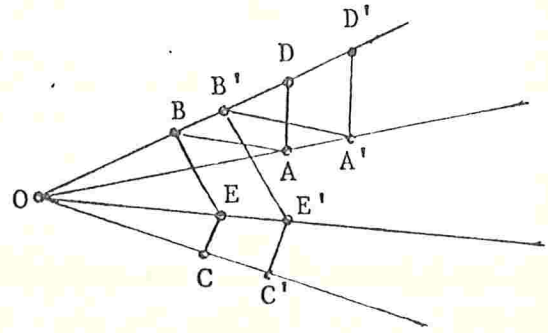

Figura 5.3.1.1b

$\Delta E'D'A'$, novamente, pelo Teorema de Desargues, obtemos $\overleftrightarrow{EC} \parallel \overleftrightarrow{E'C'}$

(10) - Uma demonstração deste conhecido teorema pode ser encontrado em [7], p. 156.

e $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{E'D'}$, e se considerarmos os triângulos ΔECD e $\Delta E'C'D'$, obteremos $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{C'D'}$, o que conclui nossa demonstração.

COROLÁRIO 5.3.1.2 - Se $\overleftrightarrow{DD'}$, $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são paralelas e $\overleftrightarrow{DD'} \neq \overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{AA'} \neq \overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{BB'} \neq \overleftrightarrow{CC'}$ e $\overleftrightarrow{DA}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas a $\overleftrightarrow{D'A'}$, $\overleftrightarrow{A'B'}$ e $\overleftrightarrow{B'C'}$ respectivamente, então $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{C'D'}$

DEMONSTRAÇÃO - É conseqüência imediata do teorema anterior.

DEFINIÇÃO 5.3.1.3 - Se A' está em $\overleftrightarrow{OA}$, a *homotetia* (O,AA') é uma transformação um-a-um de pontos de um plano ou espaço, em pontos do mesmo plano ou espaço, em que o "centro" O corresponde a si próprio; A corresponde a A'; um ponto $B \notin \overleftrightarrow{OA}$ corresponde a B' em $\overleftrightarrow{OB}$ tal que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ e, se $C \in \overleftrightarrow{OA}$, com $C \neq O, A$, então C corresponde a $C' \in \overleftrightarrow{OA}$ tal que $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$.

DEFINIÇÃO 5.3.1.4 - Se $A \neq A'$, a *translação* $\overleftrightarrow{AA'}$ é uma transformação um-a-um de pontos de um plano ou espaço em pontos do mesmo plano ou espaço, na qual A corresponde a A', um ponto $B \notin \overleftrightarrow{AA'}$ corresponde a B' tal que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ e $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$, e um ponto $C \in \overleftrightarrow{AA'}$ corresponde a um ponto C' em $\overleftrightarrow{AA'}$ tal que $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$.

OBSERVAÇÕES - 1. As correspondências acima estão bem definidas. Pelo Teorema 5.3.1.1 e seu Corolário 5.3.1.2, tanto na homotetia quanto na translação, o ponto C' depende somente do ponto C e portanto, independente de B.

2. Se $A = A'$, a "translação" $\overleftrightarrow{AA'}$ é a identidade.

3. É fácil ver que tanto a homotetia quanto a translação, transformam uma reta (ou plano) em uma reta (ou plano) paralelo.

§5.3.2 - Uma Álgebra de Pontos

DEFINIÇÃO 5.3.2.1 - Seja O um ponto fixo e A e B pontos quaisquer. Definimos o ponto $(A+B)_0$ como sendo o ponto correspondente a A pela translação $\overleftrightarrow{OB}$. Quando não houver dúvidas sobre o ponto fixo, escreveremos apenas A+B (para designar $(A+B)_0$). Tal ponto é denominado ponto "origem".

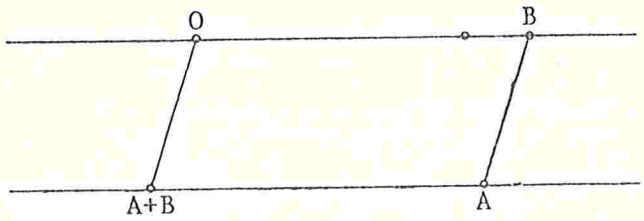

Figura 5.3.2.1

TEOREMA 5.3.2.2 - Com as notações da definição anterior temos:

a) O ponto A+B está bem defenido e é único.

b) O+B = B+O = B, para qualquer ponto B.

c) Dado A, existe um e somente um ponto B tal que A+B = O e está em $\overleftrightarrow{OA}^*$.

d) Se A+B = O, então B+A = O.

e) Se A ≠ O, então A+A ≠ O.

f) Se A+B = A, então B = O.

g) A+(B+C) = (A+B)+C, para quaisquer que sejam os pontos A, B e C.

h) A+B = B+A, quaisquer que sejam os pontos A e B.

DEMONSTRAÇÃO - Provaremos apenas os ítens g) e h).

PROVA DE g) - Suponha-se que quaisquer três pontos de O, A, B

e C sejam não colineares. Sejam ainda E = A+B, F = B+C e G = A+F. Então $\overleftrightarrow{OA} \parallel \overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{OB} \parallel \overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{BO}$, $\overleftrightarrow{CO} \parallel \overleftrightarrow{FB}$, $\overleftrightarrow{OA} \parallel \overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{FO} \parallel \overleftrightarrow{GA}$ (Figura 5.3.2.2a) e, pelo Teorema de Desargues, temos que $\overleftrightarrow{GE} \parallel \overleftrightarrow{FB}$

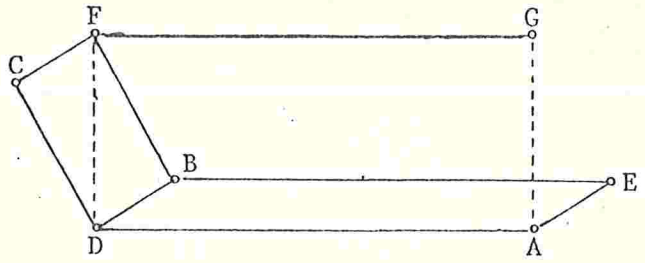

Figura 5.3.2.2a

e $\overleftrightarrow{GC} \parallel \overleftrightarrow{ED}$. Assim, G = E+C. Se três pontos de O, A, B e C forem colineares, a prova é trivial.

PROVA DE h) - Se A e B não são colineares com O, o teorema é trivial. Se A, B e O são colineares e A+B = C, então existem pontos X e Y não pertencentes a $\overleftrightarrow{OA}$ com $\overleftrightarrow{OX}$, $\overleftrightarrow{XA}$ e $\overleftrightarrow{XY}$ paralelas

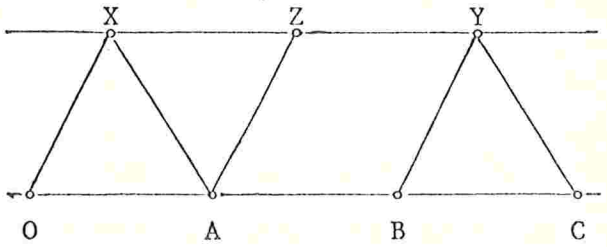

Figura 5.3.2.2b

a $\overleftrightarrow{BY}$, $\overleftrightarrow{YC}$ e $\overleftrightarrow{OA}$ respectivamente (Definição 5.3.1.4) (Fig.5.3.2.2b).

Seja r uma reta por A e paralela a $\overleftrightarrow{OX}$. Então, r encontra $\overleftrightarrow{XY}$, digamos em Z e, $\overleftrightarrow{AZ} \parallel \overleftrightarrow{BY}$ e $\overleftrightarrow{AX} \parallel \overleftrightarrow{YC}$, e os pontos X, Y, Z e A, B, C estão em retas paralelas distintas. Assim, $\overleftrightarrow{XB} \parallel \overleftrightarrow{ZC}$ (Teorema de Desargues). Segue-se pois que $\overleftrightarrow{OX} \parallel \overleftrightarrow{AZ}$, $\overleftrightarrow{XB} \parallel \overleftrightarrow{ZC}$ e $\overleftrightarrow{XZ} \parallel \overleftrightarrow{OB}$ respectivamente, donde se conclui que B+A = C.

Acabamos de mostrar, por conseguinte, que a operação + definida entre pontos do espaço satisfaz as propriedades associativa, comutativa, existência de elemento neutro e de oposto. Também, o conjunto dos pontos do espaço é fechado em relação à operação citada. Com estes fatos, podemos enunciar o teorema seguinte:

TEOREMA 5.3.2.3 - Os pontos do espaço com a operação + da Definição 5.3.2.1 formam um grupo abeliano.

TEOREMA 5.3.2.4 - Se A+B = C e O, A, B e C são colineares e $\overleftrightarrow{AX}$, $\overleftrightarrow{BY}$ e $\overleftrightarrow{CZ}$ são paralelas, e X, Y e Z colineares ($\overleftrightarrow{OX} \neq \overleftrightarrow{OA}$), então X+Y = Z (Figuras 5.3.2.3a e 5.3.2.3b).

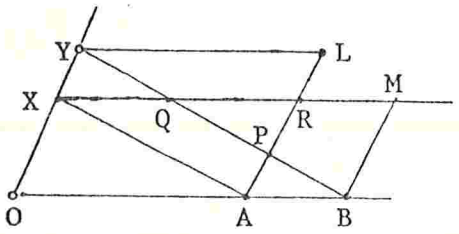

Figura 5.3.2.3a

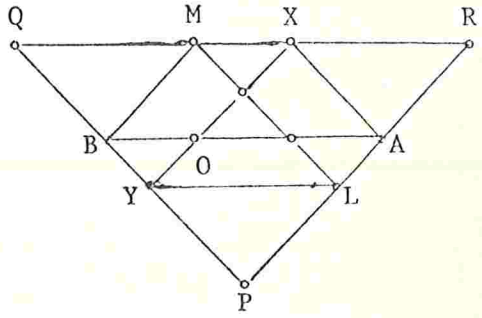

Figura 5.3.2.3b

DEMONSTRAÇÃO - Sejam as paralelas a $\overleftrightarrow{OA}$ por X e Y interceptando $\overleftrightarrow{CZ}$ em M e L respectivamente. Então como A+B=C, temos $\overleftrightarrow{BM} \parallel \overleftrightarrow{OX}$ e como B+A = C, temos $\overleftrightarrow{AL} \parallel \overleftrightarrow{OY}$. Segue-se, portanto, que $\overleftrightarrow{OA} \parallel \overleftrightarrow{YL}$, $\overleftrightarrow{AX} \parallel \overleftrightarrow{LZ}$ e $\overleftrightarrow{AL} \parallel \overleftrightarrow{OZ}$ respectivamente, donde advém que X+Y = Z.

DEFINIÇÃO 5.3.2.5 - Sejam O e U pontos distintos e A um ponto de $\overleftrightarrow{OU}$, distinto de O. Para um ponto X qualquer, definimos

$$(X.A)|_{O,U}$$

como sendo o ponto correspondente a X pela homotetia $(O,\overleftrightarrow{UA})$. Como usualmente, mantemos O e U fixos; escreveremos X.A sim-

plesmente (para designar $(X.A)|_{O,U}$). O ponto U é, às vezes, denominado de "ponto *unidade*" em $\overleftrightarrow{OU}$.

OBSERVAÇÃO - Note-se que X.A é definido quando X é um ponto qualquer e A está em $\overleftrightarrow{OU}$.

TEOREMA 5.3.2.6 - Com as notações da definição anterior temos:

a) Se X e A são pontos tais que $A \in \overleftrightarrow{OU}$, então X.A está bem definido e é único (conforme Definição 5.3.1.3 e Teorema 5.3.1.1).

b) Se A está em $\overleftrightarrow{OU}$, então U.A = A.U = A.

c) Dado $A \neq O$ em $\overleftrightarrow{OU}$, há somente um ponto X com X.A = U e tal ponto está em $\overleftrightarrow{OU}$.

d) Se X.A = U e, X e A estão ambos em $\overleftrightarrow{OU}$, então A.X = U.

e) Se $X \neq U$ está em $\overleftrightarrow{OU}$, então $X.X \neq X$.

f) Se A está em $\overleftrightarrow{OU}$, então O.A = O.

DEMONSTRAÇÃO - É decorrência imediata da Definição 5.3.2.5.

TEOREMA 5.3.2.7 - Se A, B e C são pontos de $\overleftrightarrow{OU}$, e X, Y e Z pontos de $\overleftrightarrow{OV}$ ($\overleftrightarrow{OV} \neq \overleftrightarrow{OU}$), e $\overleftrightarrow{UV}$, $\overleftrightarrow{AX}$, $\overleftrightarrow{BY}$ e $\overleftrightarrow{CZ}$ são paralelos, então $(A.B)|_{O,U} = C$ implica $(X.Y)|_{O,V} = Z$.

DEMONSTRAÇÃO - Como $\overleftrightarrow{UV} \parallel \overleftrightarrow{BY}$ e $(A.B)|_{O,U} = C$, segue-se que $\overleftrightarrow{VA} \parallel \overleftrightarrow{YC}$

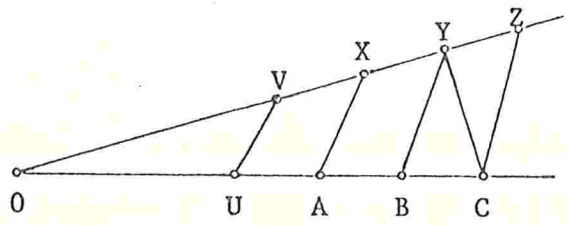

Figura 5.3.2.4

(Definição 5.3.1.3). Isto com $\overleftrightarrow{AX} \parallel \overleftrightarrow{CZ}$ nos dá $(X.Y)|_{O,V} = Z$ (Fi-

gura 5.3.2.4).

TEOREMA 5.3.2.8 - Se B e C estão em $\overleftrightarrow{OU}$, então (A.B).C = A.(B.C).

DEMONSTRAÇÃO - Observemos, inicialmente, que A.B está somente definida quando B está em $\overleftrightarrow{OU}$, e (A.B).C está definida quando C, e, portanto B.C, estão em $\overleftrightarrow{OU}$. Segue-se então que o teorema é decorrência da Definição 5.3.2.5 em ambos os casos: quando A está e quando A não está em $\overleftrightarrow{OU}$.

TEOREMA 5.3.2.9 - Temos E.(A+B) = E.A+E.B, quando A e B, e, portanto A+B, estão em $\overleftrightarrow{OU}$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A+B = C, E.A = X', E.B = Y' e E.C = Z'. Então, se E não está em $\overleftrightarrow{OU}$ temos $\overleftrightarrow{EU}$, $\overleftrightarrow{AX'}$, $\overleftrightarrow{BY'}$ e $\overleftrightarrow{CZ'}$ paralelos e, portanto, X'+Y' = Z' (Teorema 5.3.2.4). Se E está em $\overleftrightarrow{OU}$, então há pontos E_1, X_1, Y_1, Z_1 colineares com O, e com $\overleftrightarrow{UE_1}$, $\overleftrightarrow{AX_1}$, $\overleftrightarrow{BY_1}$ e $\overleftrightarrow{CZ_1}$ paralelos e também $\overleftrightarrow{EF_1}$, $\overleftrightarrow{X_1X'}$, $\overleftrightarrow{Y_1Y'}$ e $\overleftrightarrow{Z_1Z'}$ paralelos, e o teorema decorre novamente do Teorema 5.3.2.4.

TEOREMA 5.3.2.10 - Temos (A+B).E = A.E+B.E, quando E está em $\overleftrightarrow{OU}$.

DEMONSTRAÇÃO - Uma homotetia transforma retas paralelas em retas paralelas.

Com as definições e teoremas deste parágrafo, mostramos que o conjunto dos pontos de uma reta $\overleftrightarrow{OU}$, com as operações "+" e "." definidas formam um anel com divisão(11). Os pontos O e U fazem, respectivamente, o papel de 0 e 1.

---

(11) - Para as noções algébricas que aparecerem no texto, estaremos usando as notações, convenções, definições, etc. da obra [13].

§5.3.3 - Compatibilidade da Relação de Precedência com as Operações "+" e "."

Para o que se segue neste parágrafo, consideremos "≤" a relação de precedência em $\overleftrightarrow{OU}$, obtida em §2.11.

TEOREMA 5.3.3.1 - Se $A < B$, então existe um ponto X em $\{O\} \cup \overleftrightarrow{OU}$ com $A+X = B$, e reciprocamente.

DEMONSTRAÇÃO - Existe um único ponto X em $\overleftrightarrow{OU}$ tal que $A+X = B$ e é construída como segue: seja Z um ponto não pertencente a $\overleftrightarrow{OU}$ tal que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ZP}$, $\overleftrightarrow{AZ} \parallel \overleftrightarrow{BP}$ e $\overleftrightarrow{OX} \parallel \overleftrightarrow{ZP}$, $\overleftrightarrow{OZ} \parallel \overleftrightarrow{PX}$. Se $A < B$, então:

i) A está em $\{O\} \cup \overrightarrow{OU}$ e $[OAB]$, ou

ii) $[AOU]$ e B está em $\{A\} \cup \overrightarrow{AO}$, ou

iii) $A = 0$ e B está em $\{O\} \cup \overrightarrow{OU}$.

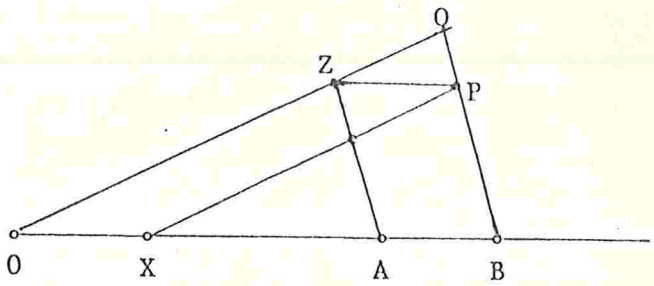

Figura 5.3.3.1a

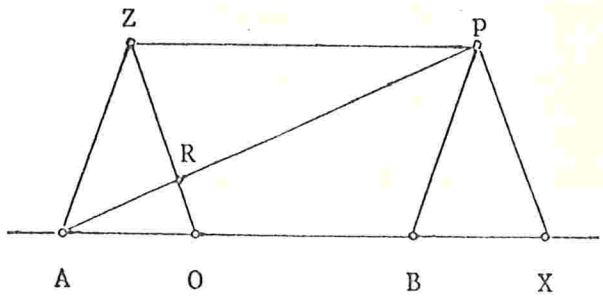

Figura 5.3.3.1b

No caso i), $\overleftrightarrow{BP}$ e $\overleftrightarrow{OZ}$ encontram-se digamos, em Q; então [OAB] implica sucessivamente [OZQ], [BPQ] e [OXB]. Assim, X está em $\{O\}\cup\overrightarrow{OB} = \{O\}\cup\overrightarrow{OA} = \{O\}\cup\overrightarrow{OU}$. No caso ii), como O está em $\{A\}\cup\overrightarrow{AB}$,]AP[e]ZO[encontram-se, num ponto R, e, então, [ARP] nos dá [AOX]. Mas temos [AOU]; portanto, X está em $\{O\}\cup\overrightarrow{OU}$. Finalmente, no caso iii), $A = O$, $B = X$, portanto X está em $\{O\}\cup\overrightarrow{OU}$. A recíproca é semelhante.

TEOREMA 5.3.3.2 - Se X está em $\{O\}\cup\overrightarrow{OU}$, então $O < X$ e reciprocamente.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

TEOREMA 5.3.3.3 - Se $A < B$, então $A+Y < B+Y$.

DEMONSTRAÇÃO - Como $A < B$, há um ponto $X > O$ com $A+X = B$ (Teorema 5.3.3.1 e 5.3.3.2). Assim $(A+Y)+X = (A+X)+Y = B+Y$. Segue-se deste modo, que $A+Y < B+Y$.

TEOREMA 5.3.3.4 - Se $X > O$ e $Y > O$, então $X.Y > O$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $X.Y = Z$, então existem pontos P e Q tais que O, P e Q são colineares e $\overleftrightarrow{UP} \parallel \overleftrightarrow{YQ}$ e $\overleftrightarrow{PX} \parallel \overleftrightarrow{QZ}$ respectivamente. Como $Y > O$, Y está em $\{O\}\cup\overrightarrow{OU}$, assim Q está em $\{O\}\cup\overrightarrow{OP}$ e Z em $\{O\}\cup\overrightarrow{OX}$. Mas $X > O$, portanto Z está em $\{O\}\cup\overrightarrow{OU}$.

COROLÁRIO 5.3.3.5 - Se $X < O$ e $Y < O$, então $X.Y > O$.

DEMONSTRAÇÃO - Decorre imediatamente do teorema anterior.

Com os resultados deste parágrafo concluímos que os pontos da reta $\overleftrightarrow{OU}$ formam um anel com divisão totalmente ordenado e denso, com "≤" compatível com as operações do mesmo.

§5.3.4 - Uma Base Suficiente para a Geometria Euclidiana

TEOREMA 5.3.4.1 - Com base nos axiomas até aqui vistos, de ordem O, do Axioma K de continuidade e do Axioma P das paralelas, podemos introduzir congruência por definição, e assim todos os teoremas concernentes à Geometria Euclidiana contidas, por exemplo em [11], podem ser demonstrados sem assumir quaisquer outras suposições.

DEMONSTRAÇÃO (em resumo) - De fato, vimos no parágrafo §5.3.2 que, com base nos axiomas de ordem O e do Axioma P podemos definir duas operações + e · entre pontos de uma reta. Mostramos no parágrafo seguinte (§5.3.3), que os pontos de uma reta com tais operações e em relação à ordem ≤ formam um anel com divisão totalmente ordenado e denso R.

Pelo parágrafo §5.1, R satisfaz ainda o Axioma K de continuidade, e como conseqüência, R é Arquimediano, donde se conclui que R contém um subcorpo isomorfo ordenadamente ao corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$. Segue-se, portanto, que a operação "·" definida em R é comutativa, ou seja, (R, +, ·, ≤) tem estrutura de corpo ordenado totalmente denso.

Dos Teoremas 5.3.2.4 e 5.3.2.7 concluímos que se R e R' são corpos determinados por duas retas $\overleftrightarrow{OU}$ e $\overleftrightarrow{OU'}$ quaisquer, então pode ser estabelecido um isomorfismo (de corpos) entre eles, de tal maneira que, se $A \in \overleftrightarrow{OU}$, então A corresponde a um ponto A' em $\overleftrightarrow{OU'}$ com $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{UU'}$.

Decorre, portanto, que os pontos de uma reta $\overleftrightarrow{OU}$ podem ser

pensados como elementos de um certo corpo abstrato $(R, +, \cdot, \leq)$ e reciprocamente. O elemento correspondente em R a um ponto $P \in \overleftrightarrow{OU}$ será chamado de "coordenada" do ponto P na "escala $\overleftrightarrow{OU}$" e será denotado pela letra minúscula correspondente p. Feitas estas considerações, podemos introduzir o conceito de coordenadas *básicas* de um ponto P qualquer; consideram-se três retas *privilegiadas* concorrentes $\overleftrightarrow{OX}$, $\overleftrightarrow{OY}$ e $\overleftrightarrow{OZ}$ no espaço, não coplanares, e três pontos *privilegiados* distintos de O fixos nelas, digamos $U_1 \in \overleftrightarrow{OX}$, $U_2 \in \overleftrightarrow{OY}$ e $U_3 \in \overleftrightarrow{OZ}$, como pontos unidade. Então, o ponto P determina (univocamente) três pontos A, B e C nas retas $\overleftrightarrow{OU}_1$, $\overleftrightarrow{OU}_2$ e $\overleftrightarrow{OU}_3$ respectivamente de tal maneira que

$\overleftrightarrow{PC}$ // plano OAB, $\overleftrightarrow{PA}$ // plano OYZ e $\overleftrightarrow{PB}$ // plano OXZ.

Sejam a, b e c as coordenadas de A, B e C nas respectivas escalas $\overleftrightarrow{OU}_1$, $\overleftrightarrow{OU}_2$ e $\overleftrightarrow{OU}_3$. Então, as coordenadas do ponto P são definidas como as componentes da terna ordenada (a,b,c) com relação ao *sistema privilegiado de eixos* $\overleftrightarrow{OU}_1$, $\overleftrightarrow{OU}_2$ e $\overleftrightarrow{OU}_3$. Por outro lado, é claro que se a, b e c são elementos arbitrários de R, então existe um ponto do espaço cuja coordenada em relação ao eixo supracitado é (a,b,c).

Dessa maneira, define-se distância entre dois pontos P_1 e P_2 $(\mathrm{dis}(P_1,P_2))$, de coordenadas (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) como sendo

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}.$$

Tal função está bem definida, pois, se Y é um elemento de R e $Y > 0$, então podemos determinar um elemento X de R com $X^2 = Y$.

Definimos em seguida o par de pontos (A,B) como sendo congruente ao par (C,D) se, e somente se, dist(A,B) = dist(C,D) e indicaremos este fato por $(A,B) \simeq (C,D)$.

As considerações anteriores permitem demonstrar os seguintes teoremas:

1. Se $\overrightarrow{AB}$ é uma semi-reta arbitrária, então ela contém um único ponto C tal que $(A,C) \simeq (D,E)$, para quaisquer pontos D e E.

2. Se $(A,B) \simeq (C,D)$ e $(C,D) \simeq (E,F)$, então $(A,B) \simeq (E,F)$.

3. Se [ABC] e [DEF] e $(A,B) \simeq (D,E)$ e $(B,C) \simeq (E,F)$, então $(A,C) \simeq (D,F)$.

Introduziremos, agora, a noção de congruência entre ângulos. Para tal, sejam P_1 e P_2 dois pontos (distintos) com coordenadas correspondentes (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2). Consideremos os seguintes elementos de R:

$$\ell = \frac{x_2-x_1}{d_{12}}; \quad m = \frac{y_2-y_1}{d_{12}}; \quad n = \frac{z_2-z_1}{d_{12}},$$

onde $d_{12} = \text{dis}(P_1,P_2)$. Tais números são ditos números direcionais da semi-reta $\overrightarrow{P_1P_2}$ (cf. Forder ([8]), p.200); pode-se demonstrar que tal definição independe da escolha do ponto P_2. Consideremos, então, ℓ_1,m_1,n_1 e ℓ_2,m_2,n_2 os números direcionais correspondentes às semi-retas $\overrightarrow{PP_1}$ e $\overrightarrow{PP_2}$ (distintas e não-opostas). Denotemos $\ell_1.\ell_2 + m_1.m_2 + n_1.n_2$ por $\cos P_1\hat{P}P_2$ (naturalmente este número não precisa ser identificado no presente com a função trigonométrica do ângulo, mas, é fixo pelo ângulo. Fi-

nalmente, definimos $P_1\hat{P}P_2 \simeq_A P_1'\hat{P}'P_2'$, se, e somente, se

$$\cos P_1\hat{P}P_2 = \cos P_1'\hat{P}'P_2'.$$

Decorrem, as seguintes propriedades:

4. Se $B\hat{A}C$ é um ângulo, cujos lados não estão contidos em uma mesma reta, e se A' e B' são dois pontos distintos, então existem duas, e somente duas, semi-retas distintas, $\overrightarrow{A'C'}$ e $\overrightarrow{A'C''}$, tais que o ângulo $B'\hat{A}'C'$ é congruente ao ângulo $B\hat{A}C$ e, o ângulo $B'\hat{A}'C''$ é congruente ao ângulo $B\hat{A}C$; além disso, se D' é qualquer ponto na semi-reta $\overrightarrow{A'C'}$ e D'' é qualquer ponto na semi-reta $\overrightarrow{A'C''}$, então o segmento [D'D''] corta a reta determinada por A' e B'.

5. Cada ângulo é congruente a si próprio.

6. Se dois lados e o ângulo determinado por eles, de um triângulo, são congruentes respectivamente a dois lados e o ângulo determinado por eles, de outro triângulo, então cada um dos ângulos remanescentes do primeiro triângulo é congruente aos ângulos remanescentes correspondentes ao segundo triângulo.

As relações $\simeq$ e $\simeq_A$ acima definidas com as propriedades 1 - 6 são conhecidas como Relações de Congruências e constituem o terceiro grupo de axiomas (Axiomas de Congruência) em [11] de D. Hilbert. Assim, todas as propriedades concernentes à congruência contidas em [11] podem ser mostradas em nossa axiomática.

Segue-se, também, que a Teoria das Áreas e Construções ([11], p. 60 a 71 e 99 a 101) podem ser também estabelecidas,

essencialmente em virtude da validade do Teorema de Arquimedes.

§5.4 - OBTENÇÃO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A Geometria Hiperbólica deriva da Geometria Absoluta — isto é, Axiomas I.1 a I.9 e o Axioma K — adicionando-se o seguinte axioma:

AXIOMA H (Hiperbólico) - Seja A um ponto qualquer e r uma reta qualquer à qual A não pertence. Então por A passam pelo menos duas retas (no plano Ar) que não encontram r.

Observemos que as Geometrias de Euclides e Hiperbólica diferem apenas na unicidade ou não da paralela por um ponto a uma reta dada. O debate histórico sobre esta questão é bastante conhecido: simplesmente não há sentido em questionar qual das duas geometrias é a mais verdadeira. Mesmo a questão sobre a maior conveniência desta ou daquela geometria (por exemplo, para descrever o espaço astronômico) é difícil. Sob o ponto de vista matemático, uma primeira questão que se coloca é sobre a consistência lógica da Geometria Hiperbólica. Tal questão, também, oferece dificuldades imensas, pois de acordo com Gödel, não existe demonstração interna de consistência (vide Capítulo I, §1.2). Por conseguinte, o que se mostra é a consistência relativa com a Geometria Euclidiana. Sobre esta última questão são muito familiares os modelos de Poincaré, Beltrami, etc. Não é do escopo desta dissertação fazer um tratamento da Geometria Hiperbólica; o leitor poderá encontrar farto material, por exemplo, em [3] e [6] da Bibliografia.

§5.5 - CATEGORICIDADE

A não categoricidade da Geometria Absoluta (com ou sem o Axioma de Continuidade) é bem conhecida. Já o mesmo não se dá com as Geometrias de Euclides e de Bolyai-Lobachevsky. De fato, a categoricidade da Geometria de Euclides decorre das observações feitas na demonstração do Teorema 5.3.4.1, do parágrafo precedente, notando-se que, essencialmente, o conjunto dos pontos de uma reta com as operações anteriormente descritas, formam um corpo ordenado completo. Em virtude da categoricidade dos corpos ordenados completos (12), segue-se nosso resultado. Sobre a categoricidade da Geometria de Bolyai - Lobachevsky, pode-se, por exemplo, consultar [3].

§5.6 - SOBRE A INDEPENDÊNCIA DOS AXIOMAS

O sistema de axiomas de Veblen se constituiu no primeiro conjunto de axiomas para a Geometria de Euclides em que se pôde obter resultados significativos sobre a questão da independência dos axiomas (13). Tais resultados são apresentados em [19], de maneira que não os reproduziremos aqui. No artigo citado, mostra-se a independência dos oito primeiros axiomas (do sistema de Veblen apresentado em [19]) empregando-se modelos finitos. Frise-se a discussão da independência do Axioma de Pasch-Peano empregando-se certos grupos de permutações. Já pa-

---

(12) - Uma demonstração da categoricidade dos corpos ordenados completos pode ser encontrada em Cohen, L.W. & G.Ehrlich, *The Structure of the Real Number System*, D. Van Nostrand Company, 1963.

(13) - Cf. Archibald, R.C., *A Semicentennial History of the American Mathematical Society 1888-1938*, Vol. I, New York, A.M.S., 1938, p. 207.

ra a independência do Axioma de Continuidade, do Axioma das Paralelas e do Axioma que caracteriza o espaço, são utilizados modelos familiares. No entanto, a independência dos oito primeiros axiomas referidos anteriormente, se tomados no contexto global da axiomática, constitui,ainda,ao que nos consta, problema em aberto.

§5.7 - GEOMETRIA ORDENADA n-DIMENSIONAL

Definiremos, agora, o espaço n-dimensional por intermédio da indução matemática. Com efeito, o "espaço bidimensional (plano) $A_0A_1A_2$" e o "espaço tridimensional $A_0A_1A_2A_3$" foram estudados em §3.2.2 e §3.2.8, respectivamente.

Suponha-se, agora, que foi definido o espaço n-dimensional $A_0A_1A_2...A_n$ $(n \geq 2)$. Para obtermos o espaço n+1-dimensional necessitaremos do seguinte axioma:

"Se $A_0A_1...A_n$ é um espaço n-dimensional, existe um ponto A_{n+1} que não pertence ao mesmo espaço".

Por uma questão de conveniência, chamemos, por ora os triângulos de "simplexos de ordem 3, os tetraedros de "simplexos de ordem 4", etc. Chamemos, também, a região triangular de interior do simplexo de ordem 3, a região tetraédrica de interior do simplexo de ordem 4, etc.

Posto isto, definimos o simplexo de ordem $n+2$, $A_0A_1...A_{n+1}$, como sendo a reunião dos seguintes conjuntos:

$n+2$ pontos $A_0, A_1, ..., A_{n+1}$;

$\binom{n+2}{2}$ segmentos abertos $]A_iA_j[$, $i<j$, $0\leq i<j\leq n+1$;

$\binom{n+2}{3}$ interiores dos simplexos de ordem 3, $A_iA_jA_k$, $i<j<k$, $0\leq i<j<k\leq n+1$;

$\vdots$

$\binom{n+2}{n+1}$ interiores dos simplexos de ordem n+1, $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_{n+1}}$, $0\leq i_1<\ldots<i_{n+1}\leq n+1$.

O interior do simplexo de ordem n+2 acima definido, constitui-se dos pontos que estão entre os pares de pontos pertencentes a interiores de simplexos de ordem n+1 distintos do simplexo de ordem n+2.

O espaço n+1-dimensional $A_0A_1\ldots A_nA_{n+1}$ é, então, o conjunto de todos os pontos que são colineares com relação a pares de pontos que estão no simplexo de ordem n+2 definido acima.

Naturalmente, pode haver vários "espaços" n+1-dimensionais.

Se quisermos restringir a nossa geometria a n+1-dimensões, adicionamos o seguinte axioma:

"Todos os pontos estão num mesmo espaço n+1-dimensional".

CONCLUSÕES

Considerando o conjunto desta dissertação e o desenvolvimento dos seus diversos capítulos, destacamos as seguintes conclusões, que pensamos decorrerem da exposição feita.

I. Em virtude dos estudos relativos à Axiomática I, ficou evidente que a Geometria Ordenada pode ser tomada como fundamento comum das Geometrias Afim e Absoluta. Com o que se realça — também sob o ponto de vista dos fundamentos — a importância da Geometria Ordenada.

II. Realizamos, no Capítulo III, um desenvolvimento rigoroso da Geometria de Ordem proposta por Vailati. Além disso, foi vista, também,— ao que nos consta, por primeira vez a nível de detalhe — a equivalência das Axiomáticas I e II.

III. As aplicações feitas no Capítulo IV evidenciaram a força da Geometria Ordenada. Com efeito, mostramos que os Teoremas de Sylvester e Jordan constituem-se em teoremas típicos da Geometria Ordenada. Estes teoremas receberam formulações e demonstrações claras na axiomática apresentada e, além disso, tornou-se patente na exposição, que tais problemas dependem somente da no-

ção de ordem.

IV. Salientou-se uma das grandes vantagens da axiomática de Veblen: a simplicidade de seu sistema. Nele, termos como "reta", "plano" e "espaço" puderam receber definições explícitas.

Com efeito, por exemplo, para a edificação da Geometria de Euclides empregou-se um conjunto minimal de noções primitivas (apenas duas) e o número de axiomas é reduzido a onze (já, por exemplo, o sistema de Hilbert — como se sabe — emprega ao total 5 noções primitivas e 21 axiomas).

Tal conjunto de axiomas permitiu obter resultados significativos sobre a questão da independência dos axiomas (Capítulo V) que se constitui em questão de importância metamatemática.

V. A apresentação da Geometria Ordenada de forma exaustiva, didática, e sistemática permite evidenciar o fato de que, realmente, a Geometria Euclidiana ou Hiperbólica podem ser fundadas a partir da noção de ordem.

- 0 -

BIBLIOGRAFIA

[1] - ARTIN,E., *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, 1966.

[2] - BLUMENTHAL, L.M., *A Modern View of Geometry*, W.H. Freeman and Company, 1961.

[3] - BORSUK,K. & W.SZMIELEV, *Foundations of Geometry*, North Holland, 1960.

[4] - CASTRUCCI,B., *Fundamentos de Geometria: Estudo Axiomático do Plano Euclidiano*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1978.

[5] - COXETER,H.S.M., *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1961.

[6] - COXETER,H.S.M., *Non-Euclidean Geometry*, The University of Toronto Press, 1957.

[7] - FORDER,H.G., *The Foundations of Euclidean Geometry*, Dover, 1927.

[8] - FORDER,H.G., "On Order in a Plane", *Canadian Journal of Mathematics*, 19 (1967), p. 997-1000.

[9] - GUPTA,H.N., *Contributions to the Axiomatic Foundations of Geometry*, Dissertation, University of California, Berkeley.

[10] - HEATH,T.L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements...*, Vol. I, Dover Publications, 1956.

[11] - HILBERT, D., *Foundations of Geometry*, Open Court, 1971.

[12] - KERÉKJÁRTO,B., *Les Fondements de la Géométrie*, Vol. I, Akadémiai Kiadó, 1955.

[13] - MacLANE,S. & G.BIRKHOFF, *A Survey of Modern Algebra*, The Macmillan Company, 1953.

[14] - MOISE,E.E., *Elementary Geometry From an Advanced Standpoint*, Addson-Wesley, 1963.

[15] - PRENOWITZ,E. & M.JORDAN, *Basic Concepts of Geometry*, John Wiley & Sons, 1965.

[16] - ROBINSON, G. de B., *The Foundations of Geometry*, University of Toronto Press, 1952.

[17] - RUSSELL, B., *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, 1964.

[18] - RUSSELL, B., *An Essay on the Foundations of Geometry*, Dover, 1956.

[19] - VEBLEN, O., "A System of Axioms for Geometry", *Trans. Amer. Math. Soc.* 5 (1904), p. 343-384.

[20] - WHITEHEAD, A.N., *The Axioms of Descriptive Geometry*, Cambridge University Press, 1914.

[21] - WILDER, R.L., *Introduction to Foundations of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1965.

- 0 -

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

$\vec{a}$	semi-reta, 35
$\vec{a}_P$	semi-reta com origem P, 39
$\widehat{\vec{a}O\vec{b}}$	ângulo, 60
$\|A\|$	cardinalidade do conjunto A, 97
$\#A$	cardinalidade do conjunto A, 97
$A_1A_2\ldots A_n,p,q$	polígono, 85
$[AB]$	segmento, 11
$]AB[$	segmento aberto, 11
$\overrightarrow{AB}$	semi-reta, 12
$\overrightarrow{AB}^*$	semi-reta oposta a $\overrightarrow{AB}$, 33
$\overleftrightarrow{AB}$	reta, 12
ABC	plano, 49
A,B,C,...	pontos, 10, 42
$[ABC]$	o ponto B está entre os pontos A e C, 10
$[ABC]_{II}$	o ponto B está entre os pontos A e C, 45
ΔABC	triângulo, 14
$\mathring{\Delta}ABC$	triângulo aberto, 68
ABCD	espaço, 74
$[ABCD]$	os pontos A,B,C e D estão na ordem ABCD, 19
$\Delta ABCD$	tetraedro, 74
$A\dot{\cup}B$	união disjunta dos conjuntos A e B, 20
$B\hat{A}C$	ângulo, 60
E	conjunto de pontos, 10

L	conjunto de retas, 42
$\mathbb{N}^*$	conjunto dos números naturais não nulos, 26
$p_{A_1}^{A_n}, A_1A_2\ldots A_n, p, q$	poligonal com vértices $A_1, \ldots, A_n$, 54
$P \overset{p}{\sim} Q$	P é acessível a Q relativamente a p, 85
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais, 117
S	conjunto de pontos, 42
$\mathcal{S}$	classe das semi-retas de uma reta, 37
$\vec{t} \parallel \overrightarrow{CB}$	a semi-reta t é paralela a $\overrightarrow{CB}$, 106
T	relação "estar entre", 10
$\mathcal{U}$	base de abertos, 31
$\mathcal{V}$	base de abertos, 71
α_1^*	semi-plano oposto a α_1, 58
α_1, β_1	semi-planos, 57
α, β, γ	planos, 49
$\leq$	relação de ordem para pontos de um eixo p, 40
$\geq$	relação oposta de $\leq$, 40
$\leq_r$	relação de precedência em r, 40
$\leq_r'$	relação inversa de $\leq_r$, 43
$\parallel$	relação de paralelismo, 107
$+$	operação adição de pontos, 110
$\cdot$	operação multiplicação de pontos, 112
$\simeq$	relação de congruência, 119
$\simeq_A$	relação de congruência, 120