SOBRE ESPAÇOS $\Sigma(J)$

Maria Stella Amorim Coutinho Castilla

TESE APRESENTADA AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR: Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas

São Paulo, outubro de 1984

AGRADEÇO

À amiga *Ofélia* pela orientação;

Ao professor *W.W. Comfort* pelas sugestões e estímulo;

Aos professores *Frank Tall* e *Francisco Miraglia* pelas sugestões;

Aos meus *pais*, ao *Carlos*, ao Dr. *Raymond* e ao ... *ANDRÉ* pelo apoio.

o°o

ÍNDICE

Introdução i

Abstract iii

CAPÍTULO I - PRELIMINARES

1. Algumas definições e notações 1
2. Funções cardinais 7
3. Condições de cadeia 11
4. Σ-produtos — alguns resultados 13
5. Funções contínuas definidas em espaços produtos (ou subconjuntos de espaços produto) 17

CAPÍTULO II - INVARIANTES CARDINAIS E CONDIÇÕES DE CADEIA

1. Invariantes cardinais 20
2. Condições de cadeia 28
3. Espaços m-Baire 37
4. Espaços pseudo-m-compactos 40
5. m-compacidade 43

CAPÍTULO III - NORMALIDADE DE ESPAÇOS DETERMINADOS POR σ-IDEAIS

1. Resultados preliminares 47

2. Condições necessárias à normalidade $\Sigma(\mathcal{J})$ . . . 52

3. Normalidade e m-paracompacidade 59

. Comentários 60

. Algumas observações sobre normalidade coletiva e normalidade hereditária e pseudo-normalidade 60

4. Normalidade de potências de $L(\mathcal{J})$ 62

CAPÍTULO IV - FUNÇÕES CONTÍNUAS DEFINIDAS EM $\Sigma(\mathcal{J})$

Resultados. 65

APÊNDICE 1 - GRUPOS TOPOLÓGICOS 75

APÊNDICE 2 - BOX-PRODUTOS 80

BIBLIOGRAFIA 85

o°o
o

Introdução

A idéia inicial deste trabalho ocorreu após a leitura, por sugestão da orientadora, do artigo de Broverman, Ginsburg, Kunen e Tall [B]. Pareceu muito natural prosseguir no estudo do tipo de espaço (descrito em [B]) em condições mais gerais. Este foi apenas o ponto de partida de um trabalho do qual se tem muito a desenvolver. A interligação entre Teoria dos Conjuntos e Topologia Geral, na própria definição dos espaços, permite uma grande variação de problemas, seja na maneira como a Teoria dos Conjuntos afeta as propriedades topológicas, seja em problemas de aspecto puramente topológico que se tornam, por exemplo, uma questão de consistência em Teoria dos Conjuntos.

No Capítulo I são estabelecidos os pré-requisitos necessários ao entendimento do trabalho. Entretanto, algumas definições e resultados aparecem somente em capítulos seguintes, quando serão utilizados.

O capítulo que se segue é inteiramente dedicado a funções cardinais e condições de cadeia. Gostaríamos de ressaltar a importância de ambos em Topologia Geral. Um exemplo desta importância foi a solução de um problema proposto por Alexandroff e que esteve em aberto por cincoenta anos: Será que a cardinalidade de um espaço compacto satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade é menor ou igual a $2^{\aleph_0}$? A resposta afirmativa foi dada por Arhangelskii que demonstrou

o resultado mais geral seguinte para qualquer espaço topológico X, $|X| \leq 2^{L(X)\underline{\chi}(X)}$ onde L(X) é o número de Lindelöf de X. Maiores esclarecimentos nesta área encontram-se no livro de I. Juhász, "Cardinal functions in Topology - Ten Years Latter", (1981).

Observemos também, que espaços homeomorfos têm associados os mesmos invariantes cardinais.

O terceiro capítulo trata do estudo da normalidade nos espaços $\Sigma(J)$. Aqui motivados por trabalhos de Kombarov, bem como por aquele inicialmente mencionado, tentamos fechar as questões ligadas à normalidade. Temos, no entanto uma questão em aberto.

O quarto e último capítulo é dedicado ao estudo de funções contínuas definidas em espaços $\Sigma(J)$. Sendo estes subespaços de espaços produto, temos interesse em verificar em que situações tais funções dependem de uma quantidade restrita de coordenadas, já que isso pode levar a interessantes conclusões a respeito desses espaços.

Os apêndices 1 e 2 mostram uma abordagem de propriedades desses espaços, distinta da inicial e também, indicam linhas de trabalho que serão seguidas posteriormente.

o o o

ABSTRACT

The purpose of this work is to study $\Sigma(J)$ spaces which are subspaces of products.

We study cardinal functions normality and continuous functions on $\Sigma(J)$ for different kinds of σ-ideals. In the appendix 1 we give informations about the topological group structure of some $\Sigma(J)$ and in appendix 2 some information about J-box topology.

o o o

CAPÍTULO I

Preliminares

Neste capítulo pretendemos desenvolver a maioria dos pré-requisitos necessários ao resto do trabalho, bem como dar um apanhado dos principais resultados existentes sobre Σ-espaços ou Σ-produtos, forma como frequentemente são denominados tais espaços.

1. Algumas definições e notações

Definição 0. - Um espaço topológico X diz-se *completamente regular*, ou *espaço Tychonoff* se for Hausdorff e para todo $x \in X$ e todo fechado F, $\emptyset \neq F \subset X$, tal que $x \notin F$ existe uma função contínua $f: X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$, para qualquer $y \in F$.

Um primeiro ponto para o qual devemos chamar a atenção é que em todo o trabalho, salvo menção contrária, os espaços topológicos serão supostos completamente regulares.

Dada uma família de espaços topológicos $(X_t)_{t \in T}$ denotamos por $\prod_{t \in T} X_t$ o espaço produto munido da topologia produto, ou seja, a gerada pelos abertos elementares $\Omega = \prod_{t \in T} \Omega_t$ onde cada Ω_t é aberto em X_t para cada $t \in T$ e $\{t \mid \Omega_t \neq X_t\}$ é finito.

É preciso lembrar algumas propriedades dos espaços completamente regulares que serão importantes para os espaços que são objeto do trabalho.

Observações: a) Todo subespaço de um espaço completamente regular é completamente regular.

b) Um produto não vazio de espaços completamente regulares é completamente regular.

Definição 1. - Dado um conjunto T , $T \neq \emptyset$, definimos um *ideal sobre* T , usualmente denotado por $\mathcal{J}$, como sendo um subconjunto do conjunto de partes de T , $\mathcal{P}(T)$, satisfazendo a:

i) $\emptyset \in \mathcal{J}$

ii) $\{t\} \in \mathcal{J}$ qualquer que seja $t \in T$

iii) Dados I_1 e I_2 em $\mathcal{J}$, $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{J}$

iv) Se $J \subset I$ e $I \in \mathcal{J}$ então $J \in \mathcal{J}$.

Observação: No trabalho vamos apenas nos preocupar com ideais fechados por reuniões enumeráveis que são denominados *σ-ideais*.

Definição 2. - Um *ordinal* é um conjunto α que é bem ordenado pela relação $\in$ e transitivo. Entende-se por *conjunto transitivo* um α tal que $\beta \in \alpha$ e $\gamma \in \beta$ implica $\gamma \in \alpha$. Um ordinal é o conjunto dos ordinais que o precedem.

Definição 3. - Dizemos que dois conjuntos A e B têm mesma *cardinalidade*, ou em símbolos $|A| = |B|$ se existe uma função biunívoca de A sobre B. Diremos que a cardinalidade de A é menor ou igual à de B, $|A| \leq |B|$ se existir uma função biunívoca de A em B.

Definição 4. - Um *cardinal* é um ordinal α tal que $\beta < \alpha$ implica $|\beta| < |\alpha|$. Vamos usualmente denotar cardinais com letras minúsculas m,n,p etc. .

Definição 5. - Para cada número cardinal $m > 1$ a *cofinalidade de m* , denotado cf(m), é o número cardinal

$$cf(m) = \inf\{|\Lambda| : m = \sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda \ , \ m_\lambda \text{ cardinal e cada } m_\lambda < m\}$$

Números cardinais m para os quais $m = cf(m)$ são ditos *regulares*, caso contrário isto é, quando $cf(m) < m$, dizemos que são *singulares*.

Vamos agora apresentar alguns exemplos de σ-ideais para ressaltar sua importância.

Exemplo 6. - O conjunto dos subconjuntos de primeira categoria de Baire em um espaço métrico completo X forma um σ-ideal sobre X.

Exemplo 7. - Os subconjuntos de [0,1] de medida de Lebesgue zero formam um σ-ideal sobre [0,1].

Exemplo 8. - Os conjuntos não estacionários de m, m cardinal regular (visto como ordinal) formam um σ-ideal. Para maiores detalhes ver exemplo II 31 .

Os σ-ideais não foram ainda objeto de estudo profundo em topologia, sobretudo no que se refere à interligação entre propriedades de teoria dos conjuntos dos σ-ideais e as propriedades topológicas dos espaços (topológicos) por eles determinados.

Neste trabalho vamos nos dedicar ao estudo dos espaços $\Sigma(\mathcal{J})$, que são de certa forma uma generalização dos Σ-espaços inicialmente estudados por Corson [C] em 1959.

Definição 9. - Sejam $X = \prod_{t\in T} X_t$ um espaço topológico produto, $\mathcal{J}$ um σ-ideal sobre T e $e = (e_t)_{t\in T}$ um ponto arbitrário, porém fixado, de X. O espaço topológico $\Sigma(\mathcal{J}) \subset X$ tem como suporte o conjunto definido abaixo:

$$\{ x \in X \mid \{t \mid x_t \neq e_t\} \in \mathcal{J}\}$$

e a topologia induzida pela topologia produto. O ponto $e = (e_t)_{t\in T}$ é denominado *ponto base de* $\Sigma(\mathcal{J})$

Notação: - Alguns σ-ideais vão aparecer com bastante frequência, por esse motivo vamos ter para eles uma notação particular. Dados um conjunto T e um cardinal infinito m denotamos:

$$[T]^{\leq m} = \{S \subset T \mid \quad |S| \leq m\}$$

$$[T]^{<m} = \{S \subset T \mid \quad |S| < m\} \qquad cf(m) > \aleph_0$$

Observe-se que, se no primeiro caso $m = |T|$ e no segundo $m > |T|$, os σ-ideais correspondentes coincidem com o conjunto de partes de T, $P(T)$. Também é bom notar que se $cf(m) = \aleph_0$, $[T]^{<m}$ não é um σ-ideal, apenas um ideal. O espaço obtido com este ideal é o *σ-produto* que foi introduzido por Corson e que vamos denotar no decorrer do trabalho por Σ_0. Verifica-se facilmente que Σ_0 é um subespaço denso em $\prod_{t \in T} X_t$. Como para qualquer ideal ou σ-ideal $\Sigma(J) \supset \Sigma_0$, todos os subespaços $\Sigma(J)$ são densos no espaço produto $\prod_{t \in T} X_t$.

É importante ressaltar que espaços $\Sigma(J)$ contidos em um mesmo espaço produto, determinados por um mesmo σ-ideal óbviamente, podem não ser (topologicamente) iguais se os pontos base forem distintos. Este fato pode ser observado no exemplo abaixo.

<u>Exemplo 10.</u> - Seja T um conjunto de índices cuja cardinalidade é maior que $\aleph_0$. Para todo $t \in T$ seja X_t o compactificado de Alexandroff de um espaço topológico discreto D, isto é, $X_t = D \cup \{\infty\}$, $\infty \notin D$ e para cada $d \in D$, $\{d\}$ é aberto. Além disso V é vizinhança de ∞ se $V-D$ for finito. Vamos considerar $J = [T]^{\leq \aleph_0}$ e tomar $\Sigma(J)$ espaços com pontos base distintos, a saber $\Sigma_1(J)$ e $\Sigma_2(J)$. O primeiro tem co-

mo ponto base o ponto que tem todas as coordenadas iguais a ∞ e o segundo tem como ponto base $d = (d_t)_{t \in T}$ onde, para cada t, $d_t \in D$. Um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto de $\Sigma_1(\mathcal{J})$ tem cardinalidade $\geq |D|$, ao passo que um sistema fundamental de vizinhanças de $d \in \Sigma_2(\mathcal{J})$ tem cardinalidade $|T|$. Quando $|D| > |T|$ teremos situações distintas nos dois casos. □

Observação: - Quando o espaço $\Sigma(\mathcal{J})$ está contido num produto de espaços homogêneos será homeomorfo a qualquer outro $\Sigma'(\mathcal{J})$ contido no mesmo produto determinado pelo mesmo σ-ideal e com diferente ponto base.

Corson faz um comentário neste sentido em [C], onde exibe um outro exemplo.

Precisamos também ressaltar a importância que a Teoria dos Conjuntos tem sobre a Topologia Geral, na medida em que na presença ou não de certos axiomas da primeira resultados de topologia podem ser afirmativos ou não. No trabalho estaremos assumindo ZFC todo o tempo. A menos que se faça referência, os resultados independem da hipótese do Contínuo (CH). Vamos em alguns resultados utilizar o Axioma de Martin, que pode ser enunciado de diversas formas. Vamos apresentar uma que parece mais natural para a Topologia.

Axioma de Martin - Não existe espaço compacto Hausdorff, ccc, que seja união de menos que c ($=2^{\aleph_0}$) conjuntos raros. (ver na definição 16. o significado de ccc).

Sob CH o Axioma de Martin (MA) é o Teorema de Categoria de Baire com a hipótese extra do espaço ser ccc. Por isso, frequentemente, quando supusermos MA vamos negar CH, ou resumidamente, (MA $\dot{+}$ $\neg$CH). O que vamos realmente utilizar no trabalho é a seguinte consequência de (MA $\dot{+}$ $\neg$CH):

Teorema 11. [ME] - (MA $\dot{+}$ $\neg$CH) - Se $(X_t)_{t\in T}$ é uma família de espaços ccc então $\prod_{t\in T} X_t$ é ccc.

Observemos que (MA $\dot{+}$ $\neg$CH) implica na não existência da *reta de Souslin* S. A reta de Souslin é um espaço topológico linearmente ordenado sem primeiro nem último elemento, ccc e não separável. S X S não é ccc.

2. Funções cardinais

A topologia geral é um campo da matemática onde se pode aplicar, de forma natural, métodos da teoria dos conjuntos. Ocorre também que muitos problemas da teoria dos conjuntos se originam na topologia geral.

Essa interação entre topologia e teoria dos conjuntos dá lugar ao estudo dos invariantes cardinais que descre-

vem certas propriedades de espaços topológicos.

No que se segue X é um espaço topológico e $\tau(X)$ é a topologia de X. Dado $A \subset X$, $\overline{A}$ denota o fecho de A em X.

Definição 12. - O *peso* de um espaço topológico X, $\omega(X)$, é definido por:

$$\omega(X) = \min\{|\mathcal{B}| \mid \mathcal{B} \text{ é uma base aberta para } X\} + \aleph_0 .$$

Definição 13. - Dada $\mathcal{B} \subset \tau(X)-\{\emptyset\}$, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *π-base* de X, se para todo aberto não vazio $\Omega \subset X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset \Omega$.

Definição 14. - O *π-peso* de um espaço topológico X, $\pi\omega(X)$ é definido por:

$$\pi\omega(X) = \min\{|\mathcal{B}| \mid \mathcal{B} \text{ é uma } \pi\text{-base de } X\} + \aleph_0 .$$

Definição 15. - Seja $\mathcal{C} \subset \tau(X)-\{\emptyset\}$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é *celular* se os elementos de $\mathcal{C}$ são dois a dois disjuntos.

Definição 16. - A *celularidade* do espaço topológico X, $c(X)$ é definida por:

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| \mid \mathcal{C} \text{ é família celular em } X\} + \aleph_0 .$$

Costuma-se dizer que o espaço é ccc se a celularidade for $\aleph_0$.

Definição 17. - O "spread" (espalhamento) de um espaço topológico X, $s(X)$, é definido por:

$$s(X) = \sup\{|S| \mid S \text{ como subespaço de } X \text{ é discreto}\} + \aleph_0 .$$

Definição 18. - O *caráter local no ponto* x de um espaço topológico X, $\chi(x,X)$, é definido por:

$$\chi(x,X) = \min\{|\mathcal{V}| \mid \mathcal{V} \text{ é sistema fundamental de vizinhanças no ponto } x\} + \aleph_0 .$$

O *caráter* de X, $\chi(X)$, é definido por:

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x,X) \mid x \in X\} .$$

Definição 19. - O pseudo-caráter local no ponto x de um espaço topológico X, $\psi(x,X)$ é definido por:

$$\psi(x,X) = \min\{ |\mathcal{U}| \mid \mathcal{U} \text{ é família de abertos e } \cap \mathcal{U} = \{x\} \} .$$

Definição 20. - Dados $x \in \overline{S} \subset X$ definimos os invariantes cardinais $a(x,S)$ e $t(x,X)$ respectivamente como sendo:

$$a(x,S) = \min\{|M| \mid M \subset S \text{ e } x \in \overline{M}\}$$
$$t(x,X) = \sup\{a(x,S) \mid x \in \overline{S} \subset X\}$$

O "tightness" de X, $t(X)$, é definido por:

$$t(X) = \sup\{t(x,X) \mid x \in X\} .$$

Como os espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ estão contidos em espaços produto passaremos a calcular alguns invariantes cardinais destes últimos a partir dos respectivos valores nos fatores.

<u>Teorema 21.</u> - Seja $X = \{0,1\}^m$, onde m é um cardinal infinito.

(a) Se ϕ é algum dos seguintes invariantes cardinais - peso, "spread", π-peso, caráter ou "tightness", então:

$$\phi(\{0,1\}^m) = m$$

(b) $d(\{0,1\}^m) = \log m$ onde $\log m$ é definido por:

$$\log m = \min\{p \mid 2^p \geq m\}$$

onde $d(X)$ é a densidade de um espaço topológico X, assim definida:

$$d(X) = \min\{|D| \mid D \subset X \text{ e } \bar{D} = X\} .$$

Consideremos agora um caso mais geral onde os fatores são espaços topológicos completamente regulares. Seja $X = \prod_{t\in T} X_t$ um tal produto. Para qualquer invariante cardinal ϕ, definimos:

$$\phi_T(X) = \sup\{\phi(X_t) : t \in T\} .$$

Seguindo esta notação podemos enunciar mais alguns resultados sobre invariantes cardinais em espaços produto.

<u>Teorema 22.</u> - Seja $X = \prod_{t\in T} X_t$ um espaço produto.

(a) Se ϕ é um dos seguintes invariantes cardinais peso, π-peso, caráter ou pseudo-caráter, então:

$$\phi(X) = |T|\ \phi_T(X)$$

(b) $d(X) = \log|T| d_T(X)$

(c) Se, para cada $F \subset T$, F finito, $t(\prod_{t\in F} X_t) \leq m$, então

$$t(X) \leq \max\{|T|, m\} .$$

Como consequência do item b) do teorema anterior temos o corolário:

Corolário 23. - Se $X = \prod_{t \in T} X_t$ e $d(X_t) \leq m$ para qualquer $t \in T$, então $c(X) \leq m$.

3. Condições de cadeia

No parágrafo anterior foram apresentados alguns invariantes cardinais, ou como também são chamados as funções cardinais, que associam a cada espaço topológico certos números cardinais. No entanto, podemos associar a espaços topológicos números cardinais sem obter necessariamente uma função cardinal, como é o caso das condições de cadeia. Estas condições se referem ao comportamento de famílias de abertos do espaço.

Definição 24. - Seja X um espaço topológico. Dizemos que o cardinal m é um *calibre* para X se dada uma família de abertos não vazios $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ com $|A| = m$ existir $A' \subset A$, $|A'| = m$, tal que

$$\bigcap_{\alpha \in A'} U_\alpha \neq \emptyset$$

Definição 25. - Seja X um espaço topológico. Dizemos que o cardinal m é um *calibre compacto* para X se dada uma família de abertos não vazios $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ com $|A| = m$ existirem $K \subset X$, compacto, e $A' \subset A$, $|A'| = m$, tais que:

$$U_\alpha \cap K \neq \emptyset \quad \text{qualquer que seja } \alpha \in A.$$

Definição 26. - Dizemos que um espaço topológico X é *pseudo m-compacto* se toda família de abertos $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ com $|A| = m$ tiver um ponto de acumulação, isto é, existe $x \in X$ tal que qualquer vizinhança de x encontra infinitos elementos da família $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$.

É importante chamar atenção para o teorema abaixo, pois exemplifica o fato de que calibre, calibre-compacto não são funções cardinais.

Teorema 27. - Sejam $m \geq \aleph_0$ e X um espaço topológico:

a) Se m é calibre de X, cf(m) também o é;

b) Se m é calibre-compacto de X, cf(m) também o é;

c) Se m é calibre de X, m é calibre-compacto de X;

d) Se m é calibre de X, X é pseudo m-compacto.

Na demonstração de que um certo cardinal é calibre para espaços $\Sigma(J)$ utilizamos um teorema de teoria combinatória infinita. O referido teorema é devido a Erdős-Rado, e costuma-se mencioná-lo como "Δ-system" em textos em inglês. Traduzimos como sistema de diagonalização. Antes de seu enunciado é preciso introduzir algumas definições.

Definição 28. - Uma família A de conjuntos finitos ou infinitos é dita *quasedisjunta* se $\{A-\bigcap A \mid A \in A\}$ é disjunta.

Observação: - Na verdade, o fato de A ser quasedisjunta é equivalente ao fato de existir um conjunto Z tal que quaisquer A e B em A com $A \neq B$ ocorre $A \cap B = Z$.

O teorema seguinte vai ser extremamente útil ao trabalharmos com espaços produto e subconjuntos dos mesmos como é o caso dos espaços $\Sigma(\mathcal{J})$.

Teorema 29. - Seja A uma família não enumerável de subconjuntos finitos, vale a seguinte igualdade:

$$\sup\{|L| \mid L \subset A \text{ e } L \text{ é quasedisjunta}\} = |A| .$$

Se além disso $|A|$ é regular, então existe $L \subset A$, L quasedisjunta tal que $|L| = |A|$.

Teorema 30. - Seja $m > \aleph_0$ um cardinal regular tal que é um calibre para o espaço X_t, qualquer que seja $t \in T$. Então, m é calibre para $\prod_{t \in T} X_t$.

4. Σ-produtos - alguns resultados

A primeira vez que foi apresentada a idéia de Σ-produto foi em um artigo de Corson do ano de 1959 [C]. Neste artigo, Corson se restringe ao estudo de espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ determinados pelo σ-ideal $\mathcal{J} = [T]^{\leq \aleph_0}$, apresentando diversos resultados sobre estes espaços. Um dos primeiros resultados apresentados se refere a normalidade.

Teorema 31. - O Σ-produto de espaços métricos completos é normal.

Este último resultado é muito interessante sobretudo se lembrarmos do seguinte fato provado por Stone:

$\mathbb{N}^{\aleph_1}$ não é normal.

Definição 32. - Seja X um espaço topológico. Uma família $(Y_\alpha)_{\alpha\in A}$ de subconjuntos de X diz-se *discreta* se existir uma família de abertos $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ tal que $Y_\alpha \subset U_\alpha$ e $Y_\beta \cap U_\alpha = \emptyset$, se $\beta \neq \alpha$.

Definição 33. - Dizemos que um espaço topológico X é *coletivamente normal* se dada qualquer família discreta de fechados $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ exisitr uma família disjunta de abertos $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ tal que $U_\alpha \supset F_\alpha$ qualquer que seja $\alpha \in A$.

Corson provou mais do que foi dito no teorema 31, na verdade ele provou que o Σ-produto de espaços métricos completos é coletivamente normal.

Nesse artigo também fica demonstrada a seguinte proposição que contribuiu para despertar mais ainda o interesse pelo estudo de Σ-produtos.

Teorema 34. - Todo espaço métrico pode ser imerso como subespaço de um Σ-produto de cópias do intervalo unitário.

A demonstração deste teorema nos levou a pensar numa generalização. Antes, porém, vamos introduzir uma definição.

Definição 35. - Um espaço topológico X, completamente regular diz-se m-metrizável, $m > \aleph_0$, se existe uma família $(A_i)_{i<m}$ tal que $\mathcal{B} = \bigcup_{i<m} A_i$ é uma base de X, onde cada família A_i, $i < m$, é discreta e, além disso, a interseccção de uma família de abertos de cardinalidade menor que m ainda é aberta.

Observação: - Verifica-se facilmente que qualquer espaço m-metrizável é paracompacto e portanto normal.

A generalização a que nos referimos nos permite olhar cada espaço m-metrizável como imerso em um espaço $\Sigma(\mathcal{J})$.

Proposição 36. - Todo espaço m-metrizável X pode ser imerso em um espaço $\Sigma(\mathcal{J}) \subset [0,1]^p$ onde $\mathcal{J} = [p]^{\leq m}$.

Demonstração: - Seja X m-metrizável, então existe uma base $\mathcal{B} = \bigcup_{i<m} A_i$ cada A_i é uma família discreta. Para cada $i < m$ e cada $A \in A_i$ podemos escolher uma família $(B_j)_{j<m}$ de elementos de $\mathcal{B}$, tal que

$$\overline{B}_j \subset A \quad \text{e} \quad \bigcup_{j<m} B_j = A$$

Para cada B seja $f_{B,A}: X \longrightarrow [0,1]$ contínua, tal que $f_B(x) = 1$ se $x \in B$ e $f_B(x) = 0$, se x está fora do A ao qual B corresponde. Observemos que cada B intercepta no máximo um elemento de cada família A_i, $i < m$, portanto, existem no máximo m funções $f_{B,A}$ tais que $f_{B,A}(x) \neq 0$. Vamos ordenar os pares (B,A). Eles existem numa quantidade $p = m.\sup_{i<m}|A_i|$. A cada par (B,A) corresponde um α, $\alpha < p$. Definamos:

$$\Phi : X \longrightarrow [0,1]^p$$

$$x \longrightarrow (f_t(x))_{t<p}$$

Temos então $\Phi(X) = \Sigma(\mathcal{J})$, onde $\mathcal{J} = [p]^{\leq m}$. Verifica-se facilmente que Φ é um homeomorfismo sobre a imagem. □

Em um recente trabalho de Gruenhage [G] os Σ-produtos voltam a aparecer, desta vez num contexto diferente do que já havia sido abordado por outros autores. Gruenhage estabelece um paralelo entre subconjuntos compactos de Σ_0-produtos, Σ-produtos e compactos de Eberlein.

Define-se como Σ_* produto o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^T$

$$\Sigma_* = \{x \in \mathbb{R}^T \mid \forall \varepsilon > 0 \ \{t \mid |x_t| > \varepsilon\} \text{ é finito}\}.$$

<u>Definição 37.</u> - Um espaço compacto X é compacto de Corson (respectivamente Eberlein, fortemente Eberlein) se e somente se X é homeomorfo a um subespaço compacto de Σ (respectivamente Σ_*, Σ_0) sendo que Σ, Σ_* e Σ_0 são subespaços de $\mathbb{R}^T$ para algum conjunto de índices T.

Como foi observado no trabalho acima é fácil ver que todo espaço compacto fortemente Eberlein é compacto de Eberlein e todo compacto de Eberlein é Corson compacto.

5. Funções contínuas definidas em espaços produtos (ou subconjuntos de espaços produto)

Uma função definida em um espaço topológico produto $X = \prod_{t \in T} X_t$ "depende" de uma quantidade m de coordenadas se existir $P \subset T$, $|P| = m$ tal que se x e y forem tais que $P^*(x) = P^*(y)$, onde

$$P^*: X \longrightarrow \prod_{t \in P} X_t \text{ é a projeção ,}$$

então $f(x) = f(y)$. O fato de uma função definida em um espaço produto, ou algum de seus subespaços depender de um certo número de coordenadas pode ser aplicado para obter resultados de diversos tipos.

No capítulo IV, alguns resultados, até agora conhecidos para espaços produto, serão generalizados e provados para espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ determinados por alguns tipos particulares de σ-ideais $\mathcal{J}$.

As aplicações deste assunto são inúmeras, vale a pena, no entanto, mencionar algumas delas. Mazur [Ma] e Engelking [E_1] usaram-no para provar que uma função sequencialmente contínua num produto, é contínua. Corson [C] aplicou em Σ-produtos e Isbell [I] usou a determinação de fun-

ções contínuas em produtos por uma "pequena quantidade de coordenadas" para provar, de maneira simples, que X^m não é normal se X não é compacto e $m \geq \max\{\omega(X), \aleph_1\}$, sendo que Noble já o havia provado de uma forma um pouco mais complicada.

Vamos apresentar aqui, apenas alguns resultados sobre esse assunto, que se apresenta bastante extenso.

O teorema a seguir se aplica a espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ sendo $\mathcal{J} = [T]^{\leq r}$ (numa forma mais geral, para uma topologia estritamente mais fina se encontra em Alas [A_2]) Vamos, no capítulo IV, ver que o resultado se mantém para um σ-ideal qualquer.

<u>Teorema 38.</u> - Seja Y um espaço topológico Hausdorff tal que $\psi(y,Y) \leq m$ para qualquer $y \in Y$. Seja

$$f: \Sigma(\mathcal{J}) \longrightarrow Y \text{ contínua e}$$

$\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t \in T} X_t$ com $\mathcal{J} = [T]^{\leq r}$. Existe um subconjunto $P \subset T$, $|P| \leq m$ tal que:

$$P^*(x) = P^*(y) \text{ implica } f(x) = f(y)$$

Uma interessante consequência do fato de uma função real continua definida em um espaço produto depender de uma quantidade enumerável de coordenadas é que nestas condições o espaço produto é pseudo-$\aleph_1$-compacto. Este resultado é devido a Noble e Ulmer [NU], e se refere apenas a espaços produto. Posteriormente vamos obter resultado semelhante para espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ e cardinais m , $m > \aleph_1$.

Teorema 39. - Seja X o espaço produto de uma quantidade não enumerável de espaços topológicos. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) X é pseudo-$\aleph_1$-compacto;

(ii) Para cada espaço Z cuja diagonal é intersecção enumerável de vizinhanças fechadas qualquer, $f: X \longrightarrow Z$ contínua, depende de uma quantidade enumerável de coordenadas.

(iii) Cada função real contínua definida em X depende de uma quantidade enumerável de coordenadas.

Finalizando o capítulo, devemos lembrar que, para quaisquer referências em Topologia Geral, o leitor pode se valer do livro do Engelking [E_2] e para maiores explicações sobre Teoria dos Conjuntos, do livro do Kunen [Ku].

oOo

CAPÍTULO II

INVARIANTES CARDINAIS E CONDIÇÕES DE CADEIA

Vamos determinar alguns invariantes cardinais e algumas condições de cadeia de espaços topológicos $\Sigma(\mathcal{J})$, uma vez conhecidos os correspondes nos fatores. O fato de $\Sigma(\mathcal{J})$ estar densamente contido em um espaço produto, simplifica, em alguns casos, esta determinação.

1. Invariantes cardinais

No que se segue vamos supor que $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t\in T} X_t$ e que são conhecidos os invariantes cardinais dos espaços X_t, $t \in T$, e consequentemente alguns invariantes cardinais do espaço produto (teorema I 22). Também vamos nos referir aos espaço produto $\prod_{t\in T} X_t$ como sendo espaço X. Denotamos por $e = (e_t)_{t\in T}$ o ponto base fixado.

<u>Proposição 1.</u> - Seja d(X) a densidade do produto $X = \prod_{t\in T} X_t$. Qualquer que seja o σ-ideal $\mathcal{J}$, a densidade de $\Sigma(\mathcal{J})$, $d(\Sigma(\mathcal{J}))$, satisfaz a desigualdade $d(\Sigma(\mathcal{J})) \leq d(X).\ |T|$.

<u>Demonstração</u>: - Seja $D \subset X$ tal que $\overline{D} = X$ e $|D| = d(X)$. Lembrando que qualquer subconjunto finito $F \subset T$ é elemento de $\mathcal{J}$ para cada tal F e $d \in D$ vamos definir o ponto $x(d,F)$ de $\Sigma(\mathcal{J})$ como se segue:

$$x(d,F)_t = \begin{cases} d_t & \text{se } t \in F \\ e_t & \text{se } t \in T-F \end{cases}$$

O subconjunto $\mathcal{D}$ definido abaixo:

$$\mathcal{D} = \{x(d,F) \mid d \in D \ , \ F \subset T \ \text{ finito}\}$$

é denso em $\Sigma(\mathcal{J})$. Pois seja U um aberto básico de $\Sigma(\mathcal{J})$, isto é $U = \Omega \cap \Sigma(\mathcal{J})$ onde Ω é aberto básico do produto. Assim $R(\Omega) = \{t \in T \mid \Omega_t \neq X_t\}$ é finito. Nestas condições o ponto $x(d_\Omega, R(\Omega))$ onde $d_\Omega \in D \cap \Omega$ pertence a U. A cardinalidade de $\mathcal{D}$ é portanto limitada por

$$|\mathcal{D}| \leq d(X).|T|$$

Ou seja, $d(\Sigma(\mathcal{J})) \leq d(X).|T|$. $\square$

A desigualdade anteriormente obtida não pode, no entanto, ser melhorada como nos mostra o exemplo a seguir.

<u>Exemplo 2.</u> - Sejam $T = \{0,1\}^{\aleph_0}$ e $X_t = \{0,1\}$ qualquer que seja $t \in T$. Seja $\mathcal{J}$ o σ-ideal das partes enumeráveis de T. Verifica-se facilmente que $d(\Sigma(\mathcal{J})) = 2^{\aleph_0}$ ou seja $d(\Sigma(\mathcal{J})) = |T| = |T|.d(X)$, já que $d(X) = \aleph_0$.

<u>Proposição 3.</u> - Qualquer que seja o σ-ideal $\mathcal{J}$ que determina o espaço $\Sigma(\mathcal{J})$ temos

$$\omega(\Sigma(\mathcal{J})) = \omega(X).$$

<u>Demonstração</u>: - Conhecido o peso do espaço produto X, pelo simples fato de $\Sigma(\mathcal{J})$ ser subespaço de X temos

$$\omega(\Sigma(\mathcal{J})) \leqq \omega(X).$$

Suponhamos que ocorra a desigualdade estrita e seja $\mathcal{B}$ uma base de $\Sigma(\mathcal{J})$ tal que

$$|\mathcal{B}| = \omega(\Sigma(\mathcal{J}))$$

sendo cada $B \in \mathcal{B}$ da forma $B = \Omega \cap \Sigma(\mathcal{J})$ onde Ω é aberto básico do espaço produto. Seja $R(B) = \{t \in T \mid \Omega_t \neq X_t\}$, que já sabemos ser finito. Assim, o conjunto

$$R^* = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} R(B)$$

tem a mesma cardinalidade que a família $\mathcal{B}$. Se $R^* \subsetneq T$, seja $s \in T-R^*$. Então, o aberto $W = \Omega \cap \Sigma(\mathcal{J})$ onde $\Omega = \prod_{t \in T} \Omega_t$ com $\Omega_t \neq X_t$ se e somente se $t=s$, não pode ser escrito como reunião de elementos de $\mathcal{B}$, absurdo. Portanto, $|\mathcal{B}| \geqq |T|$. Por outro lado, como $\Sigma(\mathcal{J})$ contém homeomorficamente cada X_t temos

$$\omega(\Sigma(\mathcal{J})) \geqq \omega(X_t)$$

para todo $t \in T$. O teorema I 22 garante que

$$\omega(X) \leqq \omega(\Sigma(\mathcal{J}))$$

Disto se conclui a igualdade. $\square$

<u>Proposição 4.</u> - Seja X um espaço produto, regular. Nestas condições, qualquer que seja o σ-ideal , $\pi\omega(\Sigma(\mathcal{J})) = \pi\omega(X)$.

<u>Demonstração:</u> - Seja $\mathcal{F}$ uma π-base de X com $|\mathcal{F}| = \pi\omega(X)$. A família $\mathcal{F}_0$ assim definida

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega \cap \Sigma(\mathcal{J}) \mid \Omega \in \mathcal{F}\}$$

é uma π-base de $\Sigma(\mathcal{J})$, pois se U é aberto não vazio de $\Sigma(\mathcal{J})$, $U = U_0 \cap \Sigma(\mathcal{J})$ com U_0 aberto em X. Então existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tal que $\Omega_0 \subset U_0$, e portanto

$$\Omega_0 \cap \Sigma(\mathcal{J}) \subset U .$$

Provamos assim que $\pi\omega(\Sigma(\mathcal{J})) \leqq \pi\omega(X)$. Vamos provar a desigualdade inversa. Seja $\mathcal{F}_0$ uma π-base de $\Sigma(\mathcal{J})$. Como os elementos de $\mathcal{F}_0$ são abertos em $\Sigma(\mathcal{J})$ eles são da forma $\Omega \cap \Sigma(\mathcal{J})$ com Ω aberto em X. Seja $\mathcal{F}$ a família definida por

$$\mathcal{F} = \{\Omega \mid \Omega \cap \Sigma(\mathcal{J}) \in \mathcal{F}_0\} .$$

Mostremos que $\mathcal{F}$ é uma π-base de X. Seja U aberto não vazio de X. Então $U \cap \Sigma(\mathcal{J})$ é aberto não vazio de $\Sigma(\mathcal{J})$. Como X é regular, dado $y \in U \cap \Sigma(\mathcal{J})$ existe V aberto de X tal que $y \in V \subset \overline{V}^X \subset U$. Como $\mathcal{F}_0$ é π-base para $\Sigma(\mathcal{J})$ e $V \cap \Sigma(\mathcal{J})$ é aberto não vazio de $\Sigma(\mathcal{J})$ existe $\Omega \in \mathcal{F}$ tal que

$$\Omega \cap \Sigma(\mathcal{J}) \subset V \cap \Sigma(\mathcal{J}) \quad \text{ou seja}$$

$$\Omega \subset \overline{\Omega \cap \Sigma(\mathcal{J})}^X \subset \overline{V}^X \subset U$$

$\mathcal{F}$ é portanto uma π-base de X. E assim temos

$$\pi\omega(X) \leqq \pi\omega(\Sigma(\mathcal{J})) . \quad \square$$

Observemos que o caráter pontual $\chi(x,\Sigma(\mathcal{J}))$ de $\Sigma(\mathcal{J})$ em cada ponto x é igual ao caráter pontual de X neste mesmo ponto. A demonstração deste fato vai ser omitida por ser inteiramente análoga à que foi feita para peso do espaço $\Sigma(\mathcal{J})$. Resta-nos, portanto, estabelecer a relação entre caráter de $\Sigma(\mathcal{J})$ e caráter de X.

<u>Proposição 5.</u> - Seja X um espaço produto. Sendo assim, qualquer que seja o σ-ideal $\mathcal{J}$, $\chi(\Sigma(\mathcal{J})) = \chi(X)$.

<u>Demonstração</u>: - A partir da observação anterior, já sabemos que

$$\chi(\Sigma(\mathcal{J})) \leq \chi(X)$$

Suponhamos, por absurdo, que vale a desigualdade estrita. Seja $x \in X - \Sigma(\mathcal{J})$ tal que

$$\chi(x,X) > \sup_{y \in \Sigma(\mathcal{J})} \chi(y,\Sigma(\mathcal{J}))$$

Como os conjuntos unitários pertencem ao σ-ideal $\mathcal{J}$ vamos construir a seguinte família de pontos em $\Sigma(\mathcal{J})$.

$$y(x,\{s\}) = \begin{cases} y_s = x_s \\ \\ y_t = e_t \qquad t \in T - \{s\} \end{cases}$$

Sabemos que $\chi(\Sigma(\mathcal{J})) \geq \sup_{t \in T} \chi(y(x,\{t\}),\Sigma(\mathcal{J}))$.

Temos para cada $t \in T$

$$\chi(y(x,\{t\}) \ , \ \Sigma(\mathcal{J})) \geq \chi(x_t,X_t)$$

já que X_t é homeomorfo a um subespaço de $\Sigma(\mathcal{J})$. Por outro lado, como caráter pontual de $\Sigma(\mathcal{J})$ é igual ao caráter pontual do produto, temos

$$\chi(y(x,\{t\}) \ , \ \Sigma(\mathcal{J})) \geq |T|$$

Utilizando o teorema I 22 e as duas desigualdades anteriores temos

$$\chi(\Sigma(\mathcal{J})) \geq \chi(X) \ .$$

O que contraria a hipótese. Temos portanto a igualdade. □

<u>Proposição 6.</u> - Seja X um espaço produto. Qualquer que seja do σ-ideal $\mathcal{J}$ então o "spread" (espalhamento) de $\Sigma(\mathcal{J})$ é igual ao "spread" de X.

<u>Demonstração</u>: - Pelo fato de $\Sigma(\mathcal{J})$ ser subespaço de X temos $s(\Sigma(\mathcal{J})) \leq s(X)$.

Suponhamos agora que D é um subconjunto discreto de X. Para cada $d \in D$ existe um aberto básico $\Omega = \Omega(d)$ tal que $\Omega(d) \cap D = \{d\}$. Como $\Omega(d)$ é básico $\Omega(d) = \prod_{t \in T} (\Omega(d))_t$ onde $R(\Omega(d))$ é finito para cada $d \in D$. Como já supusemos desde o início todos os fatores do produto são Hausdorff, portanto, não há perda de generalidade supor que para cada $t \in R(\Omega(d))$ tal que $d_t \neq e_t$ temos $e_t \notin (\Omega(d))_t$. Para cada $d \in D$ definamos o ponto $x(d,R(\Omega(d)))$ como se segue:

$$x(d \ , R(\Omega(d)))_t \begin{cases} = d_t & \text{se } t \in R(\Omega(d)) \\ = e_t & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\mathcal{D} = \{x(d,R(\Omega(d))) \mid d \in D\}$. Vamos mostrar que as vizinhanças $V(d) = \Omega(d) \cap \Sigma(\mathcal{J})$ são tais que

$$\Omega(d) \cap \mathcal{D} = \{x(d,R(\Omega(d)))\}.$$

Ou seja, dado um subconjunto discreto de X é possível determinar um subconjunto discreto de $\Sigma(\mathcal{J})$ de mesma cardinalidade. Pois, suponhamos por absurdo, que $x(d', R(\Omega(d'))) \in V(d)$ com $d \neq d'$. Como $d' \notin \Omega(d)$ existe $t^* \in R(\Omega(d))$ tal que $d'_{t^*} \notin (\Omega(d))_{t^*}$. Se $t^* \in R(\Omega(d'))$ já contraria nossa suposição. Se $t^* \notin R(\Omega(d'))$ então $x(d', R(\Omega(d')))_{t^*} = e_{t^*}$ e isto é um absurdo pois $e_{t^*} \notin (\Omega(d))_{t^*}$, por hipótese. Com isto concluimos que $s(\Sigma(\mathcal{J})) = s(X)$. □

O estudo do "tightness" de espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ vai ter bastante importância na verificação do fato de $\Sigma(\mathcal{J})$ ser ou não normal. O primeiro resultado que vamos apresentar é devido a Kombarov.

<u>Proposição 7.[K4]</u> - Se o "tightness" de qualquer subproduto finito dos espaços X_t , $t \in T$, não excede m, então o "tightness" de $\Sigma(\mathcal{J})$, $\mathcal{J} = [T]^{\leq m}$ é menor ou igual a m.

Analisando a *demonstração* da proposição vemos que se m for um cardinal regular obtemos resultado semelhante com "tightness" menor que m e $\mathcal{J} \subset [T]^{<m}$. Observe-se que como foi definido o "tightness" pode não ser atingido, quando isto ocorrer diremos que o "tightness" estrito é menor do que m.

Como consequência da proposição 7 temos os seguintes corolários.

Corolário 8. - Se o "tightness" de qualquer subproduto finito de espaços X_t , $t \in T$, não excede m, então o "tightness" de $\Sigma(\mathcal{J})$, $\mathcal{J} \subset [T]^{\leq m}$, é menor ou igual a m.

Corolário 9. - Se o "tightness" de qualquer subproduto finito de espaços X_t , $t \in T$, for estritamente menor que m, m cardinal regular, então o "tightness" de $\Sigma(\mathcal{J})$, $\mathcal{J} \subset [T]^{<m}$ é estritamente menor do que m.

Proposição 10. - Seja m um cardinal singular. Se o "tightness" de qualquer subproduto finito de espaços X_t , $t \in T$, não excede p, $p < m$, então o "tightness" estrito de $\Sigma(\mathcal{J})$, onde $\mathcal{J} = [T]^{<m}$ é menor do que m.

Demonstração: - É possível escrever $m = \sum_{i<cf(m)} m_i$ onde $cf(m) < m_i$ qualquer $i < cf(m)$ e $m_i < m_j < m$ se $i < j < cf(m)$.
Neste caso $\Sigma(\mathcal{J}) = \bigcup_{i<cf(m)} \Sigma(\mathcal{J}_i)$ onde $\mathcal{J}_i = [T]^{\leq m_i}$.

Seja $M \subset \Sigma(\mathcal{J})$ e suponhamos que $x \in \overline{M}$. Podemos escrever

$$\overline{M} = \bigcup_{i<cf(m)} F_i \quad \text{onde} \quad F_i = \overline{M} \cap \Sigma(\mathcal{J}_i)$$

Sendo assim existe i_0 tal que $x \in F_{i_0}$.

Como $t(\Sigma(\mathcal{J}_{i_0})) \leq \max\{p, m_{i_0}\}$ existe um subconjunto $S \subset F_{i_0}$, $|S| \leq m_{i_0}$

tal que

$$x \in \overline{S}^{\Sigma(\mathcal{J}_{i_0})} \subset F_{i_0}$$

Como $\overline{S}^{\Sigma(\mathcal{J}_{i_0})} \subset \overline{S}^{\Sigma(\mathcal{J})}$ acabamos de provar que o tightness estrito de $\Sigma(\mathcal{J})$ é menor do que m. □

<u>Corolário 11.</u> - Se m é cardinal singular e $\mathcal{J} = [T]^{<m}$, então $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$ possui "tightness" estrito menor do que m.

2. Condições de cadeia

Como já vimos no capítulo I uma condição de cadeia em um espaço topológico é uma condição referente a um ou mais números cardinais e intersecções de famílias de subconjuntos abertos deste espaço.

No caso dos espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ vamos tentar estabelecer condições sobre $\mathcal{J}$ de forma que $\Sigma(\mathcal{J})$ tenha para calibre um cardinal m dado.

<u>Teorema 12.</u> - Suponhamos que m é um cardinal regular, $m > \aleph_1$ e que $\Pi\omega(X_t) < m$ qualquer que seja $t \in T$. $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t \in T} X_t$ tem calibre m se e somente se cada subconjunto de T de cardinalidade m incluir um elemento de T de mesma cardinalidade.

Demonstração: - Suponhamos, inicialmente que $\Sigma(\mathcal{J})$ tem m como calibre e seja $S \subset T$, $|S| = m$. Se $e = (e_t)_{t\in T}$ é o ponto base de $\Sigma(\mathcal{J})$, consideremos para cada $t \in S$

$$U_t = \Pi_t^{-1}(X_t - \{e_t\}) \cap \Sigma(\mathcal{J})$$

onde $X = \prod_{t\in T} X_t$ e $\Pi_t: X \longrightarrow X_t$ é a projeção. Como m é calibre para $\Sigma(\mathcal{J})$ existe $S' \subset S$, $|S'| = m$ e tal que $\bigcap_{t\in S'} U_t \neq \emptyset$. Neste caso temos para qualquer $x \in \bigcap_{t\in S'} U_t$, $x = (x_t)_{t\in T}$, $x_t \neq e_t$ quando $t \in S'$, ou seja o conjunto I definido abaixo:

$$I = \{t \mid x_t \neq e_t\}$$

é elemento de $\mathcal{J}$ e contém S'. Vejamos agora na outra direção. Seja $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de abertos de $\Sigma(\mathcal{J})$ de cardinalidade m. Podemos supor, sem perda de generalidade que cada U_λ é intersecção de um aberto básico do produto Ω_λ com $\Sigma(\mathcal{J})$. A cada aberto básico Ω_λ corresponde o conjunto $R_\lambda = R(\Omega_\lambda) = \{t \mid (\Omega_\lambda)_t \neq X_t\}$. Usando argumento de diagonalização, teorema I 29, sabemos que existe uma subfamília $\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\}$, $|\Lambda'| = |\Lambda| = m$ tal que $R_\lambda \cap R_{\lambda'} = R$ quaisquer λ, λ' em Λ', $\lambda \neq \lambda'$. Como $X_R = \prod_{t\in R} X_t$ tem π-peso menor do que m e sendo $\mathcal{B}$ uma π-base de X_R, $|\mathcal{B}| < m$ é possível determinar $\Lambda'' \subset \Lambda'$, $|\Lambda''| = m$ tal que $\Pi_R(U_\lambda) \supset B$ qualquer $\lambda \in \Lambda''$, para um certo elemento B de $\mathcal{B}$. Como $R_\lambda - R$ é finito existem $n \in \omega_0$ e $\Lambda''' \subset \Lambda''$ tais que $|\Lambda'''| = m$ e $R_\lambda - R$ tem n elementos para todo $\lambda \in \Lambda'''$. Seja

$$R_\lambda - R = \{a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, \dots, a_{\lambda n}\}$$

O conjunto $\{a_{\lambda 1} \mid \lambda \in \Lambda'''\}$ tem cardinalidade m, já que $\lambda \neq \lambda'$ implica que $a_{\lambda 1} \neq a_{\lambda' 1}$. Então, por hipótese, existe $\Lambda_1 \subset \Lambda'''$, Λ_1 também de cardinalidade m tal que $\{a_{\lambda 1} \mid \lambda \in \Lambda_1\} \in J$. Suponhamos que para $k < n$ nós obtivemos $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$, todos de cardinalidade m, $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \ldots \supset \Lambda_k$, tais que $\{a_{\lambda i} \mid \lambda \in \Lambda_i\} \in J$, $i \leq k$. Podemos, como foi feito anteriormente, repetir o processo e determinar Λ_{k+1} de cardinalidade m tal que $\{a_{\lambda\, k+1} \mid \lambda \in \Lambda_{k+1}\} \in J$ continuamos o processo até n. Definamos $x \in \Sigma(J)$ da seguinte forma

$$x_t \begin{cases} \in \Pi_t(B) & \text{se } t \in R \text{ qualquer } \lambda \in \Lambda_n \\ \in \Pi_t(U_{\lambda'}) & \text{se } \lambda' \in \Lambda_n \text{ e } t \in R_{\lambda'} - R \\ = e_t & \text{se } t \notin \Lambda_n \end{cases}$$

Então $x \in (\bigcap_{t \in \Lambda_n} U_t) \cap \Sigma(J)$ pois $\bigcup_{\lambda' \in \Lambda_n} R_{\lambda'} \in J$ da maneira como foi construido. Portanto $\Sigma(J)$ tem calibre m.

□

O corolário a seguir demonstra-se facilmente a partir do teorema I 27.

<u>Corolário 13.</u> - Se $\pi\omega(X_t) < m$ para qualquer $t \in T$ e $\Sigma(J) \subset \prod_{t \in T} X_t$, onde J é um σ-ideal tal que todo subconjunto de T de cardinalidade m inclui um elemento de J de mesmo cardinal então $\Sigma(J)$ é pseudo-m-compacto.

Em trabalhos sobre σ-ideais especialmente [BTW] são considerados apenas σ-ideais J sobre m, m cardinal,

que contenham $\mathcal{J}_m = [m]^{<m}$. Posteriormente vamos dar alguns exemplos deste tipo de σ-ideais. O próximo teorema se refere a espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ determinados por σ-ideais $\mathcal{J}$, $\mathcal{J} \supset \mathcal{J}_m$

Teorema 14. - Seja $\mathcal{J}$ um σ-ideal sobre m, m cardinal regular, $\mathcal{J} \supset \mathcal{J}_m$ e tal que existe um subconjunto S de m , $|S| = m$, tal que nenhum subconjunto de S de cardinalidade m é elemento de $\mathcal{J}$. Nessas condições, p é calibre de $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^m$ se e somente se $cf(p) \neq \aleph_0$ e $cf(p) \neq m$.

Demonstração: - Se p é calibre de $\Sigma(\mathcal{J})$, $cf(p) \neq \aleph_0$ já que $\aleph_0$ não é calibre de $\Sigma(\mathcal{J})$, pois como foi observado no teorema I 27, se um cardinal é calibre de um espaço topológico sua cofinalidade também o é. Sendo assim cf(p) também deve ser diferente de m. Reciprocamente suponhamos que $cf(p) \neq \aleph_0$ e $cf(p) \neq m$. Se p é regular e $p < m$ o teorema 12 garante que $\Sigma(\mathcal{J})$ tem calibre p. Se $p > m$, p regular, vemos facilmente que $\Sigma(\mathcal{J})$ tem calibre p já que $\omega(\Sigma(\mathcal{J})) = m$. Suponhamos então que p é singular. Se $cf(p) > m$ novamente $\Sigma(\mathcal{J})$ tem calibre p. O único caso difícil a ser analisado é o caso em que $cf(p) < m$ e que, por sua vez, se divide em dois casos $p > m$ e $p < m$. No primeiro caso podemos escrever $p = \sum_{i<cf(p)} p_i$ onde $cf(p) < p_i < p_j$ para $i < j < cf(p)$ e p_i é regular para qualquer $i < cf(p)$. Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha < p\}$ uma família de abertos básicos de $\Sigma(\mathcal{J})$. Para cada $i < cf(p)$ existe um aberto básico B_i de $\Sigma(\mathcal{J})$ tal que se

$P_i = \{\alpha \in p_i \mid B_i \subset U_\alpha\}$, $|P_i| = p_i$, $i < cf(p)$ já que o peso de $\Sigma(\mathcal{J})$ é m. Como cf(p) é um calibre de $\Sigma(\mathcal{J})$ existe $A \subset cf(p)$, $|A| = cf(p)$ tal que $\bigcap_{i\in A} B_i \neq \emptyset$. Temos assim,

$$\bigcap_{i\in A}\left(\bigcap_{\alpha\in p_i} U_\alpha\right) \supset \bigcap_{i\in A} B_i \neq \emptyset$$

o que conclui a prova, neste caso, que $\Sigma(\mathcal{J})$ tem calibre p. Vejamos agora o caso em que $p < m$. Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha < p\}$ uma família de abertos básicos de $\Sigma(\mathcal{J})$, onde $U_\alpha = V_\alpha \cap \Sigma(\mathcal{J})$ sendo V_α um aberto básico de $\{0,1\}^m$, $\alpha < p$.
Seja $R_\alpha = R(V_\alpha) = \{t \mid (V_\alpha)_t \neq \{0,1\}\}$ e como R_α é finito qualquer $\alpha < p$, o conjunto $R = \bigcup_{\alpha<p} R_\alpha$ tem cardinalidade p. Como $\{0,1\}^m$ tem calibre p existe $S \subset p$, $|S| = p$ tal que

$$\bigcap_{\alpha\in S} V_\alpha \neq \emptyset$$

logo $\bigcap_{\alpha\in S} U_\alpha \neq \emptyset$ em $\Sigma(\mathcal{J})$ já que $|R| = p < m$, ou seja $\Sigma(\mathcal{J})$ tem calibre p. □

<u>Corolário 15.</u> - Suponhamos que $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t<m} X_t$ com $\mathcal{J} \supset \mathcal{J}_m$ e tal que existe $S \subset m$, $|S| = m$ e tal que nenhum subconjunto de S de cardinalidade m é elemento de $\mathcal{J}$. Seja p um cardinal tal que $\pi\omega(X_t) < \min(m,p)$. Então p é calibre de $\Sigma(\mathcal{J})$ se e somente se $cf(p) \neq \aleph_0$ e $cf(p) \neq m$.

O seguinte resultado é consequência da demonstração do teorema 14.

Corolário 16. - Seja J um σ-ideal sobre m, m cardinal singular, com $J \supset J_m$ e tal que existe um subconjunto $S \subset m$, $|S| = m$ e tal que nenhum subconjunto de S de cardinalidade m é elemento de J. Então p é calibre para $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^m$ se e somente se $cf(p) \neq \aleph_0$ e $cf(p) \neq m$.

É necessário agora apresentar alguns exemplos de σ-ideais que satisfaçam as condições do teorema 12 e teorema 14 respectivamente. Obviamente o σ-ideal $P(m)$, conjunto das partes de m, satisfaz às condições de ambos os teoremas.

Antes de apresentarmos os exemplos é preciso estabelecer algumas definições. A primeira delas é devido a Luzin e data do início do século.

Definição 17. - Um subconjunto $L \subset \mathbb{R}$ é chamado *conjunto de Luzin* se e somente se L é não enumerável mas $L \cap K = \emptyset$ para todo subconjunto $K \subset \mathbb{R}$, K fechado e raro.

A existência de conjuntos de Luzin não pode ser provada ou negada sem alguns axiomas extras da teoria dos conjuntos. Por exemplo se assumirmos MA + $\neg$CH mostramos que não existem conjuntos de Luzin. Com CH existem tais conjuntos.

A definição de conjunto de Luzin pode ser generalizada para σ-ideais J sobre $\aleph_1$.

Definição 18. - Um subconjunto $L \subset \aleph_1$ é dito ser *J-Luzin* para o σ-ideal J sobre $\aleph_1$ se $L \cap I$ é enumerável para qualquer $I \in J$.

Definição 19. - Seja k um cardinal. Um σ-ideal J é *k-gerado* se existe $J' \subset J$, $|J'| \leq k$ tal que cada membro de J está incluido em uma união enumerável de elementos de J'.

Teorema 20. - Se um σ-ideal J é $\aleph_1$-gerado então existe um conjunto J-Luzin.

Corolário 21. - Se $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^T$ e J é um ideal $\aleph_1$-gerado então $\Sigma(J)$ não tem calibre $\aleph_1$.

Exemplo 22. - Seja J o σ-ideal sobre $\mathbb{R}$ dos subconjuntos de medida de Lebesgue nula. Seja $J' \subset J$ constituido pelos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são G_δ e têm medida de Lebesgue nula. Assumindo CH , $|J'| = \aleph_1$, isto é J é $\aleph_1$-gerado. O espaço $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ não pode, portanto, ter calibre $\aleph_1$.

Exemplo 23. - Seja J o σ-ideal dos subconjuntos magros de $\mathbb{R}$. Seja $J' \subset J$ a família dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são reuniões enumeráveis de fechados raros. Assumindo CH, $|J'| = \aleph_1$ e cada elemento de J está contido numa reunião enumerável de elementos de J'. Também neste caso J é $\aleph_1$-gerado. Da mesma forma que no exemplo anterior $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ não pode ter calibre $\aleph_1$.

Antes de prosseguirmos com os exemplos vamos apresentar mais algumas definições.

Definição 24. - Seja J um σ-ideal sobre um conjunto de índices T. Dizemos que J é um *σ-ideal maximal* se e somente se dado $S \subset T$ ou $S \in J$ ou $T-S \in J$.

Exemplo 25. - Seja J um σ-ideal sobre k , k cardinal infinito, $J \supset J_k$ e J é maximal. Então, dado $S \subset k, |S| = k$ existe $I \in J$, $I \subset S$ e $|I| = k$. Suponhamos que S é tal que $S \notin J$, $|S| = k$. Neste caso $k-S \in J$ e $|k-S| = k$. Seja $S_1 \cup S_2$ uma decomposição de S em subconjuntos de cardinalidade k. Se $S_1 \cup (k-S)$ ou $S_2 \cup (k-S)$ não pertencer a J está acabado pois teremos S_2 ou S_1 como elemento de J . Por outro lado, não podemos ter $S_1 \cup (k-S)$ e $S_2 \cup (k-S)$ simultaneamente em J pela definição de σ-ideal. Este ideal está nas condições do teorema 12.

Precisamos mais algumas definições e resultados antes de apresentar o próximo exemplo.

Definição 26. - Seja k um cardinal regular não enumerável. Um subconjunto $F \subset k$ é *fechado e ilimitado* se for fechado na topologia da ordem em k e sup F = k. Um subconjunto $S \subset k$ é dito *estacionário* se para qualquer F fechado e ilimitado $S \cap F \neq \emptyset$. Caso contrário, isto é, se existir F_0 fechado e ilimitado tal que $S \cap F_0 = \emptyset$ dizemos que S é *não estacionário*.

Proposição 27. - Seja NS_k (onde $k > \aleph_0$) o σ-ideal dos subconjuntos não estacionários de k. NS_k é fechado por uniões de $< k$ elementos sendo assim um σ-ideal.

Definição 28. - Sejam J um σ-ideal sobre k e $(X_\alpha)_{\alpha<k}$ uma família qualquer de elementos de J. Definimos *união diagonal da família* $(X_\alpha)_{\alpha<k}$ denotada por $\nabla_{\alpha<k} X_\alpha$ ao seguinte conjunto

$$\nabla_{\alpha<k} X_\alpha = \bigcup_{\alpha<k} X_\alpha - (\alpha+1)$$

(É possível definir de forma inteiramente análoga intersecção diagonal de uma família de subconjuntos).

Definição 29. - Dizemos que um σ-ideal J é *normal* se $J \supset \nabla J$ onde $\nabla J = \{ I \mid I = \nabla_{\alpha<k} X_\alpha$ e $(X_\alpha)_{\alpha<k}$ é família de elementos de $J \}$.

Teorema 30. - [BTW] NS_k é um σ-ideal normal sobre k.

Exemplo 31. - Sendo k um cardinal não enumerável regular vamos considerar o σ-ideal sobre k dos subconjuntos não estacionário de k, denotado por NS_k. Usando essencialmente o fato de que NS_k é normal podemos provar que dado um subconjunto $S \subset k$, $|S| = k$, existe $I \subset S$, não estacionário de mesma cardinalidade. Ou seja se $\Sigma(NS_k) \subset \{0,1\}^k$, $\Sigma(NS_k)$ tem calibre k. Usando um resultado devido a Solovay que diz que todo estacionário de k pode ser escrito como reunião disjunta de k subconjuntos estacionários, observamos que NS_k não é maximal.

3. Espaços m-Baire

Espaços topológicos $\Sigma(\mathcal{J})$ que são m-Baire têm m como calibre. Vamos apresentar um teorema onde são estabelecidas condições para que espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ não sejam m-Baire.

Teorema 32. - Seja $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t\in T} X_t$, $|T| \geq m$ e $\mathcal{J}$ é um σ-ideal sobre T. Se existir uma família $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ $|A| = m$, de subconjuntos infinitos de T tais que para cada $I \in \mathcal{J}$ existe $\alpha \in A$ tal que $I \cap T_\alpha = \emptyset$, então $\Sigma(\mathcal{J})$ não é m-Baire.

Demonstração: - Vamos supor que cada X_t é m-Baire, caso contrário não há nada a demonstrar. Definamos a seguinte família de subconjuntos:

$$U_\alpha = \{x \in \Sigma(\mathcal{J}) \mid \{t \mid x_t \neq e_t\} \cap T_\alpha \neq \emptyset\} \quad \alpha \in A$$

sendo $e = (e_t)_{t\in T}$ o ponto base de $\Sigma(\mathcal{J})$. Mostremos que para cada $\alpha \in A$, U_α é aberto e denso em $\Sigma(\mathcal{J})$. Seja $x \in U_\alpha$, precisamos determinar um aberto básico Ω de $\prod_{t\in T} X_t$ tal que

$* \; x \in \Omega \cap \Sigma(\mathcal{J}) \subset U_\alpha$. Seja F_α um subconjunto finito de T , $F_\alpha \subset T_\alpha$ e tal que $x_t \neq e_t$ para todo $t \in F_\alpha$. Pela maneira como U_α foi construido, $F_\alpha \neq \emptyset$. Seja então $\Omega = \prod_{t\in T} \Omega_t$ onde $\Omega_t = X_t$ se $t \notin F_\alpha$. Para $t \in F_\alpha$ Ω_t é tal que $x_t \in \Omega_t$ e $e_t \notin \Omega_t$. Está claro que o aberto básico Ω satisfaz a $*$. Quanto à densidade, suponhamos agora que Ω é um aberto básico de $\prod_{t\in T} X_t$. O conjunto $R(\Omega) = \{t \mid \Omega_t \neq X_t\}$ é finito.

Precisamos mostrar que $\Omega \cap \Sigma(\mathcal{J}) \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Seja $t_* \in T_\alpha - R(\Omega)$. O ponto $x = (x_t)_{t \in T}$ definido como abaixo

$$x_t \begin{cases} \in \Omega_t & \text{se } t \in R(\Omega) \\ = e_t & \text{se } t \in T-(R(\Omega) \cup \{t_*\}) \\ \neq e_{t_*} & \text{se } t = t_* \end{cases}$$

pertence à referida intersecção que provamos assim não ser vazia. Resta-nos mostrar que $\Sigma(\mathcal{J})$ não é m-Baire. Suponhamos, por absurdo, que $x \in \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ e t_* é um índice tal que $x_{t_*} \neq e_{t_*}$. Então $t_* \in \bigcap_{\alpha \in A} T_\alpha$, isto é $t_* \in T_\alpha$ qualquer que seja $\alpha \in A$. Portanto $t_* \notin I$ qualquer $I \in \mathcal{J}$. Contradição. Logo $\Sigma(\mathcal{J})$ não é m-Baire. □

<u>Observação</u>: - Demonstração inteiramente análoga pode ser feita se, ao invés de termos uma família $(\ddot{I}_\alpha)_{\alpha \in A}$, $|A| = m$, de subconjuntos infinitos de T tais que para todo $I \in \mathcal{J}$ existe $\alpha \in A$ tal que $I \cap T_\alpha = \emptyset$ tivermos um subconjunto finito J tal que para todo $I \in \mathcal{J}$ existir $\alpha \in A$ tal que $I \cap T_\alpha = J$.

A definição 18 apresentada anteriormente pode ser generalizada para σ-ideais definidos sobre conjunto de índices de cardinais maiores, desde que sejam regulares.

<u>Definição 33.</u> - Um subconjunto $L \subset \dot{T}$, $|L| = |T| = m$ e m um cardinal regular, diz-se um conjunto de *$\mathcal{J}$-Luzin* para o σ-ideal $\mathcal{J}$ se $|L \cap I| < m$ para todo $I \in \mathcal{J}$.

Corolário 34. - Se existir um conjunto $\mathcal{J}$-Luzin para $\mathcal{J}$ um σ-ideal sobre $|T| = m$ e m regular, então $\Sigma(\mathcal{J})$ não é m-Baire.

Demonstração: - Basta construirmos uma família $(T_\alpha)_{\alpha<m}$ como a do teorema 32. Sendo o conjunto $\mathcal{J}$-Luzin L escrito da forma

$$L = \{t_\beta \mid \beta < m\} .$$

Construimos a referida família como se segue

$$T_\alpha = \{t_\beta \mid \beta \geqq \alpha\} \qquad \alpha < m \quad \square$$

Na verdade a existência de um conjunto de $\mathcal{J}$-Luzin nega que m seja calibre de $\Sigma(\mathcal{J})$ trivialmente, ou seja, o subconjunto de $\mathcal{J}$- Luzin L não possui como subconjunto um elemento de $\mathcal{J}$ de mesma cardinalidade. Acabamos de provar assim a afirmação que está no início desta seção. Ou seja, se $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t\in T} X_t$ com $\pi\omega(X_t) < m$ para qualquer $t \in T$, então $\Sigma(\mathcal{J})$ m-Baire implica que m é calibre para $\Sigma(\mathcal{J})$.

Aplicando um resultado de Tall podemos obter uma implicação no sentido contrário desde que se tenha uma hipótese a mais.

Teorema 35 [B] - Seja X um espaço topológico m-Baire, m regular. Se $c(X) \leqq \aleph_0$ então X tem calibre λ para qualquer $\lambda \leqq m$.

Corolário 36. - Se $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$ então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\Sigma(\mathcal{J})$ tem calibre m

ii) $\Sigma(\mathcal{J})$ é m-Baire

4. Espaços pseudo-m-compactos

Ao estudarmos funções contínuas definidas em espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ veremos que se o espaço for pseudo-m-compacto e dependendo do contradomínio da função será possível concluir se a função depende que uma quantidade menor ou igual a m de coordenadas. Sendo assim vamos ver condições sob as quais $\Sigma(\mathcal{J})$ é pseudo-m-compacto bem como sua relação com o fato de ter m como calibre.

Teorema 37. - Se $X = \prod_{t\in T} X_t$ é pseudo-m-compacto e $\mathcal{J}$ é um σ-ideal sobre T tal que $\mathcal{J} \supset [T]^{\leq m}$, então $\Sigma(\mathcal{J})$ é pseudo-m-compacto.

Demonstração: - Seja $(\Omega^i)_{i\leq m}$ uma família de abertos básicos em X. Neste caso $T_i = R(\Omega^i) = \{t \mid \Omega^i_t \neq X_t\}$ é finito qualquer $i < m$. Tomemos $T^* = \bigcup_{i<m} T_i$, então $|T^*| = m$.

Como X é pseudo-m-compacto existe um ponto de acumulação x^* da família de abertos $(\Omega^i)_{i<m}$. Seja $x = (x_t)_{t\in T}$ o ponto assim definido

$$x_t \begin{cases} = x_t^* & \text{se } t \in T^* \\ = e_t & \text{se } t \in T-T^* \end{cases}$$

Então $x \in \Sigma(J)$ e é de acumulação da família de abertos $(\Omega^i \cap \Sigma(J))_{i<m}$ □

Teorema 38 [Cf] - Seja X um expaço topológico. Se X tem calibre compacto m, $m \geq \aleph_0$, então X é pseudo-m-compacto.

Proposição 39. - Sejam m um cardinal infinito, $cf(m) = \aleph_0$. Seja $n > \aleph_0$. Se $J \supset [T]^{\leq n}$ então $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^T$ tem calibre compacto m.

Demonstração: - Sejam $J_1 = [T]^{< \aleph_1}$ e $\Sigma(J_1) = \Sigma_1$. Σ_1 é denso em $\Sigma(J)$ e Σ_1 tem calibre compacto m, portanto $\Sigma(J)$ tem calibre compacto m.

Teorema 40. - Sejam m e p cardinais infinitos e $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^p$ onde J é um σ-ideal $J \supset [p]^{\leq n}$. As seguintes informações são equivalentes

(a) $cf(m) = \aleph_0$ $n = \aleph_0$

(b) $\Sigma(J)$ não é pseudo-m-compacto

(c) $\Sigma(J)$ não tem calibre compacto m.

Demonstração: - (a) $\Longrightarrow$ (b) Seja a seguinte família de abertos não vazios $(U_k)_{k<\aleph_0}$

$$U_k = \{x \in \Sigma(J) \mid x(n) = 1 \text{ para } n \leq k\} \quad k < \aleph_0$$

Esta família é localmente finita em $\Sigma(\mathcal{J})$. Seja $x \in \Sigma(\mathcal{J})$ e escolhamos $\bar{n}$ tal que $x(\bar{n}) = 0$ e $U = \Pi_{\bar{n}}^{-1}(\{0\})$.
Observemos que

$$\{k < \omega \mid U \cap U_k \neq \emptyset\} = \{0,1,\ldots,\bar{n}-1\}$$

Logo $\Sigma(\mathcal{J})$ não é pseudo-$\aleph_0$-compacto, e portanto não é pseudo-m-compacto (de acordo com o teorema I 27).

(b) $\Longrightarrow$ (c) O teorema 38 mencionado acima garante a implicação.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Como no caso anterior mostraremos a implicação provando que a negação da segunda implica a negação da primeira. Vamos considerar três casos:

<u>Caso 1</u> - $cf(m) > \aleph_0$. Existe uma família de espaços compactos $(K_n)_{n<\aleph_0}$ tais que

$$\Sigma_0 = \bigcup_{n<\aleph_0} K_n \quad \text{onde} \quad \Sigma_0 = \Sigma(\mathcal{J}_0) \quad \text{com} \quad \mathcal{J}_0 = [p]^{<\aleph_0}$$

Sabemos que Σ_0 é denso em $\Sigma(\mathcal{J})$ qualquer que seja o σ-ideal $\mathcal{J}$. Consideremos uma família $(U_\xi)_{\xi<m}$ de abertos não vazios e definamos

$$A_i = \{\xi < m \mid U_\xi \cap K_i \neq \emptyset\}$$

Temos $\bigcup_{i<\aleph_0} A_i = m$ e como $cf(m) > \aleph_0$ existe i_* tal que $|A_{i_*}| = m$.

<u>Caso 2</u> - $m = \aleph_0$ e $n > \aleph_0$. O teorema 12 garante que $\Sigma(\mathcal{J})$ tem o calibre compacto $m = \aleph_0$.

Caso 3 - $m > \aleph_0$, $cf(m) = \aleph_0$ e $n > \aleph_0$. Também segue do teorema 12 que $\Sigma(\mathcal{J})$ tem calibre compacto m. □

5. m-compacidade

Está claro que não vamos nos preocupar com o caso em que $\mathcal{J} = \mathcal{P}(T)$ pois, nestas circunstâncias $\Sigma(\mathcal{J})$ é o próprio espaço produto, que é compacto se os fatores também o forem.

O conceito de compacidade pode ser enfraquecido e nossa idéia é verificar sob quais condições os espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ satisfazem a essas condições mais fracas.

Observemos que o conceito de compacidade pode ser enfraquecido de diversas formas, a que usamos nos pareceu mais conveniente já que é fechada por produtos e pos subconjuntos fechados.

Precisamos apresentar algumas definições.

Definição 41. - Seja X um espaço topológico. Um suconjunto Y de X diz-se um conjunto G_m , m cardinal infinito, se Y for a intersecção de uma família de abertos não vazios, de cardinalidade m. Vamos denotá-lo por X(m) quando a topologia for gerada pelos conjuntos G_m.

Definição 42. - Uma família de conjuntos não vazios A tem *propriedade da m-intersecção* se toda subfamília de A de cardinalidade m tem intersecção não vazia.

Definição 43. - Um espaço X é dito *m-compacto* se para alguma compatificação BX de X , X é fechado em BX(m).

Consequências da definição:

(a) Um espaço X é m-compacto se e somente se X é fechado em $\beta X(m)$ onde βX é o compactificado de Stone Čech de X.

(b) Um subespaço fechado de um espaço m-compacto é m-compacto.

(c) Um produto de espaços m-compactos é m-compacto

Aqui é importante ressaltar uma das vantagens dessa definição de m-compacto. Quando $m = \aleph_1$ obtemos a classe dos espaços real compactos de Hewitt [GJ].

Precisamos, também, observar que um espaço X pode ser m-compacto sem ser fechado em BX(m) para alguma compactificação BX de X. Um exemplo disto é o espaço discreto D, $|D| = \aleph_1$, que é $\aleph_1$-compacto mas não é fechado em $\beta D(\aleph_1)$.

Vamos no que se segue determinar condições sobre os σ-ideais J tais que os espaços $\Sigma(J) \subset \prod_{t \in X} X_t$ onde cada X_t é compacto, sejam m-compatos.

Teorema 44. - Seja $(X_t)_{t\in T}$ uma família de espaços compactos. Se m é tal que $m^+ < n$ então para qualquer $J \subset [T]^{\leq m}$ temos $\Sigma(J)$ n-compacto.

Demonstração: - Para qualquer σ-ideal J, $X = \prod_{t\in T} X_t$ é compactificado de Stone Čech de $\Sigma(J)$. Dado $x \in X-\Sigma(J)$ o conjunto $K = \{t \mid x_t \neq e_t\}$ não é elemento de J, $|K| \geq m^+$. Para cada $t \in K$ definimos o seguinte aberto

$$\mathcal{U}^t = \pi_t^{-1}(U_t) \quad \text{onde} \quad U_t \text{ é aberto em } X_t$$

tal que $x_t \in U_t$ e $e_t \notin U_t$.

$\Omega = \bigcap_{t\in K} \mathcal{U}^t$ é G_n (considerando-se alguns abertos repetidos, se necessário) e $\Omega \cap \Sigma(J) = \emptyset$. □

Teorema 45. - Seja $(X_t)_{t\in T}$ uma família de espaços compactos. Se $J \supset [T]^{\leq m}$ então $\Sigma(J)$ não é m-compacto.

Demonstração: - Vamos mostrar que $\Sigma(J)$ é G_m-denso. Sejam $x \in X-\Sigma(J)$ e Ω um conjunto G_m ao qual x pertence. Existe uma família de abertos básicos $(U_i)_{i<m}$ tal que $\Omega \supset \bigcap_{i<m} U_i$. Para cada i, $i < m$ o seguinte subconjunto é finito.

$$R(U_i) = \{t \mid (U_i)_t \neq X_t\}.$$

Logo $|\bigcup_{i<m} R(U_i)| = m$ isto é no máximo para uma quantidade m de coordenadas a intersecção não coincide com o espaço todo, portanto a intersecção $\Omega \cap \Sigma(J) \neq \emptyset$. □

oOo

CAPÍTULO III

NORMALIDADE DE ESPAÇOS DETERMINADOS POR σ-IDEAIS

A normalidade de espaços produto tem sido objeto de estudo pelas dificuldades que apresenta e que variam de caso para caso.

Em 1959 Corson [C] iniciou o estudo de Σ-produtos já incluindo o estudo desta propriedade. Nesse trabalho incluiu um resultado que estabelecia condições sob as quais o Σ-produto é normal.

Na década de 70 Kombarov publicou uma série de artigos onde estudou extensivamente a normalidade de espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ determinando condições tanto sobre os fatores como sobre o σ-ideal $\mathcal{J}$ para que $\Sigma(\mathcal{J})$ satisfaça à propriedade acima.

Em 1978 Broverman, Ginsburg e Tall [B] deram a caracterização de σ-ideais $\mathcal{J}$ sobre $\aleph_1$ tal que $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^{\aleph_1}$ seja normal.

Neste capítulo são estabelecidas condições sobre σ-ideais definidos sobre conjuntos T de cardinalidade $> \aleph_1$ tais que os espaços $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$ sejam normais.

Também é feito um estudo das propriedades de $L(\mathcal{J})$. Esses espaços são de bastante importância já que $\Sigma(\mathcal{J})$ é homeomorfo $C(L(\mathcal{J}))$, como mostraremos posteriormente. Este re

sultado generaliza um resultado de Corson [C] neste sentido. Também determinaremos condições sob as quais potências de $L(\mathcal{J})$ são normais.

1. Resultados preliminares

Nesta secção vamos apresentar alguns dos resultados mencionados acima e que serão usados na próxima secção.

Observe-se que toda vez que falarmos Σ-produto estaremos nos referindo a espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ onde $\mathcal{J}$ é o σ-ideal constituido das partes enumeráveis do conjunto de índices.

Teorema 1[C] - O Σ-produto de espaços métricos é normal.

O teorema a seguir é devido a Kombarov [K3]. Na referência a demonstração aparece de forma incompleta, prejudicando o entendimento da mesma. Vamos, por isso, apresentá-la aqui em todos os detalhes.

Teorema 2[K3] - Seja $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t \in T} X_t$ onde $\mathcal{J} = [T]^{\leq m}$ e sendo que cada X_t é compacto e de "tightness" não superior a m. Nestas condições $\Sigma(\mathcal{J})$ é normal.

Na demonstração do teorema vamos precisar dos seguintes lemas:

Lema 3 [C] - Sejam H_1 e H_2 subconjuntos de um espaço topológico produto $Y \times M$ onde M é métrico, e suponhamos que $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de M. Se H_1 e H_2 podem ser separados em $Y \times \mathbb{U}$ para cada $U \in \mathcal{U}$, então H_1 e H_2 podem ser separados em $Y \times M$.

Observação: - O lema permanece verdadeiro se ao invés de M métrico tivermos M paracompacto.

Lema 4 [K3] - Sejam p uma função contínua de um espaço Z sobre um espaço Y paracompacto e sejam $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de abertos de Y e $\mathcal{H} = (H_t)_{t \in T}$ uma coleção de subconjuntos de Z que pode ser separada em $p^{-1}(\Gamma_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Então para todo conjunto fechado $F \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Gamma_\lambda$ existe um aberto $U \supset F$ tal que $\mathcal{H}$ pode ser separado em $p^{-1}(U)$.

Demonstração do teorema 2: - Seja $(X_t)_{t \in T}$ uma família de espaços compactos e tais que $t(X_t) \leq m$ qualquer que seja $t \in T$. Suponhamos que H_1 e H_2 são subconjuntos de $\Sigma(\mathcal{J})$ que não podem ser separados. Como $\Sigma(\mathcal{J})$ é denso no produto $X = \prod_{t \in T} X_t$, H_1 e H_2 também não podem ser separados em X.

Seja B_0 um elemento arbitrário não vazio de $[T]^{\leq m}$. Definamos

$$Y_0 = \prod_{t \in B_0} X_t$$

e $p_0 : X \longrightarrow Y_0$ a projeção de X sobre Y_0. O compacto Y_0 não

pode ser recoberto por abertos tais que H_1 e H_2 são separados por suas imagens inversas pela p_0, isto pela observação que se segue ao lema 3. Existe portanto um ponto $x_0 \in Y_0$ tal que qualquer vizinhança aberta de x_0, V, H_1 e H_2 não podem ser separados em $p_0^{-1}(V)$. Suponhamos agora que para todo $i < j < \aleph_0$ tenhamos um conjunto $B_i \subseteq T$ tal que $|B_i| \leq m$, $B_k \subset B_i$ para $k < i$. Seja

$$p_k^i : Y_i \longrightarrow Y_k$$

a projeção sobre onde $Y_i = \prod_{t \in B_i} X_t$ e $Y_k = \prod_{t \in B_k} X_t$ para todo $i < j$ seja x_i tal que qualquer que seja a vizinhança aberta de x_i, V, H_1 e H_2 não podem ser separadas em $p_i^{-1}(V)$. Suponhamos ainda que $p_k^i(x_i) = x_k$ para $k < i$. Vamos construir B_j e determinar um ponto x_j com as propriedades desejadas. Seja $j = i+1$. Não é difícil ver que

$$x_i \in \overline{p_i(H_1)} \cap \overline{p_i(H_2)}$$

Pelo teorema I 22 sabemos que $t(Y_i) \leq m$ e portanto existem $M_i \subset H_1$ e $N_i \subset H_2$ ambos de cardinalidade $\leq m$ tais que

$$x_i \in \overline{p_i(M_i)} \cap \overline{p_i(N_i)}$$

Denotemos $P_i = M_i \cup N_i$. Sendo $e = (e_t)_{t \in T}$ o ponto base de $\Sigma(J)$ definimos o conjunto C_i como

$$C_i = \{t \in T \mid \exists x \in P_i \text{ tal que } x_t \neq e_t\}$$

Está claro que $|C_i| \leq m$, e portanto o conjunto

$$B_j = B_i \cup C_i$$

também tem cardinalidade menor ou igual a m.

A projeção p_i é fechada, portanto para todo conjunto aberto $U \supseteq (p_i^j)^{-1}(\{x_i\})$ existe uma vizinhança V de x_i tal que

$$(p_i^j)^{-1}(V) \subset U$$

Sendo assim H_1 e H_2 não podem ser separados em

$$(p_i^{-1})(V) = (p_j^{-1})((p_i^j)^{-1}(V))$$

e portanto não podem ser separados em $p_j^{-1}(U) \supset (p_j^{-1})((p_i^j)^{-1}(V))$. Então pelo lema 3 existe um ponto x_j, $x_j \in (p^j)^{-1}(\{x_1\})$ tal que se $x_j \in V \subseteq X_j$ e V é aberto, H_1 e H_2 não podem ser separados em $p_j^{-1}(V)$.

Seja $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Obviamente a cardinalidade de B é menor ou igual a m e seja $y \in \Sigma(\mathcal{J})$ um ponto tal que

$$\begin{cases} p_j(y) = x_j & j=0,1,\ldots \\ y_t = e_t & t \in T-B \end{cases}$$

Uma vizinhança arbitrária de y contém uma vizinhança da forma:

$$U = p_j^{-1}(V) \cap \left(\prod_{t \in T} \Omega_t\right)$$

onde $\Omega_t \neq X_t$ apenas para uma quantidade finita de índices t. Sabemos que

$$x_j \in \overline{p_j(M_j)} \cap \overline{p_j(N_j)}$$

Sejam $z' \in M_j$ e $z'' \in N_j$ tais que $p_j(z') \in V$ e $p_j(z'') \in V$. É fácil ver que $z'_t = z''_t = e_t$ para $t \in T-B$. Portanto z' e z'' estão em U. Isto é uma vizinhança arbitrária de y intercepta H_1 e H_2. Portanto H_1 e H_2 não podem ser fechados e disjuntos. □

Fazendo-se uma análise da demonstração do teorema anterior observamos que uma prova inteiramente análoga se aplica ao caso em que o σ-ideal J é da forma $J = [T]^{<m}$ onde m é um cardinal regular $m \geq \aleph_1$. O ponto onde poderia aparecer alguma dificuldade é a construção da família $(B_i)_{i<\aleph_0}$. Sendo m um cardinal regular basta começar com um conjunto B_0, arbitrário, $|B_0| < m$ e será possível a construção dos outros conjuntos B_i, $i > 0$, desde que seja mantida a condição de compacidade para os fatores produto impondo-se ainda que o "tightness" de cada um deles seja estritamente menor que m.

Na verdade ficou faltando "demonstrar" a normalidade para $J = [T]^{<m}$ sendo m um cardinal singular e tal que $cf(m) \geq \aleph_1$. É fácil ver que a mesma demonstração não se aplica. Ainda que reduzindo ao caso de $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^T$ não nos é possível chegar a uma conclusão. Fica, portanto, a seguinte questão:

<u>Questão</u> - Será que o espaço $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^T$ onde $J = [T]^{<m}$ com m singular e $cf(m) \geq \aleph_1$ é normal?

O próximo teorema dá condições necessárias e suficientes sobre um σ-ideal J sobre $\aleph_1$ para que $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^{\aleph_1}$ seja normal. É preciso observar que no artigo [B] onde aparece o teorema dá-se atenção ao caso em que um σ-ideal sobre $\aleph_1$ é $P(\aleph_1)$, que é o conjunto das partes de $\aleph_1$.

Teorema 5 [B] - Seja J um σ-ideal sobre $\aleph_1$ $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^{\aleph_1}$ é normal se e somente se $J = P(\aleph_1)$ ou $J = [\aleph_1]^{\leq \aleph_0}$.

2. Condições necessárias à normalidade de $\Sigma(J)$

O objetivo desta secção é caracterizar os σ-ideais sobre conjuntos T, T de cardinalidade maior que $\aleph_1$, tais que os espaços $\Sigma(J)$ correspondentes sejam normais.

No que se segue o conjunto de índices T será considerado como um cardinal sendo que este último é o conjunto dos ordinais menores que $|T|$. Lembrando que, sempre que isso não ocorrer consideraremos a bijeção de T sobre $|T|_*$.

Assim como em [B] vamos restingir nosso estudo a espaços $\Sigma(J)$ contidos em $\{0,1\}^T$.

Os próximos resultados serão utilizados na demonstração do teorema 8.

Teorema 6 [GI] - Seja $(X_t)_{t \in T}$ uma família de espaços topológicos e suponhamos que o subproduto $\prod_{t \neq t_0} X_t$ é infinito para todo t_0. Então uma condição necessária e suficiente para que $\beta(\prod_{t \in T} X_t) = \prod_{t \in T} (\beta X_t)$ ocorra é que o espaço produto $X = \prod_{t \in T} X_t$ seja pseudo-compacto.

Dado um cardinal m, $cf(m) > \aleph_0$, então m considerado como ordinal, munido da topologia da ordem, é pseudo compacto e sua compactificação de Stone Čech é o ordinal $m+1$. Lembrando que o produto de um pseudo-compacto por um compacto é pseudo-compacto, o teorema 2 garante que:

$$\beta\,[m \times (m+1)] = (m+1) \times (m+1)\ .$$

O lema a seguir tem uma referência de difícil acesso. Sendo assim, achamos interessante incluir sua demonstração.

Lema 7. - Seja dado um cardinal m, $cf(m) > \aleph_0$ e m e $m+1$ são olhados como ordinais e munidos da topologia da ordem. Nessas condições o espaço produto $m \times (m+1)$ não é normal.

Demonstração: - Consideremos os seguintes sub-conjuntos produto $m \times (m+1)$: $F_1 = \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha < m\}$ e $F_2 = m \times \{m\}$. Está claro que F_1 e F_2 são fechados disjuntos. Suponhamos, por absurdo, que $m \times (m+1)$ é normal. Isto é equivalente a existir uma função contínua

$$f\colon m \times (m+1) \longrightarrow [0,1]$$

tal que $f(F_1) = \{0\}$ e $f(F_2) = \{1\}$. Já vimos, no entanto, que:

$$\beta[(m \times (m+1)] = (m+1) \times (m+1)$$

Sendo assim existe uma extensão contínua de f, que vamos denotar por F e que é definida no espaço produto $(m+1) \times (m+1)$. O ponto (m,m) é simultaneamente aderente a F_1 e F_2 em $(m+1) \times (m+1)$, sendo portanto impossível definir a função F em (m,m), como extensão da f. Isto contraria a hipótese de que $m \times (m+1)$ seja normal. □

Estamos agora em condições de apresentar alguns resultados obtidos.

<u>Teorema 8.</u> - Sejam m um cardinal, $cf(m) > \aleph_0$, e J um σ-ideal sobre m, $J \supset J_m$. Suponhamos que existem $A \in J$ com $|A| = m$ e $B \subset m$ com $|B| = m$ e $B \notin J$, e portanto $m-A \notin J$. Suponhamos que $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^m$. Nestas condições $\Sigma(J)$ não é normal.

<u>Demonstração</u>: - Seja $A \notin J$ com $|A| = |m-A| = m$. Neste caso, $m-A \notin J$. Vamos definir as seguintes aplicações:

$$h: \{0,1\}^A \times \{0,1\}^{m-A} \longrightarrow \{0,1\}^m .$$

$$(x,y) \longrightarrow x \cup y$$

Observemos que h é um homeomorfismo.

$$\Pi_* \{0,1\}^A \times \{0,1\}^{m-A} \longrightarrow \{0,1\}^{m-A}$$

esta aplicação é uma projeção sobre $\{0,1\}^{m-A}$.

O conjunto X, definido por:

$$X = \Pi_*(h^{-1}(\Sigma(J))$$

contém o conjunto X_0 descrito abaixo

$$X_0 = \{x \in \{0,1\}^{m-A} \mid |\{t \mid x_t = 1\}| < m\}\}$$

e não contém o ponto cujas coordenadas são todas iguais a 1.

Verifica-se facilmente a igualdade abaixo

$$\{0,1\}^A \times X = \Pi_*^{-1}(X) = h^{-1}(\Sigma(J))$$

que nos mostra o fato de que $\{0,1\}^A \times X$ e $\Sigma(J)$ são homeomorfos.

Vamos definir o seguinte homeomorfismo sobre a imagem:

$$\phi: m+1 \longrightarrow \{0,1\}^m$$

onde

$$(\phi(\alpha))_\beta = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta < \alpha < m \\ 0 & \text{se } \alpha \leqq \beta < m \\ 1 & \text{se } \alpha = m \end{cases}$$

Com a observação $*$ feita no início da secção vemos que é possível imergir $m+1$ em $\{0,1\}^A$ e também em $\{0,1\}^{m-A}$. Sejam $r: m+1 \longrightarrow \{0,1\}^A$ e $s: m+1 \longrightarrow \{0,1\}^{m-A}$ homeomorfismos. Assim, $r(m+1)$ e $s(m+1)$ são subespaços fechados de $\{0,1\}^A$ e $\{0,1\}^{m-A}$ respectivamente. Além disso, temos que $s(\alpha) \in X$ para todo $\alpha < m$, porém $s(m) \notin X$. Portanto

$$s(m+1) \cap X = s(m)$$

é subespaço fechado de X. Temos portanto $(m+1) \times m$ imerso em $\{0,1\}^A \times X$ como subconjunto fechado. Já vimos, pelo

lema 7, que $(m+1) \times m$ não é normal, consequentemente os espaços $\{0,1\}^A \times X$ e $\Sigma(J)$ não são normais. □

Corolário 9. - Sejam m um cardinal infinito $cf(m) > \aleph_0$ e J um σ-ideal sobre m, $J \supset J_m$. Suponhamos que $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^m$ é normal. Se existir $B \in J$ com $|B| = m$ então $J = P(m)$.

Observação 10. - O corolário 9 se mantém verdadeiro se ao invés de um cardinal m tivermos um conjunto de índices T, $|T| > \aleph_1$. Basta considerar a bijeção * mencionada no início da secção.

Observação 11. - Dado J um σ-ideal sobre T e $S \subset T$, $S \notin J$, a família de subconjuntos

$$J_S = \{I \cap S \mid I \in J\}$$

é um σ-ideal sobre S, como se pode verificar facilmente.

O próximo teorema apresenta um importante resultado neste capítulo, e que permite determinar o tipo de σ-ideal J tendo a informação que o espaço $\Sigma(J)$ é normal.

Teorema 12. - Seja J um σ-ideal sobre m. Suponhamos que $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^m$ é normal. Se $A \in J$ e $|A| < m$ então qualquer $B \subset m$ com $|B| = |A|$ é tal que $B \in J$.

Demonstração: - Por absurdo, suponhamos que isso não ocorra.

Seja m_* o menor cardinal tal que existe p, $p < m_*$ para o qual existem subconjuntos A e B de m tendo ambos cardinalidade p (sem perda de generalidade podemos supor $cf(p) > \aleph_0$) e tais que $A \in J$ e $B \notin J$. Definamos o σ-ideal $J_{A \cup B}$ como ficou indicado na observação 11. Este σ-ideal está nas condições do teorema 1, já que m_* é o menor cardinal com tal propriedade. De acordo com o referido teorema $\Sigma(J_{A \cup B})$. Por outro lado $\Sigma(J_{A \cup B})$ é subespaço fechado de $\Sigma(J)$, e sendo assim, o espaço $\Sigma(J)$ não pode ser normal. □

Conclusões: - Quando sabemos que um espaço $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^T$ é normal, podemos concluir que o σ-ideal J ou é $J = P(T)$ ou é $J = [T]^{<p}$. Se p é um cardinal sucessor, isto é, $p = n^+$, teremos $J = [T]^{\leq n}$. Comparando com os resultados da secção 1, vemos que o "problema" $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^T$ é normal se e somente se estaria totalmente resolvido se a questão colocada na referida secção tivesse sido resolvida.

Teorema 13. - Seja m um cardinal singular, $cf(m) = p$, escrito sob a forma $m = \sum_{i<p} m_i$ com $\aleph_0 \leq m_1 < m_2 \ldots < m$. Suponhamos que $\Sigma(J) \subset \prod_{t \in T} X_t$ com $J = [T]^{<m}$. Se $\Sigma(J)$ for p-paracompacto, então $\Sigma(J)$ é normal.

Observação 14. - Vamos demonstrar posteriormente a implicação inversa, ficando no final com uma condição necessária e suficiente.

<u>Demonstração</u>: - Observemos inicialmente que $\Sigma(\mathcal{J}) = \bigcup_{i<p} \Sigma(\mathcal{J}_i)$ onde $\mathcal{J}_i = [T]^{\leq m_i}$, qualquer $i < p$. Sejam F e G fechados disjuntos de $\Sigma(\mathcal{J})$. Para cada $i < p$, sejam:

$$F_i = F \cap \Sigma(\mathcal{J}_i) \quad \text{e} \quad G_i = G \cap \Sigma(\mathcal{J}_i)$$

dois fechados disjuntos de $\Sigma(\mathcal{J}_i)$. Este último espaço é normal, pelo teorema 2. Sendo assim, pode-se determinar abertos disjuntos U_i e V_i contendo F_i e G_i respectivamente. Os abertos U_i e V_i podem ser olhados como

$$U_i = \mathcal{U}_i \cap \Sigma(\mathcal{J}_i) \ , \quad V_i = \mathcal{V}_i \cap \Sigma(\mathcal{J}_i)$$

onde $\mathcal{U}_i$ e $\mathcal{V}_i$ são abertos disjuntos de $\Sigma(\mathcal{J})$ uma vez que $\Sigma(\mathcal{J}_i)$ é denso em $\Sigma(\mathcal{J})$. Temos ainda que $\overline{\mathcal{U}}_i \cap \mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i \cap \overline{\mathcal{V}}_i = \emptyset$ para qualquer $i < p$. Como

$$F \subset \bigcup_{i<p} \mathcal{U}_i \qquad \text{e} \qquad G \subset \bigcup_{i<p} \mathcal{V}_i$$

e o espaço é p-paracompacto podemos achar um refiramento localmente finito de $(\mathcal{U}_i)_{i<p}$ a saber $(\mathcal{W}_i)_{i<p}$ tal que

$$F \subset \bigcup_{i<p} \mathcal{W}_i = \mathcal{W}$$

Como $(\mathcal{W}_i)_{i<p}$ é localmente finito $\bigcup_{i<p} \overline{\mathcal{W}}_i$ é fechada e $G \subset \Sigma(\mathcal{J}) - \bigcup_{i<p} \overline{\mathcal{W}}_i$ que é um aberto disjunto de $\mathcal{W}$. □

3. Normalidade e m-paracompacidade

Vamos apresentar um resultado onde mostramos que espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ normais são necessariamente m-paracompactos para algum m.

No que ficou claro que o fato de $\Sigma(\mathcal{J})$ ser normal implica em $\mathcal{J} = [T]^{<p}$, para algum p. Os próximos resultados; lema 15 e teorema 16, sendo este devido a Morita [Mo], vão nos permitir obter mais conclusões envolvendo a normalidade dos espaços $\Sigma(\mathcal{J})$.

Lema 15. - Seja $\mathcal{J} = [T]^{<m}$, onde m é um cardinal regular. Se $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t\in T} X_t$ onde para cada $t \in T$ X_t é compacto e $t(X) < m$, então cada $n < m$ $\Sigma(\mathcal{J}) \times I^n$ é normal.

Esboco da demonstração - Note-se que o espaço produto $\Sigma(\mathcal{J}) \times [0,1]^m$ também é um espaço de tipo $\Sigma([S]^{<m})$ para um conjunto S conveniente e o resultado segue do teorema 2.□

Teorema 16 [Mo] - Um espaço topológico X é m-paracompacto se e somente se $X \times I^m$ é normal sendo $I = [0,1]$.

Proposição 17. - Seja $\mathcal{J} = [T]^{<m}$ com m cardinal regular. Seja $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t\in T} X_t$ com X_t compacto e $t(X_t) < m$ para qualquer $t \in T$. Então $\Sigma(\mathcal{J})$ é n-paracompacto qualquer que seja $n < m$.

Comentários

Em espaços $\Sigma(\mathcal{J})$ contidos em espaços produto compactos normalidade e m-paracompacidade são equivalentes em certos casos. Poderia ser uma sugestão para a questão ainda sem resposta: Se $\mathcal{J} = [T]^{<m}$ com $cf(m) > \aleph_0$ $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$ é normal?

Também é importante notar que o "tightness" e a normalidade são equivalentes em certas situações. Um resultado de Kombarov de 1978 [K6] diz o seguinte: Se $\mathcal{J} = [T]^{\leq m}$ e $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t \in T} X_t$ onde cada X_t é compacto são equivalentes $t(\Sigma(\mathcal{J})) \leq m$ e $\Sigma(\mathcal{J})$ é normal.

Algumas observações sobre normalidade coletiva e normalidade hereditária e pseudo-normalidade

Duas perguntas surgem de forma natural quando temos um espaço normal:

- O espaço é hereditariamente normal?
- O espaço é coletivamente normal?

Podemos fazer algumas considerações a respeito da primeira e responder a segunda, de forma negativa, através de um exemplo.

Kombarov [K3] mostrou que se $\mathcal{J} = [T]^{\leq m}$ e $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t \in T} X_t$ onde cada X_t é compacto e de "tightness" menor

ou igual a m. $\Sigma(J)$ é coletivamente normal. Pode-se observar pela demonstração que resultado análogo vale se tivermos $J = [T]^{<m}$ e $t(X_t) < m$, para todo $t \in T$, e sendo m um cardinal regular.

A segunda pergunta se resolve com a seguinte proposição:

<u>Proposição 18.</u> - Seja J um σ-ideal sobre T e $\Sigma(J) \subset \prod_{t \in T} X_t$ onde cada X_t é Hausdorff e tem pelo menos dois pontos. Existe um subconjunto de $\Sigma(J)$ que não é normal.

<u>Demonstração:</u> - Sendo J um σ-ideal $J \supset J_0 = [T]^{\leq \aleph_0}$. Para cada t seja $y_t \neq e_t$. Denotemos por $Y_t = \{e_t, y_t\}$. Seja $\Sigma(J_0) \subset \prod_{t \in T} Y_t$ com $e = (e_t)_{t \in T}$ o mesmo ponto base de $\Sigma(J)$. $\Sigma(J_0) \subset \Sigma(J)$. De acordo com Corson [C], se $y^* \in \Sigma(J_0)$ $\Sigma(J_0) - \{y^*\}$ não é normal. Isto é $\Sigma(J)$ contém um subconjunto que não é normal. □

Em um trabalho de Miller [M], 1982, é introduzida uma condição mais fraca que a de normalidade - a pseudo-normalidade. Vamos verificar que $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^T$ é pseudo-normal para qualquer σ-ideal J sobre T.

<u>Definição 19.</u> - Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é *pseudo-normal* se dados F e G fechados disjuntos $|F| \leq \aleph_0$ existem abertos U e V disjuntos contendo F e G respectivamente.

Proposição 20. - Seja $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$ onde $\mathcal{J}$ é um σ-ideal sobre T. $\Sigma(\mathcal{J})$ é pseudo-normal.

Demonstração: - Dado $F \subset \Sigma(\mathcal{J})$, fechado e $|F| = \aleph_0$ pelo fato de F estar contido em um subespaço de $\Sigma(\mathcal{J})$ homeomorfo a $\{0,1\}^I$, $I \in \mathcal{J}$ concluimos que F é compacto e isto conclui a demonstração. □

Analisando a demonstração desta proposição podemos tirar o seguinte corolário:

Corolário 21. - Seja $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$ onde $\mathcal{J} = [T]^{<m}$ com m singular, $m = \sum_{i<cf(m)} m_i$. Dados F e G fechados disjuntos, com $|F| \leq m_i$ para algum $i < cf(m)$ então existem abertos disjuntos U e V contendo F e G respectivamente.

4. Normalidade de potências de $L(\mathcal{J})$

Definição 22. - Seja m um cardinal infinito. Definimos $L(\mathcal{J})$ como sendo o espaço topológico cujo suporte é $m \cup \{\infty\}$. Todos os pontos de m são abertos e V é vizinhança de ∞ se e somente se $m-V \in \mathcal{J}$ onde $\mathcal{J}$ é um σ-ideal sobre m.

Estamos introduzindo um outro tipo de espaços topológicos. Neste caso a topologia é determinada por um σ-ideal. Precismos estabelecer a ligação entre espaços $L(\mathcal{J})$ e espaços $\Sigma(\mathcal{J})$. Isto é feito por meio de uma proposição que generaliza um resultado de Corson [C]. Antes porém, vamos apresentar duas definições.

Definição 23. - Um espaço topológico X diz-se *m-n-Lindelöf*, $\aleph_0 \leq n \leq m$ se dada uma cobertura aberta de X, de cardinalidade m, é possível determinar subcobertura de cardinalidade estritamente menor que n. Um espaço diz-se *n-Lindelöf* se for m-n-Lindelöf para todo $m \geq n$.

Definição 24. - Um espaço topológico diz-se *n-discreto* se todo conjunto G_n ainda for aberto.

Proposição 25. - Seja $\mathcal{J}$ um σ-ideal sobre m, e $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t<m} X_t$ onde $X_t = \mathbb{R}$, qualquer $t < m$. Nestas condições, $\Sigma(\mathcal{J})$ é homeomorfo a $C(L(\mathcal{J})) = \{f: L(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$ munido da topologia da convergência simples.

Demonstração: - Suponhamos que $C_0(L(\mathcal{J}))$ denota o conjunto das funções reais contínuas que se anulam no ∞. Temos um outro resultado que é: $C(L(\mathcal{J}))$ é homeomorfo a $C_0(L(\mathcal{J})) \times \mathbb{R}$. Logo, $\Sigma(\mathcal{J}) \times \mathbb{R}$ é homeomorfo a $C(L(\mathcal{J}))$. Como m é cardinal infinito, temos que $\Sigma(\mathcal{J}) \times \mathbb{R}$ é homeomorfo a $\Sigma(\mathcal{J})$, o que conclui a demonstração. $\square$

É bom observar que também Alas [A3] trabalha em resultados semelhantes à proposição anterior, restirngindo-se, no entanto a σ-ideais do tipo $[T]^{\leq m}$.

No caso de σ-ideais particulares como por exemplo $J = [m]^{<p}$ concluimos facilmente que $L(J)$ é q-Lindelöf para qualquer $q < p$. Isto nos permite tirar alguns resultados envolvendo a normalidade de potências de $L(J)$. Para isto vamos utilizar um resultado devido a Noble [N] e que aparece a seguir.

<u>Teorema 26 [N]</u> - Seja $X = \prod_{t \in T} X_t$, $|T| = n$, tal que cada subproduto finito dos espaços X_t é normal.

(i) Se X é n-$\aleph_0$-Lindelöf então X é normal.

(ii) Se X é normal existe $S \subset T$, tal que $|T-S| \leq \aleph_0$ tal que $\prod_{t \in S} X_t$ n-$\aleph_0$-Lindelöf.

<u>Teorema 27 [N]</u> - Seja $S = \prod_{i < \aleph_0} X_i$ sendo X_i m-n-Lindelöf para cada $i < \aleph_0$. Se cada X_i é p-discreto para $p < n$ e $\chi(X_i) = m$ então X é m-n-Lindelöf.

<u>Proposição 28.</u> - Seja $J = [m]^{<p}$ então $[L(J)]^i$ é normal se e somente se $i \leq \aleph_0$.

<u>Demonstração:</u> - A demonstração é imediata se levarmos em conta os teoremas anteriores. □

oOo

CAPÍTULO IV

FUNÇÕES CONTÍNUAS DEFINIDAS EM $\Sigma(\mathcal{J})$

O objetivo principal deste capítulo é o estudo de funções contínuas definidas em espaços $\Sigma(\mathcal{J})$.

Assim como no caso de espaços produtos tenta-se determinar condições sejam sobre os fatores, sejam sobre os ideais que determinam o espaço, ou ambos, de forma que as funções sejam determinadas por uma quantidade "mínima" de índices. Resultados como esses para produtos podem ser encontrados em Alas [A_1,A_2].

Resultados

Vamos estabelecer algumas notações antes de apresentar os resultados principais.

No que se segue, m denota um cardinal infinito.

Se $X = \prod_{t\in T} X_t$ é o espaço produto, $S \subset X$ e $P \subset T$ a aplicação

$$P^*: S \longrightarrow \prod_{t\in P} X_t$$

é a projeção. Vamos denotar $\prod_{t\in P} X_t$ abreviadamente por X_P. Observemos que nos casos em que $S = \Sigma(\mathcal{J})$ e $P \in \mathcal{J}$ esta projeção é sobrejetora.

O próximo teorema é muito interessante pois fornece um resultado para espaços $\Sigma(J)$ independente do ideal J. Dependendo apenas das propriedades dos fatores e do espaço de chegada da função contínua.

Teorema 1. - Seja $f: \Sigma(J) \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua, onde $\Sigma(J) \subset \prod_{t \in T} X_t = X$. Suponhamos que $\omega(X_t) \leq m$, qualquer $t \in T$. Suponhamos ainda que existe $Q \subset \Sigma(J)$, denso e tal que para todo $y \in f(Q)$ o pseudo-caráter de Y em y não é maior que m. Nestas condições, existe $P \subset T$, $|P| \leq m$ tal que se x e y são pontos em $\Sigma(J)$ satisfazendo $P^*(x) = P^*(y)$ então $f(x) = f(y)$.

Demonstração: - Para cada $q \in Q \subset \Sigma(J)$ existe $T(q) \subset T$, $|T(q)| = m$, tal que se $(T(q))^*(x) = (T(q))^*(q)$ para $x \in \Sigma(J)$, então $f(x) = f(q)$.

Vamos definir, por indução, uma sequência $Q_0, Q_1, \ldots$, de subconjuntos de Q, onde $|Q_i| \leq m$, $i=0,1,\ldots$, e que satisfaçam a condição:

$$\overline{T_i^*(Q_{i+1})} = \overline{T_i^*(Q)} \qquad (1)$$

onde

$$T_i = \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{q \in Q_j} T(q) \qquad (2)$$

Seja $Q_0 = \{q_0\}$ onde q_0 é um ponto arbitrário de Q, e suponhamos que Q_j, $j < k$ já tenha sido escolhido de

modo a satisfazer (1). Para qualquer j, $j \leq k$ o conjunto T definido em (2) tem cardinalidade $\leq m$, portanto, como $\omega(T_j^*(X)) \leq m$ seus subconjuntos $T_j^*(\Sigma(\mathcal{J}))$ e $T_j^*(Q)$ têm bases de cardinalidade $\leq m$, portanto existe um subconjunto de Q de mesma cardinalidade Q_k tal que, a igualdade (1) vale para $i=k-1$.

Mostremos que o conjunto $P = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$ de cardinalidade menor ou igual a m satisfaz às condições do teorema, ou seja $P^*(x) = P^*(y)$ com x e y em $\Sigma(\mathcal{J})$, então $f(x) = f(y)$.

Suponhamos, por absurdo, que isto não ocorra e sejam U e V vizinhanças disjuntas de f(x) e f(y) respectivamente. Os conjuntos $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ são vizinhanças de x e y respectivament e portanto, contêm vizinhanças da forma

$$\mathcal{U} = \Sigma(\mathcal{J}) \cap \prod_{t \in T} U_t \quad \text{e} \quad \mathcal{V} = \Sigma(\mathcal{J}) \cap \prod_{t \in T} V_t$$

respectivamente, sendo que $U_t = V_t$ para todo $t \in P$.

Por (1) existe um ponto $q = (q_t)_{t \in T} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ tal que $q_t \in U_t = V_t$ para $t \in P$. Por (1) e (2) os pontos definidos abaixo estão em $\Sigma(\mathcal{J})$.

$$P^*(z) = P^*(w) = P^*(q) \qquad (3)$$

$$(T-P)^*(z) = (T-P)^*(x) \quad , \quad (T-P)^*(w) = (T-P)^*(y).$$

Observe-se que

$$\{t \mid z_t \neq e_t\} \subset \{t\} \mid q_t \neq e_t\} \cup \{t \mid x_t = e_t\} \ .$$

Os dois conjuntos da direita estão em $\mathcal{J}$ portanto $z \in \Sigma(\mathcal{J})$. Da mesma forma provamos que $w \in \Sigma(\mathcal{J})$. Temos por (3) $f(z) = f(q) = f(w)$ e como

$$z \in \mathcal{U} \subset f^{-1}(U) \quad e \quad w \in \mathcal{V} \subset f^{-1}(V)$$

Concluimos assim que $U \cap V \neq \emptyset$ absurdo.□

<u>Corolário 2.</u> - Seja $f: \Sigma(\mathcal{J}) \longrightarrow Y$ contínua, onde $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t \in T} X_t$, $d(X_t) \leq m$ qualquer $t \in T$ e Y é um espaço com $\psi(y,Y) \leq m$ para qualquer $y \in Y$. Então existe um subconjunto P de T, com cardinalidade $\leq m$ tal que se x e y são elementos de $\Sigma(\mathcal{J})$ satisfazendo $P^*(x) = P^*(y)$ então $f(x) = f(y)$.

<u>Corolário 3.</u> - Seja $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t \in T} X_t = X$ onde X_t é compacto para cada $t \in T$. Neste caso, X é a compactificação de Stone Čech de $\Sigma(\mathcal{J})$, isto é $X = \beta(\Sigma(\mathcal{J}))$, qualquer que seja $\mathcal{J}$ um σ-ideal sobre T.

<u>Corolário 4.</u> - Seja $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t \in T} X_t = X$ tal que X_t é Tychonoff para qualquer $t \in T$. Suponhamos ainda que para todo $F \subset T$, finito, $\prod_{t \in T} X_t$ é Lindelöf. Neste caso, X é a real compactificação de Hewitt de $\Sigma(\mathcal{J})$, isto é $X = \nu(\Sigma(\mathcal{J}))$, qualquer que seja $\mathcal{J}$ um σ-ideal sobre T.

<u>Corolário 5.</u> - Seja $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t \in T} X_t$ onde X_t é compacto para cada $t \in T$. Então não existe aplicação perfeita de $\Sigma(\mathcal{J})$ em $\mathbb{R}$, qualquer que seja $\mathcal{J}$ σ-ideal sobre T.

A demonstração do corolário decorre do teorema e do seguinte lema:

Lema 6. - Uma aplicação perfeita $f: X \longrightarrow Y$ não pode ser estendida continuamente sobre qualquer espaço Hausdorff que contenha X como subespaço denso.

Vamos agora, por meio de um exemplo, mostrar que o teorema 1 não pode ser melhorado.

Exemplo 7. - Sejam (X,τ) um espaço topológico e x um ponto arbitrário de X. Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ o conjunto abaixo:

$$\mathcal{V}(x) = \{U \in \tau \mid x \in U\}.$$

Seja $\mathcal{X} = D \times X$ onde $D = \{0,1\}$. Para cada $S \subset X$ denotamos por $S^{(i)}$ o conjunto abaixo

$$S^{(i)} = \{i\} \times S$$

Quando $S = \{x\}$, costumamos usar a notação (i,x) para $\{x\}^i$. A topologia de $\mathcal{X}$ é determinada a partir do seguinte de vizinhanças $\{\mathcal{B}(z)\}_{z\in\mathcal{X}}$ onde

$$\mathcal{B}((0,x)) = \{(0,x)\}.$$

$$\mathcal{B}((1,x)) = \{(V^{(0)} - \{x\}^{(0)}) \cup V^{(1)}\}_{V\in\mathcal{V}(x)}$$

Precisamos chamar a atenção sobre algumas propriedades do espaço $\mathcal{X}$:

(i) $X^{(0)}$ é composto de pontos isolados

(ii) $X^{(1)}$ é homeomorfo a X

(iii) Se X for compacto X também o é, e neste caso, $A^{(0)} \cup X^{(1)}$ é compacto para qualquer $A \subset X$

(iv) Se A é denso em X e X não tem pontos isolados então $A^{(0)}$ é denso em $A^{(0)} \cup X^{(1)}$.

Sejam agora $\mathcal{D}$ discreto $|\mathcal{D}| = m$ $m \geq \aleph_0$ e $X = \prod_{t \in T} D_t$ onde $|T| = 2^m$ e $D_t = \{0,1\}$ qualquer $t \in T$. Seja Q um subconjunto denso de X, $|Q| = m$. Seja $\{x_i \mid i < m\}$ uma boa ordem de Q.

Consideremos o espaço $Y = Q^{(0)} \cup X^{(1)} \subset X$ e a aplicação contínua: (*) $f: \mathcal{D} \times X \longrightarrow Y$ assim definida

$$f(0,x) = x^{(1)}$$

$$f(i+1,x) = x_i^{(0)} \qquad i < \aleph_0$$

$$f(j,x) = x_j^{(0)} \qquad j \geq \aleph_0 .$$

$Q^{(0)}$ é denso em Y, os fatores de $\mathcal{D} \times \prod_{t \in T} D_t$ têm peso $\leq m$ e os pontos de $Q^{(0)}$ são abertos em Y. Porém não existe subconjunto próprio $P \subset T$ tal que $P^*(x) = P^*(y)$ implique $f(x) = f(y)$.

Podemos, de forma inteiramente análoga construir uma aplicação contínua definida num espaço do tipo que estamos estudando. Inicialmente sejam $\Sigma(J) \subset \{0,1\}^T$ onde J é

um σ-ideal sobre T e $M \subset \Sigma(J)$ um subconjunto denso. Consideremos o espaço topológico discreto $\mathcal{D}$ onde $|M| = |\mathcal{D}|$.

Definimos o espaço Y como $Y = M^{(0)} \cup (\Sigma(J))^{(1)}$, e a aplicação $f: \mathcal{D} \times \Sigma(J) \longrightarrow Y$ de maneira análoga a (*). Já vimos que esta aplicação não depende de um subconjunto próprio. A única coisa que falta observar é que

$$\mathcal{D} \times \Sigma(J) = \Sigma(J')$$

sendo $J' = \{\{d\} \cup I \mid I \in J\}$ um ideal sobre $T' = \{d\} \cup T$ e $X_d = \mathcal{D}$. Assim

$$\Sigma(J') \subset \mathcal{D} \times \{0,1\}^T .$$

Podemos, com uma condição mais fraca do que aquela imposta sobre o espaço Y, no teorema anterior, obter um resultado sobre dependência de funções contínuas de um subconjunto do conjunto de índices. Vamos estabelecer qual é esta condição.

<u>Definição 8.</u> - Dado um espaço topológico Y dizemos que $m \in \bar{\Delta}Y (m \in \Delta Y)$ se para qualquer família $(z_\alpha)_{\alpha<m}$ em $Y \times Y - \Delta_Y$ existem um subconjunto cofinal $A \subset m$ e uma vizinhança aberta G de Δ_Y em $Y \times Y$ tal que

$$\{z_\alpha \mid \alpha \in A\} \cap \bar{G} = \emptyset$$

$$(\{z_\alpha \mid \alpha \in A\} \cap G = \emptyset)$$

Observação: - A classe mais importante de espaços Y satisfazendo à propriedade acima $m \in \Delta Y$ ($m \in \bar{\Delta} Y$) são espaços cuja diagonal Δ_Y é intersecção de uma quantidade menor que m, de vizinhanças abertas (fechadas).

Já foi definido em I 26 o que é um espaço topológico pseudo-m-compacto. Podemos obter algumas informações sobre pseudo-m-compacidade.

Seja $\Sigma(J) \subset \prod_{t \in T} X_t$. Se $\Sigma(J)$ é pseudo-m-compacto, então $\prod_{t \in T} X_t$ pseudo-m-compacto pelo fato de $\Sigma(J)$ ser denso $\prod_{t \in T} X_t$. Também no caso em que $\prod_{t \in T} X_t$ é pseudo-m-compacto e $J \supset [T]^{\leq m}$, então $\Sigma(J)$ é pseudo-m-compacto.

O próximo teorema é devido a Hušek [Hu] e vai ser útil na demonstração do teorema 10.

Teorema 9 [Hu] - Seja X um espaço pseudo-m-compacto tal que $\Sigma_0 \subset X \subset \prod_{t \in T} X_t$ e $m \in \bar{\Delta} Y$. Se $f: X \longrightarrow Y$ é contínua, então f depende de menos que m coordenadas.

O próximo resultado é bastante interessante, pois para espaços completamente regulares, que é o caso considerado neste trabalho, estabelece uma equivalência entre os fatos de $\Sigma(J)$ ser pseudo-m-compacto e de qualquer $f: \Sigma(J) \longrightarrow \mathbb{R}$ depender de um subconjunto de índices de cardinalidade menor do que m.

<u>Teorema 10.</u> - Seja $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \prod_{t\in T} X_t$ e m cardinal regular. Cada uma das condições implica na seguinte:

(i) $\Sigma(\mathcal{J})$ é pseudo-m-compacto

(ii) Se Y é um espaço topológico tal que $m \in \bar{\Delta}Y$, então qualquer função contínua $f: \Sigma(\mathcal{J}) \longrightarrow Y$ depende de menos que m coordenadas.

(iii) Qualquer função real contínua depende de menos que m coordenadas.

Além do mais, quando $\mathcal{J} \supset [T]^{\leq m}$ temos que (iii) implica (i).

<u>Demonstração:</u> - i) $\Longrightarrow$ ii) esta implicação é o conteúdo do teorema 9, devido a Hušek. ii) $\Longrightarrow$ iii) é imediata. Fica faltando mostrar que iii) $\Longrightarrow$ i) sob a hipótese que $\mathcal{J} \supset [T]^{\leq m}$. Vamos mostrar, por absurdo. Se $\Sigma(\mathcal{J})$ não é pseudo-m-compacto, o espaço produto $X = \prod_{t\in T} X_t$ também não o é. Podemos supor, sem perda de generalidade, que existe t_0 tal que X_{t_0} não é pseudo-m-compacto. Então X_{t_0} contém uma família de abertos, não vazios, dois a dois disjunto de cardinalidade m, a saber: $\{U_\alpha \mid \alpha < m\}$, sem ponto de acumulação. Para cada $\alpha < m$ sejam

$$g_\alpha : X_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função contínua, não constante e tal que

$$g_\alpha \Big|_{X_{t_0} - U_\alpha} \equiv 0$$

e $h_\alpha: X_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função também contínua e não constante. Então, a função $f(x) = \sum_{\alpha<m} g_\alpha(x_{t_0})h_\alpha(x_\alpha)$ onde $x = (x_\alpha)_{\alpha<m}$ está bem definida, é contínua e não depende de menos que m coordenadas mesmo quando restrita a $\Sigma(J)$. □

O seguinte resultado pode, facilmente ser demonstrado como corolário do anterior, desde que sejam assumidos Axioma de Martin e Hipótese do Contínuo.

<u>Corolário 11.</u> - (MA+$\neg$CH). Seja $(X_t)_{t\in T}$ uma família de espaços (completamente regulares) e tais que $c(X_t) \leq \aleph_0$ qualquer $t \in T$. Então, para qualquer σ-ideal J sobre T, as funções contínuas definidas em $\Sigma(J)$ a valores reais dependem de uma quantidade enumerável de coordenadas.

<u>Demonstração:</u> - Assumindo MA + $\neg$CH temos $X = \prod_{t\in T} X_t$ um espaço ccc , isto é $c(X) \leq \aleph_0$, de acordo com o teorema I 11. $\Sigma(J)$ também é ccc , por ser denso, e é completamente regular por ser subespaço. Logo $\Sigma(J)$ é pseudo-$\aleph_1$-compacto e completamente regular. Pelo teorema 10, qualquer função real contínua definida em $\Sigma(J)$ a valores reais depende de uma quantidade enumerável de coordenadas. □

oOo

APÊNDICE 1 - GRUPOS TOPOLÓGICOS

Dada uma família de grupos topológicos $(G_t)_{t\in T}$, o espaço produto $G = \prod_{t\in T} G_t$ tem uma estrutura (natural) de grupo topológico. A operação de grupo é definida por:

dados $g = (g_t)_{t\in T}$ e $g' = (g'_t)_{t\in T}$ definimos

$$g\cdot g' = (g_t\cdot g'_t)_{t\in T}$$

O elemento neutro de G, e, com relação à operação definida acima é: $e = (e_t)_{t\in T}$ onde e_t é o elemento neutro de G_t para cada $t \in T$.

Nestas condições, se considerarmos J um σ-ideal sobre T e $\Sigma(J) \subset G$ tendo por ponto base o elemento neutro e o espaço $\Sigma(J)$ é subgrupo topológico de G.

É interessante observar algumas propriedades deste particular tipo de grupo topológico. Para isso precisamos de algumas definições.

Definição 1. - Um espaço topológico X é enumeravelmente compacto se todo subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação.

Definição 2. - Um espaço topológico X é ω-limitado se todo subconjunto enumerável de X tem fecho compacto.

Lema 3. - (a) Todo espaço topológico ω-limitado é enumeravelmente compacto (b) todo espaço topológico enumeravelmente compacto é pseudo-compacto.

Demonstra-se facilmente a seguinte proposição:

Proposição 3. - Seja $\Sigma(J) \subset \prod_{t\in T} G_t$ onde G_t é grupo topológico compacto para cada $t \in T$. Então $\Sigma(J)$ é ω-limitado.

Corolário 4. - Nas condições da proposição 3, $\Sigma(J)$ é enumeravelmente compacto e portanto $\Sigma(J)$ é pseudo-compacto.

Tem sido objeto de estudo a existência de subgrupos próprios, densos e pseudo-compactos contidos em um grupo topológico G dado.

Essa questão mencionada acima ainda permanece em aberto mesmo em casos muito particulares, como G pseudo-compacto, ou mesmo G compacto. Naturalmente estamos supondo $\omega(G) > \aleph_0$. Uma pergunta na mesma linha foi colocada por van Douwen: será que todo grupo topológico enumeravelmente compacto tem um subgrupo próprio, denso e pseudo-compacto? Comfort respondeu o problema de forma negativa.

Teorema 5 [Cf SP] - Seja $(X_t)_{t\in T}$ uma família de espaços nos quais cada ponto é um G_δ. Sejam $J = [T]^{\leq \aleph_0}$ e $e=(e_t)_{t\in T}$ o ponto base de $\Sigma(J)$. Se $Y \subset X \subset \Sigma(J) \subset \prod_{t\in T} X_t$ com Y enumeravelmente compacto e G_δ denso em X, então $X = Y$.

No que se segue, S^1 denota o círculo munido das propriedades usuais algébricas e topológicas.

Teorema 6 [Cf SP] - Se $J = [\alpha]^{\leq \aleph_0}$ e $\Sigma(J) \subset (S^1)^\alpha$, $\alpha > \aleph_0$. Então $\Sigma(J)$ tem um subgrupo próprio denso e pseudo compacto.

A demonstração deste teorema depende essencialmente de certas propriedades algébricas de S^1.

No entanto, se $J \supsetneq [\alpha]^{\leq \aleph_0}$ temos um resultado análogo desde que $\Sigma(J)$ esteja contido num produto de grupos topológicos pseudo-compactos.

Proposição 7. - Se $J \supsetneq [T]^{\leq \aleph_0}$ e $(X_t)_{t\in T}$ é uma família de grupos topológicos pseudo-compactos, então $\Sigma(J) \subset \prod_{t\in T} X_t$ contém um subgrupo próprio pseudo compacto denso.

Definição 8. - Dado um grupo topológico $G = (G,\tau)$ dizemos que τ' é um refinamento de τ se $\tau' \supset \tau$ e (G,τ') é um grupo topológico. Dizemos ser um refinamento próprio no caso de τ e τ' serem distintas.

Uma, questão que tem sido frequentemente levantada, é se um determinado grupo topológico tem um refinamento próprio satisfazendo alguma propriedade adicional.

Somente para dar um exemplo, o seguinte problema permanece em aberto: será que todo grupo compacto G, $\omega(G) > \aleph_0$, tem um refinamento próprio pseudo-compacto? Também está em aberto a mesma pergunta acima, só que se referindo a um grupo topológico pseudo-compacto.

O próximo teorema [Cf SP] nos indica uma forma de verificar se existe um tal refinamento.

Teorema 9[Cf SP] - Seja G um grupo topológico pseudo-compacto (G,τ). Suponhamos que exista um homomorfismo $h: G \longrightarrow K$, K compacto, $|K| > 1$ tal que $H \equiv \text{graf } h$, e G_δ-denso em $G \times K$. Então G tem uma topologia de grupo pseudo-compacta estritamente mais fina que τ.

Este teorema é essencial na demonstração do próximo com o qual poderemos tirar uma interessante conclusão a respeito de refinamentos da topologia habitual dos espaços $\Sigma(J)$.

Teorema 10 [Cf SP] - Seja K um grupo topológico compacto e G um subgrupo de K^m, onde $m > \aleph_0$. Seja G, $G_{\aleph_1}$-denso em K^m no sentido que G intersepta cada conjunto não vazio da forma $\bigcap_{i \in I} U_i$, onde U_i é aberto em K^m qualquer que seja $i \in I$ e e $|I| \leq \aleph_1$. Então G tem um refinamento próprio pseudo-compacto.

Observemos que no caso em que $J \supset [m]^{\leq \aleph_1}$ e $\Sigma(J) \subset K^m$, com K grupo topológico compacto, estamos em condições de aplicar o teorema anterior e concluir sobre a existência de um refinamento próprio pseudo-compacto.

Outro aspecto interessante dos espaços de tipo $\Sigma(J)$ são aqueles relacionados com generalizações de espaços de Eberlein.

Como já foi dito no capítulo I um espaço compacto X é de Corson se é homeomorfo a um subespaço de $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \mathbb{R}^T$ onde $\mathcal{J} = [T]^{\leq \aleph_0}$ e é fortemente de Eberlein se é homeomorfo a um subespaço de $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$, $\mathcal{J} = [T]^{< \aleph_0}$. Note-se que em ambos os casos, os fatores são grupos topológicos.

Alas e eu temos obtido alguns resultados nessa direção; por exemplo, como consequência do teorema 2.3 de G. Gruenhage [Gr] e da proposição 2 de Pytkeev e Yakolev [PY] tem-se que:

(1) "Se X é subgrupo compacto de $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$, $\mathcal{J} = [T]^{\leq \aleph_0}$, então X é metrizável."

(2) "Se X é subgrupo compacto de $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$ onde $|T| \leq (2^m)^+$ e $\mathcal{J} = [T]^{\leq m}$ então $\omega(X) \leq m$."

Este último resultado utiliza uma condição extra da Teoria dos Conjuntos, a saber $2^{m^+} > 2^m$. Entretanto não sabemos se isso pode ser omitido; o resultado (1) a princípio, também foi provado com uma condição semelhante, e, posteriormente, verificamos que pode ser omitida.

(3) "Se X é um subespaço compacto de $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$ $\mathcal{J} = [T]^{\leq m}$ então X é hereditariamente m-metaLindelöf."

(4) "Se X é um subespaço compacto de $\Sigma(\mathcal{J}) \subset \{0,1\}^T$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} X^n$ é um subgrupo σ-compacto de $\Sigma(\mathcal{J})$.

Neste caso, ou esse subgrupo não é de Baire, ou ele é metrizável."

APÊNDICE 2 - BOX-PRODUTOS

Como já vimos, anteriormente, os espaços produto $\prod_{t\in T} X_t$ têm sua topologia definida pelos abertos básicos $\Omega = \prod_{t\in T} \Omega_t$ tais que o conjunto $R(\Omega) = \{t \mid \Omega_t \subsetneq X_t \text{ , } \Omega_t \text{ aberto}\}$ é finito. Tanto Kelley como Bourbaki consideram outros tipos de topologias sobre o conjunto de pontos de $\prod_{t\in T} X_t$, onde os abertos básicos Ω são tais que o conjunto $R(\Omega)$ pode ser enumerável, ter cardinalidade maior que $\aleph_0$ e até mesmo coincidir com o conjunto T. Este tipo de topologia, mais fina que a topologia produto, costuma ser denominada de *topologia box-produto*.

Esta topologia raramente preserva outras propriedades elementares, além do fato que o box-produto de espaços completamente regulares ainda o é.

No entanto, como observa M. E. Rudin, mesmo sendo uma "má topologia" há interesse de estudá-la pelo fato de envolver a Teoria dos Conjuntos de forma natural. Para exemplificar este fato, temos os seguintes resultados devidos a Kunen e que estendem alguns de M.E. Rudin:

(1) CH implica que o box-produto de uma quantidade enumerável de espaços compactos com peso menor ou igual a $2^{\aleph_0}$ é paracompacto.

(2) MA implica que o box-produto de uma quantidade enumerável de espaços compactos de caráter menor ou igual a $\aleph_0$ é paracompacto.

Esta interligação entre box-produtos e Teoria dos Conjuntos fica mais clara com o estudo desses espaços, por exemplo no seguinte resultado devido a van Douwen:

As seguintes condições são equivalentes:

(a) CH

(b) $(\{0,1\}^{2^{\aleph_0}})_J$ é paracompacto

(c) $(\{0,1\}^{2^{\aleph_0}})_J$ é normal onde $J = [2^{\aleph_0}]^{\leq \aleph_0}$

Além deste aspecto esta topologia apresenta um grande interesse pois torna-se um contra-exemplo para algumas conhecidas conjecturas.

Vamos considerar uma situação um pouco mais geral, definindo o *J-box-produto* onde J é um σ-ideal sobre um conjunto de índices.

Definição 1. - Sejam J um σ-ideal sobre T e $(X_t)_{t\in T}$ uma família de espaços topológicos. Definimos o *J-box-produto* da família acima, denotado por $(\prod_{t\in T} X_t)_J$, o espaço cujo suporte é o produto dos espaços acima, e cuja topologia é gerada pelos abertos elementares $\Omega = \prod_{t\in T} \Omega_t$ onde $\Omega_t \subset X_t$ é aberto, qualquer $t \in T$ e $\{t \mid \Omega_t \neq X_t\} \in J$. Quando $J = [T]^{<k}$ dizemos que o espaço está munido da *k-box-topologia*.

No caso particular de k-box-topologia existem alguns trabalhos e especialmente um devido a Knight [Kn] que trata de propriedades básicas de box-produtos. Referente a propriedades topológicas básicas temos o seguinte resultado referente a J-box-produto:

Teorema 2. - Sejam J um σ-ideal sobre T e $(X_t)_{t\in T}$ uma família de espaços topológicos. Sejam $x = (x_t)_{t\in T}$ um ponto de $(\prod_{t\in T} X_t)_J$ e para cada $t \in T$, C_t é a componente conexa de x_t. Nestas condições a componente conexa de x em $(\prod_{t\in T} X_t)_J$ é dada por:

$$(\prod_{t\in T} C_t)_J \cap (\Sigma_0)_J$$

onde Σ_0 tem por ponto base x.

A demonstração deste e de outros resultados que vão ser apresentados neste apêndice serão omitidos, e oportunamente publicados já que fazem parte de um trabalho que está sendo desenvolvido nessa linha.

Observação 3. - Um fato que se observa facilmente é que se cada espaço X_t, $t \in T$, tem mais de um ponto, então o J-box-produto da família $(X_t)_{t\in T}$ é tal que nenhum ponto é isolado.

No que se refere a funções cardinais e condições de cadeia, alguns resultados foram obtidos.

O exemplo a seguir mostra que no que se refere a funções cardinais o comportamento de produtos e box-produtos pode ser distinto.

Exemplo 4. - Sejam T um conjunto, $|T| = 2^{\aleph_0}$ e $S \subset T$, tal que $|S| = |T-S| = 2^{\aleph_0}$. Consideremos o σ-ideal J sobre T gerado por subconjuntos enumeráveis de T-S e subconjuntos quaisquer de S. Seja $(X_t)_{t\in T}$ uma família de espaços topológicos tais que $d(X_t) \leq \aleph_0$ para qualquer $t \in T$. Sejam U e V abertos em $X = (\prod_{t\in T} X_t)_J$ tais que $U_t \neq X_t$ e $V_t \neq X_t$ para todo $t \in S$. Se existir $t' \in S$ tal que $U_{t'} \cap V_{t'} = \emptyset$ então $U \cap V = \emptyset$. É imediato que $c(X) \geq 2^{|T|} = 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$. Consequentemente $d(X) > 2^{\aleph_0}$.

No sentido inverso, no entanto, o resultado se assemelha ao obtido no caso dos espaços produto:

Proposição 5. - Seja $X = (\prod_{t\in T} X_t)_J$ um J-box produto com $d(X)=m$. Então $d(X_t) \leq m$ qualquer que seja $t \in T$ e $|T| \leq 2^m$.

No que se refere a calibre de box-produtos podemos obter um resultado desde que estejam satisfeitas as seguintes condições pelos cardinais regulares m,n e p:

i) $n \leq p < m$

ii) $n^p < m$

Proposição 6. - Sejam $X = (\prod_{t\in T} X_t)_J$ com $|T| = p$, $J = [T]^{<n}$ e $\omega(X_t) < m$ qualquer que seja $t \in T$. Suponhamos que $A \subset X$ e para cada $x \in A$ existe um conjunto $J = J(x) \subset T$, $|J| < m$ tal que $y \in X$ e $J^*(y) = J^*(x)$ implique $y \in A$. Nestas condições, m é calibre para A.

Uma outra condição de cadeia que foi estudada para $\mathcal{J}$-box-produtos é a pseudo-m-compacidade. Referente a ela temos o resultado:

<u>Proposição 7.</u> - Sejam $(X_t)_{t\in T}$ uma família de espaços topológicos e $\mathcal{J} \subset [T]^{<n}$ um σ-ideal com $n \ll m$. As afirmações a seguir são equivalentes:

(a) $(\prod_{t\in T} X_t)_{\mathcal{J}}$ é pseudo-m-compacto

(b) $(\prod_{t\in I} X_t)_{\mathcal{J}}$ é pseudo-m-compacto, qualquer $I \in \mathcal{J}$.

<u>Notação</u>: - A notação $n \ll m$ significa que $n < m$ e que $p^q < m$ sempre que $p < m$ e $q < n$.

Diversas questões podem ser colocadas para estes espaços — determinação das funções cardinais, verificar se funções contínuas dependem de uma quantidade "pequena" de coordenadas. Além destas pode-se utilizar de técnicas de Teoria dos Conjuntos mais elaboradas a exemplo do que é feito por Roitman [Ro] onde são estudados box-produtos paracompactos em extensões de "forcing".

oOo

BIBLIOGRAFIA

[A_1] Alas, O.T., Density and continuous functions, Atti Accad. Naz. Lincei 48(1970) 129-133.

[A_2] Alas, O.T., Density and continuous functions II. Atti Accad. Naz. Lincei 49(1970) 1-4.

[A_3] Alas, O.T., Normal and functions Spaces, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 23 Topology (1978) 23-29.

[B] Broverman, S.; Ginsburg, J.; Kunen, K. and Tall, F.D., Topologies determined by σ-ideals on ω_1, Can. J. Math. 30 (1978) 1306-1312.

[BTW] Baumgartner, J.E.; Taylor, A.D.; Wagon, S., Structural properties of ideals, preprint.

[Cf] Comfort, W.W., Chain conditions in topological products and powers, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 23, Topology (1978) 301-322.

[Cf SP] Comfort, W.W., Notas de aula, São Paulo, setembro, 1983.

[Cf N] Comfort, W.W.; Negrepontis, S., Continuous functions on products with strong topologies, General Topology and its relations to Modern Analysis and Algebra 3, Proc. Third. (1971) Topological Simposium, Academia Prague, Prague (1972) 89-92.

[C] Corson, H.H., Normality in subsets of product spaces, Amer. J. Math. 81(1959), 785-796.

[D] van Douwen, E., Another non normal box-product, Gen. Top. and Appl. 7 (1977) 71-76.

[E_1] Engelking, R., On functions defined on Cartesian products, Fund. Math. 59 (1966) 221-237.

[E_2] Engelking, R., General Topology. Polska Akad. Nauk. Inst. Mat. Monografie Matematyczne, Warszawa (1977) - 2ª edição.

[G] Gerlits, J., Continuous functions on products of topological spaces, Fund. Math. 16 (1980) 67-75.

[GJ] Gillman, L.; Jerinson, M., Rings of continuous functions, University Series in Higher Mathematics, van Nostrand, N.J. (1960).

[Gℓ] Glicksberg, I., Stone Čech compactifications of products, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959) 369-382.

[Gr] Gruenhage, G., Covering properties on $X^2 \setminus \Delta$ w-sets and compact subsets of Σ-products, Top. and Appl. 17 (1984) 287-304.

[Hu] Hušek, M., Continuous mappings on subspaces of products, Symp. Math. 17 (1976) 25-41.

[I] Isbell J.R., Uniform Spaces, Amer. Math. Soc. Providence, 1964.

[Kn] Knight, C.J., Box topologies, Quart. J. Math. Oxford, 15 (1964), 41-54.

[K_1] Kombarov, A.P., On Σ-products of topological spaces, Soviet. Math. Dokl. 12 (1971) 1101-1104.

[K_2] Kombarov, A.P., On the product of normal spaces. Uniformities on Σ-products, Soviet. Math. Dokl., 13 (1972) 1053-1071.

[K_3] Kombarov, A.P., On the normality of Σ_m-products, Soviet. Math. Dokl. 14 (1973) 1050-1054.

[K_4] Kombarov, A.P.; Malyhin, V.I. On Σ-products, Soviet. Math. Dokl., 14 (1973) 1780-1783.

[K_5] Kombarov, A.P., Normal σ-products, Soviet. Math. Dokl., 18 (1977) 184-188.

[K_6] Kombarov, A.P., On tightness and normality of Σ-products, Soviet. Math. Dokl. 19 (1978) 403-407.

[Ku] Kunen, K. Set theory - An introduction to independence proofs, Studies in Logic, and Foundations of Mathematics vol. 102, 1980.

[Ma] Mazur, On continuous mappings in product spaces, Fund. Math., 39 (1952) 229-239.

[M] Miller, A.W., On box products, Top. and Appl. 14 (1982) 313-317.

[Mo] Morita, K., Paracompactness and product spaces, Fund. Math. 50 (1962) 223-236.

[N] Noble, N., Products with closed projections II, Trans. Amer. Math. Soc., 160 (1971) 169-183.

[NU] Noble, N., Ulmer, M., Factoring functions on cartesian products, Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972) 329-339.

[PY] Pytkeev, E.G.; Yakovlev, N.N., or bicompacta which are unions of spaces by means of coverings, Com. Math. Univ. Carolinae 21 (1980) 247-262.

[Ro] Roitman, J., Paracompact box-products in forcing extensions, Fund. Math. 102 (1979) 219-228.

[Ru] Rudin, M.E., Lectures on set theoretic topology, Regional Conference Series in Mathematics 23 (1974).

oOo