O TEOREMA DE EXTENSÃO DE HARTOGS
PARA
FUNÇÕES HOLOMORFAS GENERALIZADAS

José Carlos Diniz Fernandes

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMATICA E ESTATISTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMATICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ANÁLISE

ORIENTADOR: PROF. DR. ALFREDO JORGE ARAGONA VALLEJO

- São Paulo, maio de 1985 -

E R R A T A

Pág.	Linhas	Onde se lê	Leia-se
06	04	$A_q^o(N)$	$A_q^o(n)$
16	02	$i_\Omega: T\in\mathcal{D}'(\Omega) \to {}_T$	$i_\Omega: T\in\mathcal{D}'(\Omega) \to f_T$
24	11	$\Omega_{ij} = \Omega_{i_j}$	$\Omega_{ij} = \Omega_{i_j}$, satisfazendo
26	18	$\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$	$\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega_i]$
35	11	$I_n^m(\psi_\varepsilon)$	$I_n^m(\psi_\varepsilon)(x)$
38	07	$\mathcal{E}_M[A_1^o(m) \times \Omega_2]$	$\mathcal{E}_M[A_1^o(n) \times \Omega_2]$
40	03	$(\partial^p(\hat{f}_1-\hat{f}_2)\dots)(x)$	$\partial^p((\hat{f}_1-\hat{f}_2)\dots)(x)$
40	06	$\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ tal	$\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais
41	01	$=$	$\leq$
45	06	$c_1\varepsilon^{-N_1} c_2\varepsilon^{\alpha(q)-N_2} = c_1c_2\varepsilon^{\alpha(q)-(N_1+N_2)}$	$c_1\varepsilon^{-N_1} c_3\varepsilon^{\alpha(q)-N_3} = c_1c_3\varepsilon^{\alpha(q)-(N_1+N_3)}$
50	09	$(\delta o v_x)(f)=\dots=v_x(\Theta_\Omega(f))$	$(\bar{\delta} o v_x)(f) = \dots = \bar{v}_x(\Theta_\Omega(\hat{f}))$
51	12 e 15	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
55	04	tais que	tais que $\forall\ q \geq 1$
59	06	$\sim(X_1$	$\sim(X_1)$
67	07	$\gamma:[-1,1] \to \mathbb{C}$	$\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$
69	01	$\mathbb{C}$	$\bar{\mathbb{C}}$
69	11,12 e 13	$\int_\gamma \dots = \int_{-1}^{1} \dots = \int_{-1}^{1} \dots = = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-1}^{1}\dots = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}}\dots \overset{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\dots$	$\int_\gamma \dots = \int_o^1 \dots = \int_o^1 \dots = = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_o^1 \dots = \int_o^{\frac{1}{\varepsilon}}\dots \overset{(*)}{=} \int_o^\infty \dots$
69	16	$\left\lvert\int_{-\infty}^{\infty} u\phi(-u,o)du\right\rvert \leq c\varepsilon^{\alpha(q)N}$	$\left\lvert\int_o^\infty u\phi(-u,o)du\right\rvert \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}$

Pág.	Linhas	Onde se lê	Leia-se
70	01	$\int_{-\infty}^{\infty} u\phi(-u,0)du = 1$	$\int_{o}^{\infty} u\phi(-u,o)du = a \neq 0$
70	03	$1 \leq$	$\lvert a \rvert \leq$
76	02	$\lvert \hat{g}_1(\phi_\varepsilon,t \rvert$	$\lvert \hat{g}_1(\phi_\varepsilon,t) \rvert$
79	14	$\partial_o D \subset \Omega$	$\partial_o D \subset\subset \Omega$
81	02	ϕ	ψ
81	03	$\prod_{j=1}^{n}$	$\prod_{i=1}^{n}$
81	08	$\bar{\partial}_j f(\phi,.)$	$\bar{\partial}_j \hat{f}(\phi,.)$
84	19	$K \subset\subset C$	$K \subset\subset D$
85	03	$K \subset\subset \Omega$	$K \subset\subset D$
85	19	$z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$	$z = (z_1,\ldots,z_n)$.
86	02 e 05	$c = \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \bar{c} \lVert \ldots \rVert$	$c = \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \bar{c} \lVert \ldots \rVert \prod_{j=1}^{n} L(\partial D_j^1)$
87	08	∂^β	∂^α
90	02	nós temos	temos
94	14	$\Omega\ \Upsilon^*$	$\Omega \setminus \Upsilon^*$
97	03	$\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \tau}$	$\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{\tau}}$
102	05	$V\ T^*$	$V \setminus T^*$
103	04	$V\ T^*$	$V \setminus T^*$
104	08	$\frac{\partial^m g}{\partial z^m}(\psi,z)$	$\frac{\partial^m \hat{g}}{\partial z^m}(\psi,z)$
104	11	$\hat{g}(\tau)$	$g(\tau)$
104	18	$Ind_T J_z$	$Ind_T(z).J_z$.

Pág.	Linhas	Onde se lê	Leia-se
107	13 e 14	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_n} \ldots d\tau_n + \int_{D_n} \ldots \frac{d\tau_n \wedge d\bar{\tau}_n}{\tau_n - z_n}$	$\frac{1}{2\pi i}\{\int_{\partial D_n} \ldots d\tau_n + \int_{\partial D_n} \ldots \frac{d\tau_n \wedge d\bar{\tau}_n}{\tau_n - z_n}\}$
108	06	$\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \tau_{n-k}}$	$\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{\tau}_{n-k}}$
110	13	τ_2	τ_3
111	07	D^j	D^j_ℓ
112	07	c^1_ℓ	c^j_ℓ
112	08	$\ldots \int_{D_{n-k+1}} \ldots$	$\ldots \int_{\partial D_{n-k+1}} \ldots$
113	12	$\forall \phi \in A^o_q$	$\forall \phi \in A^o_q$, $q \geqq N$
118	03	$n-2$	x_{n-2}
119	01	III.6.1.1	III.5.1.1
121	09 e 11	$\frac{1}{\varepsilon^q}\lvert\hat{g}(\phi_\varepsilon, z)\rvert$	$\frac{1}{\varepsilon^q}\lvert\hat{g}(\psi_\varepsilon, z)\rvert$
122	03	$\varepsilon^{4(1+\lvert i\rvert}$	$\varepsilon^{4(1+\lvert i\rvert)}$
123	01	$\forall \in]0,\eta[$	$\forall \varepsilon \in]0,\eta[$
124	14	g	$\hat{g}$
125	10	$\alpha \in (\ldots)$	$\alpha \in \Gamma(\ldots)$
127	08	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^*$

Pág.	Linhas	Onde se lê	Leia-se
130	07	$\forall\, q \in \mathbb{N}^*$	$\forall\, q \in \mathbb{N}^*$ e $\forall\, \psi \in A_q^o$
130	09	$\forall\, \varepsilon \in]0,\eta]$	$\forall\, \varepsilon \in]0,\eta[$
131	02 e 08	$\forall\, \varepsilon \in]0,\eta]$	$\forall\, \varepsilon \in]0,\eta[$
134	05	$D(0,R_\ell)$	$\partial D(0,R_\ell)$
137	07	$(w_1+e^{i\alpha_{1,k_1}}z_1,\dots)$	$(w_1+e^{-i\alpha_{1,k_1}}z_1,$
139	09	$\forall\, \varepsilon \in]0,\eta]$	$\forall\, \varepsilon \in]0,\eta[$
145	11	$\hat{g}(\psi,.)$	$\hat{g}_1(\psi,.)$
148	16	$N \in \mathbb{N}^*$	$\exists\, N \in \mathbb{N}^*$
150	05	IV.1	IV.2
155	16	$\hat{\ell} \in \dots$	$\hat{\ell}\,\vert D(0,1)\setminus\{0\} \in \dots$

. Retirar a linha 11 pág. 03

. Entre as linhas 4 e 5 pág. 53, acrescente a seguinte observação:

Observação II.2: Na verdade, para provarmos o lema II.2. temos que demonstrar que dados $a_1,\dots,a_m \in \mathbb{R}$ existe $\phi \in A_q(1)$ tal que $\phi(a_i) = 1$, $1 \leqq i \leqq m$. Mas a demonstração desse fato é análoga à feita para o caso m=1 se definimos $L_{q+i} = \delta_{a_i} - L_o$, $\forall\, 1 \leqq i \leqq m$.

. O lema III.2.2, pág. 67 é falso para a álgebra considerada na dissertação funcionando apenas para as álgebras de [C-1] e [C-2]. Por isso substituiremos o lema III.2.2. pelo seguinte:

Lema III.2.2: Seja $q \in \mathbb{N}^*$. Então existe $\phi \in A_q^o(2)$ tal que $\int_o^\infty u\phi(-u,o)du \neq 0$.

Prova. Basta provar que existe $\phi_o \in A_q(1)$ tal que $\phi_o(0) = 1$ e $\int_{\mathbb{R}} |u|\phi_o(u)du = 1$.

Mas a demonstração desse fato resulta de uma pequena modificação da prova do lema II.2, definindo $L_{q+2}(\psi) = \int |u|\psi(u)du - L_o(\psi)$.

Para os meus pais

I N D I C E

oOo

Introdução

J. F. Colombeau, recentemente, introduziu a $\mathbb{C}$-álgebra das funções generalizadas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{G}(\Omega)$), com o intuito de resolver o problema da multiplicação de distribuições e aplicações à Física (ver [C-1]). Em $\mathcal{G}(\Omega)$ sabemos calcular derivadas parciais de qualquer ordem e, portanto, podemos definir, naturalmente, funções holomorfas generalizadas ($\mathcal{HG}(\Omega)$) como sendo os elementos f de $\mathcal{G}(\Omega)$ tais que $\bar{\partial} f = 0$ (ver [C-2] e [CG-1]). Ao contrário do que acontece com as distribuições, (onde a hipoelipticidade do operador $\bar{\partial}$ garante que qualquer distribuição T tal que $\bar{\partial} T = 0$ é na verdade uma função analítica) existem muitas funções generalizadas g tais que $\bar{\partial} g = 0$ e que não são funções holomorfas usuais. Logo, faz sentido o estudo das funções holomorfas generalizadas e é natural nos perguntarmos sobre a validade de resultados da teoria analítica clássica no contexto generalizado. Foi assim que em discussões com o meu orientador, J. Aragona, surgiu a idéia de tentar demonstrar o Teorema de Extensão de Hartogs para as funções holomorfas generalizadas.

O nosso trabalho começa com uma apresentação da álgebra $\mathcal{G}(\Omega)$ das funções generalizadas. A álgebra que apresentamos, na verdade, é a fusão da álgebra que aparece em [C-3] com a álgebra definida em [A-1] e a utilidade dessa modificação justificaremos no decorrer dessa introdução. O primeiro problema que se coloca é mostrar que o espaço das distribuições ($\mathcal{D}'(\Omega)$) se identifica canonicamente com um subespaço vetorial de $G(\Omega)$. Em [S] tal fato está demonstrado, com detalhes, utilizando a álgebra $G^*(\Omega)$ construida através de um limite indutivo. O que fizemos, então, foi definir uma álgebra $G^o(\Omega)$ por um limite indutivo, seguindo os passos da definição de $G^*(\Omega)$, verificamos que $G^o(\Omega)$ é isomorfa a $G(\Omega)$ e aí demonstramos que $\mathcal{D}'(\Omega) \to G^o(\Omega)$ de maneira análoga à feita em [S]. Dentre as propriedades de G destacamos que G é um feixe (ver [A-1] e [A-3]). Tal propriedade é importante em certas partes da dissertação já que nos permite a construção de funções generalizadas em Ω a partir de definições locais.

O passo seguinte foi fazer um estudo das funções holomorfas generalizadas. Um dos teoremas centrais que apresentamos é que toda função holomorfa generalizada, localmente, num certo sentido, tem um representante holomorfo (ver [CG-1],[C-2],[A-3]). Com a álgebra apresentada por J.F. Colombeau em [C-2] não foi possível a demonstração do Princípio do Prolongamento Analítico (P.P.A.) para as funções holomorfas generalizadas. Motivado por esse problema, J. F. Colombeau apresenta uma nova álgebra em [C-3] e dá uma idéia para a demonstração do P.P.A. (ver Apêndice 5 de [C-3]). A partir dessa idéia tentamos demonstrá-lo, mas havia a necessidade de definir o pull-back de uma função generalizada por uma aplicação C^∞ (que J. Aragona havia obtido com a álgebra apresentada em [A-1]). Assim sendo, para obtermos a demonstração do P.P.A., surgiu a idéia de definir uma álgebra de funções generalizadas que é a fusão da álgebra de [C-3] com a de [A-2]. Cabe destacar ainda que a prova completa do P.P.A deu bastante trabalho já que a única indicação da mesma, disponível na época (Apêndice 5 de [C-3]) era bastante breve; mais tarde, quando recebemos o "preprint" do artigo [C-G/2] verificamos que a nossa demosntração do P.P.A é diferente em vários pontos da apresentada no citado "preprint".

Para provarmos o Teorema de Extensão de Hartogs, tendo o P.P.A. e observando a sua demonstração no caso clássico, precisamos do seguinte teorema de existência de solução para a equação $\bar{\partial}$, no sentido generalizado:

"Se $g \in G_{(0,1)}(\mathbb{C}^n)$, $n \geqq 2$, com suporte compacto tal que $\bar{\partial}g = 0$ então existe uma única $s \in G(\mathbb{C}^n)$ com suporte compacto tal que $\bar{\partial}g = s$."

No Teorema 4 de [AC-1] está demonstrado que para o caso n qualquer, o problema tem solução. O que fizemos foi mostrar que para o caso $n \geqq 2$ a solução é única e tem suporte compacto (que é essencial para a demonstração do Hartogs).

Convém destacar que todos os resultados de funções generalizadas necessários para o nosso objetivo foram cuidadosamente demonstrados. Isto é, dentro da teoria das funções generalizadas não existem pré-requisitos para a compreensão desta dissertação. No sentido clássico utilizamos resultados, sendo dadas as referências necessárias, de Funções Analíticas de uma variável, Espaços Localmente Convexos, Teoria das distribuições, Operadores Elípticos e Hipoelípticos e Formas Diferenciais Complexas.

Para encerrar esta introdução quero registrar o meu agradecimento às várias pessoas que de alguma forma me ajudaram na elaboração deste trabalho.

Ao meu orientador e amigo, Prof. Jorge Aragona, pelo estímulo e apoio que dele recebi desde o meu ingresso no curso de pós-graduação, principalmente na elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Antonio Gilioli e aos amigos Oswaldo Rio Branco de Oliveira e Eloi Medina Galego pelas discussões proveitosas que tivemos.

A Antonia Soares pelo carinho com que realizou o serviço de datilografia.

A todos os amigos sem os quais seria tudo mais difícil.

São Paulo, maio de 1985

oOo

CAPITULO I

A ÁLGEBRA $\mathcal{G}(\Omega)$

Neste primeiro capítulo, vamos definir a álgebra das funções generalizadas, $\mathcal{G}(\Omega)$. Dentre os principais resultados, mostraremos que $\mathcal{D}'(\Omega)$ se identifica canonicamente com um subespaço de $\mathcal{G}(\Omega)$ e que $\mathcal{G}$ é um feixe.

A álgebra $\mathcal{G}(\Omega)$ difere um pouco da álgebra $\mathcal{G}^*(\Omega)$ definida em [C-2] e [S]. Tais modificações foram introduzidas para que no capítulo III, fosse possível a prova do princípio do prolongamento analítico.

Ainda assim, muitas das demonstrações se fazem de maneira totalmente análoga às feitas em [S] e sempre que isso acontecer daremos [S] como referência.

I.1 Definição

<u>Notações</u> a) Se $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$ definimos

$$\psi_{\varepsilon,x}(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon^n}\,\psi\left(\frac{\lambda-x}{\varepsilon}\right) \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \,.$$

Quando $x=0$ escrevemos ψ_ε em vez de $\psi_{\varepsilon,0}$ e quando $\varepsilon=1$ escrevemos ψ_x em vez de $\psi_{1,x}$.

b) $\forall\ q \in \mathbb{N}^*$ consideremos o conjunto

$$A_q(n) = \{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1 \quad \text{e}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^i \psi(x)\,dx = 0 \ ,$$

para todo $i = (i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $1 \leq |i| \leq q\}$,

onde $x^i := x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ e $|i| := i_1 + \ldots + i_n$.

c) Denotamos por $A_q^o(n)$ o conjunto de todas as $\psi \in A_q(n)$ que são simétricas com relação as suas n variáveis e satisfazem a identidade

$$\psi(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}} \psi(x_j,\xi)\,d\xi \ , \forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Quando a dimensão n estiver fixada escreveremos A_q^o em vez de $A_q^o(n)$. É claro que $A_q^o(1) = A_q(1)$.

Os conjuntos $A_q^o(n)$ possuem as seguintes propriedades:

(G1) Os conjuntos $A_q^o(n)$ são não vazios para $q=1,2,\ldots$.

(G2) Para todo $q \in \mathbb{N}^*$ a relação $\psi \in A_q^o(n)$ implica $\psi_\varepsilon \in A_q^o(n)$, $\forall\ \varepsilon > 0$.

(G3) $A_{q+1}^o(n) \subset A_q^o(n)$, $\forall\ q \in \mathbb{N}^*$ e $\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} A_q^o(n) = \emptyset$.

<u>Prova</u> (G1) Em [C-2] e em [S], foi construída $\phi_q \in A_q(1)$ e para o caso $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, tomamos

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad , \quad \phi(x_1,\ldots,x_n) = \phi_q(x_1)\ldots\phi_q(x_n) \quad ,$$

que pertence a $A_q(n)$.

Ainda temos que ϕ é simétrica com relação às n variáveis e

$$\prod_{j=1}^{n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}}\phi(x_j,\xi)d\xi \overset{(a)}{=} \prod_{j=1}^{n}\phi_q(x_j)\int_{(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}}\phi_q(x_1)\dots\phi_q(x_{j-1})\phi_q(x_{j+1})\dots\phi_q(x_n)dx_1\dots dx_{j-1}dx_{j+1}\dots dx_n$$

$$\overset{(b)}{=} \prod_{j=1}^{n}\phi_q(x_j) = \phi(x_1,\dots,x_n) \ , \quad \forall\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \ ,$$

onde em (a) utilizamos o teorema de Fubini e em (b) $\int_{\mathbb{R}}\phi_q(x_i)dx_i = 1$, $\forall\ i = 1,\dots,n$. Logo $\phi\in A_q^o(n)$, o que implica que $A_q^o(n)\neq\emptyset\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$ e $\forall\ q\in\mathbb{N}^*$.

(G-2) Se $\psi\in A_q^o(n)$ em [S], lema I.1.3, está provado que $\psi_\varepsilon\in A_q(n)$. Por outro lado, é claro que ψ_ε é simétrica nas n variáveis já que ψ o é e

$$\psi_\varepsilon(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{\varepsilon^n}\psi(\varepsilon^{-1}x_1,\dots,\varepsilon^{-1}x_n) \overset{(c)}{=} \frac{1}{\varepsilon^n}\prod_{j=1}^{n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}}\psi(\varepsilon^{-1}x_j,\xi)d\xi =$$

$$\overset{(d)}{=} \frac{1}{\varepsilon^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}}\psi(\varepsilon^{-1}x_j,\varepsilon^{-1}\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\prod_{j=1}^{n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}}\psi(\varepsilon^{-1}x_j,\varepsilon^{-1}\xi)d\xi =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}}\frac{1}{\varepsilon^n}\psi(\varepsilon^{-1}x_j,\varepsilon^{-1}\xi)d\xi =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}}\psi_\varepsilon(x_j,\xi)d\xi \ , \quad \text{e} \ \therefore\ \psi_\varepsilon\in A_q^o(n).$$

Em (c) utilizamos que $\psi\in A_q^o(n)$ e em (d) a propriedade da integral de Lebesgue: $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})dx$.

(G3) $A^o_{q+1} \subset A^o_q$ é imediato e $\bigcap_{q\in\mathbb{N}^*} A^o_q \subset \bigcap_{q\in\mathbb{N}^*} A_q = \emptyset$

(provado em [S], lema I.1.4)

$\square$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotemos por $\mathcal{E}[A^o_1 \times \Omega]$ a álgebra complexa (operações ponto a ponto) de todas as funções $f\colon A^o_1 \times \Omega \to \mathbb{C}$ tal que a função $f(\psi,-)$ pertence a $C^\infty(\Omega)$, $\forall\ \psi \in A^o_1$.

Dados $(\psi,x) \in A^o_1 \times \Omega$, definimos $(\partial^i f)(\psi,x) = (\partial^i f(\psi,-))(x)$ onde $\partial^i = \dfrac{\partial^{|i|}}{\partial x_i^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$ é um operador derivação. Com isso, podemos definir a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \partial^i\colon \mathcal{E}[A^o_1 \times \Omega] & \longrightarrow & \mathcal{E}[A^o_1 \times \Omega] \\ f & \longrightarrow & \partial^i f \end{array} .$$

É claro que a aplicação está bem definida e é $\mathbb{C}$-linear. E ainda, para tal operador derivação é fácil verificar as seguintes pro - priedades:

(i) $\partial^i(f+cg) = \partial^i f + c\,\partial^i g\ ,\ \ \forall\ f,g \in \mathcal{E}[A^o_1 \times \Omega]$ e $c \in \mathbb{C}$.

(ii) $\partial^i(f.g) = \sum_{\alpha \leq i} \binom{i}{\alpha} \partial^{i-\alpha} f . \partial^\alpha g\ ,\ \ \forall\ f,g \in \mathcal{E}[A^o_1 \times \Omega]$,

onde se $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ e $i=(i_1,\ldots,i_n)$,

$\alpha \leq i \iff \alpha_j \leq i_j\ ,\ \forall\ 1 \leq j \leq n$ e $\binom{i}{\alpha} = \dfrac{i!}{\alpha!(i-\alpha)!}$,

sendo $\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$.

<u>Definição I.1.1</u> <u>Um elemento f de</u> $\mathcal{E}[A_1^o \times \Omega]$ <u>é dito MODERADO se verifica a seguinte propriedade</u>

$$\left\| \begin{array}{l} \forall\ K \subset\subset \Omega \quad \text{e} \quad \forall\ \partial^i \text{ (operador derivação) } \exists\ N \in \mathbb{N}^* \text{ tal que} \\ \forall\ \phi \in A_N^o \quad \exists\ \eta \in]0,1] \quad \text{e } c > 0 \quad \text{tais que} \\ |\partial^i f(\phi_\varepsilon, x)| \leq c\,\varepsilon^{-N}, \quad \forall\ x \in K, \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[\ . \end{array} \right.$$

Denotamos por $\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ o subconjunto de $\mathcal{E}[A_1^o \times \Omega]$ dos elementos moderados.

<u>Proposição I.1.1</u> a) <u>Se</u> ∂^i <u>é um operador derivação, então</u>

$$\partial^i(\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]) \subset \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega].$$

b) $\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ <u>é uma subálgebra de</u> $\mathcal{E}[A_1^o \times \Omega]$.

<u>Prova</u> Análoga ao Lema I.3.4, pág. 36 de [S]

$\square$

Notação: Denotamos por Γ o conjunto de todas as funções crescentes α de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^+$ tal que $\alpha(q)$ tende para $+\infty$ quando $q \to \infty$.

<u>Proposição I.1.2</u> <u>Se</u> $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ <u>é uma família finita de elementos de</u> Γ <u>então</u> $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ <u>e</u> $\min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ <u>pertencem a</u> Γ.

<u>Prova</u> imediata.

$\square$

DEFINIÇÃO I.1.2 Um elemento f de $\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ é dito NULO se verifica a propriedade seguinte

> $\forall\ K \subset\subset \Omega$, $\forall\ \partial^i$ (operador derivação) $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\phi \in A_q^o(N)$, existe $\eta \in\ ]0,1]$ e $c > 0$ tais que $|\partial^i f(\phi_\varepsilon, x)| \leq c\,\varepsilon^{\alpha(q)-N}$, $\forall\ x \in K$, $\forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[$.

Denotamos por $\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$ o subconjunto de $\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ de todos os elementos nulos.

Observação I.1.1 Devido a proposição I.1.2 (2) é fácil ver que $\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$.

De fato: Se f e g $\in \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$ e $c \in \mathbb{C}$ queremos provar que $f+cg \in \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$.

Dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^i operador derivação $\exists\ \alpha_1 \in \Gamma$ e $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tais que $\forall\ q \geq N_1$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\ \eta_1 \in\ ]0,1]$ e $c_1 > 0$ tais que

$$(*) \qquad |\partial^i f(\phi_\varepsilon, x)| \leq c_1 \varepsilon^{\alpha_1(q)-N_1}, \ \forall\ x \in K$$

e $\forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta_1[$. E, $\exists \alpha_2 \in \Gamma$ e $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tais que $\forall\ q \geq N_2$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\ \eta_2 \in\ ]0,1]$ e $c_2 > 0$ tais que

$$(**)\quad |\partial^i g(\phi_\varepsilon,x)| \leq c_2 \varepsilon^{\alpha_2(q)-N_2}, \quad \forall \varepsilon \in]0,\eta_2[$$

$$\text{e} \quad \forall\, x \in K$$

De (*) e (**) temos que $\exists\ N = \max\{N_1,N_2\}$ e $\alpha = \min\{\alpha_1,\alpha_2\}$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\phi \in A_q^o\ \exists\ \eta = \min\{\eta_1,\eta_2\}$ e $\bar{c} = c_1 + |c|c_2$ tais que:

$$\begin{aligned}
|\partial^i(f+cg)(\phi_\varepsilon,x)| &= |\partial^i f(\phi_\varepsilon,x)+c\,\partial^i g(\phi_\varepsilon,x)| \leq \\
&\leq |\partial^i f(\phi_\varepsilon,x)|+|c|\,|\partial^i g(\phi_\varepsilon,x)| \leq \\
&\leq c_1\,\varepsilon^{\alpha_1(q)-N_1} + |c|c_2\,\varepsilon^{\alpha_2(q)-N_2} \leq \\
&\leq (c_1+|c|c_2)\,\varepsilon^{\alpha(q)-N}.
\end{aligned}$$

$\square$

Denotamos por $\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$ o subconjunto de $\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ de todos os elementos nulos.

<u>PROPOSIÇÃO</u> I.1.3 a) <u>Se</u> ∂^i <u>é um operador derivação então</u>

$$\partial^i(\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]) \subset \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega].$$

b) $\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$ <u>é um ideal de</u> $\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$.

<u>Prova</u> a) Tomemos $f \in \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$. Dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^j operador derivação. Aplicando a definição I.1.2, para K e ∂^{j+i} temos que existe $N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ de modo que para todo $q \geq N$ e $\phi \in A_q^o\ \exists\ \eta \in\ ]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$|\partial^{j+i} f(\phi_\varepsilon, x)| \leqq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \quad , \forall\, x \in K \quad e \quad \varepsilon \in \,]0,\eta[.$$

Mas

$$(\partial^j(\partial^i f))(\phi_\varepsilon, x) = \partial^j(\partial^i f(\phi_\varepsilon, -))(x) = (\partial^{j+i} f(\phi_\varepsilon, -))(x) =$$

$$= \partial^{j+i} f(\phi_\varepsilon, x)$$

e $\therefore$

$$|\partial^j(\partial^i f)(\phi_\varepsilon, x)| \leqq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \quad , \forall\, x \in K \quad e \quad \varepsilon \in \,]0,\eta[\; ,$$

donde segue que $\partial^i f \in N[A_1^o \times \Omega]$.

b) Tomemos

$$f \in N[A_1^o \times \Omega] \qquad e \qquad g \in E_M[A_1^o \times \Omega].$$

Dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^i operador derivação, como para cada $j \in \mathbb{N}^n$ tal que $j \leqq i$

$$\partial^j f \in N[A_1^o \times \Omega] \text{ então } \exists\, N_j \in \mathbb{N}^* \quad e \quad \alpha_j \in \Gamma$$

de modo que para todo $q \geqq N_j$ e

$$\phi \in A_q^o \; , \; \exists\, \eta_j \in \,]0,1] \quad e \quad c_j > 0$$

tais que

$$|\partial^j f(\phi_\varepsilon, x)| \leq c_j \varepsilon^{\alpha_j(q)-N_j}, \forall x \in K \text{ e } \varepsilon \in]0,\eta_j[$$

Também $\exists \bar{N}_j \in \mathbb{N}^*$ de modo que $\forall \phi \in A^o_{\bar{N}_j}$ $\exists \bar{\eta}_j \in]0,1]$ e $\bar{c}_j > 0$ tais que

$$|\partial^{i-j} g(\phi_\varepsilon, x)| \leq \bar{c}_j \varepsilon^{-\bar{N}_j}, \forall x \in K, \forall \varepsilon \in]0,\bar{\eta}_j[.$$

Tomemos $N = \max\limits_{j\leq i} \{N_j+\bar{N}_j\}$, $\alpha = \min\limits_{j\leq i} \alpha_j \in \Gamma$. Logo para todo $q \geq N$ e $\phi \in A^o_q$ escolhemos $\eta = \min\limits_{j\leq i} \{\eta_j, \bar{\eta}_j\}$ e $c = \sum\limits_{j\leq i} \binom{i}{j} c_j \bar{c}_j$ tais que

$$\partial^i(fg)(\phi_\varepsilon, x) = \sum_{j\leq i} \binom{i}{j} (\partial^j f . \partial^{i-j} g)(\phi_\varepsilon, x) =$$

$$= \sum_{j\leq i} \binom{i}{j} (\partial^j f)(\phi_\varepsilon, x) . \partial^{i-j} g(\phi_\varepsilon, x)$$

e portanto

$$|\partial^i(f.g)(\phi_\varepsilon, x)| \leq \sum_{j\leq i} \binom{i}{j} |\partial^j f(\phi_\varepsilon, x)| |\partial^{i-j} g(\phi_\varepsilon, x)| \leq$$

$$\leq \sum_{j\leq i} \binom{i}{j} c_j \varepsilon^{\alpha_j(q)-N_j} . \bar{c}_j \varepsilon^{-\bar{N}_j} =$$

$$= \sum_{j\leq i} \binom{i}{j} c_j \bar{c}_j \varepsilon^{\alpha_j(q)-(N_j+\bar{N}_j)} \leq$$

$$\leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}, \forall x \in K \text{ e } \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Logo $fg \in \mathcal{N}[A^o_1 \times \Omega]$.

$\square$

A álgebra complexa das funções generalizadas é então definida por

$$G(\Omega) = \frac{E_M[A_1^o \times \Omega]}{N[A_1^o \times \Omega]} .$$

Claramente G é uma álgebra complexa comutativa, associativa e com elemento unidade.

Daqui por diante denotaremos por $\theta_\Omega : E_M[A_1^o \times \Omega] \to G(\Omega)$ a aplicação quociente.

I.2. As inclusões canônicas de $C^\infty(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$ em $G(\Omega)$.

<u>PROPOSIÇÃO</u> I.2.1. $C^\infty(\Omega)$ <u>se identifica canonicamente com uma subálgebra de</u> $G(\Omega)$.

<u>Prova</u> Para cada $f \in C^\infty(\Omega)$ definimos

$$\hat{f}: A_1^o \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\hat{f}(\phi, x) = f(x)$$

É claro que $\hat{f} \in E_M[A_1^o \times \Omega]$, pois dado $K \subset\subset \Omega$ e ∂^i operador derivação, tomemos N=1. Então $\forall\ \phi \in A_1^o$, $\exists\ \eta = 1$ e $c = \|\partial^i f\|_K$ tais que

$$|\partial^i \hat{f}(\phi_\varepsilon, x)| = |\partial^i f(x)| \leq c\varepsilon^{-1} \quad , \forall\ x \in K \text{ e } \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Logo, podemos identificar $C^\infty(\Omega)$ a uma subálgebra de

$\mathcal{G}(\Omega)$ através da aplicação

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Omega) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{G}(\Omega) \\ f & \longrightarrow & \Theta_\Omega(\hat{f}) \end{array}$$

Claramente, δ é um $\mathbb{C}$-homomorfismo. Vamos mostrar então que δ é injetora. De fato, se

$$\delta(f) = \delta(g) \quad \text{então} \quad \Theta_\Omega(\hat{f}) = \Theta_\Omega(\hat{g}) \quad ,$$

ou seja, $\hat{f} - \hat{g} \in \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$ e portanto, fixado $x \in \Omega$, temos que para o operador identidade, existe $N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geq N$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\, c > 0$ e $\eta \in]0,1]$ tais que

$$|(\hat{f}-\hat{g})(\phi_\varepsilon, x)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}, \quad \forall\, \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Como $\alpha(q) \xrightarrow[q\to\infty]{} \infty$ existe $q_o \geq N$ tal que $\alpha(q_o)-N > 0$. Fixemos $\phi \in A_{q_o}^o$. Logo, $\exists\, \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tal que

$$|(\hat{f}-\hat{g})(\phi_\varepsilon, x)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q_o)-N}, \quad \forall\, \varepsilon \in]0,\eta[\quad ,$$

ou seja, $|f(x)-g(x)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q_o)-N}$, $\forall\, \varepsilon \in]0,\eta[$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon^{\alpha(q_o)-N} \to 0$ e $\therefore$ $f(x) = g(x)$. Tal raciocínio pode ser feito $\forall\, x \in \Omega$, o que implica que $f=g$.

$\square$

<u>PROPOSIÇÃO</u> I.2.2. $\mathcal{D}'(\Omega)$ <u>se identifica canonicamente a um subespaço vetorial de</u> $\mathcal{G}(\Omega)$.

<u>Prova</u> Em [S], §I.4, está provado que $\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{G}^*(\Omega)$ utilizando-se a construção de $\mathcal{G}^*(\Omega)$ dada por limite indutivo. Aqui daremos o roteito de construção por limite indutivo de uma álgebra isomorfa a $\mathcal{G}(\Omega)$ e então mostraremos a inclusão $\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{G}(\Omega)$ de maneira análoga à $\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{G}^*(\Omega)$.

No roteiro que daremos abaixo [D] denotará definições e [R] os resultados. As demonstrações de [R] se fazem de maneira totalmente análoga às feitas em [S], §I.4, com algumas exceções quando então faremos as demonstrações.

[D1] ([S], def. I.1.7) $\mathcal{X}$ é o conjunto de todos os subconjuntos X de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \Omega$ que tem a seguinte propriedade:

$$\left\| \begin{array}{l} \forall\ K \subset\subset \Omega \quad \exists\ N \in \mathbb{N}^* \quad \text{tal que} \quad \forall\ \phi \in \overset{\circ}{A}_N \ \exists\ \eta \in\ ]0,1] \\ \text{tal que} \\ \{\phi_\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < \eta\} \times K \subset X \end{array} \right.$$

[R1] ([S], Lema I.1.12) $\mathcal{X}$ é um conjunto dirigido com respeito à relação $\supset$.

[D2] ([S], def. I.1.8) $N(K)$ = menor dos índices N que satisfaz a propriedade de [D.1]. Se $\phi \in \overset{\circ}{A}_{N(K)}$; $\eta(K,\phi)$ = supremo dos η que satisfazem a propriedade de [D.1].

[D3] ([S] def. I.1.10) $X' = \bigsqcup_{K \subset\subset \Omega} \ \bigsqcup_{\phi \in \overset{\circ}{A}_{N(K)}} (\{\phi_\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < \eta(K,\phi)\} \times \overset{\circ}{K})$

$\forall\ X \in \mathcal{X}$

[R2] ([S], Lema I.1.12) $X' \in \mathcal{X}$, $\forall\ X \in \mathcal{X}$.

[D4] ([S]. def. I.1.13) $E[X]: = \{f \in \mathbb{C}^X | \forall\, K \subset\subset \Omega\, (\overset{\circ}{K} \neq \emptyset), \forall\, \phi \in A^{\circ}_{N(K)}$ e $\forall\, \varepsilon$ com $0 < \varepsilon < \eta(K,\phi)$; então $f_K(\phi_\varepsilon,.) \in C^\infty(\overset{\circ}{K})\}$

para cada $X \in \chi$. Observe que $f_K(\phi,.) = f(\phi,.)|K$.

[R3] ([S], Lema I.1.15a) $E[X]$ é uma subálgebra de $\mathbb{C}^X$.

[R4] ([S], Lema I.1.15b) Se $X,Y \in \chi$, $X \supset Y$ e $f \in E[X]$ então $f|Y \in E[Y]$.

[R5] ([S], Lema I.1.17) $(\chi, (E[X])_{X \in \chi}, (\theta_{YX})_{X \supset Y})$ é um sistema indutivo de álgebras, onde

$$\theta_{YX}: f \in E[X] \to f|Y \in E[Y]$$

[D5] ([S], def. I.1.18) $E[\Omega]: = \varinjlim_{X \in \chi} E[X]$, sendo que denotaremos $\theta^{\circ}_X: E[X] \to E[\Omega]$ as aplicações canônicas do limite indutivo.

[D6] ([S], def. 1.2.1) Se $f \in E[X]$, $X \in \chi$ e $(\psi,y) \in X'$ (e $\therefore\ \exists\ K \subset\subset \Omega$, $\phi \in A^{\circ}_{N(K)}$ e $\varepsilon \in\,]0,\eta(K,\phi)[$ tal que $\psi = \phi_\varepsilon$ e $y \in \overset{\circ}{K}$), definimos $\partial^i f(\psi,y): = \partial^i[f_K(\psi,.)](y)$. É claro que $\partial^i f \in E[X']$. Logo, se $\phi \in E[\Omega]$ existe $f \in E[X]$ tal que $\phi = \theta^{\circ}_X(f)$ e, então, definimos $\partial^i\phi = \theta^{\circ}_{X'}(\partial^i f)$, (isto é, $\partial^i \circ \theta^{\circ}_X = \theta^{\circ}_{X'} \circ \partial^i$).

[D7] ([S], def. I.3.1) $\psi \in E[\Omega]$ é dito <u>moderado</u>, se existem $X \in \chi$ e $f \in E[X]$ com $\theta^{\circ}_X(f) = \psi$ verificando a propriedade seguinte:

$\forall\, K \subset\subset \Omega$, $\forall\, \partial^i$ (operador derivação), $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\, \phi \in A_N^o$, $\exists\, \eta \in\,]0,1]$ e $c > 0$ tais que

(i) $(\phi_\varepsilon, x) \in X'$, $\forall\, x \in K$ e $\forall\, \varepsilon \in\,]0,\eta[$.

(ii) $|\partial^i f(\phi_\varepsilon, x)| \leqq c\varepsilon^{-N}$, $\forall\, x \in K$ e $\forall\, \varepsilon \in\,]0,\eta[$.

[R6] ([S], Lema I.3.4) $E_M[\Omega] := \{\psi \in E[\Omega] \mid \psi$ é moderada$\}$ é uma subálgebra de $E[\Omega]$.

[D8] ([S], def. I.3.5). $\psi \in E_M[\Omega]$ é dito <u>nulo</u> se existem $X \in \mathcal{X}$ e $f \in E[X]$ com $\theta_X^o(f) = \psi$ verificando a propriedade seguinte

$\forall\, K \subset\subset \Omega$, $\forall\, \partial^i$ (operador derivação) $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$, tais que se $q \geqq N$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\, \eta \in\,]0,1]$ e $c > 0$ tais que

(i) $(\phi_\varepsilon, x) \in X'$, $\forall\, x \in K$ e $\varepsilon \in\,]0,\eta[$.

(ii) $|\partial^i f(\phi_\varepsilon, x)| \leqq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}$, $\forall\, x \in K$ e $\varepsilon \in\,]0,\eta[$.

[R7] ([S], Lema I.3.8a). $N_\Omega := \{\psi \in E_M[\Omega] \mid \psi$ é nula$\}$ é tal que $\partial^i(N_\Omega) \subset N_\Omega$, para cada operador derivação ∂^i.

[R8] ([S], Lema I.3.8b). N_Ω é um ideal de $E_M[\Omega]$.

[D9] ([S], def. I.3.9). $G^o(\Omega) := \dfrac{E_M[\Omega]}{N_\Omega}$. A aplicação quociente

$$E_M[\Omega] \longrightarrow G^o(\Omega) \quad \text{é denotada por} \quad q_\Omega^o .$$

[D10] ([S], def. I.3.10). Se $g \in G^o(\Omega)$ e $g = q_\Omega^o(\hat{g})$ então $\partial^i g = q_\Omega^o(\partial^i \hat{g})$.

[R9] ([S], Teor. I.5.2). $A_1^o \times \Omega \in \mathcal{X}$ e para todo $g \in G^o(\Omega)$ existe $\hat{g} \in E[A_1^o \times \Omega]$ tal que $\theta^o_{A_1^o\times\Omega}(\hat{g}) \in E_M[\Omega]$ e $g = q^o_\Omega(\theta^o_{A_1^o\times\Omega}(\hat{g}))$.

[R10] $\mathcal{E}[A_1^o \times \Omega] = E[A_1^o \times \Omega]$, $\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega] = {\theta^o_{A_1^o\times\Omega}}^{-1}(E_M[\Omega])$ e

$\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega] = {\theta^o_{A_1^o\times\Omega}}^{-1}(\mathcal{N}_\Omega)$. Se

$$\theta^o_\Omega = \theta^o_{A_1^o\times\Omega}|\mathcal{E}_M[A_1^o\times\Omega] \quad , \text{ temos:}$$

[R11] $$\theta\colon \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega] \xrightarrow{\theta^o_\Omega} E_M[\Omega] \xrightarrow{q^o_\Omega} \mathcal{G}^o(\Omega) \ .$$

Então: (i) $\ker \theta = \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$ (por (R10])

(ii) θ é sobrejetora (por [R9] e [R10]).

Logo,

$$\frac{\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]}{\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]} \cong \mathcal{G}^o(\Omega) \qquad \text{e} \quad \therefore \quad \mathcal{G}(\Omega) \cong \mathcal{G}^o(\Omega).$$

Logo, basta mostrar que $\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{G}^o(\Omega)$. Fixemos $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

[D11] ([S], Lema I.4.1)

$$X_1 = \{(\psi,x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \Omega | \psi_x \in \mathcal{D}(\Omega)\} \in \mathcal{X} \quad ,$$

onde

$$\psi_x(\lambda) = \psi(\lambda - x), \quad \forall \ \lambda \in \mathbb{R}^n$$

[R12] ([S], Lemas I.4.2 e I.4.3) $f_T\colon (\psi,x) \in X_1 \to \langle T,\psi_x\rangle \in \mathbb{C}$ é tal que $f_T \in E[X_1]$ e $\theta^o_{X_1}(f_T) \in E_M[\Omega]$.

[R13] A aplicação

$$i_\Omega : T \in \mathcal{D}'(\Omega) \xrightarrow{j_\Omega} {}_T \in E_M[X_1] \xrightarrow{\Theta^*_{X_1}} \Theta^o_{X_1}(f_T) \in E_M[\Omega] \xrightarrow{q^o_\Omega} q^o(\Theta^o_{X_1}(f_T)) = G_T \in \mathcal{G}^o(\Omega)$$

é injetora, onde $E_M[X_1] = \Theta^{o^{-1}}_{X_1}(E_M[\Omega])$ e $\Theta^*_{X_1} = \Theta^o_{X_1}|E_M[X_1]$

Observação: Para a demonstração do resultado acima, utiliza-se o seguinte resultado (análogo ao lema I.4.6, pág. 52 de [S]):

[R14] Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\Theta^*_{X_1}(f_T) \in \mathcal{N}_\Omega$ então $T = 0$.

Faremos a demonstração de [R14] devido à diferença na definição do ideal.

<u>Prova</u>: Fixemos $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Para $K = \operatorname{supp}\phi$, como $\Theta^*_{X_1}(f_T) \in \mathcal{N}_\Omega$ então existe $N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geqq N$ e $\phi \in A^o_q$, $\exists\, \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tais que

(i) $(\phi_\varepsilon, x) \in X_1'$, $\forall\, x \in K$ e $0 < \varepsilon < \eta$.

(ii) $|\partial^i f_T(\phi_\varepsilon, x)| \leqq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}$, $\forall\, x \in K$ e $0 < \varepsilon < \eta$.

Como $\alpha(q) \xrightarrow[q\to\infty]{} \infty$ $\exists\, q_o \geqq N$ tal que $\alpha(q_o) > N$. Fixemos $\psi \in A^o_{q_o}$, então $\exists\, \eta_1 \in]0,1]$ e $c_1 > 0$ tais que

$$|f_T(\psi_\varepsilon, x)| = |\langle T, (\psi_\varepsilon)_x\rangle| = |\langle T, \psi_{\varepsilon,x}\rangle| \leqq c_1\varepsilon^{\alpha(q_o)-N},$$

$\forall\, x \in K$ e $\varepsilon \in]0,\eta[$.

Mas pelo lema I.4.7, pg. 55, de [S], segue que $\forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$|<T,\phi>| = |\lim_{\varepsilon\to 0} \int_K <T,\psi_{\varepsilon,x}>\phi(x)dx| \leqq$$

$$\leqq \lim_{\varepsilon\to 0} \int_K |<T,\psi_{\varepsilon,x}>||\phi(x)|dx \leqq$$

$$\leqq \lim_{\varepsilon\to 0} c_1\varepsilon^{\alpha(q_o)-N}\int_K |\phi(x)|\,dx = 0$$

já que $\alpha(q_o) - N > 0$

Logo, $<T,\phi> = 0$, $\forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donde segue $T = 0$.

$\square$

Observação I.2.1 No próximo parágrafo definiremos derivação em $\mathcal{G}(\Omega)$. Mostraremos também que $G_{\partial^p T} = \partial^p(G_T)$, ou seja, dados uma distribuição T e um operador derivação ∂^p , o correspondente de $\partial^p T$ na inclusão $\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{G}(\Omega)$ coincide com a função generalizada obtida aplicando-se ∂^p ao correspondente de T na inclusão.

I.3 Derivação em $\mathcal{G}(\Omega)$

Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega] & \xrightarrow{\partial^i} & \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega] \\ \Theta_\Omega \downarrow & & \downarrow \Theta_\Omega \\ \mathcal{G}(\Omega) & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & \mathcal{G}(\Omega) \end{array}$$

Podemos definir uma aplicação $\delta: G(\Omega) \to G(\Omega)$ por $\delta(\theta_\Omega(\hat{f})) = \theta_\Omega(\partial^i \hat{f})$, onde $\hat{f} \in E_M[A_1^o \times \Omega]$. Temos que δ está bem definida já que se $\hat{f}$ e $\hat{g} \in E_M[A_1^o \times \Omega]$ e $\theta_\Omega(\hat{f}) = \theta_\Omega(\hat{g})$ segue que $\hat{f}-\hat{g} \in N[A_1^o \times \Omega]$ e pela proposição I.1.3 a)

$$\partial^i(\hat{f}-\hat{g}) \in N[A_1^o \times \Omega] \quad \text{e} \quad \therefore \; \partial^i\hat{f}-\partial^i\hat{g} \in N[A_1^o \times \Omega] \, ,$$

donde segue que $\theta_\Omega(\partial^i \hat{f}) = \theta_\Omega(\partial^i \hat{g})$.

E é claro que δ é $\mathbb{C}$-linear. Com estas notações temos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO I.3.1 Se $f \in G(\Omega)$ e ∂^i é um operador derivação, então $\partial^i f := \delta(\theta_\Omega(\hat{f}))$, onde $\hat{f}$ é um representante de f.

PROPOSIÇÃO I.3.1 a) O diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_M[A_1^o \times \Omega] & \xrightarrow{\quad \partial^i \quad} & E_M[A_1^o \times \Omega] \\ \big\downarrow \theta_\Omega & & \big\downarrow \theta_\Omega \\ G(\Omega) & \xrightarrow{\quad \partial^i \quad} & G(\Omega) \end{array}$$

é comutativo.

b) Se f e g são elementos de $G(\Omega)$ então

$$\partial^i(f.g) = \sum_{j \leq i} \binom{i}{j} \partial^j f . \partial^{i-j} g \, ,$$ ou seja vale a regra de Leibnitz para elementos de $G(\Omega)$.

Prova a) segue da definição

b) é análoga à observação da pg. 42 de [S]

□

PROPOSIÇÃO I.3.2 Se α denota o isomorfismo entre $\mathcal{G}(\Omega)$ e $\mathcal{G}^{o}(\Omega)$, então o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\Omega) & \xrightarrow{\alpha^{-1}\circ i_{\Omega}} & \mathcal{G}(\Omega) \\ \Big\downarrow \partial^{p} & & \Big\downarrow \partial^{p} \\ \mathcal{D}'(\Omega) & \xrightarrow[\alpha^{-1}\circ i_{\Omega}]{} & \mathcal{G}(\Omega) \end{array}$$

é comutativo, ou seja, $\alpha_{\Omega}\circ\partial^{p} = \partial^{p}\circ\alpha_{\Omega}$, onde $\alpha_{\Omega} = \alpha^{-1}\circ i_{\Omega}$.

Para a demonstração da proposição acima utilizaremos os dois lemas a seguir:

LEMA I.3.1 O diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(\Omega) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G}^{o}(\Omega) \\ \Big\downarrow \partial^{p} & & \Big\downarrow \partial^{p} \\ \mathcal{G}(\Omega) & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathcal{G}^{o}(\Omega) \end{array}$$

é comutativo.

Prova Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ $\exists\ \hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ tal que

$f = \theta_{\Omega}(\hat{f})$. Mas se $\theta = q_{\Omega}^{o}\circ\theta_{\Omega}^{o}$, como o diagrama

$$\begin{tikzcd} E_M[A_1^o \times \Omega] \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\theta_\Omega"'] & G^o(\Omega) \\ G(\Omega) \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo (ver [R11]), segue que:

$$(\partial^p o\alpha)(f) = (\partial^p o\alpha o\theta_\Omega)(\hat{f}) = (\partial^p o\theta)(\hat{f}) \overset{(a)}{=} (\theta o\partial^p)(\hat{f})$$

$$= (\alpha o\theta_\Omega o\partial^p)(\hat{f}) = \alpha\ (\theta_\Omega o\partial^p)(\hat{f})$$

$$\overset{(b)}{=} \alpha\ (\partial^p o\theta_\Omega)(\hat{f}) = \alpha(\partial^p f) = (\alpha o\partial^p)(f)\ ,$$

sendo:

(a) $$\partial^p o\theta = (\partial^p o q_\Omega^o) o\theta_\Omega^o \underset{[D10]}{=} (q_\Omega^o o\partial^p) o\theta_\Omega^o =$$

$$q_\Omega^o o(\partial^p o\theta_\Omega^o) \underset{[D6]}{=} q_\Omega^o\ o\ (\theta_\Omega^o o\partial^p) = (q_\Omega^o o\theta_\Omega^o) o\partial^p = \theta o\partial^p$$

(b) utilizamos a proposição I.3.1(a).

□

<u>LEMA</u> I.3.2 Para todo $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e todo operador derivação ∂^p em em $\mathbb{R}^n$ temos

$$\partial^p(\theta_{X_1}^o(f_T)) - \theta_{X_1}^o(f_{\partial^p T}) \in N_\Omega\ .$$

<u>Prova</u> Totalmente análoga ao teorema I.4.5 ítem 2 a de [S].

□

<u>Prova da proposição</u> I.3.2: Pelo lema I.3.1 basta demonstrar que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\Omega) & \xrightarrow{i_\Omega} & \mathcal{G}^o(\Omega) \\ \partial^p \downarrow & & \downarrow \partial^p \\ \mathcal{D}'(\Omega) & \xrightarrow[i_\Omega]{} & \mathcal{G}^o(\Omega) \end{array}$$

é comutativo.

Mas se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$(i_\Omega \circ \partial^p)(T) = i_\Omega(\partial^p T) = q^o_\Omega(\Theta^o_{X_1}(f_{\partial^p T})) \overset{(*)}{=} q^o_\Omega(\partial^p(\Theta^o_{X_1}(f_T)))$$

$$\overset{(**)}{=} \partial^p(q^o_\Omega(\Theta^o_{X_1}(f_T))) = \partial^p(i_\Omega(T)) = (\partial^p \circ i_\Omega)(T)$$

Onde em (*) utilizamos o lema I.3.2 e em (**) que

$q^o_\Omega \circ \partial^p = \partial^p \circ q^o_\Omega$ (definição [D10]).

□

<u>Observação</u>: Podemos escrever o resulado da proposição I.3.2 do seguinte modo:

$$G_{\partial^p T} = \partial^p G_T \quad , \text{ onde } G_T = i_\Omega(T).$$

I.4 $\mathcal{G}$ é um feixe

Sejam U e V abertos do $\mathbb{R}^n$ e $V \supset U \neq \emptyset$. Definimos

$$J_U^V\colon \mathcal{E}_M[A_1^o \times V] \longrightarrow \mathcal{E}_M[A_1^o \times U]$$
$$\hat{f} \longrightarrow \hat{f}|U \quad ,$$

onde $\hat{f}|U(\psi,x) = \hat{f}(\psi,x)$. É claro que a aplicação está bem definida, é um $\mathbb{C}$ homomorfismo e que $J_U^V(\mathcal{N}[A_1^o \times V]) \subset \mathcal{N}[A_1^o \times U]$.

Para cada $f \in \mathcal{G}(V)$, definimos $\bar{J}_U^V(f) = \theta_U(J_U^V(\hat{f}))$ onde $\hat{f}$ é um representante arbitrário de f. Observe que se $\hat{g}$ é oútro representante de f, então $\hat{g}-\hat{f} \in \mathcal{N}[A_1^o \times V]$ e, portanto, $(\hat{g}-\hat{f})|U \in \mathcal{N}[A_1^o \times U]$, ou seja, $\hat{g}|U - \hat{f}|U \in \mathcal{N}[A_1^o \times U]$, o que implica que $\theta_U(J_U^V(\hat{f})) = \theta_U(J_U^V(\hat{g}))$. Assim sendo, temos que $\bar{J}_U^V$ está bem definida e é um $\mathbb{C}$ homomorfismo.

<u>DEFINIÇÃO</u> I.4.1 <u>Se</u> U <u>e</u> V <u>são abertos do</u> $\mathbb{R}^n$, $V \supset U \neq \emptyset$ <u>e</u> $f \in \mathcal{G}(V)$ <u>definimos a restrição de</u> f <u>a</u> U <u>por</u> $f|U := \bar{J}_U^V(f)$.

<u>PROPOSIÇÃO</u> I.4.1 <u>O seguinte diagrama</u>

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_M[A_1^o \times V] \arrow[r, "J_U^V"] \arrow[d, "\theta_V"'] & \mathcal{E}_M[A_1^o \times U] \arrow[d, "\theta_U"] \\
\mathcal{G}(V) \arrow[r, "\bar{J}_U^V"] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

<u>é comutativo</u>.

<u>Prova</u> Se $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times V]$, $(\Theta_U \circ J_U^V)(\hat{f}) = \Theta_U(J_U^V(\hat{f})) = \bar{J}_U^V(\Theta_V(\hat{f})) =$

$$= (\bar{J}_U^V \circ \Theta_V)(\hat{f}).$$

$\square$

<u>PROPOSIÇÃO</u> I.4.2 <u>A derivação é compatível com a restrição no seguinte sentido</u>: <u>Se</u> U <u>e</u> V <u>são conjuntos abertos de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>tal que</u> $V \supset U \neq \emptyset$ <u>e</u> ∂^i <u>é um operador derivação arbitrário em</u> $\mathbb{R}^n$, <u>temos</u>

$$(\partial^i f)|U = \partial^i(f|U), \ \forall\ f \in \mathcal{G}(V).$$

Ou ainda, $\bar{J}_U^V \circ \partial^i = \partial^i \circ \bar{J}_U^V$.

<u>Prova</u> Seja $f \in \mathcal{G}(V)$. Logo, existe $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times V]$ tal que $f = \Theta_V(\hat{f})$. Mas

$$\begin{aligned}(\partial^i f)|U &= \bar{J}_U^V(\partial^i f) = (\bar{J}_U^V \circ (\partial^i \circ \Theta_V))(\hat{f}) \overset{(a)}{=} (\bar{J}_U^V \circ (\Theta_V \circ \partial^i))(\hat{f}) = \\ &= ((\bar{J}_U^V \circ \Theta_V) \circ \partial^i)(\hat{f}) \overset{(b)}{=} ((\Theta_U \circ J_U^V) \circ \partial^i)(\hat{f}) = \\ &= (\Theta_U \circ (J_U^V \circ \partial^i))(\hat{f}) \overset{(c)}{=} (\Theta_U \circ (\partial^i \circ J_U^V))(\hat{f}) = \\ &= ((\Theta_U \circ \partial^i) \circ J_U^V)(\hat{f}) \overset{(d)}{=} ((\partial^i \circ \Theta_U) \circ J_U^V)(\hat{f}) = \\ &= (\partial^i \circ (\Theta_U \circ J_U^V))(\hat{f}) \overset{(b)}{=} (\partial^i \circ (\bar{J}_U^V \circ \Theta_V))(\hat{f}) = \\ &= \partial^i(f|U)\end{aligned}$$

Onde em (a) usamos $\partial^i \circ \Theta_V = \Theta_V \circ \partial^i$, prop. I.3.1 (a); em (b) $\bar{J}_U^V \circ \Theta_V = \Theta_U \circ J_U^V$, prop. I.4.1; em (c) $\partial^i \circ J_U^V = J_U^V \circ \partial^i$ em $\mathcal{E}_M[A_1^o \times V]$, em (d) $\partial^i \circ \Theta_U = \Theta_U \circ \partial^i$, prop. I.3.1, (a).

$\square$

TEOREMA I.4.1 $\mathcal{G}$ é um feixe, isto é, $\mathcal{G}$ satisfaz as propriedades

(F1) Se $\Omega = \bigsqcup_{i\in I} \Omega_i$, onde Ω_i são abertos não vazios e $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ é tal que $f|\Omega_i = 0$, $\forall\, i \in I$, então $f=0$.

(F2) Se $\Omega = \bigsqcup_{i\in I}\Omega_i$, onde Ω_i são abertos não vazios e $f_i \in \mathcal{G}(\Omega_i)$, $\forall\, i \in I$ tal que $f_i|\Omega_i \cap \Omega_j = f_j|\Omega_i \cap \Omega_j$, $\forall\,(i,j) \in I \times I$ com $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ então existe $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ tal que $f|\Omega_i = f_i$.

Prova (F1) Seja $\hat{f}$ um representante de $f \in \mathcal{G}(\Omega)$.

Dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^i operador derivação. Da compacidade de K existem $i_1,\dots,i_n$ tal que $K \subset \bigsqcup_{j=1}^{n} \Omega_{ij}$ e existe $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega_{ij})$ onde $\Omega_{ij} = \Omega_{i_j}$

(1) $\psi_j \geqq 0$, $\forall\, 1 \leqq j \leqq n$

(2) $\sum_{j=1}^{n} \psi_j \leqq 1$

(3) $\sum_{j=1}^{n} \psi_j \equiv 1$ numa viz V de K, $V \subset \Omega$.

Se $\hat{\psi}_j : (\phi,x) \in A_1^o \times \Omega_{ij} \to \psi_j(x)$ então $\hat{\psi}_j \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega_{ij}]$ $\forall\, 1 \leqq j \leqq n$ (ver proposição I.2.1). Como $\hat{f}|\Omega_{ij} \in \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega_{ij}]$ e $\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega_{ij}]$ é um ideal então $\hat{\psi}_j.\hat{f}|\Omega_{ij} \in \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega_{ij}]$, $\forall\, 1 \leqq j \leqq n$. Então, para cada j, tal que $1 \leqq j \leqq n$ existem N_j e $\alpha_j \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geqq N_j$ e $\phi \in A_q^o\ \exists\, c_j > 0$ e $\eta_j \in]0,1]$ de tal modo que

$$|\partial^i(\hat{\psi}_j.\hat{f}|\Omega_{ij})(\phi_\varepsilon,x)| \leqq c_j\, \varepsilon^{\alpha_j(q)-N_j} \ , \ \forall\, x \in K \cap \operatorname{supp} \psi_j$$

e $\varepsilon \in]0,\eta_j[$.

Tomemos $N = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \{N_j\}$ e $\alpha = \min\limits_{1 \leq j \leq n} \{\alpha_j\}$. Logo, $\forall\, q \geq N$ e

$\phi \in A_q^o$, $\exists\ c = n \max\limits_{1 \leq j \leq n} \{c_j\}$ e $\eta = \min\limits_{1 \leq j \leq n} \{\eta_j\}$ tais que

$$|\partial^i \hat{f}(\phi_\varepsilon, x)| \overset{(3)}{=} |\partial^i (\sum_{j=1}^{n} \hat{\psi}_j \hat{f})(\phi_\varepsilon, x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\partial^i (\hat{\psi}_j \hat{f})(\phi_\varepsilon, x)|,$$

$\forall\, x \in V$ e $\epsilon \in]0,\eta[$.

Como

$$|\partial^i (\hat{\psi}_j \hat{f})(\phi_\varepsilon, x)| = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \complement\, \mathrm{supp}\psi_j \\ |\partial^i (\hat{\psi}_j \hat{f}|\Omega_{ij})(\phi_\varepsilon, x)| & \text{se } x \in K \cap \mathrm{supp}\psi_j \end{cases}$$

$\forall\ 1 \leq j \leq \eta$,

Então

$$|\partial^i \hat{f}(\phi_\varepsilon, x)| \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \varepsilon^{\alpha_j(q) - N_j} \leq c\varepsilon^{\alpha(q) - N}, \ \forall\ x \in K$$

e $\forall\ \varepsilon \in]0,\eta[$.

Ou seja, $\hat{f} \in N[A_1^o \times \Omega]$ e $\therefore\ f = 0$

(F2) 1º caso: Ω_i é relativamente compacto, $\forall\ i \in I$.

Seja $\hat{f}_i \in E_M[A_1^o \times \Omega_i]$ um representante de f_i, para cada $i \in I$.

Da hipótese temos que:

$$\hat{f}_i|\Omega_i \cap \Omega_j - \hat{f}_j|\Omega_i \cap \Omega_j \in N[A_1^o \times (\Omega_i \cap \Omega_j)]\ ,\ \forall\ i,j \in I$$

tal que $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$

Tomemos agora $(\beta_i)_{i \in I}$ tal que

(a) $\beta_i \in C^\infty(\Omega)$

(b) $\mathrm{supp}\ \beta_i \subset \Omega_i$

(c) $\forall\ z \in \Omega$ existe uma vizinhança w de z onde apenas um número finito de β_i's são não zero

(d) $\sum_{i \in I} \beta_i \equiv 1$ em Ω

Observe que uma família $(\beta_i)_{i \in I}$ satisfazendo (a), (b), (c) e (d) é uma partição da unidade subordinada ao recobrimento $\{\Omega_i\}_{i \in I}$. Para provar a sua existência, ver teorema 6.11, pág. 307 de [G].

Definimos então

$$\begin{aligned} \hat{f}: A_1^o \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\psi, x) &\longrightarrow \sum_{i \in I} \beta_i(x) \hat{f}_i(\psi, x). \end{aligned}$$

Observe que $\hat{f}$ está bem definida devido a propriedade (c) e se convencionarmos que $\beta_i(x)\hat{f}_i(\psi,x) = 0$, $\forall\ \psi \in A_1^o$ e $\forall\ x \in \complement\, \mathrm{supp}\ \beta_i$

Sobre a função $\hat{f}$ mostraremos que

(1) $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$

(2) $\hat{f}|\Omega_i - \hat{f}_i \in \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$

(1) Devido a propriedade (c) é claro que $\hat{f}(\psi,.) \in C^\infty(\Omega)$, $\forall\ \psi \in A_1^o$, ou seja, que $\hat{f} \in \mathcal{E}[A_1^o \times \Omega]$.

E dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^α operador derivação seja w um aberto tal que $K \subset w \subset \bar{w} \subset\subset \Omega$. Da compacidade de $\bar{w}$ e da propriedade (c) existe um conjunto finito de índices $I' \subset I$ tal que

(*) $\boxed{\beta_i|w = 0 \quad \forall\, i \in I \setminus I'}$

Para cada $j \in I'$, como $\beta_j.\hat{f}_j \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega_j]$ existe $N_j \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\, \phi \in A_{N_j}^o\ \exists\, \eta_j \in]0,1]$ e $c_j > 0$ tais que

(**) $$|\partial^\alpha(\beta_j\hat{f}_j)(\phi_\varepsilon,x)| \leq c_j\varepsilon^{-N_j} \quad , \quad \forall\, x \in \operatorname{supp}\beta_j \cap K$$

e $\forall\, \varepsilon \in]0,\eta_j[$. (observe que $K \cap \operatorname{supp}\beta_j \subset\subset \Omega_j$ por (b)).

Mas, convencionamos que $\beta_j(x)\hat{f}_j(\psi,x) = 0$, $\forall\, x \in \complement \operatorname{supp}\beta_j$, $\forall\, \psi \in A_1^o$ e $\therefore$ a última desigualdade vale $\forall\, x \in K$.

(***) Logo, $\exists\, N = \max\limits_{j \in I'}\{N_j\}$ tal que $\forall\, \phi \in A_N^o\ \exists\, \eta = \min\limits_{j \in I'}\{\eta_j\}$ e

$c = \max\limits_{j \in I'}\{c_j\}.|I'|$,

onde $|I'|$ é o número de índices que ocorrem em I', tal que

$$\left|\sum_{j \in I'}\partial^\alpha(\beta_j\hat{f}_j)(\phi_\varepsilon,x)\right| \leq \sum_{j \in I'}|\partial^\alpha(\beta_j\hat{f}_j)(\phi_\varepsilon,x)| \overset{(\Delta)}{\leq} \sum_{j \in I'} c_j\varepsilon^{-N_j}$$
$$\leq |I'|\max_{j \in I'}\{c_j\}.\varepsilon^{-N} = c\varepsilon^{-N} ,$$

$\forall\, x \in K$ e $\forall\, \varepsilon \in]0,\eta[$

Onde em (Δ) utilizamos (**) e a observação que a sucede (ou seja, que a desigualdade (**) vale $\forall\, x \in K$).

Mas de (*) temos que

$$|\partial^\alpha \hat{f}(\psi,x)| = |\sum_{i\in I'} \partial^\alpha(\beta_i . \hat{f}_i)(\psi,x)| \ , \ \forall\, x \in w \quad e \quad \forall \psi \in A_1^o \ ,$$

e $\therefore$ de (***), $\exists\, N > 0$ tal que $\forall\, \phi \in A_N^o$, $\exists\, \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha \hat{f}(\phi_\varepsilon,x)| = |\sum_{i\in I'} \partial^\alpha(\beta_i \hat{f}_i)(\phi_\varepsilon,x)| \leqq c\varepsilon^{-N} \ , \ \forall\, x \in K$$

e $\forall\, \varepsilon \in]0,\eta[$.

(2) Fixemos $i \in I$. Dados $K \subset\subset \Omega_i$ e ∂^β operador derivação. Seja w aberto tal que $K \subset w \subset \bar{w} \subset\subset \Omega_i$. De (c) e da compacidade de $\bar{w}$ existe I', $|I'|$ finita, tal que $i \in I'$ e

(I)	$\beta_j \vert w = 0 \quad \forall\, j \in I \setminus I'$
(II)	$\sum_{\substack{j\in I' \\ j\neq i}} \beta_j(x) + \beta_i(x) = 1, \quad \forall\, x \in w$,
	(devido a (d) e (I))

Logo

$$\hat{f}(\psi,x) - \hat{f}_i(\psi,x) \overset{(I)}{=} \sum_{\substack{j\in I' \\ j\neq i}} \beta_j(x)\hat{f}_j(\psi,x) + \beta_i(x)\hat{f}_i(\psi,x)$$

$$- \hat{f}_i(\psi,x) \overset{(II)}{=} \sum_{\substack{j\in I' \\ j\neq i}} \beta_j(x)\hat{f}_j(\psi,x) - \sum_{\substack{j\in I' \\ j\neq i}} \beta_j(x)\hat{f}_i(\psi,x) =$$

$$= \sum_{\substack{j\in I' \\ j\neq i}} \beta_j(x)(\hat{f}_j - \hat{f}_i)(\psi,x) \ , \ \forall\, \psi \in A_1^o \ , \ \forall\, x \in w.$$

(a última igualdade faz sentido se convencionarmos que $\beta_j(x).(\hat{f}_j - \hat{f}_i)(\psi,x) = 0$, $\forall\, x \notin \operatorname{supp}\beta_j$, $\forall\, 1 \leqq j \leqq n$).

Se $j \in I'$ e $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ então $w \subset \Omega_i \subset \complement \Omega_j \subset \complement \operatorname{supp} \beta_j$ e $\therefore$ $\beta_j|w = 0$. Logo,

$$(*) \qquad (\hat{f}-\hat{f}_i)(\psi,x) = \sum_{j\in I''} \beta_j(x)(\hat{f}_j-\hat{f}_i)(\psi,x) \quad , \forall \psi \in A_1^o, \forall x \in w,$$

onde $I'' = \{j \in I' | \Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset \}$

Como, $\beta_j(\hat{f}_j-\hat{f}_i) \in N[A_1^o \times \Omega_i \cap \Omega_j]$, $\forall j \in I''$, para cada $j \in I''$ existe $N_j \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha_j \in \Gamma$ tais que $\forall q \geq N_j$ e $\forall \phi \in A_q^o$ $\exists$ $\eta_j \in]0,1]$ e $c_j > 0$ tais que

$$|\partial^\beta(\beta_j(\hat{f}_j-\hat{f}_i))(\phi_\varepsilon,x)| \leq c_j.\varepsilon^{\alpha_j(q)-N_j} \quad ,$$

$\forall x \in \operatorname{supp} \beta_j \cap K$, $\forall \varepsilon \in]0,\eta_j[$ (já que $\operatorname{supp} \beta_j \cap K \subset\subset \Omega_j \cap \Omega_i$).
Na verdade, como $\beta_j(\hat{f}_j - \hat{f}_i) | \complement \operatorname{supp} \beta_j = 0$, temos que

$$(**) \qquad |\partial^\beta(\beta_j(\hat{f}_j-\hat{f}_i))(\phi_\varepsilon,x)| \leq c_j\varepsilon^{\alpha_j(q)-N_j} \quad ,$$

$\forall x \in K$, $\forall$ $\varepsilon \in]0,\eta_j[$.

Deste modo, $\exists$ $N = \max_{j\in I''} \{N_j\}$ e $\alpha = \min_{j\in I''} \{\alpha_j\}$ tal que

$\forall q \geq N$ e $\phi \in A_q^o$ $\exists$ $\eta = \min_{j\in I''} \{\eta_j\}$ e

$c = \max_{j\in J''} \{c_j\} \; |I''|$

tais que

$$|\partial^\beta(\hat{f}-\hat{f}_i)(\phi_\varepsilon,x)| \overset{(*)}{=} |\sum_{j\in I''}\partial^\beta(\beta_j(\hat{f}_j-\hat{f}_i))(\phi_\varepsilon,x)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{j\in I''}|\partial^\beta(\beta_j(\hat{f}_j-\hat{f}_i))(\phi_\varepsilon,x)| \overset{(**)}{\leqq}$$

$$\overset{(**)}{\leqq} \sum_{j\in I''} c_j\varepsilon^{\alpha_j(q)-N_j} \leqq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} ,$$

$\forall\ \varepsilon \in]0,\eta[$, $\forall\ x \in K$. Logo, devido a (1) e (2) , se $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ é a classe de $\hat{f}$ então f é a solução do problema.

2º caso: Os Ω_i não são necessariamente relativamente compactos.

Neste caso, para cada $i \in I$, existem $(\Omega_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$, abertos relativamente compactos tal que $\Omega_i = \bigsqcup_{j=1}^{\infty}\Omega_{ij}$.

É claro que $\Omega = \bigsqcup_{i\in I}\bigsqcup_{j=1}^{\infty}\Omega_{ij}$ e que se $f_{ij} = f_i|\Omega_{ij}$ então

$$f_{ij}|\Omega_{ij} \cap \Omega_{k\ell} = f_{k\ell}|\Omega_{ij} \cap \Omega_{k\ell}$$

sempre que $\Omega_{ij} \cap \Omega_{k\ell} \neq \emptyset$ (já que $\Omega_{ij} \cap \Omega_{k\ell} \subset \Omega_i \cap \Omega_k$). Usamos, então, o 1º caso para os abertos Ω_{ij} e para as funções generalizadas f_{ij} e concluímos que existe $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ tal que

$$f|\Omega_{ij} = f_{ij} = f_i|\Omega_{ij} \quad , \quad \forall\ (i,j) \in I \times \mathbb{N}$$

Como $\Omega_i = \bigsqcup_{j=1}^{\infty}\Omega_{ij}$, $\forall\ i \in I$ por (F1) segue que $f|\Omega_i = f_i$, $\forall i\in I$.

$\square$

DEFINIÇÃO I.4.2 Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}^n$ e $f \in G(\Omega)$. A união de todos os abertos $U \subset \Omega$ tal que $f|U = 0$ é o maior aberto de Ω em que f se anula. O seu complemento é, por definição, o suporte de f, que denotaremos por $\text{supp}(f)$.

Observação: A definição faz sentido devido ao teorema I.4.1, (F1).

I.5 Composição com Aplicações C^∞

Queremos definir para cada $f \in G(\Omega_2)$, onde Ω_2 é um aberto de $\mathbb{R}^n$, uma função generalizada $\mu^*f \in G(\Omega_1)$, sendo Ω_1 um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $\mu \in C^\infty(\Omega_1, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo a condição $\mu(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Tal operação (pull-back) será necessária na demonstração do Princípio do Prolongamento Analítico (ver III.6). Também é importante para o estudo da equação $\bar{\partial}$ para formas diferenciais generalizadas sobre domínios de Runge (ver [A-1]).

PROPOSIÇÃO I.5.1 Para todo $m, n \in \mathbb{N}^*$ existe uma aplicação

$$I_n^m : A_1^o(m) \to A_1^o(n)$$

tal que

a) $I_n^m(A_q^o(m)) \subset A_q^o(n)$ para todo $q \in \mathbb{N}^*$.

b) $(I_n^m(\psi))_\varepsilon = I_n^m(\psi_\varepsilon)$ para todo $\psi \in A_1^o(m)$ e $\varepsilon > 0$.

c) $I^n_p \circ I^m_n = I^m_p$ <u>para todo</u> $p \in \mathbb{N}^*$.

d) I^m_m <u>é a aplicação identidade de</u> $A^o_1(m)$.

<u>Prova</u> Obs.: Nesta proposição nas passagens em que aparece, (*) indica que o teorema de Fubini está sendo utilizado.

Para cada $m > 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$, definimos

$I^m_n : \psi \in A^o_1(m) \to I^m_n(\psi) \in A^o_1(n)$ pela fórmula

$$I^m_n(\psi)(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^n \int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \psi(x_j,\xi)\,d\xi \ , \ \forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Se $m=1$, $I^1_n(\psi)(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^n \psi(x_j)$.

Observe que $\operatorname{supp}(I^m_n(\psi)) \subset (\pi_1(\operatorname{supp}\psi))^n$, onde

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \ , \\ (x_1,\ldots,x_m) &\longrightarrow x_1 \end{aligned}$$

e que por derivação sob o sinal de integração $(m > 1)$, $I^m_n\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo $I^m_n\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Assim, se mostrarmos (a) também estamos verificando que I^m_n está bem definida.

(a) Seja $\psi \in A_q^o(m)$

(1) $m > 1$

(i) $$\int_{\mathbb{R}^n} I_n^m(\psi)(x_1,\ldots,x_n)\,dx \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{j=1}^{n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^{m-1}}\psi(x_j,\xi)\,d\xi\right)dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{m-1}}\psi(x_j,\xi)\,d\xi\,dx_j \overset{(*)}{=} \left(\int_{\eta\in\mathbb{R}^m}\psi(\eta)\,d\eta\right)^n = 1$$

(ii) $$\int_{\mathbb{R}^n} x^i I_n^m(\psi)(x)\,dx = 0\ ,\quad \forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ |i| \leq q$$

Fixemos $i = (i_1,\ldots,i_n)$ tal que $|i| \leq q$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^i I_n^m(\psi)(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}\prod_{j=1}^{n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^{m-1}}\psi(x_j,\xi)\,d\xi\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$\prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} x_j^{i_j}\int_{\xi\in\mathbb{R}^{m-1}}\psi(x_j,\xi)\,d\xi dx_j = \prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\xi\in\mathbb{R}^{m-1}} x_j^{i_j}\psi(x_j,\xi)\,d\xi dx_j \overset{(\Delta)}{=} 0$$

Onde em (Δ) usamos o teorema de Fubini e que

$$\int_{\mathbb{R}^m} x_j^{i_j}\psi(x_j,\xi)\,d\xi dx_j = 0\quad ,$$

já que $i_j \leq |i| \leq q$ e que $\psi \in A_q^o(m)$.

(iii) É claro que $(I_n^m)(\psi)$ é simétrica em relação às n variáveis

(iv) $$\prod_{j=1}^{n} \int_{\eta \in \mathbb{R}^{n-1}} I_n^m(\psi)(x_j,\eta)\,d\eta \overset{(**)}{=}$$

$$\overset{(**)}{=} \prod_{j=1}^{n} \int_{\eta \in \mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \psi(x_j,\xi)\,d\xi \prod_{k=1}^{n-1} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \psi(\eta_k,\xi)\,d\xi \right) d\eta \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \prod_{j=1}^{n} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \psi(x_j,\xi)\,d\xi \prod_{k=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \psi(\eta_k,\xi)\,d\xi\,d\eta_k \overset{(***)}{=}$$

$$\overset{(***)}{=} I_n^m(\psi)(x_1,\ldots,x_n).1 = I_n^m(\psi)(x_1,\ldots,x_n) \;,$$

onde utilizamos em (**) a definição de $I_n^m\psi$ e em

(***) $\int_{\theta \in \mathbb{R}^m} \psi(\theta)\,d\theta = 1$ e a definição de $I_n^m\psi$

(2) $m = 1$

(i) $$\int_{\mathbb{R}^n} I_n^1(\psi)(x_1,\ldots,x_n)\,dx \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \psi(x_j)\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \psi(x_j)\,dx_j = 1$$

(ii) Se $i \in \mathbb{N}^n$ e $|i| \leq q$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^i I_n^1(\psi)(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n} \prod_{j=1}^{n} \psi(x_j)\,dx_1\ldots dx_n = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} x_j^{i_j} \psi(x_j)\,dx_j = 0 \;,$$

já que $i_j \leq |i| \leq q$ e $\psi \in A_q^o(1)$.

(iii) É claro que $I_n^1(\psi)$ é simétrica em relação as suas n variáveis.

(iv) $$\prod_{k=1}^{n} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}} I_n^1(\psi)(x_k,\xi)\,d\xi \overset{(*)}{=} \prod_{k=1}^{n} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}} \psi(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \psi(\xi_j)\,d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \psi(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi_j)\,d\xi_j = \prod_{k=1}^{n} \psi(x_k) = I_n^1(\psi)(x_1,\ldots,x_n)$$

(b) (1) $m > 1$

Tomemos $\psi \in A_1^o(m)$ e $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(I_n^m(\psi))_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} I_n^m(\psi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon^n} \prod_{j=1}^{n} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \psi(\varepsilon^{-1}x_j,\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \psi(\varepsilon^{-1}x_j,\varepsilon^{-1}\xi)\,d\xi =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \frac{1}{\varepsilon^m} \psi(\varepsilon^{-1}x_j,\varepsilon^{-1}\xi)\,d\xi =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \psi_\varepsilon(x_j,\xi)\,d\xi = I_n^m(\psi_\varepsilon).$$

(2) $m = 1$

$$(I_n^1)(\psi))_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}(I_n^1(\psi))(\varepsilon^{-1}x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \prod_{j=1}^{n} \psi(\varepsilon^{-1}x_j) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \psi_\varepsilon(x_j) = I_n^1(\psi_\varepsilon).$$

(c) Seja $\psi \in A_1^o(m)$ e $x \in \mathbb{R}^p$.

(1) $m,n > 1$.

$$(I_p^n \circ I_n^m)(\psi)(x) = I_p^n(I_n^m(\psi))(x) = \prod_{j=1}^{p} \int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}} I_n^m(\psi)(x_j,\xi)\,d\xi =$$

$$= \prod_{j=1}^{p} \int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\eta\in\mathbb{R}^{m-1}} \psi(x_j,\eta)\,d\eta . \prod_{k=1}^{n-1}\int_{\eta\in\mathbb{R}^{m-1}} \psi(\xi_k,\eta)\,d\eta\right) d\xi =$$

$$= \prod_{j=1}^{p} \int_{\eta\in\mathbb{R}^{m-1}} \psi(x_j,\eta)\,d\eta \int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1}\int_{\eta\in\mathbb{R}^{m-1}} \psi(\xi_k,\eta)\,d\eta\,d\xi =$$

$$\overset{(*)}{=} \prod_{j=1}^{p} \int_{\eta\in\mathbb{R}^{m-1}} \psi(x_j,\eta)\,d\eta \prod_{k=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}}\int_{\eta\in\mathbb{R}^{m-1}} \psi(\xi_k,\eta)\,d\eta\,d\xi_k \overset{(\Delta)}{=}$$

$$\overset{(\Delta)}{=} \prod_{j=1}^{p} \int_{\eta\in\mathbb{R}^{m-1}} \psi(x_j,\eta)\,d\eta . 1 = I_p^m(\psi)(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^p$$

Em Δ usamos que $\int_{\mathbb{R}}\int_{\eta\in\mathbb{R}^{m-1}} \psi(\xi_k,\eta)\,d\eta\,d\xi_k = 1$, $\forall\, k = 1,\ldots,n-1$.

(2) $m = 1$, $n > 1$

$$(I_p^n \circ I_n^1)(\psi)(x) = I_p^n(I_n^1(\psi))(x) = \prod_{j=1}^{p} \int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}} I_n^1(\psi)(x_j,\xi)\,d\xi$$

$$= \prod_{j=1}^{p} \int_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \psi(\xi_k)\right) \psi(x_j)\,d\xi \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \prod_{j=1}^{p} \psi(x_j) \prod_{k=1}^{n-1}\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi_k)\,d\xi_k \overset{(\Delta)}{=} \prod_{j=1}^{p} \psi(x_j) =$$

$$= (I_p^1(\psi))(x)$$

onde em (Δ) usamos que $\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi)\, d\xi = 1$, já que $\psi \in A_1^o(1)$

(3) $m > 1$, $n = 1$

$$(I_p^1 \circ I_1^m)(\psi)(x) = I_p^1(I_1^m(\psi))(x) = \prod_{j=1}^{p} I_1^m(\psi)(x_j) =$$

$$= \prod_{j=1}^{p} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \psi(x_j,\xi)\, d\xi = (I_p^m(\psi))(x)$$

(4) $m = 1$, $n = 1$

Utilizando (d) que será provado a seguir temos $I_p^1 \circ I_1^1 = I_p^1$

(d) Seja $\psi \in A_1^o(m)$

(1) $m > 1$

$$I_m^m(\psi)(x) = \prod_{j=1}^{m} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{m-1}} \psi(x_j,\xi)\, d\xi \overset{(\Delta)}{=} \psi(x) \quad , \forall\, x \in \mathbb{R}^m$$

e $\therefore$ $I_m^m(\psi) = \psi$.

Em (Δ) usamos a definição de $A_1^o(m)$

(2) $m = 1$

$$(I_1^1)(\psi)(x) = \psi(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^m \quad e \quad \therefore \quad I_1^1(\psi) = \psi$$

$\square$

Agora fixemos $m,n \in \mathbb{N}^*$. Se $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ são dois conjuntos abertos e $\mu \in C^\infty(\Omega_1;\mathbb{R}^n)$ com $\mu(\Omega_1) \subset \Omega_2$, então para todo $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o(n) \times \Omega_2]$ podemos considerar a função

$$\mu^*\hat{f}\colon (\psi,x) \in A_1^o(m) \times \Omega_1 \to \hat{f}(I_n^m(\psi),\mu(x)) \in \mathbb{C} .$$

Com estas notações temos o seguinte:

<u>LEMA</u> I.5.1 (1) $\mu^*\hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o(m) \times \Omega_1]$.

(2) <u>Se</u> $\hat{f}_1,\hat{f}_2 \in \mathcal{E}_M[A_1^o(m) \times \Omega_2]$ <u>e</u> $\hat{f}_1-\hat{f}_2 \in \mathcal{N}[A_1^o(n) \times \Omega_2]$

<u>então</u> $\mu^*\hat{f}_1 - \mu^*\hat{f}_2 \in \mathcal{N}[A_1^o(m) \times \Omega_1]$.

<u>Prova</u> Seja K um compacto de Ω_1 e ∂^p operador derivação em $\mathbb{R}^m$, então $L = \mu(K)$ é um subconjunto compacto de Ω_2.

(1) Como $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o(n) \times \Omega_2]$ e $L \subset\subset \Omega_2$ então: (*) "existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que para todo $\psi \in A_N^o(n)$ existe $\eta_o \in]0,1]$ e $c_o > 0$ tais que para todo operador derivação ∂^i sobre $\mathbb{R}^n$ com $|i| \leq |p|$, temos

$$|\partial^i\hat{f}(\psi_\varepsilon,y)| \leq c_o\varepsilon^{-N}$$

sempre que $y \in L$ e $0 < \varepsilon < \eta_o$"

Mas $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$ e

$$(**) \qquad \partial^p(\mu * \hat{f})(\phi, x) = \partial^p(\hat{f}(I_n^m(\phi),.)o\mu)(x) =$$

$$= \sum_{0<|i|\leq|p|} \partial^i \hat{f}(I_n^m(\phi), \mu(x)).U_i(x) \quad ,$$

onde em U_i aparecem produtos e somas de expressões do tipo $\partial^r \mu_s$, $0 \leq |r| \leq |p|$ e $s=1,\ldots,n$.

Logo, $\forall\ \phi \in A_N^o(m)$, como $I_n^m(\phi) \in A_N^o(n)$ então por (*) $\exists\ c_o' > 0$ e $\eta \in]0,1]$ tal que

$$|\partial^i \hat{f}((I_n^m(\phi))_\varepsilon, \mu(x)| = |\partial^i \hat{f}(I_n^m(\phi_\varepsilon), \mu(x))| \leq c_o' \varepsilon^{-N} \quad ,$$

$\forall\ \varepsilon \in]0,\eta[$, $\forall\ x \in K$, $\forall\ |i| \leq |p|$.

Conclusão: dado $K \subset\subset \Omega_1$ e ∂^p operador derivação $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\ \phi \in A_N^o$, $\exists\ \eta \in]0,1]$ e $c = c_o'.c_1.a$, (onde a = nº de multi-índices i, com $0 < |i| \leq |p|$ e $c_1 = \max\limits_{0<|i|\leq|p|} \|U_i\|_K$) tais que

$$|\partial^p(\mu * \hat{f})(\phi_\varepsilon, x)| \overset{(**)}{\leq} \sum_{0<|i|\leq|p|} |\partial^i \hat{f}(I_n^m(\phi_\varepsilon), \mu(x)).U_i(x)| \leq$$

$$\leq c_o' \varepsilon^{-N} c_1.a = c\varepsilon^{-N}$$

$\forall\ x \in K$ e $\forall\ \varepsilon \in]0,\eta[$ e $\therefore\ \mu * \hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o(m) \times \Omega_1]$

(2) Do fato que $\hat{f}_1 - \hat{f}_2 \in \mathcal{N}[A_1^o(n) \times \Omega_2]$ segue que

(*) $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$

tais que $\forall\ q \geq N$ e $\psi \in A_q^o(n)$, $\exists\ c_o > 0$ e $\eta_o \in]0,1]$ tais que para todo operador derivação ∂^i tal que $|i| \leq |p|$, temos que

$$|\partial^i(\hat{f}_1-\hat{f}_2)(\phi_\varepsilon,y)| \leq c_o\varepsilon^{\alpha(q)-N}\ ,\ \forall\ y \in L \ \text{ e } \ \forall \varepsilon \in\ ]0,\eta_o[.$$

Mas $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$ então

$$(**)\qquad \partial^p(\mu*(\hat{f}_1-\hat{f}_2))(\phi,x) = (\partial^p(\hat{f}_1-\hat{f}_2)(I_n^m(\phi),.)o\mu)(x) =$$

$$= \sum_{0<|i|\leq|p|} \partial^i(\hat{f}_1-\hat{f}_2)(I_n^m(\phi),\mu(x)).U_i(x),$$

sendo U_i como em (1).

Logo, dado ∂^p operador derivação e $K \subset\subset \Omega_1$, $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\ q \geq N$ e $\forall\ \phi \in A_q^o(m)$, temos que $I_n^m(\phi) \in A_q^o(n)$ e $\therefore$ por (*)

$$\exists\ c_o' > 0 \quad \text{ e } \quad \eta \in\ ]0,1]$$

tais que

$$(***)\qquad |(\partial^i(\hat{f}_1-\hat{f}_2))((I_n^m(\phi))_\varepsilon,\mu(x))| = |(\partial^i(\hat{f}_1-\hat{f}_2))(I_n^m(\phi_\varepsilon),\mu(x))| \leq$$

$$\leq c_o'\varepsilon^{\alpha(q)-N},$$

$\forall\ x \in K$, $\forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[$ e $\forall\ 0 < |i| \leq |p|$.

Deste modo, $\forall\ q \geq N$ e $\forall\ \phi \in A_q^o(m)$, tomemos $\eta \in\ ]0,1]$ e $c = c_o'.c_1.a$, onde a é o nº de multi-índices i, com $0 < |i| \leq |p|$ e $c_1 = \max\limits_{0<|i|\leq|p|} \|U_i\|_K$, o que implica que,

$$|(\partial^p(\mu*(\hat{f}_1-\hat{f}_2))(\phi_\varepsilon,x)| \overset{(**)}{=} \sum_{0<|i|\leq|p|} |(\partial^i(\hat{f}_1-\hat{f}_2))(I_n^m(\phi_\varepsilon),\mu(x)).U_i(x)| \leq$$

$$\overset{(***)}{\leq} c_1.a.c_o'\varepsilon^{\alpha(q)-N} = c\varepsilon^{\alpha(q)-N} ,$$

$\forall\ x \in K\ ,\ \ \forall\ \ \varepsilon \in\ ]0,\eta[\ \ $ e $\therefore\ \ \mu*(\hat{f}_1)-\mu*(\hat{f}_2) \in N[A_1^o(m) \times \Omega_1]$

$\square$

Tendo provado o lema anterior podemos dar a seguinte definição:

<u>DEFINIÇÃO</u> I.5.1 <u>Sejam</u> $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$ <u>e</u> $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ <u>dois conjuntos abertos e</u> $\mu \in C^\infty(\Omega_1;\mathbb{R}^n)$ <u>tal que</u> $\mu(\Omega_1) \subset \Omega_2$. <u>Para toda</u> $f \in G(\Omega_2)$ <u>denotamos por</u> $\mu*f$ <u>a classe em</u> $G(\Omega_1)$ <u>de</u> $\mu*\hat{f} \in E_M[A_1^o(m) \times \Omega_1]$, <u>onde</u> $\hat{f} \in E_M[A_1^o(n) \times \Omega_2]$ <u>é um representante arbitrário de</u> f.

oOo

CAPÍTULO II

A ÁLGEBRA $\bar{\mathbb{C}}$. VALOR NUM PONTO

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $x \in \Omega$. O nosso objetivo é definir f no ponto x, ou seja, f(x), e para isso precisamos definir a $\mathbb{C}$-álgebra $\bar{\mathbb{C}}$ de tal modo que f(x) pertença a $\bar{\mathbb{C}}$. Para a elaboração deste capítulo nos baseamos em [C-2] e [C-3].

Considere os seguintes conjuntos

$$\mathcal{E}_M = \left\{ f \in \mathbb{C}^{A_1^o} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\ N \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } \forall \psi \in A_N^o\ \exists \eta \in]0,1] \text{ e} \\ c > 0 \text{ tais que } |f(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{-N} \text{ para} \\ \text{todo } \varepsilon \in]0,\eta[\end{array} \right\}$$

$$\mathcal{I} = \left\{ f \in \mathcal{E}_M \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ e } \alpha \in \Gamma \text{ tais que } \forall\ q \geq N \text{ e } \psi \in A_q^o \\ \exists\ \eta \in]0,1] \text{ e } c > 0 \text{ tais que} \\ |f(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N},\quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[\end{array} \right\}$$

<u>PROPOSIÇÃO</u> II.1 a) $\mathcal{E}_M$ <u>é uma sub-$\mathbb{C}$-álgebra de</u> $\mathbb{C}^{A_1^o}$.

b) $\mathcal{I}$ <u>é um ideal de</u> $\mathcal{E}_M$.

<u>Prova</u> a) i) se $f, g \in \mathcal{E}_M$ e $k \in \mathbb{C}$ então $f+k\,g \in \mathcal{E}_M$. De fato, como $f \in \mathcal{E}_M$

$$(*)\qquad \left\| \begin{array}{l} \exists\ N_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } \forall\ \psi \in A_{N_1}^o\ \exists\ \eta_1 \in]0,1] \text{ e } c_1 > 0 \\ \text{tais que } |f(\psi_\varepsilon)| \leq c_1\varepsilon^{-N_1},\ \forall\ \varepsilon \in]0,\eta_1[; \end{array} \right.$$

e de $g \in \mathcal{E}_M$,

$$(**)\quad \left\| \begin{array}{l} \exists\, N_2 \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } \forall\, \psi \in A^o_{N_2}\ \exists\, \eta_2 \in\,]0,1] \text{ e } c_2 > 0 \\ \text{tais que } |g(\psi_\varepsilon)| \leq c_2 \varepsilon^{-N_2},\quad \forall\, \varepsilon \in\,]0,\eta_2[; \end{array} \right.$$

Logo, $\exists\ N = \max\{N_1, N_2\}$ tal que $\forall \psi \in A^o_N$ $(A^o_N \subset A^o_{N_1} \cap A^o_{N_2})$ $\exists\ \eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ e $c = c_1 + |k| c_2$ tais que

$$|(f+kg)(\psi_\varepsilon)| \leq |f(\psi_\varepsilon)| + |k|\,|g(\psi_\varepsilon)| \leq c_1 \varepsilon^{-N_1} + |k| c_2 \varepsilon^{-N_2} \leq$$

$$\leq c\varepsilon^{-N}, \quad \forall\ \varepsilon \in\,]0,\eta[.$$

ii) Se $f,g \in \mathcal{E}_M$ então $f.g \in \mathcal{E}_M$. Se $f,g \in \mathcal{E}_M$ então valem (*) e (**). Tomemos $N = N_1 + N_2$. Deste modo $\forall\ \psi \in A^o_N$ $\exists \eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ e $c = c_1 c_2$ tais que

$$|(fg)(\psi_\varepsilon)| = |f(\psi_\varepsilon)|\,|g(\psi_\varepsilon)| \leq c_1 \varepsilon^{-N_1} . c_2 \varepsilon^{-N_2} =$$

$$= c_1 c_2 \varepsilon^{-(N_1+N_2)} = c\varepsilon^{-N}, \quad \forall\ \varepsilon \in\,]0,\eta[.$$

b) i) É fácil ver que $\mathcal{I}$ é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathcal{E}_M$ (pelos mesmos argumentos da prova a.i), utilizando a definição de $\mathcal{I}$).

ii) Se $f \in \mathcal{E}_M$ e $g \in \mathcal{I}$ então $f.g \in \mathcal{I}$. Como $f \in \mathcal{E}_M$, então vale (*) e de $g \in \mathcal{I}$,

$$(***)\quad \left\| \begin{array}{l} \exists\ N_3 \in \mathbb{N}^* \text{ e } \alpha \in \Gamma \text{ tais que } \forall\ q \geq N_3 \text{ e} \\ \forall\ \psi \in A_q^o\ ,\ \exists\ \eta_3 \in\ ]0,1[\ \text{ e } c_3 > 0 \text{ tais que} \\ |g(\psi_\varepsilon)| \leq c_3 \varepsilon^{\alpha(q)-N_3}\ ,\quad \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta_3[\end{array} \right.$$

Tomemos, então, $N = N_1 + N_3$ e $\alpha \in \Gamma$. Deste modo, $\forall\ q \geq N$, $\forall\ \psi \in A_q^o$,$\exists\ \eta = \min\{\eta_1,\eta_2\}$ e $c = c_1c_2$ tais que

$$|(f.g)(\psi_\varepsilon)| \leq c_1\varepsilon^{-N_1}.c_2\varepsilon^{\alpha(q)-N_2} = c_1c_2\varepsilon^{\alpha(q)-(N_1+N_2)} =$$

$$= c\varepsilon^{\alpha(q)-N}\ ,\ \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[.$$

$\square$

<u>DEFINIÇÃO</u> II.1 $\quad \bar{\mathbb{C}} = \dfrac{\mathcal{E}_M}{\mathcal{I}}$, onde $\pi\colon \mathcal{E}_M \to \bar{\mathbb{C}}$ denota a aplicação quociente. $\bar{\mathbb{C}}$ é chamada <u>álgebra dos números complexos generalizados</u>.

<u>PROPOSIÇÃO</u> II.2 $\mathbb{C}$ <u>pode ser identificado canonicamente a uma sub-álgebra de</u> $\bar{\mathbb{C}}$.

<u>Prova</u> Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{l} \delta\colon \mathbb{C} \xrightarrow{\ \hat{}\ } \mathcal{E}_M \xrightarrow{\pi} \bar{\mathbb{C}} \\ \quad z \to \hat{z} \to \pi(\hat{z}) \end{array} \qquad , \qquad \text{onde} \qquad \begin{array}{l} \hat{z}\colon A_1^o \to \mathbb{C} \\ \quad \phi \to z \end{array}$$

É claro que $\hat{z} \in \mathcal{E}_M$, pois $\exists\ N = 1$ tal que $\forall\ \psi \in A_1^o$ $\exists\ \eta = 1$ e $c > |z|$ tais que

$$|\hat{z}(\psi_\varepsilon)| = |z| \leq c.\varepsilon^{-1} = c\ \varepsilon^{-N} \quad , \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[\ ,$$

e que $\bar{\delta}$ é um $\mathbb{C}$-homomorfismo. Vamos provar então que $\bar{\delta}$ é injetora. De fato, se $\bar{\delta}(z) = 0$ então $\pi(\hat{z}) = 0$, $(\hat{z} \in I)$, e $\therefore\ \exists$ $\alpha \in \Gamma$ e $N \in \mathbb{N}^*$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\psi \in A_q^o\ \exists \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$|\hat{z}(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \ , \quad \forall \quad \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Mas

$$\hat{z}(\psi_\varepsilon) = z \quad e \quad \therefore \quad |z| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \ , \ \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[\qquad e$$

$\forall\ q \geq N$.

Como $\alpha(q) \xrightarrow[q\to\infty]{} \infty\ \exists q_o \geq N$ tal que $\alpha(q_o) - N > 0$. Fixemos $\phi \in A^o_{q_o}$. Então $\exists\ \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tal que

$$|z| \leq c\varepsilon^{\alpha(q_o)-N} \ , \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos que

$$\varepsilon^{\alpha(q_o)-N} \to 0 \qquad e \quad \therefore \quad z = 0$$

$\square$

<u>LEMA</u> II.1. <u>Sejam</u> Ω <u>um aberto de</u> $\mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ <u>e</u> $f \in G(\Omega)$

(1) <u>Se</u> $\hat{f}$ <u>é um representante de</u> f <u>então a função</u> $\bar{f}: \psi \in A_1^o \to \hat{f}(\psi,x) \in \mathbb{C}$ <u>pertence a</u> E_M .

(2) <u>Se</u> $\hat{f}_1$ <u>é outro representante de</u> f <u>e</u>

$\bar{f}_1 : \psi \in A_1^o \to \hat{f}_1(\psi,x) \in \mathbb{C}$ <u>então</u> $\bar{f}_1 - \bar{f} \in I$.

<u>Prova</u> (1) Como $\hat{f} \in E_M[A_1^o \times \Omega]$ então para o compacto $K = \{x\}$, $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\ \psi \in A_N^o$, $\exists\ c > 0$ e $\eta \in]0,1]$ tais que

$$|\hat{f}(\psi_\varepsilon,x)| \leq c\varepsilon^{-N}, \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Mas

$$\hat{f}(\psi_\varepsilon,x) = \bar{f}(\psi_\varepsilon) \quad \text{e} \ \therefore \ |\bar{f}(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{-N}, \ \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Então provamos que $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\ \psi \in A_N^o$, $\exists\ c > 0$ e $\eta \in]0,1]$ tais que

$$|\bar{f}(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{-N}, \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[, \text{ ou seja, } \bar{f} \in E_M.$$

(2) Como $\hat{f}-\hat{f}_1 \in N[A_1^o \times \Omega]$, então para o compacto $K = \{x\}$, $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\psi \in A_q^o$ $\exists\ c > 0$ e $\eta \in]0,1]$ tais que

$$|(\hat{f}-\hat{f}_1)(\psi_\varepsilon,x)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}, \ \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Mas

$$(\bar{f}-\bar{f}_1)(\psi_\varepsilon) = \bar{f}(\psi_\varepsilon) - \bar{f}_1(\psi_\varepsilon) = \hat{f}(\psi_\varepsilon,x) - \hat{f}_1(\psi_\varepsilon,x)$$

e $\therefore$

$$|(\bar{f}-\bar{f}_1)(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}, \ \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Então provamos que $\exists$ $N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geq N$ e $\psi \in A_q^o$ $\exists$ $c > 0$ e $\eta \in]0,1]$ tais que

$$|\bar{f}-\bar{f}_1(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \;,\; \forall\, \varepsilon \in]0,\eta[\quad , \text{ e } \therefore \quad \bar{f}-\bar{f}_1 \in I \,.$$

$\square$

Do lema acima parte (2) concluímos que $\pi(\bar{f}) = \pi(\bar{f}_1)$ se $\hat{f},\hat{f}_1$ são representantes de $f \in G(\Omega)$. Então podemos dar a se_
guinte definição.

<u>DEFINIÇÃO</u> II.2 <u>Seja</u> Ω <u>um aberto do</u> $\mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ <u>e</u> $f \in G(\Omega)$. <u>O valor de</u> f <u>no ponto</u> x, <u>é o elemento</u> $\pi(\bar{f})$, <u>onde</u> $\bar{f}$ <u>é a função</u>

$$\phi \in A_1^o \to \hat{f}(\phi,x) \in \mathbb{C} \,,$$

<u>sendo</u> $\hat{f} \in E_M[A_1^o \times \Omega]$ <u>um representante arbitrário de</u> f. <u>O valor de</u> f <u>no ponto</u> x <u>é indicado por</u> $f(x)$.

Nas hipóteses da definição anterior, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_x : G(\Omega) &\longrightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ f &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

<u>PROPOSIÇÃO</u> II.2. <u>A aplicação</u> $\bar{\nu}_x$ <u>é um</u> $\mathbb{C}$-<u>homomorfismo</u>.

<u>Prova</u> Imediata.

$\square$

<u>Observação</u> II.1 Se $f \in C^\infty(\Omega)$ e $x \in \Omega$, o valor $f(x) \in \bar{\mathbb{C}}$ "coincide" com o valor clássico $f(x)$.

Pela proposição II.2, $\mathbb{C}$ se identifica com uma sub-álgebra de $\bar{\mathbb{C}}$ através da aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\delta}: \mathbb{C} &\xrightarrow{\ \wedge\ } E_M \xrightarrow{\ \pi\ } \bar{\mathbb{C}} \quad , \\ z &\longrightarrow \hat{z} \longrightarrow \pi(\hat{z}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{z}: A_1^o &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longrightarrow z \end{aligned}$$

E pela proposição I.2.1, $C^\infty(\Omega)$ se identifica com um sub-álgebra de $G(\Omega)$ através da aplicação

$$\begin{aligned} \delta: C^\infty(\Omega) &\longrightarrow G(\Omega) \quad , \\ f &\longrightarrow \Theta_\Omega(\hat{f}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{f}: A_1^o \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\psi, z) &\longrightarrow f(z) \end{aligned}$$

O que queremos mostrar na verdade é que o diagrama

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\Omega) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\nu_x"'] & G(\Omega) \arrow[d, "\bar{\nu}_x"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\bar{\delta}"'] & \bar{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

é comutativo , onde

$$\nu_x: C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longrightarrow f(x)$$

De fato, se $f \in C^\infty(\Omega)$, $(\bar{\delta} o \nu_x)(f) = \bar{\delta}(\nu_x(f)) = \bar{\delta}(f(x)) = \pi(f\hat{(x)})$

Mas,

$$f\hat{(x)}: A_1^o \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{e} \qquad \bar{f}: A_1^o \longrightarrow \mathbb{C} \quad ,$$
$$\phi \longrightarrow f(x) \qquad\qquad\qquad \phi \longrightarrow \hat{f}(\phi,x)$$

e como $\hat{f}(\phi,x) = f(x)$, temos que $f\hat{(x)} = \bar{f}$. Logo,

$$(\delta o \nu_x)(f) = \pi(f\hat{(x)}) = \pi(\bar{f}) \overset{(1)}{=} (\Theta_\Omega(\hat{f}))(x) = \bar{\nu}_x(\Theta_\Omega(f)) =$$
$$= (\bar{\nu}_x o \delta)(f).$$

Onde em (1) usamos a definição II.2

$\square$

O valor num ponto, infelizmente, não caracteriza as funções generalizadas, no seguinte sentido: existem f e g $\in G(\Omega)$ tal que $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \Omega$ mas $f \neq g$. É o que mostraremos através do exemplo abaixo, apresentado por J.F. Colombeau em [C2].

<u>EXEMPLO</u> II.1 <u>Se</u> $\hat{g}: A_1^o \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ <u>é definida por</u> $\hat{g}(\psi,z) = z\,\psi(-z)$, <u>para todo</u> $(\psi,z) \in A_1^o \times \mathbb{C}$, <u>então temos que</u>:

(a) $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \mathbb{C}]$.

(b) <u>Se</u> g <u>é a classe de</u> $\hat{g}$ <u>em</u> $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ <u>então</u> $g(z) = 0$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

(c) $g \neq 0$.

Para a demonstração da parte (c) do exemplo acima necessitaremos do seguinte lema

<u>LEMA</u> II.2. <u>Se</u> $a \in \mathbb{R}^n$, <u>então</u> $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, existe $\phi \in A_q^o$ <u>tal que</u> $\phi(a) = 1$.

<u>Prova</u> Basta mostrar que $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\exists\, \phi \in A_q(1)$ tal que $\phi(a) = 1$.

Considere os funcionais lineares $\{L_i\}_{0 \leq i \leq q+1}$ sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definidos por

$$\begin{cases} L_i : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ L_i(\phi) = \int_{\mathbb{R}} x^i \phi(x)\,dx \end{cases} \text{ se } 0 \leq i \leq q \quad \text{e} \quad \begin{cases} L_{q+1} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ L_{q+1}(\phi) = \delta_a(\phi) - L_o(\phi) \end{cases}$$

onde $\delta_a(\phi) = \phi(a)$. É claro que $\{L_i\}_{0 \leq i \leq q+1} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Além disso temos que $\{L_i\}_{0 \leq i \leq q+1}$ é linearmente independente em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. De fato, suponhamos que exista $c_o, \ldots, c_{q+1}$ constantes em $\mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{q+1} c_i L_i = 0.$$

Então, $\forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left(\sum_{i=0}^{q+1} c_i L_i\right)(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \left[(c_o - c_{q+1}) + \sum_{i=1}^{q} c_i x^i\right] \phi(x)\,dx + c_{q+1}\delta_a(\phi) = 0,$$

ou seja, $-c_{q+1}\delta_a(\phi) = T_f(\phi)$, $\forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ($T_f$ denota a distribuição associada a f).

onde

$$f = (c_o - c_{q+1}) + \sum_{i=1}^{q} c_i x^i .$$

Logo, $c_{q+1} = 0$ (pois caso contrário, $\{a\} = \operatorname{supp}\delta_a = \operatorname{supp} T_f =$ $= \operatorname{supp} f$, absurdo) $\therefore$ $T_f(\phi) = 0$, $\forall\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donde segue que $f \overset{qs}{=} 0$ e como f é contínua temos:

$$\sum_{i=0}^{q} c_i x^i = 0 \ , \ \forall\ x \in \mathbb{R} \ ,$$

o que implica que $c_i = 0$, $\forall\ i \in \{1,\ldots,q\}$ e do fato que $c_{q+1} = 0$ temos que $\{L_i\}_{0 \leq i \leq q+1}$ é linearmente independente.

Seja L o subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gerado por $\{L_i\}_{0 \leq i \leq q+1}$. Sabemos que o dual algébrico de L, L^*, tem por base $\{L_i'\}_{0 \leq i \leq q+1}$ onde $L_i'(L_j) = \delta_{ij}$. Como $\dim L < \infty$, então $L_o': L \to \mathbb{C}$ é contínua e $\therefore$ pelo Teorema de Hahn-Banach para ELC, (ver [GR], cor. 1, pag 73-II) L_o' admite uma extensão contínua, que ainda denotaremos por L_o' , à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\therefore$ $L_o' \in \mathcal{D}''(\mathbb{R})$. Mas $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ é reflexivo (ver prop. 1, pg 231 e exemplo 6, pg. 241 de [H]), o que implica que a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{D}''(\mathbb{R}) \\ \phi &\longmapsto \left(\begin{aligned} \tilde{\phi}: \mathcal{D}'(\mathbb{R}) &\to \mathbb{C} \\ \tilde{\phi}(T) &= T(\phi) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

é bijetora e $\therefore$ $\exists$ $\phi_o \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $L_o' = \tilde{\phi}_o$, ou seja, $\forall\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $L_o'(T) = \tilde{\phi}_o(T) = T(\phi_o)$.

Vamos provar que ϕ_o resolve o nosso problema:

$$(1) \qquad 1 = L_o'(L_o) = L_o(\phi_o) = \int_{\mathbb{R}} \phi_o(x)\,dx$$

$$(2) \qquad 0 = L_o'(L_i) = L_i(\phi_o) = \int_{\mathbb{R}} x^i \phi_o(x)\,dx \ , \ \forall\ 1 \leq i \leq q$$

$$(3) \qquad 0 = L_o'(L_{q+1}) = L_{q+1}(\phi_o) = \delta_a(\phi_o) - L_o(\phi_o) = \phi_o(a) - 1.$$

$$e \ \therefore \ \phi_o(a) = 1.$$

$\square$

Agora estamos prontos para verificar as afirmações contidas no Exemplo II.1.

(a) Dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^i operador derivação ($i=(i_1,i_2)$) tomemos $N = |i|+2$. Então

$$\forall\ \psi \in A_N^o \ , \exists\ n = 1 \quad e \quad c = M(r+2) \ ,$$

onde $r > 0$ é tal que $K \subset \bar{D}_r$ e

$$M = \max\{\|\partial^i\psi(z)\|_{\mathbb{C}} \ ; \ \|a_o\partial^{i-(1,0)}\psi(z)\|_{\mathbb{C}} \ , \ \|a_1\partial^{i-(0,1)}\psi(z)\|_{\mathbb{C}}\}$$

sendo

$$a_o\partial^{i-(1,0)}\psi = \begin{cases} 0 & \text{se } i_1 = 0 \\ \partial^{i-(1,0)}\psi & \text{se } i_1 \geq 1 \end{cases}$$

e

$$a_1\partial^{i-(0,1)}\psi = \begin{cases} 0 & \text{se } i_2 = 0 \\ \partial^{i-(0,1)}\psi & \text{se } i_2 \geq 1 \end{cases}$$

de modo que

$$|\partial^i \hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| = |\partial^i(z\psi_\varepsilon(-z))| = |\sum_{j\leq i} \binom{i}{j} \partial^j z (\partial^{i-j}\psi_\varepsilon)(-z)(-1)^{|i-j|}|$$

$$\leq |z\partial^i \psi_\varepsilon(-z)| + |(a_o \partial^{i-(1,0)}\psi_\varepsilon)(-z)| +$$

$$+ |(a_1 \partial^{i-(0,1)}\psi_\varepsilon)(-z)|$$

Mas,

$$(\partial^i \psi_\varepsilon)(z) = \frac{1}{\varepsilon^2} \partial^i(\psi(\frac{z}{\varepsilon})) = \frac{1}{\varepsilon^{2+|i|}} \partial^i \psi(\frac{z}{\varepsilon}) .$$

Logo,

$$|\partial^i \hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| \leq \frac{|z|}{\varepsilon^{2+|i|}} |\partial^i \psi(-\frac{z}{\varepsilon})| + \frac{1}{\varepsilon^{1+|i|}} |a_o \partial^{i-(1,0)} \psi(-\frac{z}{\varepsilon})| +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^{1+|i|}} |a_1 \partial^{i-(0,1)} \psi(-\frac{z}{\varepsilon})|$$

$$\leq (\frac{r}{\varepsilon^{2+|i|}} + \frac{1}{\varepsilon^{1+|i|}} + \frac{1}{\varepsilon^{1+|i|}}) M \leq M(r+2)\varepsilon^{-(2+|i|)} =$$

$$= c\varepsilon^{-N}, \quad \forall\ \varepsilon \in]0,1[\quad e \quad \forall\ z \in K.$$

(b) Fixemos $z \in \mathbb{C}$. Queremos provar que $g(z) = 0$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$. Consideremos a aplicação, para $z \in \mathbb{C}$ fixado,

$$\bar{g}: \psi \in A_1^o \to \hat{g}(\psi, z) = z\psi(-z) \in \mathbb{C}.$$

Basta provar que $\bar{g} \in I$. Se $z=0$ é trivial. Suponhamos, então, que $z \neq 0$ e tomemos $N=1$. Então $\forall\ q \geq 1$ e $\psi \in A_q^o$, fixada, temos que $\exists$ $r > 0$ tal que $\text{supp}(\psi) \subset D_r(0)$. Considere $\eta \in]0,1]$ tal que $|\frac{z}{\eta}| > r$

Logo,

$$|\bar{g}(\psi_\varepsilon)| = |z\psi_\varepsilon(-z)| = \frac{1}{\varepsilon^2} |z\,\psi(\frac{-z}{\varepsilon})| \overset{(1)}{=} 0 < 1.\varepsilon^{q-1} ,$$

$\forall\ \varepsilon \in\,]0,\eta[$, onde em (1) usamos que $|\frac{z}{\varepsilon}| > |\frac{z}{\eta}| > r$ e que $\therefore$ $\frac{z}{\varepsilon} \notin \operatorname{supp}\psi$, $\forall\ \varepsilon \in\,]0,\eta[$.

Provamos que $\exists\ N = 1$ e $\alpha \in \Gamma$ $\left(\begin{array}{c} \alpha:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \\ q \to q \end{array}\right)$

tais que

$$\forall \psi \in A_q^o\ , \exists\ \eta \in\,]0,1] \quad \text{e} \quad c = 1$$

tais que

$$|\bar{g}(\psi_\varepsilon)| = 0 \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-1}\ , \ \forall\ \varepsilon \in\,]0,\eta[$$

(c) Queremos mostrar que $g \neq 0$, ou seja, que $\hat{g} \notin N[A_1^o \times \mathbb{R}^2]$. Suponhamos, por absurdo, que $\hat{g} \in N[A_1^o \times \mathbb{R}^2]$ e $\therefore$ para o compacto

$$K = \{\frac{1}{2p} |\ p \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \quad \exists\ N \in \mathbb{N}^* \quad \text{e} \quad \alpha \in \Gamma$$

tais que para todo $q \geq N$ e $\forall\ \psi \in A_q^o$, $\exists\ \eta \in\,]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$|\hat{g}(\psi_\varepsilon, \frac{1}{2p})| \leq c\, \varepsilon^{\alpha(q)-N} \quad , \quad \forall\ p \in \mathbb{N}^* \ \text{e}\ \varepsilon \in\,]0,\eta[.$$

Em particular $|\hat{g}(\psi_{\frac{1}{p}}\ , \frac{1}{2p})| \leq c(\frac{1}{p})^{\alpha(q)-N}$, $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$ com $\eta p > 1$.

Como $\hat{g}(\psi_{\frac{1}{p}}\ , \frac{1}{2p}) = \frac{1}{2p}\ \psi_{\frac{1}{p}}(-\frac{1}{2p}) = \frac{1}{2p}.p^2\, \psi(-\frac{1}{2}) = \frac{p}{2}\, \psi(-\frac{1}{2})$ segue que

$$|\frac{p}{2}\psi(-\frac{1}{2})| \leq c(\frac{1}{p})^{\alpha(q)-N} \quad \forall\ p \in \mathbb{N}^* \quad \text{com} \quad \eta p > 1$$

e como $\alpha(q) \xrightarrow[q\to\infty]{} \infty$, existe $q_o \geq N$ tal que $\alpha(q_o) > N$. Tomemos $\psi \in A_{q_o}^o$ tal que $\psi(-\frac{1}{2}) = 1$, (dada pelo lema II.2) e $\therefore\ \exists\ c > 0$ e

$\eta \in]0,1[$ tais que

$$|\tfrac{p}{2}| \leq c(\tfrac{1}{p})^{\alpha(q_o)-N} \quad , \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^* \quad \text{com} \quad \eta p > 1 \,,$$

ou seja,

$$p^{\alpha(q_o)-N+1} \leq 2c \quad , \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^* \quad \text{com} \quad \eta p > 1 \,,$$

o que é absurdo, já que $\alpha(q_o) - N+1 > 0$ (pois $\alpha(q_o) > N$)

$\square$

<u>DEFINIÇÃO</u> II.2 <u>Seja</u> Ω <u>um subconjunto de</u> $\mathbb{R}^n$. <u>Um elemento</u> $\tilde{X} \in \mathcal{G}(\Omega)$ <u>é chamada constante generalizada se existe</u> $X \in \bar{\mathbb{C}}$ <u>tal que</u>

$$\tilde{X} = \Theta_\Omega(\tilde{f}), \quad \underline{\text{onde}} \quad \tilde{f}: (\psi,x) \in A_1^o \times \Omega \to f(\psi) \in \mathbb{C} \quad ,$$

<u>sendo</u> $f \in \mathcal{E}_M$ <u>um representante arbitrário de</u> X.

Podemos dar tal definição devido ao seguinte lema.

<u>LEMA</u> II.3 <u>Sejam</u> Ω <u>um aberto de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>e</u> $X \in \bar{\mathbb{C}}$

(1) <u>Se</u> $\tilde{f}:(\psi,x) \in A_1^o \times \Omega \to f(\psi) \in \mathbb{C}$ <u>onde</u> f <u>é um representante de</u> X , <u>então</u> $\tilde{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$.

(2) <u>Se</u> $\tilde{g}$: $(\psi,x) \in A_1^o \times \Omega \to g(\psi) \in \mathbb{C}$ <u>onde</u> g <u>é outro representante de</u> X , <u>então</u> $\tilde{f} - \tilde{g} \in \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$.

<u>Prova</u> (1) Dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^i operador derivação, como $f \in \mathcal{E}_M$ então

$$(*)\quad \left\| \begin{array}{l} \exists\ N \in \mathbb{N}^* \text{ tal que} \\ \quad \forall\ \psi \in A_N^o\ ,\ \exists\ \eta \in\ ]0,1] \quad \text{e} \quad c > 0 \\ \text{tais que} \\ \quad |f(\psi_\varepsilon)| \leqq c\varepsilon^{-N} \quad , \quad \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[\end{array} \right.$$

Se $|i| \geqq 1$ nada temos a provar, já que $(\partial^i\tilde{f})(\phi,x) = 0$ $\forall\ x \in \Omega$ e $\forall\ \phi \in A_1^o$. Suponhamos então que $|i| = 0$, ou seja, que ∂^i é o operador identidade. Como $\tilde{f}(\psi_\varepsilon,x) = f(\psi_\varepsilon)$, $\forall\ x \in \Omega$, então de (*) temos que

$$\left\| \begin{array}{l} \exists\ N \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } \forall \psi \in A_N^o\ ,\exists\ \eta \in\ ]0,1] \text{ e} \\ c > 0 \text{ tais que} \\ |\tilde{f}(\psi_\varepsilon,x)| = |f(\psi_\varepsilon)| \leqq c\varepsilon^{-N}\ ,\ \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[,\ \forall\ x \in K. \end{array} \right.$$

e $\therefore$ $\tilde{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$

(2) Dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^i operador derivação, como $f-g \in \mathcal{I}$ então

$$(**)\quad \left\| \begin{array}{l} \exists\ N \in \mathbb{N}^* \text{ e } \alpha \in \Gamma \text{ tais que } \forall\ q \geqq N \text{ e } \forall \psi \in A_q^o\ , \\ \exists\ \eta \in\ ]0,1] \quad \text{e} \quad c > 0 \text{ tais que} \\ |(f-g)(\psi_\varepsilon)| \leqq c\,\varepsilon^{\alpha(q)-N} \quad , \quad \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[\end{array} \right.$$

Se $|i| \geqq 1$ nada temos a provar, já que $\partial^i(\tilde{f}-\tilde{g})(\phi,x)=0$ $\forall\ x \in \Omega$ e $\forall\ \phi \in A_1^o$. Suponhamos então que ∂^i é o operador identidade. Como $(\tilde{f}-\tilde{g})(\psi_\varepsilon,x) = (f-g)(\psi_\varepsilon)$, $\forall\ x \in \Omega$, então de (**) segue que

$$\left\| \begin{array}{l} \exists\, N \in \mathbb{N}^* \ \text{ e } \ \alpha \in \Gamma \text{ tais que } \forall\, q \geq N \ \text{ e } \ \forall\, \psi \in A_q^o, \\ \exists\, \eta \in]0,1] \ \text{ e } \ c > 0 \ \text{ tais que} \\ |(\tilde{f}-\tilde{g})(\psi_\varepsilon,x)| = |(f-g)(\psi_\varepsilon)| \leq c\,\varepsilon^{\alpha(q)-N} \ , \ \forall\, \varepsilon \in]0,\eta[\\ \forall\, x \in K \end{array} \right.$$

e $\therefore$ $\tilde{f}-\tilde{g} \in N[A_1^o \times \Omega]$. $\square$

A partir do lema anterior podemos definir a seguinte aplicação

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\ \sim\ } & G(\Omega) \\ X & \longrightarrow & \tilde{X} = \theta_\Omega(\tilde{f}) \end{array}$$

onde f é um representante de X e $\tilde{f}: (\psi,x) \in A_1^o \times \Omega \to f(\psi) \in \bar{\mathbb{C}}$.

<u>PROPOSIÇÃO</u> II.3 $\sim$ <u>é um $\mathbb{C}$-homomorfismo injetor</u>.

<u>Prova</u> Se $X_1, X_2 \in \bar{\mathbb{C}}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, queremos mostrar que

$$\sim(X_1+\lambda X_2) = \sim(X_1) + \lambda \sim(X_2).$$

Sejam f_1, f_2 representantes em E_M de X_1 e X_2 respectivamente. Logo $f = f_1 + \lambda f_2$ é um representante de $X_1 + \lambda X_2$ e $g = f_1 f_2$ é um representante de $X_1 X_2$. Mas

$$\tilde{f} = \tilde{f}_1 + \lambda \tilde{f}_2 \quad \text{e} \quad \tilde{g} = \tilde{f}_1 \tilde{f}_2$$

já que $\forall\, (\psi,x) \in A_1^o \times \Omega$ temos

$$\tilde{f}(\psi,x) = (f_1 + \lambda f_2)(\psi) = f_1(\psi) + \lambda f_2(\psi) =$$

$$= \tilde{f}_1(\psi,x) + \lambda \tilde{f}_2(\psi,x) = (\tilde{f}_1+\lambda\tilde{f}_2)(\psi,x)$$

e

$$\tilde{g}(\psi,x) = (f_1 f_2)(\psi) = f_1(\psi) f_2(\psi) = \tilde{f}_1(\psi,x)\tilde{f}_2(\psi,x) =$$

$$= (\tilde{f}_1.\tilde{f}_2)(\psi,x)$$

Então:

$$\sim(X_1+\lambda X_2) = \Theta_\Omega(\tilde{f}) = \Theta_\Omega(\tilde{f}_1+\lambda\tilde{f}_2) = \Theta_\Omega(\tilde{f}_1) + \lambda\Theta_\Omega(\tilde{f}_2) =$$

$$= \tilde{X}_1 + \lambda\tilde{X}_2 = \sim(X_1 + \lambda\sim(X_2)$$

e

$$\sim(X_1 X_2) = \Theta_\Omega(\tilde{g}) = \Theta_\Omega(\tilde{f}_1\tilde{f}_2) = \Theta_\Omega(\tilde{f}_1)\Theta_\Omega(\tilde{f}_2) = \tilde{X}_1\tilde{X}_2 =$$

$$= \sim(X_1).\sim(X_2).$$

Vamos mostrar, agora, que $\sim$ é uma aplicação injetora. De fato, se $\sim(X) = \tilde{X} = 0$, então se f é um representante de X e

$$\tilde{f}\colon (\psi,x) \in A_1^o \times \Omega \to f(\psi) \in \mathbb{C}$$

segue que

$$\tilde{X} = \Theta_\Omega(\tilde{f}) = 0 \quad \text{e portanto, } \tilde{f} \in N[A_1^o \times \Omega] \quad ,$$

ou seja, se K é um compacto de Ω e ∂^i é o operador identidade, $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\forall\ \psi \in A_q^o$, $\exists\, \eta \in\ ]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$|\tilde{f}(\psi_\varepsilon,x)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \ , \quad \forall\ x \in K \ \text{ e } \ \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[.$$

Como

$$\tilde{f}(\psi_\varepsilon,x) = f(\psi_\varepsilon),$$

temos que:

$$|f(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \quad , \quad \forall \quad \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Provamos então que:

$\exists \;\; N \in \mathbb{N}^* \;$ e $\; \alpha \in \Gamma$ tais que $\forall \; q \geq N, \;\; \forall \psi \in A_q^o$,

$\exists \;\; \eta \in]0,1] \;$ e $\; c > 0$ tais que

$$|f(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \quad , \quad \forall \; \varepsilon \in]0,\eta[,$$

ou seja, $\;f \in \mathcal{I}$, donde segue que $\; X = 0$.

$\square$

<u>PROPOSIÇÃO</u> II.4 <u>Se</u> ∂^i <u>é um operador derivação em</u> $\mathbb{R}^n$ <u>com</u> $|i| > 0$ <u>e</u> $\tilde{X}$ <u>é uma constante generalizada em</u> $\mathcal{G}(\Omega)$ <u>então</u> $\partial^i\tilde{X}=0$.

<u>Prova</u>: Pela definição II.2, existe $X \in \bar{\mathbb{C}}$ tal que $\tilde{X} = \Theta_\Omega(\tilde{f})$, onde

$$\tilde{f}:(\psi,x) \in A_1^o \times \Omega \to \tilde{f}(\psi,x) = f(\psi) \in \mathbb{C} \quad ,$$

sendo f um representante arbitrário de X.

Mas, pela definição I.3.1,

$$\partial^i\tilde{X} = \partial^i(\Theta_\Omega(\tilde{f})) = \Theta_\Omega(\partial^i\tilde{f}) = \Theta_\Omega(0) = 0. \qquad (|i| > 0)$$

$\square$

oOo

CAPITULO III

SOBRE AS FUNÇÕES HOLOMORFAS GENERALIZADAS

Nesse capítulo apresentaremos um pouco mais que os fatos básicos sobre Funções Holomorfas Generalizadas necessários para provar o Teorema de Extensão de Hartogs. Dentre os problemas analisados temos o "Princípio do Prolongamento Analítico" onde veremos que muitas das formulações clássicas são falsas no sentido generalizado. Mas existe uma formulação verdadeira nesse contexto, que juntamente com um teorema de existência de soluções para a equação $\bar{\partial}$ em $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, nos permitirá provar o "Teorema de Extensão de Hartogs".

III.1 Formas Diferenciais Generalizadas

A fim de estudar a equação $\bar{\partial}$ e de dar a definição precisa de "Funções Holomorfas Generalizadas" precisamos dizer o que são as formas diferenciais generalizadas. Utilizaremos o conhecimento das formas diferenciais complexas que podem ser encontradas em [S], [A-1], [A-3] e [A-C].

Introduziremos as seguintes notações:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$H_\nu = \{(\ell_1 \dots \ell_\nu) \in \mathbb{N}^\nu \mid 1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_\nu \leq n\}, \ \forall \nu \leq n.$$

Dados $p,q \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$ e $q \leq n$, fixamos

$$B_{p,q} := \{dz^I \wedge d\bar{z}^J | I \in H_p \quad \text{e} \quad J \in H_q\}$$

$$B_{p,o} := \{dz^I | I \in H_p\} \quad \text{e} \quad B_{o,q} := \{d\bar{z}^J | J \in H_q\}$$

Dado um aberto Ω de $\mathbb{C}^n$ e $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $p \leq n$, $q \leq n$ e $p+q > 0$. Uma forma diferencial do tipo (p,q) sobre Ω é um elemento do $G(\Omega)$-módulo livre sobre $B_{p,q}$. Tal módulo é denotado por $G_{(p,q)}(\Omega)$.

Logo, todo elemento $f \in G_{(p,q)}(\Omega)$ se escreve de maneira única, como

$$\sum_{I \in H_p, J \in H_q} f_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J \text{ , onde } f_{IJ} \in G(\Omega) \text{ ,}$$

$\forall\, I \in H_p$, $\forall\, J \in H_q$.

Definimos $G_{(0,0)}(\Omega) = G(\Omega)$

Se $f \in G_{(p,q)}(\Omega)$ então $\bar{\partial} f \in G_{(p,q+1)}(\Omega)$, $\partial f \in G_{(p+1,q)}$ e $df \in G_{(p+1,q+1)}(\Omega)$ são definidos da maneira seguinte: suponhamos que

$$f = \sum_{I\in H_p, J\in H_q} f_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J ,$$

então

$$\partial f = \sum_{I\in H_p, J\in H_q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial z_j} dz_j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J ,$$

$$\bar{\partial} f = \sum_{I\in H_p, J\in H_q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J ,$$

e

$$df = \bar{\partial} f + \partial f ,$$

sendo

$$\frac{\partial f_{IJ}}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$$

e

$$\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j}\right) , \quad \forall\, j = 1,\dots,n .$$

III.2 Integração sobre caminhos

Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}^n$ e V_i , $i=1,\dots,n$, abertos de $\mathbb{C}$ tal que $V_1 \times \dots \times V_n \subset \Omega$. Sejam $\gamma_i: [a_i,b_i] \to V_i$ um caminho em V_i , $\forall\, i = 1,\dots,n$. Seja

$$\gamma = \gamma_1 \times \dots \times \gamma_n : [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n] \to \Omega$$
$$t=(t_1,\dots,t_n) \to (\gamma_1(t_1),\dots,\gamma_n(t_n)) = \gamma(t)$$

Se $\gamma^*,\gamma_1^*,\dots,\gamma_n^*$ denotam as imagens de $\gamma,\gamma_1,\dots,\gamma_n$, então

$\gamma^* = \gamma_1^* \times \ldots \times \gamma_n^*$.

Sejam $g \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $u \in C(\gamma^*)$ o nosso objetivo é definir a integral de ug sobre γ. Denotemos $z = (z_1, \ldots, z_n)$ e $dz = dz_1 \ldots dz_n$. Com estas notações temos o seguinte lema:

<u>LEMA</u> III.2.1 <u>Seja</u> $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ <u>um representante arbitrário de</u> g <u>então</u>

(1) <u>A função</u>

$$I: \psi \in A_1^o \to \int_\gamma u(z)\hat{g}(\psi, z)dz \in \mathbb{C}$$

<u>pertence a</u> $\mathcal{E}_M$.

(2) <u>Se</u> $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ <u>é outro representante de</u> g <u>e se</u> $J: \psi \in A_1^o \to \int_\gamma u(z)\hat{f}(\psi, z)dz \in \mathbb{C}$ <u>então</u> $I - J \in \mathcal{I}$.

<u>Prova</u> (1) Como $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ se $K = \gamma^*$ então $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\, \psi \in A_N^o$, $\exists\, \eta \in]0,1]$ e $c_o > 0$ tais que

$$(*) \qquad |\hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| \leq c_o \varepsilon^{-N} , \quad \forall\, z \in K \quad e \quad \forall\, \varepsilon \in]0,\eta[$$

Mas,

$$I(\psi_\varepsilon) = \int_\gamma u(z)\hat{g}(\psi_\varepsilon, z)dz =$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} u(\gamma(t))\hat{g}(\psi_\varepsilon, \gamma(t))\gamma_1'(t_1)\ldots\gamma_n'(t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$$

e portanto

$$|I(\psi_\varepsilon)| \leq \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} |u(\gamma(t))\hat{g}(\psi_\varepsilon,\gamma(t))\gamma_1'(t_1)\ldots\gamma_n'(t_n)|dt_1,\ldots,dt_n \overset{(*)}{\leq}$$

$$\overset{(*)}{\leq} \|u\|_K c_o \varepsilon^{-N} L(\gamma_1)\ldots L(\gamma_n), \quad \forall\, \varepsilon \in \,]0,\eta[, \text{ onde } L(\gamma_i)$$

denota o comprimento de γ_i , $\forall\ i = 1,\ldots,n$.

Logo, provamos que $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\ \psi \in A_N^o$, $\exists \eta \in \,]0,1]$ e $c = \|u\|_K\, c_o L(\gamma_1)\ldots L(\gamma_n)$ tais que

$$|I(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{-N} \quad , \quad \forall\ \varepsilon \in \,]0,\eta[$$

e $\therefore\ I \in \mathcal{E}_M$.

(2) Como $\hat{g}-\hat{f} \in \mathcal{N}[A_1^o \times \Omega]$ então para $K = \gamma^*$ existem $N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\forall \psi \in A_q^o$,$\exists\ \eta \in \,]0,1]$ e $c_o > 0$ tais que

$$(**) \qquad |(\hat{g}-\hat{f})(\psi_\varepsilon,\gamma(t))| \leq c_o \varepsilon^{\alpha(q)-N} \ , \ \forall\ t \in \prod_{i=1}^{n} [a_i,b_i]$$

$$\text{e} \quad \forall\ \varepsilon \in \,]0,\eta[$$

Mas,

$$|(I-J)(\psi_\varepsilon)| = |\int_\gamma u(z)(\hat{f}-\hat{g})(\psi_\varepsilon,z)dz| \leq$$

$$\int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} |u(\gamma(t))(\hat{f}-\hat{g})(\psi_\varepsilon,\gamma(t))\gamma_1'(t)\ldots\gamma_n'(t)|dt_1\ldots dt_n \quad (**)$$

$$\overset{(**)}{\leq} \|u\|_K c_o \varepsilon^{\alpha(q)-N} L(\gamma_1)\ldots L(\gamma_n) \quad , \quad \forall\ \varepsilon \in \,]0,\eta[.$$

Logo, provamos que $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\forall \psi \in A_q^o\ \exists\ \eta \in]0,1]$ e $c = c_o \|u\|_K\, L(\gamma_1)\ldots L(\gamma_n)$ tais que

$$|(I-J)(\psi_\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}\ ,\ \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[$$

e $\therefore$ $I-J \in \mathcal{I}$.

$\square$

Então podemos dar a seguinte definição:

DEFINIÇÃO III.2.1 Nas hipóteses do início do parágrafo definimos a integral de ug sobre γ como sendo o elmento $\pi(I) \in \bar{\mathbb{C}}$, onde

$$I:\psi \in A_1^o \to \int_\gamma u(z)\hat{g}(\psi,z)dz \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$$

é um representante arbitrário de g. Denotamos a integral de ug sobre γ por

$$\int_\gamma u(z)g(z)dz.$$

DEFINIÇÃO III.2.2 Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e $T = \sum_{i=1}^{\nu} n_i\gamma_i$ uma cadeia em Ω (isto é γ_i é um caminho em Ω e $n_i \in \mathbb{Z}$, $\forall\ i=1,\ldots,\nu$). Se

$$T^* = \bigcup_{i=1}^{\nu}\gamma_i^* \ ;\quad g \in \mathcal{G}(\Omega) \quad \text{e} \quad u \in \mathcal{C}(T^*)$$

definimos a integral de ug sobre T pela fórmula

$$\int_T u(z)g(z)dz = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \int_{\gamma_i} u(z)g(z)dz\ .$$

O exemplo a seguir, apresentado por Colombeau-Galé em [CG-1] , mostra que pode existir $g \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$ tal que

$$g(z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \int_\gamma g(z)\,dz \neq 0 \,.$$

<u>EXEMPLO</u> III.2.1 <u>Seja</u> $\hat{g}$ <u>a função do exemplo</u> II.1. <u>Então se</u> $g \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$ <u>denota a classe de</u> $\hat{g}$ <u>temos</u>:

(a) $\quad g \neq 0 \quad \text{e} \quad g(z) = 0 \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}$

(b) $\quad \int_\gamma g(z)\,dz \neq 0$, <u>onde</u> γ <u>é a curva</u> $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$ <u>definida por</u> $\gamma(t) = t$.

Para a demonstração da parte (b) do exemplo acima necessitaremos do seguinte Lema.

<u>LEMA</u> III.2.2 Seja $q \in \mathbb{N}^*$. Então existe $\phi \in A_q^o(2)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\phi(u,0)\,du = 1$$

<u>Prova</u> Considere $L_i\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ definido por

$$L_i(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2} x^i\, \phi(x)\,dx \quad ,$$

para todo $i = (i_1, i_2)$ com $|i| \leq q$ e

$$L\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \,, \quad L(\phi) = \int_{\mathbb{R}} u\phi(u,0)\,du \;,$$

onde x denota o par $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

É claro que L_i e L pertencem a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ para todo i tal que $|i| \leq q$. Além disso $\{L_i, L\}_{|i|\leq q}$ é linearmente independente em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. De fato, se $c_i, c \in \mathbb{R}$, $|i| \leq q$ tais que

$$\sum_{|i|\leq q} c_i L_i + cL = 0$$

então, $\forall\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Sigma c_i x^i \phi(x)\,dx = -c\int_{\mathbb{R}} u\phi(u,0)\,du .$$

Considere $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0) \,|\, u \in \mathbb{R}\}$. Logo, $\forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que $L(\phi) = 0$ e portanto $(\Sigma c_i L_i)(\phi) = 0$, ou seja,

(*) $\Sigma c_i L_i = 0$ sobre $\mathcal{D}(\Omega)$

Como $\Sigma c_i L_i = T_f$, onde $f(x) = \sum_{|i|\leq q} c_i x^i$, então por (*) temos que $f = 0$ em Ω. Sendo f contínua em $\mathbb{R}^2$ então $f = 0$ em $\mathbb{R}^2$ o que implica que $c_i = 0$, $\forall$ i com $|i| \leq q$. Logo, $cL = 0$ e $\therefore$ $c = 0$.

Tendo provado que $\{L_i, L\}_{|i|\leq q}$ é linearmente independente a demonstração do presente lema segue como a do Lema II.2.

□

<u>Prova do exemplo</u>: a) Provado no exemplo II.1

b) Suponhamos que

$$\int_\gamma g(z)dz = 0 \quad \text{em } \mathbb{C}.$$

Então a função

$$I: \psi \in A_1^o \to \int_\gamma \hat{g}(\psi, z)dz$$

é um elemento do ideal I, isto é, $\exists$ $N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall$ $q \geq N$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists$ $\eta \in]0,1]$ (que podemos supor pequeno o suficiente de tal forma que

$$\pi_1(\text{supp}\phi) \subset [-\frac{1}{\eta}, \frac{1}{\eta}]) \quad \text{e} \quad c > 0$$

tais que

$$\left|\int_\gamma \hat{g}(\phi_\varepsilon, z)dz\right| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \quad , \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Mas,

$$\int_\gamma \hat{g}(\phi_\varepsilon, z)dz = \int_{-1}^{1} \hat{g}(\phi_\varepsilon, (t,0))dt = \int_{-1}^{1} t\phi_\varepsilon(-t,0)dt =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-1}^{1} t\phi(-\frac{t}{\varepsilon}, 0)dt = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} u\phi(-u,0)du \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u\phi(-u,0)du \quad , \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[\ ,$$

onde em (*) usamos que $\pi_1(\text{supp}\phi) \subset [-\frac{1}{\eta}, \frac{1}{\eta}] \subset [-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$, $\forall\ \varepsilon \in]0,\eta[$.

Logo

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u\phi(-u,0)du\right| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)N} \quad , \ \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Como $\alpha(q) \xrightarrow[q\to\infty]{} \infty$, $\exists$ $q_o > N$ tal que $\alpha(q_o) - N > 0$.

Seja $\phi \in A^{o}_{q_o}$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} u\,\phi(-u,0)\,du = 1$ (lema III.2.2). Para tal ϕ, existe $\eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$1 \leqq c\varepsilon^{\alpha(q_o)-N} \quad , \quad \forall\, \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos um absurdo.

$\square$

III.3 Definição e exemplos

<u>DEFINIÇÃO</u> III.3.1 <u>Seja</u> Ω <u>um aberto de</u> $\mathbb{C}^n$ $(n \geqq 1)$. <u>Uma função generalizada</u> $f \in G(\Omega)$ <u>é dita holomorfa se</u> $\bar{\partial} f = 0$, <u>ou seja, se</u>

$$\bar{\partial}_j f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) = 0$$

<u>em</u> Ω <u>para todo</u> $j = 1,\ldots,n$.

Denotamos o conjunto de todas as funções holomorfas generalizadas por $HG(\Omega)$.

<u>Notações</u>. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ aberto. Se $g \in G(\Omega)$ e $\hat{g}$ é um representante de g então:

$$\partial_j g = \frac{\partial g}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j} - i\,\frac{\partial g}{\partial y_j}\right) ,$$

sendo $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1,\ldots,n$.

$$\partial_j \hat{g}(\psi,.) = \frac{\partial \hat{g}}{\partial z_j}(\psi,.) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{g}(\psi,.)) - \frac{\partial}{\partial y_j}(\hat{g}(\psi,.))\right) ,$$

$\forall \ \psi \in A_1^o$

Se $n = 1$ e $\hat{g}(\psi,.) \in H(\Omega)$, $\forall \psi \in A_1^o$, então:

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial z}(\psi,.) = \hat{g}'(\psi,.)$$

e

$\hat{g}^{(m)}(\psi,.)$ indica que aplicamos $\frac{\partial}{\partial z}$ m vezes à $\hat{g}(\psi,.)$, $\forall \ \psi \in A_1^o$.

Observações III 3.1.

(i) $H(\Omega) \subset HG(\Omega)$

È claro pois

$$C^{\infty}(\Omega) \subset G(\Omega) \, (\therefore H(\Omega) \subset G(\Omega))$$

e $\bar{\partial} f = 0 \quad \forall \ f \in H(\Omega)$

(ii) $HG(\Omega)$ é uma $\mathbb{C}$-sub-álgebra de $G(\Omega)$.

De fato, se $g_1, g_2 \in HG(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então

(a) $g_1 + \lambda g_2 \in HG(\Omega)$ pois

$$\bar{\partial}_j (g_1 + \lambda g_2) = \bar{\partial}_j g_1 + \lambda \bar{\partial}_j g_2 = 0 + \lambda 0 = 0 \ ,$$

$\forall \ j = 1,\ldots,n.$

(b) $g_1, g_2 \quad HG(\Omega)$

$$\bar{\partial}_j (g_1 g_2) = (\bar{\partial}_j g_1) g_2 + g_1 (\bar{\partial}_j g_2) = 0 g_2 + g_1 0 = 0 \ ,$$

$\forall \ j = 1,\ldots,n.$

(iii) $\partial^i(HG(\Omega)) \subset HG(\Omega)$

É claro já que

$\bar{\partial}_j \circ \partial^i = \partial^i \circ \bar{\partial}_j \quad , \quad \forall\, j = 1,\ldots,n.$

(iv) $g \in HG(\Omega) \Longleftrightarrow \bar{\partial}_j \hat{g} \in N[A_1^o \times \Omega] \quad , \quad \forall\, j=1,\ldots,n$

onde $\hat{g}$ é um representante arbitrário de g

$g \in HG(\Omega) \Longleftrightarrow \bar{\partial}_j g = 0 \ , \ \forall\, j = 1,\ldots,n \Longleftrightarrow \bar{\partial}_j(\Theta_\Omega(\hat{g})) = 0$

$\forall\, j = 1,\ldots,n \Longleftrightarrow \Theta_\Omega(\bar{\partial}_j \hat{g}) = 0$,

$\forall\, j = 1,\ldots,n \Longleftrightarrow \bar{\partial}_j \hat{g} \in N[A_1^o \times \Omega]$

$\forall\, j = 1,\ldots, n$

TEOREMA III.3.1 $\mathcal{D}'(\Omega) \cap HG(\Omega) = H(\Omega)$

Para a demonstração do teorema acima utilizaremos o seguinte teorema clássico das equações a derivadas parciais:

TEOREMA III.3.1.a Seja W um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ um operador diferencial com coeficientes em $C^\infty(W)$, elíptico em W. Se $Pu \in C^\infty(W)$ então $u \in C^\infty(W)$, (isto é, P é hipoelíptico).

A demonstração deste teorema pode ser vista em [L-M] (ver teorema 3.2. pg. 138).

Daremos aqui, no entanto, a definição de operador elíptico. Seja P o operador de grau m e coeficientes em $C^\infty(W)$ dado por $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\,\partial^\alpha$. Definimos

$$p: W \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

por

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha ,$$

onde

$$\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \ , \ \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \ ,$$

$|\alpha| \leq m$ e $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$.

Dizemos que P é elíptico em $x_o \in W$ se $p(x_o,\xi) = 0$ implicar que $\xi = 0$. P é elíptico em W se P for elíptico em todo ponto de W.

Agora estamos prontos para demonstrar o teorema III.3.1. Seja

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \cap HG(\Omega) \ ,$$

então

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{e} \quad \bar{\partial}_j u = 0 \quad , \quad \forall\ j=1,\ldots,n.$$

Logo,

$$\partial_j(\bar{\partial}_j u) = \partial_j 0 = 0 \ , \ \forall\ j = 1,\ldots,n.$$

E ainda é fácil ver que

$$\partial_j \circ \bar{\partial}_j = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right) \ , \ \forall\ j = 1,\ldots,n.$$

Assim sendo,

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j \circ \bar{\partial}_j = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right) .$$

Definimos

$$P = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right).$$

É claro que P é elíptico em $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ e como $Pu = 0 \in C^\infty(\Omega)$ então pelo teorema III.3.1.a, $u \in C^\infty(\Omega)$. E sendo $\bar{\partial}_j u = 0$, $\forall\ j=1,\ldots,n$, segue que $u \in H(\Omega)$.

A inclusão contrária é evidente.

$\square$

<u>EXEMPLO</u> III.3.1 <u>Se</u> Ω <u>é um aberto de</u> $\mathbb{C}^n$ e $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ <u>uma sequência finita em</u> $H(\Omega)$ <u>e</u> $(c_i)_{1\leq i\leq p}$ <u>uma sequência finita ce constantes generalizadas</u> (ver definição II.2) <u>então</u>

$$g = \sum_{i=1}^{p} c_i f_i \in HG(\Omega).$$

<u>Prova</u> Pela proposição II.3, $\bar{\partial}_j c_i = 0$, $\forall\ j=1,\ldots,n$ e $\forall\ i = 1,\ldots,p$. Também $\bar{\partial}_j f_i = 0$, $\forall\ j=1,\ldots,n$, $\forall\ i=1,\ldots,p$, já que $f_i \in H(\Omega) \subset HG(\Omega)$. Então,

$$\bar{\partial}_j g = \sum_{i=1}^{p} \bar{\partial}_j (c_i f_i) = \sum_{i=1}^{p} (\bar{\partial}_j c_i) f_i + c_i (\bar{\partial}_j f_i) = 0$$

$\forall\ j = 1,\ldots,n.$

$\square$

<u>EXEMPLO</u> III.3.2. <u>Seja</u> Ω <u>um aberto de</u> $\mathbb{C}$ <u>e</u> $I = [a,b]$ <u>um intervalo fechado de</u> $\mathbb{R}$, V <u>uma vizinhança aberta de</u> I <u>em</u> $\mathbb{C}$, $\hat{g}_1 \in E_M[A_1^o \times V]$ <u>e</u> $h: I \to \mathbb{C}$ <u>uma função contínua tal que</u> $h(t) \notin \Omega$, $\forall\ t \in I$. <u>Então</u>

$$\hat{g}: (\psi,z) \in A_1^o \times \Omega \to \int_a^b \frac{\hat{g}_1(\psi,t)}{h(t)-z}\, dt \in \mathbb{C} ,$$

<u>pertence a</u> $E_M[A_1^o \times \Omega]$. <u>Além disso se</u> $g = \theta_\Omega(\hat{g})$ <u>então</u> $g \in HG(\Omega)$

<u>Prova</u> Por derivação sob o sinal de integração concluimos que

$$\hat{g}(\psi,.) \in C^\infty(\Omega), \quad \forall\ \psi \in A_1^o \quad (e \therefore\ \hat{g} \in E[A_1^o \times \Omega\,])$$

e também que

$$\hat{g}(\psi,.) \in H(\Omega) \quad \forall\ \psi \in A_1^o ,$$

já que a função

$$z \in \Omega \to \frac{1}{h(t)-z} \in \mathbb{C}$$

é holomorfa, $\forall\ t \in [a,b]$. Vamos provar que $\hat{g}$ é moderada: Dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^i operador derivação; como $\hat{g}_1 \in E_M[A_1^o \times V]$ e $[a,b] \subset\subset V$, $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\ \phi \in A_N^o$, $\exists\ \eta \in\ ]0,1]$ e $c_1 > 0$ de modo que

$$(*) \qquad |\hat{g}_1(\phi_\varepsilon,t)| \leq c_1\varepsilon^{-N} \quad , \quad \forall\ t \in [a,b] \ \text{ e } \ \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[.$$

Mas, por derivação sob o sinal de integração, temos:

$$|\partial^i \hat{g}(\phi_\varepsilon,z)| = |\hat{g}^{|i|}(\phi_\varepsilon,z)| = \left|\int_a^b \frac{\hat{g}_1(\phi_\varepsilon,t)}{(h(t)-z)^{|i|+1}}dt\right| |i|! \leq$$

$$\leq \int_a^b \frac{|\hat{g}_1(\phi_\varepsilon,t|}{|h(t)-z|^{|i|+1}}dt\, |i|! \overset{(*)}{\leq}$$

$$\overset{(*)}{\leq} |i|!c_1\varepsilon^{-N}\int_a^b \frac{1}{|h(t)-z|^{|i|+1}}dt\ ,$$

$\forall\ z \in K\ ,\ \ \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[.$

Como $(t,z) \in [a,b] \times K \to \dfrac{1}{(h(t)-z)^{|i|+1}} \in \mathbb{C}$, é contínua temos que

$$M = \left\| \frac{1}{(h(t)-z)^{|i|+1}} \right\|_{[a,b]\times K} < \infty$$

Logo, temos que, dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^i operador derivação $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall \phi \in A_N^o$, $\exists\ \eta \in\ ]0,1]$ e $c = |i|!c_1M(b-a)$ tais que

$$|\partial^i\hat{g}(\phi_\varepsilon,z)| \leq c\varepsilon^{-N}\ ,\ \forall\ z \in K \ \text{ e } \ \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[.$$

E portanto, $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$.

Deste modo, $g = \Theta_\Omega(\hat{g}) \in \mathcal{HG}(\Omega)$

$\square$

EXEMPLO III.3.3. Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e $g \in \mathcal{G}(\Omega)$, $\gamma:[a,b] \to \Omega$ um caminho em Ω e $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ um representante de g. Se denotamos por Ω_γ o comjunto aberto $\Omega \setminus \gamma^*$, então:

(1) $$I_z: \psi \in A_1^o \to \int_\gamma \frac{\hat{g}(\psi,\tau)}{\tau - z}\, d\tau \in \mathbb{C}$$

pertence a $\mathcal{E}_M$ e

$$\pi(I_z) = \int_\gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z}\, d\tau ,$$

para todo $z \in \Omega_\gamma$.

(2) $$\hat{f}: (\psi,z) \in A_1^o \times \Omega_\gamma \to \int_\gamma \frac{\hat{g}(\psi,\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

pertence a

$\mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega_\gamma]$ e $f = \Theta_{\Omega_\gamma}(\hat{f}) \in \mathcal{HG}(\Omega_\gamma)$

(3) $$f(z) = \int_\gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z}\, d\tau , \quad \forall\, z \in \Omega_\gamma .$$

Prova (1) Como a função $u_z: \tau \in \gamma^* \to \frac{1}{\tau - z} \in \mathbb{C}$ é contínua, $\forall\, z \in \Omega_\gamma$, então pelo lema III.2.1, (1), segue que $I_z \in \mathcal{E}_M$ e por definição

$$\pi(I_z) = \int_\gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z}\, d\tau , \ \forall\, z \in \Omega_\gamma .$$

(2) Dados $K \subset\subset \Omega_\gamma$ e ∂^i operador derivação temos: como $\gamma^* \subset\subset \Omega$ e $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ então $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\forall\ \phi \in A_N^o\ ,\ \exists\ \eta \in]0,1] \quad e \quad c_o > 0$$

tais que

$$|\hat{g}(\phi_\varepsilon, z)| \leq c_o \varepsilon^{-N}\ ,\ \forall\ z \in \gamma^* \quad e \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Mas

$$\hat{f}(\psi, z) = \int_a^b \frac{\hat{g}(\psi, \gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t)dt\ ,\ \forall\ z \in \Omega_\gamma$$

e por derivação sob o sinal de integração segue que

$$\hat{f}(\psi, .) \in H(\Omega_\gamma),\quad \forall\ \psi \in A_1^o$$

(já que $z \in \Omega_\gamma \rightarrow \dfrac{1}{\gamma(t) - z}$ é holomorfa, $\forall\ t \in [a,b]$). Logo,

$$|\partial^i \hat{f}(\psi, z)| = |\hat{f}^{|i|}(\psi, z)| =$$

$$= \left|\int_a^b \frac{\hat{g}(\psi, \gamma(t))}{(\gamma(t) - z)^{|i|+1}} \gamma'(t)dt\right| |i|!$$

$\forall\ z \in \Omega_\gamma$. Assim $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\ \phi \in A_N^o\ \exists\ \eta \in]0,1[$ tal que

$$|\partial^i \hat{f}(\phi_\varepsilon, z)| \leq c_o \varepsilon^{-N} |i|! ML(\gamma) = c\varepsilon^{-N}\ ,\quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[$$

onde

$$c = c_o |i|!\ ML(\gamma) \quad e \quad M = \left\| \frac{1}{(\gamma(t) - z)^{|i|+1}} \right\|_{(t,z) \in [a,b] \times K} .$$

E portanto, $\hat{f} \in E_M[A_1^o \times \Omega_\gamma]$.

Deste modo, $f = \Theta_{\Omega_\gamma}(\hat{f}) \in HG(\Omega_\gamma)$.

$$(3) \qquad f(z) \overset{(a)}{=} \pi(I_z) \overset{(b)}{=} \int_\gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau,\quad \forall\ z \in \Omega_\gamma$$

onde em (a) usamos a definição II.2 e em (b) a definição III.2.1.

$\square$

<u>EXEMPLO</u> 3.4. <u>Seja</u> Ω <u>um subconjunto aberto de</u> $\mathbb{C}^n$, $D = \prod_{j=1}^{n} D_j$ <u>um polidisco aberto tal que</u> $\bar{D} \subset\subset \Omega$, $g \in G(\Omega)$ e $\hat{g} \in E_M[A_1^o \times \Omega]$ <u>um representante de</u> g <u>então, se</u> $\partial_o D := \partial D_1 \times \ldots \times \partial D_n$ <u>indica a fronteira distinguida de</u> D <u>temos</u>:

(1) <u>A função</u>

$$\hat{f}: (\psi, z) \in A_1^o \times D \to \int_{\partial_o D} \frac{\hat{g}(\psi, \tau_1, \ldots, \tau_n)}{(\tau_1 - z_1) \ldots (\tau_n - z_n)} d\tau_1 \ldots d\tau_n \in \mathbb{C}$$

<u>pertence a</u> $E_M[A_1^o \times D]$ e $\hat{f}(\psi, .) \in H(D)$, $\forall \psi \in A_1^o$ <u>e portanto</u> $f = \Theta_D(\hat{f}) \in HG(D)$. <u>Observe que</u> $\hat{g}(\psi, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ <u>é uma notação para</u> $\hat{g}(\psi, (\tau_1, \ldots, \tau_n))$.

(2) $$f(z) = \int_{\partial_o D} \frac{g(\tau_1, \ldots, \tau_n)}{(\tau_1 - z_1) \ldots (\tau_n - z_n)} d\tau_1 \ldots d\tau_n \ , \ \forall z = (z_1, \ldots, z_n) \in D.$$

<u>Prova</u> Dados $K \subset\subset D$ e ∂^i operador derivação, como $\hat{g} \in E_M[A_1^o \times \Omega]$ e $\partial_o D \subset \Omega$ existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que para todo $\psi \in A_N^o$ existe $\eta \in]0,1]$ e $c_o > 0$ tal que

(*) $$|\hat{g}(\psi_\varepsilon, \tau)| \leq c_o \varepsilon^{-N} \ , \quad \forall \tau \in \partial_o D \ , \quad \forall \varepsilon \in]0, \eta[.$$

Mas

$$\partial^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \partial y_1^{i_1'} \ldots \partial x_n^{i_n} \partial y_n^{i_n'}}$$

(notamos $j_k = i_k + i_k'$, $k=1,\ldots,n$) , então como

$$\hat{f}(\phi,z) = \int_{\partial_o D} \frac{\hat{g}(\phi,\tau_1,\ldots,\tau_n)}{(\tau_1 - z_1)\ldots(\tau_n - z_n)} d\tau_1 \ldots d\tau_n =$$

$$= \int_o^{2\pi} \cdots \int_o^{2\pi} \frac{\hat{g}(\phi,\gamma_1(t_1),\ldots,\gamma_n(t_n))}{(\gamma_1(t_1)-z_1)\ldots(\gamma_n(t_n)-z_n)} \prod_{j=1}^{n} \gamma_j'(t_j)\, dt_1 \ldots dt_n ,$$

$\forall\ (\phi,z) \in A_1^o \times D$, onde $\gamma_j(t_j) = r_j e^{it_j}$, $\forall\ j = 1,\ldots,n$, (parametrização da ∂D_j).

Então, por derivação sob o sinal de integração, segue que:

$$|\partial^i \hat{f}(\phi,z)| =$$

$$= (j_1!\ldots j_n!) \left| \int_o^{2\pi} \cdots \int_o^{2\pi} \frac{\hat{g}(\phi,\gamma_1(t_1),\ldots,\gamma_n(t_n))}{(\gamma_1(t_1)-z_1)^{j_1+1} \ldots (\gamma_n(t_n)-z_n)^{j_n+1}} \prod_{J=1}^{n} \gamma_j'(t_j)\, dt_1 \ldots dt_n \right|$$

$\forall\ (\phi,z) \in A_1^o \times D.$

Logo,

$$|\partial^i \hat{f}(\psi_\varepsilon,z)| \overset{(*)}{\leq} (j_1!\ldots j_n!)\, c_o \varepsilon^{-N} \prod_{i=1}^{n} L(\partial D_i) \,.\, M ,$$

$\forall\ z \in K$, $\forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[$, onde

$$M = \left\| \frac{1}{(\tau_1 - z_1)^{j_1+1} \dots (\tau_n - z_n)^{j_n+1}} \right\|_{(\tau,z)\in\partial_o D\times K}$$

Então provamos que existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall \phi \in A_N^o$, $\exists \eta \in]0,1]$ e

$$c = M(j_1!\dots j_n!)\ c_o \prod_{j=1}^{n} L(\partial D_i)$$

tais que

$$|\partial^i \hat{f}(\psi_\varepsilon, z)| \leq c\varepsilon^{-N}, \ \forall\ z \in K \quad e \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[\ ,$$

ou seja, $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times D]$.

Além disso, por derivação sob o sinal de integração, é claro que $\bar{\partial}_j \hat{f}(\phi,.) = 0$ em D, $\forall\ \phi \in A_1^o$ e como $\hat{f}(\phi,.) \in C^\infty(D)$, $\forall\ \phi \in A_1^o$, então $\hat{f}(\phi,.)$ é holomorfa em D, $\forall\ \phi \in A_1^o$. Logo, se tomarmos $f = \Theta_D(\hat{f})$ teremos que $f \in \mathcal{HG}(D)$.

(2) Consideremos para cada $z \in D$ fixado,

$$I_z:\ \psi \in A_1^o \rightarrow \int_{\partial_o D} \frac{\hat{g}(\psi,\tau_1,\dots,\tau_n)}{(\tau_1-z_1)\dots(\tau_n-z_n)}\, d\tau_1\dots d\tau_n \ .$$

Pelo lema III.2.1, (1), temos que $I_z \in \mathcal{E}_M$, já que a função

$$\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n) \rightarrow \frac{1}{(\tau_1-z_1)\dots(\tau_n-z_n)}$$ é contínua em $\partial_o D$, $\forall\ z \in D$

e pela definição III.2.1. segue que

$$\pi(I_z) = \int_{\partial_0 D} \frac{g(\tau_1,\ldots,\tau_n)}{(\tau_1-z_1)\ldots(\tau_n-z_n)}\, d\tau_1 \ldots d\tau_n .$$

Por outro lado, pela definição II.2, segue que:

$\pi(I_z) = f(z)$

e, portanto,

$$f(z) = \int_{\partial_0 D} \frac{g(\tau_1,\ldots,\tau_n)}{(\tau_1-z_1)\ldots(\tau_n-z_n)}\, d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

$\square$

<u>EXEMPLO</u> III.3.5 <u>Também temos exemplo de função holomorfa generalizada dada por uma soma infinita</u>.

<u>Seja</u> $(a_n)_{n\geq 1}$ <u>uma sequência de elementos em</u> $\mathcal{E}_M$ <u>dada por:</u>

$$a_n\colon \psi \in A_1^o \to \exp(i \operatorname{Re}\int (\psi(\lambda))^n d\lambda).$$

<u>Definimos</u>

$$\hat{g}\colon (\psi,z) \in A_1^o \times \mathbb{C} \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\psi) \frac{z^n}{n!} .$$

<u>Temos</u>: (1) $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \mathbb{C}]$

(2) <u>Se</u> $g = \Theta_{\mathbb{C}}(\hat{g})$ <u>então</u> $g \in \mathcal{HG}(\mathbb{C})$.

<u>Prova</u> Observe que $\hat{g}$ está bem definida já que

$$|a_n(\psi) \frac{z^n}{n!}| \leq \frac{|z|^n}{n!}, \forall\, z \in \mathbb{C} \;,\; \forall\, \psi \in A_1^o \;\text{ e }\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e $\therefore$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\psi) \frac{z^n}{n!}$ é absolutamente convergente. Além disso, é claro que $\hat{g}(\psi,.) \in H(\mathbb{C})$, $\forall\, \psi \in A_1^o$.

(1) Dados $K \subset\subset \mathbb{C}$ e ∂^i operador derivação $\exists\, r > 0$ tal que $K \subset \bar{D}_r$. Tomemos, então $N = 1$. Logo $\forall \psi \in A_1^o$, $\exists\, \eta = 1$ e $c = e^r$ tais que

$$|\partial^i \hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| \overset{(*)}{\leq} \sum_{n=|i|}^{\infty} |a_n(\psi_\varepsilon) \frac{z^{n-|i|}}{(n-|i|)!}| \leq$$

$$\leq \sum_{n=|i|}^{\infty} \frac{r^{n-|i|}}{(n-|i|)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} = e^r \leq c\varepsilon^{-1} ,$$

$\forall\, z \in K$, $\forall\, \varepsilon \in]0,1[$

Em (*) usamos que $\hat{g}(\psi_\varepsilon,.) \in H(\mathbb{C})$ e, portanto,

$$|\partial^i \hat{g}(\psi_\varepsilon,.)| = |\hat{g}^{|i|}(\psi_\varepsilon,.)|$$

e que a derivação é feita termo a termo.

(2) É óbvio, já que, $\hat{g}(\psi,.) \in H(\mathbb{C})$, $\forall\, \psi \in A_1^o$.

□

Observações III.3.2

(i) Observe que a função $g \in \mathcal{HG}(\mathbb{C})$ do exemplo III.3.5 possue um representante $\hat{g}$ tal que $\hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $\forall\ \psi \in A_1^o$. Veremos nos parágrafos 4 e 5 que se $f \in \mathcal{HG}(\Omega)$, Ω aberto de $\mathbb{C}$, então, localmente, é sempre possível encontrar $\hat{f}$ representante de f tal que $\hat{f}(\psi,.)$ é holomorfa.

(ii) No teorema III.3.1, vimos que a Teoria das Distribuições não traz uma extensão ao conceito de funções holomorfas. No entanto, na teoria das funções generalizadas existem muitas $g \in \mathcal{G}(\Omega)$ tais que $\bar{\partial} g = 0$, sendo que g não é uma função holomorfa usual. Isto pode ser comprovado através do exemplo III.6.2, § 6.

Encerramos o parágrafo demonstrando um lema técnico que simplificará a prova de moderação ou nulidade de certas funções no decorrer da dissertação.

LEMA III.3.1 Seja $D = D_1 \times \ldots \times D_n \subset \mathbb{C}^n$ um polidisco aberto e $f: A_1^o \times D \to \mathbb{C}$ uma função satisfazendo:

(i) $f(\phi,.) \in \mathcal{H}(D)$

(ii) $\forall\ K \subset\subset \mathbb{C}$ $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\ \phi \in A_N^o$, $\exists\ \eta \in \,]0,1]$ e $c > 0$ tais que $|f(\phi_\varepsilon,z)| \leq c\varepsilon^{-N}$, $\forall\ \varepsilon \in \,]0,\eta[$, $\forall\ z \in K$.

Então $f \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times D]$

<u>Prova</u> Temos que provar a propriedade que nos dá a moderação para um operador derivação diferente da identidade. Assim, dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^β operador derivação, $\partial^\beta \neq id$, tomemos $D_1 = D_1^1 \times \ldots \times D_n^1$, polidisco aberto de mesmo centro que D satisfazendo $K \subset D_1 \subset \bar{D}_1 \subset D \subset \mathbb{C}^n$

Aplicando a propriedade (ii) a $\partial_o D_1 = \partial D_1^1 \times \ldots \times \partial D_n^1$, segue que

(*) $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\ \phi \in A_N^o$, $\exists\ \eta \in]0,1]$ e $\bar{c} > 0$

tais que

$$|f(\phi_\varepsilon, z)| \leq \bar{c}\varepsilon^{-N}, \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[, \quad \forall\ z \in \partial_o D_1 .$$

Observe ainda que

$$\partial^\beta = \frac{\partial}{\partial x_1^{\beta_1} \partial y_1^{\beta_1'} \ldots \partial x_n^{\beta_n} y_n^{\beta_n'}} ,$$

onde

$$\beta = (\beta_1, \beta_1', \ldots, \beta_n, \beta_n')$$

e sendo $f(\phi,.) \in H(D)$, $\forall\ \phi \in A_1^o$, pela fórmula integral de Cauchy (ver teorema 2.2.1 de [6]), segue que

$$|\partial^\beta f(\phi,z)| = \left|\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(\phi,z)\right| =$$

$$= \left|\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_o D_1} \frac{f(\phi,\tau_1,\ldots,\tau_n)}{(\tau_1 - z_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\tau_n - z_n)^{\alpha_n+1}}\, d\tau_1 \ldots d\tau_n\right|,$$

$\forall\ \phi \in A_1^o$, $\forall\ z \in D_1$, sendo $\alpha = (\beta_1+\beta_1', \ldots, \beta_n+\beta_n')$ e $z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Então, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall \phi \in A_N^o$, $\exists\, \eta \in]0,1]$ e

$$c = \frac{\alpha!}{(2\pi)^n}\, \bar{c}. \left\| \frac{1}{(\tau_1-z_1)^{\alpha_1+1}} \cdots \frac{1}{(\tau_n-z_n)^{\alpha_n+1}} \right\|_{(\tau,z)\in\partial_0 D_1\times K}$$

tais que

$$|\partial^\beta f(\phi_\varepsilon,z)| \leq \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \left| \int_{\partial_0 D_1} \frac{f(\phi,\tau_1,\ldots,\tau_n)}{(\tau_1-z_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\tau_n-z_n)^{\alpha_n+1}}\, d\tau_1\ldots d\tau_n \right| \quad (*)$$

$$\leq \frac{\alpha!}{(2\pi)^n}\, \bar{c}\varepsilon^{-N} \left\| \frac{1}{(\tau_1-z_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\tau_n-z_n)^{\alpha_n+1}} \right\|_{(\tau,z)\in\partial_0 D_1\times K} =$$

$$= c\varepsilon^{-N}\ ,\ \forall \varepsilon \in]0,\eta[\ ,\ \forall z \in K\ .$$

□

<u>Observação</u> III.3.3. Tendo provado o resultado anterior para polidiscos podemos generaliza-lo para abertos quaisquer de $\mathbb{C}^n$, ou seja, suponhamos que $f: A_1^o \times \Omega \to \mathbb{C}$, Ω aberto de $\mathbb{C}^n$ satisfaz:

(i) $f(\phi,.) \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\forall \phi \in A_1^o$.

(ii) $\forall K \subset\subset \Omega$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall \phi \in A_q^o$,
$\exists\, \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ de modo que
$|f(\phi_\varepsilon,z)| \leq c\varepsilon^{-N}$, $\forall z \in K$ e $\forall \varepsilon \in]0,\eta[$.

Então $f \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$.

<u>Prova</u> De fato, devido ao lema III.3.1, $f|D \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times D]$, $\forall$ D polidisco aberto, $D \subset \Omega$. Mas $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$, onde D_i é polidisco

aberto, $D_i \subset \bar{D}_i \subset\subset \Omega$. Seja $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a partição da unidade associada a cobertura $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$, isto é,

(i) $\psi_i \in C^{\infty}(\Omega)$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$

(ii) $\operatorname{supp}\psi_i \subset D_i$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$

(iii) $\forall\, z \in \Omega$, $\exists\, V_z$ vizinhança aberta de z onde só um número finito de ψ_i's são não nulas.

(iv) $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i = 1$ em Ω ($\therefore$ podemos escrever $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} \psi_i f$).

Dados $K \subset\subset \Omega$ e ∂^{β} operador derivação, $\exists\, w$ aberto tal que $K \subset w \subset \bar{w} \subset\subset \Omega$. Devido a propriedade (iii) e a compacidade de $\bar{w}$, $\exists\, I \subset \mathbb{N}$, finito, tal que $\psi_i|w = 0$ se $i \notin I$. Logo,

$$f|w = \sum_{j\in I} \psi_j f|w$$

e

$$\partial^{\alpha} f|w = \sum_{j\in I} \partial^{\alpha}(\psi_j f)|w .$$

Como, $K \cap \operatorname{supp}\psi_j \subset\subset D_j$ e $\psi_j f|D_j \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times D_j]$, $\forall\, j \in I$, então $\exists\, N_j \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\, \phi \in A_{N_j}^o$, $\exists\, \eta_j \in \,]0,1]$ e $c_j > 0$ tais que

$$|\partial^{\alpha}(\psi_j f)(\phi_\varepsilon, x)| \leq c_j \varepsilon^{-N_j}, \ \forall\, \varepsilon \in \,]0,\eta_j[, \forall\, x \in K \cap \operatorname{supp}\psi_j .$$

Mas

$$\psi_j f|\Omega\setminus\operatorname{supp}\psi_j = 0$$

e $\therefore$ $\quad |\partial^\alpha(\psi_j f)(\phi_\varepsilon, x)| \leq c_j\, \varepsilon^{-N_j}$, $\forall\, \varepsilon \in\,]0, \eta_j[$, $\forall\, x \in K$.

Então

$$\exists\; N = \max_{j \in I}\{N_j\} \quad \text{tal que} \quad \forall\, \phi \in A_N^o\,,\ \exists\; \eta = \min_{j \in I}\{\eta_j\}$$

e

$$c = \max_{j \in I}\{c_j\}\,.\,|I|$$

tais que

$$|\partial^\alpha f(\phi_\varepsilon, x)| \leq \sum_{j \in I} |\partial^\alpha(\psi_j f)(\phi_\varepsilon, x)| \leq \sum_{j \in I} c_j\, \varepsilon^{-N_j} \leq c\varepsilon^{-N}\,,$$

$\forall\, x \in K$, $\forall\, \varepsilon \in\,]0, \eta[$.

$\square$

<u>Observação</u> III.3.4 Vale um resultado análogo para o lema III.3.1 e observação III.3.3 para o ideal $\mathcal{N}[A_1^o \times D]$ e $\mathcal{N}[A_1^o \times \Omega\,]$ respectivamente.

III.4 Estrutura local para as funções holomorfas generalizadas (caso n = 1)

O nosso objetivo, neste parágrafo, é demonstrar o teorema III.4.1, apresentado originalmente por Colombeau (ver [C-2], [CG-1] e [A-3]). Tal teorema nos dá uma representação local para as funções holomorfas generalizadas e entre outras consequências, para essas funções, teremos o Princípio do Módulo Máximo e as fórmulas integrais de Cauchy. Além disso, será de grande utilidade na demonstração do Prolongamento Analítico.

TEOREMA III.4.1 Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e $g \in HG(\Omega)$. Então, para todo conjunto limitado V tal que $\bar{V} \subset\subset \Omega$ e que a ∂V consiste de um número finito de curvas de Jordan de classe C^1, existe um representante $\hat{g} \in E_M[A_1^o \times V]$ de $g|V$ tal que $\hat{g}(\psi,.) \in H(V)$, para todo $\psi \in A_1^o$.

Para demonstrá-lo precisamos antes de dois lemas: o 1º um resultado clássico e o 2º um lema técnico.

LEMA III.4.1 Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{C}$ tal que a $\partial\Omega$ é a reunião de um número finito de curvas de Jordan de classe C^1. Para cada $u \in C^1(\bar{\Omega})$ e $\tau \in \Omega$ se tem

$$u(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z-\tau}\,dz + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\tau}\right\}$$

Prova. Ver teorema 1.2.1, pg. 3 de [Hö].

□

LEMA III.4.2. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, $\gamma : [0,1] \to \Omega$ uma curva de Jordan de classe C^1 em Ω.

$$D = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \partial^P \quad (p = (\alpha,\beta)),$$

um operador derivação em $\mathbb{R}^2$. Então, para todo $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ e $h \in C^\infty(\Omega)$ temos que:

$$\Delta_p(h,z) = \int_\gamma Dh(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau - z} - \int_\gamma h(\tau)\,D_z\left(\frac{1}{\tau - z}\right)d\tau =$$

$$= \sum_{1 \le j \le |p|} d_j \int_o^1 D_j\left(\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}\right)(\gamma(t))\,\phi_j(t,z)\,dt ,$$

onde $D_z(\frac{1}{\tau-z})$ significa que aplicamos D à função $z \to (z-\tau)^{-1}$ e para todo $j=1,2,\ldots,|p|$ nós temos: $d_j \in \mathbb{C}$, $D_j = \partial^{p_j}$ é um operador derivação em $\mathbb{R}^2$ com $|p_j| < |p|$ e as funções $\phi_j(t,z)$ são do seguinte tipo

$$\frac{x'(t)}{[\gamma(t)-z]^r} \quad \text{ou} \quad \frac{y'(t)}{[\gamma(t)-z)^r}\ , \text{ com } r \leq |p|,$$

onde

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Prova A prova é por indução sobre o $|p|$. Vamos provar então para $|p| = 1$, ou seja, quando $p=(1,0)$ e $p=(0,1)$. Fixemos $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ e $h \in C^\infty(\Omega)$

$$\Delta_{(1,0)}(h,z) = \int_\gamma \frac{\partial h}{\partial x}(\tau)\frac{d\tau}{\tau-z} - \int_\gamma h(\tau)\ \frac{d\tau}{(\tau-z)^2}$$

e

$$\Delta_{(0,1)}(h,z) = \int_\gamma \frac{\partial h}{\partial y}(\tau)\frac{d\tau}{\tau-z} - i\int_\gamma h(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-z)^2}$$

Mas

(1) $$\frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + i\ \frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t))y'(t) =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + i(\frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t)) + i\frac{\partial h}{\partial y}(\gamma(t)))y'(t) +$$

$$+ \frac{\partial h}{\partial y}(\gamma(t))y'(t) =$$

$$= \frac{d}{dt}[h(\gamma(t))] + 2i\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))y'(t).$$

(2) $$\frac{\partial h}{\partial y}(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\partial h}{\partial y}(\gamma(t))x'(t) + i\frac{\partial h}{\partial y}(\gamma(t))y'(t) =$$

$$= i\frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) - 2i\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))x'(t) +$$

$$+ i\frac{\partial h}{\partial y}(\gamma(t))y'(t) =$$

$$= i\frac{d}{dt}[h(\gamma(t))] - 2i\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))x'(t)$$

Logo

$$\int_\gamma \frac{\partial h}{\partial x}(\tau)\frac{d\tau}{\tau - z} = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t))\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt \overset{(1)}{=}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}[h(\gamma(t))] + 2i\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))y'(t)\right)\frac{1}{\gamma(t)-z}\,dt \overset{(a)}{=}$$

$$= \int_0^1 h(\gamma(t))\frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2}\,dt +$$

$$2i\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))\frac{y'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt\,,$$

onde em (a) utilizamos integração por partes em

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}[h(\gamma(t))]\frac{1}{\gamma(t)-z}\,dt$$

e que $h(\gamma(0)) - h(\gamma(1)) = 0$ (já que γ é uma curva fechada).

Então:

$$\Delta_{(1,0)}(h,z) = 2i\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))\frac{y'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt,\ \forall z\in\Omega\setminus\gamma^*\ ,\ \forall h\in C^\infty(\Omega).$$

Analogamente

$$\Delta_{(0,1)}(h,z) = -2i\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))\frac{x'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt,\ \forall\ z\in\Omega\setminus\gamma^*,\ \forall h\in C^\infty(\Omega)$$

O que prova nossa afirmação no caso $|p|=1$. Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para todo ∂^q tal que $|q| < |p|$ e provemos para ∂^p. Fixemos $z \in \Omega\setminus\gamma^*$ e $h \in C^\infty(\Omega)$.

Tomemos $p = (p_1,p_2)$ e suponhamos que $p_1 \neq 0$, então:

$$\Delta_p(h,z) = \int_\gamma \partial^p h(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau-z} - \int_\gamma h(\tau)\,\partial_z^p\Big(\frac{1}{\tau-z}\Big)d\tau \;.$$

Mas

$$\int_\gamma \partial^p h(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau-z} = \int_\gamma \partial^{p-(1,0)}\Big(\frac{\partial h}{\partial x}\Big)(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau-z} \overset{(b)}{=}$$

$$=\Delta_{p-(1,0)}\Big(\frac{\partial h}{\partial x},z\Big) + \int_\gamma \frac{\partial h}{\partial x}(\tau)\,\partial_z^{p-(1,0)}\Big(\frac{1}{\tau-z}\Big)d\tau =$$

$$= \Delta_{p-(1,0)}\Big(\frac{\partial h}{\partial x},z\Big) + \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(\gamma(t))\,\partial_z^{p-(1,0)}\Big(\frac{1}{\gamma(t)-z}\Big)\gamma'(t)\,dt \overset{(1)}{=}$$

$$= \Delta_{p-(1,0)}\Big(\frac{\partial h}{\partial x},z\Big) + \int_0^1 \Big[\frac{d}{dt}(h(\gamma(t))) + 2i\,\frac{\partial h}{\partial \bar z}(\gamma(t))\,y'(t)\Big]\partial_z^{p-(1,0)}\Big(\frac{1}{\gamma(t)-z}\Big)dt \overset{(c)}{=}$$

$$= \Delta_{p-(1,0)}\Big(\frac{\partial h}{\partial x},z\Big) + \int_0^1 h(\gamma(t))\,\partial_z^p\Big(\frac{1}{\gamma(t)-z}\Big)\gamma'(t)\,dt +$$

$$+ 2i\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar z}(\gamma(t))\,y'(t)\,\partial_z^{p-(1,0)}\Big(\frac{1}{\gamma(t)-z}\Big)dt \;.$$

Onde em (b) utilizamos a definião de $\Delta_{p-(1,0)}$ e em (c) integração por partes em

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}[h(\gamma(t))]\,\partial_z^{p-(1,0)}\Big(\frac{1}{\gamma(t)-z}\Big)dt$$

e que

$$\frac{d}{dt}\Big[\partial_z^{p-(1,0)}\Big(\frac{1}{\gamma(t)-z}\Big)\Big] = -\partial_z^p\Big(\frac{1}{\gamma(t)-z}\Big)\gamma'(t) \;,$$

Então:

$$\Delta_p(h,z) = \Delta_{p-(1,0)}(\frac{\partial h}{\partial x},z) + 2i\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))y'(t)\partial_z^{p-(1,0)}(\frac{1}{\gamma(t)-z})dt.$$

Aplicando a hipótese de indução a $\Delta_{p-(1,0)}$ temos,

$$\Delta_p(h,z) = \sum_{j=1}^{|p|-1} d_j\int_0^1 D_j(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{\partial h}{\partial x}))(\gamma(t))\phi_j(t,z)dt +$$

$$+ \bar{d}\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) \frac{y'(t)}{(\gamma(t)-z)^{|p|}} dt ,$$

sendo que $d_j,\bar{d} \in \mathbb{C}$ e $D_j = \partial^{p_j}$, $|p_j| < |p| - 1$,

$\forall\, j \in \{1,\ldots,|p|-1\}$ e

$$\phi_j(t,z) = \frac{x'(t)}{(\gamma(t)-z)^r} \quad \text{ou} \quad \phi_j(t,z) = \frac{y'(t)}{(\gamma(t)-z)^r} ,$$

$r \leq |p| - 1$. Como

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{então } D_j \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \frac{\partial}{\partial x} = (D_j \circ \frac{\partial}{\partial x}) \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \bar{D}_j \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

onde $\bar{D}_j = D_j \circ \frac{\partial}{\partial x}$ é um operador derivação em $\mathbb{R}^2$ (se $D_j = \partial^{p_j}$, $|p_j| < |p| - 1$ então $\bar{D}_j = \partial^{p_j+(1,0)}$ com $|p_j + (1,0)| < |p|$).

Logo,

$$\Delta_p(h,z) = \sum_{j=1}^{|p|-1} d_j \int_0^1 \bar{D}_j(\frac{\partial h}{\partial \bar{z}})(\gamma(t))\phi_j(t,z)dt +$$

$$+ \bar{d}\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) \frac{y'(t)}{(\gamma(t)-z)^{|p|}} dt ,$$

o que termina a prova, se tomarmos $d_{|p|} = \bar{d}$ e

$$\phi_{|p|}(t,z) = \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^{|p|}} \quad ,$$

□

Prova do Teorema III.4.1 Podemos supor, sem perda de generalidade que ∂V é a curva de Jordan $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$.

Seja $\hat{g}_1 \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \Omega]$ um representante arbitrário de g.

Definimos

$$\hat{g}: (\psi,z) \in A_1^o \times V \to \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\hat{g}_1(\psi,\tau)}{\tau-z}\, d\tau$$

Como

$$\int_\gamma \frac{\hat{g}_1(\psi,\tau)}{\tau-z}\, d\tau = \int_o^1 \frac{\hat{g}_1(\psi,\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\, \gamma'(t)dt \quad ,$$

então por derivação sob o sinal de integração temos que $\hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{H}(V)$. Basta então demonstrar que $\hat{g}$ é um representante de $g|V$, ou seja, que

(1) $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times V]$

(2) $\hat{g} - \hat{g}_1|V \in \mathcal{N}[A_1^o \times V]$

O ítem (1) segue do exemplo III.3.3, usando que $V \subset \Omega \ \gamma^*$

Falta provar o item (2).

Dados $K \subset\subset V$ e $D = \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ um operador derivação em $\mathbb{R}^2$, temos:

1º caso: D é operador identidade.

Pelo lema III.4.1, segue que:

$$\hat{g}_1(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma \frac{\hat{g}_1(\psi,\tau)}{\tau-z}\, d\tau + \iint_V \frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}}(\psi,\tau)\, \frac{d\tau \wedge d\bar{\tau}}{\tau-z}\right\}, \ \forall \psi \in A_1^o \text{ e}$$

$\forall z \in V$.

Logo,

$$(\hat{g}_1-\hat{g})(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_V \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{\tau}}(\psi,\tau)\,\frac{d\tau \wedge d\bar{\tau}}{\tau - z}\ .$$

Como $g \in HG(\Omega)$ segue que $\dfrac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{\tau}} \in N[A_1^o \times \Omega]$ e $\therefore$ para o compacto $\bar{V}$, existe $N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que, $\forall\ q \geq N$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists \eta \in\ ]0,1]$ e $c_o > 0$ tais que

$$(*) \qquad \left|\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{\tau}}(\phi_\varepsilon,\tau)\right| \leq c_o \varepsilon^{\alpha(q)-N}\ ,\ \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[\ \text{ e } \forall\ \tau \in \bar{V}\ .$$

Se $\tau = u+iv$ então $d\tau \wedge d\bar{\tau} = -2i du \wedge dv$ e $\therefore$ de (*)

$$|(\hat{g}_1-\hat{g})(\phi_\varepsilon,z)| \leq \frac{c_o\varepsilon^{\alpha(q)-N}}{2\pi}\, 2\iint_{\bar{V}} \frac{du \wedge dv}{|\tau - z|}\ ,$$

$\forall\ z \in K$ e $\forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[$.

Mas, observe que:

$$(\Delta) \quad \sup_{z\in K} \iint_{\bar{V}} \frac{du \wedge dv}{|\tau-z|} = \sup_{z\in K} \iint_{\bar{V}-\{z\}} \frac{du \wedge dv}{|\tau|} \leq$$

$$\leq \sup_{z\in K} \iint_{\bar{V}-K} \frac{du \wedge dv}{|\tau|} =$$

$$= \iint_{\bar{V}-K} \frac{du \wedge dv}{|\tau|} = M < \infty\ ,$$

pois $\tau \mapsto \dfrac{1}{|\tau|}$ é localmente integrável. E portanto,

$$(1) \quad \sup_{z\in K} \iint_{\bar{V}} \frac{du \wedge dv}{|\tau-z|} \leq M\ .$$

Logo, provamos que existe $N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\ \eta \in\ ]0,1]$ e $c = \dfrac{c_o}{\pi} M$ tais que

$$|\hat{g}_1-\hat{g}(\phi_\varepsilon,z)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}\ , \ \forall\, z \in K \ \text{ e } \ \forall\, \varepsilon \in\ ]0,\eta[\ .$$

2º caso: D é um operador qualquer ($D = \partial^{(p_1,p_2)} = \partial^p$) .

Aplicamos o lema III.4.1 para $D\hat{g}_1(\psi,-)$, ou seja,

$$D\hat{g}_1(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{ \int_\gamma \frac{D\hat{g}_1(\psi,\tau)}{\tau-z}\,d\tau + \iint_V D\Big(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}}\Big)(\psi,\tau)\frac{d\tau\wedge d\bar{\tau}}{\tau-z}\right\},$$

$\forall \psi \in A_1^o$ e $\forall\, z \in V$.

Por derivação sob o sinal de integração temos:

$$D\hat{g}(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \hat{g}_1(\psi,\tau)D_z\Big(\frac{1}{\tau-z}\Big)d\tau$$

e portanto

$$D(\hat{g}_1-\hat{g})(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma D\hat{g}_1(\psi,\tau)\frac{d\tau}{\tau-z} - \int_\gamma \hat{g}_1(\psi,\tau)D_z\Big(\frac{1}{\tau-z}\Big)d\tau \right.$$

$$\left. +\iint_V D\Big(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}}\Big)(\psi,\tau)\frac{d\tau\wedge d\bar{\tau}}{\tau-z}\right\},$$

$\forall\ \psi \in A_1^o$ e $z \in V$.

Usando o lema III.4.2 e as notações que lá aparecem podemos escrever a igualdade anterior da forma:

$$(*) \qquad D(\hat{g}-\hat{g}_1)(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{j=1}^{|p|} d_j\int_o^1 D_j\Big(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{z}}\Big)(\psi,\gamma(t))\,\phi_j(t,z)\,dt + \right.$$

$$\left. + \iint_V D\Big(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}}\Big)(\psi,\tau)\frac{d\tau\wedge d\bar{\tau}}{\tau-z}\right\},$$

$\forall\ \psi \in A_1^o$, $\forall\, z \in V$.

Como $\dfrac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}} \in N[A_1^o \times \Omega]$ então

$\exists\ N_j \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha_j \in \Gamma$ taisque $\forall\ q \geq N_j$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\ \eta_j \in]0,1]$

e $c_j > 0$ tais que

$$|D_j(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \tau})(\phi_\varepsilon,\tau)| \leq c_j \varepsilon^{\alpha_j(q)-N_j} \quad , \forall\ \tau \in \gamma^* \quad \text{e} \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta_j[$$

e

$\exists\ \bar{N} \in \mathbb{N}^*$ e $\bar{\alpha} \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq \bar{N}$ e $\phi \in A_q^o$ $\exists\,\bar{\eta} \in]0,1]$

e $\bar{c} > 0$ tais que

$$|D(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{\tau}})(\phi,\tau)| \leq \bar{c}\,\varepsilon^{\bar{\alpha}(q)-\bar{N}} \quad , \quad \forall\ \tau \in \bar{V} \quad \text{e} \quad \varepsilon \in]0,\bar{\eta}[.$$

Então,

$$\exists\ N = \max_{1\leq j\leq|p|} \{N_j,\bar{N}\} \quad \text{e} \quad \alpha = \min_{1\leq j\leq|p|} \{\alpha_j,\bar{\alpha}\} \in \Gamma$$

taisque $\forall\ q \geq N$ e $\phi \in A_q^o$,$\exists\ \eta = \min_{1\leq j\leq|p|} \{\eta_j,\bar{\eta}\}$ e $c_o = \max_{1\leq j\leq|p|} \{c_j,\bar{c}\}$
tais que

$$(**) \quad \left\| \begin{array}{l} |D_j(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{\tau}})(\phi_\varepsilon,\tau)| \leq c_o\,\varepsilon^{\alpha(q)-N} \ , \ \forall \tau \in \gamma^* \ , \ \varepsilon \in]0,\eta[\text{ e} \\ j = 1,\ldots,|p|. \quad \text{E} \\ |D(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{\tau}})(\phi_\varepsilon,\tau)| \leq c_o\,\varepsilon^{\alpha(q)-N} \ , \ \forall\ \tau \in \bar{V} \ , \ \varepsilon \in]0,\eta[\end{array} \right.$$

De (*) e (**) temos que

$$|D(\hat{g}-\hat{g}_1)(\phi_\varepsilon,z)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{|p|} |d_j|\,c_o\,\varepsilon^{\alpha(q)-N}\int_0^1 |\phi_j(t,z)|dt +$$

$$\frac{c_o \varepsilon^{\alpha(q)-N}}{\pi} \iint_{\bar{V}} \frac{du \wedge dv}{|\tau-z|} \quad ,$$

$\forall\ z \in V$ e $\forall\ \varepsilon \in]0,\eta[.$

Como as funções ϕ_j são uniformemente limitadas em $[0,1] \times K$, $\forall\, j = 1,\dots,|p|$ segue que $\exists\, P > 0$ tal que

$$\| \phi_j \|_{[0,1]\times K} \leqq P \;, \quad \forall\, j=1,\dots,|p| \,.$$

Logo

$$\max_{\substack{1\leqq j\leqq |p| \\ z\, \in\, K}} \int_0^1 |\phi_j(t,z)|dt \leqq P < \infty$$

e

$$\sup_{z\in K} \iint_{\bar{V}} \frac{du \wedge dv}{|\tau - z|} \leqq M < \infty \quad (\text{ver}\,\Delta)$$

Em resumo, provamos que $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geqq N$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\, \eta \in\,]0,1]$ e

$$c = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{|p|} |d_j| c_o P + \frac{c_o}{\pi} M$$

tais que

$$|D(\hat{g}-\hat{g}_1)(\phi_\varepsilon,z)| \leqq c\,\varepsilon^{\alpha(q)-N} \quad , \quad \forall\, z \in K \;\text{ e }\; \forall\, \varepsilon \in\,]0,\eta[.$$

$\square$

Como uma primeira consequência do teorema III.4.1 temos a prova de existência local de primitiva para uma função holomorfa generalizada. É o que vamos provar no teorema a seguir (ver também em [CG-1] e [C-2]).

<u>TEOREMA</u> III.4.2 <u>Seja</u> $D(z_o,R)$ <u>um disco aberto em</u> $\mathbb{C}$ <u>e</u> $g \in \mathcal{H}G(D(z_o,R))$. <u>Então para todo</u> r <u>tal que</u> $0 < r < R$ <u>existe</u>

$f \in \mathcal{H}\mathcal{G}(D(z_o,r))$ <u>tal que</u> $\frac{\partial f}{\partial z} = g$

<u>Prova</u> Fixemos $0 < r < R$. Pelo teorema III.4.1, existe $\hat{g}$ representante de g no $D(z_o,r)$ tal que $\hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{H}(D(z_o,r))$, para todo $\psi \in A_1^o$. Pelo teorema 10.14 de [R] para todo $\psi \in A_1^o$, existe $\hat{f}(\psi,.) \in \mathcal{H}(D(z_o,r))$ tal que $\frac{\partial \hat{f}}{\partial z}(\psi,.) = \hat{g}(\psi,.)$ e ainda sabemos que

$$\hat{f}(\psi,z) = \int_{[z_o,z]} \hat{g}(\psi,\xi)\,d\xi \quad ,$$

onde $[z,z_o]$ denota o segmento de reta de extremos z_o e z. Então temos:

(1) $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times D(z_o,r)]$

(2) se f denota a classe de $\hat{f}$ em $\mathcal{G}(D(z_o,r))$ então $f \in \mathcal{H}\mathcal{G}(D(z_o,r))$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = g$.

De fato:

(1) Se $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$,
$t \to tz + (1-t)z_o$

então

$$\int_{[z_o,z]} \hat{g}(\psi,\xi)\,d\xi = \int_o^1 \hat{g}(\psi, tz + (1-t)z_o)\,dt(z-z_o) \quad ,$$

ou seja

$$\hat{f}(\psi,z) = \int_o^1 \hat{g}(\psi, tz + (1-t)z_o)\,dt(z-z_o) \quad ,$$

$\forall\, z \in D(z_o,r)$.

Logo, dado $K \subset\subset D(z_o,r)$, como

$$K_1 = \{tz + (1-t)z_o \mid (t,z) \in [0,1] \times K\}$$

é um compacto contido no $D(z_o,r)$, sendo $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times D(z_o,r)]$, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\, \phi \in A_N^o$, $\exists\, \eta \in \,]0,1]$ e $c_o > 0$ tais que

$$|\hat{g}(\phi_\varepsilon, tz + (1-t)z_o)| \leq c_o \varepsilon^{-N} \ , \ \forall\, \varepsilon \in \,]0,\eta[$$

e $\forall\, (t,z) \in [0,1] \times K$.

Então: existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\, \phi \in A_N^o$,$\exists\, \eta \in \,]0,1]$ e $c = c_o r$ tais que

$$|\hat{f}(\phi_\varepsilon, z)| \leq \int_o^1 |\hat{g}(\phi_\varepsilon, tz + (1-t)z_o)| dt.r \leq c\varepsilon^{-N} \ ,$$

$\forall\, \varepsilon \in \,]0,\eta[$ e $\forall\, z \in K$.

Como $\hat{f}(\psi,.) \in \mathcal{H}(D(z_o,r))$, $\forall\, \psi \in A_1^o$, o ítem 1 decorre do lema III.3.1

(2) Decorre imediatamente de $\hat{f}(\psi,.) \in \mathcal{H}(D(z_o,r))$; $\frac{\partial \hat{f}}{\partial z}(\psi,.) = \hat{g}(\psi,.)$, $\forall\, \psi \in A_1^o$ e de (1) .

$\square$

III.4.1. As Fórmulas Integrais de Cauchy e o Princípio do Módulo Máximo

Como aplicação da representação local das funções holomorfas generalizadas podemos obter fórmulas análogas às fórmulas Integrais de Cauchy para as funções holomorfas generalizadas (apresentadas por Colombeau e Galé em [CG-1]). Cabe observar aqui que estas fórmulas, no contexto das funções generalizadas, não têm a importância que têm as mesmas no caso clássico já que em virtude do Exemplo II.1, os valores pontuais não caracterizam as funções generalizadas.

TEOREMA III.4.1.1 Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{HG}(\Omega)$, $T = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \gamma_i$ um ciclo em Ω e V um conjunto aberto relativamente compacto tal que:

(1) $\bar{V} \subset \Omega$

(2) $T^* \subset V$

(3) $\text{Ind}_T(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \notin V$

(4) ∂V consiste de um número finito de curvas de Jordan de classe C^1 . Então

(I) $$g(z)\,\text{Ind}_T(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{g(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \quad , \ \forall\, z \in V \setminus T^*$$

(II) $$\int_T g(\tau)\,d\tau = 0$$

(III) Se T_1 e T_2 são dois ciclos em V tais que $\text{Ind}_{T_1}(\alpha) = \text{Ind}_{T_2}(\alpha)$ $\forall\, \alpha \notin V$, então

$$\int_{T_1} g(\tau)d\tau = \int_{T_2} g(\tau)d\tau$$

<u>Prova</u> (I) Pelo teorema III.4.1, existe um representante $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times V]$ de $g|V$ tal que $\hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{H}(V)$ para todo $\psi \in A_1^o$.

Seja

$$I_z : \psi \in A_1^o \to \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\hat{g}(\psi,\tau)}{\tau - z} d\tau \in \mathbb{C} \ , \quad \forall\ z \in V\ T^*$$

então pela definição III.2.1, temos:

(a) $$\pi(I_z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad , \quad \forall\ z \in V \setminus T^*$$

Como

$$\hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{H}(V)$$

e T é um ciclo em V satisfazendo (2) e (3), então pela fórmula integral de Cauchy, forma global, caso clássico (ver teorema 10.35, pg. 235 de [R]), temos que

(*) $$\hat{g}(\psi,z).\mathrm{Ind}_T(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\hat{g}(\psi,\tau)}{\tau - z} d\tau \quad , \quad \forall \quad z \in V\setminus T^* ,$$

$\forall\ \psi \in A_1^o$.

Por outro lado, para cada $z \in V\setminus T^*$ fixado se

$J_z : \psi \in A_1^o \to \hat{g}(\psi,z)$, então pela definição II.2 segue que

(b) $$\pi(J_z) = g(z)$$

De (*) temos que

$$J_z \mathrm{Ind}_T(z) = I_z, \text{ em } A_1^o \ , \ \forall\ z \in V\setminus T^*$$

e, portanto,

$$\mathrm{Ind}_T(z)\,\pi(J_z) = \pi(\mathrm{Ind}_T(z)J_z) = \pi(I_z),\ \forall\ z \in V\setminus T^* ,$$

ou seja

$$\mathrm{Ind}_T(z)g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{g(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \quad , \quad \forall\ z \in V\setminus T^*$$

(segue de (a) e (b)).

(II) Se $I: \psi \in A_1^o \to \int_T \hat{g}(\psi,\tau)\,d\tau$,

então pela definição III.2.1 , $\pi(I) = \int_T g(\tau)\,d\tau$. Mas

$\hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{H}(V)$

e T é um ciclo em V satisfazendo (2) e (3) e ∴ pela Fórmula Integral de Cauchy, forma global, caso clássico (ver teorema 10.35 de [R])) segue que

$$\int_T \hat{g}(\psi,\tau)\,d\tau = 0 \quad , \quad \forall\ \psi \in A_1^o$$

Logo $I = 0$ o que implica que $\int_T g(\tau)\,d\tau = 0.$

(III) É conseqüência imediata de (II).

□

<u>TEOREMA</u> III.4.1.2 <u>Seja</u> Ω <u>um aberto de</u> $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{HG}(\Omega)$, $T = \sum_{i=1}^{\nu} n_i\gamma_i$ <u>um ciclo em</u> Ω <u>e</u> V <u>um subconjunto relativamente compacto de</u> $\mathbb{C}$ <u>tal que as hipóteses</u> (1) <u>a</u> (4) <u>do teorema</u> III.4.1.1. <u>estão satisfeitas.</u> <u>Então para todo</u> $m \in \mathbb{N}^*$ <u>temos</u>

$$g^{(m)}(z)\,\mathrm{Ind}_T(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_T \frac{g(\tau)}{(\tau-z)^{m+1}}\,d\tau \quad , \quad \forall\, z \in V\sim T^*,$$

<u>onde</u>

$$g^{(m)} = \frac{\partial^m g}{\partial z^m} \quad \underline{\text{se}} \quad m \geqq 1 \quad \underline{\text{e}} \quad g^{(0)} = g\ .$$

<u>Prova</u> Tomemos $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times V]$ como no teorema III.4.1.1. Para cada $z \in V\sim T^*$ tomemos

$$I_z\colon \psi \in A_1^o \to \frac{m!}{2\pi i}\int_T \frac{\hat{g}(\psi,\tau)}{(\tau-z)^{m+1}}\,d\tau$$

e

$$J_z\colon \psi \in A_1^o \to \frac{\partial^m \hat{g}}{\partial z^m}(\psi,z)\,.$$

Então pelas definições III.2.1 e II.2, respectivamente, temos que

$$(*) \qquad \pi(I_z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_T \frac{\hat{g}(\tau)}{(\tau-z)^{m+1}}\,d\tau \qquad \text{e} \qquad \pi(J_z) = g^{(m)}(z)$$

já que, $\frac{\partial^m \hat{g}}{\partial z^m}$ é um representante de $g^{(m)}$.

Mas, como $\hat{g}(\psi,.) \in H(V)$ e T é um ciclo em V satisfazendo (2) e (3), então pela Fórmula Integral de Cauchy (corol. do teorema 10.35 de [R]) segue que

$$\frac{\partial^m \hat{g}}{\partial z^m}(\psi,z)\,\mathrm{Ind}_T(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_T \frac{\hat{g}(\psi,\tau)}{(\tau-z)^{m+1}}\,d\tau \quad , \quad \forall\, z \in V\sim T^*\ ,$$

ou seja,

$$\mathrm{Ind}_T J_z = I_z\ ,\ ,\ \text{em } A_1^o\ ,\ \forall\, z \in V\sim T^* \quad \text{e} \ \therefore \ \text{por } (*)$$

$$\mathrm{Ind}_T(z)\,g^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_T \frac{g(\tau)}{(\tau-z)^{m+1}}\,d\tau \quad , \quad \forall\, z \in V\sim T^*$$

$\square$

Apresentaremos agora a prova de uma forma do princípio do módulo máximo enunciado por Colombeau e Galé em [CG-1].

TEOREMA III.4.1.3 (Uma forma do princípio do módulo máximo). Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e $g \in \mathcal{HG}(\Omega)$, $a \in \Omega$ e $D(a,r) \subset \overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Suponhamos que g é nula numa vizinhança V da fronteira de $D(a,r)$ então g é nula em $D(a,r)$.

Prova $\exists\, r_1 > 0$ tal que $\overline{D(a,r)} \subset D(a,r_1) \subset \overline{D(a,r_1)} \subset \Omega$. Aplicamos o teorema III.4.1 para $D(a,r_1) \subset \Omega$ e determinamos $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times D(a,r_1)]$ tal que

i) $\hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{H}(D(a,r_1))$, $\forall\, \psi \in A_1^o$

e

ii) $\hat{g}$ é um representante de $g|D(a,r_1)$

Por hipótese g é nula em $V \cap D(a,r_1)$ e portanto para $\partial(D(a,r)) \subset V \cap D(a,r_1)$ e ∂^i operador derivação, $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geq N$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\, \eta \in \,]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$(*) \qquad |\partial^i \hat{g}(\phi_\varepsilon,z)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}, \ \forall\, \varepsilon \in \,]0,\eta[\,,$$

$\forall\, z \in \partial(D(a,r))$.

Mas $\partial^i \hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{H}(D(a,r_1))$, $\forall\, \psi \in A_1^o$, e $\therefore$ pelo princípio do módulo máximo temos que:

$$(**) \qquad \max_{w \in \overline{D(a,r)}} |\partial^i \hat{g}(\psi,w)| = \max_{w \in \partial(D(a,r))} |\partial^i \hat{g}(\psi,w)| \,, \quad \forall\, \psi \in A_1^o$$

Logo dados $K \subset\subset D(a,r)$ e ∂^i operador derivação $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geq N$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\, \eta \in\,]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$|\partial^i \hat{g}(\phi_\varepsilon, z)| \leq \max_{w \in \overline{D(a,r)}} |\partial^i \hat{g}(\phi_\varepsilon, w)| \overset{(**)}{=}$$

$$\max_{w \in \partial(D(a,r))} |\partial^i \hat{g}(\phi_\varepsilon, w)| \overset{(*)}{\leq} c\varepsilon^{\alpha(q)-N} ,$$

$\forall\, z \in K$ e $\forall\, \varepsilon \in\,]0,\eta[$ e $\therefore\ \hat{g} \in N[A_1^o \times D(a,r)]$

e $\therefore\ g|D(a,r) = 0$.

$\square$

III.5. Representação Local para as Funções Holomorfas Generalizadas (caso $n > 1$)

O objetivo, agora, é provar um resultado análogo ao teorema III.4.1 para as funções holomorfas generalizadas de mais de uma variável complexa. O problema foi demonstrado originalmente por Colombeau (ver [C-2], [CG-1], [A-3]) e entre outras consequências conseguiremos provar o lema de Osgood e o princípio do módulo máximo para as funções holomorfas generalizadas.

<u>TEOREMA</u> III.5.1 <u>Seja</u> Ω <u>um aberto de</u> $\mathbb{C}^n$ e, $(a_1,\ldots,a_n) \in \Omega$, $r_1,\ldots,r_n > 0$ <u>tal que o polidisco aberto</u>

$$D = D(a_1,r_1) \times \ldots \times D(a_n,r_n) \subset \bar{D} \subset\subset \Omega .$$

<u>Seja</u> $g \in HG(\Omega)$, <u>então</u> g <u>admite um representante no polidisco</u>, $\hat{g} \in E_M[A_1^o \times D]$ <u>tal que</u> $\hat{g}(\psi,.) \in H(D)$ <u>para todo</u> $\psi \in A_1^o$.

<u>Prova</u> Seja $\hat{g}_1 \in E_M[A_1^o \times \Omega]$ um representante arbitrário de g. Definimos

$$\hat{g}:\ (\psi,z) \in A_1^o \times D \rightarrow \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_o D} \frac{\hat{g}_1(\psi,\tau_1,\ldots,\tau_n)}{(\tau_1-z_1)\ldots(\tau_n-z_n)}\, d\tau_1 \ldots d\tau_n \ ,$$

onde $\partial_o D = \partial D_1 \times \ldots \times \partial D_n$, $D_i = D(a_i,r_i)$, $\forall\ i=1,\ldots,n$.

Pelo exemplo III.3.4, temos que $\hat{g} \in E_M[A_1^o \times D]$ e que $\hat{g}(\psi,.) \in H(D)$. Para provarmos que $\hat{g}$ é um representante de $g|D$, basta mostrar que

$$(1) \qquad \boxed{\hat{g} - \hat{g}_1 | A_1^o \times D \ \in N[A_1^o \times D]}$$

. . . .

(1) Dados $K \subset\subset D$ e ∂^p operador derivação, temos, pelo lema III.4.1, que

$$\partial^p \hat{g}_1(\psi,z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\partial^p \hat{g}_1(\psi,z_1,\ldots,z_{n-1},\tau_n)}{\tau_n - z_n}\, d\tau_n \ +$$

$$+ \int_{D_n} \partial^p\left(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \overline{\tau}_n}\right)(\psi,z_1,\ldots,z_{n-1},\tau_n)\ \frac{d\tau_n \wedge d\overline{\tau}_n}{\tau_n - z_n} \ ,$$

$\forall\ \psi \in A_1^o$, $\forall\ z \in D$

Aplicando, novamente, o lema III.4.1 obtemos

$$\partial^p\hat{g}_1(\psi,z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\left\{\int_{\partial D_n}\int_{\partial D_{n-1}} \frac{\partial^p\hat{g}_1(\psi,z_1,\dots,z_{n-2},\tau_{n-1},\tau_n)}{(\tau_{n-1}-z_{n-1})(\tau_n-z_n)}\, d\tau_{n-1}d\tau_n \,+\right.$$

$$\left.+\int_{\partial D_n}\left\{\int_{D_{n-1}} \partial^p\left(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}_{n-1}}\right)(\psi,z_1,\dots,z_{n-2},\tau_{n-1},\tau_n)\ \frac{d\tau_{n-1}\wedge d\bar{\tau}_{n-1}}{(\tau_{n-1}-z_{n-1})}\right\}\frac{d\tau_n}{(\tau_n-z_n)}\right\}$$

$$+\ \frac{1}{2\pi i}\int_{D_n}\partial^p\left(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}_n}\right)(\psi,z_1,\dots,z_{n-1},\tau_n)\,\frac{d\tau_n\wedge d\bar{\tau}_n}{(\tau_n-z_n)}\ .$$

Aplicando iteradamente o lema III.4.1, obtemos

$$\partial^p\hat{g}_1(\psi,z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 D}\frac{\partial^p\hat{g}_1(\psi,\tau_1,\dots,\tau_n)}{(\tau_1-z_1)\dots(\tau_n-z_n)}\,d\tau_1\dots d\tau_n \,+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2\pi i)^{k+1}}\int_{\partial D_n}\cdots\int_{\partial D_{n-(k-1)}}\int_{D_{n-k}}\frac{\partial^p\left(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}_{n-k}}\right)(\psi,z_1,\dots,z_{n-k-1},\tau_{n-k},\dots,\tau_n)}{(\tau_n-z_n)\dots(\tau_{n-k}-z_{n-k})}\,d\tau_{n-k}\wedge d\bar{\tau}_{n-k}d\tau_{n-k+1}\dots d\tau_n$$

$$+\ \frac{1}{2\pi i}\int_{D_n}\partial^p\left(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}_n}\right)(\psi,z_1,\dots,z_{n-1},\tau_n)\,\frac{d\tau_n\wedge d\bar{\tau}_n}{(\tau_n-z_n)}\quad,\quad \forall\, z=(z_1,\dots,z_n)\in D\quad e\quad \forall\psi\in A_1^o\ .$$

Por outro lado, se $p=(p_1,p_1',\dots,p_n,p_n')$ e

$$\partial^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\partial y_1^{p_1'}\dots\partial x_n^{p_n}\partial y_n^{p_n'}}$$

denotamos

$$D_{z_\nu} := \frac{\partial^{p_\nu+p_\nu'}}{\partial x_\nu^{p_\nu}\partial y_\nu^{p_\nu'}}\ ,\qquad 1\le\nu\le n\ .$$

Logo, utilizando a definição de $\int_{\partial_o D}$ e por derivação sob o sinal de integração, obtemos:

$$(*) \qquad \partial^p \hat{g}(\psi,z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_o D}\hat{g}_1(\psi,\tau_1,\ldots,\tau_n)\,\partial_z^p\Big(\frac{1}{(\tau_n-z_n)\ldots(\tau_1-z_1)}\Big)d\tau_1\ldots d\tau_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D_n} D_{z_n}\Big(\frac{1}{\tau_n-z_n}\Big)\cdots\int_{\partial D_2} D_{z_2}\Big(\frac{1}{\tau_2-z_2}\Big)\int_{\partial D_1}\hat{g}_1(\psi,\tau_1,\ldots,\tau_n)D_{z_1}\Big(\frac{1}{\tau_1-z_1}\Big)\,d\tau_1\ldots d\tau_n\,,$$

$\forall\ z = (z_1,\ldots,z_n) \in D$

Então

$$\partial^p(\hat{g}_1-\hat{g})(\psi,z_1,\ldots,z_n) = \frac{T}{(2\pi i)^n} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2\pi i)^{k+1}}\int_{\partial D_n}\!\!\cdots\int_{\partial D_{n-k+1}}\int_{D_{n-k}}\frac{\partial^p\big(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}_{n-k}}\big)(\psi,z_1,\ldots,z_{n-k-1},\tau_{n-k},\ldots,\tau_n)}{(\tau_n-z_n)\ldots(\tau_{n-k}-z_{n-k})}\,d\tau_{n-k}\wedge d\bar{\tau}_{n-k}\,d\tau_{n-k+1}\ldots d\tau_n +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{D_n}\partial^p\Big(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}_n}\Big)(\psi,z_1,\ldots,z_{n-1},\tau_n)\,\frac{d\tau_n\wedge d\bar{\tau}_n}{(\tau_n-z_n)}\ ;\quad \forall\ z\in D\ ,\quad \forall\ \psi\in A_1^o\,.$$

onde

$$T = \int_{\partial_o D}\frac{\partial^p\hat{g}_1(\psi,\tau_1,\ldots,\tau_n)}{(\tau_1-z_1)\ldots(\tau_n-z_n)}\,d\tau_1\ldots d\tau_n - (2\pi i)^n\partial^p\hat{g}(\psi,z_1,\ldots,z_n)$$

Para provarmos (1) devemos escrever T como uma soma envol vendo derivadas de $\dfrac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{\tau}_j}$.

Mas, pelo lema III.4.2 (utilizando as notações que lá aparecem), temos

$$\int_{\partial D_1} \hat{g}_1(\psi,\tau_1,\ldots,\tau_n) D_{z_1}\left(\frac{1}{\tau_1 - z_1}\right) d\tau_1 = \int_{\partial D_1} (D_{z_1}\hat{g}_1)(\psi,\tau_1,\ldots,\tau_n) \frac{d\tau_1}{\tau_1 - z_1} -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{p_1+p_1'} c_\ell^1 \int_0^1 D_\ell^1 \left(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{z}_1}\right)(\psi,\gamma_1(t),\tau_2,\ldots,\tau_n)\, \phi_\ell^1(t,z_1)\,dt$$

Então, da última igualdade, do Teorema de Fubini e do lema III.4.2 temos:

$$\int_{\partial D_2}\int_{\partial D_1} \hat{g}_1(\psi,\tau_1,\ldots,\tau_n) D_{z_1}\left(\frac{1}{\tau_1 - z_1}\right) D_{z_2}\left(\frac{1}{\tau_2 - z_2}\right) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_{\partial D_1} \frac{1}{\tau_1 - z_1} \left\{ \int_{\partial D_2} D_{z_1}\hat{g}_1(\psi,\tau_1,\ldots,\tau_n) D_{z_2}\left(\frac{1}{\tau_2 - z_2}\right) d\tau_2 \right\} d\tau_1 -$$

$$- \int_{\partial D_2} D_{z_2}\left(\frac{1}{\tau_2 - z_2}\right) \sum_{\ell=1}^{p_1+p'_1} c_\ell^1 \left\{ \int_0^1 D_\ell^1 \left(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{z}_1}\right)(\psi,\gamma_1(t),\tau_2,\ldots,\tau_n)\phi_\ell^1(t,z_1)\,dt \right\} d\tau_2 =$$

$$= \int_{\partial D_1}\int_{\partial D_2} D_{z_2} D_{z_1}\hat{g}_1(\psi,\tau_1,\ldots,\tau_n) \frac{1}{(\tau_1 - z_1)(\tau_2 - z_2)}\, d\tau_2 d\tau_1 -$$

$$- \int_{\partial D_1} \frac{1}{\tau_1 - z_1} \sum_{\ell=1}^{p_2+p_2'} c_\ell^2 \left\{ \int_0^1 D_\ell^2 D_{z_1} \left(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{z}_2}\right)(\psi,\tau_1,\gamma_2(t),\tau_2,\ldots,\tau_n)\phi_\ell^2(t,z_2)\,dt \right\} d\tau_1$$

$$-\int_{\partial D_2} D_{z_2}\left(\frac{1}{\tau_2-z_2}\right) \sum_{\ell=1}^{p_1+p_1'} c_\ell^1 \left\{\int_0^1 D_\ell^1\left(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{z}_1}\right)(\psi,\gamma_1(t),\tau_2,\dots,\tau_n)\,\phi_\ell^1(t,z_1)dt\right\} d\tau_2$$

Aplicando iteradamente o raciocínio acima e utilizando (*) obtemos:

$$(2\pi i)^n\, \partial^p \hat{g}(\psi,z_1,\dots,z_n) = \int_{\partial D_n}\!\!\dots\int_{\partial D_1} \hat{g}_1(\psi,\tau_1,\dots,\tau_n)\,\partial_z^p\left(\frac{1}{(\tau_1-z_1)\dots(\tau_n-z_n)}\right)d\tau_1\dots d\tau_n =$$

$$=\int_{\partial D_1}\!\!\dots\int_{\partial D_n} \partial^p\hat{g}_1(\psi,\tau_1,\dots,\tau_n)\,\frac{1}{(\tau_1-z_1)\dots(\tau_n-z_n)}\,d\tau_n\dots d\tau_1 -$$

$$-\int_{\partial D_1}\!\!\dots\int_{\partial D_{n-1}} \frac{1}{(\tau_{n-1}-z_{n-1})\dots(\tau_1-z_1)} \sum_{\ell=1}^{p_n+p_n'} c_\ell^n \left\{\int_0^1 D_\ell^n(D_{z_{n-1}}\dots D_{z_1})\left(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{z}_n}\right)(\psi,\tau_1,\dots,\gamma_n(t))\phi_\ell^n(t,z_n)dt.\,d\tau_1\dots d\tau_{n-1}\right. -$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\int_{\partial D_1}\!\!\dots\int_{\partial D_{j-1}}\int_{\partial D_{j+1}}\!\!\dots\int_{\partial D_n} \frac{1}{(\tau_1-z_1)\dots(\tau_{j-1}-z_{j-1})}\, D_{z_{j+1}}\left(\frac{1}{\tau_{j+1}-z_{j+1}}\right)\dots D_{z_n}\left(\frac{1}{\tau_n-z_n}\right).$$

$$\cdot\sum_{\ell=1}^{p_j+p_j'} c_\ell^j \int_0^1 D^j(D_{z_{j-1}}\dots D_{z_1})\left(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{z}_j}\right)(\psi,\tau_1,\dots,\gamma_j(t),\dots,\tau_n)\,\phi_\ell^j(t,z_j)dt\,d\tau_1\dots d\tau_{j-1}d\tau_{j+1}\dots d\tau_n -$$

$$-\int_{\partial D_2}\!\!\dots\int_{\partial D_n} D_{z_2}\left(\frac{1}{\tau_2-z_2}\right)\dots D_{z_n}\left(\frac{1}{\tau_n-z_n}\right)\sum_{\ell=1}^{p_1+p_1'} c_\ell^1 \int_0^1 D_\ell^1\left(\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{z}_1}\right)(\psi,\gamma_1(t),\tau_2,\dots,\tau_n)\,\phi_\ell^1(t,z_1)dt\,d\tau_2\dots d\tau_n,$$

$\forall\ z = (z_1,\dots,z_n) \in D$, onde

$$\gamma_j:\ t \in [0,1] \longrightarrow a_j + r_j e^{2\pi i t} = x_j(t) + i y_j(t) \in \mathbb{C}\quad ,$$

D_ℓ^j é um operador derivação em $\mathbb{R}^2$ (nas variáveis x_j e y_j) $c_\ell^j \in \mathbb{C}$ e $\phi_\ell^j(t,z_j)$ são funções de um dos seguintes tipos

$$\frac{x_j^{\ell}(t)}{[\gamma_j(t)-z_j]^{s_j}} \quad \text{ou} \quad \frac{y_j^{\ell}(t)}{[\gamma_j(t)-z_j]^{s_j}} \qquad \text{com } s_j \leq p_j+p_j' \;,$$

$\forall\, \ell = 1,\ldots,p_j+p_j'$, $\forall\, j = 1,\ldots,n$.

Usando a definição de T podemos escrever

$$\partial^P(\hat{g}_1|D - \hat{g})(\psi,z_1,\ldots,z_n) \;, \quad \forall\, \psi \in A_1^o \;, \forall\, z \in D \;,$$

da seguinte maneira:

$$\partial^P(\hat{g}_1|D-\hat{g})(\psi,z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial D_1}\cdots\widehat{\int_{\partial D_j}}\cdots\int_{\partial D_n}\frac{1}{(\tau_1-z_1)\ldots(\tau_{j-1}-z_{j-1})}\,\cdot\right.$$

$$\cdot D_{z_{j+1}}\left(\frac{1}{\tau_{j+1}-z_{j+1}}\right)\ldots D_{z_n}\left(\frac{1}{\tau_n-z_n}\right)\sum_{\ell=1}^{p_j+p_j'}c_\ell^1\int_0^1 D_\ell^j(D_{z_{j-1}}\ldots D_{z_1})\left(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{z}_j}\right)(\psi,\tau_1,\ldots,\gamma_j(t),\ldots,\tau_n)\,\cdot$$

$$\cdot\,\phi_\ell^j(t,z_j)\,dt\,d\tau_1\ldots\widehat{d\tau_j}\ldots d\tau_n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2\pi i)^{k+1}}\int_{\partial D_n}\cdots\int_{D_{n-k+1}}\cdots\int_{D_{n-k}}\frac{\partial^P\left(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}_{n-k}}\right)(\psi,z_1,\ldots,z_{n-k-1},\tau_{n-k},\ldots,\tau_n)}{(\tau_n-z_n)\ldots(\tau_{n-k}-z_{n-k})}\,d\tau_{n-k}\wedge d\bar{\tau}_{n-k}\,d\tau_{n-k+1}\ldots d\tau_n$$

Onde $\hat{}$ sobre os símbolos $\int$ e $d\tau$ significa que tais termos foram retirados.

Para o compacto dado seja $K_k = \pi_k(K) \subset D_k$. Como

(a) $\quad D_\ell^j(D_{z_{j-1}}\ldots D_{z_1})\left(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{z}_j}\right) \in N[A_1^o \times \Omega]$, $\forall\, j=1,\ldots,n$, $\forall\, \ell=1,\ldots,p_j+p_j'$

$\exists\, N_\ell^j \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha_\ell^j \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geq N_\ell^j$ e $\forall\, \phi \in A_q^o$ $\exists\, \eta_\ell^j \in\,]0,1]$ e $c_\ell'^j > 0$ tais que

$$|D_\ell^j(D_{z_{j-1}}\ldots D_{z_1})(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{z}_j})(\phi_\varepsilon,\tau)| \leq c'^{j}_\ell\, \varepsilon^{\alpha_\ell^j(q)-N_\ell^j} \quad, \forall\varepsilon\in]0,\eta_\ell^j[$$

e $\forall\ \tau \in \partial_o D$.

(b) $$\partial^p(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}_{n-k}}) \in N[A_1^o \times \Omega] \quad , \quad \forall\ k=0,\ldots,n-1.$$

então $\exists\ \bar{N}_k$ e $\bar{\alpha}_k \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq \bar{N}_k$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\ \bar{\eta}_k \in\ ]0,1]$ e $\bar{c}_k > 0$ tais que

$$|\partial^p(\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{\tau}_{n-k}})(\phi_\varepsilon, z_1,\ldots,z_{n-k-1},\tau_{n-k},\ldots,\tau_n)| \leq \bar{c}_k\, \varepsilon^{\bar{\alpha}_k(q)-\bar{N}_k} \quad ,$$

$$\forall\ \varepsilon \in\ ]0,\bar{\eta}_k[\ \text{ e } \ \forall\ (z_1,\ldots,z_{n-k-1},\tau_{n-k},\ldots,\tau_n) \in K_1\times\ldots\times K_{n-k-1}\times\bar{D}_{n-k}\times\partial D_{n-k+1}\times\ldots\times\partial D_n$$

Logo

$$\exists\ N = \max\{N_\ell^j,\bar{N}_k \mid 1\leq j\leq n;\ 1\leq\ell\leq p_j+p'_j;\ 0\leq k\leq n-1\}$$

e

$$\alpha = \min\{\alpha_\ell^j,\bar{\alpha}_k \mid 1\leq j\leq n;\ 1\leq\ell\leq p_j+p'_j;\ 0\leq k\leq n-1\} \in \Gamma$$

tais que $\forall\phi \in A_q^o$,

$$\exists\ \eta = \min\{\eta_\ell^j,\bar{\eta}_k \mid 1\leq j\leq n;\ 1\leq\ell\leq p_j+p'_j;\ 0\leq k\leq n-1\}$$

e $c > 0$ (que será determinado abaixo) tais que

$$\left|\partial^p(\hat{g}-\hat{g}_1)(\phi_\varepsilon,z_1,\dots,z_n)\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{j=1}^{n}\sup_{(\tau_i,z_i)\in\partial D_i\times K_i}\left|\frac{1}{(\tau_1-z_1)\dots(\tau_{j-1}-z_{j-1})}D_{z_{j+1}}\left(\frac{1}{\tau_{j+1}-z_{j+1}}\right)\dots D_{z_n}\left(\frac{1}{\tau_n-z_n}\right)\right|.$$

$$\cdot\sum_{\ell=1}^{p_j+p_j'}|c_\ell^j|\,|c_\ell'^{\,j}|\,\varepsilon^{\alpha(q)-N}\sup_{(t,z_j)\in[0,1]\times K_j}|\phi_\ell^j(t,z_j)|\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}L(\partial D_i)\;+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2\pi)^{k+1}}\,\bar{c}_k\,\varepsilon^{\alpha(q)-N}\sup_{(\tau_i,z_i)\in\partial D_i\times K_i}\left|\frac{1}{(\tau_n-z_n)\dots(\tau_{n-k+1}-z_{n-k+1})}\right|\sup_{z_{n-k}\in K_{n-k}}\int_{\bar{D}_{n-k}}\frac{d\tau_{n-k}\wedge d\bar{\tau}_{n-k}}{|\tau_{n-k}-z_{n-k}|}\prod_{\ell=n-k+1}^{n}L(\partial D_\ell) =$$

$$=\Big(\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{j=1}^{n}\sup_{(\tau_i,z_i)\in\partial D_i\times K_i}\left|\frac{1}{(\tau_1-z_1)\dots(\tau_{j-1}-z_{j-1})}D_{z_{j+1}}\left(\frac{1}{\tau_{j+1}-z_{j+1}}\right)\dots D_{z_n}\left(\frac{1}{\tau_n-z_n}\right)\right|.$$

$$\cdot\sum_{\ell=1}^{p_j+p_j'}|c_\ell^j|\,|c_\ell'^{\,j}|\sup_{(t,z_j)\in[0,1]\times K_j}|\phi_\ell^j(t,z_j)|\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}L(\partial D_i)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2\pi)^{k+1}}\,\bar{c}_k\prod_{\ell=n-k+1}^{n}L(\partial D_\ell).$$

$$\cdot\sup_{(\tau_i,z_i)\in\partial D_i\times K_i}\left|\frac{1}{(\tau_n-z_n)\dots(\tau_{n-k+1}-z_{n-k+1})}\right|\sup_{z_{n-k}\in K_{n-k}}\int_{\bar{D}_{n-k}}\frac{d\tau_{n-k}\wedge d\bar{\tau}_{n-k}}{|\tau_{n-k}-z_{n-k}|}\Big)\varepsilon^{\alpha(q)-N}$$

$\forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[$, $\forall\ z \in K$, onde c é o número entre parênteses, observando que

$$\sup_{z_{n-k}\in K_{n-k}}\int_{D_{n-k}}\frac{d\tau_{n-k}\wedge d\bar{\tau}_{n-k}}{|\tau_{n-k}-z_{n-k}|} < \infty$$

pela obs (Δ) do teorema III.4.1

$\square$

III.5.1 O Lema de Osgood e o Princípio do Módulo Máximo

Como no caso 1, tendo provado o teorema da representação local para funções holomorfas generalizadas de mais de uma variável, podemos tirar como consequências o Lema de Osgood e uma formulação do princípio do Módulo Máximo.

<u>TEOREMA</u> III.5.1.1 <u>Seja</u> Ω <u>um aberto de</u> $\mathbb{C}^n$, D <u>um polidisco aberto tal que</u> $\bar{D} \subset\subset \Omega$ e $g \in \mathcal{HG}(\Omega)$. <u>Então</u>

$$g(z) = g(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{g(\tau_1,\ldots,\tau_n)}{(\tau_1-z_1)\ldots(\tau_n-z_n)} d\tau_1 \ldots d\tau_n,$$

$\forall\ (z_1,\ldots,z_n) = z \in D$.

<u>Prova</u>: Seja D' um polidisco tal que $\bar{D} \subset D' \subset \overline{D'} \subset\subset \Omega$, então pelo teorema III.5.1 existe um representante $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times D']$ de $g|D'$ tal que $\hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{H}(D')$ para todo $\psi \in A_1^o$.

Fixemos $z \in D$. Se

$$I_z : \psi \in A_1^o \to \int_{\partial_0 D} \frac{\hat{g}(\psi,\tau_1,\ldots,\tau_n)}{(\tau_1-z_1)\ldots(\tau_n-z_n)} d\tau_1 \ldots d\tau_n \in \mathbb{C}$$

então pela definição III.2.1, temos:

$$\pi(I_z) = \int_{\partial_0 D} \frac{g(\tau_1,\ldots,\tau_n)}{(\tau_1-z_1)\ldots(\tau_n-z_n)} d\tau_1 \ldots d\tau_n .$$

Por outro lado, se

$$J_z : \psi \in A_1^o \to \hat{g}(\psi, z) \quad , \text{ pela definição II.2}$$

$$\pi(J_z) = g(z)$$

Mas $\hat{g}(\psi,.) \in H(D')$, $\forall\ \psi \in A_1^o$ e $\partial D \subset D'$, então pelo Lema de Osgood clássico, (ver teorema 2.2.1, pg. 26 de [Hö]), temos que:

$$\hat{g}(\psi, z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_o D} \frac{\hat{g}(\psi, \tau_1, \dots, \tau_n)}{(\tau_1 - z_1) \dots (\tau_n - z_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \ ,$$

$\forall\ z \in D$, $\forall\ \psi \in A_1^o$, ou seja, em A_1^o ,

$$J_z = \frac{1}{(2\pi i)^n} I_z \ , \quad \forall\ z \in D \ .$$

Então

$$g(z) = \pi(J_z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \pi(I_z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_o D} \frac{g(\tau_1, \dots, \tau_n)}{(\tau_1 - z_1) \dots (\tau_n - z_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \ .$$

$\square$

<u>TEOREMA</u> III 5.1.2 <u>Seja</u> Ω , D <u>e</u> g <u>como no teorema</u> III.5.1.1 <u>Então para todo</u> $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ <u>temos</u>

$$g^{(\alpha)}(z_1, \dots, z_n) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_o D} \frac{g(\tau_1, \dots, \tau_n)}{(\tau_1 - z_1)^{\alpha_1 + 1} \dots (\tau_n - z_n)^{\alpha_n + 1}} d\tau_1 \dots d\tau_n \ , \quad \forall\ z \in D$$

<u>Prova</u> É análoga ao teorema anterior utilizando o Lema de Osgood clássico para as derivadas.

$\square$

<u>TEOREMA</u> III.5.1.3 <u>Seja</u> Ω <u>um aberto de</u> $\mathbb{C}$ <u>e</u> $g \in \mathcal{HG}(\Omega)$. <u>Suponhamos que</u> $D = D_1 \times \ldots \times D_n$ <u>é um polidisco aberto e limitado de</u> Ω <u>tal que</u> $\bar{D} \subset \Omega$ <u>e que</u> g <u>é nula numa vizinhança</u> V <u>de</u> $\partial_0 D = \partial D_1 \times \ldots \times \partial D_n$, <u>então</u> g <u>é nula em</u> D.

<u>Prova</u> Seja $D' = D'_1 \times \ldots \times D'_n$ um polidisco aberto tal que $D \subset \bar{D} \subset D' \subset \overline{D'} \subset\subset \Omega$. Pelo teorema III.5.1 existe $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times D']$, representante de $g|D'$, tal que $\hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{H}(D')$, $\forall\ \psi \in A_1^o$. Dados $K \subset\subset D$ e ∂^β operador derivação como

$$\hat{g}|V \cap D' = 0,$$

ou seja

$$\hat{g} \in \mathcal{N}[A_1^o \times V \cap D']$$

e como $\partial D \subset\subset V \cap D'$, $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\phi \in A_q^o$, $\exists\ \eta \in\ ]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$(*) \qquad |\partial^\beta \hat{g}(\phi_\varepsilon, x)| \leq c\, \varepsilon^{\alpha(q)-N}, \quad \forall\ x \in \partial D \text{ e } \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[.$$

Fixemos $x_i \in \partial D_i$, $\forall\ i = 1,\ldots,n-1$. Como $\partial^\beta \hat{g}(\phi, x_1,\ldots,x_{n-1},-) \in \mathcal{H}(D'_n)$ $\forall\ \phi \in A_1^o$, então pelo princípio do módulo máximo clássico

$$\max_{x_n \in \bar{D}_n} |\partial^\beta \hat{g}(\phi_\varepsilon, x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)| = \max_{x_n \in \partial D_n} |\partial^\beta \hat{g}(\phi_\varepsilon, x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)| \overset{(*)}{\leq} c\varepsilon^{\alpha(q)-N}, \ \forall\, \varepsilon \in\ ]0,\eta[$$

Então, $\forall\ x_i \in \partial D_i$, $i = 1,\ldots,n-1$ e $x_n \in \bar{D}_n$,

$$(**)\qquad \partial^{\beta}\hat{g}(\phi_{\varepsilon},x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)| \leq c\,\varepsilon^{\alpha(q)-N} \;,\; \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[$$

Fixando $x_i \in \partial D_i$, $i=1,\ldots,n-2$ e $x_n \in \bar{D}_n$, temos que

$$\partial^{\beta}\hat{g}(\phi,x_1,\ldots,n-2,-,x_n) \in H(D'_{n-1}) \qquad \forall\ \phi \in A_1^{o} \;;\; \text{e} \therefore$$

pelo P.M.M segue que

$$\max_{x_{n-1}\in\bar{D}_{n-1}} |\partial^{\beta}\hat{g}(\phi_{\varepsilon},x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1},x_n)| = \max_{x_{n-1}\in\partial D_{n-1}} |\partial^{\beta}\hat{g}(\phi_{\varepsilon},x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)| \overset{(**)}{\leq} c\varepsilon^{\alpha(q)-N},$$

$\forall\ \varepsilon \in]0,\eta[$.

Então, $\forall\ x_i \in \partial D_i$, $i \in \{1,\ldots,n-2\}$ e $x_j \in \bar{D}_j$, $\forall\ j \in \{n-1,n\}$

temos,

$$|\partial^{\beta}\hat{g}(\phi_{\varepsilon},x_1,\ldots,x_n)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \quad , \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[.$$

Repetindo iteradamente o processo, obtemos:

$$|\partial^{\beta}\hat{g}(\phi_{\varepsilon},x_1,\ldots,x_n)| \leq c\,\varepsilon^{\alpha(q)-N} \;,\; \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[$$

e $\forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in \bar{D}$.

Em particular, $\forall\ K \subset\subset D$, $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\phi \in A_q^{o}$, $\exists\ \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ de tal modo que

$$|\partial^{\beta}\hat{g}(\phi_{\varepsilon},x_1,\ldots,x_n)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N} \;,\; \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[,$$

$\forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in K$, ou seja $\hat{g} \in N[A_1^{o} \times D]$ o que implica que $g|D = 0$.

□

<u>Observação</u> III.6.1.1 O Lema de Osgood generalizado não tem a mesma importância que o clássico já que os valores pontuais não caracterizam as funções generalizadas.

III.6 Prolongamento Analítico

Muitas das formulações do princípio do prolongamento analítico não são verdadeiras para as funções holomorfas generalizadas. No entanto, provaremos uma formulação que para o caso $n > 1$ nos permitirá mostrar o Teorema de Extensão de Hartogs para as funções holomorfas generalizadas.

Começaremos o parágrafo com os contra-exemplos.

<u>EXEMPLO</u> III.6.1 ([CG-1] e [C-2]).

Classicamente temos o Teorema de Riemann: "Se f é uma função em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que é holomorfa em $\Omega - \{p\}$, sendo p um ponto de Ω, e f é limitada em Ω, então f é holomorfa em Ω.

No caso generalizado daremos o exemplo de uma função generalizada $g \in \mathcal{G}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{HG}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ tal que $g|\mathbb{C}\setminus\{0\} = 0$ mas $g \notin \mathcal{HG}(\mathbb{C})$.

Definimos $\hat{g}\colon (\psi,z) \in A_1^o \times \mathbb{C} \to |\psi(0)|^2 e^{-|\psi(0)|^2|z|^2} \in \mathbb{C}$, então

(1) $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \mathbb{C}]$.

De fato, dados $K \subset\subset \mathbb{C}$ e ∂^i operador derivação temos,

1º caso: ∂^i operador identidade

$$\exists\ N = 4 \text{ tal que } \forall\ \psi \in A_4^o\ \exists\ \eta = 1 \quad \text{e } c > |\psi(0)|^2 \geq 0$$

tais que

$$|\hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| \leq |\psi_\varepsilon(0)|^2 = \frac{1}{\varepsilon^4} |\psi(0)|^2 \leq c\,\varepsilon^{-4} \quad , \forall\ z \in K$$

e $\forall\ \varepsilon \in\ ]0,1[$.

2º caso: ∂^i operador qualquer

$$\exists\ N = 4(1+|i|) \text{ tal que } \forall\ \psi \in A_N^o \quad , \exists\ \eta = 1 \quad \text{e}$$

$c > c_o|\psi(0)|^2 \geq 0$ (sendo que c_o vamos determinar abaixo) tais que

$$|\partial^i \hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| = \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4} \left|\partial^i\left(e^{-|\psi(0)|^2 \varepsilon^{-4} |z|^2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4}\ e^{-|\psi(0)|^2 \varepsilon^{-4} |z|^2} \cdot \frac{P(|x|,|y|)}{\varepsilon^{4|i|}}$$

$$\leq \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^{4(1+|i|)}}\, c_o \leq c\varepsilon^{-N} \quad , \quad \forall\ \varepsilon \in\ ]0,1[$$

e $\forall\ z \in K$, onde

$$c_o = \max_{z=x+iy \in K} |P(|x|,|y|)| \ ,$$

sendo P o polinômio determinado acima.

Tomamos $g \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$ como sendo a classe de $\hat{g}$.

(2) $g|C\setminus\{0\} = 0$. De fato, dados $K \subset\subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ e ∂^i operador de-rivação,

1º caso: ∂^i operador identidade

$\exists\ N = 1$ e $\alpha \in \Gamma \left(\begin{matrix}\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \\ q \to q\end{matrix}\right)$ tais que $\forall\ q \geq 1$ e

$\psi \in A_q^o$, temos

$$(*) \qquad |\hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| \leq \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4}\, e^{-d^2\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4}},$$

onde $d = \text{dist}(K,\{0\}) > 0$, $\forall\ z \in K$, $\forall\ \varepsilon \in]0,1[$.

Como $$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^q}\left(\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4}\, e^{-d^2\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4}}\right) = 0,$$

Então por (*) $\frac{1}{\varepsilon^q}|\hat{g}(\phi_\varepsilon, z)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, uniformemente sobre K, em par-tiular, $\exists\, \eta \in]0,1]$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon^q}|\hat{g}(\phi_\varepsilon, z)| \leq 1, \quad \forall\ \varepsilon \in]0,\eta[\ \text{ e } \ \forall\ z \in K.$$

Então provamos que: $\exists\ N = 1$ e $\alpha \in \Gamma\left(\begin{matrix}\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \\ q \to q\end{matrix}\right)$ tais que

$\forall\ q \geq 1$ e $\psi \in A_q^o$, $\exists\ \eta \in]0,1]$ e $c = 1$ tais que

$$|\hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| \leq \varepsilon^q \leq \varepsilon^q.\varepsilon^{-1} = c\,\varepsilon^{\alpha(q)-N}.$$

2º caso: ∂^i operador derivação qualquer

$\exists\ N = 1$ e $\alpha \in \Gamma\left(\begin{matrix}\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \\ q \to q\end{matrix}\right)$ tais que $\forall\ q \geq 1$ e

$\psi \in A_q^o$, temos

$$(**)\qquad |\partial^i \hat{g}(\psi_\varepsilon,z)| = \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4} |\partial^i(e^{-|\psi(0)|^2 \frac{|z|^2}{\varepsilon^4}})| \leq \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4} e^{-|\psi(0)|^2 \frac{|z|^2}{\varepsilon^4}} \frac{P(|x|,|y|)}{\varepsilon^{4|i|}}$$
$$\leq \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^{4(1+|i|)}} c_o \cdot e^{-|\psi(0)|^2 \frac{|d|^2}{\varepsilon^4}} ,$$

$\forall\ z \in K$ e $\varepsilon \in]0,1[$, onde P e c_o são como em (1) e d é definido em (*).

Como $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^q} \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^{4(|i|+1)}} c_o e^{-|\psi(0)|^2 \frac{d^2}{\varepsilon^4}} = 0$, então por (**)

$$\frac{1}{\varepsilon^q} |\partial^i \hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad , \text{ uniformemente sobre K.}$$

Daí em diante a demonstração é a mesma que foi feita no 1º caso.

Em particular provamos que $g \in \mathcal{H}\mathcal{G}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$.

(3) $\quad g \notin \mathcal{H}\mathcal{G}(\mathbb{C})$ (e $\therefore$ $g \neq 0$ em $\mathbb{C}$).

Temos que,

$$\bar{\partial}\hat{g}(\psi,z) = -|\psi(0)|^4 z e^{-|\psi(0)|^2|z|^2} \quad , \forall\ (\psi,z) \in A_1^o \times \mathbb{C} .$$

Vamos provar que $\bar{\partial}\hat{g} \notin \mathcal{N}[A_1^o \times \mathbb{C}]$. Suponhamos por absurdo que $\bar{\partial}\hat{g} \in \mathcal{N}[A_1^o \times \mathbb{C}]$. Então para o compacto $K = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$, $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\psi \in A_q^o$ $\exists\ \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tais que

(*) $\qquad |\bar{\partial}\hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| \leq c\,\varepsilon^{\alpha(q)-N}$, $\forall\, z \in K$ e $\forall \in]0,\eta[$.

Mas

$$|\bar{\partial}\hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| = \frac{|\psi(0)|^4}{\varepsilon^8}\,|z|\,e^{-|\psi(0)|^2 \cdot \frac{|z|^2}{\varepsilon^4}} .$$

Logo, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{\frac{1}{n}} < \eta$, temos

$$|\bar{\partial}\hat{g}(\psi_{\sqrt{\frac{1}{n}}}, \tfrac{1}{n})| \overset{(=)}{} |\psi(0)|^4 n^3 e^{-|\psi(0)|^2} \overset{(*)}{\leq} c(\tfrac{1}{\sqrt{n}})^{\alpha(q)-N}$$

e $\therefore\ n^3(\sqrt{n})^{\alpha(q)-N}|\psi(0)|^4 \leq c e^{|\psi(0)|^2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\eta\sqrt{n} > 1$.

Tomemos então $q \geq N$ tal que $\alpha(q) > N$ (existe, pois $\alpha(q) \xrightarrow[q\to\infty]{} \infty$) e $\psi \in A_q^o$ tal que $\psi(0) = 1$ (ver lema II.2). Assim sendo, para tal $\psi \in A_q^o$, $\exists\ \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tais que $n^3(\sqrt{n})^{\alpha(q)-N} \leq ce$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\eta\sqrt{n} > 1$ e $\therefore$ fazendo $n \to +\infty$ temos, então, um absurdo.

$\square$

<u>EXEMPLO</u> III.6.2 ([CG-1] e [C-2]).

Para as funções holomorfas temos o seguinte resultado: Se f é uma função holomorfa em um aberto conexo Ω e $z_o \in \Omega$ é tal que $f^{(n)}(z_o) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então $f = 0$ em Ω.

Para as funções holomorfas generalizadas não temos tal resultado: construiremos uma função holomorfa generalizada g em $D(0,r)$, $r > 1$, tal que $g^{(n)}(0) = 0 \in \bar{\mathbb{C}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $g \neq 0$.

Definimos

$$\hat{g}: (\psi,z) \in A_1^o \times D(0,r) \to |\psi(0)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{r^n}}}{r^n} z^n \in \mathbb{C} .$$

É imediato verificar que $\hat{g}$ está bem definida, já que

$$\left| \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{r^n}}}{r^n} . z^n \right| \leq \left|\frac{z}{r}\right|^n$$

e $\therefore$ a série é convergente e que $\hat{g}(\psi,.) \in H(D(0,r))$, $\forall\ \psi \in A_1^o$.

Valem ainda as seguintes afirmações:

(1) $\hat{g} \in E_M[A_1^o \times D(0,r)]$. De fato, dado $K \subset\subset D(0,r)$

$\exists\ N = 4$ tal que $\forall\ \psi \in A_N^o$, $\exists\ n=1$ e $c > |\psi(0)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{M}{r})^n$,

(onde $M = \max_{z \in K} |z| < r$) tal que

$$|\hat{g}(\psi_\varepsilon,z)| = \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{r^n \varepsilon^4}}}{r^n} z^n \right| \leq \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{r^n}$$

$$\leq \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{M}{r})^n \leq c\varepsilon^{-4} , \quad \forall\ z \in K ,$$

$\forall\ \varepsilon \in]0,1[$.

Utilizamos, agora, lema III.3.1 para concluirmos que $g \in E_M[A_1^o \times D(0,r)]$.

Definimos g como sendo a classe de $\hat{g}$.

(2) $g^{(n)}(0) = 0 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Considere

$$I: \psi \in A_1^o \to n!\,|\psi(0)|^2 \, \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{r^n}}}{r^n} = \hat{g}^{(n)}(\psi,0) \in \mathbb{C}$$

Temos que mostrar que $I \in \mathcal{I}$.

Observe que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^q} \left(n!\, \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4} \, \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4 r^n}}}{r^n} \right) = 0 \quad , \quad \forall\, q \in \mathbb{N}$$

e $\forall\, \psi \in A_1^o$. Em particular, $\forall\, q \geq 1$ e $\psi \in A_q^o$ $\exists\, \eta \in \,]0,1]$ tal que

$$n!\,\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4} \cdot \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4 r^n}}}{r^n} \leq \varepsilon^q \quad , \quad \forall\, \varepsilon \in \,]0,\eta[\; .$$

Então $\exists\, N = 1$ e $\alpha \in \left(\begin{array}{c} \alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \\ q \to q \end{array} \right)$ tais que $\forall\, q \geq N$ e $\forall\, \psi \in A_q^o$ $\exists\, \eta \in \,]0,1]$ e $c=1$ tais que

$$|I(\psi_\varepsilon)| \leq \varepsilon^q \leq \varepsilon^{q-1} = c\varepsilon^{\alpha(q)-1} \quad , \quad \forall\, \varepsilon \in \,]0,\eta[.$$

(3) $g \neq 0$. Vamos mostrar que $g(1) \neq 0$ em $\bar{\mathbb{C}}$. Suponhamos, por absurdo, que $g(1) = 0$ em $\bar{\mathbb{C}}$, ou seja, se

$$I: \psi \in A_1^o \to \hat{g}(\psi,1) = |\psi(0)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{r^n}}}{r^n}$$

então $I \in \mathcal{I}$.

Logo, $\exists$ $N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geq N$ e $\forall \psi \in A^o_q$, $\exists\, \eta \in\,]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$|I(\psi_\varepsilon)| = \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4 r^n}}}{r^n} \leq c\,\varepsilon^{\alpha(q)-N},$$

$\forall\ \varepsilon \in\,]0,\eta[$.

Então, $\forall\, p \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[4]{\frac{1}{r^p}} < \eta$, temos que

$$|I(\psi_{\sqrt[4]{\frac{1}{r^p}}})| = |\psi(0)|^2 r^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{r^n} r^p}}{r^n} \leq c\left(\sqrt[4]{\frac{1}{r^p}}\right)^{\alpha(q)-N}.$$

De

$$r^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{r^n} r^p}}{r^n} \geq e^{-|\psi(0)|^2}, \quad \forall\, p \in \mathbb{N},$$

segue que

$$|\psi(0)|^2 e^{-|\psi(0)|^2} \leq c\,\frac{1}{r^{\frac{p}{4}(\alpha(q)-N)}}, \quad \forall\, p \text{ tal que } \sqrt[4]{\frac{1}{r^p}} < \eta.$$

Tomemos $q \geq N$ tal que $\alpha(q)-N > 0$ (existe, já que $\alpha(q) \xrightarrow[q\to\infty]{} \infty$) e $\psi \in A^o_q$ com $\psi(0) = 1$ (ver lema II.2). Logo, para tal $\psi \in A^o_q$ $\exists\, \eta \in\,]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$e^{-1} \leq c\,\frac{1}{r^{\frac{p}{4}(\alpha(q)-N)}}, \quad \forall\, p \text{ tal que } \sqrt[4]{\frac{1}{r^p}} < \eta$$

Fazendo $p \to \infty$ temos um absurdo.

$\square$

EXEMPLO III.6.3 ([CG-1] e [C-2])

Classicamente temos o seguinte resultado: Se f é uma função holomorfa em um aberto conexo Ω e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência com ponto de acumulação em Ω tal que $g(x_n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, então g é nula em Ω .

No entanto, exibiremos $g \in \mathcal{HG}(\mathbb{C})$ não nula tal que $g(1-\frac{1}{n}) = 0$ em $\bar{\mathbb{C}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Coloquemos $x_n = 1-\frac{1}{n}$ e definamos para cada $n \in \mathbb{N}^*$

$$\beta_n(z) = \frac{(z-x_2)\dots(z-x_n)}{(1-x_2)\dots(1-x_n)}z \quad , \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ , se } n \geqq 2$$

e $\quad \beta_1(z) = z$

É claro que β_n é uma função inteira, $\beta_n(1) = 1$ e que $x_2,\dots,x_n$ são zeros de ordem 1 de β_n , $\forall\, n \geqq 2$.

Seja

$$\hat{g}: (\psi,z) \in A_1^o \times \mathbb{C} \to |\psi(0)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(z) \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{(n!)^2}}}{(n!)^2} z^n \in \mathbb{C}$$

(1) $\hat{g}$ está bem definida, ou seja, para cada ψ fixada a série é convergente para todo $z \in \mathbb{C}$, e $\hat{g}(\psi,-) \in H(\mathbb{C})$, $\forall\, \psi \in A_1^o$.

De fato, fixemos $\psi \in A_1^o$, como

$$|\beta_n(z)| = \frac{|z-x_2|\dots|z-x_n|}{|1-x_2|\dots|1-x_n|}|z| \ , \ \forall\, z \in \mathbb{C} \ ,$$

então é claro que $|\beta_n(z)| \leqq n!(|z|+1)^{n-1}|z|$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Logo, $\forall\, K \subset\subset \mathbb{C}$, se $M = \max\limits_{z\in K}|z|$, segue que

$$(*) \qquad |\beta_n(z)| \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{(n!)^2}}}{(n!)^2}|z|^n \leqq \frac{n!(|z|+1)^{n-1}|z|^{n+1}}{(n!)^2} \leqq \frac{(M+1)^{2n}}{n!} = \frac{((M+1)^2)^n}{n!}$$

$\forall\, z \in K$. Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((M+1)^2)^n}{n!}$ é convergente, então, pela desigualdade (*) temos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(z) \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{(n!)^2}}}{(n!)^2} z^n$$

é uniformemente convergente sobre todo compacto de $\mathbb{C}$ e portanto a série é convergente $\forall\, z \in \mathbb{C}$ e pelo teorema de Wierstrass temos que $\hat{g}(\psi,.)$ é holomorfa em $\mathbb{C}$.

(2) $\hat{g} \in E_M[A_1^o \times \mathbb{C}]$. De fato, dado $K \subset\subset \mathbb{C}$,

denotamos por $\quad M := \max\limits_{z \in K} |z| \quad$, então

$\exists\ N = 4$ tal que $\forall\ \psi \in A_N^o$, $\exists\ \eta = 1$ e $c > |\psi(0)|^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(M+1)^{2n}}{n!}$

tais que

$$|\hat{g}(\psi_\varepsilon, z)| \overset{(*)}{\leq} \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((M+1)^2)^n}{n!} \leq c\varepsilon^{-4}, \quad \forall \varepsilon \in]0,1[$$

e $\forall\ z \in K$.

Utilizamos, agora, o lema III.3.1 para concluirmos que $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \mathbb{C}]$.

Definimos $g \in \mathcal{HG}(\mathbb{C})$ como sendo a classe de $\hat{g}$.

(3) $\qquad g(1-\frac{1}{n}) = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Observe que, $\forall\ n \geq 2$,

$$\beta_n(x_p) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \geq p \\ x_p \dfrac{x_p - x_2}{1-x_2} \cdots \dfrac{x_p - x_n}{1-x_n} & \text{se } n < p \end{cases}$$

Para cada $p \geq 2$ (para $p=1$ é trivial) considere

$$I_p : \psi \in A_1^o \to \hat{g}(\psi, x_p) \in \mathbb{C}.$$

Queremos mostrar que $I_p \in \mathcal{I}$.

Mas

$$(**)\qquad |I_p(\psi_\varepsilon)| = \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4}\,\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(x_p)\,\frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4(n!)^2}}}{(n!)^2}\,(x_p)^n\Big| \leq$$

$$\leq \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4}\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n(x_p)|\,\frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4(n!)^2}}}{(n!)^2}\,(x_p)^n \overset{(a)}{=} \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4}\sum_{n=1}^{p-1}|\beta_n(x_p)|\,\frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4(n!)^2}}}{(n!)^2}\,(x_p)^n \leq$$

$$\leq \frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4}\sum_{n=1}^{p-1}|\beta_n(x_p)|\,\frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4(p!)^2}}}{(n!)^2}(x_p)^n = |\psi(0)|^2\left\{\sum_{n=1}^{p-1}|\beta_n(x_p)|\frac{x_p^n}{(n!)^2}\right\}\frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4(p!)^2}}}{\varepsilon^4},$$

$\forall\,\psi \in A_1^o$, e $\forall\,\varepsilon \in\,]0,1]$, onde em (a) utilizamos a observação precedente. Mas

$$\frac{1}{\varepsilon^q}\left\{|\psi(0)|^2\left\{\sum_{n=1}^{p-1}|\beta_n(x_p)|\,\frac{x_p^n}{(n!)^2}\right\}\frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4(p!)^2}}}{\varepsilon^4}\right\}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$\forall\, q \in \mathbb{N}^*$ e $\therefore \exists\, \eta \in\,]0,1]$ tal que

$$(***)\qquad |\psi(0)|^2\left\{\sum_{n=1}^{p-1}|\beta_n(x_p)|\,\frac{x_p^n}{(n!)^2}\right\}\frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4(p!)^2}}}{\varepsilon^4} \leq \varepsilon^q \quad ,$$

$\forall\, \varepsilon \in\,]0,\eta]$.

Então

$$\exists\, N=1 \quad \text{e} \quad \alpha \in \Gamma\begin{pmatrix}\alpha:\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+\\ q \to q\end{pmatrix} \text{ tais que } \forall\, q \geq N$$

e $\forall\,\psi \in A_q^o\ \exists\,\eta \in\,]0,1]$ (determinado acima) e c=1 tais que

$$|I_p(\psi_\varepsilon)| \overset{(**)}{\leq} |\psi(0)|^2 \left\{ \sum_{n=1}^{p-1} \frac{|\beta_n(x_p)|x_p^n}{(n!)^2} \right\} \frac{e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{\varepsilon^4 (p!)^2}}}{\varepsilon^4} \leq$$

$$\overset{(***)}{\leq} \varepsilon^q \leq c\,\varepsilon^{\alpha(q)-1} \quad , \ \forall \quad \varepsilon \in]0,\eta].$$

(4) $g \neq 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{C})$. Na verdade, vamos mostrar que $g(1) \neq 0$ em $\bar{\mathbb{C}}$.

Seja $I: \psi \in A_1^o \to \hat{g}(\psi,1) \in \mathbb{C}$. Suponhamos por absurdo que $I \in \mathcal{I}$, então $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geq N$ e $\psi \in A_q^o$, $\exists\, \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$|I(\psi_\varepsilon)| \leq c\,\varepsilon^{\alpha(q)-N} \quad , \quad \forall \quad \varepsilon \in]0,\eta].$$

Em particular, $\forall\, p \geq 2$ tal que $\varepsilon_p = \sqrt[4]{\frac{1}{(p!)^2}} < \eta$ temos

$$|I(\psi_{\varepsilon_p})| = |\psi(0)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(1) \frac{(p!)^2}{(n!)^2} e^{-\frac{|\psi(0)|^2}{(n!)^2}(p!)^2}$$

$$\leq c\left(\frac{1}{(p!)^{1/2}}\right)^{\alpha(q)-N} ,$$

o que implica que (usando que $\beta_n(1) = 1$)

$$|\psi(0)|^2\, e^{-|\psi(0)|^2} \leq c\left(\frac{1}{(p!)^{1/2}}\right)^{\alpha(q)-N} ,$$

$\forall\, p \in \mathbb{N}^*$ tal que $\sqrt[4]{\frac{1}{(p!)^2}} < \eta$.

Tomemos $q \geqq N$ tal que $\alpha(q) > N$ e $\psi \in A_q^o$ com $\psi(0) = 1$ (dado pelo lema II.2). Neste caso $\exists\ \eta \in]0,1]$ e $c > 0$ tais que

$$e^{-1} \leqq c \frac{1}{(p!)^{\frac{1}{2}(\alpha(q)-N)}} \quad , \quad \forall\ p \in \mathbb{N}^* \quad \text{tal que}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{(p!)^2}} < \eta \ .$$

Fazendo $p \to \infty$ temos um absurdo.

$\square$

De uma certa maneira é natural que as formulações anteriores do princípio do prolongamento analítico sejam falsas para as funções holomorfas generalizadas já que o valor num ponto não as caracteriza.

A seguir mostraremos uma formulação do prolongamento analítico para as funções holomorfas generalizadas.

TEOREMA III.6.1 <u>Seja Ω um aberto conexo em $\mathbb{C}^n$ e seja g uma função holomorfa generalizada em Ω. Suponhamos que g é nula sobre o conjunto aberto U não vazio de Ω. Então g é nula em Ω.</u>

Convém observar que a demonstração do teorema acima foi feita originalmente por Colombeau e Galé (ver [CG-2]). No entanto a prova que apresentaremos a seguir foi desenvolvida a partir de uma idéia apresentada por Colombeau no apêndice 5 de [C-3], com a qual demonstramos o seguinte lema.

LEMA III.6.1 <u>Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}^n$ e g uma função holomorfa generalizada em Ω. Suponhamos que exista $t = (t_1 ..., t_n) \in \Omega$ e $a_j > 0$, $\forall\, j = 1,\dots,n$, tais que</u>

$$D = \prod_{j=1}^{n} D(t_j, a_j) \subset \Omega \ \underline{e} \quad g|D = 0.$$

<u>Se $z = (z_1,\dots,z_n) \in \Omega$ é tal que existe $R_j > 0$, satisfazendo:</u>

(i) $\partial D(z_j, R_j) \cap D(t_j, a_j) \neq \emptyset \quad , \forall\, j = 1,\dots,n.$

(ii) $\prod_{j=1}^{n} \overline{D(z_j, R_j)} \subset \Omega$.

<u>Então existe $s_j > 0$, $\forall\, j=1,\dots,n$, tal que</u>

$$g|\prod_{j=1}^{n} D(z_j, s_j) = 0.$$

<u>Prova</u> Suponhamos, sem perda de generalidade, que $z=0$. Tomemos $b_j > 0$ tal que $b_j < a_j$, $\forall\, j = 1,\dots,n$ e

$$\partial D(0, R_j) \cap D(t_j, b_j) \neq \emptyset \quad , \forall\, j = 1,\dots,n.$$

Para cada $\ell = 1,\dots,n$, temos que

$$\mathcal{U}_\ell = \{ e^{i\alpha} D(t_\ell , b_\ell) \, | \alpha \in \mathbb{R} \}$$

forma uma cobertura aberta de $\partial D(0,R_\ell)$ e, portanto, existe $\alpha_{\ell,1},\dots,\alpha_{\ell,p_\ell}$ tais que

$$V_\ell = \bigcup_{k=1}^{p_\ell} e^{i\alpha_{\ell,k}} D(t_\ell , b_\ell) \supset D(0,R_\ell)$$

Como

$$\prod_{j=1}^{n} \overline{D(0,R_j)} \subset \Omega, \quad \exists \ r > 0$$

tal que

$$\prod_{j=1}^{n} D(0,R_j+r) \subset \prod_{j=1}^{n} \overline{D(0,R_j+r)} \subset \Omega \ .$$

Seja $\hat{g}$ um representante de g em $\prod_{j=1}^{n} D(0,R_j+r)$ tal que

$$\hat{g}(\psi,.) \in H(\prod_{j=1}^{n} D(0,R_j+r)) \ , \quad \forall \ \psi \in A_1^o$$

(ver teorema III.5.1).

Definimos $s_\ell = \min\{\frac{r}{2}, a_\ell - b_\ell , R_\ell\}$, $\forall \quad \ell=1,\dots,n$ e

$$\hat{f}_{k_1 \dots k_n} : A_1^o(4n) \times \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} D(0,R_j + \tfrac{r}{2}) \to \mathbb{C}$$

$$\hat{f}_{k_1 \dots k_n}(\psi,(w,z)) = \hat{g}(I_{2n}^{4n}(\psi),(w_1 + e^{-i\alpha_{1,k_1}} z_1,\dots,w_n + e^{-i\alpha_{n,k_n}} z_n))$$

$\forall \ k_i \in \{ 1,\dots,p_i \}$, $\forall \ i = 1,\dots,n$ (onde I_{2n}^{4n} está definida na proposição I.5.1)

É claro que $\hat{f}_{k_1 \dots k_n}$ está bem definida, já que

$$\forall\ (w,z) \in \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} D(0,R_j + \tfrac{r}{2})$$

segue que

$$|w_j + e^{-i\alpha_{j,k_j}} z_j| \leq |w_j| + |z_j| < s_j + R_j + \tfrac{r}{2} \leq r + R_j ,$$

$\forall\ j=1,\dots,n$. Além disso

$$\hat{f}_{k_1 \dots k_n} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} D(0,R_j + \tfrac{r}{2})]$$

(basta observar que $\hat{f}_{k_1 \dots k_n} = (L_{k_1 \dots k_n})^* \hat{g}$, onde

$$L_{k_1 \dots k_n} : (w,z) \in \mathbb{C}^{2n} \to (w_1 + e^{-i\alpha_{1,k_1}} z_1, \dots, w_n + e^{-i\alpha_{n,k_n}} z_n) \in \mathbb{C}^n$$

e que

$$L_{k_1 \dots k_n}(\prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} D(0,R_j + \tfrac{r}{2})) \subset \prod_{j=1}^{n} D(0,R_j + r)$$

e aí aplicar o lema I.5.1, (1)).

Definimos $\hat{f} = \prod_{k_1=1}^{p_1} \dots \prod_{k_n=1}^{p_n} \hat{f}_{k_1 \dots k_n}$. Tal função possue as seguintes propriedades

(1) $\quad \hat{f} \in \mathcal{E}_M[A_1^o \times \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} D(0,R_j + \tfrac{r}{2})]$

$$(2) \qquad \hat{f}(\psi,.,.) \in \mathcal{H}\left(\prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} D(0,R_j + \tfrac{r}{2})\right) , \quad \forall \psi \in A_1^o .$$

Se denotarmos por f a classe de $\hat{f}$ segue ainda que:

$$(3) \qquad f|\prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times [(\prod_{j=1}^{n} D(0,R_j + \tfrac{r}{2})) \cap v] = 0 ,$$

onde $v = \prod_{j=1}^{n} v_j$.

(1) e (2) são de demonstração imediata. Para demonstrar (3) basta mostrar que

$$f|\prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} (e^{i\alpha_{j,k_j}} D(t_j,b_j) \cap D(0,R_j + \tfrac{r}{2})) = 0 ,$$

$\forall\, k_j \in \{1,\ldots,p_j\}$ (e aí utiliar o teorema I.4.1).

Fixemos $k_1,\ldots,k_n$ tal que $k_i \in \{1,\ldots,p_i\}$, $\forall$ i=1,...,n.

Como

$$\mathcal{N}[A_1^o(4n) \times \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} (e^{i\alpha_{j,k_j}} D(t_j,b_j) \cap D(0,R_j + \tfrac{r}{2}))]$$

é um ideal, basta verificar que

$$(*) \qquad \hat{f}_{k_1\ldots k_n} \in \mathcal{N}[A_1^o(4n) \times \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} (e^{i\alpha_{j,k_j}} D(t_j,b_j) \cap D(0,R_j + \tfrac{r}{2}))]$$

Vamos, então, provar (*). Se

$$L_{k_1\ldots k_n} : (w,z) \in \mathbb{C}^{2n} \to (w_1 + e^{-i\alpha_{1,k_1}} z_1, \ldots, w_n + e^{-i\alpha_{n,k_n}} z_n)$$

segue que

$$L_{k_1\dots k_n}\Big(\prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} e^{i\alpha_{j,k_j}} D(t_j,b_j)\Big) \subset \prod_{j=1}^{n} D(t_j,a_j)$$

(de fato, se $(w,z) \in \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} e^{i\alpha_{j,k_j}} D(t_j,b_j)$, temos que $z_\ell = e^{i\alpha_{\ell,k_\ell}} z'_\ell$, onde

$$z'_\ell \in D(t_\ell,b_\ell), \quad \forall\ \ell = 1,\dots,n ,$$

o que implica que

$$L_{k_1\dots k_n}(w,z) = (w_1+e^{i\alpha_{1,k_1}} z_1,\dots,w_n+e^{-i\alpha_{n,k_n}} z_n) =$$

$$= (w_1+z'_1,\dots,w_n+z'_n)$$

e

$$|w_\ell+z'_\ell-t_\ell| \leq |w_\ell|+|z'_\ell-t_\ell| < s_\ell+b_\ell \leq a_\ell-b_\ell+b_\ell = a_\ell ,$$

$\forall\ \ell=1,\dots,n$).

Como

$$L_{k_1\dots k_n}\Big(\prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \prod_{j=1}^{n} \big(e^{i\alpha_{j,k_j}} D(t_j,b_j) \cap D(0,R_j+\tfrac{r}{2})\big)\Big) \subset \prod_{j=1}^{n} \big(D(t_j,a_j) \cap D(0,R_j+r)\big),$$

$$\hat{f}_{k_1\dots k_n} = (L_{k_1\dots k_n})^*(\hat{g}) \quad \text{e} \quad \hat{g} \in N[A_1^o(2n) \times \prod_{j=1}^{n} (D(t_j,a_j) \cap D(0,R_j+r))],$$

do lema I.5.1, b) segue a validade de (*).

Para terminar a demonstração vamos mostrar que

$$\hat{g} \in N[A_1^o(2n) \times \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j)]$$

Dado $K \subset\subset \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j)$, temos que

$$K \times \prod_{j=1}^{n} \partial D(0,R_j) \subset\subset \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j) \times \left[\left(\prod_{j=1}^{n} D(0,R_j + \tfrac{r}{2}) \right) \cap v \right]$$

e por (3), $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha' \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geq N$ e $\psi \in A_q^o(4n)$, $\exists\, \eta \in\,]0,1]$ e $c' > 0$ tais que

$$|\hat{f}(\psi_\varepsilon, w, z)| \leq c' \varepsilon^{\alpha'(q)-N}, \quad \forall\, (w,z) \in K \times \prod_{j=1}^{n} \partial D(0,R_j)$$

e $\forall\, \varepsilon \in\,]0,\eta[$.

Logo, $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha' \in \Gamma$ tais que $\forall\, q \geq N$ e $\phi \in A_q^o(2n)$, temos que $I_{4n}^{2n}(\phi) \in A_q^o(4n)$ (ver proposição I.5.1,(a)) e $\therefore\ \exists\, \eta \in\,]0,1]$ e $c' > 0$ tais que

$$|\hat{f}(I_{4n}^{2n}(\phi_\varepsilon), w, z)| \leq c' \varepsilon^{\alpha'(q)-N}, \quad \forall\, (w,z) \in K \times \prod_{j=1}^{n} \partial D(0,R_j)$$

e $\forall\, \varepsilon \in\,]0,\eta[$.

Fixemos $w \in K$. Como

$$\hat{f}(I_{4n}^{2n}(\phi_\varepsilon), w, z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_{n-1}, \cdot) \in \mathcal{H}(D(0,R_n + \tfrac{r}{2})),$$

$\forall\, z_i \in \partial D(0,R_i)$, $i=1,\ldots,n-1$, então pelo Teorema do Módulo Máximo segue que

$$|\hat{f}(I_{4n}^{2n}(\phi_\varepsilon), w, z_1, \ldots, z_{n-1}, 0)| \leq \max_{z_n \in \partial D(0,R_n)} |\hat{f}(I_{4n}^{2n}(\phi_\varepsilon), w, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n)| \leq c' \varepsilon^{\alpha'(q)-N},$$

$\forall\, \varepsilon \in\,]0,\eta[$ e $\forall\, z_i \in \partial D(0,R_i)$, $i=1,\ldots,n-1$.

Mas

$$\hat{f}(I_{4n}^{2n}(\phi_\varepsilon),w,z_1,\dots,z_{n-2},\cdot,0) \in H(D(0,R_{n-1}+\tfrac{r}{2})) \ ,$$

$\forall\ z_i \in \partial D(0,R_i)$, $i = 1,\dots,n-2$ e $\therefore$ pelo Teorema do Módulo Máximo

$$|\hat{f}(I_{4n}^{2n}(\phi_\varepsilon),w,z_1,\dots,z_{n-2},0,0)| \leq \max_{z_{n-1}\in\partial D(0,R_{n-1})} |\hat{f}(I_{4n}^{2n}(\phi_\varepsilon),w,z_1,\dots,z_{n-2},z_{n-1},0| \leq c'\varepsilon^{\alpha'(q)-N} \ ,$$

$\forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[$ e $\forall\ z_i \in \partial D(0,R_i)$, $i=1,\dots,n-2$.

Repetindo, iteradamente, o processo obtemos:

$$|\hat{f}(I_{4n}^{2n}(\phi_\varepsilon),w,0,\dots,0)| \leq c'\varepsilon^{\alpha'(q)-N} \ ,$$

$\forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta]$ e $w \in K$. Usando a definição de $\hat{f}$, temos que

$$\left|\prod_{k_1=1}^{p_1}\dots\prod_{k_n=1}^{p_n}\hat{g}(\phi_\varepsilon,w)\right| \leq c'\varepsilon^{\alpha'(q)-N} \ ,$$

$\forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[$ e $\forall\ w \in K$. (utilizamos que $I_{2n}^{4n} \circ I_{4n}^{2n} = I_{2n}^{2n} = I$, ver a prop. I.5.1,(c) e (d)), ou seja,

$$|\hat{g}(\phi_\varepsilon,w)|^{p_1\cdots p_n} \leq c'\varepsilon^{\alpha'(q)-N} \ , \forall\varepsilon \in\ ]0,\eta[\ \text{ e } \ \forall\ w \in K,$$

isto é

$$|\hat{g}(\phi_\varepsilon,w)| \leq c'^{\frac{1}{p_1\cdots p_n}}\ \varepsilon^{\frac{\alpha'(q)}{p_1\cdots p_n}-\frac{N}{p_1\cdots p_n}} \leq$$

$$\leq c'^{\frac{1}{p_1\cdots p_n}}\ \varepsilon^{\frac{\alpha'(q)}{p_1\cdots p_n}-N} \ , \ \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[\ \text{ e } \forall\ w \in K.$$

Então provamos que

Dado $K \subset\subset \prod_{j=1}^{n} D(0,s_j)$, $\exists\ N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha = \dfrac{\alpha'}{p_1\cdots p_n} \in \Gamma$ tais que

$$\forall\phi \in A_q^o(2n),\ \exists\eta \in\ ]0,1] \quad e \quad c = c'^{\frac{1}{p_1\cdots p_n}}, \quad \text{tais que}$$

$$|\hat{g}(\phi_\varepsilon,w)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N}, \quad \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[\quad e \quad \forall\ w \in K .$$

Para concluir a demonstração para um operador derivação qualquer utilizamos a observação III.3.4. □

<u>Demonstração do teorema</u> III.6.1. – Considere os conjuntos

$$w_1 = \{\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n) \in \Omega \mid \exists\ s_j > 0,\ j=1,\dots,n, \text{ de modo que } g|\prod_{j=1}^{n} D(\tau_j,s_j) = 0\}$$

$$w_2 = \Omega \cap \complement w_1 .$$

O que queremos provar é que $w_1 = \Omega$, pois daí basta usar o teorema I.4.1.

Mas, w_1 e w_2 possuem as seguintes propriedades:

(i) $w_1 \cup w_2 = \Omega$ e $w_1 \cap w_2 = \phi$

(ii) $w_1 \neq \phi$ (hipótese)

(iii) w_1 é aberto

(iv) w_2 é aberto

As três primeiras propriedades são imediatas. Vamos demonstrar (iv).

Seja $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in w_2$, então $\exists\ r > 0$ tal que

$$\prod_{j=1}^{n} D(\alpha_j,r) \subset \Omega.$$

Vamos provar que $\prod_{j=1}^{n} D(\alpha_j, r) \subset w_2$. Suponhamos, por absurdo, que exista $\beta \in \prod_{j=1}^{n} D(\alpha_j, r)$ tal que $\beta \in w_1$. Então existe $s_j > 0$, $j = 1,\dots,n$, tal que

$$\prod_{j=1}^{n} D(\beta_j, s_j) \subset \Omega \quad \text{e} \quad g\Big|\prod_{j=1}^{n} D(\beta_j, s_j) = 0$$

Para cada $j = 1,\dots,n$, se $\alpha_j = \beta_j$, temos que

$$\partial D(\alpha_j, \min\{\tfrac{s_j}{2}, \tfrac{r}{2}\}) \cap D(\beta_j, s_j) \neq \emptyset .$$

Agora, se $\alpha_j \neq \beta_j$, $\partial D(\alpha_j, |\alpha_j - \beta_j|) \cap D(\beta_j, s_j) \neq \emptyset$

Definimos

$$R_j = \begin{cases} \min\{\frac{s_j}{2}, \frac{r}{2}\} & \text{se } \alpha_j = \beta_j \\ |\alpha_j - \beta_j| & \text{se } \alpha_j \neq \beta_j \end{cases} ,$$

então

(i) $\partial D(\alpha_j, R_j) \cap D(\beta_j, s_j) \neq \emptyset$, $\forall\, j=1,\dots,n$

(ii) $\prod_{j=1}^{n} \overline{D(\alpha_j, R_j)} \subset \Omega$.

Logo, pelo lema III.6.1, $\exists\, m_j > 0$, $j=1,\dots,n$, tal que

$$g\Big|\prod_{j=1}^{n} D(\alpha_j, m_j) = 0$$

e $\therefore$ $\alpha \in w_1$, o que é um absurdo, donde concluímos que

$$\prod_{j=1}^{n} D(\alpha_j, r) \subset w_2 \quad e \quad \therefore \; w_2 \text{ é aberto.}$$

Como Ω é conexo e w_1, w_2 satisfazem as propriedades de (i) a (iv) então $\Omega = w_1$.

$\square$

Observação III.6.1 O Princípio do Prolongamento Analítico é uma das razões que levou Colombeau a modificar a sua álgebra original.

oOo

CAPITULO IV

O TEOREMA DE EXTENSÃO DE HARTOGS

Como dissemos antes, tendo provado a formulação do Princípio do Prolongamento Analítico, como no caso clássico, conseguiremos provar o teorema de Extensão de Hartogs para as funções holomorfas generalizadas.

<u>TEOREMA</u> IV.1 <u>Sejam</u> $n \geq 2$, Ω <u>um aberto de</u> $\mathbb{C}^n$ <u>e</u> K <u>um compacto de</u> Ω <u>tal que</u> $\Omega \setminus K$ <u>é conexo</u>. <u>Então para cada</u> $u \in \mathcal{HG}(\Omega \setminus K)$ <u>existe</u> $\bar{u} \in \mathcal{HG}(\Omega)$ <u>tal que</u> $\bar{u}|\Omega \setminus K = u$.

Para a demonstração do teorema IV.1, precisaremos dos três lemas a seguir

<u>LEMA</u> IV.1 <u>Seja</u> Ω <u>um aberto do</u> $\mathbb{R}^n$. <u>Então para toda</u> $g \in \mathcal{G}(\Omega)$ <u>com suporte compacto</u> K <u>e para todo compacto</u> $L \subset\subset \Omega$ <u>com</u> $K \subset \overset{\circ}{L}$, <u>existe um representante</u> $\hat{g} \in \mathcal{E}_M[\overset{\circ}{A_1} \times \Omega]$ <u>de</u> g <u>tal que para todo</u> $\psi \in \overset{\circ}{A_1}$, <u>a função</u> C^∞, $\hat{g}(\psi,.)$ <u>está em</u> $\mathcal{D}(\overset{\circ}{L})$.

<u>Prova</u> Seja $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $0 \leq \alpha \leq 1$, $\alpha \equiv 1$ em uma vizinhança V de K e supp $\alpha \subset \overset{\circ}{L}$. Tomemos $\beta = 1-\alpha$. É claro que $\alpha, \beta \in C^\infty(\Omega) \subset \mathcal{G}(\Omega)$ e em $\mathcal{G}(\Omega)$, $g = 1.g = (\alpha+\beta)g = \alpha g + \beta g$. Seja $\hat{f}$ um representante arbitrário de g. Basta provar que $\beta g = 0$, pois daí $\alpha\hat{f}$ é um representante de g e $\text{supp}(\alpha\hat{f}(\psi,.)) \subset \overset{\circ}{L}$ (definimos $\hat{g} = \alpha\hat{f}$).

Mas $(\beta g)|V = 0$ pois $\beta|V = 0$ e $(\beta g)|\Omega\setminus K = 0$ já que $g|\Omega\setminus K = 0$. Então, pelo teorema I.4.1, $\beta g = 0$ em Ω.

$\square$

<u>LEMA</u> IV.2 <u>Sejam</u> $n \geq 2$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $L \subset\subset \mathbb{C}^n$ <u>e</u>

$$X = \{z \in \mathbb{C}^n | \sum_{j=2}^{n} |z_j| > \rho\}$$

a) $\complement L$ <u>tem uma única componente conexa não limitada</u> $\mathcal{O}$ <u>e</u> $\complement \mathcal{O}$ <u>é compacto</u>.

b) $X \cap \mathcal{O}$ <u>é um aberto não vazio</u>.

<u>Prova</u> a) Como L é compacto $\exists$ D polidisco centrado na origem tal que $L \subset D$ e $\therefore$ $\complement L \supset \complement D$. Mas $\complement D$ é conexo e $\therefore \exists$ componente conexa $\mathcal{O}$ de $\complement L$, tal que $\complement D \subset \mathcal{O}$. Logo, $\mathcal{O}$ é não limitada e $\complement \mathcal{O} \subset D$ donde segue que $\complement \mathcal{O}$ é compacto. Como todas as componentes conexas são disjuntas segue que qualquer componente conexa diferente de $\mathcal{O}$ está contida em D e $\therefore$ é limitada.

b) Caso contrário, $X \subset \complement \mathcal{O}$ e $\therefore$ X seria limitado, o que é um absurdo.

$\square$

<u>LEMA</u> IV.3 <u>Seja</u> $g \in G_{(0,1)}(\mathbb{C}^n)$, $n \geq 2$, <u>com suporte compacto e tal que</u> $\bar{\partial} g = 0$. <u>Então existe uma única</u> $s \in G(\mathbb{C}^n)$ <u>com suporte compacto tal que</u> $\bar{\partial} s = g$.

<u>Prova</u>: $g = \sum_{j=1}^{n} g_j d\bar{z}_j$, onde $g_j \in G(\mathbb{C}^n)$ e g_j tem suporte compacto. Seja L compacto de $\mathbb{C}^n$ tal que $\bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{supp} g_j \subset \overset{\circ}{L}$. Aplicando o lema IV.1 para o compacto $\operatorname{supp} g_k$ e $\overset{\circ}{L}$ temos que existe

$\hat{g}_k \in \mathcal{E}_M[\overset{o}{A}_1 \times \mathbb{C}^n]$, $\hat{g}_k$ representante de g_k, tal que,

$$\hat{g}_k(\psi,.) \in \mathcal{D}(\overset{o}{L}) \ , \ \forall \ \psi \in \overset{o}{A}_1 \ , \quad \forall \ \ k = 1,\ldots,n.$$

Definimos então

$$\hat{s}\colon \ (\psi,z) \in \overset{o}{A}_1 \times \mathbb{C}^n \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \hat{g}_1(\psi,\xi,z_2,\ldots,z_n) \frac{d\xi \ \wedge \ d\bar{\xi}}{\xi - z_1}$$

Logo

$$\hat{s}(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \hat{g}_1(\psi,\xi,z_2,\ldots,z_n) \ \frac{d\xi \ \wedge \ d\bar{\xi}}{\xi - z_1} =$$

$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \hat{g}_1(\psi,\xi+z_1,z_2,\ldots,z_n) \ \frac{d\xi \ \wedge \ d\bar{\xi}}{\xi}$$

onde em (a) utilizamos a invariança por translação da integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$.

Por derivação sob o sinal de integração, usando que $\hat{g}(\psi,.) \in \mathcal{D}(\overset{o}{L})$ e que $(\xi \to \frac{1}{\xi}) \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$, temos que $\hat{s}(\psi,.) \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ e que

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial \bar{z}_1}(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{z}_1} \ (\psi,\xi+z_1,z_2,\ldots,z_n) \ \frac{d\xi \ \wedge \ d\bar{\xi}}{\xi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{z}_1} \ (\psi,\xi,z_2,\ldots,z_n) \frac{d\xi \ \wedge \ d\bar{\xi}}{\xi - z_1} \quad \forall \ z \in \mathbb{C}^n.$$

Fixados $z_2,\ldots,z_n$, temos que $\hat{g}_1(\psi,-,z_2,\ldots,z_n)$ tem suporte compacto contido em $L_1 = \pi_1(L)$. Mas para $\forall \ r > 0$ tal que $L_1 \subset D(0,r)$ segue que

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial \bar{z}_1}(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{D(0,r)} \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \bar{z}_1}(\psi,\xi,z_2,\ldots,z_n)\ \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi - z_1}$$

e pelo lema III.4.1. temos

(b) $$\boxed{\frac{\partial \hat{s}}{\partial \bar{z}_1}(\psi,z) = \hat{g}_1(\psi,z) \quad , \forall\ z \in \mathbb{C}^n}$$

Deste modo, temos que $\hat{s} \in E[A_1^o \times \mathbb{C}^n]$ é um bom candidato a solução da equação e para isto precisamos provar que

(1) $\hat{s} \in E_M[A_1^o \times \mathbb{C}^n]$.

(2) $\dfrac{\partial \hat{s}}{\partial \bar{z}_k} - \hat{g}_k \in N[A_1^o \times \mathbb{C}^n]$.

(3) Se s é a classe de $\hat{s}$ em $G(\mathbb{C}^n)$ então s tem suporte compacto.

Vamos então, demonstrar as três afirmações acima.

(1) Dados $K \subset\subset \mathbb{C}^n$ e ∂^i operador derivação, como $\hat{g}_1 \in E_M[A_1^o \times \mathbb{C}^n]$ e $L \subset\subset \mathbb{C}^n$

(c) $\left\|\begin{array}{l} \exists\ N \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } \forall\ \phi \in A_N^o\ , \exists\ \eta \in\ ]0,1] \text{ e } c_o > 0 \\ \text{tais que } |\partial^i \hat{g}_1(\phi_\varepsilon,z)| \leq c_o \varepsilon^{-N}\ , \forall\ z \in \mathbb{C}^n \text{ e} \\ \forall\ \varepsilon \in\ ]0,\eta[\quad (\text{já que } \operatorname{supp} \hat{g}_1(\psi,.) \subset \overset{o}{L}\ , \forall\ \psi \in A_1^o). \end{array}\right.$

Mas, por derivação sob o sinal de integração

(d) $$\partial^i\hat{s}(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \partial^i\hat{g}_1(\psi,\xi+z_1,z_2,\ldots,z_n)\,\frac{d\xi\ \wedge\ d\bar{\xi}}{\xi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1-K_1} \partial^i\hat{g}_1(\psi,\xi+z_1,z_2,\ldots,z_n)\frac{d\xi\ \wedge\ d\bar{\xi}}{\xi}\ ,$$

$\forall\,\psi \in A_1^o$, $\forall\, z \in K$, onde

$$L_1-K_1 = \left\{ \ell_1-k_1 \in \mathbb{C} \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists\,\ell_2,\ldots,\ell_n \text{ e } k_2,\ldots,k_n \text{ tal que } (\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n) \in L \\ \text{e } (k_1,k_2,\ldots,k_n) \in K \end{array} \right\}$$

Logo, $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\forall\,\phi \in A_N^o$ $\exists\,\eta \in\,]0,1]$ e $c = \dfrac{c_o}{2\pi}\displaystyle\int_{L_1-K_1} \left|\frac{d\xi\wedge d\xi}{\xi}\right|$

tais que

$$|\partial^i\hat{s}(\phi_\varepsilon,z)| \overset{(d)}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_{L_1-K_1} \left|\partial^i\hat{g}_1(\phi_\varepsilon,\xi+z_1,z_2,\ldots,z_n)\frac{d\xi\ \wedge\ d\bar{\xi}}{\xi}\right|$$

$$\overset{(c)}{\leq} c_o\varepsilon^{-N}\,\frac{1}{2\pi}\int_{L_1-K_1}\left|\frac{d\xi\wedge d\bar{\xi}}{\xi}\right| = c\varepsilon^{-N}\ ,$$

$\forall\, z \in K$ e $\forall\,\varepsilon \in\,]0,\eta[$.

Observe que $\displaystyle\int_{L_1-K_1}\left|\frac{d\xi\wedge d\bar{\xi}}{\xi}\right| < \infty$ pois $(\xi \to \frac{1}{\xi}) \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$

(2) Por hipótese, $\bar{\partial}g = 0$. Em termos de representantes essa condição se expressa por

(*) $$N_{j,k} = \frac{\partial\hat{g}_j}{\partial\bar{z}_k} - \frac{\partial\hat{g}_k}{\partial\bar{z}_j} \in N[A_1^o \times \mathbb{C}^n], \quad \forall\, j,k = 1,2,\ldots,n.$$

Queremos provar que

$$\frac{\partial\hat{s}}{\partial\bar{z}_k} - \hat{g}_k \in N[A_1^o \times \mathbb{C}^n] \ , \quad \forall\ k=1,\ldots,n.$$

Para k=1 segue de (b). Para $k > 1$ temos

$$\text{(e)} \qquad \frac{\partial\hat{s}}{\partial\bar{z}_k}(\psi,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\bar{z}_k}(\psi,\xi,z_2,\ldots,z_n)\ \frac{d\xi\ \wedge\ d\bar{\xi}}{\xi-z_1} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\hat{g}_k}{\partial\bar{z}_1}(\psi,\xi,z_2,\ldots,z_n)\ \frac{d\xi\wedge d\bar{\xi}}{\xi-z_1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} N_{1,k}(\psi,\xi,z_2,\ldots,z_n)\frac{d\xi\wedge d\bar{\xi}}{\xi-z_1} \ .$$

Fixados $z_2,\ldots,z_n$ e usando que $\hat{g}_k(\psi,-,z_2,\ldots,z_n)$ tem suporte compacto contido em $D(0,r)$, $\forall\ r > r_k$ para algum $r_k > 0$, pelo lema III.4.1, segue que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\hat{g}_k}{\partial\bar{z}_1}(\psi,\xi,z_2,\ldots,z_n)\ \frac{d\xi\wedge d\bar{\xi}}{\xi-z_1} = \hat{g}_k(\psi,z) \ , \quad \forall\ z \in \mathbb{C}^n \ .$$

Então (e) se escreve.

$$\frac{\partial\hat{s}}{\partial\bar{z}_k}(\psi,z) = \hat{g}_k(\psi,z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} N_{1,k}(\psi,\xi,z_2,\ldots,z_n)\ \frac{d\xi\ \wedge\ d\bar{\xi}}{\xi-z_1}$$

E, portanto,

$$\frac{\partial\hat{s}}{\partial\bar{z}_k} - \hat{g}_k \in N[A_1^o \times \mathbb{C}^n] \ , \ \forall\ k=1,\ldots,n.$$

De fato, dados $K \subset\subset \mathbb{C}^n$, ∂^i operador derivação, como

$$N_{1,k} \in N[A_1^o \times \mathbb{C}^n] \ , \ \forall\ k=1,\ldots,n \ ,$$

$N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall\ q \geq N$ e $\phi \in A_q^o$ $\exists\ c_o > 0$ e

$\eta \in]0,1]$ tais que

$$|\partial^i N_{1,k}(\phi_\varepsilon,z)| \leq c_o \varepsilon^{\alpha(q)-N} ,$$

$\forall z \in \mathbb{C}^n$, $\forall \varepsilon \in]0,\eta[$ e $\forall k=1,\ldots,n$

(já que $\mathrm{supp}(N_{1,k}(\psi,.)) \subset\subset \overset{o}{L}$, $\forall \psi \in \overset{o}{A}_1$, $\forall k=1,\ldots,n$ e $L \subset\subset \mathbb{C}^n$).

Logo, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha \in \Gamma$ tais que $\forall q \geq N$ e $\forall \phi \in A_q^o$, $\exists$

$$c = c_o \frac{1}{2\pi} \int_{L_1-K_1} \left|\frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi}\right| \quad , L_1-K_1 \text{ como em (1), e } \eta \in]0,1]$$

tais que

$$\begin{aligned} |\partial^i(\frac{\partial\hat{s}}{\partial\bar{z}_k} - \hat{g}_k)(\phi_\varepsilon,z)| &\overset{(a)}{\leq} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{L_1-K_1} \partial^i N_{1,k}(\phi_\varepsilon,\xi+z_1,z_2,\ldots,z_n)\frac{d\xi\wedge d\bar{\xi}}{\xi}\right| \\ &\leq \frac{c_o}{2\pi}\varepsilon^{\alpha(q)-N}\int_{L_1-K_1}\left|\frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi}\right| = \\ &= c\varepsilon^{\alpha(q)-N} , \forall z \in K, \quad \forall \varepsilon \in]0,\eta[\end{aligned}$$

(3) Vimos que $\bigsqcup_{j=1}^{n} \mathrm{supp}\, g_j \subset \overset{o}{L}$, L compacto de $\mathbb{C}^n$ e que

(h) $$\boxed{\hat{g}_k(\psi,.) \in \mathcal{D}(\overset{o}{L}) \quad , \forall k = 1,\ldots,n , \forall \psi \in A_1^o}$$

Por (2) , $\frac{\partial\hat{s}}{\partial\bar{z}_k} - \hat{g}_k \in \mathcal{N}[A_1^o \times \mathbb{C}^n]$, $\forall k=1,\ldots,n$ e portanto,

$$\frac{\partial\hat{s}}{\partial\bar{z}_k} | \complement L \in \mathcal{N}[A_1^o \times \complement L] \quad , \forall k=1,\ldots,n,$$

ou seja,

(i) $\boxed{s|\complement L \in HG(\complement L)}$

Tomemos $\rho > 0$ tal que

$$L \subset B_{\|\cdot\|_1,\rho} := \{z \in \mathbb{C}^n | \sum_{j=1}^{n} |z_j| < \rho\}$$

e seja X como no lema IV.1. É claro que

$$X \subset \complement B_{\|\cdot\|_1,\rho} \subset \complement L$$

e portanto, por (h) temos

(j) $\boxed{\hat{g}_k(\psi,.)|X = 0 \quad , \forall \psi \in A_1^o \ , \forall k = 1,\ldots,n.}$

Observe que se $(z_1,\ldots,z_n) \in X$ então $(\tau, z_2,\ldots,z_n) \in X$, $\forall \tau \in \mathbb{C}$.

Mas

$$\hat{s}(\psi,z) = \int_{\mathbb{C}} \hat{g}_1(\psi,\xi,z_2,\ldots,z_n) \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi - z_1}$$

e $\therefore$ de (j) e da observação acima, segue que

$$\hat{s}(\psi,.)| X = 0 \quad , \quad \forall \psi \in A_1^o$$

e, portanto,

(ℓ) $\boxed{s|X = 0}$

Do lema IV.2, se $\mathcal{O}$ é a única componente conexa não limitada de $\complement L$ então $X \cap \mathcal{O}$ é um aberto diferente do vazio. Como $\mathcal{O} \subset \complement L$ por (i) temos $s|\mathcal{O} \in HG(\mathcal{O})$ e por (ℓ) $s|X \cap \mathcal{O} = 0$. Mas $\mathcal{O}$ é conexo, então pelo princípio do prolongamento analítico, teorema III.6.1, segue que $s|\mathcal{O} = 0$, ou seja, $\operatorname{supp} s \subset \complement \mathcal{O}$ e portanto $\operatorname{supp} s$ é compacto já que $\complement \mathcal{O}$ é compacto pelo lema IV.2.(a). O que conclui a prova de existência de solução.

Unicidade: Suponhamos que $s_1 \in G(\mathbb{C}^n)$, s_1 com suporte compacto e que $\bar\partial s_1 = g$. Então $\bar\partial(s-s_1) = \bar\partial s - \bar\partial s_1 = g-g=0$, ou seja, $s-s_1 \in HG(\mathbb{C}^n)$. Mas $s-s_1$ tem suporte compacto M; o que implica que $(s-s_1)|\complement M = 0$. Assim sendo, pelo princípio do prolongamento analítico, teorema III.6.1, $s-s_1 = 0$, ou seja, $s=s_1$.

$\square$

Agora estamos prontos para demonstrar o teorema IV.1.

Prova Seja W um aberto contendo K tal que $\bar W \subset\subset \Omega$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset G(\Omega)$ tal que $\phi \equiv 1$ em W.

Seja $u_1 = (1-\phi)u \in G(\Omega\setminus K)$ e $u_2 = 0 \in G(W)$.

Como $(1-\phi)|(\Omega\setminus K) \cap W = 0$ então $u_1|(\Omega\setminus K) \cap W = u_2|(\Omega\setminus K) \cap W$ e portanto, pelo teorema I.4.1, existe $u_o \in G(\Omega)$ tal que $u_o|\Omega\setminus K = u_1$ e $u_o|W = u_2 = 0$.

Vamos mostrar que é possível determinar v de modo que $\bar u := u_o - v$ seja a solução procurada. Como $\bar u$ deve ser analítica em Ω devemos ter $0 = \bar{\partial} u = \bar{\partial} u_o - \bar{\partial} v$ em Ω e, portanto, $\bar{\partial} u_o = \bar{\partial} v$ em Ω.

Em $\Omega \setminus K$, $\bar{\partial} u_o = \bar{\partial} u_1 = -\bar{\partial}\phi u + (1-\phi)\bar{\partial} u = -\bar{\partial}\phi . u$, já que $u \in \mathcal{HG}(\Omega \setminus K)$. Podemos escrever.

$$\bar{\partial} u_o = - \sum_{j=1}^{n} u \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \quad \text{em } \Omega \setminus K.$$

Sejam $u_{j_1} = -u \dfrac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_j} \in \mathcal{G}(\Omega \setminus K)$ e $u_{j_2} = 0 \in \mathcal{G}(W \cup \complement \operatorname{supp} \phi)$.

$\forall$ $j=1,\ldots,n$. Como

$$u_{j_1} \big| (\Omega \setminus K) \cap (W \cup \complement \operatorname{supp} \phi) = u_{j_2} \big| (\Omega \setminus K) \cap (W \cup \complement \operatorname{supp} \phi)$$

$\forall$ $j = 1,\ldots,n$, então, pelo teorema I.4.1, $\exists$ $f_j \in \mathcal{G}(\mathbb{C}^n)$ tal que

$$f_j | \Omega \setminus K = u_{j_1} \quad \text{e} \quad f_j | W \cup \complement \operatorname{supp} \phi = u_{j_2} = 0 \quad ,$$

$\forall$ $j=1,\ldots n$.

Além disso, $\operatorname{supp} f_j \subset \complement W \cap \operatorname{supp} \phi$, $\forall$ $j=1,\ldots,n$ e $\therefore f_j$ tem suporte compacto contido em Ω. Definimos

$$f = \sum_{j=1}^{n} f_j d\bar{z}_j$$

e então é claro que $f \in \mathcal{G}_{(0,1)}(\mathbb{C}^n)$ e f tem suporte compacto. Além disso, $\bar{\partial} f = 0$ em $\mathcal{G}_{(0,1)}(\mathbb{C}^n)$, isto é

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \text{em } \mathcal{G}(\mathbb{C}^n) \ , \quad \forall \ j,k=1,\ldots,n.$$

De fato, em $\Omega \setminus K$

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_j} = 0$$

($u \in HG(\Omega \setminus K)$); em $W \cup \complement \operatorname{supp} \phi$ é clara a igualdade e $\therefore$ pelo teorema I.4.1 parte (a),

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \forall\ j,k = 1,\dots,n.$$

Logo, pelo lema IV.3 existe uma única $v \in G(\mathbb{C}^n)$, v com suporte compacto tal que $\bar{\partial} v = f$.

Tendo encontrado v, definimos $\bar{u} := u_o - v|\Omega$ então temos que

(1) $\bar{u} \in HG(\Omega)$, já que,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial u_o}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial (v|\Omega)}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial u_o}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial v}{\partial \bar{z}_j}|\Omega \overset{(*)}{=} f_j|\Omega - f_j|\Omega = 0 ,$$

$\forall\ j = 1,\dots,n.$ Onde em (*) usamos que

$$\frac{\partial u_o}{\partial \bar{z}_j}|\Omega \setminus K = -u \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_j} = f_j|\Omega \setminus K \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_o}{\partial \bar{z}_j}|W = 0 = f_j|W ,$$

$\forall\ j = 1,\dots,n.$ Então pelo teorema I.4.1 parte (a) ,

$$\frac{\partial u_o}{\partial \bar{z}_j} = f_j|\Omega \quad , \quad \forall\ j=1,\dots,n$$

(2) $\bar{u}|\Omega \setminus K = u$

Como $f_j|\complement \operatorname{supp}\phi = 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial \bar{z}_j} = f_j$ em $G(\mathbb{C}^n)$, $\forall\ j=1,\dots,n$

segue que $v \in HG(\complement \operatorname{supp} \phi)$.

Seja P a componente conexa não limitada de $\complement \operatorname{supp} \phi$. Como $\operatorname{supp} v$ é compacto então $W := P \cap \complement \operatorname{supp} v$ é aberto não vazio contido no $\complement \operatorname{supp} v$ e portanto $v|W = 0$. Logo, temos que $v \in HG(P)$, P conexo e $v|W = 0$, W aberto não vazio contido em P, e portanto, pelo Princípio do Prolongamento Analítico, teorema III.6.1, $v|P = 0$.

Observe que $P \cap \Omega \neq \emptyset$, já que,

$$\partial P \subset \partial(\complement \operatorname{supp} \phi) = \partial(\operatorname{supp} \phi) \subset \Omega .$$

Como $v|P \cap \Omega = 0$, da definição de $\bar{u}$, segue que

$$(**) \qquad \bar{u}|P \cap \Omega = u_o|P \cap \Omega .$$

Mas

$$P \cap \Omega \subset \Omega \cap \complement \operatorname{supp} \phi \subset \Omega \cap \complement K = \Omega \setminus K$$

e como $u_o|\Omega \setminus K = u_1 = (1-\phi)u$ segue que

$$u_o|P \cap \Omega = (1-\phi)u|P \cap \Omega = u|P \cap \Omega$$

e $\therefore$ de (**) temos que $\bar{u}|P \cap \Omega = u|P \cap \Omega$.

Então temos que

(a) $\Omega \setminus K$ é conexo e $u \in HG(\Omega \setminus K)$, por hipótese

(b) $\bar{u}|\Omega \setminus K \in HG(\Omega \setminus K)$ por (1)

(c) $P \cap \Omega$ é um aberto não vazio contido em $\Omega \setminus K$.

(d) $\bar{u}|P \cap \Omega = u|P \cap \Omega$.

Logo, pelo Princípio do Prolongamento Analítico, teorema III.6.1, segue que

$$\bar{u}|\Omega\setminus K = u$$

$\square$

<u>Observação</u> IV.1. <u>O resultado do teorema</u> IV.1 <u>é falso para</u> $n = 1$. Seja $\Omega = \mathbb{C}$ e $K = \{0\}$ definimos

$$\hat{f}: (\psi,z) \in A_1^o \times (\mathbb{C}\setminus\{0\}) \to \mathbb{C}$$
$$\hat{f}(\psi,z) = \frac{1}{z}$$

Denotemos por f a classe de $\hat{f}$ em $G(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. É claro que $\hat{f} \in HG(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. Suponhamos, por absurdo, que f possue uma extensão analítica g a $\mathbb{C}$, ou seja, que $\exists\, g \in HG(\mathbb{C})$ tal que

$$(*) \qquad g|\mathbb{C}\setminus\{0\} = f$$

Pelo teorema III.4.1, temos que $\exists\, \hat{g} \in E_M[A_1^o \times D(0,1)]$, representante de g, tal que $\hat{g}(\psi,.) \in H(D(0,1))$, $\forall\, \psi \in A_1^o$.

Por (*) segue que

$$\hat{g}|D(0,1)\setminus\{0\} - \hat{f}\,|\,D(0,1)\setminus\{0\} \in N[A_1^o \times (D(0,1)\setminus\{0\})].$$

Como $N[A_1^o \times (D(0,1)\setminus\{0\})]$ é um ideal, então $\hat{\ell} \in N[A_1^o \times (D(0,1)\setminus\{0\})]$ onde

$$\hat{\ell}: (\psi,z) \in A_1^o \times D(0,1) \to z\hat{g}(\psi,z) - 1 .$$

Então, se ℓ é a classe de $\hat{\ell}$ temos que

(i) $\ell \in \mathcal{HG}(D(0,1))$

(ii) $\ell | D(0,1) \setminus \{0\} = 0$.

Então, pelo Princípio do Prolongamento Analítico, teorema III.6.1, segue que

$$\ell | D(0,1) = 0.$$

Logo,

$$\hat{\ell} = z\hat{g} - 1 \in N[A_1^o \times D(0,1)] \text{ ,}$$

o que implica que a aplicação I: $\psi \in A_1^o \to \hat{\ell}(\psi,0)$ pertence a $\mathcal{I}$. Mas $\hat{\ell}(\psi,0) = -1$, ou seja, a função I: $\psi \in A_1^o \to -1$ um elemento de $\mathcal{I}$, o que é um absurdo (ver proposição II.2).

$\square$

oOo

Bibliografia

[A-1] ARAGONA, J. On existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator on generalized differencial forms, a aparecer no Proceedings of the London Mathematical Society.

[A-2] ____________ Théorèmes d'existence pour l'operateur $\bar{\partial}$ sur les formes differentielles généralisées, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 300, séire I, nº 8, 1985, p. 239-242.

[A-3] ____________ Teoremas de existência para o operador $\bar{\partial}$ sobre formas diferenciais generalizadas, Tese de Livre Docência apresentada no IME-USP (1985).

[AC-1] ARAGONA, J. e COLOMBEAU, J.F. On the $\bar{\partial}$-Neumann problem for generalized functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 110 (1),179-199, (1985).

[AC-2] ________________________________ An interpolation theorem for holomorfphic generalized functions. preprint.

[C-1] COLOMBEAU, J.F. A Multiplication of Distributions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 94(1): 96-115, 1983.

[C-2] COLOMBEAU, J.F. New Generalized Functions and Multiplication of Distributions. North Holland Math. Studies, 84. Notas de Matemática [90], Editor: Leopoldo Nachbin.

[C-3] ______________ Elementary introduction to new generalized functions. North Holland Math Studies,113 Notas de Matematica [102], Editor: Leopoldo Nachbin.

[CG-1] COLOMBEAU, J.F. e GALÉ, J.E. Holomorphic Generalized Functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 103(1), 117-133,(1984).

[CG-2] ___________________________ Holomorphic Continuation for Generalized Functions. A aparecer no Journal of Mathematical Analysis and Applications.

[G] GILIOLI, A. Equações Diferenciais Parciais Elípticas. 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1975.

[GR] GROTHENDIECK, A. Espaces Vectoriels Topologiques. Publicação da Sociedade de Matemática de São Paulo - - 1964.

[H] HORVÁTH, J. Topological Vector Spaces and Distributions. Vol. 1, Addison-Wesley, 1966.

[HC] HÖNIG, C.S. A Integral de Lebesgue e suas Aplicações. 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1977.

[HÖ] HÖRMANDER, L. An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Van Nostrand, 1966. North Holland, 1973.

[R] RUDIN, W. Real and Complex Analysis. Mc Graw Hill Inc, 1974.

[S] SILVA, J.T. A equação $\bar{\partial}$ no contexto das funções generalizadas. Dissertação de Mestrado apresentada no IME-USP.

[L-M] LIONS, J.L; MAGENES, E. Problèmes aux limite non homogènes et applications, vol. 1. Dunod - Paris, 1968.

oOo

Índice de Símbolos e Notações

$\mathbb{N}$	é o conjunto dos números inteiros não negativos
$\mathbb{N}^*$	é o conjunto dos inteiros positivos
$\mathbb{Z}$	é o anel dos números inteiros
$\mathbb{R}$	é o corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	é o corpo dos números complexos
$K \subset\subset \Omega$	significa que K é uma parte compacta de Ω
$C^\infty(\Omega)$	denota a álgebra das funções complexas de classe C^∞ definidas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^p)$	denota a álgebra das funções de classe C^∞ definidas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a valores em $\mathbb{R}^p$
$F(X) = F(X;\mathbb{C}) = \mathbb{C}^X$	indica a álgebra de todas as aplicações de X em $\mathbb{C}$
$\mathcal{G}(\Omega)$	é a álgebra das funções generalizadas em $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.
$\mathcal{H}(\Omega)$	é a álgebra das funções holomorfas definidas no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$
$\mathcal{HG}(\Omega)$	é a álgebra das funções holomorfas generalizadas
$\mathcal{D}(\Omega)$	é a álgebra das funções complexas de classe C^∞ com suporte compacto definidas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$\mathcal{D}'(\Omega)$	é o espaço vetorial das distribuições em Ω
supp f	indica o suporte de f
$f\|\Omega$	indica a restrição de f a Ω
$\complement X$	indica o complementar de X em $\mathbb{R}^n$, se $X \subset \mathbb{R}^n$