

O MÉTODO DO REFERENCIAL MÓVEL  
NA GEOMETRIA CONFORME

JOÃO MEIDANIS

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM  
MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: GEOMETRIA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. CARLOS EDGARD HARLE

SÃO PAULO, setembro de 1984.

*Dedicada à Lu.*

## AGRADECIMENTOS

Dentre as inúmeras pessoas que colaboraram direta ou indiretamente para a realização deste texto, gostaria de fazer especial menção:

- ao Prof. Dr. Carlos Edgard Harle, pela sugestão do tema, que me colocou em contato com a obra grandiosa de Elie Cartan, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, e pela orientação dedicada e profícua;
- ao Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti, meu orientador durante o 1<sup>o</sup> ano de pós-graduação, mas que nunca deixou de se preocupar com meu futuro;
- ao colega Pedro Aladar Tonelli, pelo apoio, moral e material, pela amizade sincera, pela presença sempre constante e pela cuidadosa revisão dos originais;
- à Tamico pelo seu trabalho de datilografia, que resultou perfeito;
- e a Lucrécia, que, com todo o seu amor, com toda a sua força, paciência, incentivo e decisão, acompanhou todas as etapas da elaboração do trabalho, tendo sido, no cômputo final, a principal responsável pela sua existência.

J.M.

# ÍNDICE

PÁG.

NOTAÇÕES

PREFÁCIO

CAPÍTULO 1 - GEOMETRIA CONFORME .....	1
1.1. - INTRODUÇÃO .....	1
1.2 - TRANSFORMAÇÕES CONFORMES .....	2
1.3. - SOMA DE HIPERESFERAS .....	12
1.4. - O GRUPO CONFORME .....	22
CAPÍTULO 2 - O REFERENCIAL CONFORME MÓVEL .....	40
2.1. - GEOMETRIA CONFORME EM $S^n$ .....	40
2.2. - REFERENCIAIS CONFORMES .....	46
2.3. - RELAÇÃO COM REFERENCIAIS EUCLIDIANOS .....	64
2.4. - HIPERSUPERFÍCIES .....	69
CAPÍTULO 3 - HIPERSUPERFÍCIES CONFORMEMENTE PLANAS .....	76
3.1. - DEFINIÇÃO E PRIMEIROS RESULTADOS .....	76
3.2. - O CASO $n \geq 5$ .....	84
3.3. - O CASO $n = 4$ .....	92
3.4. - UMA CONSEQÜÊNCIA GEOMÉTRICA DA QUASE-UMBILI CIDADE .....	105
BIBLIOGRAFIA .....	109



## NOTAÇÕES:

$A \cap B$	intersecção de conjuntos.
$A - B$	diferença de conjuntos.
$A \cup B$	união de conjuntos.
$I$	matriz identidade.
$A \subset B$	inclusão
$id$	aplicação identidade
$\text{ger}(v_1, v_2, \dots, v_n)$	espaço vetorial gerado pelos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
$W^\perp$	subespaço ortogonal a $W$ .
$\langle, \rangle$	produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$ .
$\  \cdot \ $	norma usual em $\mathbb{R}^n$ .
$GL(n, \mathbb{R})$	grupo linear geral.
$\det A$	determinante da matriz $A$ .
$\overset{\circ}{U}$	interior (topológico) de $U$ .
$Df$	derivada de uma aplicação $f$ definida num aberto de $\mathbb{R}^n$ .
$f_*$	derivada de uma aplicação $f$ definida numa variedade.

Durante todo o texto, "diferenciabilidade" significa "diferenciabilidade de classe  $C^\infty$ ".

## PREFÁCIO

O método do referencial móvel, idealizado por Elie Cartan no início deste século, tem se mostrado, desde sua criação, um poderoso e eficaz instrumento na resolução de problemas da geometria riemanniana. O objetivo da presente dissertação é chamar a atenção para o fato de que ele pode ser aplicado com igual sucesso a problemas da geometria conforme.

Para tanto apresentamos alguns resultados obtidos pelo próprio Cartan num artigo de 1917 (referência [3] da bibliografia), no qual são expostos os princípios gerais do método e é estudado o "problema da deformação de hipersuperfícies no espaço conforme". Aqui trataremos, porém, apenas da parte relativa às hipersuperfícies conformemente planas, que para Cartan são aquelas que podem ser obtidas por "deformação" das hiperesferas.

Tivemos constantemente a preocupação em manter a fidelidade ao artigo original. Contudo, isto nem sempre foi possível, devido, em primeiro lugar, à evolução da própria geometria diferencial desde aquela época até os dias atuais, (em termos de linguagem, ferramentas, etc.) e, em segundo lugar, ao fato de que desejávamos incluir no texto a discussão de vários tópicos relacionados com o assunto principal mas que realmente não pertenciam ao escopo de um trabalho específico e sumário como [3]. Estes tópicos são mencionados abaixo na descrição do conteúdo de cada capítulo.

No capítulo 1 é apresentada a geometria conforme do  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , de um ponto de vista algébrico. O desenvolvimento todo é baseado na idéia das "coordenadas  $(n+2)$  - esféricas" (esta denominação é a usada por Cartan; não demos nenhum nome especial a esta coordenadas no texto) para representar as hiperesferas:

$$a_0(X_1^2 + \dots + X_n^2) - 2a_1X_1 - \dots - 2a_nX_n - 2a_{n+1} = 0.$$

Através delas consegue-se uma representação do grupo conforme em  $GL(n+2, \mathbb{R})$  que facilita enormemente o seu estudo e permitirá a introdução dos referenciais conformes no capítulo 2. Classicamente, o grupo conforme é descrito como sendo o grupo gerado pelos movimentos rígidos, homotetias e inversões por hiperesferas. Um dos resultados do capítulo 1 (secção 1.4) é que bastam as inversões para gerá-lo todo.

O capítulo 2 está destinado a fornecer o material que será usado posteriormente no estudo das hipersuperfícies conformemente planas. Inicialmente, porém, é feita uma "tradução" de toda a teoria do capítulo 1 para a esfera  $S^n$ , que será o modelo de espaço conforme utilizado daí em diante. Em seguida é introduzida a noção de referencial conforme adaptado a uma subvariedade de  $S^n$  juntamente com as técnicas mais frequentes de sua manipulação, cada uma delas seguida de uma aplicação. Resaltamos os teoremas 2.4 e 2.5 que caracterizam hipersuperfícies que diferem por uma transformação conforme do espaço ambiente em termos de suas formas fundamentais.

Os resultados sobre hipersuperfícies conformemente planas (c.p.) do espaço conforme de dimensão  $n$ , que constituem a parte principal do trabalho, encontram-se no capítulo 3. Excetuando-se o caso trivial  $n=3$ , onde toda hipersuperfície é c.p., a aplicação da teoria desenvolvida anteriormente conduz de forma natural à separação entre  $n \geq 5$  e  $n = 4$ . Para  $n \geq 5$ , é obtida na secção 3.2 a caracterização usual em termos dos autovalores da 2ª forma fundamental (uma hipersuperfície é c.p. se e somente se é quase-umbílica) e demonstra-se também um teorema sobre folheações por  $(n-2)$  - esferas (secção 3.4). Para  $n = 4$ , apresentamos na secção 3.3 um interessante resultado de Cartan que caracteriza as hipersuperfícies c.p. através da integrabilidade formal de certas distribuições complexas canonicamente definidas sobre elas.

São Paulo, 31 julho de 1984.

JOÃO MEIDANIS

# CAPÍTULO 1

## GEOMETRIA CONFORME

### 1. INTRODUÇÃO

A geometria conforme é o estudo das noções derivadas da noção de *ângulo*, ou seja, são aquelas noções que são preservadas por toda aplicação que preserva ângulos.

Embora a noção de ângulo possa ser definida em qualquer variedade riemanniana, nosso estudo neste primeiro capítulo limitar-se-á basicamente ao espaço euclidiano; pretendemos com isso facilitar a introdução ao assunto, obtendo uma base sólida para a seguir empreender uma abordagem mais geral.

Iniciaremos, portanto, com o  $\mathbb{R}^n$ . Por motivos que se tornarão claros brevemente, estudaremos apenas os casos  $n \geq 3$ . Dados dois vetores  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , ambos diferentes do vetor nulo, o *ângulo* entre eles é definido como sendo o real  $\theta$  tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Uma aplicação linear  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é *conforme* se ela conserva o ângulo entre dois vetores quaisquer. Sabemos que  $L$  é conforme se e somente se existe um real  $a > 0$  tal que

$$\langle L(u), L(v) \rangle = a^2 \langle u, v \rangle \quad (1)$$



para  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Observe que uma aplicação linear conforme é necessariamente inversível. Outra maneira de escrever (1) é dizendo que existe  $a > 0$  e um operador ortogonal  $P$  do  $\mathbb{R}^n$  tais que

$$L = aP. \quad (2)$$

Desta maneira determinamos o grupo dos operadores lineares conformes do  $\mathbb{R}^n$  e observamos que ele tem uma dimensão a mais do que  $O(n)$ , o grupo ortogonal.

Nosso próximo passo será estudar as aplicações diferenciáveis com relação a ângulos. Dada uma aplicação diferenciável  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $U$  é um aberto do  $\mathbb{R}^n$ , diremos que  $f$  é *conforme* se para todo  $x \in U$  sua derivada  $Df(x)$  é conforme, ou seja, é da forma (2).

Se  $n=1$  toda aplicação diferenciável é conforme. Se  $n=2$  a teoria das funções analíticas nos dá um grande número de exemplos de aplicações conformes, constituindo um pseudo-grupo de dimensão infinita. Para  $n \geq 3$ , contudo, a coisa muda de figura, pois Liouville demonstrou um teorema que afirma que o grupo das transformações conformes do  $\mathbb{R}^n$  tem dimensão finita, igual a  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ . No capítulo 2 apresentamos uma demonstração deste teorema. Neste capítulo vamos estudar as transformações conformes de um ponto de vista bastante interessante, desenvolvido em Cartan [4]. Voltamos a repetir: supomos sempre  $n \geq 3$ .

## 2. TRANSFORMAÇÕES CONFORMES

Sabia-se, desde Liouville, que as transforma-



ções conformes, além de preservar ângulos, preservam também a família das hipersferas e hiperplanos do  $\mathbb{R}^n$ . Qualquer elemento desta família pode ser representado por uma equação da forma

$$a_0(X_1^2 + \dots + X_n^2) - 2a_1X_1 - \dots - 2a_nX_n - 2a_{n+1} = 0 \quad (3)$$

para certas constantes  $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ , não todas nulas, que podem ser consideradas como coordenadas (homogêneas) deste ente geométrico.

Exemplos:

- 1) A esfera  $S^{n-1}$  pode ser representada pela  $(n+2)$ -pla  $(1, 0, 0, \dots, 1/2)$ , que corresponde à equação

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 - 1 = 0$$

- 2) Ao hiperplano

$$X_1 = 0$$

corresponde o vetor de coordenadas  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ , entre outros.

- 3) Ao vetor de coordenadas  $(1, 0, \dots, 0)$  corresponde a equação

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = 0$$

que geometricamente representa apenas um ponto: a origem.

- 4) Ao vetor de coordenadas  $(1, 0, 0, \dots, -1)$  corresponde a equação

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 + 2 = 0$$

que geometricamente não representa ponto algum, pelo menos enquanto considerarmos pontos com coordenadas reais apenas. Diremos que estas coordenadas são de uma hiperesfera *imaginária*.

- 5) Ao vetor de coordenadas  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  corresponde a equação

$$-2 = 0$$

que é impossível, mesmo em coordenadas complexas. Diremos que estas coordenadas representam o *ponto no infinito* ( $\infty$ ) do  $\mathbb{R}^n$ .

Como vemos, a equação (3) representa hiperesferas, hiperplanos, pontos (reais ou ideais) e hiperesferas imaginárias. Não é difícil perceber que tudo depende da forma quadrática

$$\Phi = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_0 a_{n+1} \quad (4)$$

da seguinte maneira:

- i) se  $\Phi > 0$  a equação (3) representa uma hiperesfera real ( $a_0 \neq 0$ ) ou um hiperplano ( $a_0 = 0$ );
- ii) se  $\Phi = 0$  a equação (3) representa um ponto, que pode ser real ( $a_0 \neq 0$ ) ou ideal ( $a_0 = 0$ );

iii) se  $\phi < 0$  a equação (3) representa uma hiperesfera imaginária.

Usaremos a notação  $\hat{A}$  para indicar o lugar geométrico correspondente à equação (3) para  $A = (a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \neq 0$ . Assim, a forma  $\phi$  determina certas características de  $\hat{A}$ . Na verdade, o papel de  $\phi$  vai mais longe: considere a forma bilinear simétrica associada a  $\phi$ :

$$A|B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + a_0 b_{n+1} + a_{n+1} b_0$$

onde  $A = (a_0, a_1, \dots, a_{n+1})$  e  $B = (b_0, b_1, \dots, b_{n+1})$ . Então temos as seguintes propriedades:

- i) as hiperesferas  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são ortogonais se e somente se  $A|B = 0$ ;
- ii) uma hiperesfera  $\hat{A}$  passa por um ponto  $\hat{P}$  se e somente se  $A|P = 0$ .

#### Exemplos:

- 1) Suponha que  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  sejam hiperplanos, isto é,  $a_0 = b_0 = 0$ ,  $A^2 = A|A > 0$  e  $B^2 = B|B > 0$ . Neste caso a condição  $A|B = 0$  é

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 0,$$

que expressa a ortogonalidade entre os vetores normais a  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ .

- 2) Se  $P = (0, 0, \dots, 1)$ , o ponto no infinito, então  $A|P = 0$  se e somente  $a_0 = 0$ , isto é,  $\hat{A}$  é um hiperplano

no ou  $\hat{A} = \hat{P} = \infty$ . Em outras palavras, os hiperplanos são caracterizados pelo fato de passarem por  $\infty$ .

Imagine agora uma transformação linear  $T: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  que conserve a forma  $\Phi$ . Como  $\Phi$  é não-degenerada,  $T$  deve ser inversível e o conjunto de todas estas transformações lineares munido da operação de composição adquire uma estrutura de grupo. Em termos de matrizes, olhando cada vetor  $A \in \mathbb{R}^{n+2}$  como uma matriz-coluna, temos

$$A|B = A^t \Phi B$$

onde a  $\Phi$  do 2º membro representa a matriz

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

A condição de  $T$  conservar a forma  $\Phi$  se expressa por

$$T^t \Phi T = \Phi \quad (5)$$

Dada uma  $T$  que satisfaça (5), podemos encará-la como uma aplicação que leva cada hiperesfera  $\hat{A}$  numa hiperesfera do mesmo tipo  $\widehat{T(A)}$ , exatamente como fazem as transformações conformes. Será que existe uma delas que corresponda a esta ação de  $T$ ? A resposta é afirmativa e a maneira de se achar esta transformação é simples: basta notar que  $T$  leva hiperesferas-ponto (de raio nulo)

em hipersferas-ponto, ou seja,  $T$  conserva a relação  $\phi=0$  e dessa forma pode ser encarada como aplicação de  $|\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  em  $|\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ .

Exemplo:

A matriz  $T = \Phi$  satisfaz (5), pois  $\Phi^t = \Phi$  e  $\Phi^2 = I$  (matriz identidade). Vejamos qual transformação conforme de  $|\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  corresponde a esta  $T$ . Dado  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in |\mathbb{R}^n$ , a equação da hipersfera-ponto que representa  $x \bar{e}$

$$(X_1 - x_1)^2 + \dots + (X_n - x_n)^2 = 0$$

ou

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 - 2x_1X_1 - \dots - 2x_nX_n + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

que corresponde ao vetor de coordenadas

$$P = (1, x_1, \dots, x_n, -\frac{1}{2} \langle x, x \rangle).$$

Este  $P \bar{e}$  levado pela  $T$  em:

$$TP = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -\frac{1}{2} \langle x, x \rangle \end{bmatrix} = Q$$

A equação que corresponde a  $Q$  é:

$$-\frac{1}{2} \langle x, x \rangle (X_1^2 + \dots + X_n^2) - 2x_1 X_1 - \dots - 2x_n X_n - 2 = 0$$

Se  $x=0$ ,  $Q$  é o ponto no infinito. Logo  $0 \rightarrow \infty$  pela transformação conforme associada a  $T$ . Se  $x \neq 0$ , vem:

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 + \frac{4x_1}{\langle x, x \rangle} X_1 + \dots + \frac{4x_n}{\langle x, x \rangle} X_n + \frac{4}{\langle x, x \rangle} = 0$$

ou

$$\left(X_1 + \frac{2x_1}{\langle x, x \rangle}\right)^2 + \dots + \left(X_n + \frac{2x_n}{\langle x, x \rangle}\right)^2 = 0$$

que é uma equação para o ponto  $\left(-\frac{2x_1}{\langle x, x \rangle}, \dots, -\frac{2x_n}{\langle x, x \rangle}\right)$

do  $\mathbb{R}^n$ . Observe que se tivéssemos usado  $\lambda P$ ,  $\lambda \neq 0$  para representar  $x$ , teríamos chegado à mesma imagem em  $\mathbb{R}^n$ , pois  $T$  é linear.

Finalmente, é fácil verificar que  $\infty \rightarrow 0$ . Portanto nossa transformação fica (denotamo-la por  $\hat{T}$ ):

$$\hat{T}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = \infty \\ \infty, & \text{se } x = 0 \\ -\frac{2}{\langle x, x \rangle} x, & \text{se } x \neq 0, \infty. \end{cases}$$

Trata-se do que se chama de *inversão* em relação à hipersfera  $\langle x, x \rangle = 2$ , só que com sinal trocado.

Podemos dar uma forma mais geral aos cálculos acima introduzindo certos objetos:

- o cone conforme  $K^{n+1}$  é o conjunto

$$K^{n+1} = \{P \in \mathbb{R}^{n+2} - \{0\} \mid P|P = 0\}$$



- a projeção  $\pi : K^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  definida por

$$\pi(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = \begin{cases} \infty, & \text{se } p_0 = 0 \\ \frac{1}{p_0} (p_1, \dots, p_n), & \text{se } p_0 \neq 0 \end{cases}$$

O cone  $K^{n+1}$  nada mais é que o conjunto das hiperesferas-ponto e a aplicação  $\pi$  leva cada uma delas no ponto que representa. É interessante notar que a forma  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^{n+2}$  induz uma estrutura semi-riemanniana em  $K^{n+1}$  e  $\pi$  relaciona esta estrutura com a métrica usual do  $\mathbb{R}^n$  pela fórmula

$$\langle \pi_{*p}(A), \pi_{*p}(B) \rangle = \frac{1}{p_0^2} A|B \quad (6)$$

válida para todo  $p \in K^{n+1}$  com  $p_0 \neq 0$  e  $A, B \in \mathbb{R}^{n+2}$  tangentes a  $K^{n+1}$  em  $p$ . Com isto temos o

Teorema 1.1. Seja  $T$  um operador linear do  $\mathbb{R}^{n+2}$  que conserva a forma  $\Phi$ . Então existe uma única  $\hat{T}: \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K^{n+1} & \xrightarrow{T} & K^{n+1} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} & \xrightarrow{\hat{T}} & \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \end{array}$$

comutativo. Ademais,  $\hat{T}$  é conforme em  $\mathbb{R}^n - \{\hat{T}^{-1}(\infty)\}$ .

Demonstração. Existência e unicidade para  $\hat{T}$  são simples, embora talvez um pouco trabalhosas. Para provar que  $\hat{T}$  é

conforme, usaremos o fato de que se  $p_0 \neq 0$  então  $\pi_{*p} : T_p K^{n+1} \rightarrow T_{\pi(p)} \mathbb{R}^n$  é sobrejetora.

Seja então  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $y = \hat{T}(x) \neq \infty$ .  
Seja  $p \in K^{n+1}$  tal que  $\pi(p) = x$ . Dados  $u, v \in T_x \mathbb{R}^n$ , existem  $A, B \in T_p K^{n+1}$  tais que

$$u = \pi_{*p}(A)$$

e 
$$v = \pi_{*p}(B)$$

Daí

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{**}(u), \hat{T}_{**}(v) \rangle &= \langle \hat{T}_{*\pi(p)}(\pi_{*p}(A)), \hat{T}_{*\pi(p)}(\pi_{*p}(B)) \rangle = \\ &= \langle (\hat{T} \circ \pi)_{*p}(A), (\hat{T} \circ \pi)_{*p}(B) \rangle = \langle (\pi \circ T)_{*p}(A), (\pi \circ T)_{*p}(B) \rangle = \\ &= \langle \pi_{*Q}(TA), \pi_{*Q}(TB) \rangle, \end{aligned}$$

onde  $Q = TP$ . Usando agora a relação (6), temos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{**}(u), \hat{T}_{**}(v) \rangle &= \langle \pi_{*Q}(TA), \pi_{*Q}(TB) \rangle = \\ &= \frac{1}{q_0^2} (TA|TB) = \frac{1}{q_0^2} A|B = \frac{p_0^2}{q_0^2} \frac{1}{p_0^2} A|B = \\ &= \frac{p_0^2}{q_0^2} \langle \pi_{*p}(A), \pi_{*p}(B) \rangle = \frac{p_0^2}{q_0^2} \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

cqd.

Corolário. A aplicação que leva  $T$  em  $\hat{T}$  é um epimorfismo entre o grupo que conserva  $\Phi$  e o grupo conforme do  $\mathbb{R}^n$ . O kernel deste morfismo é  $\{I, -I\}$ .

Demonstração. Propriedades elementares dos diagramas são suficientes para provar que  $\hat{T}\hat{S} = \hat{T}\hat{S}$ . Também é simples mostrar que  $\hat{I} =$  identidade, obtendo assim o resulta

do desejado. Para mostrar que a aplicação  $T \rightarrow \hat{T}$  é sobrejetora no grupo conforme fica um pouco mais difícil e deixaremos para o capítulo 2. Por enquanto vamos mostrar que se  $\hat{T} = \text{identidade}$  então  $T = I$  ou  $T = -I$ .

Suponha  $\hat{T} = \text{identidade}$ . Isto significa que para cada  $P \in K^{n+1}$  existe um escalar  $\lambda(P) \neq 0$  tal que

$$TP = \lambda(P)P.$$

Sejam então  $P, Q, R$  três vetores do  $K^{n+1}$  tais que  $P|Q \neq 0$ ,  $P|R \neq 0$ ,  $Q|R \neq 0$ . Então

$$P|Q = TP|TQ = \lambda(P)\lambda(Q) P|Q$$

donde

$$\lambda(P)\lambda(Q) = 1.$$

Analogamente se chega a  $\lambda(R)\lambda(Q) = 1$ , logo  $\lambda(P) = \lambda(R)$ . Como  $P$  e  $R$  são suficientemente genéricos concluímos que  $\lambda = \text{constante}$ , que pode ser apenas 1 ou -1. Por outro lado, qualquer hiperesfera pode ser escrita como soma de pontos, logo  $T = I$  ou  $T = -I$ .

c.q.d.

Antes de continuar gostaríamos de fazer um comentário sobre uma maneira diferente de abordar estes assuntos que evita ficarmos nos preocupando constantemente com o ponto no infinito. Esta maneira consiste em fazer toda a teoria sobre a esfera  $S^n$  em vez de  $\mathbb{R}^n$ . Isto

é válido pois conhecemos a projeção estereográfica, que é um "difeomorfismo" conforme entre  $S^n$  e  $|\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ . É claro, haverá certos detalhes a ajustar por exemplo, a equação (3) não servirá mais, a forma  $\phi$  tampouco, etc., mas não é difícil operar estas modificações. De fato, é este ponto de vista que é desenvolvido no capítulo 2. Fizemos assim porque realmente a esfera  $S^n$  é um modelo mais natural para o espaço conforme. Não obstante, durante todo o capítulo 1 continuaremos no  $|\mathbb{R}^n$ , porque este capítulo está destinado a servir como introdução mais ou menos informal e intuitiva, e nossa intuição funciona melhor no  $|\mathbb{R}^n$ .

### 3. SOMA DE HIPERESFERAS

Produzimos uma verdadeira "linearização" da geometria conforme: as hiperesferas foram transformadas em vetores e as transformações conformes viraram operadores lineares. Agora estamos interessados em determinar qual o significado geométrico (em  $|\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ) da estrutura linear das hiperesferas (em  $|\mathbb{R}^{n+2}$ ).

Em outras palavras: sejam A e B dois vetores em  $|\mathbb{R}^{n+2}$  que representam hiperesferas em  $|\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ , e  $\lambda$  um número real. Podemos formar os vetores  $A+B$  e  $\lambda A$  em  $|\mathbb{R}^{n+2}$  que também corresponderão a hiperesferas em  $|\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ . Qual a relação geométrica entre estas hiperesferas?

É claro que A e  $\lambda A$  representam o mesmo ente geométrico, desde que  $\lambda \neq 0$ . Já usamos isto anteriormente.

Quanto  $\tilde{a}$  soma, observe que ela não está bem definida, conforme ilustra o exemplo abaixo.

Exemplo:

Considere, em  $\mathbb{R}^3$ , a esfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

e o plano

$$x_3 = 0.$$

A eles correspondem os vetores de coordenadas:

$$\text{esfera: } A = (1, 0, 0, 0, 1/2)$$

$$\text{plano: } B = (0, 0, 0, 1, 0).$$

Se somarmos, obteremos

$$A + B = (1, 0, 0, 1, 1/2)$$

que corresponde  $\tilde{a}$  esfera

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

de centro  $(0, 0, -1/2)$  e raio  $\sqrt{5/2}$ .

Porém,  $-2B$  também corresponde ao plano e a soma então da  $\tilde{r}_a$

$$A - 2B = (1, 0, 0, -2, 1/2)$$

que representa a esfera

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 2$$

de centro  $(0, 0, 1)$  e raio  $\sqrt{2}$ .

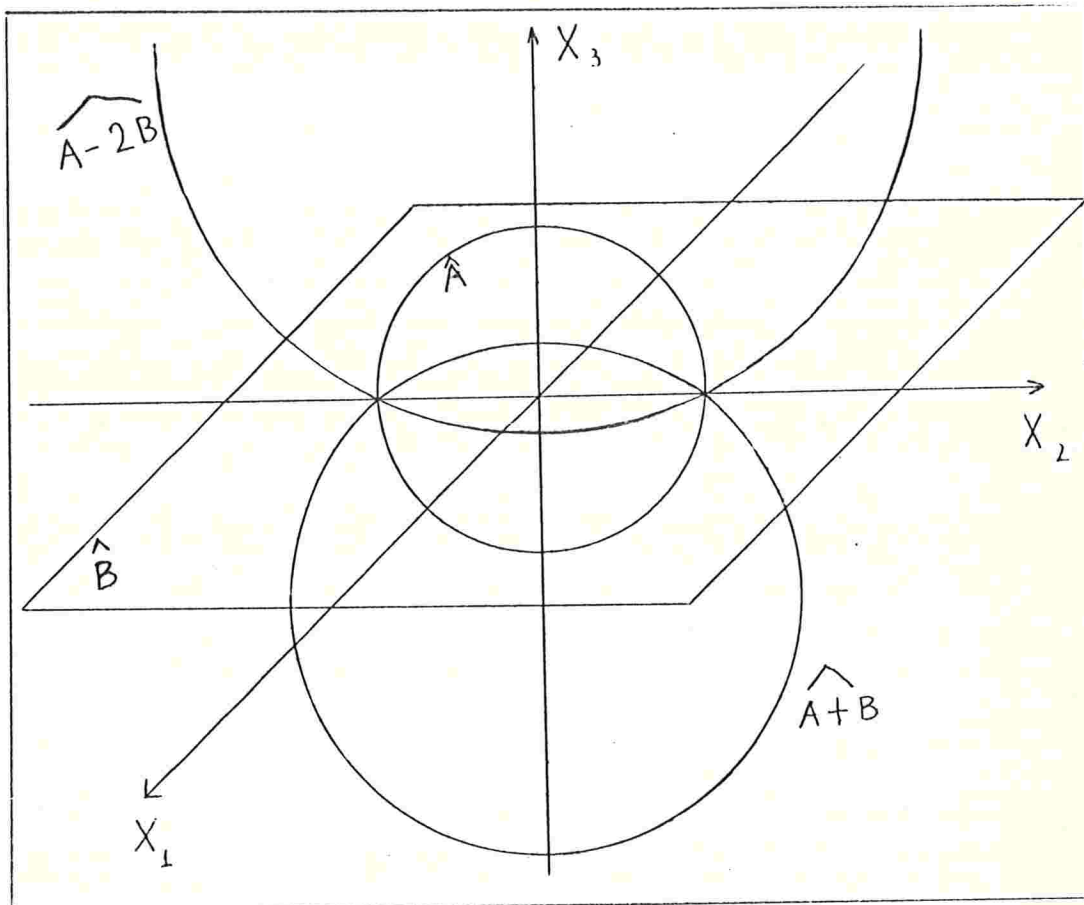


Fig. 1

Prosseguindo dessa maneira, se tomássemos todos os pares de vetores  $C, D$  do  $\mathbb{R}^{n+2}$  tais que  $\hat{C} = \hat{A}$  e  $\hat{D} = \hat{B}$  e calculássemos  $\hat{C} + \hat{D}$ , obteríamos todas as esferas do  $\mathbb{R}^3$  que passam pelo círculo  $x_1^2 + x_2^2 = 0, x_3 = 0$ , intersecção entre  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ . Veja a figura 1.

Portanto, quando temos duas hiperesferas geométricas, a sua "soma" não está bem definida, o resultado podendo ser qualquer elemento de um feixe a um parâmetro de hiperesferas, feixe este determinado pelas duas iniciais.

Vamos nos aprofundar um pouco no estudo destes feixes, que nos conduzirão à noção de variedade esférica.

Sejam então  $A$  e  $B$  dois vetores tais que  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são hiperesferas reais, isto é,  $A^2 > 0$  e  $B^2 > 0$ . Existem



três casos a considerar, conforme a posição relativa das hiperesferas:

- i) as hiperesferas são *disjuntas*, isto é, elas não se interceptam em  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ . Esta condição geométrica se expressa analiticamente pela relação

$$\left| \frac{A|B}{\sqrt{A^2} \sqrt{B^2}} \right| > 1$$

- ii) as hiperesferas são *tangentes*, isto é, elas se interceptam num único ponto. A expressão analítica deste fato é:

$$\left| \frac{A|B}{\sqrt{A^2} \sqrt{B^2}} \right| = 1$$

- iii) as hiperesferas são *secantes*, isto é, elas se interceptam em mais de um ponto. Neste caso a expressão é:

$$\left| \frac{A|B}{\sqrt{A^2} \sqrt{B^2}} \right| < 1.$$

Observe que a posição relativa entre duas hiperesferas é uma noção conforme, ou seja, invariante pelo grupo das transformações conformes. Cada um desses três casos dará origem a um tipo diferente de "feixe-soma", como veremos a seguir. O que chamamos de "feixe-soma" nada mais é senão o conjunto das hiperesferas geomê-

tricas com coordenadas da forma  $\lambda A + \mu B$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

i) hiperesferas disjuntas.

O feixe neste caso está constituído por hiperesferas reais, imaginárias e exatamente dois pontos (Fig. 2a). Se um destes pontos é o  $\infty$ , obtemos um feixe de hiperesferas concêntricas, onde o centro comum é o outro ponto do feixe (Fig. 2b).

ii) hiperesferas tangentes.

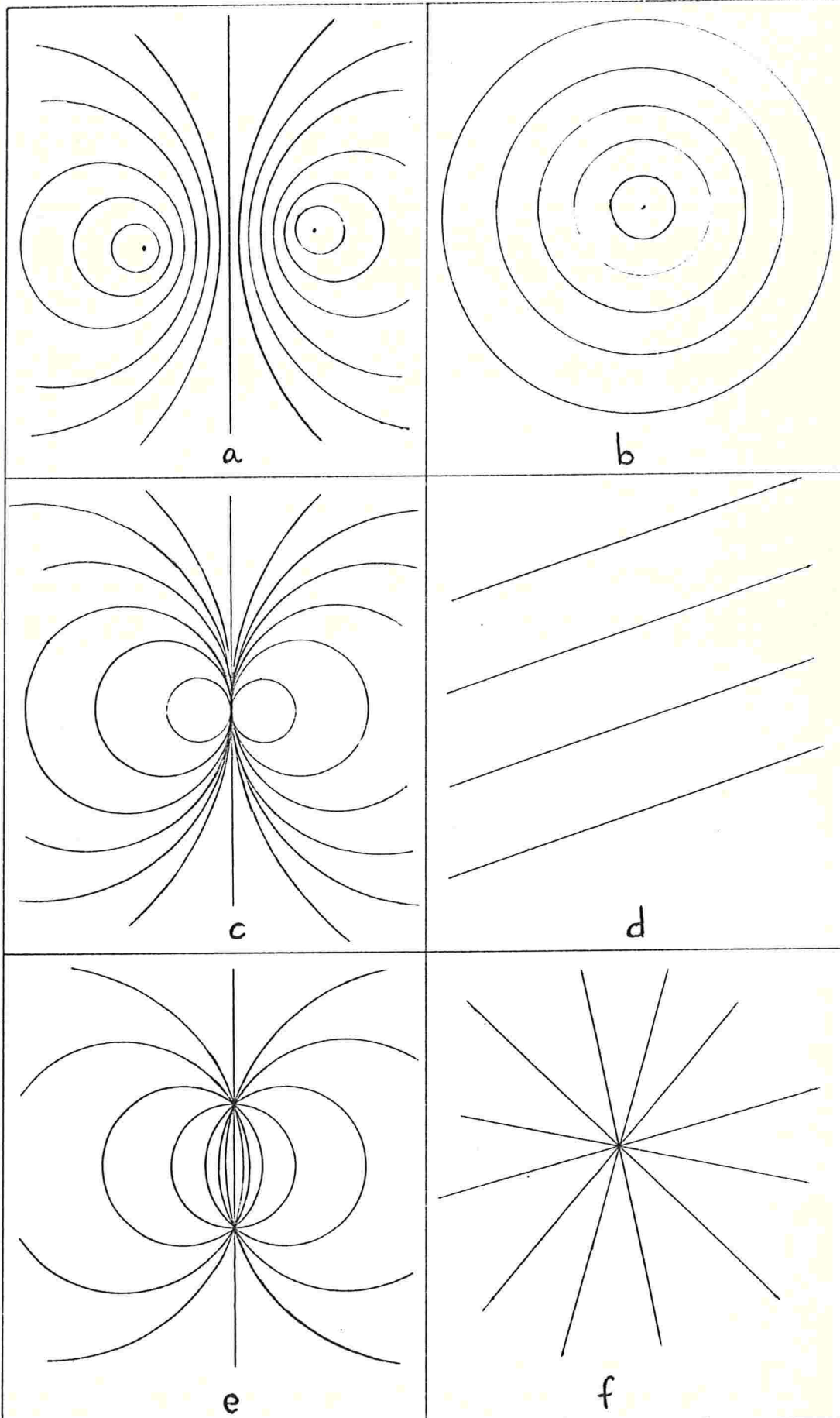
O feixe é constituído por todas as hiperesferas tangentes às duas originais, no mesmo ponto de tangência. O próprio ponto de tangência também faz parte do feixe como hiperesfera de raio nulo, e é o único ponto do feixe. Não há hiperesferas imaginárias (Fig. 2c). Se o ponto de tangência é o ponto no infinito, então o feixe é uma família de hiperplanos paralelos (Fig. 2d). Observe que hiperplanos paralelos, além de se encontrarem no  $\infty$ , são tangente entre si neste ponto!

iii) hiperesferas secantes

O feixe gerado por elas é constituído por todas as hiperesferas que contêm a intersecção das duas originais. Não há pontos nem hiperesferas imaginárias neste feixe (Fig. 2e). Se começarmos com dois hiperplanos não paralelos, então obtemos a família dos hiperplanos que contêm o  $n-2$ -plano de intersecção (Fig. 2f).

Na descrição acima demos ênfase à existência

Fig. 2



ou não de pontos e hiperesferas imaginárias nos feixes  $\lambda A + \mu B$ . Isto está claramente relacionado com a assinatura da restrição da forma  $\phi$  ao subespaço vetorial  $\text{ger}(A, B)$  de  $\mathbb{R}^{n+2}$  gerado por  $A$  e  $B$ .

Façamos uma breve pausa para definir com precisão nossa nomenclatura em relação às formas bilineares simétricas sobre espaços vetoriais reais. Dada uma forma bilinear  $f$  simétrica sobre  $V$ , espaço vetorial de dimensão finita  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ , definimos:

$$\begin{aligned} \text{nul}(f) &= \text{Índice de nulidade de } f = \\ &= \dim \{v \in V \mid f(v, u) = 0 \text{ para todo } u \in V\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pos}(f) &= \text{Índice de positividade de } f = \\ &= \text{dimensão do maior subespaço de } V \text{ onde a} \\ &\text{restrição de } f \text{ é definida positiva.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{neg}(f) &= \text{Índice de negatividade de } f = \text{dimensão do} \\ &\text{maior subespaço de } V \text{ onde a restrição de} \\ &f \text{ é definida negativa.} \end{aligned}$$

Temos sempre  $\text{nul}(f) + \text{pos}(f) + \text{neg}(f) = n$ . Por exemplo, considerando a nossa  $\phi$  em  $\mathbb{R}^{n+2}$  temos:

$$\text{nul}(\phi) = 0, \text{ pos}(\phi) = n+1, \text{ neg}(\phi) = 1$$

Definimos também a *assinatura* de  $f$  como sendo uma seqüência de  $n$  números, sendo os  $\text{pos}(f)$  primeiros iguais a 1, os  $\text{neg}(f)$  seguintes iguais a -1 e os  $\text{nul}(f)$

restantes iguais a 0. A assinatura pode ser imaginada como a diagonal da matriz de  $f$  numa base convenientemente escolhida (ortonormal).

Por exemplo, a assinatura de  $\Phi$  é  $(1,1,\dots,1,-1)$ .

Voltando agora aos feixes, observamos que a assinatura da restrição de  $\Phi$  a  $\text{ger}(A,B)$  é:

no caso i,  $(1,-1)$

no caso ii,  $(1,0)$

no caso iii,  $(1,1)$

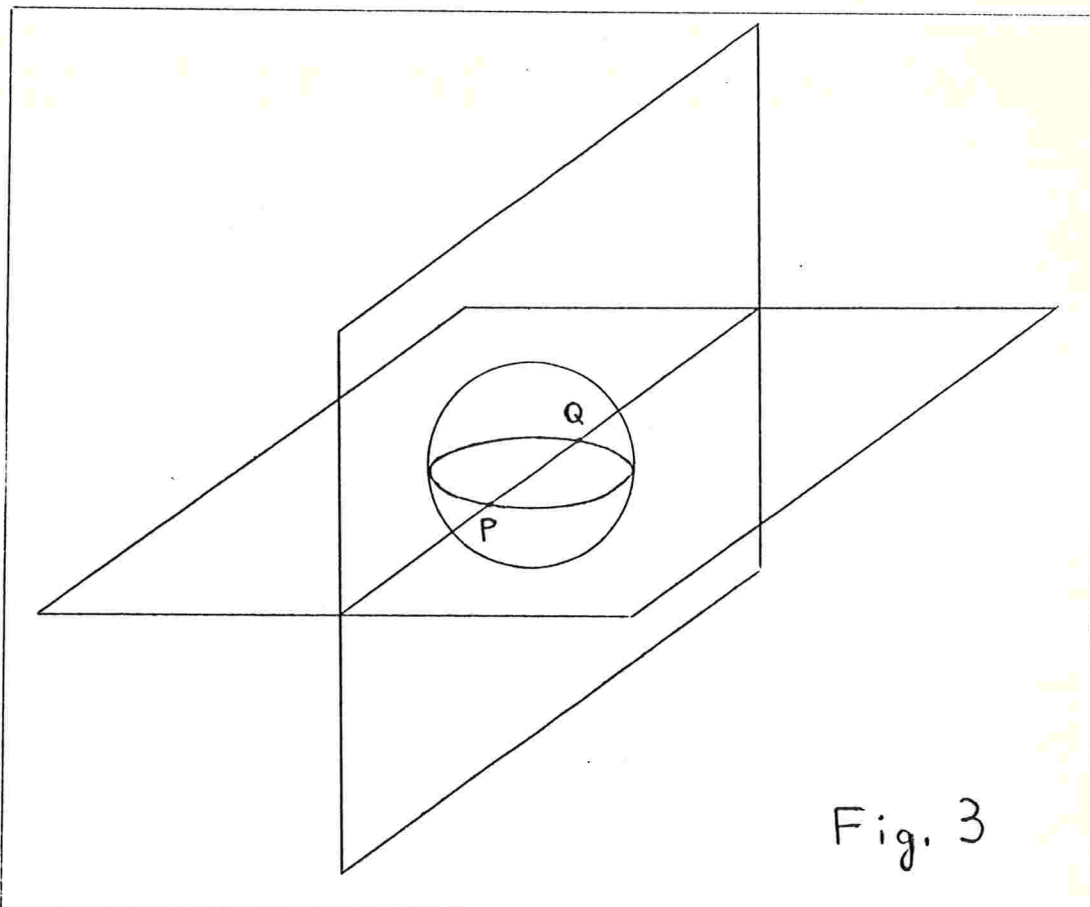
Estas são as únicas assinaturas possíveis para  $\Phi$  num espaço bidimensional. Como vimos, apenas no caso (iii) obtivemos uma intersecção que resultou numa variedade  $n-2$  dimensional. Na geometria euclidiana, a intersecção de  $k$  hiperplanos dá origem a um plano  $n-k$  dimensional, desde que esteja satisfeita uma certa condição de independência linear entre esses hiperplanos. Na geometria conforme acontece algo análogo, só que além da independência linear é necessário que as hiperesferas gerem um subespaço sem pontos nem hiperesferas imaginárias. Isto motiva nossa próxima definição.

Definição: Uma *variedade esférica* de dimensão  $k$  em  $|\mathbb{R}^n_{u\{\infty\}}$  ( $0 \leq k \leq n$ ) é a intersecção entre  $n-k$  hiperesferas  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_{n-k}$ , onde  $A_1, A_2, \dots, A_{n-k}$  são vetores linearmente independentes e tais que a restrição de  $\Phi$  ao subespaço  $\text{ger}(A_1, A_2, \dots, A_{n-k})$  é positiva definida.



Exemplos:

- 1) Uma variedade esférica de dimensão  $n$  pela definição seria a intersecção de zero hiperesferas. Convencionaremos que tal intersecção é o próprio  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ .
- 2) As variedades esféricas de dimensão  $n-1$  são as próprias hiperesferas.
- 3) Em  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ , as variedades esféricas unidimensionais são as retas (munidas do  $\infty$ ) e os círculos.
- 4) Considere as três hiperesferas de  $\mathbb{R}^3$  da Fig. 3.



Sua intersecção resulta nos pontos P e Q. Portanto, esta variedade esférica de dimensão zero é constituída de 2 pontos. Isto é um fato geral, ou seja, a intersecção



de  $n$  hiperesferas do  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  nas condições acima é formada por 2 pontos.

Assim, a cada variedade esférica de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  está associado um subespaço  $W$  de dimensão  $n-k$  em  $\mathbb{R}^{n+2}$  onde  $\Phi$  é positiva definida. Chamaremos  $W$  de *espaço das equações* desta variedade esférica e denotaremos a própria variedade por  $\hat{W}$ . O subespaço ortogonal a  $W$  em relação a  $\Phi$  é dado por

$$W^\perp = \{A \in \mathbb{R}^{n+2} \mid A|B = 0 \text{ para todo } B \in W\}$$

e será chamado de *espaço dos pontos* de  $\hat{W}$ , pois se  $P \in W^\perp$ ,  $P \neq 0$  e  $P^2 = 0$ , então  $\hat{P} \in \hat{W}$ . Os subespaços  $W$  e  $W^\perp$  são suplementares, donde  $\dim W^\perp = k+2$  e a assinatura da restrição de  $\Phi$  a  $W^\perp$  é  $(1, 1, \dots, 1, -1)$ . Observe-se que conhecendo  $W^\perp$  podemos obter  $\hat{W}$  fazendo

$$\hat{W} = \pi(W^\perp \cap K^{n+1})$$

Isto explica porque  $W^\perp$  tem duas dimensões a mais que  $\hat{W}$ . A primeira é perdida na intersecção com o cone, a outra aplicando-se  $\pi$ , que no fundo é uma passagem ao quociente pela relação  $P \sim \lambda P$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Observe que se  $P \neq 0$ ,  $P^2 = 0$  então  $\hat{P}$  é um ponto e para toda transformação conforme  $T$  vale

$$\hat{T}(\hat{P}) = \widehat{T(P)}$$

Analogamente, se  $\hat{A}$  é hiperesfera,

$$\widehat{T}(\widehat{A}) = T(\widehat{A})$$

e se  $\widehat{W}$  é variedade esférica

$$\widehat{T}(\widehat{W}) = T(\widehat{W})$$

Para finalizar, gostaríamos de dar uma interpretação geométrica para os subespaços  $W$  de  $\mathbb{R}^{n+2}$ ,  $W \neq 0$  tais que a restrição de  $\phi$  neles é degenerada, ou seja, tem assinatura  $(1, 1, \dots, 1, 0)$ . A dimensão destes subespaços satisfaz  $1 \leq \dim W \leq n+1$ , logo podemos escrevê-la como  $\dim W = k+1$ , sendo que  $0 \leq k \leq n$ . Existe um único ponto neste feixe, que corresponde à direção nula. Toda outra hiperesfera do feixe passa por este ponto, que chamaremos de  $P$ . Cada suplementar de  $\text{ger}(P)$  em  $W$  dá origem a uma variedade esférica  $n-k$  dimensional, sendo que todas estas variedades são tangentes entre si em  $P$ . O feixe ortogonal  $W^\perp$  tem dimensão  $n-k+1$ , a restrição de  $\phi$  em  $W^\perp$  é degenerada também e temos

$$W \cap W^\perp = \text{ger}(P)$$

ou seja, o ponto  $P$  é ponto comum destes feixes. Cada suplementar de  $\text{ger}(P)$  em  $W^\perp$  dá origem a uma variedade esférica  $k$  dimensional, sendo todas elas tangentes entre si em  $P$  e normais às variedades  $n-k$  dimensionais que escrevemos anteriormente.

#### 4. O GRUPO CONFORME

Até agora falamos bastante sobre transforma-

ções conformes, mas concretamente vimos apenas um exemplo de uma tal transformação. Esta secção está destinada a preencher esta lacuna através de um estudo mais aprofundado de algumas transformações conformes particulares e do grupo conforme como um todo.

Começamos observando que, de acordo com o corolário do teorema 1.1, não é necessário considerar todas as aplicações lineares do  $\mathbb{R}^{n+2}$  que conservam  $\phi$  para obter as transformações conformes do  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  pelo homomorfismo  $T \rightarrow \hat{T}$ . Basta escolher metade delas, isto é, entre cada par  $\{T, -T\}$  basta escolher uma. A seguir apresentamos nossa maneira de fazer esta escolha.

O cone conforme  $K^{n+1}$  definido na secção 2 não é conexo (como espaço topológico). Ele possui duas componentes conexas, a saber

$$K_+ = \{P \in K^{n+1} \mid p_0 > p_{n+1}\}$$

e

$$K_- = \{P \in K^{n+1} \mid p_0 < p_{n+1}\}.$$

Dada uma transformação linear  $T$  do  $\mathbb{R}^{n+2}$  que conserva  $\phi$ , sabemos que  $T(K^{n+1}) = K^{n+1}$ , mas não sabemos o que ela faz com cada componente. Claro, sendo contínua ela deve levar componente sobre componente, ou seja, existem duas possibilidades:

- 1)  $T(K_+) = K_+$  e  $T(K_-) = K_-$
- 2)  $T(K_+) = K_-$  e  $T(K_-) = K_+$ .

Podemos então dividir o conjunto dessas transformações em duas partes de acordo com estas possibilidades. Observe que  $P \in K_+$  se e somente se  $-P \in K_-$ , logo nesta divisão  $T$  e  $-T$  ficam em classes distintas. Por fim, a 1ª possibilidade deve ser escolhida se temos em mente a formação de um grupo.

Definição: Chamaremos de *grupo conforme* de dimensão  $n$ ,  $n \geq 3$ , ao

$$GC(n) = \{T \in GL(n+2, \mathbb{R}) \mid T^t \Phi T = \Phi \text{ e } T(K_+) = K_+\}.$$

Exemplos:

- 1) A aplicação que estudamos na secção 2, dada pela matriz  $T = \Phi$  não pertence ao grupo conforme recém-definido acima. O ponto

$$P = (1, 0, \dots, 0)$$

é levado em

$$TP = (0, 0, \dots, 1),$$

ou seja,  $P \in K_+$  enquanto que  $TP \in K_-$ .

- 2) Para que uma  $T$  que conserva  $\Phi$  satisfaça  $T(K_+) = K_+$  basta que *um* ponto  $P$  do cone vá para sua própria componente conexa pela  $T$ . A continuidade garante que todos os outros pontos farão o mesmo.

Assim, dada  $T = (t_{ij})_{(n+2) \times (n+2)}$  que satisfaz  $T^t \Phi T = \Phi$ ,

basta que, por exemplo, o ponto  $P = (1, 0, \dots, 0)$  vá para sua componente  $K_+$ . Isto significa  $t_{11} > t_{n+2,1}$ .

Vamos agora introduzir um tipo especial de transformações conformes, as mais simples depois da identidade.

Seja  $H \in \mathbb{R}^{n+2}$  tal que  $H^2 \neq 0$ . Defina

$$S : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2},$$

$$S(A) = A - 2 \frac{A|H}{H^2} H \quad (7)$$

Esta aplicação conserva  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} S(A)|S(B) &= \left( A - 2 \frac{A|H}{H^2} \cdot H \right) | \left( B - 2 \frac{B|H}{H^2} \cdot H \right) = \\ &= A|B - 2 \frac{B|H}{H^2} \cdot A|H - 2 \frac{A|H}{H^2} \cdot B|H + 4 \cdot \frac{(A|H)(B|H)}{(H^2)^2} H^2 = \\ &= A|B. \end{aligned}$$

Vejamos se  $S$  conserva as componentes do cone, calculando a imagem de  $P = (1, 0, \dots, 0) \in K_+$ :

$$\begin{aligned} S(P) &= (1, 0, \dots, 0) - 2 \frac{h_{n+1}}{H^2} (h_0, h_1, \dots, h_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{H^2} (h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2, -2h_1 h_{n+1}, \dots, -2h_n h_{n+1}, -2h_{n+1}^2) \end{aligned}$$

Observe que  $S(P) \in K_+$  se e somente se  $H^2 > 0$ . Note ainda que se trocarmos  $H$  por  $\lambda H$  ( $\lambda \neq 0$ ) na definição (7) obteremos a mesma  $S$ , motivo pelo qual suporemos sempre  $H^2 = 1$  quando lidarmos com aplicações do tipo (7) que estão em  $GC(n)$ , para facilitar os cálculos.



Nosso próximo passo será determinar o efeito geométrico em  $\mathbb{R}^n$  destas aplicações. Para tanto usaremos a técnica de "descer pela  $\pi$ " e examinaremos separadamente os casos  $h_0 = 0$  e  $h_0 \neq 0$ .

1º caso:  $h_0 = 0$  ( $\hat{H}$  é hiperplano)

Então  $H^2 = 1$  implica  $h_1^2 + \dots + h_n^2 = 0$ . Chamaremos de  $h$  ao vetor  $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ , que é unitário e normal ao hiperplano  $\hat{H}$ .

Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  o ponto  $P = (1, x_1, \dots, x_n, -\frac{1}{2}\langle x, x \rangle)$  é tal que  $\pi(P) = x$ . Usaremos então a relação

$$\hat{S}(\pi(P)) = \pi(S(P))$$

para determinar  $\hat{S}(x)$ :

$$\begin{aligned} S(P) &= (1, x_1, \dots, x_n, -\frac{1}{2}\langle x, x \rangle) - 2(P|H)(0, h_1, \dots, h_{n+1}) = \\ &= (1, x_1, \dots, x_n, -\frac{1}{2}\langle x, x \rangle) - 2(\langle x, h \rangle + h_{n+1})(0, h_1, \dots, h_{n+1}). \end{aligned}$$

$$\hat{S}(x) = \pi(S(P)) = x - 2(\langle x, h \rangle + h_{n+1})h$$

A expressão  $\langle x, h \rangle + h_{n+1}$  é a distância do ponto  $x$  ao hiperplano  $\hat{H}$ , com sinal que indica de que lado do hiperplano se encontra  $x$  sinal positivo significa lado apontado por  $h$ ; sinal negativo, lado oposto.

Portanto  $\hat{S}$  nada mais é senão a *reflexão* do  $\mathbb{R}^n$  em relação a  $\hat{H}$  (Fig. 4).

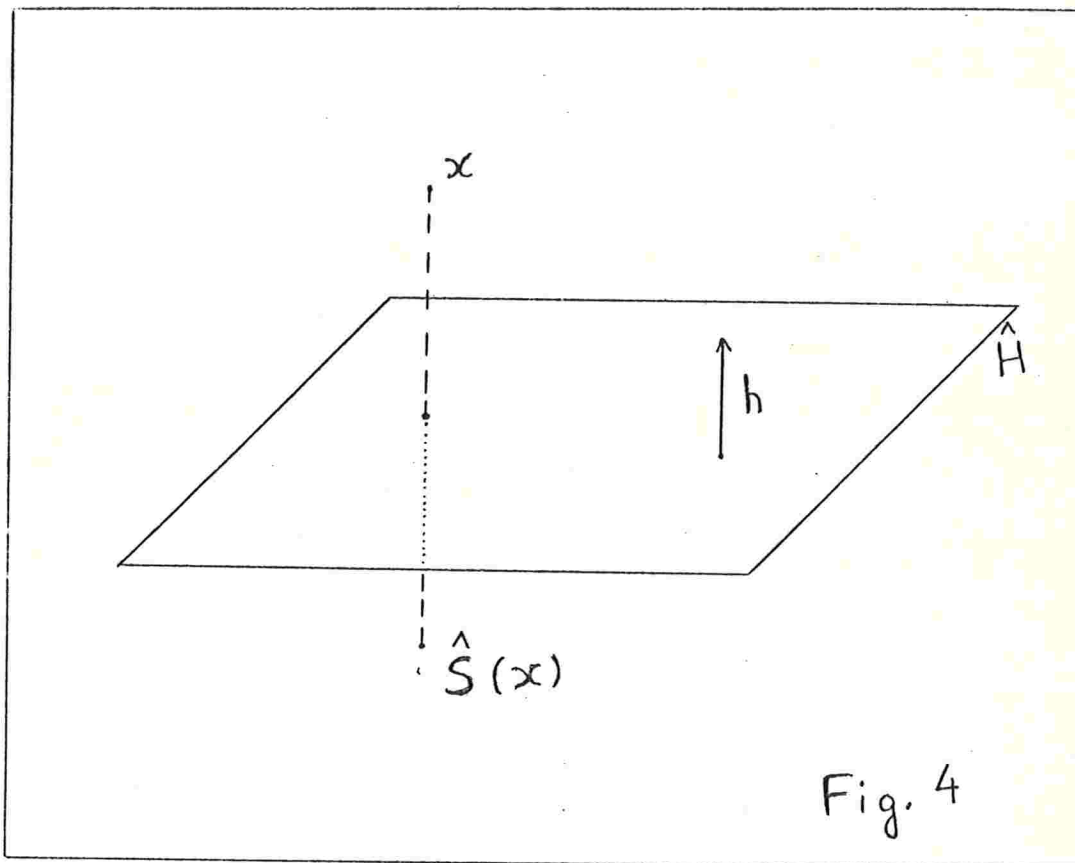


Fig. 4

Verifica-se facilmente que  $\hat{S}(\infty) = \infty$ . Isto esta de acordo com o fato de  $\hat{S}$  fixar todos os pontos de  $\hat{H}$ .

2º caso:  $h_0 \neq 0$  ( $\hat{H}$  é uma hiperesfera).

Trocando  $H$  por  $-H$  se necessário podemos supor  $h_0 > 0$ . Como  $H^2 = 1$ , a hiperesfera representada tem centro

$$c = \frac{1}{h_0}(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$$

e raio

$$r = \frac{1}{h_0} > 0.$$

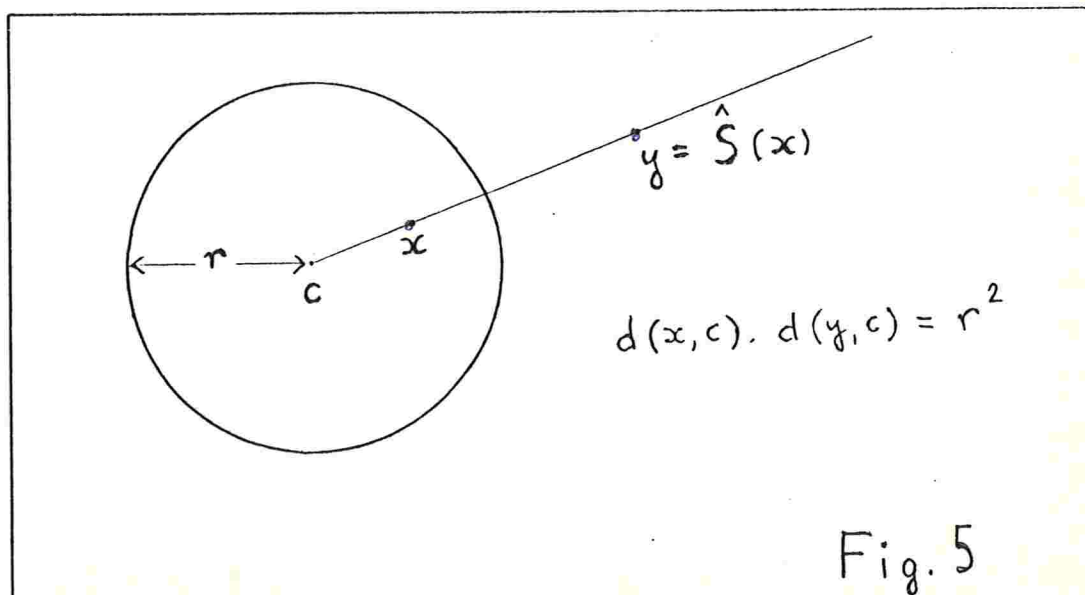
Procedendo analogamente ao 1º caso, vem:

$$P = (1, x_1, \dots, x_n, -\frac{1}{2} \langle x, x \rangle)$$

$$\begin{aligned}
S(P) &= (1, x_1, \dots, x_n, -\frac{1}{2} \langle x, x \rangle) - 2 (P|H) H = \\
&= (1, x_1, \dots, x_n, -\frac{1}{2} \langle x, x \rangle) - 2(h_1 x_1 + \dots + h_n x_n - \frac{h_0}{2} \langle x, x \rangle + h_{n+1}) H = \\
&= (1, x_1, \dots, x_n, -\frac{1}{2} \langle x, x \rangle) - 2(\frac{1}{r} \langle c, x \rangle - \frac{1}{2r} \langle x, x \rangle + \frac{r}{2} - \frac{1}{2r} \langle c, c \rangle) H = \\
&= (1, x_1, \dots, x_n, -\frac{1}{2} \langle x, x \rangle) + \frac{1}{r} (\langle x-c, x-c \rangle - r^2) H = \\
&= (\frac{\langle x-c, x-c \rangle}{r^2}, x_1 + \frac{h_1}{r} (\langle x-c, x-c \rangle - r^2), \dots, x_n + \frac{h_n}{r} (\langle x-c, x-c \rangle - r^2), *).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}(x) &= \pi(S(P)) = \frac{r^2}{\langle x-c, x-c \rangle} [x + \frac{1}{r^2} (\langle x-c, x-c \rangle - r^2) c] = \\
&= c + \frac{r^2}{\langle x-c, x-c \rangle} (x-c)
\end{aligned}$$

A fórmula acima não se aplica para  $x = c$ . Verifica-se porém diretamente que  $\hat{S}(c) = \infty$  e  $\hat{S}(\infty) = c$ . O leitor experimentado em geometria conforme reconhecerá na  $\hat{S}$  a *inversão* pela hiperesfera  $\hat{H}$ . Ela leva cada ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq c$ , no ponto  $y$  tal que  $x$  e  $y$  estão na mesma semi-reta de origem  $c$  e o produto das distâncias de  $x$  e  $y$  a  $c$  é  $r^2$  (Fig. 5)



Chamaremos de *inversões conformes* ou simplesmente *inversões* a estas transformações, mesmo as do 1º caso. As inversões são interessantes devido aos seguintes fatos:

- a) elas são involutivas, isto é,  $S^2 = I$ .
- b) elas formam uma classe de conjugação do grupo  $GC(n)$ .
- c) elas geram o grupo  $GC(n)$ .

A primeira dessas asserções é bem simples, um cálculo direto basta para sua verificação. A segunda é objeto do nosso próximo teorema. A terceira é demonstrada no teorema 1.4, que faz uso do teorema 1.3.

Teorema 1.2. As inversões formam uma classe de conjugação de  $GC(n)$ .

Demonstração. Seja  $H$  tal que  $H^2 = 1$ , e seja  $S$  a inversão em relação a  $\hat{H}$ . Se  $T \in GC(n)$ , temos:

$$\begin{aligned} TST^{-1}(A) &= TS(T^{-1}(A)) = T(T^{-1}(A) - 2T^{-1}(A)|H.H) = \\ &= A - 2T^{-1}(A)|H.T(H) = A - 2A|T(H).T(H). \end{aligned}$$

Como  $T \in GC(n)$ , temos  $[T(H)]^2 = 1$  e pela fórmula acima concluímos que  $TST^{-1}$  é a inversão em relação a  $\widehat{T(H)}$ .

Reciprocamente, dadas duas hiperesferas  $\hat{H}$  e  $\hat{M}$  com  $H_2 = M_2 = 1$ , vamos mostrar que as inversões correspondentes são conjugadas. Pelo feito acima basta mos-

trar que existe  $T \in GC(n)$  tal que  $T(H) = M$  ou  $T(H) = -M$ .

Começamos observando que pelo menos um dos vetores  $H + M$  e  $H - M$  tem quadrado não nulo. Pois se

$$(H + M)^2 = (H - M)^2 = 0$$

teríamos

$$H^2 + 2H|M + M^2 = H^2 - 2H|M + M^2 = 0$$

donde

$$1 + H|M = 1 - H|M = 0$$

ou seja,  $H|M = 1 = -1$ , absurdo.

Trocando  $M$  por  $-M$  se necessário, podemos supor então que  $(H - M)^2 \neq 0$ . Então  $H - M$  dá origem a uma transformação do tipo (7), que chamaremos de  $T$ . Temos

$$\begin{aligned} T(H) &= H - 2 \frac{H|(H-M)}{(H-M)^2} (H-M) = \\ &= H - 2 \frac{1-H|M}{2(1-H|M)} (H-M) = H - (H-M) = M. \end{aligned}$$

O único problema é que pode ser que  $T \notin GC(n)$ , se  $(H - M)^2 < 0$ . Mas neste caso  $-T \in GC(n)$  e como  $(-T)(H) = -M$ , esta  $-T$  servirá aos nossos propósitos.

c.q.d.



Teorema 1.3. Sejam  $P, Q \in K^{n+1}$  linearmente independentes.  
Então  $P$  e  $Q$  estão na mesma componente conexa do cone se e somente se  $P|Q < 0$ .

Demonstração. ( $\implies$ ) Vamos provar que se  $P$  e  $Q$  estão na mesma componente então  $P|Q < 0$ .

Suponha que  $P, Q \in K_+$ . Se  $P, Q \in K_-$  basta raciocinar sobre  $-P$  e  $-Q$ . Temos:

$$p_1^2 + \dots + p_n^2 = -2p_0p_{n+1} \quad (8)$$

$$q_1^2 + \dots + q_n^2 = -2q_0q_{n+1} \quad (9)$$

$$p_0 > p_{n+1}, \quad q_0 > q_{n+1} \quad (10)$$

Pelas relações (8) e (9) vemos que  $p_0$  e  $p_{n+1}$  devem ter sinais contrários, da mesma forma que  $q_0$  e  $q_{n+1}$ . Levando em conta (10), isto acarreta

$$p_0 \geq 0, p_{n+1} \leq 0; \quad q_0 \geq 0, q_{n+1} \leq 0.$$

Agora vem

$$\begin{aligned} P|Q &= p_1q_1 + \dots + p_nq_n + p_0q_{n+1} + q_0p_{n+1} \leq \\ &\leq \sqrt{p_1^2 + \dots + p_n^2} \cdot \sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2} + p_0q_{n+1} + q_0p_{n+1} = \\ &= 2\sqrt{p_0p_{n+1}q_0q_{n+1}} + p_0q_{n+1} + q_0p_{n+1} = \\ &= -(\sqrt{-p_0q_{n+1}} - \sqrt{-q_0p_{n+1}})^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Observe que devido a (11) temos  $p_0 q_{n+1} \leq 0$  e  $q_0 p_{n+1} \leq 0$ .

Não pode ser  $P|Q = 0$ , senão teríamos  $P|P = Q|Q = P|Q = 0$ , ou seja, a restrição da forma lorentziana  $\Phi$  ao subespaço bidimensional  $\text{ger}(P, Q)$  teria assinatura  $(0, 0)$ , o que é impossível.

Logo, temos  $P|Q < 0$ .

Reciprocamente, suponha que  $P, Q \in K^{n+1}$  são l.i. e  $P|Q < 0$ . Vamos mostrar que  $P$  e  $Q$  estão na mesma componente. Sem perda de generalidade, suponha  $P \in K_+$  (senão raciocine sobre  $-P$  e  $-Q$ ). Se, por absurdo,  $Q \in K_-$ , valem as relações (8) (9) e mais

$$p_0 > p_{n+1}, \quad q_0 < q_{n+1} \quad (10')$$

donde

$$p_0 \geq 0, \quad p_{n+1} \leq 0; \quad q_0 \leq 0, \quad q_{n+1} \geq 0. \quad (11')$$

Daí

$$\begin{aligned} P|Q &= p_1 q_1 + \dots + p_n q_n + p_0 q_{n+1} + q_0 p_{n+1} \geq \\ &\geq -\sqrt{p_1^2 + \dots + p_n^2} \sqrt{q^2 + \dots + q_n^2} + \\ &+ p_0 q_{n+1} + q_0 p_{n+1} = -2\sqrt{p_0 p_{n+1} q_0 q_{n+1}} + \\ &+ p_0 q_{n+1} + q_0 p_{n+1} = (\sqrt{p_0 q_{n+1}} - \sqrt{q_0 p_{n+1}})^2 \geq 0, \end{aligned}$$

contrariando as hipóteses. Logo,  $Q \in K_+$ , a mesma componente de  $P$ .

c.q.d.

Corolário. Se  $T \in GL(n+2, \mathbb{R})$  é tal que  $T^t \Phi T = \Phi$ , então  $T \in GC(n)$  se e somente se  $P | T(P) \leq 0$  para todo  $P \in K^{n+1}$ .

Teorema 1.4. As inversões geram o grupo  $GC(n)$ .

Demonstração. Basta mostrar que todo  $T \in GC(n)$  é produto de inversões. Faremos indução em  $K = \dim \text{im}(T-I)$ .

$K = 0$ .

Neste caso obrigatoriamente  $T=I$  e o teorema vale pois a identidade é produto de zero inversões.

$K > 0$ .

Seja  $P$  um ponto ( $P^2=0$ ) tal que  $P$  e  $T(P)$  são l.i. Tal ponto existe pois senão  $T(P) = \lambda P$  para todo  $P \in K^{n+1}$ , donde  $\hat{T} = \text{id.}$ , donde  $T = I$  pelo corolário do Teorema 1.1, o que é absurdo já que  $K > 0$ . Fazendo  $H=T(P)-P$ , temos

$$H^2 = [T(P)]^2 - 2T(P)|P - P^2 = -2T(P)|P > 0$$

pelo teorema 1.3, pois  $T$  conserva componentes. Sem perda de generalidade podemos supor  $H^2=1$ . Seja  $S$  a inversão em relação a  $\hat{H}$ . Vamos provar que  $\dim \text{im}(ST-I) < K$ .

Para isto basta mostrar que  $\text{im}(ST-I) \subset \text{im}(T-I)$  e

$\text{im}(ST-I) \neq \text{im}(T-I)$ :

a)  $\text{im}(ST-I) \subset \text{im}(T-I)$

Seja  $Y \in \text{im}(ST-I)$ ; existe  $A \in \mathbb{R}^{n+2}$  com  $Y = ST(A) - A$ . Um cálculo simples (embora talvez um pouco trabalhoso) mostra que

$$(T-I)(A - 2(T(A)|H).P) = Y,$$

ou seja,  $Y \in \text{im}(T-I)$ .

b)  $\text{im}(ST-I) \neq \text{im}(T-I)$

O vetor  $H = T(P) - P$  claramente pertence a  $\text{im}(T-I)$ . Contudo, a suposição de que existe  $A \in \mathbb{R}^{n+2}$  tal que  $ST(A) - A = H$  levaria à conclusão de que  $P|H = 0$  (basta fazer alguns cálculos), que é absurdo pois  $1 = H^2 = -2 P|H$ .

Desse modo podemos aplicar a hipótese de indução a  $ST$ . Como  $S^2 = I$ , vem  $T = S(ST)$ , ou seja,  $T$  é produto de inversões.

c.q.d.

O grupo  $GC(n)$  não é conexo, ele possui na verdade duas componentes conexas. Uma delas contém a identidade, forma um grupo, mas as inversões estão todas na outra componente, como veremos abaixo. Torna-se necessário determinar um outro sistema de geradores para a componente conexa de  $I$  em  $GC(n)$ .

Seja  $S$  uma inversão e  $H \in \mathbb{R}^{n+2}$ ,  $H^2 = 1$ , a hipersfera que lhe deu origem. A estrutura de  $S$  como aplicação linear é bastante simples: ela é diagonalizável,

seus auto-valores são  $-1$  e  $1$  com multiplicidades  $1$  e  $n+1$  respectivamente. Os auto-espacos correspondentes são:

auto-valor  $-1$ :  $\text{ger}(H)$

auto-valor  $1$ :  $\text{ger}(H)^\perp = \{A \in \mathbb{R}^{n+2} \mid A|H = 0\}$

Em particular, temos  $\det S = -1$ . É interessante observar as conseqüências geométricas destes fatos pois um auto-vetor de  $S$  representa geometricamente uma hiperesfera que é fixada por  $\hat{S}$ , no sentido de que cada ponto dela é levado nela mesma. Temos então que  $\hat{S}$  fixa a hiperesfera  $\hat{H}$  bem como todas as hiperesferas ortogonais a  $\hat{H}$ . Outra conseqüência é que se duas hiperesferas são ortogonais então as inversões correspondentes comutam (veja demonstração do teorema 1.2).

Definimos

$$\text{SGC}(n) = \{T \in \text{GC}(n) \mid \det T = +1\}.$$

Esta é a componente conexa de  $I$  em  $\text{GC}(n)$ .

Obviamente, trata-se de um grupo. As transformações que fazem parte desta componente são produtos de um número *par* de inversões; portanto, um sistema de geradores é o conjunto de todas aquelas transformações que são produto de exatamente *duas* inversões distintas. De certa forma, estas "geradoras" são as transformações conformes mais simples depois de  $I$  e das inversões. Vejamos qual é o seu efeito geométrico. Para isso é conveniente dividir o estudo em três casos, de acordo com a posição relativa das hiperesferas que deram origem às duas inversões



que serão multiplicadas.

Sejam então  $H, M \in \mathbb{R}^{n+2}$  dois vetores l.i., com  $H^2 = M^2 = 1$ . Chamemos de  $S$  a inversão por  $\hat{H}$  e de  $T$  a inversão por  $\hat{M}$ . Seja também  $U = TS$  a aplicação que nos interessa. Usaremos a palavra *circulo* como sinônimo de variedade esférica unidimensional.

Temos 3 casos:

1)  $\hat{H}$  e  $\hat{M}$  *externas*.

Neste caso a assinatura de  $\Phi$  restrita a  $W = \text{ger}(H, M)$  é  $(1, -1)$  e há exatamente dois pontos geométricos neste subespaço, que serão denominados  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  na seqüência. Alguns cálculos simples mostram que tanto  $T$  como  $S$  permutam (geometricamente)  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$ , logo existem  $\lambda, \mu > 0$  tais que

$$U(P) = \mu P$$

$$U(Q) = \lambda Q.$$

Por outro lado,  $\text{Ker}(TS-I) = \text{Ker}(T-I) \cap \text{Ker}(S-I) = W^\perp$ , isto é,  $U$  é a transformação idêntica quando restrita a  $W^\perp$ . Como  $\det U = 1$ ,  $U$  restrita a  $W$  deve ter determinante  $1$ , donde  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ . Ademais, não pode ser  $\lambda = 1$  pois  $U \neq I$ . Sem perda de generalidade podemos supor  $P|Q = 1$  e  $\lambda > 1$ . Sabendo que para toda transformação conforme vale  $\text{im}(U-I) = \text{Ker}(U-I)^\perp$ , temos  $\text{im}(U-I) = W$ , ou seja, para todo  $X \in \mathbb{R}^{n+2}$  podemos escrever

$$U(X) = X + a(X)P + b(X)Q$$

para certos funcionais lineares  $a$  e  $b$ . Para descobri-los impomos  $U(X)|U(P) = X|P$  e  $U(X)|U(Q) = X|Q$ , obtendo

$$a(X) = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)X|Q \quad \text{e} \quad b(X) = (\lambda - 1) X|P$$

donde

$$U(X) = X + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) X|Q \cdot P + (\lambda - 1) X|P \cdot Q \quad (12)$$

Chamaremos uma tal transformação de *homotetia conforme* de origem  $P$ , destino  $Q$  e razão  $\lambda$ . Basta considerar as homotetias conformes de razão  $\lambda > 1$  pois as outras podem ser obtidas permutando origem e destino. O nome é apropriado pois se  $Q$  é o ponto no infinito e  $P$  é tal que  $\hat{P} = p \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$\hat{U}(x) = p + \lambda(x - p),$$

que é uma homotetia ordinária de centro  $p$ . No caso geral, se  $X^2 = 0$ ,  $X \neq 0$ , a fórmula (12) nos diz que os quatro vetores  $X, Y = U(X), P$  e  $Q$  são l.d. o que geometricamente significa que  $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{P}$  e  $\hat{Q}$  estão todos sobre o mesmo círculo. Para obter então a imagem de um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , constrói-se o círculo que passa por  $x, \hat{P}$  e  $\hat{Q}$  e movimentase  $x$  sobre ele, aproximando-se de  $\hat{Q}$  (destino) ou, equivalentemente, afastando-se de  $\hat{P}$  (origem). O "quanto" deve-se mover  $x$  depende de  $\lambda, P$  e  $Q$ .

2)  $\hat{H}$  e  $\hat{M}$  tangentes

Neste caso existe apenas um ponto  $\hat{P}$  geométrico no feixe  $\text{ger}(H, M) = W$ . Como sabemos, o feixe  $W$  é constituído de

todas as hiperesferas tangentes a  $H$  e  $M$  em  $P$ , que são portanto transformadas por  $U$  umas nas outras, pois  $W$  é  $U$ -invariante. Agora não temos  $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^{n+2}$ , nem mesmo  $W + W^\perp = \mathbb{R}^{n+2}$  pois  $W \cap W^\perp = \text{ger}(P)$ , que é o único ponto fixado por  $\hat{U}$ . Chamaremos de *relação* de centro  $P$  a uma transformação deste tipo. Quando  $\hat{P} = \infty$ , temos uma translação habitual do  $\mathbb{R}^n$ . No caso geral são conservados todos os círculos que passam por  $P$  e são ortogonais a  $H$  e  $M$ , sendo que a restrição de  $\hat{U}$  a cada um destes círculos funciona como uma translação de  $\mathbb{R}$  passada ao círculo por uma projeção estereográfica.

3)  $\hat{H}$  e  $\hat{M}$  *secantes*.

Neste caso temos  $|H|M| < 1$  e existe um único  $\theta$  tal que  $0 < \theta < \pi$  e  $H|M = \cos \theta$ . Se definirmos uma nova hiperesfera  $L \in \text{ger}(H, M) = W$ ,

$$L = \frac{1}{\sin \theta} (\cos \theta \cdot H - M)$$

de modo que  $M = \cos \theta \cdot H - \sin \theta \cdot L$ , então é fácil verificar que  $L^2 = 1$  e  $L|H = 0$ , isto é,  $H$  e  $L$  formam uma base ortogonal de  $W$ . Temos ainda

$$U(H) = \cos 2\theta \cdot H - \sin 2\theta \cdot L$$

$$U(L) = \sin 2\theta \cdot H + \cos 2\theta \cdot L$$

mostrando que  $U$  se comporta como uma "rotação" neste subespaço. Em particular, se  $\theta = \frac{\pi}{2}$  temos  $H|M = 0$ ,  $T$  e  $S$  comutam,  $U^2 = I$  e esta "rotação" é na verdade  $-I$  restrita a  $W$ . No caso geral chamaremos  $U$  de *rotação confor*

me em torno da variedade esférica  $n-2$  dimensional intersecção entre  $\hat{H}$  e  $\hat{M}$ . Se  $\hat{H}$  e  $\hat{M}$  são hiperplanos, trata-se mesmo de uma rotação euclidiana. Observe que geometricamente são invariantes por  $\hat{U}$  todas as hiperesferas ortogonais a  $\hat{H}$  e  $\hat{M}$ , como nos outros casos. Aqui também há certos círculos invariantes que são úteis para visualizar a ação de  $\hat{U}$  nos pontos do  $\mathbb{R}^n$ , esses círculos são obtidos como segue: a assinatura de  $\Phi$  restrita ao subespaço  $n$ -dimensional  $W^1$  é  $(1, 1, \dots, -1)$  e escolhendo  $n-1$  hiperesferas a $\bar{i}$  que gerem um subespaço  $n-1$  dimensional onde a restrição de  $\Phi$  seja definida positiva construímos (fazendo intersecção dessas hiperesferas) o círculo desejado. Por exemplo: em  $\mathbb{R}^3$ , se  $\hat{H}$  e  $\hat{M}$  são hiperplanos e  $\hat{R}$  é a intersecção entre eles, os círculos invariantes têm centro em  $\hat{R}$  e estão contidos em planos perpendiculares a  $\hat{R}$ .

Com isso terminaremos nossa sumária descrição do grupo conforme. O que foi desenvolvido neste primeiro capítulo, embora com certas falhas do ponto de vista estritamente formal, nos servirá de guia para a intuição e motivará toda a teoria posterior.

## CAPÍTULO 2

### O REFERENCIAL CONFORME MÓVEL

#### 1. GEOMETRIA CONFORME EM $S^n$ .

Neste capítulo introduziremos o método do referencial conforme móvel para tratar problemas de geometria conforme relativos a subvariedades de  $S^n$ ,  $n \geq 3$ . Como dissemos anteriormente, o  $\mathbb{R}^n$  e a esfera  $S^n$  são praticamente indistinguíveis do ponto de vista conforme quando identificados pela projeção estereográfica, a única diferença sendo a falta de um ponto em  $\mathbb{R}^n$  "no infinito". É justamente esta diferença que motivou nossa escolha por  $S^n$ , pois aí as transformações conformes ficam globalmente definidas. De resto, todos os resultados que obtemos valem, com as devidas (poucas) modificações, também em  $\mathbb{R}^n$ .

Estaremos considerando  $S^n$  mergulhada no  $\mathbb{R}^{n+1}$  da maneira habitual

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1 \}$$

e herdando a métrica  $\langle, \rangle$ , que por vezes chamaremos de  $g$ .

A cada vetor  $A = (a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ ,  $A \neq 0$ , vamos associar o hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido pela equação

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_{n+1} X_{n+1} = a_0,$$



com a convenção de que quando  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = 0$  e  $a_0 \neq 0$  temos a equação do plano no infinito. Observe que  $A$  e  $\lambda A$  ( $\lambda \neq 0$ ) estão associados ao mesmo hiperplano geométrico.

Esse hiperplano pode encontrar  $S^n$  em zero, um ou infinitos pontos, dependendo de sua distância à origem ser maior, igual ou menor que 1, respectivamente. Isso equivale a:

$$\text{distância} > 1 : -a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2 < 0$$

$$\text{distância} = 1 : -a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2 = 0$$

$$\text{distância} < 1 : -a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2 > 0$$

Chamando de  $\Omega$  a matriz  $(n+2) \times (n+2)$

$$\Omega = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

e introduzindo a forma bilinear simétrica

$$A|B = A^t \Omega B$$

(no 2º membro os vetores são vistos como matrizes - coluna), teremos então que a posição relativa entre o hiperplano associado a  $A$  e  $S^n$  é determinada pelo sinal de  $A^2 = A|A$ . No caso de ser  $A^2 > 0$  denotamos por  $\hat{A}$  a hiperesfera de  $S^n$

$$\hat{A} = \{x \in S^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n+1} x_{n+1} = a_0\},$$

intersecção de  $S^n$  com o hiperplano associado a  $A$ . No caso de ser  $A^2 = 0$ , denotamos por  $\hat{A}$  o ponto de intersecção  $(a_1/a_0, a_2/a_0, \dots, a_{n+1}/a_0) \in S^n$ . Observe que temos necessariamente  $a_0 \neq 0$  quando  $A^2 = 0$  e  $A \neq 0$ .

Temos também a seguinte propriedade : se  $P^2=0$ ,  $P \neq 0$  e  $A^2 > 0$ , então  $\hat{P} \in \hat{A}$  se e somente se  $A|P = 0$ .

Vamos agora introduzir uma aplicação de importância capital na teoria que pretendemos desenvolver.

Trata-se da *projecção*

$$\pi : \mathbb{R}^{n+2} - \{A \mid a_0 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\pi(P) = \frac{1}{p_0}(p_1, \dots, p_{n+1}).$$

Estaremos particularmente interessados nas derivadas de  $\pi$ :

- a derivada primeira

$$D\pi(P).A = -\frac{a_0}{p_0^2} (p_1, \dots, p_{n+1}) + \frac{1}{p_0} (a_1, \dots, a_{n+1}) \quad (13)$$

- a derivada segunda

$$D^2\pi(P).(A,B) = -\frac{a_0}{p_0} D\pi(P).B - \frac{b_0}{p_0} D\pi(P).A \quad (14)$$

Vale também a seguinte fórmula:

$$\langle D\pi(P).A, D\pi(Q).B \rangle = \frac{1}{p_0 q_0} \left[ \frac{a_0 b_0}{p_0 q_0} P|Q - \frac{a_0}{p_0} P|B - \frac{b_0}{q_0} A|Q + A|B \right] \quad (15)$$

Definimos agora o *cone conforme*

$$K^{n+1} = \{P \in \mathbb{R}^{n+2} - \{0\} \mid P|P = 0\}$$

que tem duas componentes conexas,

$$K_+ = \{P \in K^{n+1} \mid p_0 > 0\}$$

e

$$K_- = \{P \in K^{n+1} \mid p_0 < 0\}$$

Do ponto de vista da geometria diferencial, o cone  $\bar{K}$  é uma variedade de dimensão  $n+1$  mergulhada no  $\mathbb{R}^{n+2}$  e cujo espaço tangente num ponto  $P \in K^{n+1}$  pode ser identificado com o subespaço

$$T_P K^{n+1} = \{A \in \mathbb{R}^{n+2} \mid A|P = 0\}$$

que contém em particular o próprio vetor  $P$ . Excetuando-se os múltiplos escalares de  $P$ , o restante de  $T_P K^{n+1}$  é formado pelos vetores  $A$  que dão origem a hipersferas  $\hat{A}$  de  $S^n$  passando por  $\hat{P}$ .

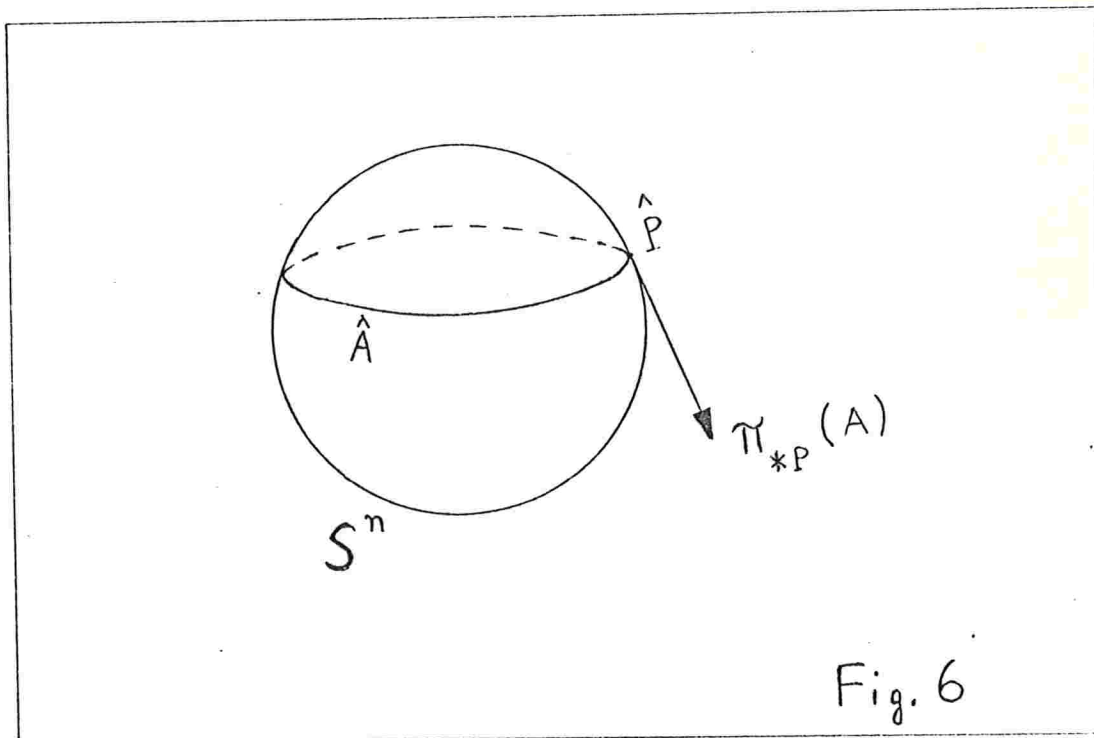
A restrição de  $\pi$  a  $K^{n+1}$  tem como imagem a esfera  $S^n$  e portanto se  $P \in K^{n+1}$  e  $A \in T_P K^{n+1}$  a derivada  $\pi_{*P}(A)$  é tangente a  $S^n$  em  $\hat{P} = \pi(P)$ . Além disso,  $\pi_{*P}(A)$  é o vetor nulo para  $A = \lambda P$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e é *normal* à hiper-

esfera  $\hat{A}$  para  $A \notin \text{ger}(P)$ . (Fig. 6).

Se  $P = Q \in K^{n+1}$  e  $A, B \in T_P K^{n+1}$  a fórmula (15) se simplifica para

$$\langle \pi_{*P}(A), \pi_{*P}(B) \rangle = \frac{1}{p_0^2} A|B.$$

Isso acarreta em particular que se  $A$  e  $B$  são vetores do  $\mathbb{R}^{n+2}$  com  $A^2 > 0$  e  $B^2 > 0$ , então



as hipersferas  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são ortogonais se e somente se  $A|B = 0$ .

As hipersferas  $\hat{A}$  são casos particulares do que chamaremos de variedades esféricas. Uma variedade esférica de dimensão  $m$  do  $S^n$  (com  $0 \leq m \leq n$ ) é a intersecção de  $n-m$  hipersferas  $\hat{A}_i$ ,  $1 \leq i \leq n-m$ , desde que:

- 1) os vetores  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq n-m$  são l.i.
- 2) a restrição de  $\Omega$  a  $\text{ger}(A_1, \dots, A_{n-m})$  é positiva definida.

Assim, o  $S^n$  é a única variedade esférica de dimensão  $n$  em  $S^n$ ; as hiperesferas são as variedades esféricas de dimensão  $n-1$ ; uma variedade esférica de dimensão zero é um par de pontos distintos de  $S^n$ .

Na verdade, uma variedade esférica de dimensão  $m$  não depende da particular escolha das hiperesferas  $\hat{A}_i$ ,  $1 \leq i \leq n-m$ , mas apenas do espaço gerado pelos vetores  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq n-m$ . Portanto, dado um subespaço  $W$  do  $\mathbb{R}^{n+2}$  onde a restrição de  $\Omega$  é positiva definida e tal que  $0 \leq \dim W \leq n$ , denotamos por  $\hat{W}$  a variedade esférica

$$\hat{W} = \overset{\frown}{\substack{A \in W \\ A \neq 0}} \hat{A}$$

É claro, obtém-se o mesmo resultado tomando a intersecção apenas numa base de  $W$ . Também é verdade que

$$\hat{W} = \pi (W^\perp \cap K^{n+1})$$

\* Uma transformação conforme é um operador linear do  $\mathbb{R}^{n+2}$  que conserva  $\Omega$  e também as componentes do cone  $K^{n+1}$ . Sempre nos referiremos a ela através de sua matriz  $T$  em relação à base canônica. As transformações conformes constituem um grupo, o grupo conforme, que denotamos por

$$GC(n) = \{ T \in GL(n+2, \mathbb{R}) \mid T^t \Omega T = \Omega \text{ e } T(K_+) = K_+ \}$$

Dada  $T \in GC(n)$  ela induz uma aplicação  $\hat{T}: S^n \rightarrow S^n$  determinada pela condição de comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 K_+ & \xrightarrow{T} & K_+ \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 S^n & \xrightarrow{\hat{T}} & S^n
 \end{array}$$

Esta  $\hat{T}$  é conforme no sentido usual, isto é, existe uma função  $\xi: S^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que

$$\hat{T}^*g = \xi^2 g \quad (17)$$

Às vezes usaremos os termos "transformação conforme" e "grupo conforme" para indicar as  $\hat{T}$  e o grupo formado por elas.

## 2. REFERENCIAIS CONFORMES

Uma *base conforme* (ou referencial conforme) é uma seqüência de  $n+2$  vetores  $(E_0, E_1, \dots, E_{n+1})$  do  $\mathbb{R}^{n+2}$  tais que

$$E_0 \in K_+$$

$$E_0 | E_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$E_0 | E_{n+1} = 1$$

$$E_i | E_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$E_i | E_{n+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$E_{n+1} | E_{n+1} = 0$$



Geometricamente,  $\hat{E}_0$  e  $\hat{E}_{n+1}$  são dois pontos distintos enquanto que  $\hat{E}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  são  $n$  hipersferas ortogonais entre si que passam por esses dois pontos. Observe que  $E_{n+1} \in K_-$  pois  $E_0 | E_{n+1} > 0$ .

Em termos matriciais um referencial conforme será visto como uma matriz quadrada de ordem  $n+2$  onde os vetores  $E_0, \dots, E_{n+1}$  ocupam as colunas:

$$E = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_0 & E_1 & \text{-----} & E_n & E_{n+1} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccc} E_0^0 & E_1^0 & \text{-----} & E_n^0 & E_{n+1}^0 \\ E_0^1 & E_1^1 & \text{-----} & E_n^1 & E_{n+1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ E_0^{n+1} & E_1^{n+1} & \text{-----} & E_n^{n+1} & E_{n+1}^{n+1} \end{array} \right] \end{array}$$

A matriz  $E$  deve satisfazer

$$E^t \Omega E = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = \Phi$$

e  $E_0^0 > 0$ . Denotaremos por  $RC(n)$  o conjunto de todas as matrizes deste tipo. Naturalmente, o grupo conforme age sobre os referenciais conformes de maneira simplesmente transitiva:

$$GC(n) \times RC(n) \rightarrow RC(n)$$

$$(T, E) \rightarrow TE.$$

Seja  $V \subset S^n$  uma subvariedade de dimensão  $m$ .  
Um *referencial conforme adaptado* a  $V$  é uma aplicação

$$E : V \rightarrow RC(n)$$

que satisfaz:

- 1)  $\pi(E_0(x)) = x$ , para todo  $x \in V$ ;
- 2)  $\pi_{*E_0(x)}(E_i(x))$  é tangente a  $V$  para todo  $x \in V$  e todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq m$ .

Observe que em 2) os vetores  $E_i(x)$  são vistos como tangentes ao cone em  $E_0(x)$ , o que é válido pois  $E_0(x) \perp E_i(x) = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Geometricamente a condição 1) significa simplesmente  $\hat{E}_0(x) = x$ , enquanto que 2) significa que as hipersferas  $\hat{E}_i(x)$  são *normais* a  $V$  em  $x$  para  $1 \leq i \leq m$  e *tangentes* a  $V$  em  $x$  para  $m+1 \leq i \leq n$ .

A um referencial conforme adaptado (r.c.a.) estão sempre associadas  $(n+2)^2$  formas diferenciais  $\omega_{ij}$ ,  $0 \leq i, j \leq n+1$ , sobre  $V$  definidas pelas relações

$$dE_i = \sum_{j=0}^{n+1} \omega_{ji} E_j, \quad 0 \leq i \leq n+1 \quad (18)$$

que são as *formas de conexão* de  $E$ . Estas formas podem ser reunidas numa só forma a valores matriciais  $(n+2) \times (n+2)$ :

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{00} & \cdots & \omega_{0, n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{n+1} & \cdots & \omega_{n+1, n+1} \end{bmatrix}$$

e neste caso as relações (18) ficam

$$dE = E\omega \quad (19)$$

O fato de termos  $\text{im}(E) \subset \text{RC}(n)$  implica certas coisas sobre  $\omega$ . Por exemplo, derivando a relação  $E^t \Omega E = \Phi$  obtemos:

$$dE^t \Omega E + E^t \Omega dE = 0$$

$$\omega^t E^t \Omega E + E^t \Omega E \omega = 0$$

$$\omega^t \Phi + \Phi \omega = 0$$

o que equivale a dizer que  $\Phi \omega$  é antissimétrica. Mas  $\Phi \omega$  é obtida de  $\omega$  trocando a primeira linha com a última e vice-versa. É conveniente dividir a forma  $\omega$  em vários "pedaços" como ilustrado abaixo:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{00} & \omega_{0I} & \omega_{0,n+1} \\ \omega_{I0} & \omega_{II} & \omega_{I,n+1} \\ \omega_{n+1,0} & \omega_{n+1,I} & \omega_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

onde as formas  $\omega_{0I}$  e  $\omega_{n+1,I}$  são os valores matriciais  $1 \times n$ ,  $\omega_{I0}$  e  $\omega_{I,n+1}$  são  $n \times 1$  e  $\omega_{II}$  é  $n \times n$ . Deste modo "  $\Phi \omega$  antissimétrica " se exprime por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{00} = -\omega_{n+1,n+1} \\ \omega_{0i} = -\omega_{i,n+1}^t \\ \omega_{i0} = -\omega_{n+1,i}^t \\ \omega_{ii} \text{ antissimétrica} \\ \omega_{0,n+1} = \omega_{n+1,0} = 0 \end{array} \right.$$

ou, em termos das forminhas  $\omega_{ij}$ ,

$$\begin{aligned} \omega_{00} &= -\omega_{n+1,n+1} \\ \omega_{0i} &= -\omega_{i,n+1}, \quad 1 \leq i \leq n \\ \omega_{i0} &= -\omega_{n+1,i}, \quad 1 \leq i \leq n \\ \omega_{ij} &= -\omega_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n \\ \omega_{0,n+1} &= \omega_{n+1,0} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Derivando agora a própria relação (19), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= d^2E = dE\Lambda\omega + Ed\omega \\ 0 &= E\omega\Lambda\omega + Ed\omega \\ 0 &= \omega\Lambda\omega + d\omega \end{aligned} \tag{21}$$

pois  $E$  é inversível em cada ponto. Vamos escrever em termos das forminhas  $\omega_{ij}$  a relação (21), porém, devido a (20), sabemos que basta conhecer as equações envolvendo apenas  $\omega_{00}$ ,  $\omega_{i0}$ ,  $\omega_{0i}$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $\omega_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Além disso, faremos uma simplificação, escrevendo  $\omega_i$  em lugar de  $\omega_{i0}$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Assim, temos

$$\begin{aligned}
0 &= d\omega_0 + \sum_{i=1}^n \omega_{0i} \wedge \omega_i \\
0 &= d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_0 + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad 1 \leq i \leq n \\
0 &= d\omega_{0i} + \omega_0 \wedge \omega_{0i} + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_{0j}, \quad 1 \leq i \leq n \\
0 &= d\omega_{ij} + \omega_i \wedge \omega_{0j} - \omega_j \wedge \omega_{0i} + \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad 1 \leq i < j \leq n
\end{aligned} \tag{22}$$

As equações (22) ou (21) são conhecidas como *equações de estrutura* do referencial. Elas decorrem do fato de que  $E^t \Omega E = \Phi$  em cada ponto. Vejamos agora onde nos levam as hipóteses de adaptação a  $V$ .

Derivando a condição 1), por exemplo, obtemos

$$\pi_{*E_0}(x)(dE_0(x).v) = v, \quad v \in T_x V$$

Por outro lado, a condição 2) nos diz que  $\pi_{*E_0}(x)(E_i(x))$  é tangente a  $V$  para  $1 \leq i \leq m$  e normal a  $V$  para  $m+1 \leq i \leq n$ . Logo, para todo  $v \in T_x V$  e todo  $i$  tal que  $m+1 \leq i \leq n$  temos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle v, \pi_{*E_0}(x)(E_i(x)) \rangle = \langle \pi_{*E_0}(x)(dE_0(x).v), \pi_{*E_0}(x)(E_i(x)) \rangle = \\
&= \frac{1}{E_0^0(x)^2} dE_0(x).v | E_i(x) = \frac{1}{E_0^0(x)^2} \sum_{j=0}^n \omega_j(x).v E_j(x) | E_i(x) = \\
&= \frac{1}{E_0^0(x)^2} \omega_i(x).v
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\omega_i = 0, \quad m+1 \leq i \leq n.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \langle \pi_{*} E_0(x) (dE_0(x) \cdot v), \pi_{*} E_0(x) (dE_0(x) \cdot v) \rangle = \\ &= \frac{1}{E_0^0(x)^2} dE_0(x) \cdot v \mid dE_0(x) \cdot v = \frac{1}{E_0^0(x)^2} \sum_{i=1}^m \omega_i^2(x) \cdot v \end{aligned}$$

ou seja,

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_m^2 = (E_0^0)^2 g. \quad (24)$$

Em particular, esta última relação nos mostra que  $\omega_1, \dots, \omega_m$  são l.i. e portanto geram  $T^*V$ . Observe que devido a isso nem todas as subvariedades de  $S^n$  admitem referenciais conformes adaptados, pois nem todas possuem fibrado cotangente trivial. Porém, dada uma subvariedade  $V \subset S^n$  e  $x \in V$ , é certo que existe uma vizinhança aberta  $A$  de  $x$  que admite r.c.a.. Como nosso estudo será predominantemente local, isto bastará aos nossos propósitos.

Em vista de (23), as equações (18) e (22) ficam

$$\begin{aligned} dE_0 &= \omega_0 E_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i E_i \\ dE_i &= \omega_{0i} E_0 + \sum_{j=1}^m \omega_{ji} E_j + \sum_{\alpha=m+1}^n \omega_{\alpha i} E_\alpha - \omega_i E_{n+1}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (25) \\ dE_\alpha &= \omega_{0\alpha} E_0 + \sum_{j=1}^m \omega_{j\alpha} E_j + \sum_{\beta=m+1}^n \omega_{\beta\alpha} E_\beta, \quad m+1 \leq \alpha \leq n \\ dE_{n+1} &= - \sum_{i=1}^m \omega_{0i} E_i - \sum_{\alpha=m+1}^n \omega_{0\alpha} E_\alpha - \omega_0 E_{n+1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
0 &= d\omega_0 + \sum_{i=1}^m \omega_{0i} \wedge \omega_i \\
0 &= d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_0 + \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad 1 \leq i \leq m \\
0 &= \sum_{j=1}^m \omega_{\alpha j} \wedge \omega_j, \quad m+1 \leq \alpha \leq n \\
0 &= d\omega_{0i} + \omega_0 \wedge \omega_{0i} + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_{0j}, \quad 1 \leq i \leq n \\
0 &= d\omega_{ij} + \omega_i \wedge \omega_{0j} - \omega_j \wedge \omega_{0i} + \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad 1 \leq i < j \leq m \quad (26) \\
0 &= d\omega_{i\alpha} + \omega_i \wedge \omega_{0\alpha} + \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{k\alpha}, \quad 1 \leq i < m < \alpha \leq n \\
0 &= d\omega_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^n \omega_{\alpha k} \wedge \omega_{k\beta}, \quad m+1 \leq \alpha < \beta \leq n
\end{aligned}$$

Muitas vezes temos um referencial conforme sobre uma subvariedade mas queremos modificá-lo de modo a obter um novo referencial, ainda adaptado, com forma de conexão mais simples ou mais conveniente aos nossos cálculos. Por isso estudaremos a seguir certas mudanças de referencial, observando qual é o efeito sobre as formas de conexão.

O lema a seguir trata do caso geral e os exemplos que o sucedem ilustram os casos particulares que serão usados por nós na prática.

Lema 2.1. Seja  $V \subset S^n$  uma subvariedade  $m$ -dimensional e  $E: V \rightarrow RC(n)$  um r.c.a., com forma de conexão  $\omega$ . Dadas  $(n+2)^2$  funções  $a_{ij}$  sobre  $V$ , os vetores  $F_i$  definidos por

$$F_i = \sum_{j=0}^{n+1} a_{ij} E_j, \quad 0 \leq i \leq n+1$$

constituem um r.c.a. se e somente se a matriz  $A=(a_{ij})$  tiver a forma

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c} \lambda & 0 & 0 \\ \hline v & P & 0 \\ \hline -\frac{1}{2\lambda} v^t v & -\frac{1}{\lambda} v^t P & 1/\lambda \end{array} \right] \quad (28)$$

onde  $\lambda > 0$ ,  $v$  é uma matriz-coluna  $n \times 1$  e  $P$  é uma matriz ortogonal  $n \times n$  e da forma

$$P = \left[ \begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right]$$

com  $P_1$   $m \times m$  e  $P_2$   $(n-m) \times (n-m)$ , ambas ortogonais.

Neste caso a forma de conexão  $\psi$  do referencial  $F=(F_0, \dots, F_{n+1})$  é dada por

$$\psi = A^{-t} \omega A^t + A^{-t} dA^t .$$

Demonstração. Obviamente devemos ter  $F_0 = \lambda E_0$ ,  $\lambda > 0$ , e isto explica a primeira linha de  $A$ . As equações (27) ficam, em forma matricial,

$$F = EA^t$$

donde é fácil concluir que para que  $F^t \Omega F = \Phi$  é necessário  $A \Phi A^t = \Phi$ . Esta igualdade mais as informações sobre a 1ª. linha nos permitem chegar à forma (28). Final

mente, o fato de ser

$$\pi_{*E_0} (\text{ger}(E_1, \dots, E_m)) = T_X V = \pi_{*E_0} (\text{ger}(F_1, \dots, F_m))$$

obriga  $P$  a ter a forma de uma soma direta do tipo descrito.

Quanto a  $\psi$ , temos

$$\begin{aligned} \psi &= F^{-1} dF = (EA^t)^{-1} d(EA^t) = A^{-t} E^{-1} (dEA^t + EdA^t) = \\ &= A^{-t} E^{-1} dEA^t + A^{-t} dA^t = A^{-t} \omega + A^{-t} dA^t \end{aligned}$$

c.q.d.

Exemplos:

1) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$$

corresponde à mudança

$$F_0 = \lambda E_0, \quad \lambda > 0$$

$$F_i = E_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$F_{n+1} = \frac{1}{\lambda} E_{n+1}$$

O efeito sobre as formas de conexão é:

$$\psi_0 = \frac{d\lambda}{\lambda} + \omega_0$$

$$\psi_i = \lambda \omega_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\psi_{0i} = \frac{1}{\lambda} \omega_{0i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\psi_{ij} = \omega_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

2) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & & P & & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

com  $P$   $m \times m$  ortogonal corresponde a mudança

$$F_0 = E_0$$

$$F_i = \sum_{j=1}^m p_{ij} E_j, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$F_\alpha = E_\alpha, \quad m+1 \leq \alpha \leq n$$

$$F_{n+1} = E_{n+1}.$$

O efeito sobre as formas de conexão é:

$$\psi_0 = \omega_0$$

$$\psi_i = \sum_{j=1}^m p_{ij} \omega_j, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\psi_{0i} = \sum_{j=1}^m p_{ij} \omega_{0j}, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\psi_{0\alpha} = \omega_{0\alpha}, \quad m+1 \leq \alpha \leq n$$

$$\psi_{ij} = \sum_{k=1}^m p_{ik} dp_{jk} + \sum_{k,\ell=1}^m p_{ik} p_{j\ell} \omega_{k\ell}, \quad 1 \leq i < j \leq m$$

$$\psi_{i\alpha} = \sum_{j=1}^m p_{ij} \omega_{j\alpha}, \quad 1 \leq i \leq m < \alpha \leq n$$

$$\psi_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}, \quad m+1 \leq \alpha, < \beta < n.$$

3) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & I & 0 \\ -\frac{1}{2}v^t v & -v^t & 1 \end{bmatrix}$$

dã origem à mudança

$$F_0 = E_0$$

$$F_i = E_i + v_i E_0, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$F_{n+1} = E_{n+1} - \sum_{j=1}^n v_j E_j - \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n v_j^2 \right) E_0$$

cujo efeito sobre as formas de conexão é:

$$\psi_0 = \omega_0 - \sum_{j=1}^m v_j \omega_j$$

$$\psi_i = \omega_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\psi_{0i} = \omega_{0i} - \sum_{j=1}^m v_j \omega_{ji} + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n v_j^2 \right) \omega_i +$$

$$+ dv_i + v_i \omega_0 - v_i \sum_{j=1}^m v_j \omega_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\psi_{ij} = v_j \omega_i + \omega_{ij} - v_i \omega_j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

No teorema seguinte, uma aplicação  $\phi: V \rightarrow U$  entre subvariedades de  $S^n$  de mesma dimensão  $\bar{e}$  *conforme* quando existe uma função  $\xi: V \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que

$$\phi^* g_U = \xi^2 g_V.$$

Teorema 2.1. Sejam  $V$  e  $U$  duas subvariedades de dimensão  $m$  de  $S^n$  que admitem referenciais conformes adaptados e seja  $\phi: V \rightarrow U$  uma aplicação diferenciável. Então são equivalentes:

- 1)  $\phi$   $\bar{e}$  conforme
- 2) para todo r.c.a.  $E$  sobre  $V$  existe um r.c.a.  $F$  sobre  $U$  de modo que  $\omega_i = \phi^* \psi_i$ ,  $0 \leq i \leq m$ .
- 3) existem  $E$  r.c.a. sobre  $V$  e  $F$  r.c.a. sobre  $U$  tais que  $\omega_i = \phi^* \psi_i$ ,  $0 \leq i \leq m$ .

Demonstração:

1 $\Rightarrow$ 2. Suponha que

$$\phi^* g_U = \xi^2 g_V$$

e seja  $E$  um r.c.a. sobre  $V$ . Temos então



$$\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 = (E_0^0)^2 g_V$$

Sabemos também que existe um r.c.a.  $\tilde{F}$  sobre  $U$  com forma de conexão  $\tilde{\psi}$ , logo

$$\begin{aligned} \omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 &= (E_0^0)^2 g_V = \frac{(E_0^0)^2}{\xi^2} \phi^* g_U = \\ &= \frac{(E_0^0)^2}{\xi^2} \phi^* \left[ \frac{1}{(\tilde{F}_0^0)^2} (\tilde{\psi}_1^2 + \dots + \tilde{\psi}_m^2) \right] = \\ &= \frac{(E_0^0)^2}{\xi^2 (F_0^0 \circ \phi)^2} \left[ (\phi^* \tilde{\psi}_1)^2 + \dots + (\phi^* \tilde{\psi}_m)^2 \right] \end{aligned}$$

Como  $\omega_1, \dots, \omega_m$  geram  $T^*V$ , existem funções  $p_{ij}$  tais que

$$\frac{E_0^0}{\xi \tilde{F}_0^0 \circ \phi} \phi^* \tilde{\psi}_i = \sum_{j=1}^m p_{ij} \omega_j$$

e os cálculos que fizemos anteriormente mostram que a matriz  $(p_{ij})_{m \times m}$  é ortogonal. Logo, combinando uma mudança do tipo do exemplo 1 como outra do tipo do exemplo 2, podemos conseguir um referencial  $\bar{F}$  sobre  $U$ , adaptado, cumprindo

$$\omega_i = \phi^* \bar{\psi}_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Por fim, uma mudança do tipo 3) é suficiente para ajustar a forma  $\psi_0$  sem alterar as  $\psi_i$   $1 \leq i \leq m$ .

2  $\Rightarrow$  3. Imediato.

3  $\Rightarrow$  1. Temos as igualdades

$$\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 = (E_0^0)^2 g_V ,$$

$$\psi_1^2 + \dots + \psi_m^2 = (F_0^0)^2 g_U .$$

Daí

$$\begin{aligned} \phi^* g_U &= \phi^* \left[ \frac{1}{(F_0^0)^2} (\psi_1^2 + \dots + \psi_m^2) \right] = \\ &= \frac{1}{(F_0^0 \circ \phi)^2} \left[ (\phi^* \psi_1)^2 + \dots + (\phi^* \psi_m)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{(F_0^0 \circ \phi)^2} (\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2) = \left( \frac{E_0^0}{F_0^0 \circ \phi} \right)^2 g_V . \end{aligned}$$

c.q.d.

Corolário. Nas mesmas condições do teorema, são equivalentes:

- 1)  $\phi$  é conforme
- 2) para todo r.c.a. E sobre V existe um r.c.a. F sobre U de modo que  $\omega_i = \phi^* \psi_i$ ,  $0 \leq i \leq m$  e também  $\omega_{ij} = \phi^* \psi_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ .
- 3) existem E r.c.a. sobre V e F r.c.a. sobre U tais que  $\omega_i = \phi^* \psi_i$ ,  $0 \leq i \leq m$  e também  $\omega_{ij} = \phi^* \psi_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ .

Demonstração. Basta mostrar que  $\omega_i = \phi^*\psi_i$ ,  $0 \leq i \leq m$  implica em  $\omega_{ij} = \phi^*\psi_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ .

Usando as equações de estrutura (26) para  $d\omega_i$  temos

$$0 = d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_0 + \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Analogamente,

$$0 = d\psi_i + \psi_i \wedge \psi_0 + \sum_{j=1}^m \psi_{ij} \wedge \psi_j, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Subtraindo da 1a. equação  $\phi^*$  aplicado a 2a, vem

$$0 = \sum_{j=1}^m (\omega_{ij} - \phi^*\psi_{ij}) \wedge \omega_j, \quad 1 \leq i \leq m.$$

O lema de Cartan e a antissimetria de  $\omega_{ij} - \phi^*\psi_{ij}$  nos levam então a

$$\omega_{ij} - \phi^*\psi_{ij} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

c.q.d.

Como aplicação destes resultados, vamos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 2.2. Seja  $U \subset S^n$  um aberto conexo e  $\phi: U \rightarrow S^n$  uma aplicação conforme. Então existe  $T \in GC(n)$  tal que  $\hat{T}|_U = \phi$ .

Demonstração. Para cada ponto  $x \in U$  seja  $V$  uma vizinhança aberta de  $x$  tomada pequena o suficiente para que tanto  $V$  como  $\phi(V)$  tenham referenciais conformes adaptados. Chamemos de  $E$  e  $F$ , respectivamente, tais referenciais e de  $\omega$  e  $\psi$  suas formas de conexão. Pelo teorema 2.1 e seu corolário, como  $V$  e  $\phi(V)$  tem mesma dimensão  $n$ , podemos supor

$$\omega_i = \phi^* \psi_i, \quad 0 \leq i \leq n \quad (29)$$

$$\text{e } \omega_{ij} = \phi^* \psi_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

A equação de estrutura para  $d\omega_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  é

$$0 = d\omega_{ij} + \omega_i \wedge \omega_{0j} - \omega_j \wedge \omega_{0i} + \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

Subtraindo desta equação a análoga para  $\psi$  depois de aplicar  $\phi^*$ , e levando em conta (29), temos

$$0 = \omega_i \wedge (\omega_{0j} - \phi^* \psi_{0j}) - \omega_j \wedge (\omega_{0i} - \phi^* \psi_{0i}) \quad (30)$$

donde  $\omega_{0i} - \phi^* \psi_{0i}$  sã é combinaçãc linear de  $\omega_i$  e  $\omega_j$ . Como  $j$  é qualquer índice distinto de  $i$  e  $n \geq 3$ , concluímos que  $\omega_{0i} - \phi^* \psi_{0i}$  é múltipla de  $\omega_i$ , ou seja,

$$\omega_{0i} - \phi^* \psi_{0i} = a_i \omega_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

Voltando com este resultado e (30), ficamos com

$$a_i + a_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

donde, sendo  $n \geq 3$ .

$$a_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

ou seja,

$$\omega_{0i} = \phi^* \psi_{0i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Com isto temos na verdade

$$\omega = \phi^* \psi$$

Considere então a aplicação  $T: V \rightarrow GC(n)$   
definida por

$$T(x) = F(\phi(x)) E^{-1}(x) = (\phi^* F)(x) \cdot E^{-1}(x)$$

Derivando,

$$\begin{aligned} dT &= d(\phi^* F) E^{-1} + (\phi^* F) d(E^{-1}) = \\ &= \phi^*(dF) E^{-1} - (\phi^* F) E^{-1} dE E^{-1} = \\ &= \phi^*(F\psi) E^{-1} - (\phi^* F) \omega E^{-1} = \\ &= \phi^* F(\phi^* \psi - \omega) E^{-1} = 0 \end{aligned}$$

ou seja,  $T$  é constante em  $V$ . Por outro lado,

$$T(E_0(x)) = F_0(\phi(x))$$

donde, aplicando  $\pi$  a ambos os membros,

$$\pi T(E_0(x)) = \pi(F_0(\phi(x))) = \phi(x)$$

$$\hat{T}\pi(E_0(x)) = \phi(x)$$

$$\hat{T}(x) = \phi(x)$$

mostrando que  $\hat{T}|_V = \phi$ .

Seja agora a função  $f : U \rightarrow GC(n)$  que leva cada  $x \in U$  numa aplicação  $T = f(x)$  tal que  $\hat{T} = \phi$  numa vizinhança de  $x$ . Ela está bem definida pelo que foi feito acima e pelo fato de que se  $\hat{T} = \hat{S}$  em um aberto de  $S^n$  então  $T = S$  (veja demonstração do corolário do Teorema 1.1). Por outro lado, pela própria definição  $f$  é localmente constante, sendo  $U$  conexo,  $f$  é constante.

c.q.d.

Corolário. A aplicação  $T \rightarrow \hat{T}$  é um isomorfismo entre  $GC(n)$  e o grupo dos difeomorfismos conformes de  $S^n$ .

### 3. RELAÇÃO COM REFERENCIAIS EUCLIDIANOS

Dado um referencial conforme  $E$  adaptado a uma subvariedade  $V \subset S^n$  podemos construir um referencial euclidiano  $e = (e_1, \dots, e_n)$ , também adaptado a  $V$ , que chamaremos de *projecção* de  $E$ , da seguinte maneira:

$$e_i(x) = E_0^0(x) \pi_{*E_0(x)}(E_i(x)), \quad 1 \leq i \leq n.$$

É fácil verificar, usando (16), que temos  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  e além disso  $e_1, \dots, e_m$  são tangentes a  $V$  em  $x$ , onde  $m = \text{dimensão de } V$ . Este referencial euclidiano tem suas formas de conexão  $\bar{\omega}_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  e  $\bar{\omega}_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  definidas por



$$\bar{\omega}_i(x).v = \langle v, e_i(x) \rangle \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\bar{\omega}_{ij}(x).v = \langle e_i(x), de_j(x).v \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Vamos expressar estas formas em termos das  $\omega_{ij}$  de conexão de  $E$ , usando as fórmulas (13) - (15) envolvidas do derivadas da  $\pi$ . Estaremos olhando  $\pi$  definida num aberto do  $\mathbb{R}^{n+2}$ , por isso usamos a notação  $D\pi$ ,  $D^2\pi$ , etc.

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_i(x).v &= \langle v, e_i(x) \rangle = \\ &= \langle D\pi(E_0(x)).dE_0(x).v, E_0^0(x) D\pi(E_0(x)).E_i(x) \rangle = \\ &= \frac{1}{E_0^0(x)} dE_0(x).v E_i(x) = \frac{1}{E_0^0(x)} \omega_i(x).v \end{aligned}$$

ou seja,

$$\bar{\omega}_i = \frac{1}{E_0^0} \omega_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (31)$$

Analogamente obtemos

$$\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij} - \frac{E_j^0}{E_0^0} \omega_i + \frac{E_i^0}{E_0^0} \omega_j \quad (32)$$

Como aplicação destas fórmulas, gostaríamos de demonstrar um teorema clássico sobre subvariedades totalmente umbílicas de  $S^n$ . Uma subvariedade  $V$  da esfera é dita *totalmente umbílica* se em cada ponto de  $V$  tem-se

$$\bar{\omega}_{\alpha i} = h_\alpha \bar{\omega}_i$$

para todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq m$  e todo  $\alpha$  tal que  $m+1 \leq \alpha \leq n$ , em relação a certo referencial euclidiano localmente defini

do. Esta condição não depende da escolha deste referencial, ela é intrínseca de  $V$ .

Teorema 2.3. Se  $V$  é uma subvariedade totalmente umbílica de  $S^n$  com dimensão  $m \geq 2$ , então cada ponto de  $V$  admite uma vizinhança totalmente contida numa variedade esférica  $m$ -dimensional de  $S^n$ .

Demonstração. Seja  $x \in V$  e  $E$  um referencial conforme adaptado a uma vizinhança aberta de  $x$ . Pelas fórmulas de passagem (32) a condição

$$\bar{\omega}_{\alpha i} = h_{\alpha} \bar{\omega}_i, \quad 1 \leq i \leq m < \alpha \leq n$$

se transforma em

$$\omega_{\alpha i} = \frac{1}{E_0^0} (E_{\alpha}^0 + h_{\alpha}) \omega_i, \quad 1 \leq i \leq m < \alpha \leq n$$

Fazendo a mudança de referencial

$$F_0 = E_0$$

$$F_i = E_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$F_{\alpha} = E_{\alpha} + c_{\alpha} E_0, \quad m+1 \leq \alpha \leq n$$

$$F_{n+1} = E_{n+1} - \sum_{\alpha=m+1}^n c_{\alpha} E_{\alpha} - \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha=m+1}^n c_{\alpha}^2 \right) E_0$$

temos que as novas formas  $\psi_{ij}$  satisfazem as relações

$$\psi_i = \omega_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\psi_{\alpha i} = \omega_{\alpha i} - c_{\alpha} \omega_i, \quad 1 \leq i \leq m < \alpha \leq n$$

entre outras. Escolhendo  $c_\alpha = \frac{1}{E_0^0} (E_\alpha^0 + h_\alpha)$  obtemos

$$\psi_{\alpha i} = 0, \quad 1 \leq i \leq m < \alpha \leq n$$

Levando nas equações de estrutura para  $d\psi_{\alpha i}$  vem

$$0 = d\psi_{\alpha i} + \psi_\alpha \wedge \psi_{0i} + \sum_{k=1}^n \psi_{\alpha k} \wedge \psi_{ki} - \psi_i \wedge \psi_{0\alpha}$$

ou

$$0 = \psi_i \wedge \psi_{0\alpha}, \quad 1 \leq i \leq m < \alpha \leq n.$$

Como  $m \geq 2$ , isto implica em

$$0 = \psi_{0\alpha}, \quad m+1 \leq \alpha \leq n$$

Ficamos então com as equações, tiradas de (25) (trocando, é claro, E por F e  $\omega$  por  $\psi$ ).

$$dF_\alpha = \sum_{\beta=m+1}^n \psi_{\beta\alpha} F_\beta \quad m+1 \leq \alpha \leq n \quad (33)$$

Queremos provar que o subespaço gerado por  $F_{m+1}, \dots, F_n$  em  $\mathbb{R}^{n+2}$  é o mesmo para qualquer ponto da vizinhança considerada. Para tanto, raciocinamos como segue: sejam  $\tilde{\psi}$  e  $\tilde{F}$  as matrizes

$$\tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_{m+1, m+1} & \cdots & \psi_{m+1, n} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{n, m+1} & \cdots & \psi_{n, n} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F_{m+1}^0 & \cdots & F_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n+1}^{n+1} & \cdots & F_n^{n+1} \end{bmatrix}$$

A relação (33) se escreve então

$$d\tilde{F} = \tilde{F}\tilde{\psi}$$

Se conseguirmos uma matriz inversível  $A(n-m) \times (n-m)$  como função de  $x$  nesta vizinhança tal que

$$d(FA^t) = 0$$

então teremos achado  $n-m$  vetores — as colunas de  $\tilde{F}A^t$  — constantes no subespaço  $\text{ger}(F_{m+1}, \dots, F_n)$ , conforme desejamos. Desenvolvendo esta equação, vem

$$\tilde{F}\tilde{\psi}A^t + \tilde{F}dA^t = 0$$

ou seja, basta que  $A$  seja solução do sistema diferencial

$$dA = A\tilde{\psi}$$

( $\tilde{\psi}$  é antissimétrica). Mas este sistema é completamente integrável, pois a condição de Frobenius é

$$\begin{aligned} 0 &= d^2A = (A\tilde{\psi}) \wedge \tilde{\psi} + A d\tilde{\psi} = \\ &= A(\tilde{\psi} \wedge \tilde{\psi} + d\tilde{\psi}) \end{aligned}$$

que se verifica por causa das equações de estrutura para  $d\psi_{\alpha\beta}$ ,  $m+1 \leq \alpha, \beta \leq n$ . Por outro lado, como  $\tilde{\psi}$  é antissimé

trica, podemos ter uma solução ortogonal em cada ponto. Se a vizinhança original  $\bar{E}$  simplesmente conexa, teremos alcançado nosso objetivo.

Sendo então o subespaço ger  $(F_{m+1}, \dots, F_n)$  constante, ele dá origem a uma variedade esférica de dimensão  $m$ ,  $\hat{F}_{m+1} \cap \dots \cap \hat{F}_n$ , à qual pertencem os pontos em que está definido o referencial  $F$ , pois  $F_0|F_\alpha = 0$ ,  $m+1 \leq \alpha \leq n$ .

c.q.d.

Corolário 1. Toda subvariedade totalmente umbílica conexa de  $S^n$ , de dimensão  $m \geq 2$ , é uma subvariedade aberta de uma variedade esférica  $m$ -dimensional.

Corolário 2. Toda subvariedade totalmente umbílica conexa e compacta de  $S^n$ , de dimensão  $m \geq 2$  é uma variedade esférica.

#### 4. HIPERSUPERFÍCIES

Uma *hipersuperfície* é uma subvariedade de dimensão  $n-1$  da esfera  $S^n$ . Dizemos que uma hipersuperfície  $V$  de  $S^n$  está *orientada* se existe uma aplicação  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $N(x)$  é unitário, tangente a  $S^n$  em  $x$  e normal a  $V$  em  $x$ , para todo  $x \in V$ . Numa hipersuperfície orientada podemos definir as *formas fundamentais*, que são duas formas quadráticas diferenciais sobre  $V$ , da seguinte maneira:

1a. forma fundamental:

$$I(x).v = \langle v, v \rangle, \quad \forall x \in V, v \in T_x V$$

2a. forma fundamental:

$$II(x).v = - \langle v, dN(x).v \rangle, \quad \forall x \in V, v \in T_x V$$

A aplicação  $N$  (diferenciável) é conhecida como aplicação normal de Gauss. Observe que pelas condições impostas temos necessariamente  $dN(x).v$  tangente a  $V$  em  $x$ , para todo  $x \in V$  e  $v \in T_x V$ . Assim, em cada ponto  $x \in V$  podemos definir o *operador de Weingarten*,

$$-dN(x): T_x V \rightarrow T_x V$$

É clássico o resultado que diz que este operador é auto-adjunto em relação à métrica  $g$  restrita a  $V$ .

Em termos de um referencial euclidiano adaptado e coerente com a orientação, isto é,  $e_n = N$  nos pontos em que ambos estão definidos, as formas fundamentais ficam:

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}_i^2 \tag{34}$$

$$II = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}_i \bar{\omega}_{in}$$

É bastante conhecido o teorema que afirma que estas duas formas são invariantes e na verdade caracterizam completamente a hipersuperfície do ponto de vista eu



clidiano. Porém, do ponto de vista conforme isto não se verifica. Existem, no entanto, teoremas análogos, de certa forma, para o caso conforme, que serão apresentados a seguir. Antes, contudo, precisamos desenvolver as fórmulas (34) usando as fórmulas de passagem (31) e (32), obtendo as expressões de I e II em função das formas de conexão de um referencial conforme adaptado:

$$I = \frac{1}{(E_0^0)^2} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^2 \quad (35)$$

$$II = \frac{E_n^0}{(E_0^0)^2} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^2 - \frac{1}{E_0^0} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \omega_{in}$$

Teorema 2.4. Seja  $V \subset S^n$  uma hipersuperfície orientada e  $T$  uma transformação conforme de  $GC(n)$ ; sejam ainda  $U = \hat{T}(V)$ , com a orientação induzida, e  $I, II$  (respectivamente  $I', II'$ ) as formas fundamentais de  $V$  (respectivamente de  $U$ ). Então existem funções  $\lambda, \mu: V \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\lambda > 0$  em cada ponto, tais que

$$\hat{T}^* I' = \lambda^2 I$$

e

$$\hat{T}^* II' = \lambda II + \mu I.$$

Demonstração. Dado  $x \in V$ , seja  $E: A \rightarrow RC(x)$  um r.c.a., com  $A$  sendo uma vizinhança aberta de  $x$  em  $V$ . Construa um referencial  $F$  fazendo

$$F(\hat{T}(x)) = TE(x), \quad x \in A.$$

Este referencial resulta conforme e adaptado a  $\hat{T}(A) \subset U$ . Além disso, podemos escrever esta relação como

$$\hat{T}^* F = TE$$

donde, chamando de  $\omega$  e  $\psi$  as formas de conexão de  $E$  e  $F$  respectivamente,

$$\begin{aligned} \hat{T}^* \psi &= \hat{T}^* (F^{-1} dF) = \hat{T}^* F^{-1} \hat{T}^* dF = \\ &= (\hat{T}^* F)^{-1} d(\hat{T}^* F) = E^{-1} T^{-1} T dE = \\ &= E^{-1} dE = \omega, \end{aligned}$$

pois  $T$  é constante. Assim, usando as fórmulas (35),

$$\begin{aligned} T^* I' &= T^* \left[ \left( \frac{1}{F_0^0} \right)^2 \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^2 \right] = \\ &= \left( \frac{1}{F_0^0 \circ \hat{T}} \right)^2 \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{T}^* \psi_i)^2 = \left( \frac{1}{F_0^0 \circ \hat{T}} \right)^2 \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^2 = \\ &= \left( \frac{E_0^0}{F_0^0 \circ \hat{T}} \right)^2 I \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{T}^* I I' &= \hat{T}^* \left[ \frac{F_n^0}{(F_0^0)^2} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^2 - \frac{1}{F_0^0} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i \psi_{in} \right] = \\ &= \frac{F_n^0 \circ \hat{T}}{(F_0^0 \circ \hat{T})^2} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^2 - \frac{1}{F_0^0 \circ \hat{T}} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \omega_{in} = \end{aligned}$$

$$= \frac{E_0^0}{F_0^0 \circ \hat{T}} II + \left[ \frac{F_n^0 \circ \hat{T} \cdot (E_0^0)^2}{(F_0^0 \circ \hat{T})^2} - \frac{E_n^0 E_0^0}{F_0^0 \circ \hat{T}} \right] I$$

c.q.d.

Este teorema nos diz que, embora I e II não sejam invariantes por transformações conformes do ambiente, os subespaços  $\text{ger}(I)$  e  $\text{ger}(I, II)$  do espaço de todas as formas quadráticas sobre  $T_x V$  é invariante. Uma recíproca parcial deste teorema é dada abaixo.

Teorema 2.5. Sejam  $V, U$  hipersuperfícies conexas, orientadas de  $S^n$ , com  $n \geq 4$ , e seja  $\phi: V \rightarrow U$  um difeomorfismo tal que existam  $\lambda, \mu: V \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\lambda > 0$  em todo ponto, satisfazendo

$$\phi^* I' = \lambda^2 I$$

$$\phi^* II' = \lambda II + \mu I$$

onde  $I, II$  (respectivamente  $I', II'$ ) são as formas fundamentais de  $V$  (respect.  $U$ ). Então  $\phi$  é a restrição a  $V$  de uma transformação conforme  $\hat{T}$  da esfera  $S^n$ .

Demonstração. Dado  $x \in V$ , existe uma vizinhança aberta  $A$  de  $x$  e um referencial conforme adaptado  $E: A \rightarrow \mathbb{R}C(n)$ , com forma de conexão  $\omega$ . Fazendo mudanças convenientes podemos supor que  $E_0^0 = 1$  e  $E_n^0 = 0$ , de modo que as relações (35) ficam

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^2$$

$$II = - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \omega_{in}$$

A condição  $\phi^* I' = \lambda^2 I$  nos diz que  $\phi$  é conforme; logo, pelo teorema 2.1, existe um referencial conforme  $F$  adaptado a  $\phi(A)$  (se  $A$  for suficientemente pequena) com forma de conexão  $\psi$ , que cumpre

$$\phi^* \psi_i = \omega_i, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

Observe que isto acarreta  $F_0^0 \circ \phi = \frac{1}{\lambda}$ . Sabemos ainda que valem também

$$\phi^* \psi_{ij} = \omega_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n-1. \quad (37)$$

$$\text{A condição } \phi^* II' = \lambda II + \mu I = \frac{1}{F_0^0 \circ \phi} II + \mu I$$

nos dá

$$\lambda^2 F_0^0 \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \phi^* \psi_{in} = - \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \omega_{in} + \mu \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^2$$

Agora fazemos uma mudança do tipo  $F_n \rightarrow F_n + aF_0, F_{n+1} \rightarrow F_{n+1} - aF_n - \frac{1}{2} a^2 F_0, F_i \rightarrow F_i, 0 \leq i \leq n-1$ , com  $a$  escolhido de forma a cancelar os termos em  $\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^2$  na igualdade acima. Isto não prejudicará as relações (36) e (37). Ficamos com

$$-\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \phi^* \psi_{in} = -\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \omega_{in}$$

ou, sendo  $\lambda \neq 0$ ,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i (\omega_{in} - \phi^* \psi_{in}) = 0$$

Das equações de estrutura do referencial conforme temos também

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Lambda (\omega_{in} - \phi^* \psi_{in})$$

e, sendo as formas  $\omega_i$  l.i.,  $1 \leq i \leq n-1$ , estas duas relações combinadas implicam em

$$\omega_{in} = \phi^* \psi_{in}, \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (38)$$

Derivando as relações (37) e usando as equações de estrutura, obtemos, para  $1 \leq i, j \leq n-1$

$$0 = \omega_i \Lambda (\omega_{oj} - \phi^* \psi_{oj}) - \omega_j \Lambda (\omega_{oi} - \phi^* \psi_{oi}) \quad (39)$$

donde  $\omega_{oi} - \phi^* \psi_{oi}$  é combinação linear de  $\omega_i$  e  $\omega_j$  apenas. Mas como  $n \geq 4$ , temos pelo menos três índices distintos entre 1 e  $n-1$ , de modo que na verdade  $\omega_{oi} - \phi^* \psi_{oi} = a_i \omega_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . Voltando com isto na própria equação (39) e usando novamente que  $n \geq 4$  concluímos que  $\omega_{oi} = \phi^* \psi_{oi}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ .

Por fim, derivando as relações (38) e usando as equações de estrutura chegamos a

$$0 = \omega_i \Lambda (\omega_{on} - \phi^* \psi_{on}), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

donde  $\omega_{on} = \phi^* \psi_{on}$ , pois as  $\omega_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  são geradoras e

$n-1 \geq 2$ . Assim conseguimos mostrar que

$$\omega = \phi^* \psi.$$

A partir deste instante tudo prossegue analogamente ao que foi feito no teorema 2.2: derivamos a aplicação  $T: A \rightarrow GC(n)$ ,  $T(x) = F(\phi(x)) E^{-1}(x)$ , descobrimos que  $\bar{e}$  é constante e usamos o fato de  $V$  ser conexa para obter o resultado final.

c.q.d.

Corolário. Toda aplicação conforme entre duas hiperesferas de  $S^n$ ,  $n \geq 4$ , pode ser estendida a uma transformação conforme de  $S^n$ .

Demonstração. As hiperesferas são hipersuperfícies totalmente umbílicas e portanto temos para elas  $II \in \text{ger}(I)$ . Desta forma, basta que uma aplicação entre hiperesferas seja conforme para que satisfaça as hipóteses do teorema 2.5.

c.q.d.

Este corolário nos mostra em particular que o teorema 2.5. não é válido para  $n=3$ . De fato, as hiperesferas de  $S^3$  são bidimensionais e podem ser vistas como superfícies de Riemann. Neste caso, qualquer aplicação holomorfa entre elas é conforme, mas nem todas estas aplicações podem ser estendidas a  $S^3$ , porque, por exemplo, algumas delas não são nem ao menos injetoras.



## CAPÍTULO 3

HIPERSUPERFÍCIES CONFORMEMENTE PLANAS1. DEFINIÇÃO E PRIMEIROS RESULTADOS

Uma hipersuperfície  $V$  c  $S^n$ ,  $n \geq 3$ , é dita conformemente plana (c.p.) quando cada ponto  $x \in V$  tem uma vizinhança aberta  $U$  em  $V$  tal que existe uma aplicação conforme

$$\phi : U \rightarrow \hat{A}$$

onde  $\hat{A}$  é uma hiperesfera de  $S^n$ . Obviamente, segundo esta definição as hiperesferas são conformemente planas.

No caso  $n=3$  esta condição equivale à existência de parâmetros isotérmicos e é conhecido já há bastante tempo que toda hipersuperfície (que terá dimensão 2 neste caso) admite este tipo de parametrização e portanto é c.p. (veja Osserman [7] para uma demonstração).

Neste capítulo estudaremos o caso  $n \geq 4$  e, para simplificar, lidaremos apenas com hipersuperfícies que admitem referenciais conformes adaptados globais (em particular, elas serão orientáveis). Isto não é restritivo pois, como a definição de c.p. é local, os teoremas que obteremos poderão ser aplicados a cada aberto suficientemente pequeno de uma hipersuperfície genérica.

Começamos com um teorema que nos traduz a condição de uma hipersuperfície ser c.p. em termos da forma de conexão de um r.c.a.

Teorema 3.1. Seja  $V$  uma hipersuperfície de  $S^n$ ,  $n \geq 4$  e  $E : V \rightarrow RC(n)$  um r.c.a. com forma de conexão  $\omega$ . Então  $V$  é c.p. se e somente se existem 1-formas  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  definidas globalmente em  $V$  e satisfazendo

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \wedge \omega_i \quad (40)$$

$$0 = d\alpha_i + \omega_0 \wedge \alpha_i + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{ij} \wedge \alpha_j + \omega_{in} \wedge \omega_{0n}, \quad (41)$$

$$1 \leq i \leq n-1$$

$$\omega_{in} \wedge \omega_{jn} = \omega_i \wedge \alpha_j - \omega_j \wedge \alpha_i, \quad 1 \leq i, j \leq n-1.$$

(42)

Demonstração. Se  $V$  é c.p., vamos primeiro construir as formas  $\alpha_i$  localmente. Para cada ponto de  $V$  existe um difeomorfismo conforme  $\phi$  entre uma vizinhança deste ponto e um aberto de uma hiperesfera  $\hat{A}$ , com  $A^2 = 1$ . Pelo teorema 2.1 existe um r.c.a.  $F$  definido sobre este aberto de  $\hat{A}$ , com forma de conexão  $\psi$  tal que

$$\phi^* \psi_i = \omega_i, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (43)$$

Podemos ainda, sem alterar (43), escolher  $F_n =$  constante =  $A$ , donde

$$\psi_{in} = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Assim, fazendo

$$\alpha_i = \omega_{0i} - \phi^* \psi_{0i}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

as condições (40), (41) e (42) são conseqüências imediatas das equações de estrutura para os referenciais E e F.

Para ver que as formas  $\alpha_i$  podem ser definidas globalmente, basta mostrar que se  $(\alpha_i)$  e  $(\beta_i)$  são duas seqüências de formas que satisfazem as condições requeridas, então elas coincidem na intersecção dos domínios. De fato, isto é verdadeiro pois chamando de  $\gamma_i$  às diferenças  $\alpha_i - \beta_i$ , as condições (42) para  $\alpha_i$  e para  $\beta_i$  resultam em

$$0 = \omega_i \wedge \gamma_j - \omega_j \wedge \gamma_i \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (44)$$

donde, como  $n \geq 4$ , cada  $\gamma_i$  é combinação linear de  $\omega_i$  apenas:

$$\gamma_i = a_i \omega_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Voltando com isto para (44), vem

$$0 = a_i + a_j, \quad i \leq i < j \leq n-1$$

donde, como  $n \geq 4$ ,  $a_i = 0$ ,  $i \leq i \leq n-1$ , ou seja,  $\alpha_i = \beta_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , que é o que queríamos.

Reciprocamente, se existem formas  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , definidas em V e satisfazendo (40), (41) e (42), então podemos construir formas  $\psi_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n-1$ , colocando

$$\psi_0 = \omega_0$$

$$\psi_i = \omega_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$\psi_{ij} = \omega_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n-1$$

$$\psi_{in} = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

$$\psi_{oi} = \omega_{oi} - \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

e o restante das  $\psi_{ij}$  definidas de modo a satisfazer as equações de simetria (20). Devido a (40), (41) e (42) a forma  $\psi = (\psi_{ij})$  a valores matriciais  $(n+2) \times (n+2)$  satisfaz as equações de estrutura (21), de modo que o sistema diferencial sobre  $V$

$$dF = F\psi$$

onde  $F$  é a função incôgnita a valores matriciais  $(n+2) \times (n+2)$ , é completamente integrável, pois a condição de Frobenius para ele é

$$\begin{aligned} 0 &= d^2F = dF \wedge \psi + Fd\psi = \\ &= F\psi \wedge \psi + Fd\psi = F(\psi \wedge \psi + d\psi). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $F$  é uma solução deste sistema temos

$$\begin{aligned} d(F^{-t} \phi F^{-1}) &= -F^{-t} dF^t F^{-t} \phi F^{-1} - F^{-t} \phi F^{-1} dF F^{-1} = \\ &= -F^{-t} (\psi^t \phi + \phi \psi) F^{-1} = 0 \end{aligned}$$

Seja  $x_0 \in V$  e  $B \in RC(n)$ ; se tomarmos a solução  $F$  tal que  $F(x_0) = B$ , definida numa vizinhança  $U$  de  $x_0$ , então o que fizemos acima mostra que  $F(x) \in RC(n)$  para todo  $x \in U$  e ainda

$$dF_n = \sum_{i=0}^{n+1} \psi_i \alpha_i = 0$$

ou seja,  $F_n(x) = B_n$  para todo  $x \in U$ , donde

$$\pi(F_0(x)) \in \hat{B}_n$$

para todo  $x \in U$ . Usando técnicas semelhantes às da demonstração do teorema 2.1, não é difícil mostrar que  $\phi = \pi \circ F_0$  é na verdade um difeomorfismo local conforme, concluindo-se então que  $V$  é conformemente plana.

c.q.d.

As condições (40), (41) e (42) do teorema acima não são independentes. Vamos mostrar agora que se  $n \geq 4$  a condição (42) implica a (40) e, se  $n \geq 5$ , (41) também decorre de (42).

Para a primeira asserção, multiplicando exteriormente ambos os membros de (42) por  $\omega_j$  à direita, vem

$$\omega_i \wedge \omega_{jn} \wedge \omega_j = \omega_i \wedge \alpha_j \wedge \omega_j$$

Somando para  $j = 1, 2, \dots, n-1$ :

$$\omega_i \wedge \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{jn} \wedge \omega_j = \omega_i \wedge \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \wedge \omega_j$$

Pelas equações de estrutura,  $\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{jn} \wedge \omega_j = 0$ ,

logo

$$0 = \omega_i \wedge \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \wedge \omega_j$$

Esta equação nos diz que todos os monômios exteriores da 2-forma  $\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \wedge \omega_j$  tem um fator  $\omega_i$ , para  $1 \leq i \leq n-1$ .

Se existirem pelo menos 3 índices distintos entre 1 e  $n-1$ , ou seja, se  $n \geq 4$ , então isto acarreta

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \wedge \omega_j = 0$$

que é a condição (40).

Quanto à outra, derivando exteriormente a condição (42), aplicando as equações de estrutura para os  $d\omega_{ij}$  e  $d\omega_i$  que aparecerem e a própria condição (42), obtemos

$$\begin{aligned} & \omega_i \wedge (d\alpha_j + \omega_0 \wedge \alpha_j + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{jk} \wedge \alpha_k + \omega_{jn} \wedge \omega_{on}) = \\ & = \omega_j \wedge (d\alpha_i + \omega_0 \wedge \alpha_i + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{ik} \wedge \alpha_k + \omega_{in} \wedge \omega_{on}) \end{aligned}$$

Entre parêntesis aparecem as 2-formas da condição (41). Chamemo-las de  $E_i$  para facilitar os cálculos. Ficamos com

$$\omega_i \wedge E_j = \omega_j \wedge E_i \quad (45)$$



donde

$$\omega_j \wedge E_i \wedge \omega_i = 0$$

o que mostra que cada monômio exterior da 3-forma  $E_i \wedge \omega_i$  contém um fator  $\omega_j$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ . Se existem pelo menos 4  $\bar{i}$  indices distintos entre 1 e  $n-1$ , ou seja, se  $n \geq 5$ , isto acarreta

$$E_i \wedge \omega_i = 0$$

ou, em outras palavras,

$$E_i = \omega_i \wedge \beta_i$$

para certas 1-formas  $\beta_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . Voltando com isto a (45), temos

$$\omega_i \wedge \omega_j \wedge \beta_j = \omega_j \wedge \omega_i \wedge \beta_i$$

ou

$$\omega_i \wedge \omega_j \wedge (\beta_i + \beta_j) = 0$$

Escrevendo  $\beta_i = \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \omega_j$ , isto fica

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_{ik} + b_{jk}) \omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k = 0$$

donde, se  $i, j$  e  $k$  são distintos,

$$b_{ik} + b_{jk} = 0$$

e, se  $n \geq 5$ ,

$$b_{ik} = 0, \quad \text{para } i \neq k.$$

Concluimos que  $\beta_i = b_{ii} \omega_i$  e portanto

$$\varepsilon_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

satisfazendo a condição (41).

Assim, se  $n \geq 5$ , uma hipersuperfície de  $S^n$  é conformemente plana se e somente se realiza-se a condição (42). Para  $n = 4$ , é necessária também a condição (41).

Trataremos separadamente estes dois casos, um em cada uma das duas próximas secções.

## 2. O CASO $n \geq 5$ .

Na secção 2.4 definimos o operador de Weingarten de uma hipersuperfície orientada  $V$  como sendo o negativo da derivada da aplicação normal de Gauss  $N:V \rightarrow S^n$ , ressaltando o fato de ele ser auto-adjunto em relação ao produto interno dado pela métrica induzida  $g|_V$ . Dessa forma, é possível diagonalizar esse operador (em cada ponto) obtendo no máximo  $n-1 = \dim T_x V$  auto-valores distintos.

Dizemos que  $V$  é *quase-umbílica* quando em cada ponto  $x \in V$  o operador de Weingarten tem um auto-valor de multiplicidade maior ou igual a  $n-2$ . Em particular,

daí decorre que existem no máximo 2 auto-valores distintos. Esta definição não depende da orientação de  $V$  e é válida também para hipersuperfícies não-orientáveis se considerarmos aplicações normais de Gauss definidas apenas localmente.

O lema abaixo está relacionado com quase-umbilicidade e nos será útil na demonstração do teorema que o segue.

Lema 3.1. Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita  $m$  e  $L$  um operador auto-adjunto em relação a um produto interno  $\langle, \rangle$  sobre  $V$ . São equivalentes:

- 1)  $L$  tem um auto-valor de multiplicidade  $\geq m-1$ .
- 2) dada uma base ortonormal  $e_1 \dots e_m$  de  $V$ , a matriz  $A = (a_{ij})_{m \times m}$  de  $L$  em relação a essa base satisfaz

$$a_{ij} = \lambda \delta_{ij} + k c_i c_j, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

para certos  $\lambda, k, c_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq m$ .

Demonstração:

$1 \implies 2$ . Seja  $W$  um subespaço de dimensão  $m-1$  contido em  $\text{Ker}(L - \lambda \cdot \text{id})$ , onde  $\lambda$  é o auto-valor da hipótese. Tome um vetor  $c$  unitário e ortogonal a  $W$ . Como  $W^\perp$  é  $L$ -invariante e unidimensional,  $c$  é auto-vetor de  $L$ , correspondente a um auto-valor que chamaremos de  $\mu$ .

Dado  $v \in V$ , podemos escrever

$$v = \langle c, v \rangle c + v - \langle c, v \rangle c$$

onde  $\langle c, v \rangle c \in W^1$  e  $v - \langle c, v \rangle c \in W$ . Logo,

$$\begin{aligned} Lv &= \mu \langle c, v \rangle c + \lambda v - \lambda \langle c, v \rangle c = \\ &= \lambda v + (\mu - \lambda) \langle c, v \rangle c. \end{aligned}$$

A matriz  $A = (a_{ij})_{m \times m}$  é dada por

$$a_{ij} = \langle e_i, L e_j \rangle \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

donde

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle e_i, \lambda e_j + (\mu - \lambda) \langle c, e_j \rangle c \rangle = \\ &= \lambda \delta_{ij} + (\mu - \lambda) \langle c, e_i \rangle \langle c, e_j \rangle \end{aligned}$$

como queríamos.

2  $\implies$  1. Defina o vetor

$$c = \sum_{i=1}^m c_i e_i$$

Se  $v = \sum_{i=1}^m v_i e_i$  é ortogonal a  $c$ , isto é,

se  $\sum_{i=1}^m c_i v_i = 0$ , então

$$\begin{aligned} L(v) &= \sum_{i,j=1}^m a_{ij} v_j e_i = \\ &= \sum_{i,j=1}^m (\lambda \delta_{ij} + k c_i c_j) v_j e_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda \delta_{ij} v_j e_i + \sum_{i=1}^m k c_i c_j v_j e_i = \end{aligned}$$

$$= \lambda v.$$

Logo,  $\lambda$  é auto-valor de  $L$  e  $\text{Ker}(L - \lambda \cdot \text{id})$  contém o subespaço  $\text{ger}(c)^1$ , de dimensão  $\geq m-1$ .

c.q.d.

Teorema 3.2. Seja  $V \subset S^n$ ,  $n \geq 5$ , uma hipersuperfície admitindo referencial conforme adaptado global. Então  $V$  é conformemente plana se e somente se  $V$  é quase-umbílica.

Demonstração. Pelo que vimos na secção anterior, basta demonstrar que a quase-umbilicidade é equivalente à condição (42).

Suponha então que (42) se verifique e seja  $x \in V$ . Como o referencial do teorema 3.1 é qualquer, podemos escolhê-lo de modo que  $E_0^0 = 1$  e  $E_n^0 = 0$ , donde decorre que a aplicação  $N = -e_n = -\pi_{*E_0}(E_n)$  é uma aplicação normal de Gauss global. Além disso, podemos tomar os vetores  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , de modo que  $e_i = \pi_{*E_0}(E_i)$  sejam auto-vetores de  $-dN$  em  $x$ . Assim, teremos no ponto  $x$ ,

$$\begin{aligned} \omega_{in} &= \bar{\omega}_{in} = \langle e_i, de_n \rangle = \\ &= \langle e_i, de_n \left( \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\omega}_j e_j \right) \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \langle e_i, de_n(e_j) \rangle \bar{\omega}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{n-1} \langle e_i, a_j e_j \rangle \omega_j = \\
 &= a_i \bar{\omega}_i = a_i \omega_i,
 \end{aligned}$$

sendo  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , os auto-valores do operador de Weingarten em  $x$ . Pela condição (42),

$$\omega_{in} \wedge \omega_{jn} = \omega_i \wedge \alpha_j - \omega_j \wedge \alpha_i$$

Aplicando estas 2-formas ao par  $(e_i, e_j)$  vem

$$a_i a_j = \alpha_j(e_j) + \alpha_i(e_i), \quad i \neq j.$$

Sejam agora  $i, j, k, \ell$  quatro índices distintos entre 1 e  $n-1$ , cuja existência é assegurada pela hipótese  $n \geq 5$ . As igualdades

$$a_i a_k = \alpha_i(e_i) + \alpha_k(e_k)$$

$$a_i a_\ell = \alpha_i(e_i) + \alpha_\ell(e_\ell)$$

$$a_j a_k = \alpha_j(e_j) + \alpha_k(e_k)$$

$$a_j a_\ell = \alpha_j(e_j) + \alpha_\ell(e_\ell)$$

fornece

$$(a_i - a_j)(a_k - a_\ell) = 0$$

Isto mostra que todos os  $a_i$  são iguais entre si com exceção de um deles, no máximo. De fato, se ti-



veremos, por exemplo,  $a_1 \neq a_2$  e  $a_1 \neq a_3$ , as relações

$$(a_1 - a_2) (a_3 - a_i) = 0$$

$$(a_1 - a_3) (a_2 - a_i) = 0$$

mostram que todos os  $a_i$ , para  $4 \leq i \leq n-1$ , são iguais a  $a_2$  e  $a_3$  simultaneamente, donde todos os  $a_i$  são iguais entre si para  $2 \leq i \leq n-1$ .

Logo, como  $x$  é genérico,  $V$  é quase-umbílica.

Reciprocamente, suponha  $V$  quase-umbílica e seja  $E: V \rightarrow RC(n)$  um r.c.a.. Queremos encontrar formas  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , que satisfaçam (42). Colocando

$$\omega_{in} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \omega_j, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

e

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \omega_j, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Temos  $a_{ij} = a_{ji}$  pelas equações de estrutura e a condição (42) fica

$$\sum_{k,\ell=1}^{n-1} a_{ik} a_{j\ell} \omega_k \wedge \omega_\ell = \sum_{k=1}^{n-1} b_{jk} \omega_i \wedge \omega_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_{ik} \omega_j \wedge \omega_k$$

ou, igualando os coeficientes das formas l.i.,

$$a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2 = b_{ii} + b_{jj} \quad i, j \text{ distintos}$$

$$a_{ik} a_{jj} - a_{ij} a_{jk} = b_{ik} \quad i, j, k \text{ distintos} \quad (47)$$

$$a_{ik} a_{j\ell} - a_{i\ell} a_{jk} = 0 \quad i, j, k, \ell \text{ distintos.} \quad (48)$$

As relações (46) podem ser resolvidas para os  $b_{ij}$ , obtendo-se

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ii} a_{jj} + a_{ii} + a_{kk} - a_{jj} a_{kk} - a_{ij}^2 - a_{ik}^2 + a_{jk}^2),$$

$i, j, k \text{ distintos.} \quad (49)$

As fórmulas (49) e (47) dão soluções explícitas para os coeficientes  $b_{ij}$  e  $b_{ik}$  ( $i \neq k$ ), mas precisamos mostrar que estas soluções estão bem definidas, pois na fórmula (47) para  $b_{ik}$  aparece um índice estranho  $j$  e na fórmula (49) aparecem dois índices estranhos  $j$  e  $k$ . É necessário que estas soluções não dependam destes índices estranhos e além disso deve cumprir-se (48).

Se encararmos a matriz  $A = (a_{ij})_{(n-1) \times (n-1)}$  como matriz de um operador linear de  $T_x V$  em relação à base ortonormal  $e_1 \dots e_{n-1}$  que constitui o referencial projeção, as fórmulas de passagem (31) e (32) nos mostram que esse operador é uma combinação linear entre a identidade e o operador de Weingarten em  $x$ , qualquer que seja a orientação. Logo,  $A$  é matriz de um operador auto-adjunto que também tem um auto-valor de multiplicidade maior ou igual a  $n-2$ . Usando o lema 3.1, temos

$$a_{ij} = \lambda \delta_{ij} + k c_i c_j, \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (50)$$

Colocando estes valores em (47), vem

$$K c_i c_k (\lambda + K c_j^2) - K c_i c_j K c_j c_k = b_{ik}$$

ou

$$\lambda K c_i c_k = b_{ik}$$

mostrando que  $b_{ik}$  na verdade s̄o depende de  $i$  e de  $k$ . Colocando (50) em (48) verificamos a validade destas ūltimas. Por fim, colocando (50) em (49) chegamos a

$$b_{ii} = \frac{1}{2}(\lambda^2 + 2\lambda K c_i^2)$$

mostrando que  $b_{ii}$  s̄o depende de  $i$ .

Assim, os  $b_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n-1$ , est̄ao bem definidos por (47) e (49) e estas relaç̄oes juntamente com (48) nos garantem que (42) ē satisfeita.

c.q.d.

Corol̄ario. Seja  $V \subset S^n$ ,  $n \geq 5$ , uma hipersuperfície. Ent̄ao  $V$  ē conformemente plana se e somente se  $V$  ē quase-umbīlica.

Demonstraç̄ão. Suponha  $V$  c.p. e seja  $x \in V$ . Tome  $U$  vizinhança aberta de  $x$  que admite r.c.a.. É claro que  $U$  ē c.p., logo, pelo teorema 3.2,  $U$  ē quase-umbīlica. Como  $x$  ē genérico, temos que  $V$  ē quase-umbīlica.

Reciprocamente, se  $V$  ē quase-umbīlica, o mesmo acontecerā com suas subvariedades abertas. Seja  $x \in V$ ; to

mando uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  que admite r.c.a. podemos aplicar o teorema 3.2 a  $U$  concluindo que esta vizinhança  $\bar{e}$  c.p.. Mas uma hipersuperfície coberta por abertos c.p.  $\bar{e}$  obviamente c.p.

### 3. O CASO $n = 4$

Como vimos na secção 3.1, as hipersuperfícies c.p. de  $S^4$  são caracterizadas pela existência de formas  $\alpha_i$  que satisfaçam as condições (41) e (42).

Iniciaremos nosso estudo mostrando que *sempre* existem  $\alpha_i$  satisfazendo (42). Para tanto usaremos a seguinte convenção, que se manterá até o fim da secção: quando aparecerem os índices  $i, j, k$  numa expressão ou fórmula eles estarão representando todas as possíveis triplas ordenadas de números distintos entre 1 e 3. Nas somatórias usaremos sempre letras diferentes destas. Por exemplo, as equações de estrutura para  $d\omega_i$  podem ser escritas

$$0 = d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_0 + \sum_{\ell=1}^3 \omega_{i\ell} \wedge \omega_\ell, \quad 1 \leq i \leq 3$$

ou

$$0 = d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_0 + \omega_{ij} \wedge \omega_j + \omega_{ik} \wedge \omega_k.$$

Assim, colocando

$$\omega_{i4} = \sum_{\ell=1}^3 a_{i\ell} \omega_\ell, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (51)$$

e

$$\alpha_i = \sum_{\ell=1}^3 b_{i\ell} \omega_{\ell}, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (52)$$

e procedendo como na secção anterior chegamos a

$$b_{ii} = \frac{1}{2} (a_{ii}a_{jj} + a_{ii}a_{kk} - a_{jj}a_{kk} - a_{ij}^2 - a_{ik}^2 + a_{jk}^2) \quad (53)$$

e

$$b_{ij} = a_{ij}a_{kk} - a_{ik}a_{jk} \quad (54)$$

que determinam univocamente os coeficientes  $b_{ii}$ ,  $b_{ij}$  e portanto as formas  $\alpha_i$  a partir das formas de conexão do referencial conforme considerado.

Portanto, uma hipersuperfície de  $S^4$  com r.c.a. global  $\bar{e}$  c.p. se e somente se estas formas  $\alpha_i$  obtidas de (42) satisfazem (41), que na notação da secção 3.1 se escreve

$$E_i = 0$$

Isto posto, observemos agora que numa hipersuperfície genérica de  $S^4$  podem existir três tipos de pontos, especificadas abaixo:

1º tipo: pontos onde o operador de Weingarten tem apenas um auto-valor, de multiplicidade 3.

2º tipo: pontos onde o operador de Weingarten tem dois auto-valores distintos, um deles com multiplicidade 1 e o outro com multiplicidade 2.

3º tipo: pontos onde o operador de Weingarten tem três auto-valores, cada um deles com multiplicidade 1.

Esta classificação não depende da orientação escolhida nas vizinhanças de cada ponto. Na verdade, usando o teorema 2.4 verificamos mesmo que ela é invariante por transformações conformes da esfera ambiente  $S^4$ , pois qualquer combinação linear entre o operador de Weingarten e a identidade também terá as multiplicidades indicadas acima para seus auto-valores.

Embora em geral uma hipersuperfícies contenha pontos de cada um desses tipos, faremos primeiramente uma análise daquelas que possuem todos os pontos de um mesmo tipo. Os resultados obtidos serão posteriormente reunidos num só teorema, que tratará do caso geral.

Os pontos do 1º tipo são chamados de *pontos umbílicos*. É fácil ver que uma hipersuperfícies que são tem pontos umbílicos é totalmente umbílica (secção 2.3) e sabemos então que é formada de partes de hiperesferas; logo, é conformemente plana.

Para examinar os outros tipos de pontos, vamos empregar uma técnica que consiste em fazer uma mudança ortogonal nos vetores  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , do referencial conforme de modo que a matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$  definida por (51) fique diagonal para todo ponto num aberto. O problema aqui é que isto é impossível de se conseguir, em muitos abertos. Contudo, se  $U$  é um aberto de pontos do mesmo tipo então cada  $x \in U$  admite uma vizinhança na qual está



definido um r.c.a. tal que

$$\omega_{i4} = a_i \omega_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (55)$$

para certas funções  $a_i$ , diferenciáveis.

Com isto poderemos demonstrar o seguinte teorema, que liquida o caso dos pontos do 2º tipo.

Teorema 3.3. Seja  $V \subset S^4$  uma hipersuperfície tal que em todo ponto  $x \in V$  o operador de Weingarten (para qualquer orientação local) tenha exatamente dois auto-valores distintos. Então  $V$  é c.p..

Demonstração. Seja  $x \in V$  e  $U$  uma vizinhança aberta de  $x$  que admite r.c.a. para o qual vale (55). Da hipótese sobre os auto-valores do operador de Weingarten decorre que duas das funções  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , são iguais entre si e a terceira difere destas em todo ponto. Sem perda de generalidade, suporemos que  $a_1 \neq a_2 = a_3$ .

Fazendo a mudança  $E_4 \rightarrow E_4 - a_2 E_0$ ,  $E_5 \rightarrow E_5 + a_2 E_4 - \frac{1}{2} a_2^2 E_0$ ,  $E_i \rightarrow E_i$  para  $0 \leq i \leq 3$ , conseguimos

$$\omega_{14} = (a_1 - a_2) \omega_1$$

$$\omega_{24} = 0$$

$$\omega_{34} = 0$$

donde, pelas fórmulas (53), (54) e (52),

$$\alpha_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

e portanto as condições (41) ficam

$$0 = \omega_{14} \wedge \omega_{04}$$

$$0 = \omega_{24} \wedge \omega_{04}$$

$$0 = \omega_{34} \wedge \omega_{04}$$

das quais as duas últimas são obviamente verdadeiras. Falta então verificar a primeira, que é equivalente a

$$0 = \omega_1 \wedge \omega_{04}$$

pois  $a_1 \neq a_2$ .

Usando as equações de estrutura para  $d\omega_{24}$  e  $d\omega_{34}$  obtemos

$$0 = \omega_2 \wedge \omega_{04} + \omega_{21} \wedge \omega_{14}$$

$$0 = \omega_3 \wedge \omega_{04} + \omega_{31} \wedge \omega_{14}$$

ou, após multiplicação exterior por  $\omega_1$ ,

$$0 = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_{04}$$

$$0 = \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_{04}.$$

A primeira destas igualdades nos diz que  $\omega_{04}$  é combinação linear de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ; a segunda, que  $\omega_{04}$  é combinação linear entre  $\omega_1$  e  $\omega_3$ . Concluímos que  $\omega_{04}$  é na verdade múltipla de  $\omega_1$ , logo  $\omega_1 \wedge \omega_{04} = 0$ .

Assim,  $U$  é conformemente plana. Sendo  $x$  genérico, temos  $\forall$  c.p. também.

c.q.d.

Passaremos agora a examinar o caso dos três auto-valores distintos. Se tivermos um referencial conforme para o qual vale (55), então as equações (54) e (52) dão

$$\alpha_i = b_i \omega_i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

onde abreviamos  $b_{ij}$  para  $b_j$  sendo que estes coeficientes satisfazem

$$b_i + b_j = a_i a_j, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3, \quad (56)$$

ou, equivalentemente,

$$b_i = \frac{1}{2}(a_i a_j + a_i a_k - a_j a_k)$$

Chamando de  $E_i$  as 2-formas do segundo membro de (41), temos então

$$E_i = d(b_i \omega_i) + \omega_0 \wedge b_i \omega_i + \sum_{\ell=1}^3 \omega_{i\ell} \wedge b_{\ell} \omega_{\ell} + a_i \omega_i \wedge \omega_{04} \quad (57)$$

As equações de estrutura para  $d\omega_{i4}$  fornecem

$$0 = d(a_i \omega_i) + \omega_i \wedge \omega_{04} + \sum_{\ell=1}^3 \omega_{i\ell} \wedge a_{\ell} \omega_{\ell}$$

Substituindo em (57) o valor de  $\omega_i \wedge \omega_{04}$  obtido aqui, vem

$$E_i = d(b_i \omega_i) + b_i \omega_0 \wedge \omega_i - a_i d(a_i \omega_i) + \sum_{\ell=1}^3 (b_{\ell} - a_i a_{\ell}) \omega_{i\ell} \wedge \omega_{\ell}$$

donde, por (56),

$$\Xi_i = d(b_i \omega_i) - a_i d(a_i \omega_i) - b_i \omega_i \wedge \omega_0 - b_i \sum_{\ell=1}^3 \omega_i \wedge \omega_\ell$$

ou, usando as equações de estrutura para  $d\omega_i$ ,

$$\Xi_i = d(b_i \omega_i) - a_i d(a_i \omega_i) + b_i d\omega_i$$

donde, desenvolvendo as derivadas indicadas e agrupando os termos,

$$\Xi_i = (db_i - a_i da_i) \wedge \omega_i + (2b_i - a_i^2) d\omega_i.$$

Chamando de  $s_i$  a expressão

$$s_i = 2b_i - a_i^2 = (a_j - a_i)(a_i - a_k)$$

isto se escreve

$$\Xi_i = \frac{1}{2} ds_i \wedge \omega_i + s_i d\omega_i \quad (58)$$

Portanto, a hipersuperfície  $\bar{e}$  c.p. se e somente se

$$0 = \frac{1}{2} ds_i \wedge \omega_i + s_i d\omega_i \quad (59)$$

Observe que isto implica em particular que as três distribuições definidas por  $\omega_i = 0$  são completamente integráveis, pois  $s_i \neq 0$  em todo ponto. Porém, este fato não é suficiente para garantir (59).

Daremos agora uma interpretação geométrica dessas equações, devida a Cartan. Sabemos pelo teorema 2.4 que, embora I e II não sejam invariantes por transformações conformes, o feixe linear  $\text{ger}(I, II)$  que elas geram no espaço vetorial das formas quadráticas sobre  $T_x V$  é conservado. O fato de  $-dN$  admitir 3 auto-valores distintos implica que toda forma deste feixe tenha posto maior

ou igual a 2. Na verdade, existem aĩ apenas 3 direções distintas de formas degeneradas. Para ver isto, observe que o feixe em questão pode ser parametrizado por

$$(\lambda, \mu) \rightarrow \lambda(a_1\omega_1^2 + a_2\omega_2^2 + a_3\omega_3^2) + \mu(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)$$

Não perderemos nenhuma forma degenerada supondo  $\lambda \neq 0$ ; como estamos interessados apenas nas direções, supomos ainda que  $\lambda = 1$ . Daĩ é fãcil concluir que sã obtemos formas degeneradas para  $\mu = -a_1, -a_2$  ou  $-a_3$ , e essas formas tem, como jã comentamos, posto 2. Acontece que toda forma quadrãtica de posto 2 num espaço tridimensional pode ser escrita como produto de duas formas lineares l.i. (eventualmente complexas) de uma ũnica maneira, a menos de constantes multiplicativas. Isto dã origem a dois subespaços bidimensionais onde a restrição desta forma quadrãtica ĩ nula, a saber, os nũcleos das formas lineares.

No nosso caso, temos trẽs formas quadrãticas que podem ser decompostas em:

$$\begin{aligned} q_1 &= (a_2 - a_1)\omega_2^2 + (a_3 - a_1)\omega_3^2 = \\ &= (\sqrt{a_2 - a_1}\omega_2 + \sqrt{a_1 - a_3}\omega_3)(\sqrt{a_2 - a_1}\omega_2 - \sqrt{a_1 - a_3}\omega_3) . \\ q_2 &= (a_1 - a_2)\omega_1^2 + (a_3 - a_2)\omega_3^2 = \\ &= (\sqrt{a_1 - a_2}\omega_1 + \sqrt{a_2 - a_3}\omega_3)(\sqrt{a_1 - a_2}\omega_1 - \sqrt{a_2 - a_3}\omega_3). \quad (60) \\ q_3 &= (a_1 - a_3)\omega_1^2 + (a_2 - a_3)\omega_2^2 = \\ &= (\sqrt{a_1 - a_3}\omega_1 + \sqrt{a_3 - a_2}\omega_2)(\sqrt{a_1 - a_3}\omega_1 - \sqrt{a_3 - a_2}\omega_2). \end{aligned}$$

Chamaremos de *plano umbílico* em  $x \in V$  a um subespaço bidimensional  $W$  de  $T_x V$  tal que exista alguma forma quadrática não nula do feixe ger  $(I, II)$  cuja restrição a  $W$  é nula. Esta noção é intrínseca do ponto de vista conforme e pelo que foi feito acima resulta que há 6 planos umbílicos em cada ponto, dados pelas equações

$$\sqrt{a_i - a_j} \omega_i \pm \sqrt{a_j - a_k} \omega_k = 0. \quad (61)$$

Se supusermos  $a_1 > a_2 > a_3$ , o que pode ser feito sem perda de generalidade, observamos que apenas 2 desses planos são rigorosamente coerentes com a definição acima: aqueles correspondentes a  $q_2$ . Os outros 4 são imaginários, isto é, as equações correspondentes envolvem formas a valores complexos. Não obstante, continuaremos a tratá-los todos como legítimos planos umbílicos.

Uma *distribuição umbílica* sobre  $V$  é uma distribuição bidimensional diferenciável que a cada ponto de  $V$  associa um plano umbílico naquele ponto. Novamente temos a mesma questão: existem 2 distribuições umbílicas reais e 4 imaginárias sobre  $V$ , as quais serão tratadas igualmente, sem distinções. Quando dissermos que uma dada distribuição umbílica  $\mathcal{D}$  é involutiva, isto significará apenas que  $d\alpha \wedge \alpha = 0$  para toda forma  $\alpha$  (a valores eventualmente complexos) tal que  $\mathcal{D}_x = \text{Ker } \alpha(x)$  em todo  $x$  do seu domínio.

Poderemos para este fim usar as próprias for-



mas dadas em (61). Porém, para nós será mais conveniente multiplicar estas formas por  $\sqrt{a_k - a_j}$  (que é diferente de zero em todo ponto) obtendo as seguintes equações para as distribuições umbílicas:

$$\sqrt{s_j} \omega_j \pm \sqrt{s_k} \omega_k = 0 \quad (62)$$

Estamos agora prontos para apresentar a versão geométrica das equações (59):

Teorema 3.4. Seja  $V \subset S^4$  uma hipersuperfície tal que em todo ponto  $x \in V$  o operador de Weingarten (para qualquer orientação local) admite três auto-valores distintos. Então  $V$  é c.p. se e somente se as 6 distribuições umbílicas definidas sobre  $V$  são involutivas.

Demonstração. Suponha  $V$  c.p. Seja  $x \in V$  e  $U$  uma vizinhança aberta de  $x$  que admite r.c.a. para o qual vale (55). Por hipótese, realiza-se a condição (59), que pode ser escrita como

$$0 = \sqrt{s_j} d(\sqrt{s_j} \omega_j)$$

ou, lembrando que  $s_j \neq 0$  sempre,

$$0 = d(\sqrt{s_j} \omega_j).$$

Considerando a expressão local das distribuições umbílicas dada por (62), é imediato que elas são involutivas.

Reciprocamente, suponha que as 6 distribuições

umbílicas sejam involutivas. Seja novamente  $x \in V$  e  $U$  uma vizinhança aberta que admite r.c.a. verificando (55). Usando-se as equações (62) a hipótese de involutividade nos dá

$$d(\sqrt{s_i}\omega_i \pm \sqrt{s_j}\omega_j) \wedge (\sqrt{s_i}\omega_i \pm \sqrt{s_j}\omega_j) = 0$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} & \sqrt{s_i}d(\sqrt{s_i}\omega_i) \wedge \omega_i \pm \sqrt{s_j}d(\sqrt{s_i}\omega_i) \wedge \omega_j \pm \\ & \pm \sqrt{s_i}d(\sqrt{s_j}\omega_j) \wedge \omega_i + \sqrt{s_j}d(\sqrt{s_j}\omega_j) \wedge \omega_j = 0 \end{aligned}$$

donde

$$\sqrt{s_i}d(\sqrt{s_i}\omega_i) \wedge \omega_i + \sqrt{s_j}d(\sqrt{s_j}\omega_j) \wedge \omega_j = 0, \quad i \neq j \quad (63)$$

$$\sqrt{s_j}d(\sqrt{s_i}\omega_i) \wedge \omega_j + \sqrt{s_i}d(\sqrt{s_j}\omega_j) \wedge \omega_i = 0, \quad i \neq j \quad (64)$$

Introduzindo coeficientes eventualmente complexos, as equações (58) podem ser escritas como

$$\Xi_i = \sqrt{s_i}d(\sqrt{s_i}\omega_i)$$

e com isto as equações (63) e (64) se transformam em:

$$\Xi_i \wedge \omega_i + \Xi_j \wedge \omega_j = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3 \quad (65)$$

$$s_j \Xi_i \wedge \omega_j + s_i \Xi_j \wedge \omega_i = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3 \quad (66)$$

Como existem 3 índices distintos entre 1 e 3, as equações (65) acarretam

$$\Xi_i \wedge \omega_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Quanto às equações (66), relembrando as relações (45) da secção 3.1, obtemos

$$(s_i + s_j) \Xi_i \wedge \omega_j = 0$$

Mas um cálculo simples mostra-nos que  $s_i + s_j = (a_i - a_j)^2 \neq 0$ , donde

$$\Xi_i \wedge \omega_j = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3.$$

Com isto concluímos que cada monômio exterior de cada uma das 2-formas  $\Xi_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , contém todos os fatores  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$ , o que só é possível quando

$$\Xi_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

ou seja, a vizinhança  $U$  é conformemente plana. Como  $x$  é genérico, temos  $V$  c.p.

c.q.d.

Para finalizar a secção, um teorema que unifica todos os resultados anteriores.

Teorema 3.5. Seja  $V$  c  $S^4$  uma hipersuperfície. Defina  $W = \{x \in V \mid \text{o operador de Weingarten em } x \text{ possui 3 auto-valores distintos, para qualquer orientação local}\}$ .

Então  $V$  é c.p. se e somente se  $W = \emptyset$  ou as 6 distribuições umbílicas definidas sobre  $W$  são involutivas.

Demonstração. Suponha  $V$  c.p. Se  $W = \emptyset$ , nada há a demonstrar; caso contrário, como  $W$  é aberto em  $V$  e é claramente c.p., podemos aplicar o teorema 3.4 a  $W$  obtendo o resultado desejado.

Reciprocamente, suponha que as 6 distribuições umbílicas sejam involutivas sobre  $W$  (caso  $W \neq \emptyset$ ). Dado  $x \in V$ , seja  $U$  uma vizinhança aberta de  $x$  admitindo r.c.a. Queremos provar que  $\Xi_i = 0$  em  $U$ , para este r.c.a.. Considere então os seguintes subconjuntos de  $U$ :

$$U_i = \{x \in U \mid \text{o operador de Weingarten em } x \text{ admite exatamente } i \text{ auto-valores distintos, para qualquer orientação local}\}.$$

onde  $i = 1, 2$  e  $3$ .

O conjunto  $U_1$  contém os pontos umbílicos de  $U$ , seu interior  $\overset{\circ}{U}_1$  é c.p. pelo teorema 2.3 e portanto  $\Xi_i = 0$  em  $\overset{\circ}{U}_1$ .

O interior de  $U_2$  é c.p. pelo teorema 3.3, logo  $\Xi_i = 0$  em  $\overset{\circ}{U}_2$ .

Por fim,  $U_3$  é aberto em  $V$  e pelo teorema 3.4 é c.p., já que  $U_3 \subset W$ . Logo,  $\Xi_i = 0$  também em  $U_3$ .

Como a união entre  $\overset{\circ}{U}_1$ ,  $\overset{\circ}{U}_2$  e  $U_3$  é densa em  $U$  e  $\Xi_i \in C^\infty$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , temos  $\Xi_i = 0$  em  $U$ .

Assim,  $U$  é c.p. e sendo  $x$  genérico, concluímos

que  $V$  é c.p.

c.q.d.

#### 4. UMA CONSEQUÊNCIA GEOMÉTRICA DA QUASE-UMBILICIDADE

Gostaríamos de dar agora uma demonstração de um conhecido resultado sobre hipersuperfícies quase-umbílicas sem pontos umbílicos, utilizando o método do referencial conforme móvel.

Teorema 3.6. Seja  $V \subset S^n$ ,  $n \geq 4$ , uma hipersuperfície que em cada ponto tem um auto-valor de multiplicidade  $n-2$  para seu operador de Weingarten, para qualquer orientação local. Então  $V$  é folheada por subvariedades abertas de variedades esféricas  $n-2$  dimensionais.

Demonstração. Defina uma distribuição  $\mathcal{D}$  sobre  $V$  colocando em cada  $x \in V$   $\mathcal{D}_x$  igual ao auto-espaço  $n-2$  dimensional do operador de Weingarten. Esta distribuição não depende da orientação escolhida nas vizinhanças de cada ponto, é diferenciável e invariante por transformações conformes de  $S^n$ .

Dado  $x \in V$ , seja  $U$  uma vizinhança aberta de  $x$  que admite uma aplicação normal de Gauss  $N:U \rightarrow S^n$ . Como os auto-valores de  $-dN$  tem multiplicidade constante em  $U$ , podemos tomar, se  $U$  for suficientemente pequena, um referencial  $E:U \rightarrow RC(n)$  com forma de conexão  $\omega$  satisfazendo

$$\omega_{jn} = a_j \omega_j, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

em  $U$ . Como  $-dN$  tem um auto-valor com multiplicidade  $n-2$ , temos que  $n-2$  das funções  $a_i$  são iguais entre si e diferentes da restante. Sem perda de generalidade suporemos  $a_1 \neq a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1}$ . Fazendo então a mudança

$$E_n \rightarrow E_n - a_2 E_0,$$

$$E_{n+1} \rightarrow E_{n+1} + a_2 E_n - \frac{1}{2} a_2^2 E_0$$

$$E_i \rightarrow E_i, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

ficamos com

$$\omega_{1n} = (a_1 - a_2) \omega_1$$

$$\omega_{jn} = 0, \quad 2 \leq j \leq n-1$$

Derivando exteriormente estas últimas equações chegamos a

$$0 = \omega_j \wedge \omega_{0n} + \omega_{j1} \wedge \omega_{1n}, \quad 2 \leq j \leq n-1$$

donde

$$0 = \omega_1 \wedge \omega_j \wedge \omega_{0n}, \quad 2 \leq j \leq n-1$$

o que mostra que  $\omega_{0n}$  é múltipla de  $\omega_1$ :

$$\omega_{0n} = k \omega_1.$$

Fazendo então a mudança

$$E_1 \rightarrow E_1 + a E_0$$



$$E_i \rightarrow E_i, \quad i = 0, 2, 3, \dots, n-1$$

$$E_{n+1} \rightarrow E_{n+1} - aE_1 - \frac{1}{2} a^2 E_0$$

onde  $a = \frac{k}{a_1 - a_2}$ , obtemos  $\omega_{0n} = 0$  sem alterar  $\omega_i$  nem  $\omega_{in}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . Agora o referencial está pronto para ser usado.

A distribuição  $\mathcal{D}$  é dada localmente por

$$\omega_{1n} = 0$$

e a equação de estrutura para  $d\omega_{1n}$  conduz a

$$d\omega_{1n} = 0$$

provando que  $\mathcal{D}$  é involutiva. Observe que

$$dE_n = \omega_{1n} E_1,$$

logo  $E_n$  é constante sobre cada variedade integral conexa de  $\mathcal{D}$ . Vamos mostrar que o mesmo ocorre com  $E_1$ . De (25),

$$dE_1 = \omega_{01} E_0 + \sum_{j=2}^{n-1} \omega_{j1} E_j + \omega_{n1} E_n - \omega_1 E_{n+1}$$

portanto, se  $\omega_{1n} = 0$  temos a anulação dos dois últimos termos. A equação de estrutura para  $d\omega_{0n}$  dá

$$0 = \omega_{01} \wedge \omega_{1n}$$

o que mostra que  $\omega_{01}$  é múltipla de  $\omega_{1n}$ ,

A equação de estrutura para  $d\omega_{in}$ ,  $2 \leq i \leq n-1$  dá  
agora

$$0 = \omega_{i1} \wedge \omega_{1n}$$

ou seja,  $\omega_{i1}$  também é múltipla de  $\omega_{1n}$  para  $2 \leq i \leq n-1$ .

Concluimos que  $E_1$  é constante sobre as variedades integrais conexas de  $\mathcal{D}$ .

Assim, as folhas são as variedades integrais maximais de  $\mathcal{D}$ , que são subvariedades abertas conexas das variedades esféricas  $\hat{E}_1 \cap \hat{E}_n$ .

c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BENZ, W., "Der Satz von Liouville über räumliche orthogonaltreue (winkeltreue) Abbildungen für beliebige Signatur", *Aequationes Mathematicae*, 21 (1980) 257-282.
- [2] BOOTHBY, W.M., "An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry", New York, Academic Press, 1975.
- [3] CARTAN, E.J., "La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à  $n \geq 5$  dimensions", *Bull. Soc. Math. France*, 45 (1917) 57-141 in *Oeuvres Complètes, Partie III, Vol. I*, p. 221-285, Paris, Gauthier-Villars, 1955.
- [4] CARTAN, E.J., "Les espaces à connexion conforme", *Ann. Soc. Pol. Math.*, 2 (1923) 171-221 in *Oeuvres Complètes, Partie III, Vol. I*, p. 747-797, Paris, Gauthier-Villars, 1955.
- [5] CARTAN, H.P., "Formes différentielles", Paris, Hermann, 1967.
- [6] HOFFMAN, K. & KUNZE, R.A., "Algebra Linear", Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1976.
- [7] OSSERMAN, R., "A survey of minimal surfaces", New York, Van Nostrand, 1969.