DARBOUX-INTEGRABILIDADE E MENSURABILIDADE DE FUNÇÕES RIEMANN-INTEGRÁVEIS DEFINIDAS EM COMPACTOS

Marina Pizzotti

TESE APRESENTADA AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR: PROF. DR. GALDINO CÉSAR DA ROCHA FILHO

São Paulo

Novembro , 1989

AGRADECIMENTOS

Ao Professor *Galdino César da Rocha Filho*, pela orientação dedicada e pelo grande incentivo.

Aos Professores *Antonio Gilioli* e *Zara Issa Abud*, pelo interesse com que leram a versão preliminar deste trabalho e pelas valiosas sugestões.

Ao *Hélio*, companheiro querido, por tudo aquilo que faz por mim.

oOo

Ao meu pequeno

Flávio

Í N D I C E

CAPÍTULO III

oOo

INTRODUÇÃO

Em [R], Rocha Filho mostrou que, ao contrário do que acontece quando o espaço de Banach X tem dimensão finita, nem sempre temos a igualdade entre o conjunto R(X) das funções f: $[0,1] \to X$ que são Riemann-integráveis e o conjunto D(X) das funções f: $[0,1] \to X$ que são Darboux-integráveis ou mesmo a inclusão de R(X) no conjunto M(X) das funções f: $[0,1] \to X$ que são Lebesgue mensuráveis. No entanto, para certos espaços de Banach X de dimensão infinita podemos ter $D(X) = R(X)$ ou $R(X) \subset M(X)$. Responder sobre a validade de $D(X) = R(X)$ ou $R(X) \subset M(X)$ para um certo espaço de Banach X não é, em geral, tarefa fácil. O assunto deu origem a diversos trabalhos, como por exemplo [D], [A] e [He], onde foram conseguidas respostas em diversas classes de espaços de Banach.

Neste trabalho, vamos estudar as questões da mensurabilidade e da integrabilidade segundo Darboux de funções Riemann integráveis num contexto mais geral do que aquele de [R], [D], [A] e [He]: o intervalo [0,1] será substituído por um compacto Hausdorff não vazio qualquer onde se toma uma medida de Borel regular e as noções de integrabilidade segundo Riemann e Darboux em relação a uma medida de Borel regular num compacto serão essencialmente as de [KR].

No entanto, no Capítulo I, trataremos ainda do caso particular em que o compacto é [0,1] e a medida é a de Lebesgue. O §1 será dedicado a uma melhor compreensão do fenômeno $D(X) \neq R(X)$ que, como veremos, é causado sempre por certos tipos especiais de funções ou ainda por alguma seqüência básica, sendo portanto de natureza separável. No §2, caracterizaremos os espaços de Banach X com base simétrica generalizada para os quais tem-se $D(X) = R(X)$ (ou $D(X^*) = R(X^*)$) e, supondo adicionalmente dens $X \geqq c$, aqueles para os quais tem-se $R(X) \subset M(X)$ (ou $R(X^*) \subset M(X^*)$). No §3 mostraremos que espaços de Banach X não separáveis com base incondicional generalizada e norma uniformemente diferenciável em cada direção verificam a $D(X) \neq R(X)$, generalizando assim, na classe dos espaços não separáveis com base incondicional, o resultado 3.b.4 de [R] ("Se X é uniformemente convexo de dimensão infinita então $D(X) \neq R(X)$").

O Capítulo II compreende os parágrafos 4 a 8. No §4, estudaremos as noções de integrabilidade segundo Riemann e Darboux em relação a uma medida de Borel regular num compacto e no §5 veremos como se relacionam essas noções com as noções de integrabilidade em relação a uma função $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente, que foram estudadas em [He].

Os problemas $D(X) = R(X)$ e $R(X) \subset M(X)$ em relação a medidas de Borel regulares em compactos serão estudados no §7 e no §8, respectivamente. Dada uma medida μ de Borel regular num compacto K, veremos no §7 que se $D(X) = R(X)$ então toda $f: K \to X$ Riemann-integrável em relação a μ é Darboux-integrável em relação a μ. Mostraremos que a recíproca é verdadeira em algumas situações entre as quais destacamos as seguintes: μ é não puramente atômica (não nula) e K é diádico ou K é localmente conexo (ou supp $\mu \subset F \subset K$ e F é diádico ou localmente conexo) ou μ é não-atômica não-nula e existe $F \subset K$ fechado separável com $\mu(F) > 0$. Em particular, teremos que o problema $D_\alpha(X) = R_\alpha(X)$ para α com parte contínua não constante, estudado em [He], é equivalente ao problema $D(X) = R(X)$. No §8 mostraremos que quando

μ é não puramente atômica (não-nula), se $R(X) \not\subset M(X)$ então e - xiste $f: K \to X$ Riemann-integrável em relação a μ não mensurável em relação ao completamento de μ e que a recíproca é verdadeira no caso em que supp μ é metrizável.

O Capítulo III é dedicado ao estudo de operadores relacionados com os problemas $D(X) = R(X)$ e $R(X) \subset M(X)$ generalizados e tem dois parágrafos: o §9 e o §10.

No §9, transportaremos para o novo contexto os resultados sobre operadores de Darboux (isto é, operadores que levam funções Riemann-integráveis em Darboux integráveis) obtidos em [PR]. Seguindo a linha do §1, mostraremos que se um operador $T: X \to Y$ não é de Darboux então esse fenômeno é causado por uma função de tipo especial ou, ainda, por alguma seqüência básica de X.

No §10 vamos introduzir e estudar uma nova classe de operadores: aqueles que levam funções Riemann-integráveis em funções mensuráveis. Mostraremos que em algumas situações (por exemplo quando assumimos a hipótese do contínuo e o domínio é $c_o(\Gamma)$, $L_1(m)$ para m finita ou um uniformemente convexo) eles são precisamente os operadores de imagem separável.

oOo

ABSTRACT

The subject of this work is the study of the properties (1) $R(K,\mu,X) \subset D(K,\mu,X)$ (every $f\colon K \to X$ μ-Riemann-integrable is μ-Darboux-integrable) and (2) $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$ (every $f\colon K \to X$ μ-Riemann-integrable is $\bar{\mu}$-measurable), where K is a compact, μ a regular Borel measure on K, $\bar{\mu}$ it's completion and X a Banach space. We also study certain operators in relation to these properties.

We study the relationship between the validity of (1) for μ and λ, where λ is the Lebesgue measure on $[0,1]$. We obtain, as a particular case, the equivalence betweeen $R([0,1],\lambda,X) \subset D([0,1],\lambda,X)$ and it's analogue for Riemann-Stieltjes and Darboux-Stieltjes integration. A similar treatment is given to the property (2).

We also give a characterization of the Banach spaces X with symmetric base and dens $X \geq c$ for wich $R([0,1],\lambda,X) \subset M([0,1],\lambda,X)$ (or $R([0,1],\lambda,X^*) \subset M([0,1],\lambda,X^*)$) and we show that if X is non-separable, has an inconditional base and a norm wich is uniformly differentiable in every direction then $R([0,1],\lambda,X) \not\subset D([0,1],\lambda,X)$.

We also study certain general aspects of the problem $R([0,1],\lambda,X) \subset D([0,1],\lambda,X)$ and we present several results on μ-integrability.

oOo

NOTAÇÕES E TERMINOLOGIA

- $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$
- $|A|$: cardinalidade de A
- $\chi_0 = |\mathbb{N}|$; $c = |\mathbb{R}|$; χ_1 : menor cardinal não enumerável
- ω: menor ordinal infinito; ω_1: menor ordinal não enumerável
- $\dot{\cup}$: reunião disjunta
- $\bar{A}$: fecho de A ; $\overset{\circ}{A}$: interior de A
- ∂A: fronteira de A, $\partial_B A$: fronteira de A em B
- $B-A = \{x \in B: x \notin A\}$ (às vezes indicado apenas por $\complement A$, quando estiver claro qual é B)
- λ : medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ ou num intervalo de $\mathbb{R}$ ou ainda sua restrição aos borelianos de $\mathbb{R}$ ou de um intervalo de $\mathbb{R}$
- Seja (S,Σ,μ) um espaço de medida finita. Um átomo de μ é um conjunto $A \in \Sigma$ com $\mu(A) > 0$ tal que para todo $B \in \Sigma$ $B \subset A$ tem-se $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B-A) = 0$. Dizemos que μ é não-atômica se não existem átomos de μ. Dizemos que μ é puramente atômica se para cada $A \in \Sigma$ com $\mu(A) > 0$ existe $B \subset A$ tal que B é um átomo de μ.
- supp μ: suporte de $\mu = \{x \in K: \mu(V) > 0$ para todo aberto V com $x \in V\}$ (aqui μ é uma medida definida nos borelianos de um compacto Hausdorff K)
- compacto: espaço topológico compacto Hausdorff
- χ_E: função característica de E, isto é $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$ e $\chi_E(x) = 0$ se $x \notin E$

- $f|_A$: restrição de função f ao conjunto A
- função crescente $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: função tal que $f(t) \leqq f(s)$ se $t,s \in A$ e $t < s$.
- $f(t^+)$: $\lim_{s\to t^+} f(s)$; $f(t^-)$: $\lim_{s\to t^-} f(s)$ (para funções cujo domínio contém um intervalo do tipo $]t,t+\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$ no primeiro caso ou $]t-\varepsilon,t[$, $\varepsilon > 0$ no segundo caso)
- partição de $[a,b]$: seqüência $(t_o,t_1,\dots,t_n)$ de pontos de $[a,b]$ com $0 = t_o < t_1 < \dots < t_n = b$
- diâmetro da partição $(t_o,t_1,\dots,t_n)$: $\max\{\Delta t_i: i\in\{1,\dots,n\}\}$, onde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$
- refinamento de uma partição $(t_o,t_1,\dots,t_n)$ de $[a,b]$: é uma outra partição $(s_o,s_1,\dots,s_m)$ de $[a,b]$ com $\{t_o,t_1,\dots,t_n\} \subset \{s_o,s_1,\dots,s_m\}$

Seja X um espaço normado

- Dizemos que uma função $f: [a,b] \to X$ é Riemann-integrável em $[a,b]$ se existe $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $(t_o,t_1,\dots,t_n)$ com diâmetro menor do que δ e para toda escolha de pontos $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{n}$ com $x_i \in [t_{i-1},t_i]$ $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ tem-se

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta t_i - J\right\| < \varepsilon$$

- Dizemos que uma função $f: [a,b] \to X$ é Darboux-integrável em $[a,b]$ se f é limitada em $[a,b]$ e se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f em $[a,b]$ tem medida de Lebesgue nula.

- Dizemos que uma função $f: [a,b] \to X$ é Lebesgue-mensurável (ou simplesmente mensurável) se existem uma seqüência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções definidas em $[a,b]$ com valores em X tal que cada f_n é do tipo $\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}$ onde $k \in \mathbb{N}$, E_i é Lebesgue-mensurável e $c_i \in X$ $\forall\, i \in \{1,\dots,k\}$ e um conjunto $A \subset [a,b]$ Lebesgue-mensurável com $\lambda(A) = 0$ e $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall x \in [a,b]-A$
- $R(X) = \{f: [0,1] \to X: \ f$ é Riemann-integrável em $[0,1]\}$
- $D(X) = \{f: [0,1] \to X: \ f$ é Darboux-integrável em $[0,1]\}$
- $M(X) = \{f: [0,1] \to X: \ f$ é mensurável$\}$

Seja $A \subset X$ (X normado)

- $\operatorname{diam} A = \sup\{\|x-y\|: x,y \in A\}$
- $\operatorname{co}(A)$: intersecção de todos os subconjuntos convexos de X que contém A
- $\overline{\operatorname{co}}(A)$: intersecção de todos os subconjuntos convexos fechados de X que contém A
- span A: subespaço vetorial gerado por A ($A \subset X$)
- $\operatorname{dens} X = \inf\{|D|: D$ é denso em $X\}$
- X^*: dual de X (conjunto dos funcionais lineares contínuos em X)
- Dada uma família $(X_i)_{i\in I}$ de espaços de Banach e $p \in [1,\infty[$ denotamos por $(\bigoplus_{i\in I} X_i)_p$ o conjunto das famílias $(x_i)_{i\in I}$ com $x_i \in X_i$ $\forall\, i\in I$ e $\sum_{i\in I} \|x_i\|_i^p < \infty$ (onde $\|\ \|_i$ indica a norma de X_i), que é, de modo natural um espaço vetorial e é um espaço de Banach considerado com a norma $\|(x_i)_{i\in I}\| = (\Sigma\|x_i\|_i^p)^{1/p}$

De modo análogo definimos $(\bigoplus_{i\in I} X_i)_0$ como o espaço de Banach das famílias $(x_i)_{i\in I}$ com $x_i \in X_i$, $\forall\, i\in I$ e $\{i\in I: \|x_i\|_i > \varepsilon\}$ finito $\forall\, \varepsilon > 0$, considerado com a norma $\|(x_i)_{i\in I}\| = \sup_{i\in I}\|x_i\|_i$ e também $(\bigoplus_{i\in I} X_i)_\infty$ como o espaço de Banach das famílias $(x_i)_{i\in I}$ com $x_i \in X_i$, $\forall$ $i\in I$ e $\sup_{i\in I}\|x_i\|_i < \infty$, considerado com a norma $\|(x_i)_{i\in I}\| = \sup_{i\in I}\|x_i\|_i$

. $\ell_p(I) = (\bigoplus_{i\in I} X_i)_p$, onde $X_i = \mathbb{R}$, $\forall$ $i\in I$

. $c_o(I) = (\bigoplus_{i\in I} X_i)_o$, onde $X_i = \mathbb{R}$, $\forall$ $i\in I$

. $\ell_\infty(I) = (\bigoplus_{i\in I} X_i)_\infty$, onde $X_i = \mathbb{R}$, $\forall$ $i\in I$

Seja K um compacto Hausdorff (e X normado)

. $C(K,X) = \{f: K \to X: f$ é contínua$\}$, considerado com a norma $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|: x\in K\}$

. $C(K) = C(K,\mathbb{R})$

Seja $T: X \to Y$ um operador linear (X,Y espaços de Banach)

. T^*: adjunto de T

. $\operatorname{Ker} T = \{x\in X: T(x) = 0\}$

. $K(X,Y)$: espaço dos operadores compactos $T: X \to Y$

. $WK(X,Y)$: espaço dos operadores fraco compactos $T: X \to Y$

. Sejam (S,Σ,m) um espaço de medida e $p \in [1,\infty]$. Escreveremos $L_p(m)$ ao invés de $L_p(S,\Sigma,m)$

. Dizemos que um compacto Hausdorff K é separável em medida se para toda medida μ de Borel regular em K tem-se $L_1(\mu)$ separável.

. Seja η um cardinal. Se m é a medida produto em $[0,1]^{\eta}$, onde em $[0,1]$ consideramos a medida de Lebesgue, escreveremos $L_p([0,1]^{\eta})$ ao invés de $L_p(m)$. De modo análogo escreveremos $L_p(\{0,1\}^{\eta})$ quando consideramos em $\{0,1\}^{\eta}$ a medida produto, tomando-se em $\{0,1\}$ a medida μ tal que $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$.

oOo

CAPÍTULO I

§1. ALGUNS ASPECTOS GERAIS DO PROBLEMA $D(X) = R(X)$

Neste parágrafo vamos apresentar alguns aspectos esclarecedores relativos ao problema $D(X) = R(X)$, para espaços de Banach X.

Em [Ha 2], Haydon afirma que se $D(X) \neq R(X)$ então existe uma função $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável não Darboux-integrável que só não se anula nos racionais diádicos. Apresentaremos aqui uma prova desse resultado e obteremos diversas conseqüências interessantes. Provaremos, por exemplo, que a afirmação de Haydon continua verdadeira se substituirmos os racionais diádicos por qualquer outro conjunto enumerável e denso em $[0,1]$, fato esse que será utilizado no §7. Mostraremos também que, quando temos $D(X) \neq R(X)$, o mesmo acontece com qualquer subespaço denso de X e que se $\mathcal{B}$ é uma base de X e $D(X) \neq R(X)$ então esse fenômeno é "causado" por alguma base de blocos de $\mathcal{B}$. Com esse resultado, é possível compreender melhor a igualdade $D(X) = R(X)$ para certos espaços como $X = \ell_1(\Gamma)$ ou $X = Y^*$ onde Y é o espaço de Tsirelson. Apresentaremos ainda uma condição necessária e suficiente para $D(X) \neq R(X)$ e provaremos que se $D(X/Y) = R(X/Y)$ (Y subespaço fechado de X) e $D(Y) = R(Y)$ então $D(X) = R(X)$.

Em todo este parágrafo, X indicará um espaço de Banach.

1.1. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Seja $g: [0,1] \to X$ Riemann-integrável. Seja $h: [0,1] \to X$ tal que para cada $I = [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$ com $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0,1,\dots,2^n - 1\}$ e para cada $x \in \overset{\circ}{I}$ existem $a,b \in I$ com $h(x)=g(b)-g(a)$.

Então h é Riemann-integrável.

De fato, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} [g(x_i)-g(y_i)] \frac{1}{2^n} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se} \quad x_i, y_i \in [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}],\ i \in \{0,1,\dots,2^n-1\}.$$

Se tomamos $z_i \in]\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}[$ então existem $x_i, y_i \in [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$ com $h(z_i) = g(x_i)-g(y_i)$. Logo, se $z_i \in]\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}[$, $i \in \{0,1,\dots,2^n-1\}$ então $\left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} h(z_i)\frac{1}{2^n} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e assim se $z_i, w_i \in]\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}[$, $i \in \{0,1,\dots,2^n-1\}$ temos que $\left\| \sum_{i=0}^{2^n-1} [h(z_i)-h(w_i)] \frac{1}{2^n} \right\| < \varepsilon$. Além disso como g é limitada então h é limitada. Por I.1.32 de [He] temos que h é Riemann-integrável.

O item a) do Lema seguinte foi sugerido pelo professor Antonio Gilioli para ser utilizado no §4. O ítem b), que é conseqüência de a), será utilizado neste parágrafo e no §9.

1.2. LEMA.

a) Sejam $a_1, \dots, a_n, M$ números reais não negativos e $\{x_i\}_{i=1}^n$ uma seqüência de X tais que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \theta_i a_i x_i \right\| \leq M \quad \text{se} \quad \theta_i \in \{-1,1\}\ \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Se $b_1, \dots, b_n$ são números reais não negativos tais que $b_i \leq a_i$ $\forall\ i \in \{1,\dots,n\}$ então $\left\| \sum_{i=1}^n b_i x_i \right\| \leq L$, onde $L = M$ se X for espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $L = 2M$ se X for espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

b) Seja $f\colon [0,1] \to X$ uma função Riemann-integrável tal que $\{t\in[0,1]\colon f(t) = 0\}$ é denso em $[0,1]$. Se $g\colon[0,1] \to [0,\infty[$ é uma função limitada, então $gf\colon [0,1] \to X$ é Riemann-integrável (com integral nula).

Prova. a) Faremos a prova para o caso em que X é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Para o caso complexo, as adaptações são usuais. Seja $x^* \in X^*$ com $\|x^*\| \leq 1$. Para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, tomemos $\Theta_i = 1$ se $x^*(x_i) \geq 0$ e $\Theta_i = -1$ se $x^*(x_i) < 0$. Então temos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i|x^*(x_i)| = |\sum_{i=1}^{n} \Theta_i a_i x^*(x_i)| = |x^*(\sum_{i=1}^{n} \Theta_i a_i x_i)| \leq M$$

e portanto

$$|x^*(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} b_i|x^*(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} a_i|x^*(x_i)| \leq M$$

o que completa a prova de a).

b) Seja $s = \sup\{\|g(t)\|\colon t\in[0,1]\} + 1$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que para cada partição $d = (t_o,t_1,\ldots,t_n)$ com diâmetro menor do que δ tenhamos

$$\|\sum_{i=1}^{n} [f(z_i)-f(w_i)]\Delta t_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2s} \quad , \text{ se } z_i,w_i\in[t_{i-1},t_i] \ \forall i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Seja $d = (t_o,t_1,\ldots,t_n)$ uma partição com diâmetro menor do que δ. Como f se anula num conjunto denso temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \Theta_i f(z_i)\Delta t_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2s} \quad \text{se } \Theta_i \in \{-1,1\} \text{ e } \quad z_i \in [t_{i-1},t_i] \ \forall i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Assim, dados $z_1,\ldots,z_n$ com $z_i \in [t_{i-1},t_i]$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, aplicando a) para $x_i = f(z_i)$, $a_i = \Delta t_i$ e $b_i = \dfrac{g(z_i)}{s} \Delta t_i$, $i=1,\ldots,n$ temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(z_i)g(z_i)\Delta t_i \right\| = s \left\| \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \frac{g(z_i)}{s} \Delta t_i \right\| \leq \varepsilon .$$

Logo gf é Riemann-integrável com integral nula.

1.3. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Se $D(X) \neq R(X)$ então existem $A \subset \left\{ \dfrac{i}{2^n} : n \in \mathbb{N},\ i \in \{0,1,\ldots,2^n\} \right\}$ e $h: [0,1] \to X$ Riemann-integrável não Darboux-integrável com $h(x) = 0$ se $x \notin A$ e $\|h(x)\| = 1$ se $x \in A$.

<u>Prova</u>. Seja $g: [0,1] \to X$ Riemann-integrável e não Darboux-integrável. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$F_n = \left\{ t \in [0,1]: \inf_{\varepsilon>0} \sup \{ \|g(s) - g(r)\| : s,r \in]t-\varepsilon,t+\varepsilon[\cap [0,1]\} > \frac{1}{n} \right\}.$$

Tomemos $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(F_{n_o}) > 0$. Vamos chamar de intervalo diádico um intervalo do tipo $[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}]$, $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{0,1,\ldots,2^k-1\}$. Para cada intervalo diádico I com $\overset{o}{I} \cap F_{n_o} \neq \emptyset$ fixemos $x_I, y_I \in \overset{o}{I}$ com $\|g(x_I) - g(y_I)\| > \dfrac{1}{2n_o}$. Sendo m_I o ponto médio de I, defino $\tilde{h}(m_I) = g(x_I) - g(y_I)$.

Como um ponto é ponto médio de, no máximo, um intervalo diádico , temos assim (bem) definida uma função $\tilde{h}$ em todos os pontos médios de intervalos diádicos I com $\overset{\circ}{I} \cap F_{n_o} \neq \emptyset$. Em todos os demais pontos de $[0,1]$, defino $\tilde{h}(x) = 0$. De acordo com a observação (1.1), $\tilde{h}$ é Riemann-integrável. Temos também que $\{t \in [0,1]: \tilde{h}(t) = 0\}$ é denso em $[0,1]$. Fazendo $\Theta(t) = 0$ se $\tilde{h}(t) = 0$ e $\Theta(t) = \frac{1}{\|\tilde{h}(t)\|}$ se $\tilde{h}(t) \neq 0$ temos que $0 \leq \Theta(t) \leq 2n_o$, $\forall t \in [0,1]$ e assim por (1.2.b)), tomando $h = \Theta\tilde{h}$ temos que h é Riemann-integrável, $h(t)=0$ se $\tilde{h}(t) = 0$ e $\|h(t)\| = 1$ se $\tilde{h}(t) \neq 0$. Mostremos que h não é Darboux-integrável. Seja $x_o \in F_{n_o} - \mathbb{Q}$. Cada vizinhança V de x_o contém um intervalo diádico I com $x_o \in \overset{\circ}{I}$. Assim $\overset{\circ}{I} \cap F_{n_o} \neq \emptyset$ e portanto $\tilde{h}(m_I) \neq 0$. Logo $\|h(m_I)\| = 1$. Como $m_I \in I \subset V$ e como $h(x_o) = \tilde{h}(x_o) = 0$ então h é descontínua em x_o. Assim h é descontínua em $F_{n_o} - \mathbb{Q}$ e como $0 < \lambda(F_{n_o}) = \lambda(F_{n_o} - \mathbb{Q})$ então h não é Darboux-integrável.

1.4. <u>COROLÁRIO</u>. Se $D(X) \neq R(X)$ então existe um subespaço Y de X, Y separável e uma função $h: [0,1] \to Y$ Riemann-integrável e não Darboux-integrável. Conseqüentemente são equivalentes:

i) $D(X) = R(X)$.

ii) $D(Y) = R(Y)$ para todo Y subespaço separável de X.

<u>Prova</u>. Se $D(X) \neq R(X)$, tomamos $h: [0,1] \to X$ como em (1.3) e $Y = \overline{\text{span } h(A)}$.

1.5. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Se existe $g: [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que (na notação de (1.3)) tenhamos F_{n_o} denso em $[0,1]$ para algum $n_o \in \mathbb{N}$ então podemos conseguir $h: [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que $\|h(x)\| = 1$ se x é racional diádico e $h(x) = 0$ caso contrá - rio (e portanto h não será Darboux-integrável). Para a prova, basta seguir os passos de (1.3).

1.6. PROPOSIÇÃO. Se $D(X) \neq R(X)$ então existem $D \subset [0,1]$ enumerável denso e $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável com $\|f(x)\| = 1$ se $x \in D$ e $f(x) = 0$ se $x \notin D$ (e portanto f não é Darboux-integrável).

Prova. Se $D(X) \neq R(X)$, tomemos $h: [0,1] \to X$ como em (1.3) e façamos $S = \{t \in [0,1]: h(t) \neq 0\}$. Então $\|h(t)\| = 1$ se $t \in S$, $h(t)=0$ se $t \notin S$, S é enumerável, h é Riemann-integrável e não é Darboux integrável. Seja P a reunião de todos os intervalos diádicos abertos onde h é nula. Como h é limitada, contínua em P e não é Darboux-integrável então $\lambda(\complement P) > 0$.

Seja $\alpha: [0,1] \to [0,1]$ dada por $\alpha(t) = \dfrac{\lambda([0,t] \cap \complement P)}{\lambda(\complement P)}$.

Para cada $x \in [0,1], x \in \alpha(S)$, escolho $t_x \in S$ com $\alpha(t_x) = x$ e defino $f(x) = h(t_x)$. Se $x \notin \alpha(S)$ faço $f(x) = 0$. Note que se $x \notin \alpha(S)$ então $x = \alpha(t_x)$ para algum $t_x \notin S$ e portanto $f(x) = 0 = h(t_x)$. Assim, para cada $x \in [0,1]$, existe $t_x \in [0,1]$ tal que $f(x) = h(t_x)$ e $\alpha(t_x) = x$.

Vamos mostrar que f é Riemann-integrável.

Tomemos $\varepsilon > 0$. Como h é Riemann-integrável, existem $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_m = 1$ tais que se $u_i, v_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ então

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} [h(u_i)-h(v_i)]\Delta t_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\, \lambda(\complement P) .$$

Assim, se $\xi_i, \xi_i' \in [t_{i-1}, t_i]$ e $\Theta_i \in \{-1,1\}$ $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \Theta_i [h(\xi_i) - h(\xi_i')]\Delta t_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\, \lambda(\complement P)$$

e como $[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\lambda(\complement P) = \lambda(]t_{i-1}, t_i] \cap \complement P) \leq \Delta t_i$ $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$, decorre de (1.2.a)) que

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} [h(\xi_i) - h(\xi_i')][\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\lambda(\complement P) \right\| \leq \varepsilon\, \lambda(\complement P)$$

e portanto $\left\| \sum_{i=1}^{m} [h(\xi_i) - h(\xi_i')][\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| \leq \varepsilon$. Com isso, temos também que se $J \subset \{1,\ldots,m\}$ e $\xi_i, \xi_i' \in [t_{i-1}, t_i]$ $\forall i \in J$ então

$$\left\| \sum_{i \in J} [h(\xi_i) - h(\xi_i')][\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| \leq \varepsilon .$$

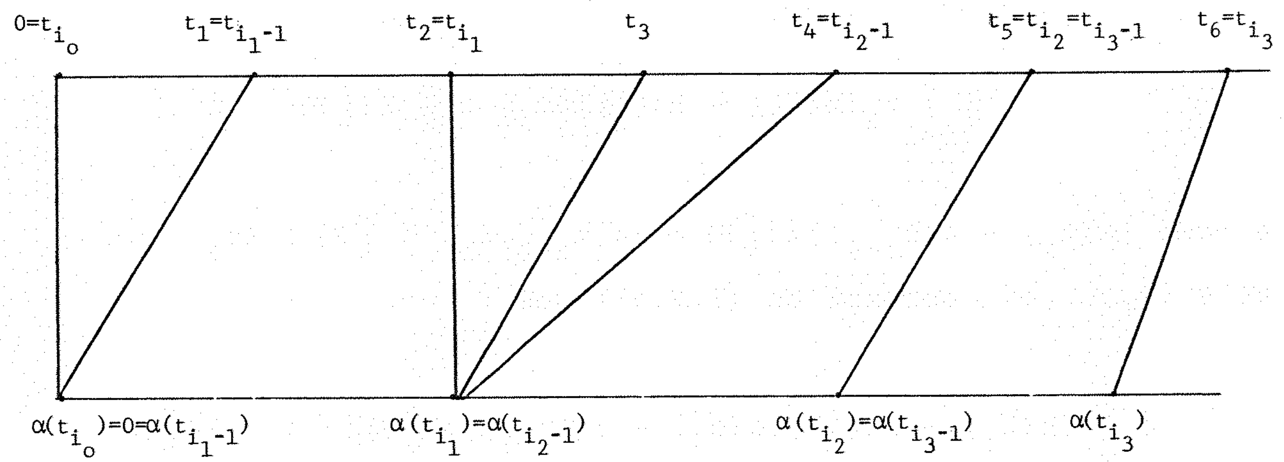
Consideremos a partição d determinada pelos pontos do tipo $\alpha(t_i)$, $i = 1,\ldots,m$. Existem índices $i_o = 0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ tais que $\alpha(t_{i_r}) < \alpha(t_{i_{r+1}})$ se $r = 0,1,\ldots,k-1$ e $\alpha(t_{i_r}) = \alpha(t_i)$ se $i_r < i < i_{r+1}$ e assim d é a partição determinada pelos pon - tos distintos $\alpha(t_{i_o}), \alpha(t_{i_1}), \ldots, \alpha(t_{i_k})$, isto é,

$$d = (\alpha(t_{i_o}), \alpha(t_{i_1}), \ldots, \alpha(t_{i_k})) .$$

Para cada $r = 1,\ldots,k$ temos que

$$\alpha(t_{i_r}) - \alpha(t_{i_r - 1}) = \alpha(t_{i_r}) - \alpha(t_{i_{r-1}})$$

e que se $x = \alpha(t) \in]\alpha(t_{i_{r-1}}), \alpha(t_{i_r})[$ então $t \in]t_{i_r -1}, t_{i_r}[$, isto é $t_x \in]t_{i_r -1}, t_{i_r}[$.



Assim se $\eta_r, \eta_r' \in]\alpha(t_{i_{r-1}}), \alpha(t_{i_r})[$, $r = 1,\dots,k$ temos $f(\eta_r) = h(t_{\eta_r})$, $f(\eta_r') = h(t_{\eta_r'})$, onde t_{η_r} e $t_{\eta_r'} \in]t_{i_r -1}, t_{i_r}[$.

Com isso, temos

$$\left\| \sum_{r=1}^{k} [f(\eta_r) - f(\eta_r')][\alpha(t_{i_r}) - \alpha(t_{i_{r-1}})] \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{r=1}^{k} [h(t_{\eta_r}) - h(t_{\eta_r'})][\alpha(t_{i_r}) - \alpha(t_{i_r -1})] \right\| \leq \varepsilon .$$

Assim, como $(\alpha(t_{i_o}), \alpha(t_{i_1}), \dots, \alpha(t_{i_k}))$ é uma partição de $[0,1]$, usando [He] I.1.32, temos que f é Riemann-integrável. Temos também $\|f(x)\| = 1$ se $x \in \alpha(S)$ e $f(x) = 0$ caso contrário. Além disso, S é enumerável e portanto $\alpha(S)$ é enumerável. Para completar a prova mostremos que $D = \alpha(S)$ é denso em $[0,1]$.

(1) Se $t \in \complement P - \mathbb{Q}$ e V é uma vizinhança de t então existe um intervalo diádico aberto I com $t \in I \subset V$. Como $t \in \complement P$, existe $s \in I$ com $h(s) \neq 0$, isto é, $V \cap S \neq \emptyset$. Logo $t \in \overline{S}$.

(2) Seja $J = \left\{x \in [0,1]: \alpha^{-1}(\{x\}) \text{ tem mais de um ponto}\right\}$. Como $\alpha^{-1}(\{x\})$ é um intervalo fechado então J é enumerável. Além disso $\alpha(P) \subset J$.

(3) Se $x \notin J \cup \alpha(\mathbb{Q} \cap [0,1])$ então existe um único $t_x \in [0,1]$ com $\alpha(t_x) = x$ e por (2) $t_x \notin P$. Assim $t_x \in \complement P - \mathbb{Q}$ e por (1), $t_x \in \overline{S}$. Como α é contínua, temos que $\alpha(\overline{S}) \subset \overline{\alpha(S)}$ e portanto $x \in \overline{\alpha(S)}$.

(4) De (3) segue que $\overline{\alpha(S)} \supset [0,1] - (J \cup \alpha(\mathbb{Q} \cap [0,1]))$. Como $J \cup \alpha(\mathbb{Q} \cap [0,1])$ é enumerável, temos que $\overline{\alpha(S)} = [0,1]$.

1.7. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Tendo em vista (1.5) e o resultado anterior po podemos agora conseguir $A = \left\{\frac{i}{2^n}: n \in \mathbb{N},\ i \in \{0,1,\ldots,2^n\}\right\}$ em (1.3).

1.8. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Se $f: [0,1] \to X$ é tal que $f(t) = 0$ se t não é racional diádico e $f(1/2), f(1/4), f(3/4), f(1/8), f(3/8), f(5/8), \ldots$ é uma seqüência que converge a zero, então f é Darboux-integrável.

1.9. <u>COROLÁRIO</u>. Seja $A = \left\{\frac{i}{2^n}: n \in \mathbb{N},\ i \in \{0,1,\ldots,2^n\}\right\}$.

Se $D(X) \neq R(X)$ e Y é um subespaço vetorial (não necessariamente fechado) de X, Y denso em X, então existe $f: [0,1] \to Y \subset X$ Riemann-integrável tal que $f(x) = 0$ se $x \notin A$, $\|f(x)\| = 1$ se $x \in A$ (e portanto f não é Darboux-integrável) e $f(x) \neq f(y)$ se $x,y \in A$, $x \neq y$.

<u>Prova</u>. Tomemos $h: [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que $h(x) = 0$ se $x \notin A$ e $\|h(x)\| = 1$ se $x \in A$.

Afirmação: existe uma função $y: A \to Y$ $y(x) = y_x$ injetora tal que $\|y_x\| = 1$ $\forall x \in A$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $x \in A$ que é ponto médio de um intervalo diádico de comprimento $\frac{1}{2^{n-1}}$ temos $\|y_x - h(x)\| < \frac{1}{2^n}$.

Provada essa afirmação vamos considerar $f: [0,1] \to Y$

$$f(x) = \begin{cases} y_x & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = f(x) - h(x).$$

Por (1.8) temos que g é Darboux integrável e portanto Riemann-integrável. Como h é Riemann-integrável temos que f é Riemann-integrável. Além disso, temos que $\|f(x)\| = 1$ $\forall x \in A$ e $f(x) \neq f(y)$ se $x, y \in A$ e $x \neq y$, o que completa a prova.

Prova da afirmação: Em primeiro lugar, façamos algumas observações. Seja B um subespaço de dimensão finita de Y. Então $Y-B$ é denso em X. De fato, se $x \in \complement B$, tomemos V vizinhança de x, $V \subset \complement B$. Dada uma vizinhança W de x temos que $W \cap V \subset \complement B$ e $W \cap V$ tem ponto de Y. Assim $W \cap V \cap (Y-B) \neq \emptyset$. Logo $W \cap (Y-B) \neq \emptyset$. Assim $x \in \overline{Y-B}$. Logo $\complement B \subset \overline{Y-B}$. Como $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ então $\overline{\complement B} = X$ e assim $\overline{Y-B} = X$.

Mostremos agora que se $x \in X$, $\|x\| = 1$ e $\varepsilon > 0$ então existe $y \in Y-B$ com $\|y\| = 1$ e $\|y-x\| < \varepsilon$. De fato, tomando $z \in Y-B$ com $\|z-x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ temos $|\,\|z\|-1\,| = |\,\|z\|-\|x\|\,| < \frac{\varepsilon}{2}$ e assim, sendo $y = \frac{z}{\|z\|}$ temos que $y \in Y-B$, $\|y\| = 1$ e

$$\|y-x\| \leq \left\|\frac{z}{\|z\|} - z\right\| + \|z-x\| = \left\|z\left(\frac{1}{\|z\|} - 1\right)\right\| + \|z-x\| =$$

$$= |\,\|z\|-1\,| + \|z-x\| < \varepsilon.$$

Consideremos agora $y_o, y_1 \in Y$, $y_o \neq y_1$, com $\|y_o\| = \|y_1\| = 1$. Seja $B = \text{span}\{y_o, y_1\}$. Pelo exposto anteriormente, existe $y_{1/2} \in Y-B$ com $\|y_{1/2} - h(1/2)\| < \frac{1}{2}$ e $\|y_{1/2}\| = 1$.

Façamos $I_1, I_2, \ldots$ uma enumeração dos intervalos diádicos onde $I_1 = [0,1]$. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e definidos os y_x, se x é ponto médio de algum I_j, $j < n$, seja

$B_n = \text{span}\{y_x : x=0,\ x=1$ ou x é ponto médio de algum I_j com $j < n\}$.

Se x é agora o ponto médio de I_n e m é tal que o comprimento de I_n é $\frac{1}{2^{m-1}}$ então, pelo exposto anteriormente, temos que existe $y_x \in Y-B_n$ com $\|y_x\| = 1$ e $\|y_x - h(x)\| < \frac{1}{2^m}$. A prova se completa por indução.

Nosso próximo resultado será utilizado em (7.6).

1.10. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Se $D(X) \neq R(X)$ e D é um subconjunto enumerável de $[0,1]$ denso em $[0,1]$ então existe $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que $f(t) = 0$ se $t \notin D$ e $\|f(t)\| = 1$ se $t \in D$.

<u>Prova</u>. Se $D(X) \neq R(X)$ então por (1.7) existe $h: [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que $\|h(t)\| = 1$ se t é racional diádico e $h(t) = 0$ caso contrário. Seja $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de D. Como D é denso, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\{d_1, \ldots, d_{n_1}\} \sqcup \{0,1\}$ define uma partição P_1 de $[0,1]$ com diâmetro menor do que $\frac{1}{2}$. Escolhamos $x_1, \ldots, x_{n_1} \in X$ com $\|x_i\| = 1$ se $i \in \{1, \ldots, n_1\}$ e definamos $f(d_i) = x_i$, se $i \in \{1, \ldots, n_1\}$. Tomemos agora $n_2 > n_1$ de modo que $\{d_1, \ldots, d_{n_2}\} \sqcup \{0,1\}$ defina uma partição P_2 de $[0,1]$ com diâmetro menor do que $\frac{1}{3}$.

Para cada $i \in \{n_1+1, \ldots, n_2\}$ seja I_i o intervalo da partição P_1 ao qual d_i pertence. Escolhamos r_i um racional diádico com

$r_i \in I_i$ e definamos $f(d_i) = h(r_i)$.

Indutivamente, conseguimos $n_1 < n_2 < \ldots$ naturais de modo que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{d_1,\ldots,d_{n_k}\} \sqcup \{0,1\}$ defina uma partição P_k de $[0,1]$ com diâmetro menor do que $\frac{1}{k}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $i \in \{n_k+1,\ldots,n_{k+1}\}$, tomemos I_i o intervalo da partição P_k ao qual d_i pertence, escolhamos r_i um racional diádico com $r_i \in I_i$ e definamos $f(d_i) = h(r_i)$.

Com isso, teremos definido f em D de modo que $\|f(t)\|=1$ se $t \in D$. Se $t \in [0,1]-D$, façamos $f(t) = 0$.

Vamos mostrar que f é Riemann-integrável.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ tal que se $(t_o,t_1,\ldots,t_n)$ é uma partição de $[0,1]$ com diâmetro menor do que $\frac{1}{k}$ então

$\|\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\Delta t_i\| < \varepsilon/2$ se $\xi_i \in [t_{i-1},t_i]$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ (note que h tem integral de Riemann nula).

Seja P_k a partição construída acima. Sabemos que P_k tem diâmetro menor do que $\frac{1}{k}$. Temos ainda que se $[a,b]$ é um intervalo da partição P_k e se $t \in]a,b[$ então $f(t) = h(s)$ para algum $s \in [a,b]$. De fato, se $t \notin D$ temos que $f(t) = 0 = h(s)$ para qualquer $s \in]a,b[$ que não é racional diádico. Por outro lado, se $t \in D$, digamos $t = d_i$, então como $t \in]a,b[$ e $[a,b]$ é um dos intervalos de P_k temos que $d_i \notin \{d_1,\ldots,d_{n_k}\}$ e portanto $i \in \{n_j+1,\ldots,n_{j+1}\}$ para algum $j \geq k$. Assim, pela nossa construção, sendo I o intervalo de P_j ao qual $t = d_i$ pertence temos $f(t) = f(d_i) = h(s)$ para algum $s \in I$. Como P_j é um refinamento de P_k e como $t \in I \cap]a,b[$ então $I \subset [a,b]$ e assim $s \in [a,b]$.

Assim, sendo $P_k = (0,q_1,\ldots,q_m)$ e $t_i,t_i' \in]q_{i-1},q_i[$, $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$, existem $s_1,\ldots,s_m,s_1',\ldots,s_m'$ tais que

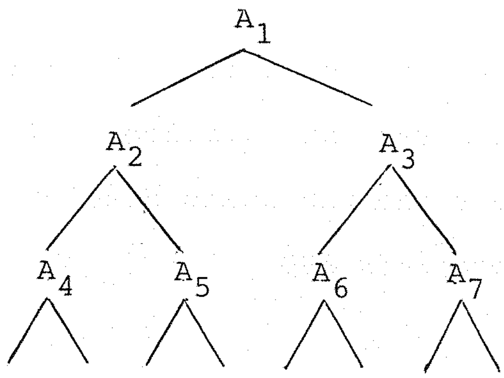
$s_i, s_i' \in]q_{i-1}, q_i[\ \forall i \in \{1,\ldots,m\}$ e

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} [f(t_i)-f(t_i')]\Delta q_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} [h(s_i)-h(s_i')]\Delta q_i \right\| < \varepsilon .$$

Assim, por [He] I.1.32, f é Riemann-integrável.

Vamos apresentar agora uma condição necessária e suficiente para $D(X) \neq R(X)$.

1.11. DEFINIÇÃO. Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que uma seqüência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos não vazios de A é um pré-sistema de Haar de A se para cada $n\in\mathbb{N}$ temos $A_{2n} \sqcup A_{2n+1} \subset A_n$ e os A_i, $i \in \{2^n, 2^n+1, \ldots, 2^{n+1}-1\}$ são dois a dois disjuntos ([DU] pág.191).



1.12. PROPOSIÇÃO. São equivalentes:

i) $D(X) \neq R(X)$.

ii) Existe um pré-sistema de Haar $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que:

a) para cada $k\in\mathbb{N}$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\left\| \sum_{i=1}^{2^n} x_i \frac{1}{2^n} \right\| < \frac{1}{k}$ para toda seqüência $\{x_i\}_{i=1}^{2^n}$ com $x_i \in A_{2^n+i-1}$ ou $x_i = 0$ se $i = 1,\ldots,2^n$;

b) $\|x\| = 1$, $\forall x \in A_1$;

c) A_1 é enumerável .

iii) Existe uma família $\{x_d\}_{d\in D} \subset X$, onde

$D = \left\{\frac{j}{2^n}: n\in\mathbb{N},\ j \in \{0,1,\ldots,2^n\}\right\}$, tal que $\|x_d\| = 1$, $\forall d \in D$,

$x_d \neq x_{d'}$ se $d\neq d'$ e para cada $k\in\mathbb{N}$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$\|\sum_{i=1}^{2^n} a_i \frac{1}{2^n}\| < \frac{1}{k}$ se para cada $i \in \{1,\ldots,2^n\}$ temos $a_i = 0$

ou $a_i = x_d$ para algum $d \in [\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]$.

<u>Prova</u>. iii) $\Longrightarrow$ ii) Basta considerar $A_1 = \{x_d: d\in D\}$,

$A_2 = \{x_d: d \in [0,\frac{1}{2}[\}$, $A_3 = \{x_d: d \in [\frac{1}{2},1[\}$, e em geral se $n\in\mathbb{N}$ e $i \in \{1,\ldots,2^n\}$, consideramos $A_{2^n+i-1} = \{x_d: d \in [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}[\}$.

i) $\Longrightarrow$ iii) Se $D(X) \neq R(X)$, seja $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável com $\|f(t)\| = 1$ se t é racional diádico, $f(t) = 0$, caso contrário e $f(t) \neq f(s)$ se t e s são racionais diádicos com $t \neq s$ (ver (1.9)). Façamos $x_d = f(d)$ para cada $d\in D$.

ii) $\Longrightarrow$ i) Da definição de pré-sistema de Haar, decorre que cada A_n é infinito. Assim, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência de pontos distintos de X com $x_n \neq 0$ e $x_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Façamos $I_1 = [0,1]$, $I_2 = [0,\frac{1}{2}]$, $I_3 = [\frac{1}{2},1],\ldots,$
$I_{2^n+i} = [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$, $i = 1,\ldots,2^n-1$, $n\in\mathbb{N}$.

Sendo m_n o ponto médio de I_n, definimos $f: [0,1] \to X$ por: $f(t) = x_n$ se $t = m_n$, $f(t) = 0$ se $t = 0$, $t = 1$ ou t não é diádico.

Como $\|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que f não é Darboux-integrável. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ e $k\in\mathbb{N}$ com $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$, tomemos n como em ii)a) e consideremos a partição $(0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\ldots,1)$.

Se $\xi_i \in]\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}[$, $i = 1,\ldots,2^n$, então ou $f(\xi_i) = 0$ ou ξ_i é ponto médio de algum intervalo diádico contido em I_{2^n+i-1} , ou seja, ξ_i é ponto méddio de algum $I_{2^{n+p}+j}$, onde $2^p(i-1) \leq j \leq 2^p i-1$.

Logo $f(\xi_i) = x_{2^{n+p}+j} \in A_{2^{n+p}+j} \subset A_{2^n+i-1}$. Assim, se $\xi_i, \xi_i' \in]\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}[$, $\forall i \in \{1,\ldots,2^n\}$, usando ii)a) temos

$$\left\|\sum_{i=1}^{2^n} [f(\xi_i) - f(\xi_i')]\frac{1}{2^n}\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{2^n} f(\xi_i)\frac{1}{2^n}\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{2^n} f(\xi_i')\frac{1}{2^n}\right\| < \frac{2}{k} < \varepsilon.$$

Por [He] I.1.32, f é Riemann-integrável.

1.13. OBSERVAÇÃO. É fácil perceber que na proposição anterior ainda temos i) equivalente a iii) mesmo se em iii) não exigimos "$x_d \neq x_{d'}$, se $d \neq d'$".

Para esclarecer o enunciado do nosso próximo teorema, observemos que sendo $I_1 = [0,1]$, $I_2 = [0,\frac{1}{2}]$, $I_3 = [\frac{1}{2},1],\ldots,$ $I_{2^n+i} = [\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}]$, para $n\in\mathbb{N}$, $i \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$, então o ponto médio de I_{2^n+i} é $\frac{2i+1}{2^{n+1}}$.

1.14. TEOREMA. Se $D(X) \neq R(X)$ então existe uma seqüência básica $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de X com $\|x_k\| = 1$ $\forall k\in\mathbb{N}$ tal que a função $F: [0,1] \to X$ dada por $F(\frac{1}{2}) = x_1$, $F(\frac{2i+1}{2^{n+1}}) = x_{2^n+i}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$ e $F(t) = 0$ se $t \notin \left\{\frac{2i+1}{2^{n+1}}: n\in\mathbb{N}, i\in\{0,1,\ldots,2^n-1\}\right\}$ é Riemann-integrável (e não Darboux-integrável). Se X tem base de Schauder $\mathcal{B}$ e $D(X) \neq R(X)$ podemos ainda conseguir $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ como acima e tal que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ seja uma base de blocos de $\mathcal{B}$.

Prova. Vamos provar as duas afirmações paralelamente. De acordo com (1.4) não há perda de generalidade em supor X separável para a prova da primeira afirmação. Assim, para provar o teorema podemos considerar $X \subset C([0,1])$. Como $D(X) \neq R(X)$, por (1.6) existem $D \subset [0,1]$ enumerável denso em $[0,1]$ e $g: [0,1] \to X$ Riemann-integrável, não Darboux-integrável tais que $\|g(t)\| = 1$ se $t \in D$ e $g(t) = 0$ se $t \notin D$. Seja $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de $C([0,1])$ (ou $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{B}$, para o caso de X ter base). Seja $M = 2L$ onde L é a constante básica de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (e portanto $L \geq 1$).

Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $P_n: C([0,1]) \to C([0,1])$ (ou $P_n: X \to X$ para o caso de X ter base) dada por $P_n(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$. Como P_n é linear contínua e tem posto finito então $P_n o g$ é Darboux-integrável. Assim, para cada $n\in\mathbb{N}$ e para cada $a,b \in [0,1]$ com $a < b$ existe $t \in]a,b[-D$ onde $P_n o g$ é contínua (e $P_n o g(t) = 0$ pois $t \notin D$). Logo, como D é denso, para cada $a,b\in[0,1]$ com $a < b$, para cada $n\in\mathbb{N}$ e para cada $\varepsilon > 0$ conseguimos $t \in]a,b[-D$ e $s \in]a,b[\cap D$ tais que $\|P_n o g(s) - P_n o g(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e portanto $\|P_n o g(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Além disso, como $s\in D$ temos $\|g(s)\| = 1$.

Façamos $I_1 =]0,1[$, $I_2 =]0,\frac{1}{2}[, \ldots, I_{2^n+i} =]\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}[$, $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_{2^n+i} = \frac{2i+1}{2^{n+1}}$, se $n\in\mathbb{N}$ e $i \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$.

Vamos definir inicialmente uma função auxiliar $f: [0,1] \to X$. Tomemos $s_1 \in I_1$ com $\|g(s_1)\| = 1$. Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|g(s_1) - P_{n_1} o g(s_1)\| < \frac{1}{4M}$. Façamos $f(m_1) = P_{n_1} o g(s_1)$. Temos então, $\|f(m_1)\| \geq \|g(s_1)\| - \frac{1}{4M} = 1 - \frac{1}{4M} \geq 1 - \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ e $\|f(m_1) - g(s_1)\| < \frac{1}{4M}$.

Tomemos agora $s_2 \in I_2$ com $\|g(s_2)\| = 1$ e $\|P_{n_1} o g(s_2)\| < \frac{1}{16M}$. Seja $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ com $\|g(s_2) - P_{n_2} o g(s_2)\| < \frac{1}{16M}$. Façamos $f(m_2) = (P_{n_2} - P_{n_1})(g(s_2))$. Temos então $\|f(m_2) - g(s_2)\| \leq \|P_{n_2} o g(s_2) - g(s_2)\| + \|P_{n_1} o g(s_2)\| < \frac{1}{8M}$ e $\|f(m_2)\| \geq \|g(s_2)\| - \|g(s_2) - f(m_2)\| \geq 1 - \frac{1}{8M} > \frac{1}{2}$.

Por indução podemos conseguir seqüências $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de naturais e $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de pontos de $[0,1]$ com $n_1 < n_2 < \ldots$ e $s_k \in I_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ tais que

$\|g(s_k)\| = 1$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\|P_{n_{k-1}} o g(s_k)\| < \frac{1}{2^{k+2}M}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ e $\|g(s_k) - P_{n_k} o g(s_k)\| < \frac{1}{2^{k+2}M}$, $\forall k \in\mathbb{N}$. Assim, fazendo

$f(m_1) = P_{n_1} o g(s_1)$, $f(m_k) = (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(g(s_k))$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, temos $\|f(m_k) - g(s_k)\| < \frac{1}{2^{k+1}M}$ e $\|f(m_k)\| > \frac{1}{2}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Se t não é um dos m_k, fazemos $f(t) = 0$.

Seja $h: [0,1] \to X$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} g(s_k) & , \quad \text{se } t = m_k \text{ , } k\in\mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{se } t \notin \{m_k\text{: } k\in\mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Como em cada intervalo I_k existem pontos onde g se anula, por (1.1), temos que h é Riemann-integrável. No entanto, é fácil ver que h não é Darboux-integrável já que $\|h(m_k)\| = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Como $(f-h)(t) = 0$ se $t \notin \{m_k\text{: } k\in\mathbb{N}\}$ e como $\lim\limits_{k\to\infty}(f-h)(m_k) = 0$ temos por (1.8) que $f-h$ é Darboux-integrável. Assim $f = (f-h) + h$ é Riemann-integrável e não é Darboux-integrável.

Se $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de X façamos $F(x) = \Theta(x)f(x)$, onde $\Theta(x) = 0$ se $f(x) = 0$ e $\Theta(x) = \frac{1}{\|f(x)\|}$, se $f(x) \neq 0$. Por (1.2b)) temos que F é Riemann-integrável. Façamos $x_k = F(m_k)$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Então, pela construção, temos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é base de blocos de $\mathcal{B}$ e $\|x_k\| = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$, o que completa a prova da segunda afirmação.

Para completar a prova da primeira afirmação, notemos que se $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é base de $C([0,1])$ então

$\mathcal{B}' = \left\{\frac{f(m_k)}{\|f(m_k)\|}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é base de blocos normalizada de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Seja L' a constante básica de $\mathcal{B}'$. Então $L' \leq L$ e como $\|f(m_k)\| > \frac{1}{2}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{f(m_k)}{\|f(m_k)\|} - \frac{h(m_k)}{\|f(m_k)\|} \right\| < \frac{2}{2M} = \frac{1}{2L} \leq \frac{1}{2L'} .$$

Por [LT] 1.a.9 temos que $\left\{\frac{h(m_k)}{\|f(m_k)\|}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é seqüência básica de $C([0,1])$ contida em X. Assim $\{h(m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é seqüência básica normalizada de X. Tomando $x_k = h(m_k)$ $\forall k\in\mathbb{N}$ temos o resultado com $F = h$.

1.15. <u>EXEMPLO</u>. O exemplo abaixo mostra que, na segunda afirmação de (1.14), dada a base $\mathcal{B}$ não necessariamente conseguimos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$

Mais precisamente, o exemplo responde negativamente à seguinte questão:

"Se X tem base de Schauder normalizada $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $D(X) \neq R(X)$ então existe $D \subset [0,1]$ enumerável denso em $[0,1]$ e $f\colon [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que $f(t) \in \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se $t\in D$ e $f(t) = 0$ se $t\notin D$?"

Consideremos $X = c_o(\mathbb{N})$, $e_1 = (1,0,\ldots)$, $e_2=(1,1,0,\ldots)$ $e_3 = (1,1,1,0,\ldots),\ldots$. Se D é enumerável e denso em $[0,1]$ e se $f(t) \in \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para todo $t\in D$ e $f(t) = 0$ se $t\notin D$, façamos $d_n = (0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1)$, se $n\in\mathbb{N}$. Então se $\xi_i \in D \cap [\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$, $i = 1,\ldots,n$, temos que $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{1}{n}$ é do tipo $(1,x_2,x_3,\ldots)$, mas se $\xi_i \in \complement D \cap [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $i = 1,\ldots,n$, temos que $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i = (0,0,\ldots)$. Logo f não pode ser Riemann-integrável.

1.16. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Os resultados que acabamos de provar destacam as idéias centrais comuns às provas da igualdade $D(X) = R(X)$ para alguns espaços de Banach X. Por exemplo, utilizando (1.14) é imediata a prova de $D(\ell_1(\mathbb{N})) = R(\ell_1(\mathbb{N}))$ (e conseqüentemente de $D(\ell_1(\Gamma)) = R(\ell_1(\Gamma))$ se usarmos ainda (1.4)). De fato, se $F: [0,1] \to \ell_1(\mathbb{N})$ é tal que $\{F(\frac{1}{2}), F(\frac{1}{4}),\ldots\}$ é base de blocos da base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$ e se $\|F(t)\| = 1$ se $t \in \{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\}$ e $F(t) = 0$ caso contrário então F não é Riemann-integrável.

Para ver isso, basta observar que para cada $n\in\mathbb{N}$ podemos escolher $t_i \in \{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\} \cap]\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}[$, se $i \in \{1,\ldots,2^n\}$ e também $s_i \in (\complement\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\}) \cap [\frac{i-1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$. Assim, se tomarmos a partição $d_n = (0,\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n},\ldots,\frac{2^n-1}{2^n},1)$, temos que $\sum_{i=1}^{2^n} F(t_i)\frac{1}{2^n}$ e $\sum_{i=1}^{2^n} F(s_i)\frac{1}{2^n}$ são somas de Riemann relativas a essa partição. Como $\{F(\frac{1}{2}),F(\frac{1}{4}),\ldots\}$ é base de blocos da base canônica de $\ell_1(\mathbb{N})$ e como $\|F(t)\| = 1$ se $t \in \{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\}$ é imediato que

$$\left\|\sum_{i=1}^{2^n} F(t_i)\frac{1}{2^n}\right\| = 1 \quad \text{enquanto} \quad \sum_{i=1}^{2^n} F(s_i)\frac{1}{2^n} = 0.$$

Usando argumentos semelhantes, prova-se facilmente também que se $X = Y^*$ onde Y é o espaço de Tsirelson (ver [R]) então

$D(X) = R(X)$.

Sabemos que se $D(X) = R(X)$ e Y é um subespaço fechado de X (e portanto $D(Y) = R(Y)$) nada podemos afirmar sobre X/Y, uma vez que $D(\ell_1(\Gamma)) = R(\ell_1(\Gamma))$ e todo espaço de Banach é isomorfo a um quociente de $\ell_1(\Gamma)$ para algum Γ. Por outro lado, também não cabe perguntar se "$D(X) = R(X)$ e $D(X/Y) = R(X/Y)$" implica $D(Y) = R(Y)$ uma vez que se $D(X) = R(X)$ já temos $D(Y) = R(Y)$ independente de qualquer informação sobre X/Y. Resta, então, questionar se "$D(Y) = R(Y)$ e $D(X/Y) = R(X/Y)$" implica $D(X) = R(X)$. A resposta é afirmativa como veremos em (1.19). Para a prova desse resultado necessitamos de alguns preliminares.

1.17. <u>TEOREMA</u>. Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $\mathcal{F}(Y)$ a família dos fechados convexos de Y. Seja $\phi: X \to \mathcal{F}(Y)$ uma função tal que $\{x \in X: \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ é aberto de X para todo U aberto de Y. Para cada $x \in X$, seja $m(x) = \inf\{\|y\|: y \in \phi(x)\}$. Seja $p: X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $p(x) \geq 0$ $\forall x \in X$ e $p(x) > m(x)$ se $m(x) > 0$. Então existe uma função $\tilde{\phi}: X \to Y$ contínua tal que $\tilde{\phi}(x) \in \phi(x)$ $\forall x \in X$ e $\|\tilde{\phi}(x)\| \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

<u>Prova</u>. Ver [P] proposição 1.2 pág. 9

1.18. <u>COROLÁRIO</u>. Sejam Z um espaço de Banach e W um subespaço de Z. Então existe $\tilde{\phi}: Z/W \to Z$ contínua tal que $\tilde{\phi}(\dot{z}) \in z+W$ $\forall z \in Z$ e $\|\tilde{\phi}(\dot{z})\| \leq 2\|\dot{z}\|$ $\forall z \in Z$.

<u>Prova</u>. Basta aplicar o teorema anterior para $X = Z/W$, $Y = Z$, $\phi: X = Z/W \to \mathcal{F}(Z)$ dada por $\phi(\dot{z}) = z+W$ e $p(\dot{z}) = 2m(\dot{z}) =$
$= 2\inf\{\|u\|: u \in \phi(\dot{z})\} = 2\inf\{\|u\|: u \in z+W\} = 2\|\dot{z}\|$.

Nesse caso temos que, para cada U aberto de $Y = Z$ então $\{\dot{z} \in Z/W: \phi(\dot{z}) \cap U \neq \emptyset\} = \{\dot{z} \in Z/W: (z+W) \cap U \neq \emptyset\} =$

$= \Pi(\{z \in Z: (z+W) \cap U \neq \emptyset\})$, onde $\Pi: Z \to Z/W$ é a aplicação quociente. Como Π é aberta temos que para cada U aberto de $Y = Z$, $\{\dot{z} \in Z/W: \phi(\dot{z}) \cap U \neq \emptyset\}$ é aberto.

Como p está nas condições do teorema, concluímos que existe $\tilde{\phi}: X = Z/W \to Y = Z$ tal que $\tilde{\phi}(\dot{z}) \in \phi(\dot{z}) = z+W \;\; \forall z \in Z$ e $\|\tilde{\phi}(\dot{z})\| \leq p(\dot{z}) = 2m(\dot{z}) \;\; \forall \dot{z} \in Z/W$.

1.19. PROPOSIÇÃO. Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Se $D(Y) = R(Y)$ e $D(X/Y) = R(X/Y)$ então $D(X) = R(X)$.

Prova. De acordo com (1.18) existe $\tilde{\phi}: X/Y \to X$ contínua tal que $\tilde{\phi}(\dot{x}) \in x+Y$ e $\|\tilde{\phi}(\dot{x})\| \leq 2\|\dot{x}\| \;\; \forall x \in X$. Seja $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável. Sendo $\Pi: X \to X/Y$ a aplicação quociente temos que $\Pi o f: [0,1] \to X/Y$ é Riemann-integrável e portanto, como $D(X/Y) = R(X/Y)$, temos $\Pi o f$ Darboux integrável. Assim o conjunto dos pontos de descontinuidade de $\Pi o f$ tem medida de Lebesgue nula. Como $\tilde{\phi}$ é contínua temos que o conjunto dos pontos de descontinuidade de $\tilde{\phi} o \Pi o f$ tem medida de Lebesgue nula. Além disso, como f é limitada, então $\Pi o f$ é limitada e portanto, lembrando que $\|\tilde{\phi}(\dot{x})\| \leq 2\|\dot{x}\| \;\; \forall x \in X$, temos $\tilde{\phi} o \Pi o f$ limitada. Assim $\tilde{\phi} o \Pi o f$ é Darboux integrável. Como $\tilde{\phi}(\dot{x}) - x \in Y \;\; \forall x \in X$ então $\tilde{\phi} o \Pi o f(t) - f(t) \in Y \;\; \forall t \in [0,1]$. Como $\tilde{\phi} o \Pi o f - f$ é Riemann-integrável e $D(Y) = R(Y)$ temos $\tilde{\phi} o \Pi o f - f$ Darboux-integrável. Assim f é Darboux-integrável.

<u>PROBLEMA</u>.

- Vale um resultado análogo a (1.19) para a questão $R(X) \subset M(X)$? Isto é, se $R(X/Y) \subset M(X/Y)$ e $R(Y) \subset M(Y)$ (onde Y é um subespaço de X) então $R(X) \subset M(X)$?

oOo

§2. OS PROBLEMAS $D(X) = R(X)$ E $R(X) \subset M(X)$ EM ESPAÇOS COM BASE SIMÉTRICA GENERALIZADA

Foi provado em [He] I.3.12 e I.3.16 que se X é um espaço de Banach com base simétrica então:

1. $D(X) = R(X)$ se e só se X é isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$.
2. $D(X^*) = R(X^*)$ se e só se X é isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$.

Neste parágrafo vamos caracterizar os espaços de Banach X com base simétrica generalizada e dens $X \geq c$ para os quais tem-se $R(X) \subset M(X)$ (ou $R(X^*) \subset M(X^*)$).

Também vamos obter, neste parágrafo e no parágrafo seguinte, generalizações de 1. e de 2. para espaços de Banach não separáveis com base simétrica generalizada.

Finalizaremos, aplicando esses resultados para obter informações relativas aos problemas $D(X) = R(X)$ e $R(X) \subset M(X)$ para certos espaços de operadores.

2.1. <u>DEFINIÇÃO</u>. Dizemos que uma família $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de um espaço de Banach X é uma base incondicional generalizada de X se para cada $x\in X$ existe uma única família $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de escalares tal que $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ (isto é, para cada $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset \Gamma$, F_ε finito tal que para todo $F \subset \Gamma$, $F \supset F_\varepsilon$, F finito temos $\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$).

Dizemos que uma base incondicional generalizada $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de um espaço de Banach X é uma base simétrica generalizada de X se para cada par de seqüências $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$, $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$, com $\gamma_n \neq \gamma_m$

e $\delta_n \neq \delta_m$ se $n \neq m$ temos que as seqüências básicas $\{e_{\gamma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{e_{\delta_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ são equivalentes.

Para o leitor não familiarizado com a noção de base (enumerável) recomendamos [LT].

No que segue apresentamos um resumo dos resultados sobre bases generalizadas que usaremos. Referências para o assunto são [M] e [T1].

Gostaríamos de alertar que nem todos os resultados conhecidos sobre bases incondicionais enumeráveis se generalizam para o caso não enumerável (veja [T1]).

2.2. <u>NOTAÇÃO</u>. Se $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma base incondicional generalizada de um espaço de Banach X e se $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma e_\gamma$, para cada $\gamma \in \Gamma$ escrevemos $e_\gamma^*(x) = a_\gamma$. Com isso, temos que $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} e_\gamma^*(x) e_\gamma$.

2.3. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Se $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma base incondicional generalizada de um espaço de Banach X então

$$\|x\|_o = \sup\left\{\left\|\sum_{\gamma\in\Gamma}\beta_\gamma e_\gamma^*(x)e_\gamma\right\| : |\beta_\gamma| \leq 1\ \forall\gamma\in\Gamma \text{ e } \{\gamma\in\Gamma : \beta_\gamma\neq 0\} \text{é finito}\right\}$$

define uma norma em X equivalente à norma original.

2.4. <u>COROLÁRIO</u>. Se $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma base incondicional generalizada de um espaço de Banach X então existe $M > 0$ tal que para cada $A,B \subset \Gamma$ com $A \subset B$ e B finito e para cada $\{a_\gamma\}_{\gamma\in A}$, $\{b_\gamma\}_{\gamma\in B}$ com $|a_\gamma| \leq |b_\gamma|$ $\forall\gamma \in A$ tem-se que $\|\sum_{\gamma\in A} a_\gamma e_\gamma\| \leq M\|\sum_{\gamma\in B} b_\gamma e_\gamma\|$. Conseqüentemente, para cada $\gamma\in\Gamma$ temos que $e_\gamma^* \in X^*$ e $1 \leq \|e_\gamma\|\,\|e_\gamma^*\| \leq M$, e para cada $\Gamma_o \subset \Gamma$, a aplicação $P_{\Gamma_o} : X \to X$ dada por $P_{\Gamma_o}(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma_o} e_\gamma^*(x)e_\gamma$ é uma projeção contínua de X sobre $\overline{\text{span}\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_o}}$.

Observamos que se $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma base incondicional generalizada de X então $e_\gamma \neq 0$ $\forall\gamma\in\Gamma$ e $\left\{\frac{e_\gamma}{\|e_\gamma\|}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ é também base incondicional generalizada de X. Assim, se X tem base incondicional generalizada então X tem base incondicional $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ com $\|e_\gamma\| = 1$, $\forall\gamma \in \Gamma$. Nesse caso, temos $1 \leq \|e^*_\gamma\| \leq M$. $\forall \gamma \in \Gamma$.

2.5. <u>TEOREMA</u>. Se X é um espaço de Banach reflexivo e $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é base incondicional generalizada de X então $\{e^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é base incondicional generalizada de X*.

<u>Prova</u>. [M] teorema 15.

2.6. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Se $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma base simétrica generalizada de um espaço de Banach X, então existem $A > 0$ e $B > 0$ tais que $A \leq \|e_\gamma\| \leq B$ $\forall\gamma \in \Gamma$.

<u>Prova</u>. Se não existisse $B > 0$ tal que $\|e_\gamma\| \leq B$ $\forall \gamma \in \Gamma$ então para cada $n\in\mathbb{N}$ existiria $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\|e_{\gamma_n}\| \geq n$. De acordo com [LT] pág. 114., $\{e_{\gamma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ não seria seqüência básica simétrica e portanto existiria uma permutação Π de $\mathbb{N}$ tal que $\{e_{\gamma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{e_{\gamma_{\Pi(n)}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ não seriam equivalentes. Logo $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ não seria simétrica. A prova da existência de A é análoga.

2.7. <u>LEMA</u>. (Troyanski). Seja $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ base simétrica generalizada de um espaço de Banach X. Se $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ não é equivalente à base canônica de $\ell_1(\Gamma)$ então para cada $\varepsilon > 0$ existe $k\in\mathbb{N}$ tal que para cada $x^*\in X^*$ tem-se $|\{\gamma\in\Gamma\colon |x^*(e_\gamma)| > \varepsilon\|x^*\|\}| \leq k$.

2.8. <u>LEMA</u>. (Troyanski). Seja $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ base simétrica generalizada de um espaço de Banach X. Se $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ não é equivalente à base canônica de $c_o(\Gamma)$ então para cada $\varepsilon > 0$ existe $k\in\mathbb{N}$ tal que para cada $x \in X$ tem-se $|\{\gamma\in\Gamma: |e_\gamma^*(x)| > \varepsilon\|x\|\}| \leq k$.

Para as demonstrações ver [T1] Lema 2 e Lema 3.

2.9. <u>TEOREMA</u>. Seja X espaço de Banach com base simétrica generalizada $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. São equivalentes:

a) $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é equivalente à base canônica de $\ell_1(\Gamma)$.

b) $D(X) = R(X)$.

Se $|\Gamma| \geq c$ então a) e b) acima são equivalentes a

c) $R(X) \subset M(X)$.

<u>Prova</u>. Sabemos que a)$\Longrightarrow$ b) e que b) $\Longrightarrow$ c). Para provar que b)$\Longrightarrow$ a) e que, se $|\Gamma| \geq c$ então c) $\Longrightarrow$ a) notemos que se A é um subconjunto de $[0,1]$ e ϕ: $A \to \Gamma$ é injetora então se a) não se verifica temos que a função f: $[0,1] \to X$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} e_{\phi(t)} & \text{se } t \in A \\ 0 & \text{se } t \notin A \end{cases}$$ é Riemann-integrável.

De fato, se a) não se verifica, então por (2.7), dado $\varepsilon > 0$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que para cada $x^*\in X^*$ tem-se $|\{\gamma\in\Gamma: |x^*(e_\gamma)| > \frac{\varepsilon}{4}\|x^*\|\}| \leq k$.

Tomemos $n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{k}{n} \sup_{\gamma\in\Gamma}\|e_\gamma\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. (lembrar que $\sup_{\gamma\in\Gamma}\|e_\gamma\| < \infty$ por (2.6)).

Façamos $t_o = 0$, $t_1 = \frac{1}{n}$, $t_2 = \frac{2}{n}, \ldots, t_n = 1$. Tomemos $c_i \in]t_{i-1}, t_i[$, $i = 1,\ldots,n$ e $I = \{i\in\{1,\ldots,n\}: c_i\in A\}$. Temos que

$\|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i\| = \|\sum_{i\in I} f(c_i)\frac{1}{n}\| = \frac{1}{n} \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\sum_{i\in I} x^*(f(c_i))| =$
$= \frac{1}{n} \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\sum_{i\in I} x^*(e_{\phi(c_i)})|$. Para cada $x^* \in X^*$ seja

$A_{x^*,\varepsilon} = \{t\in A\colon |x^*(e_{\phi(t)})| > \frac{\varepsilon}{4}\|x^*\|\}$. Se $J = \{i\in I\colon c_i\in A_{x^*,\varepsilon}\}$ então

$|J| \leq |A_{x^*,\varepsilon}| \leq k$ e $|x^*(e_{\phi(c_i)})| \leq \frac{\varepsilon}{4}\|x^*\|$ se $i \in I-J$. Assim, se $x^* \in X^*$ e $\|x^*\| \leq 1$ temos

$$|\sum_{i\in I} x^*(e_{\phi(c_i)})| \leq |\sum_{i\in J} x^*(e_{\phi(c_i)})| + |\sum_{i\in I-J} x^*(e_{\phi(c_i)})|$$

$$\leq |J|\max_{i\in J}\|e_{\phi(c_i)}\| + n\frac{\varepsilon}{4} \leq k \sup_{\gamma\in\Gamma}\|e_\gamma\| + n\frac{\varepsilon}{4} \leq n\frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo $\|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto $\|\sum_{i=1}^{n}[f(c_i)-f(d_i)]\Delta t_i\| \leq \varepsilon$, se $c_i, d_i \in]t_{i-1}, t_i[$, $i=1,\ldots,n$. Por [He] I.1.32, f é Riemann-integrável

b)$\Longrightarrow$ a) Suponhamos agora que a) não se verifique. Tomemos $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. A função f acima considerada (que é Riemann-integrável)não é Darboux-integrável já que $f(t) = 0$ se $t \in [0,1]-\mathbb{Q}$ e $\inf_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \|f(t)\| > 0$, por (2.6). Assim b) não se verifica.

c)$\Longrightarrow$ a) ($|\Gamma| \geq c$). Suponhamos que a) não se verifique. Tomemos $A = [0,1]$. A função f acima considerada (que é Riemann-integrável) não é mensurável. De fato, por (2.4) e (2.6) existe uma constante $C > 0$ tal que $\|f(t)-f(s)\| \geq C$ se $t,s \in [0,1]$, $t \neq s$. Logo f não tem imagem quase separável e portanto não é mensurável (ver (8.3)). Assim, c) não se verifica.

2.10. <u>TEOREMA</u>. Seja X um espaço de Banach com base simétrica generalizada $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. São equivalentes:

a) $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é equivalente à base canônica de $c_o(\Gamma)$.

b) $\{e_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ é base de X* equivalente à base canônica de $\ell_1(\Gamma)$.

c) $D(X^*) = R(X^*)$.

Se $|\Gamma| \geqq c$ então a), b) e c) acima são equivalentes a

d) $R(X^*) \subset M(X^*)$.

<u>Prova</u>. a) $\Longrightarrow$ b) Seja $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ a base canônica de $c_o(\Gamma)$. Seja $T: X \to c_o(\Gamma)$ isomorfismo tal que $T(e_\gamma) = x_\gamma$ $\forall\gamma \in \Gamma$. Então é fácil ver que $T^*: \ell_1(\Gamma) \to X^*$ é (um isomorfismo) tal que $T^*(x_\gamma^*) = e_\gamma^*$ $\forall\gamma \in \Gamma$, o que prova b). Como b) $\Longrightarrow$ c) e c) $\Longrightarrow$ d) são imediatos, resta provar que c) $\Longrightarrow$ a) e que se $|\Gamma| \geqq c$ então d) $\Longrightarrow$ a) . Para isso procederemos como na prova de (2.9). Notemos que se A é um subconjunto de $[0,1]$ e $\phi: A \to \Gamma$ é injetora então se a) não se verifica temos que a função $f: [0,1] \to X^*$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} e^*_{\phi(t)} & \text{se } t \in A \\ \\ 0 & \text{se } t \notin A \end{cases} \qquad \text{é Riemann-integrável .}$$

De fato, se a) não se verifica, então por (2.8) dado $\varepsilon > 0$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que para cada $x\in X$ tem-se $|\{\gamma\in\Gamma: |e_\gamma^*(x)| > \frac{\varepsilon}{4}\|x\|\}| \leqq k$.

Tomemos $n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{k}{n} \sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\|e_\gamma^*\| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ (lembrar que $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\|e_\gamma^*\| < \infty$ por (2.4) e (2.6)).

Façamos $t_o = 0$, $t_1 = \frac{1}{n}$, $t_2 = \frac{2}{n}, \ldots, t_n = 1$. Tomemos

$c_i \in]t_{i-1}, t_i[$ $i = 1,\dots,n$ e $I = \{i \in \{1,\dots,n\}: c_i \in A\}$. Temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i \right\| = \left\| \sum_{i\in I} f(c_i)\frac{1}{n} \right\| = \frac{1}{n} \sup_{\|x\|\leq 1} \left| \sum_{i\in I} f(c_i)(x) \right| =$$

$$= \frac{1}{n} \sup_{\|x\|\leq 1} \left| \sum_{i\in I} e^*_{\phi(c_i)}(x) \right|.$$ Para cada $x\in X$ seja

$A_{x,\varepsilon} = \{t\in A: |e^*_{\phi(t)}(x)| > \frac{\varepsilon}{4}\|x\|\}$. Se $J = \{i\in I: c_i \in A_{x,\varepsilon}\}$ então

$|J| \leq |A_{x,\varepsilon}| \leq k$ e $|e^*_{\phi(c_i)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}\|x\|$ se $i\in I-J$. Assim, se $x\in X$

e $\|x\| \leq 1$ temos

$$\left| \sum_{i\in I} e^*_{\phi(c_i)}(x) \right| \leq \left| \sum_{i\in J} e^*_{\phi(c_i)}(x) \right| + \left| \sum_{i\in I-J} e^*_{\phi(c_i)}(x) \right|$$

$$\leq |J| \max_{i\in J} \|e^*_{\phi(c_i)}\| + n\frac{\varepsilon}{4} \leq k \sup_{\gamma\in\Gamma} \|e^*_\gamma\| + n\frac{\varepsilon}{4} \leq n\frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo $\left\| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto $\left\| \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)-f(d_i)]\Delta t_i \right\| < \varepsilon$ se $c_i, d_i \in]t_{i-1}, t_i[$, $i = 1,\dots,n$. Por [He] I.1.32 f é Riemann-integrável.

Para provar que c) $\Longrightarrow$ a) e que se $|\Gamma| \geq c$ então d) $\Longrightarrow$ a) procedemos como na prova de (2.9) lembrando que $\inf_{\gamma\in\Gamma} \|e^*_\gamma\| > 0$ e que existe $C > 0$ tal que $\|e^*_\gamma - e^*_{\gamma'}\| \geq C$ se $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $\gamma \neq \gamma'$ (ver (2.4) e (2.6) observando que $|(e^*_\gamma - e^*_{\gamma'})(e_\gamma)| = 1$).

2.11. OBSERVAÇÃO. Até onde estamos informados, não se conhece um exemplo de espaço de Banach X reflexivo com dens $X \geq c$ e tal que $D(X) = R(X)$ ou mesmo $R(X) \subset M(X)$. O Teorema (2.9) mostra que tal exemplo não pode ser encontrado entre os espaços de Banach com base simétrica, isto é:

2.12. COROLÁRIO. Se X é um espaço de Banach reflexivo com base simétrica generalizada e dens $X \geq c$ então $R(X) \not\subset M(X)$ (e portanto $D(X) \neq R(X)$).

2.13. OBSERVAÇÃO. Em [He] III.3.17 foi provado que se X é um espaço de Banach que tem um subespaço Y complementado, Y com base incondicional (enumerável) e se $D(X) = R(X)$ então $D(X^*) \neq R(X^*)$. Recorrendo a (2.4), percebemos que esse resultado se generaliza para o caso em que X tem subespaço Y complementado com base incondicional generalizada, já que Y (e portanto X) terá subespaço complementado com base incondicional enumerável.

Com os resultados desse parágrafo obtemos o seguinte:

2.14. COROLÁRIO. Se X é um espaço de Banach que tem um subespaço Y tal que dens $Y \geq c$ e Y tem base simétrica generalizada e se $R(X) \subset M(X)$ então $R(X^*) \not\subset M(X^*)$.

Prova. Se $R(X) \subset M(X)$ então $R(Y) \subset M(Y)$. Por (2.9), Y é isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$ para algum Γ com $|\Gamma| \geq c$ (e portanto Y contém $\ell_1(I)$ onde $|I| = c$). Por [Ha 1] proposição 2.2, X^* tem subespaço isomorfo a $L_1(\{0,1\}^c)$. Por [L], teorema 12 §15 (ver a demonstração), X^* tem subespaço isomorfo a $\ell_2(I)$ onde $|I| = c$ e portanto $R(X^*) \not\subset M(X^*)$.

2.15. OBSERVAÇÃO. Lembramos que para $X = C([0,1])$ temos $R(X) \subset M(X)$ e $R(X^*) \subset M(X^*)$, mas não sabemos se existe X com base incondicional generalizada e dens $X \geq c$ tal que $R(X) \subset M(X)$ e $R(X^*) \subset M(X^*)$. Lembramos que, assumindo a negação da hipótese do contínuo e o axioma de Martin temos que se $X = c_0(\Gamma)$, onde $|\Gamma| = \aleph_1$ então X tem base simétrica generalizada, $R(X) \subset M(X)$, $R(X^*) \subset M(X^*)$ e X é não separável (ver [MR]).

Como conseqüência dos resultados que acabamos de obter e dos resultados de [He] e [A] obteremos, aqui, informações sobre a questão $R(L(Y,Z)) \subset M(L(Y,Z))$ para o caso em que Y e Z têm base simétrica generalizada.

2.16. COROLÁRIO. Seja $X = L(Y,Z)$ onde Y e Z são espaços de Banach com base simétrica generalizada.

i) São equivalentes:

a) $D(X) = R(X)$.

b) $D(Y^*) = R(Y^*)$ e $D(Z) = R(Z)$.

c) Y é isomorfo a $c_o(\Gamma_1)$ e Z é isomorfo a $\ell_1(\Gamma_2)$ (onde $|\Gamma_1| = \text{dens } Y$ e $|\Gamma_2| = \text{dens } Z$).

ii) Se dens $Y \geqq c$ e dens $Z \geqq c$, são equivalentes:

d) $R(X) \subset M(X)$.

e) $R(Y^*) \subset M(Y^*)$ e $R(Z) \subset M(Z)$.

f) Y é isomorfo a $c_o(\Gamma_1)$ e Z é isomorfo a $\ell_1(\Gamma_2)$ (onde $|\Gamma_1| = \text{dens } Y$ e $|\Gamma_2| = \text{dens } Z$).

g) $D(X) = R(X)$.

Prova. a) $\Longrightarrow$ b) e d) $\Longrightarrow$ e) Basta lembrar que Y^* e Z são isomorfos a subespaços de $L(Y,Z)$.

b) $\Longrightarrow$ c) e e) $\Longrightarrow$ f) Ver (2.9) e (2.10).

c) $\Longrightarrow$ a) Foi provado em [He] III.5.3 que se $Y = c_o(\mathbb{N})$ e $Z = \ell_1(\mathbb{N})$ então $D(L(Y,Z)) = R(L(Y,Z))$. A prova para $Y = c_o(\Gamma_1)$ e $Z = \ell_1(\Gamma_2)$ é análoga.

Com isto temos f) $\Longrightarrow$ g) e g $\Longrightarrow$ d) é imediata.

Veremos a seguir que ii) pode ser falso se não exigimos dens $Y \geqq c$ e dens $Z \geqq c$. Antes, uma observação.

2.17. OBSERVAÇÃO. Em [A] foi provado que se S é um compacto Hausdorff separável e Z é um espaço de Banach tais que $R(C(S)) \subset M(C(S))$ e $R(Z) \subset M(Z)$ então $R(C(S,Z)) \subset M(C(S,Z))$. Com isso, temos que:

a) Se Z é separável e $R(Y^*) \subset M(Y^*)$ então $R(K(Y,Z)) \subset M(K(Y,Z))$.

b) Se $R(Z) \subset M(Z)$, Y^* é separável e Y^* ou Z tem a propriedade da aproximação, então $R(K(Y,Z)) \subset M(K(Y,Z))$.

Para a prova da primeira afirmação, basta lembrar que se Z é separável então $K(Y,Z)$ é isomorfo a um subespaço de $K(Y,C([0,1]))$ que é isomorfo a $Y^* \check{\otimes} C([0,1])$ ou $C([0,1],Y^*)$ (ver [K] §44.2(6) e §44.7(2)) e usar o resultdo de [A]. A prova da segunda afirmação é análoga, usando novamente o resultado de [A] e lembrando que nesse caso $K(Y,Z)$ é isomorfo a $Y^* \check{\otimes} Z$ que por sua vez é isomorfo a um subespaço de $C([0,1],Z)$.

2.18. OBSERVAÇÃO. Nas demonstrações dos próximos resultados usaremos os seguintes fatos sobre espaços de operadores:

a) Se Z é um espaço de Banach que não contém subespaço isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$ então para cada compacto Hausdorff S temos $L(C(S),Z) = WK\,(C(S),Z)$ (ver [DU] VI.2. teorema 15). Em particular, temos $L(c_o(\Gamma),Z) = WK(c_o(\Gamma),Z)$ e $L(\ell_\infty(\Gamma),Z) = WK(\ell_\infty(\Gamma),Z)$ para cada espaço de Banach Z que não contém subespaço isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$ e para cada conjunto Γ.

b) Para cada espaço de Banach Z e para cada compacto Hausdorff S tal que $C(S)$ não contém subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ temos $WK(C(S),Z) = K(C(S),Z)$. (ver [LT] 2. e.5 e [DU]VI.2 Corolário 17) Em particular, $WK(c_o(\Gamma),Z) = K(c_o(\Gamma),Z)$ para cada conjunto Γ e para cada espaço de Banach Z.

c) Se Z é um espaço de Schur então para cada espaço de Banach Y temos $WK(Y,Z) = K(Y,Z)$.

d) Seja $X = L(Y,Z)$, onde $Y = c_o(\Gamma_1)$ e $Z = c_o(\Gamma_2)$ ou $Y = \ell_p(\Gamma_1)$ e $Z = \ell_p(\Gamma_2)$ ($p\in[1,\infty]$). Suponhamos $|\Gamma_1| \geqq \chi_o$ e $|\Gamma_2| \geqq \chi_o$ Então X contém subespaço isométrico a $\ell_\infty(\mathbb{N})$. Indicaremos a prova para o caso $Y = c_o(\mathbb{N}) = Z$. (Para os outros casos, as adaptações são naturais). Para cada $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ seja $T_a \in L(c_o(\mathbb{N}),c_o(\mathbb{N}))$, dado por $T_a((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_o(\mathbb{N})$. A aplicação $T: \ell_\infty(\mathbb{N}) \to L(c_o(\mathbb{N}), c_o(\mathbb{N}))$ dada por $T(a) = T_a$ é uma isometria.

2.19. <u>COROLÁRIO</u>. Seja $X = L(Y,Z)$ onde Y e Z são espaços de Banach tais que dens $Y \geqq c$, Y tem base simétrica generalizada e Z é separável. São equivalentes:

a) $R(X) \subset M(X)$.

b) Z não contém subespaço isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$ e Y é isomorfo a $c_o(\Gamma)$ (onde $|\Gamma|$ = dens Y).

<u>Prova</u>. Se vale a) então $R(Y^*) \subset M(Y^*)$ e por (2.10) temos Y isomorfo a $c_o(\Gamma)$. Resta mostrar que Z não contém subespaço isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$. Se existisse W subespaço de Z isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$ teríamos $L(c_o(\Gamma), c_o(\mathbb{N}))$ isomorfo a um subespaço de $L(Y,Z)$.

Como $L(c_o(\Gamma),c_o(\mathbb{N}))$ contém um subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$ (ver (2.18 d))) então não valeria a).

Se temos b) então $L(Y,Z)$ e $L(c_o(\Gamma),Z)$ são isomorfos e $L(c_o(\Gamma),Z) = WK(c_o(\Gamma),Z) = K(c_o(\Gamma),Z)$ (ver(2.18)a) e b)). Assim, a) decorre de (2.17.a)).

2.20. <u>COROLÁRIO</u>. Seja $X = L(Y,Z)$ onde Y e Z são espaços de Banach tais que Z tem base simétrica generalizada, dens $Z \geq c$ e Y^* é separável. São equivalentes:

a) $R(X) \subset M(X)$.

b) Z é isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$ ($|\Gamma|$ = dens Z).

<u>Prova</u>. Se vale a) então $R(Z) \subset M(Z)$ e por (2.9) temos Z isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$.

Se temos b) então $L(Y,Z)$ e $L(Y,\ell_1(\Gamma))$ são isomorfos. Como Y^* é separável então Y^* não contém subespaço isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$. Assim, se $T \in L(Y,\ell_1(\Gamma))$ temos $T^* \in L(\ell_\infty(\Gamma),Y^*) = WK(\ell_\infty(\Gamma),Y^*)$ (ver(2.18 a))) e portanto, $T \in WK(Y,\ell_1(\Gamma)) = K(Y,\ell_1(\Gamma))$. Assim, $L(Y,\ell_1(\Gamma)) = K(Y,\ell_1(\Gamma))$. O resultado decorre, então, de (2.17.b)).

2.21. <u>OBSERVAÇÃO</u>.

a) Notemos que b $\Longrightarrow$ a) de (2.20) pode ser falso se substituirmos "Y^* separável" por "Y separável". Basta tomar $Y = \ell_1(\mathbb{N})$, $Z=\ell_1(\Gamma)$ com $|\Gamma| \geq c$. Nesse caso, $X = L(Y,Z)$ contém subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$ (ver (2.18.d))) e portanto $R(X) \not\subset M(X)$. Gostaríamos de obter um resultado semelhante ao anterior supondo Y separável ao invés de Y^* separável. A dificuldade aparece quando percebemos que, para que se obtenha $R(X) \subset M(X)$, nossas hipóteses devem ser suficien temente fortes para que tenhamos $R(Y^*) \subset M(Y^*)$. Mesmo supondo $R(Y^*) \subset M(Y^*)$ e Z isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$ não sabemos se vale $R(L(Y,Z)) \subset M(L(Y,Z))$. Por exemplo, se $Y = C([0,1])$ e $Z = \ell_1(\Gamma)$, temos $R(L(Y,Z)) \subset M(L(Y,Z))$?

b) Se $Y = \ell_2(\mathbb{N}) = Z$ e $X = L(Y,Z)$ então $R(X) \not\subset M(X)$ pois X contém subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$ (ver (2.18.d))). Assim e) $\Longrightarrow$ d) de (2.16.ii)) não vale para espaços separáveis.

c) Se $Y = c_o(\Gamma)$, $|\Gamma| \geq c$ e $Z = \ell_2(\mathbb{N})$ (ou se $Y = \ell_2(\mathbb{N})$ e $Z = \ell_1(\Gamma)$, $|\Gamma| \geq c$) então aplicando (2.19) (ou (2.20)), tomando $X = L(Y,Z)$ temos $R(X) \subset M(X)$. No entanto, por (2.16.i)) temos $D(X) \neq R(X)$. Isto mostra que d) $\Longrightarrow$ g) de (2.16.ii)) não vale se Y ou Z for separável.

Na verdade os resultados anteriores dão condições para que se tenha $R(K(Y,Z)) \subset M(K(Y,Z))$. Já vimos que, em geral, "$R(Y^*) \subset M(Y^*)$ e $R(Z) \subset M(Z)$" embora necessária, não é suficiente para se obter $R(L(Y,Z)) \subset M(L(Y,Z))$. Não conhecemos resposta para os seguintes problemas:

- Se $R(Y^*) \subset M(Y^*)$ e $R(Z) \subset M(Z)$ então $R(K(Y,Z)) \subset M(K(Y,Z))$?
- Se $R(Y^*) = D(Y^*)$ e $R(Z) = D(Z)$, então $R(K(Y,Z)) = D(K(Y,Z))$?
  Em caso afirmativo, vale ainda $R(L(Y,Z)) = D(L(Y,Z))$?

Para finalizar citamos algumas conseqüências da observação (2.17) válidas com a hipótese do contínuo.

1. Se Z é um espaço de Banach separável ($Z \neq \{0\}$) e S é um compacto Hausdorff, são equivalentes:

   a) $R(K(C(S),Z)) \subset M(K(C(S),Z))$.

   b) S é separável em medida.

(lembrar que $C(S)^* \subset K(C(S),Z)$; que $R(C(S)^*) \subset M(C(S)^*)$ se e só se S é separável em medida - ver [MR] - e usar (2.17.a))).

2. Se Z é um espaço de Schur separável ($Z \neq \{0\}$) e S é um compacto Hausdorff, são equivalentes:

   a) $R(L(C(S),Z)) \subset M(L(C(S),Z))$.

   b) S é separável em medida.

(usar 1. e lembrar que sendo Z Schur então, por (2.18) a) e c), temos $L(C(S),Z) = WK(C(S),Z) = K(C(S),Z)$).

oOo

§3. O PROBLEMA D(X) = R(X) LIGADO A PROPRIEDADES DE DIFERENCIABILIDADE DA NORMA

Consideremos as seguintes afirmações sobre um espaço de Banach X com base incondicional generalizada $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$:

A) $D(X) \neq R(X)$.

B) $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ não é equivalente à base canônica de $\ell_1(\Gamma)$.

C) X admite norma equivalente uniformemente diferenciável em cada direção.

No §2, mostramos que, se $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é simétrica, então A) e B) são equivalentes. Em [T1], Troyanski mostrou que se $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é simétrica e X é não-separável então B) e C) são equivalentes e assim A),B) e C) são equivalentes. Mostraremos aqui, que C) ainda implica A) se X é não separável e $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é base incondicional generalizada (não necessariamente simétrica) e que, nesse caso a recíproca pode ser falsa.

De um outro ponto de vista, sabemos que se X é isomorfo a um uniformemente convexo então vale C). Assim, nosso resultado generaliza o resultado de [R] ("Se X é um uniformemente convexo de dimensão infinita então $D(X) \neq R(X)$") na classe dos espaços de Banach não separáveis com base incondicional generalizada.

3.1. <u>DEFINIÇÃO</u>. Seja X um espaço de Banach.

a) Dizemos que X é uniformemente convexo (U.C.) se para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para cada $x,y \in X$ com $\|x\| = \|y\| = 1$ e

$\|\frac{x+y}{2}\| > 1-\delta$ tem-se $\|x-y\| < \varepsilon$.

b) Dizemos que a norma de X é uniformemente diferenciável (U.D.) se

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| + \|x-ty\| - 2}{t} = 0 ,$$

uniformemente para $x,y \in X$ com $\|x\| = \|y\| = 1$.

c) Dizemos que a norma de X é uniformemente diferenciável em cada direção (U.D.E.D.) se para cada $y\in X$ com $\|y\| = 1$ tem-se

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| + \|x-ty\| - 2}{t} = 0 ,$$

uniformemente para $x\in X$ com $\|x\| = 1$.

3.2. PROPOSIÇÃO. Seja X um espaço de Banach.

a) Se a norma de X é U.D. então ela é U.D.E.D..

b) São equivalentes:

i) X é isomorfo a um U.C.;

ii) X* é isomorfo a um U.C.;

iii) X* admite norma equivalente U.D..

c) Se Y é um espaço de Banach com norma U.D.E.D. e se existe $T: Y \to X$ linear contínuo com imagem densa em X então X admite norma equivalente U.D.E.D..

d) Se X é separável então X admite norma equivalente U.D.E.D..

<u>Prova</u>. a) imediata.

b) ver [BP] 4.2.

c) ver [Z].

d) Sabemos que existem $F: \ell_1(\mathbb{N}) \to X$ linear contínuo e sobrejetor e $J: \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_1(\mathbb{N})$ linear contínuo com imagem densa em $\ell_1(\mathbb{N})$ (por exemplo $J((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((\frac{a_n}{2^n})_{n\in\mathbb{N}})$. Tomando $T=FoJ:\ell_2(\mathbb{N})\to X$ temos que T é linear contínuo com imagem densa em X. Sabemos também que $\ell_2(\mathbb{N})$ é U.C. e portanto o resultado decorre de b), a) e c).

3.3. <u>EXEMPLOS</u>.

a) Se X é isomorfo a um U.C. então por (3.2.b)), X^{**} admite norma equivalente U.D.. Como X é reflexivo, então X admite norma equivalente U.D., portanto U.D.E.D.. No entanto, como existe $T \in L(\ell_2(\Gamma), c_o(\Gamma))$ com imagem densa, temos por (3.2.c)), que $c_o(\Gamma)$ admite norma equivalente U.D.E.D. mas não é isomorfo a nenhum U.C. (na verdade, $c_o(\Gamma)$ não contém nenhum subespaço de dimensão infinita isomorfo a um U.C. já que todo U.C. é reflexivo e todo subespaço de dimensão infinita de $c_o(\Gamma)$ contém $c_o(\mathbb{N})$).

b) Existe um espaço de Banach reflexivo não separável com base incondicional generalizada que admite norma equivalente U.D.E.D. mas não é isomorfo a um U.C. Basta tomar $X = Y\oplus\ell_2(\Gamma)$ onde $|\Gamma|\geq c$ e $Y = (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathbb{R}^n, \| \|_1)_2$. De fato, X não é isomorfo a um U.C. pois é conhecido que Y não é isomorfo a um U.C. Por outro lado, é fácil ver que existe $T: \ell_2(\Gamma\dot{\cup}\mathbb{N}) \to X$ linear contínuo com imagem densa (ver prova de (3.2.d)) para obter $U: \ell_2(\mathbb{N}) \to Y$ com imagem densa e usar U para definir T). Assim, por (3.2)c),b) e a), X admite norma equivalente U.D.E.D..

3.4. TEOREMA (Troyanski). Seja X um espaço de Banach com base incondicional generalizada $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Se a norma de X é U.D.E.D. então para cada $\varepsilon > 0$, existe $\{\Gamma_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência de subconjuntos de Γ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n^\varepsilon = \Gamma$ e $\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma\| \leq \varepsilon n$ para cada $A \subset \Gamma_n^\varepsilon$ com $|A| = n$.

Prova. Ver [T2].

3.5. TEOREMA. Seja X um espaço de Banach com base incondicional generalizada $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ onde $|\Gamma| > \aleph_o$. Se a norma de X é U.D.E.D. então $D(X) \neq R(X)$.

Prova. De acordo com (2.4) (e a observação feita após) podemos supor $\|e_\gamma\| = 1$ $\forall \gamma \in \Gamma$ e sabemos que existe $M > 0$ tal que

(*) $\|\sum_{\gamma\in A} a_\gamma e_\gamma\| \leq M \|\sum_{\gamma\in B} a_\gamma e_\gamma\|$ se $A \subset B \subset \Gamma$ e B é finito.

Antes de prosseguir, observemos que se $\Gamma_o \subset \Gamma$ e $\ell\in\mathbb{N}$ são tais que $\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma\| \leq \varepsilon n$ $\forall A \subset \Gamma_o$ com $|A| = \ell$, então para cada $k\in\mathbb{N}$ temos que

$\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma\| \leq \varepsilon k n$, $\forall A \subset \Gamma_o$ com $|A| = k\ell$. A prova é imediata.

Vamos agora exibir $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável, não Darboux-integrável.

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{M}$. Por (3.4) existe $\{\Gamma_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência de subconjuntos de Γ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n^\varepsilon = \Gamma$ e $\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma\| \leq \varepsilon n$ para cada

$A \subset \Gamma_n^{\varepsilon}$ com $|A| = n$. Como $|\Gamma| > \chi_o$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\Gamma_{n_1}^{\varepsilon}| > \chi_o$. Façamos $\Gamma_1 = \Gamma_{n_1}^{\varepsilon}$. Temos então que $\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma\| \leq \frac{n_1}{M}$ se $A \subset \Gamma_1$ e $|A| = n_1$. Aplicando a observação inicial, podemos supor $n_1 > 1$.

Consideremos $X_1 = \overline{\text{span }\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}}$. De acordo com [M] teorema 8, temos que $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}$ é uma base incondicional generalizada de X_1. Aplicando (3.4) para a base $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}$ de X_1 e para $\varepsilon = \frac{1}{2M}$ e lembrando que $|\Gamma_1| > \chi_o$, podemos conseguir agora $n_2 \in \mathbb{N}$ e $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$, Γ_2 não enumerável tais que se $A \subset \Gamma_2$ e $|A| = n_2$ então $\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma\| \leq \frac{n_2}{2M}$. Pela observação inicial podemos supor $n_2 = k_2 n_1$ onde $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > 1$.

Por indução, conseguimos uma seqüência $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de Γ tal que $|\Gamma_n| > \chi_o$ e $\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ e uma seqüência $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de naturais tal que $\frac{n_{i+1}}{n_i} \in \{2,3,\ldots\}$ $\forall i\in\mathbb{N}$, $n_1 > 1$ e $\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma\| \leq \frac{1}{iM} n_i$ se $A \subset \Gamma_i$ e $|A| = n_i$, $i\in\mathbb{N}$. Portanto, teremos

$\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma \frac{1}{n_i}\| \leq \frac{1}{iM}$ se $i\in\mathbb{N}$, $A \subset \Gamma_i$ e $|A| = n_i$. Assim teremos

$\|\sum_{\gamma\in A} e_\gamma \frac{1}{n_i}\| \leq \frac{1}{i}$ se $i\in\mathbb{N}$, $A \subset \Gamma_i$ e $|A| \leq n_i$ (ver (*)).

Seja $J_1 = \{\frac{k}{n_1} : k\in\mathbb{N},\ k \leq n_1-1\}$. Tomemos $\gamma_1^1,\ldots,\gamma_{n_1-1}^1$ distintos em Γ_1. Façamos $f(\frac{k}{n_1}) = e_{\gamma_k^1}$ se $k \in \{1,\ldots,n_1-1\}$.

Seja $J_2 = \{\frac{k}{n_2}: k\in\mathbb{N},\ k \leq n_2-1$ e $\frac{k}{n_2} \notin J_1\}$ (observe que, como n_2 é múltiplo de n_1 então $J_1 \subset \{\frac{k}{n_2}: k\in\mathbb{N},\ k \leq n_2-1\}$ e como $n_2 \neq n_1$ temos $J_2 \neq \emptyset$). Tomemos

$\gamma_1^2,\ldots,\gamma_{n_2-1}^2 \in \Gamma_2 - \{\gamma_1^1,\ldots,\gamma_{n_1-1}^1\} \subset \Gamma_1$ distintos (lembrar que

Γ_2 é infinito). Façamos $f(\frac{k}{n_2}) = e_{\gamma_k^2}$ se $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n_2 - 1$ e $\frac{k}{n_2} \notin J_1$.

Procedendo por indução, definimos f em todos os pontos da forma $\frac{k}{n_i}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n_i - 1$, de forma que, fazendo $f(t) = 0$ nos outros pontos tenhamos que:

1. Se $i \in \mathbb{N}$, $k \in \{1,\ldots,n_i\}$ e $t \in]\frac{k-1}{n_i}, \frac{k}{n_i}[$ então $f(t) = 0$ ou $f(t) = e_\gamma$ para algum $\gamma \in \Gamma_{i+1} \subset \Gamma_i$.

2. Se $t,s \in [0,1]$, $f(t) \neq 0$ e $f(s) \neq 0$, então existem $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ com $f(t) = e_{\gamma_1}$ e $f(s) = e_{\gamma_2}$.

Mostremos que f é Riemann-integrável. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $i \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $d = (0, \frac{1}{n_i}, \frac{2}{n_i}, \ldots, 1)$ e para cada $k \in \{1,\ldots,n_i\}$, tomemos $c_k \in]\frac{k-1}{n_i}, \frac{k}{n_i}[$. Seja

$$A = \{\gamma \in \Gamma : \exists\ k \in \mathbb{N},\ k \leq n_i,\ f(c_k) = e_\gamma\}.$$

Então por 1. temos que $A \subset \Gamma_{i+1} \subset \Gamma_i$ e $|A| \leq n_i$. Assim

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_i} f(c_k) \frac{1}{n_i} \right\| = \left\| \sum_{\gamma \in A} e_\gamma \frac{1}{n_i} \right\| < \frac{1}{i} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto se $c_k, c_k' \in]\frac{k-1}{n_i}, \frac{k}{n_i}[$ $\forall i \in \{1,\ldots,n_i\}$ temos $\left\| \sum_{k=1}^{n_i} [f(c_k) - f(c_k')] \frac{1}{n_i} \right\| < \varepsilon$. Por [He] I.1.32. temos que f é Riemann-integrável.

Como $\{\frac{k}{n_i} : k,i \in \mathbb{N},\ k \leq n_i - 1\}$ é denso em [0,1] e é enumerável, é fácil ver que f é descontínua em todos os pontos de [0,1] e portanto não é Darboux-integrável.

3.6. OBSERVAÇÃO.

a) Sabemos de (3.2 d)) que $\ell_1(\mathbb{N})$ é isomorfo a um espaço de Banach com norma U.D.E.D. (e com base incondicional). Assim (3.5) é falso para $|\Gamma| = \chi_o$.

b) Os exemplos (3.3) mostram que existem espaços de Banach X (reflexivos) verificando as hipóteses de (3.5) e portanto com $D(X) \neq R(X)$, mas não isomorfos a U.C..

c) Ao contrário do que acontece no caso da base ser simétrica, para o caso da base incondicional não vale A)$\Longrightarrow$C) do início deste parágrafo. De fato, se $X = \ell_1(\Gamma)\oplus\ell_2(\mathbb{N})$ e $|\Gamma| \geqq c$ então $D(X) \neq R(X)$ mas X não admite norma equivalente U.D.E.D. já que o mesmo vale para $\ell_1(\Gamma)$. Observamos que um contra-exemplo para A)$\Longrightarrow$C) pode ser conseguido mesmo entre os espaços reflexivos com base incondicional generalizada: se X é o reflexivo com base incondicional generalizada que não admite norma equivalente U.D.E.D. apresentado em [KT], é possível demonstrar que $D(X) \neq R(X)$.

d) Como conseqüência de (3.5), da equivalência entre B) e C) provada por Troyanski para o caso da base $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, com $|\Gamma| > \chi_o$ ser simétrica e de $D(\ell_1(\Gamma)) = R(\ell_1(\Gamma))$, obtemos a equivalência entre a) e b) de (2.9) para o caso $|\Gamma| > \chi_o$.

PROBLEMAS (que acredito estarem em aberto).

- Se X tem base incondicional generalizada $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ com $|\Gamma| \geqq c$ e X admite norma equivalente U.D.E.D. então $R(X) \not\subset M(X)$?
- Se X é não separável e admite norma equivalente U.D.E.D. então $D(X) \neq R(X)$?

CAPÍTULO II

§4. INTEGRAÇÃO SEGUNDO RIEMANN E DARBOUX EM RELAÇÃO A UMA MEDIDA DE BOREL REGULAR

Neste parágrafo vamos tratar da teoria de integração segundo Riemann e Darboux em relação a uma medida de Borel regular, de funções definidas num compacto Hausdorff K. As definições que apresentaremos aqui são essencialmente as da [KR]. Lá se exige que o suporte da medida seja K. Nesse caso particular, nossas definições coincidem com as de [KR]. Provaremos aqui, diversos resultados que serão utilizados nos parágrafos seguintes, onde trataremos dos problemas $D(X) = R(X)$ e $R(X) \subset M(X)$ para as integrais aqui introduzidas.

Em tudo o que segue, K indicará um espaço topológico compacto Hausdorff não vazio e μ indicará uma medida regular positiva (finita) definida na σ-álgebra dos borelianos de K.

4.1. <u>DEFINIÇÃO</u>. Dizemos que um subconjunto F de K é um fechado regular se $F \neq \emptyset$ e $F = \overline{\overset{\circ}{F}}$.

4.2. <u>EXEMPLOS</u>.

a) Seja $K = [a,b]$. Se $F \subset K$ é um fechado regular, então $\overset{\circ}{F} = \bigsqcup_{n \in J} I_n$ onde $J \subset \mathbb{N}$, os I_n são dois disjuntos, não vazios e cada I_n é de um dos seguintes tipos: $]c,d[$, $[a,d[$, $]c,b]$ ou $[a,b]$. Assim $F = \overline{\overset{\circ}{F}} = \overline{\bigsqcup_{n \in J} I_n}$, onde $J \subset \mathbb{N}$ e os I_n são como acima.

b) Seja $K=\{0\} \cup \{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$ (com a topologia induzida de $\mathbb{R}$). Um fechado não vazio $F \subset K$ é regular se e só se F é infinito ou F é finito e $0 \notin F$.

c) Seja $K = [0,\alpha]$ onde α é um ordinal. Então temos que:

c1) Se $\alpha < \omega$, então todo fechado não vazio em K é regular.

c2) Se $\omega \leq \alpha$, então os fechados regulares de K são os conjuntos não vazios do tipo $\overline{\bigsqcup_{i\in J} I_i}$ onde $|J| \leq |\alpha|$, cada I_i é um intervalo aberto e os I_i são dois a dois disjuntos.

4.3. <u>PROPOSIÇÃO</u>.

i) F é um fechado regular em K se e só se F é fechado não vazio e para cada aberto A com $A \cap F \neq \emptyset$ tem-se $A \cap \overset{\circ}{F} \neq \emptyset$.

ii) Se P é um subconjunto de K com $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$ então $\overline{\overset{\circ}{P}}$ é um fechado regular. Assim, se A é um aberto não vazio então $\overline{A}$ é um fechado regular.

iii) Se $\{F_i\}_{i\in I}$ é uma família de fechados regulares então

$F = \overline{\bigsqcup_{i\in I} F_i}$ é um fechado regular.

iv) Se P é um fechado regular e F é um fechado com $P-F \neq \emptyset$ então $\overline{P-F}$ é um fechado regular.

<u>Prova</u>: i) imediato.

ii) basta usar i).

iii) também decorre de i) pois se A é um aberto e $A \cap \overline{\bigsqcup_{i\in I} F_i} \neq \emptyset$ então $A \cap \bigsqcup_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ e assim $A \cap F_{i_o} \neq \emptyset$ para algum i_o. Logo $\emptyset \neq A \cap \overset{\circ}{F}_{i_o} \subset \overset{\circ}{\overline{\bigsqcup_{i\in I} F_i}} \cap A$.

iv) Se A é um aberto e $A \cap \overline{(P-F)} \neq \emptyset$ então $A \cap (P-F) = A \cap P \cap \complement F \neq \emptyset$. Sendo P fechado regular e F fechado temos por i) que $\emptyset \neq A \cap \complement F \cap \mathring{P} \subset A \cap \overset{\circ}{\overline{P-F}}$. Assim, novamente por i), $\overline{P-F}$ é fechado regular.

4.4. <u>OBSERVAÇÃO</u>.

a) A intersecção de dois fechados regulares (mesmo que não vazia) pode não ser um fechado regular. Basta tomar $F_1 = [0,2] \cup [3,4]$ e $F_2 = [1,3]$ em $K = [0,4]$.

b) A regularidade não é preservada por imagem ou imagem inversa por função contínua (sobrejetora). Basta tomar $f: [0,4] \to [0,4]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \\ (x-1)(5-x) & \text{se } x \in]1,4]. \end{cases}$$

Então $f([0,1]) = \{0\}$ e $f^{-1}([0,3]) = [0,2] \cup \{4\}$.

4.5. <u>PROPOSIÇAO</u>. Seja F um fechado regular em K. Se $P_1,\ldots,P_n$ são fechados em K tais que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ então $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathring{P}_i}$.

<u>Prova</u>. Como F é fechado regular, e $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathring{P}_i}$ é fechado, basta mostrar que $\mathring{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathring{P}_i}$. Se isso não ocorresse, existiria $x \in \mathring{F}$, $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathring{P}_i}$ e portanto existiria U aberto tal que $x \in U \subset \mathring{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, com $U \subset \complement \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathring{P}_i}$. Assim U seria um aberto não vazio tal que

$U \subset \bigcup_{i=1}^{n} (P_i - \overline{\mathring{P}_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \partial P_i$. Logo ∂P_i teria interior não vazio para algum $i \in \{1,\ldots,n\}$, o que é absurdo.

4.6. OBSERVAÇÃO. O resultado acima pode ser falso se F não for regular (basta fazer n=1 e $P_1 = F$). Também é essencial que a família seja finita pois se tomarmos $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\}$, $P_1 = \{0\}$ e $P_n = \{\frac{1}{n-1}\}$ se $n \geq 2$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = K$ mas $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{o}{P}_n} = \{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\} \neq K$.

4.7. DEFINIÇÃO. Dizemos que um subconjunto F de K é μ-contínuo se $\mu(\partial F) = 0$.

(Observe que a definição faz sentido pois ∂F é um boreliano)

4.8. EXEMPLOS.

a) Se $K = [0,1]$, μ é a medida de Lebesgue e $F = [a,b]$, $0 \leq a \leq b \leq 1$ ou $F = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]}$ onde $0 \leq a_n < b_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, então F é um fechado μ-contínuo.

b) Se $K = [0,1]$, μ é a medida de Lebesgue e F é um fechado de K com $\mu(F) > 0$ e $F \subset [0,1]-\mathbb{Q}$ então F não é μ-contínuo pois como $\overset{o}{F} = \emptyset$ tem-se que $\mu(\partial F) = \mu(F) > 0$.

c) Se $K = [a,b]$, $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ é crescente e μ é uma medida de Borel-regular em $[a,b]$ tal que $\alpha([c,d]) = \alpha(d^+)-\alpha(c^-)$ se $a \leq c \leq d \leq b$ (convencionando-se $\alpha(a^-) = \alpha(a)$ e $\alpha(b^+) = \alpha(b)$) então para cada $t \in [a,b]$ temos $\mu(\{t\}) = \alpha(t^+) - \alpha(t^-)$. Logo se $a < c \leq d < b$ temos que $[c,d]$ é μ-contínuo se e só se α é contínua em c e em d. Também temos que $[a,d]$ é μ-contínuo se e só se α é contínua em d e $[c,b]$ é μ-contínuo se e só se α é contínua em c (para a existência de uma medida nas condições deste exemplo ver (5.1)).

4.9. LEMA. Se A é um aberto de K e $x \in A$ então existe um fechado regular μ-contínuo contido em A e cujo interior contém x. Conseqüentemente os interiores dos fechados regulares μ-contínuos de K formam uma base de abertos de K.

Prova. Dado $x \in K$ e A aberto com $x \in A$ tomo U aberto com $x \in U$ e $\overline{U} \subset A$ e $g: K \to [0,1]$ contínua tal que $g|_{\overline{U}} \equiv 0$ e $g|_{\complement A} \equiv 1$ (Urysohn).

Para cada $\alpha \in [0,1]$, seja $K_\alpha = g^{-1}(\{\alpha\})$. Como os K_α são dois a dois disjuntos existe $\alpha \in \,]0,1[$ com $\mu(K_\alpha) = 0$. Seja $F = g^{-1}([0,\alpha])$. Temos que $\partial F \subset g^{-1}(\{\alpha\}) = K_\alpha$ e portanto $\mu(\partial F) = 0$ e como $g(x) = 0$ então $x \in \overset{\circ}{F}$. Como vimos em (4.4.b)), F pode não ser regular, mas por (4.3.ii)), tomando-se $F_1 = \overline{\overset{\circ}{F}}$ temos que F_1 é regular. Além disso, como $\partial F_1 = \partial\overline{\overset{\circ}{F}} \subset \partial F$ temos que F_1 é μ-contínuo e também temos $x \in \overset{\circ}{F} \subset \overset{\circ}{F}_1$. Como $1 \notin g(F)$ e $F_1 \subset F$ então $1 \notin g(F_1)$ e portanto $F_1 \cap \complement A = \emptyset$, isto é, $F_1 \subset A$. Encontramos então F_1, fechado regular μ-contínuo tal que $x \in \overset{\circ}{F}_1 \subset F_1 \subset A$.

4.10. PROPOSIÇÃO. Sejam $F \subset U \subset K$, F fechado, U aberto. Para cada $\varepsilon > 0$, existe A interior de um fechado regular μ-contínuo com $F \subset A \subset \overline{A} \subset U$ e $\mu(A) < \mu(F) + \varepsilon$.

Prova. Como μ é regular, existe W aberto com $F \subset W \subset U$ e $\mu(W) < \mu(F) + \varepsilon$. Por (4.9), para cada $x \in F$, existe A_x interior de um fechado regular μ-contínuo tal que $x \in A_x \subset \overline{A}_x \subset W$. Como F é compacto temos que existem $x_1,\dots,x_n \in F$ tais que $F \subset A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n}$. Assim, se $P = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_{x_i}$ temos que $F \subset \overset{\circ}{P}$, e por (4.3.iii)) P é fechado regular. É imediato que P é μ-contínuo e temos $\mu(\overset{\circ}{P}) = \mu(P) \leq \mu(W) < \mu(F) + \varepsilon$. Basta tomar $A = \overset{\circ}{P}$.

4.11. DEFINIÇÃO. Uma μ-partição de K é uma família finita $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ de fechados regulares μ-contínuos tais que $\bigsqcup_{i=1}^{n} P_i = K$ e $\overset{\circ}{P}_i \cap \overset{\circ}{P}_j = \emptyset$ se $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$.

Quando não houver perigo de confusão, escreveremos simplesmente partição ao invés de μ-partição.

4.12. PROPOSIÇÃO. Se K tem pelo menos n pontos então K tem uma μ-partição formada por n fechados.

Prova. Dados $x_1,\ldots,x_n \in K$ distintos, tomamos $A_1,\ldots,A_n$ abertos dois a dois disjuntos com $x_i \in A_i$ $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$. Por (4.9) existem fechados regulares μ-contínuos $P_1,\ldots,P_{n-1}$ tais que $x_i \in \overset{\circ}{P}_i \subset P_i \subset A_i$ $\forall\, i \in \{1,\ldots,n-1\}$. Como $x_n \in \complement \bigsqcup_{i=1}^{n-1} P_i$, por (4.3.ii)) temos que $P_n = \overline{\complement \bigsqcup_{i=1}^{n-1} P_i}$ é um fechado regular e como $\partial P_n \subset \bigsqcup_{i=1}^{n-1} \partial P_i$ então P_n é μ-contínuo. Se $i,j \in \{1,\ldots,n-1\}$ e $i \neq j$ temos $\overset{\circ}{P}_i \cap \overset{\circ}{P}_j \subset P_i \cap P_j \subset A_i \cap A_j = \emptyset$. Se $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ então $\overset{\circ}{P}_i \cap \overset{\circ}{P}_n = \emptyset$ pois como $\overset{\circ}{P}_i \cap \complement \bigsqcup_{i=1}^{n-1} P_i = \emptyset$ então $\overset{\circ}{P}_i \cap P_n = \emptyset$. Como $K = \bigsqcup_{i=1}^{n} P_i$, temos o resultado.

4.13. DEFINIÇÃO. Seja $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ uma μ-partição de K. Dizemos que uma μ-partição $\mathcal{P}' = \{P'_j\}_{j=1}^{m}$ de K é um refinamento de $\mathcal{P}$ (ou é mais fina que $\mathcal{P}$) se existem $I_1,\ldots,I_n \subset \{1,\ldots,m\}$ dois a dois disjuntos tais que para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ tenhamos $P_i = \bigsqcup_{j \in I_i} P'_j$.

4.14. <u>PROPOSIÇÃO</u>. (existência de refinamento comum) Sejam $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ e $\mathcal{P}' = \{P'_j\}_{j=1}^{m}$ μ-partições de K. Então

$\mathcal{P}'' = \{\overline{\mathring{A}}: A = P_i \cap P'_j,\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m \ \text{ e } \mathring{A} \neq \emptyset\}$ é uma μ-partição de K mais fina que $\mathcal{P}$ e mais fina que $\mathcal{P}'$.

<u>Prova</u>.

1. De acordo com (4.3.ii)) os elementos de $\mathcal{P}''$ são fechados regulares.

2. Se $A = P_i \cap P'_j$ então $\partial\overline{\mathring{A}} \subset \partial A \subset \partial P_i \cup \partial P'_j$ e portanto os elementos de $\mathcal{P}''$ são μ-contínuos.

3. Se P e F são elementos distintos de $\mathcal{P}''$ então $P = \overline{\mathring{A}}$ e $F = \overline{\mathring{B}}$ onde $A = P_{i_1} \cap P'_{j_1}$, $B = P_{i_2} \cap P'_{j_2}$ e $i_1 \neq i_2$ ou $j_1 \neq j_2$. Suponhamos $i_1 \neq i_2$ (o outro caso é análogo). Temos que

$$\mathring{P} \cap \mathring{F} = \mathring{\overline{\mathring{A}}} \cap \mathring{\overline{\mathring{B}}} \subset \mathring{\overline{\mathring{P}}}_{i_1} \cap \mathring{\overline{\mathring{P}}}_{i_2} = \mathring{P}_{i_1} \cap \mathring{P}_{i_2} = \emptyset$$

4. Para provar que $\bigcup_{P \in \mathcal{P}''} P = K$, lembremos que para cada $i=1,\dots,n$,

$P_i = P_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} P'_j = \bigcup_{j=1}^{m} P_i \cap P'_j$. Por (4.5) $P_i \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{m} \mathring{P}_i \cap \mathring{P}'_j} \subset P_i$. Logo

$P_i = \overline{\bigcup_{j \in I_i} \mathring{P}_i \cap \mathring{P}'_j}$ onde $I_i = \{j \in \{1,\dots,m\}: \mathring{P}_i \cap \mathring{P}'_j \neq \emptyset\}$. Temos portanto que $K = \bigcup_{P \in \mathcal{P}''} P$.

5. Fazendo $J_i = i \times I_i$ se $i \in \{1,\dots,n\}$ então

$\mathcal{P}'' = \{\overline{\mathring{A}}: A = P_i \cap P'_j, (i,j) \in J_i, i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}\}$.

Como, evidentemente, os J_i são dois a dois disjuntos e

$P_i = \overline{\bigsqcup_{(i,j)\in J_i} \mathring{P}_i \cap \mathring{P}'_j}$, se $i \in \{1,\dots,n\}$, então P'' é um refinamento de P. Analogamente P''é um refinamento de P'.

4.15. PROPOSIÇÃO. (existência de partição associada a uma cobertura por fechados). Seja $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ uma seqüência de fechados regulares μ-contínuos tais que $\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = K$. Então existe $P = \{P_j\}_{j=1}^{m}$ μ-partição de K tal que :

a) para cada $j \in \{i,\dots,m\}$, existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tal que $P_j \subset A_i$;

b) para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, existem $j_1,\dots,j_s \in \{1,\dots,m\}$ tais que $A_i = \bigsqcup_{k=1}^{s} P_{j_k}$ (s depende de i).

Prova. Para cada $I \subset \{1,\dots,n\}$, sejam $F_I = \overline{\bigcap_{i\in I} A_i - \bigsqcup_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ i\notin I}} A_i}$ e $K_I = \mathring{F}_I$. Vamos mostrar que $\{K_I : I \subset \{1,\dots,n\},\ K_I \neq \emptyset\}$ é a partição procurada.

Se $K_I \neq \emptyset$ então por (4.3.ii)), K_I é um fechado regular. Como $\partial K_I \subset \partial F_I \subset \partial(\bigcap_{i\in I} A_i \cap (\bigcap_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ i\notin I}} \complement A_i)) \subset \bigsqcup_{i=1}^{n} \partial A_i$ então K_I é μ-contínuo.

Mostremos que $\mathring{K}_I \cap \mathring{K}_J = \emptyset$ se $I \neq J$. Se $I \neq J$ existe $i_o \in I-J$ ou $i_o \in J-I$. Suponhamos que exista $i_o \in I-J$. Então $\mathring{F}_I \subset \overset{\circ}{\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subset \overset{\circ}{\overline{A_{i_o}}} = \mathring{A}_{i_o}$. Por outro lado, como $i_o \notin J$, temos

$A_{i_o} \cap (\bigcap_{i\in J} A_i - \bigsqcup_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ i\notin J}} A_i) = \emptyset$ e portanto $\mathring{A}_{i_o} \cap F_J = \emptyset$. Assim $\mathring{A}_{i_o} \cap \mathring{F}_J = \emptyset$ enquanto $\mathring{F}_I \subset \mathring{A}_{i_o}$. Logo $\mathring{F}_J \cap \mathring{F}_I = \emptyset$. Decorre daí que $\mathring{F}_J \cap \overline{\mathring{F}}_I = \emptyset$ e portanto $\mathring{F}_J \cap \mathring{\overline{\mathring{F}}}_I = \emptyset$. Assim $\overline{\mathring{F}}_J \cap \mathring{\overline{\mathring{F}}}_I = \emptyset$ e portanto $\mathring{K}_I \cap \mathring{K}_J = \emptyset$.

Mostremos que $A_i = \bigsqcup\limits_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ i\in I}} K_I$, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$. De fato, é imediato que se $i\in I$ então $F_I \subset A_i$ e portanto $K_I \subset A_i$. Por outro, lado se $x\in A_i$, tomando $I = \{j \in \{1,\ldots,n\}: x\in A_j\}$ temos que $x\in F_I$, e $i\in I$. Assim $A_i \subset \bigsqcup\limits_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ i\in I}} F_I$. Por (4.5) $A_i \subset \bigsqcup\limits_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ i\in I}} K_I$ e assim $A_i = \bigsqcup\limits_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ i\in I}} K_I$, o que prova b) e também mostra que $K = \bigsqcup\limits_{I\subset\{1,\ldots,n\}} K_I$ e assim temos a partição procurada, já que a) é imediato.

4.16. <u>COROLÁRIO</u>. Se μ é não-atômica então para cada $\varepsilon > 0$ existe uma μ-partição $\left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ de K tal que $\mu(P_i) < \varepsilon$ se $i = 1,\ldots,n$.

<u>Prova</u>. Como μ é não atômica, temos $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x\in K$. Dado $\varepsilon > 0$ e $x\in K$, por (4.10), existe A_x interior de um fechado regular μ-contínuo F_x com $\mu(A_x) < \varepsilon$ e $x\in A_x$. Como $\{A_x: x\in K\}$ é uma cobertura de K, então existem $x_1,\ldots,x_n \in K$ tais que $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_{x_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathring{F}_{x_i}$. Assim $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_{x_i}$ e $\mu(F_{x_i}) = \mu(A_{x_i}) < \varepsilon$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$. Basta agora aplicar (4.15).

4.17.[(*)] PROPOSIÇÃO. Seja F um fechado regular μ-contínuo de K, $F \neq K$. Seja $\tilde{\mu}$ a restrição de μ aos borelianos de F. Se $\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ é uma $\tilde{\mu}$-partição de F então sendo $J = \{i \in \{1,\ldots,n\}: \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset\}$ temos que $\mathcal{P}' = \left\{\overline{\overset{\circ}{P}}_i\right\}_{i\in J} \cup \left\{\overline{\complement F}\right\}$ é uma μ-partição de K. Além disso, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ temos $\mu(\overline{\overset{\circ}{P}}_i) = \tilde{\mu}(P_i)$.

Prova. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ temos $\partial\overline{\overset{\circ}{P}}_i \subset \partial P_i \subset (\partial_F P_i) \cup \partial F$ e assim $\mu(\partial\overline{\overset{\circ}{P}}_i) = \mu(\partial P_i) = 0$. Com isso, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ temos que $\overline{\overset{\circ}{P}}_i$ é μ-contínuo e, lembrando que $P_i - \overline{\overset{\circ}{P}}_i \subset \partial P_i$, temos $\tilde{\mu}(P_i) = \mu(\overline{\overset{\circ}{P}}_i)$. Como F é μ-contínuo e como $\partial\overline{\complement F} = \partial\complement F = \partial F$, então $\overline{\complement F}$ também é μ-contínuo.

É fácil ver que os elementos de $\mathcal{P}'$ são fechados regulares com interiores dois a dois disjuntos. Como $F = \bigsqcup_{i=1}^{n} P_i$ temos por (4.5) que $F \subset \bigsqcup_{i=1}^{n} \overline{\overset{\circ}{P}}_i = \bigsqcup_{i\in J} \overline{\overset{\circ}{P}}_i$. Logo $K = F \cup \overline{\complement F} = (\bigsqcup_{i\in J} \overline{\overset{\circ}{P}}_i) \cup \overline{\complement F}$, o que completa a prova.

No que segue X indicará um espaço de Banach.

4.18. NOTAÇÕES. Seja $f: K \to X$.

a) Dado $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ escrevemos

$$w(f,A) = \sup\{\|f(x)-f(y)\|: x,y \in A\} = \operatorname{diam} f(A).$$

b) Dado $x \in K$ escrevemos

$$w(f,x) = \inf\{w(f,A): A \text{ é aberto de } K \text{ e } x \in A\}.$$

(*) - As notações $\circ$ e $-$ referem-se ao interior e fecho tomados em K.

(Note que, em geral, $w(f,x) \neq w(f,\{x\})$).

c) Se $P = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ é uma μ-partição de K escrevemos

$$w_\mu(f,P) = \sum_{i=1}^{n} w(f,P_i)\mu(P_i) =$$

$$= \sup\{\sum_{i=1}^{n} \|f(x_i)-f(y_i)\|\mu(P_i): x_i,y_i \in P_i \ , \ i=1,\dots,n\}$$

(onde convencionamos $\infty\ 0 = 0$).

e

$$S_\mu(f,P) = \{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(P_i): x_i \in P_i \ , \ i = 1,\dots,n\} \ ,$$

e omitiremos o índice μ quando não houver perigo de confusão.

4.19. <u>DEFINIÇÃO</u>. Seja $f: K \to X$. Dizemos que f é integrável segundo Riemann (ou Riemann-integrável) em relação a μ se existe $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe P_ε μ-partição de K tal que se $P = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ é um refinamento de P_ε e $x_i \in P_i$ $i=1,\dots,n$ então $\|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(P_i) - J\| < \varepsilon$. Nesse caso, escrevemos $J = \overset{R}{\int_K} f d\mu$ e dizemos que J é a integral de Riemann de f em relação a μ. Quando não houver perigo de confusão escreveremos simplesmente $\int_K f\, d\mu$.

4.20. <u>DEFINIÇÃO</u>. Seja $f: K \to X$. Dizemos que f é integrável segundo Darboux (Darboux-integrável) em relação a μ se $\inf\{w(f,P): P$ é μ-partição de K$\} = 0$.

4.21. <u>NOTAÇÕES</u>. Indicaremos por $R(K,\mu,X)$ o conjunto das funções $f\colon K \to X$ que são Riemann-integráveis em relação a μ e por $D(K,\mu,X)$ o conjunto das funções $f\colon K \to X$ que são Darboux integráveis em relação a μ.

4.22. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções definidas em K, a valores em X. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f\colon K \to X$ temos que:

i) Se $f_n \in R(K,\mu,X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ então $f \in R(K,\mu,X)$ e $\int_K f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_K f_n d\mu$.

ii) Se $f_n \in D(K,\mu,X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ então $f \in D(K,\mu,X)$.

<u>Prova</u>. Imediata.

4.23. <u>PROPOSIÇÃO</u> (Critério de Cauchy). Seja $f\colon K \to X$. São equivalentes:

a) $f \in R(K,\mu,X)$;

b) para cada $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{P}_\varepsilon$ μ-partição de K tal que se

$\mathcal{P}_1 = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ e $\mathcal{P}_2 = \left\{P'_j\right\}_{j=1}^{m}$ são refinamentos de $\mathcal{P}_\varepsilon$ e se

$x_i \in P_i$, $i=1,\dots,n$ e $y_j \in P'_j$, $j=1,\dots,m$ então

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(P_i) - \sum_{j=1}^{m} f(y_j)\mu(P'_j) \right\| < \varepsilon.$$

<u>Prova</u>. a) $\Longrightarrow$ b) Imediata.

b $\Longrightarrow$ a) Supondo b) e usando (4.14), fazendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ é possível conseguir μ-partições $P_{\frac{1}{n}}$ como em b) de modo que $P_{\frac{1}{n}}$ seja um refinamento de $P_{\frac{1}{m}}$ se $n > m$. Escrevendo $P_{\frac{1}{n}} = \left\{P_i^n\right\}_{i=1}^{k_n}$ e fixando $\left\{x_i^n\right\}_{i=1}^{k_n}$ com $x_i^n \in P_i^n$ se $i=1,\dots,k_n$ temos por b) que, para $n > m$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^n)\,\mu(P_i^n) - \sum_{i=1}^{k_m} f(x_i^m)\,\mu(P_i^m) \right\| < \frac{1}{m} .$$

Assim $\left\{\sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^n)\,\mu(P_i^n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em X. Seja L seu limite em X. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos n_o tal que

$\left\| \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^n)\,\mu(P_i^n) - L \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ se $n \geq n_o$ e tomemos $n > n_o$ com $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Se $\left\{P_i'\right\}_{i=1}^{k}$ é um refinamento de $P_{\frac{1}{n}}$ e $x_i \in P_i'$, $i=1,\dots,k$ então

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\,\mu(P_i') - \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^n)\,\mu(P_i^n) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Logo $\left\| \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\,\mu(P_i') - L \right\| < \varepsilon$, o que completa a prova.

As observações e o Lema seguintes nos darão condições de demonstrar (4.28), (4.30), (4.31) e (4.32), critérios de integrabilidade que usaremos muitas vezes neste trabalho.

4.24. OBSERVAÇÃO. Para todo $A \subset X$ temos $\operatorname{diam} co(A) = \operatorname{diam} A$ e portanto $\operatorname{diam} \overline{co}(A) = \operatorname{diam} A$.

De fato, é imediato que $\operatorname{diam} A \leqq \operatorname{diam} co(A)$.

Provemos a outra desigualdade. Para cada $B \subset X$ seja $S(B) = \{\alpha x+(1-\alpha)y: x,y \in B, \ \alpha \in [0,1]\}$. Dado $A \subset X$, tomemos $A_1 = S(A)$, $A_2 = S(A_1)$, ... $A_{n+1} = S(A_n)$. Então $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, e assim é fácil ver que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ é convexo. Como $A \subset A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ então $co(A) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Por outro lado, $A_1 \subset co(A)$ e conseqüentemente $A_2 = S(A_1) \subset co(A)$ e por indução tem-se $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset co(A)$. Logo $co(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Tomemos $x,y \in co(A)$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x,y \in A_n$. É suficiente provar então que $\operatorname{diam} A_n = \operatorname{diam} A, \forall n \in \mathbb{N}$. Para isso, basta provar que $\operatorname{diam} S(B) = \operatorname{diam} B, \forall B \subset X$. Mas dados $x,y,z,w \in B$, $\alpha,\beta \in [0,1]$ temos

$$
\begin{aligned}
\|\alpha x+(1-\alpha)y - [\beta z+(1-\beta)w]\| &= \|(\alpha-\beta)x + \beta(x-z) + (1-\alpha)y - (1-\beta)w\| = \\
&= \|(\alpha-1)x + (1-\beta)x + \beta(x-z) + (1-\alpha)y - (1-\beta)w\| = \\
&= \|(1-\alpha)(y-x) + (1-\beta)(x-w) + \beta(x-z)\| = \\
&= \|(1-\beta)[x-w+(1-\alpha)(y-x)] + \beta[(x-z) + (1-\alpha)(y-x)]\| \\
&\leqq \max\{\|x-w + (1-\alpha)(y-x)\| , \|x-z + (1-\alpha)(y-x)\|\} \\
&= \max\{\|(1-\alpha)(y-w) + \alpha(x-w)\| , \|(1-\alpha)(y-z) + \alpha(x-z)\|\} \\
&\leqq \max\{\|y-w\| , \|x-w\| , \|y-z\| , \|x-z\|\} \leqq \operatorname{diam} B .
\end{aligned}
$$

4.25. LEMA. Sejam $\mathcal{A} = \left\{A_i\right\}_{i=1}^{n}$ e $\mathcal{B} = \left\{B_j\right\}_{j=1}^{m}$ seqüências de borelianos não vazios de K tais que:

a) $\mu(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = 0$, se $i_1, i_2 \in \{1,\ldots,n\}$, $i_1 \neq i_2$;

b) $\mu(B_{j_1} \cap B_{j_2}) = 0$, se $j_1, j_2 \in \{1,\ldots,m\}$, $j_1 \neq j_2$;

c) para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$, existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $B_j \subset A_i$;

d) para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, existem $j_1,\ldots,j_s \in \{1,\ldots,m\}$ (s dependendo de i) tais que $A_i = \bigsqcup_{k=1}^{s} B_{j_k}$.

Dada $f\colon K \to X$ consideremos

$$S_A = \{ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(A_i) : x_i \in A_i ,\ \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}\} .$$

$$S_{\mathcal{B}} = \{ \sum_{j=1}^{m} f(y_j)\mu(B_j) : y_j \in B_j ,\ \forall\, j \in \{1,\ldots,m\}\} .$$

Então temos:

i) $co(S_{\mathcal{B}}) \subset co(S_A)$;

ii) $\operatorname{diam} S_{\mathcal{B}} \leq \operatorname{diam} S_A$.

Vale também

iii) $\sum_{j=1}^{m} w(f,B_j)\mu(B_j) \leq \sum_{i=1}^{n} w(f,A_i)\mu(A_i)$.

<u>Prova</u>. i) Basta fazer a prova no caso em que existe $j \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $\mu(B_j) > 0$.

Para cada $\mathcal{F} = \left\{F_\ell\right\}_{\ell=1}^{p}$, família de borelianos não vazios de K, seja

$$S_{\mathcal{F}} = \{ \sum_{\ell=1}^{p} f(x_\ell)\mu(F_\ell) : x_\ell \in F_\ell \ , \ \forall\ \ell \in \{1,\dots,p\}\}.$$

Para provar i) observemos que se $P_1, P_2, \dots, P_r, P_{11}, P_{12}$ são borelianos não vazios de K tais que $P_{11} \subset P_1$, $P_{12} \subset P_1$, $\mu(P_1) \neq 0$ e $\mu(P_{11}) + \mu(P_{12}) = \mu(P_1)$, então dados $x_{11} \in P_{11}$, $x_{12} \in P_{12}$ e $\left\{x_i\right\}_{i=2}^{r}$ com $x_i \in P_i$ $\forall\ i \in \{2,\dots,r\}$ então

$$f(x_{11})\mu(P_{11}) + f(x_{12})\mu(P_{12}) + \sum_{i=2}^{r} f(x_i)\mu(P_i) =$$

$$= \frac{\mu(P_{11})}{\mu(P_1)} [f(x_{11})\mu(P_1) + \sum_{i=2}^{r} f(x_i)\mu(P_i)] +$$

$$+ \frac{\mu(P_{12})}{\mu(P_1)} [f(x_{12})\mu(P_1) + \sum_{i=2}^{r} f(x_i)\mu(P_i)]$$

e portanto, fazendo $\mathcal{F} = \left\{P_\ell\right\}_{\ell=1}^{r}$ e $\mathcal{G} = \{P_{11}, P_{12}\} \cup \left\{P_\ell\right\}_{\ell=2}^{r}$ temos $S_{\mathcal{G}} \subset co(S_{\mathcal{F}})$.

Façamos $\mathcal{B}' = \{B_j : j \in \{1,\dots,m\}$ e $\mu(B_j) > 0\}$. Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ tal que $\mu(A_i) \neq 0$ façamos

$J_i = \{j \in \{1,\dots,m\} : \mu(B_j) > 0$ e $B_j \subset A_i\}$ e consideremos

$A_i' = \bigsqcup_{j \in J_i} B_j$. Então por d) e a) temos que $\mu(A_i) = \mu(A_i')$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ tal que $\mu(A_i) \neq 0$. Seja

$\mathcal{A}' = \{A_i' : i \in \{1,\dots,n\}$ e $\mu(A_i) \neq 0\}$. Como $S_{\mathcal{B}} = S_{\mathcal{B}'}$ e $S_{\mathcal{A}'} \subset S_{\mathcal{A}}$ basta provar que $S_{\mathcal{B}'} \subset co(S_{\mathcal{A}'})$.

De acordo com c) e a), cada $B_j \in \mathcal{B}'$ está contido num único $A_i' \in \mathcal{A}'$ e por b) temos que para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ com $\mu(A_i)\neq 0$ vale que $\mu(A_i') = \sum_{j\in J_i} \mu(B_j)$. Com isso, podemos conseguir $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_q$ seqüências finitas de borelianos não vazios de K tais que:

1. $\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}'$, $\mathcal{F}_q = \mathcal{A}'$;

2. para cada $i\in\{1,\dots,q\}$ e para cada $A\in\mathcal{F}_i$ temos $\mu(A) > 0$;

3. para cada $i\in\{1,\dots,q-1\}$, existem $P_1,\dots,P_{r_i},P_{11},P_{12}$ borelianos não vazios de K tais que $\mathcal{F}_i = \{P_{11},P_{12},P_2,\dots,P_{r_i}\}$, $\mathcal{F}_{i+1} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{r_i}$, $P_{11} \cup P_{12} = P_1$ e $\mu(P_{11})+\mu(P_{12}) = \mu(P_1)$.

Pela observação inicial temos que $S_{\mathcal{F}_i} \subset co(S_{\mathcal{F}_{i+1}})$ $\forall i\in\{1,\dots,q-1\}$ e portanto $co(S_{\mathcal{F}_i}) \subset co(S_{\mathcal{F}_{i+1}})$ $\forall i\in\{1,\dots,q-1\}$. Logo $co(S_{\mathcal{A}'}) \subset co(S_{\mathcal{B}'})$ o que prova i).

ii) Decorre de i) e de (4.24).

iii) Seja $J = \{j\in\{1,\dots,m\}\colon \mu(B_j) \neq 0\}$. Para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, seja $J_i = \{j\in J\colon B_j \subset A_i\}$. Como $\mu(B_{j_1} \cap B_{j_2}) = 0$, se $j_1,j_2 \in \{1,\dots,m\}$ e $j_1 \neq j_2$ então

$\sum_{j\in J_i} w(f,B_j)\mu(B_j) = \sum_{j\in J_i} w(f,A_i)\mu(B_j) \leq w(f,A_i)\mu(A_i)$. Além disso, decorre de a) que $J = \bigsqcup_{i=1}^{n} J_i$, e como $\mu(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = 0$, se $i_1,i_2 \in \{1,\dots,n\}$ e $i_1 \neq i_2$, temos que os J_i são dois a dois disjuntos. Assim

$$\sum_{j=1}^{m} w(f,B_j)\mu(B_j) = \sum_{j\in J} w(f,B_j)\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in J_i} w(f,B_j)\mu(B_j) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} w(f,A_i)\mu(A_i)$$, o que completa a prova de iii).

4.26. COROLÁRIO. Se P e P' são μ-partições de K, P' é refinamento de P e $f\colon K \to X$ então:

i) $co(S(f,P')) \subset co(S(f,P))$;

ii) $\operatorname{diam} S(f,P') \leq \operatorname{diam} S(f,P)$;

iii) $w(f,P') \leq w(f,P)$.

4.27. COROLÁRIO. Sejam $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ e P como em (4.15). Suponhamos $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ se $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$. Dada $f\colon K \to K$, consideremos $S = \{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(A_i) : x_i \in A_i\ ,\ i=1,\ldots,n\}$. Então

i) $co(S(f,P)) \subset co(S)$;

ii) $\operatorname{diam} S(f,P) \leq \operatorname{diam} S$.

Vale também

iii) $w(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} w(f,A_i)\mu(A_i)$.

4.28. PROPOSIÇÃO. Seja $f\colon K \to X$. São equivalentes:

a) $f \in R(K,\mu,X)$;

b) existe uma seqüência $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de μ-partições de K tal que

$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} S(f,\mathcal{P}_n) = 0$;

c) existe uma seqüência $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de μ-partições de K tal que para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{n+1}$ é mais fina que $\mathcal{P}_n$ e tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} S(f,\mathcal{P}_n)=0$;

d) para cada $\varepsilon > 0$, existe uma seqüência $\{A_1,\ldots,A_n\}$ (n e A_i dependendo de ε) de fechados regulares μ-contínuos com $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = K$ e $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ se $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ e $i \neq j$ tal que se $x_i,y_i \in A_i$, $i=1,\ldots,n$ então $\left\| \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)-f(y_i)]\mu(A_i) \right\| < \varepsilon$.

Analogamente, são equivalentes:

a') $f \in D(K,\mu,X)$;

b') para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}_\varepsilon$ μ-partição de K tal que se $\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ é uma μ-partição de K mais fina que $\mathcal{P}_\varepsilon$ então $w(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$;

c') existe uma seqüência $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de μ-partições de K tal que para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{n+1}$ é mais fina que $\mathcal{P}_n$ e tal que $\lim_{n\to\infty} w(f,\mathcal{P}_n) = 0$;

d') para cada $\varepsilon > 0$, existe uma seqüência $\{A_1,\ldots,A_n\}$ (n e A_i dependendo de ε) de fechados regulares μ-contínuos com $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = K$ e $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ se $i,j \in\{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$ tal que $\sum_{i=1}^{n} w(f,A_i)\mu(A_i) < \varepsilon$.

<u>Prova</u>. É imediato que a) $\Longrightarrow$ b) e que c) $\Longrightarrow$ d).

b) $\Longrightarrow$ c) Tomemos $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência de μ-partições de K tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} S(f,\mathcal{P}_n) = 0$. Tomemos $\mathcal{P}_1' = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2'$ um refinamento comum de $\mathcal{P}_1'$ e $\mathcal{P}_2$ e indutivamente, definidas $\mathcal{P}_1',\ldots\mathcal{P}_n'$, tomemos $\mathcal{P}_{n+1}'$ um refinamento comum de $\mathcal{P}_n'$ e $\mathcal{P}_{n+1}$ (que existe por (4.14)). Por (4.26 ii)) temos $\operatorname{diam} S(f,\mathcal{P}_n') \leq \operatorname{diam} S(f,\mathcal{P}_n)$ e também $\mathcal{P}_{n+1}'$ mais fina que $\mathcal{P}_n'$, o que prova c).

d) $\Longrightarrow$ a) Assumindo d) e recorrendo a (4.15) e (4.27 ii)), para cada $\varepsilon > 0$, encontramos uma μ-partição $\mathcal{P}_\varepsilon$ tal que $\operatorname{diam} S(f,\mathcal{P}_\varepsilon)\leq\varepsilon$. Se $\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^n$ e $\mathcal{P}' = \left\{P_j'\right\}_{j=1}^m$ são refinamentos de $\mathcal{P}_\varepsilon$ então tomando-se $x_i \in P_i$, $i=1,\ldots,n$, e $y_j \in P_j'$, $j=1,\ldots,m$ temos, por (4.25 ii)), que $\sum\limits_{i=1}^n f(x_i)\mu(P_i) \in co(S(f,\mathcal{P}_\varepsilon))$ e $\sum\limits_{j=1}^m f(y_j)\mu(P_j') \in co(S(f,\mathcal{P}_\varepsilon))$. Logo

$$\left\|\sum_{i=1}^n f(x_i)\mu(P_i) - \sum_{i=1}^m f(y_i)\mu(P_j')\right\| \leq \operatorname{diam} co(S(f,\mathcal{P}_\varepsilon)) =$$

$= \operatorname{diam} S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$ (para a última igualdade ver (4.24)). Assim, por (4.23) temos a).

a') $\Longrightarrow$ b') Decorre (4.26 iii)).

b') $\Longrightarrow$ c') Por b') existe $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de μ-partições de K com $w(f,\mathcal{P}_n) < \frac{1}{n}$. Tomando $\{\mathcal{P}_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ como em b) $\Longrightarrow$ c) e recorrendo a (4.26 iii)) temos $\lim\limits_{n\to\infty} w(f,\mathcal{P}_n') = 0$, o que prova c').

c') $\Longrightarrow$ d') Imediato.

d') $\Longrightarrow$ a') Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\{A_1,\ldots,A_n\}$ como em d'). Por (4.15) e (4.27 iii)), existe $\mathcal{P}$ μ-partição de K tal que $w(f,\mathcal{P})<\varepsilon$

e portanto $f \in D(K,\mu,X)$.

4.29. <u>COROLÁRIO</u>. $D(K,\mu,X) \subset R(K,\mu,X)$ e quando $\dim X < \infty$ vale a igualdade.

<u>Prova</u>. Se $f \in D(K,\mu,X)$, então dado $\varepsilon > 0$, existe P_ε μ-partição de K tal que $w(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$. Logo $\operatorname{diam} S(f,P_\varepsilon) \leq w(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$. Por (4.28) (d) $\Longrightarrow$ a)) temos que $f \in R(K,\mu,X)$. A prova de $R(K,\mu,X) = D(K,\mu,X)$ para o caso $\dim X < \infty$, por ser análoga a do caso da integral em $[0,1]$ e muito simples, será omitida.

4.30. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja $f: K \to X$. Se existe $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\{A_1,\dots,A_n\}$ (n, A_i dependendo de ε) seqüência de fechados regulares μ-contínuos com $\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = K$, $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ se $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$ e $\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(A_i) - J \right\| < \varepsilon$ se $x_i \in A_i$, $i = 1,\dots,n$, então $f \in R(K,\mu,X)$ e $\int_K f d\mu = J$.

<u>Prova</u>. Nossas hipóteses garantem que $f \in R(K,\mu,X)$, uma vez que (4.28 d)) está verificada. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe P_δ -partição de K tal que se $P = \{P_i\}_{i=1}^{k}$ é um refinamento de P_δ e se $y_i \in P_i$, $i=1,\dots,k$ então

$$(1) \qquad \left\| \sum_{i=1}^{k} f(y_i)\mu(P_i) - \int_K f d\mu \right\| < \frac{\delta}{2} .$$

Por outro lado, nossas hipóteses aplicadas a $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ junto com (4.15) e (4.27 i)) garantem que existe P_ε μ-partição de K tal que $co(S(f,P_\varepsilon)) \subset co(\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(A_i) : x_i \in A_i,\ i=1,\dots,n\})$. Assim, se tomarmos $P = \{P_i\}_{i=1}^{k}$ um refinamento comum de P_δ e P_ε, teremos por (4.26.i)) que

$$co(S(f,\mathcal{P})) \subset co(S(f,\mathcal{P}_\varepsilon)) \subset co(\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(A_i):\ x_i \in A_i\ ,\ i=1,\dots,n\}).$$

Nossas hipóteses garantem que esse último conjunto está contido na bola de centro J e raio $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ que indicaremos por $B(J,\frac{\delta}{2})$. Assim, $co(S(f,\mathcal{P})) \subset B(J,\frac{\delta}{2})$. Tomando-se então $y_i \in P_i$, $i=1,\dots,k$ temos $\sum_{i=1}^{k} f(y_i)\mu(P_i) \in B(J,\frac{\delta}{2})$. Recorrendo a (1) temos então $\|\int_K fd\mu - J\| < \delta$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, vem $J = \int_K fd\mu$.

Nossos próximos resultados são variações de (4.28) e (4.30). A diferença é que, para funções limitadas, bastará que a hipótese se verifique para escolhas de pontos do interior dos conjuntos da partição, para que tenhamos a Riemann-integrabilidade. Esse resultado será utilizado por exemplo em (7.18) e (8.16) mas, na verdade, já foi diversas vezes utilizado nos parágrafos anteriores.

4.31. PROPOSIÇÃO. Seja $f: K \to X$ limitada. Suponhamos que para cada $\varepsilon > 0$ exista uma seqüência $\{A_1,\dots,A_n\}$ (n e A_i dependendo de ε) de fechados regulares μ-contínuos com $K = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, $\mu(A_i \cap A_j)=0$ se $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$ tal que se $x_i,y_i \in \overset{\circ}{A}_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$ então $\|\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(y_i)]\mu(A_i)\| < \varepsilon$. Então $f \in R(K,\mu,X)$.

Prova. Seja $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq \frac{M}{2}$ $\forall x \in K$. Dado $\delta > 0$ sejam $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$ e $\{A_1,\dots,A_n\}$ como acima. Seja $K_o = \bigsqcup_{i=1}^{n} \partial A_i$. Como $\mu(K_o) = 0$, por (4.10) existe F fechado regular μ-contínuo com $K_o \subset \overset{\circ}{F}$ e $\mu(F) < \frac{\delta}{3M}$. Seja

$$\mathcal{B} = \{\overline{B}:\ B \neq \emptyset \ \text{ e } B = \overset{\circ}{A}_i \cap \overset{\circ}{F} \ \text{ ou } B = \overset{\circ}{A}_i \cap \overline{\complement F}^{\,\circ}\ ,\ i=1,\dots,n\}.$$

Temos que:

1. Os elementos de $\mathcal{B}$ são fechados regulares.

2. Como $\partial(\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{F}}) \subset \partial(A_i \cap F) \subset (\partial A_i) \cup (\partial F)$ e
$\partial(\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{\complement F}}) \subset (\partial A_i) \cup (\partial F)$, então os fechados de $\mathcal{B}$ são μ-contínuos.

3. Como F é μ-contínuo e $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ se $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$ então dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \neq B_2$ tem-se $\mu(B_1 \cap B_2) = 0$.

4. $K = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} (A_i \cap F) \cup \bigsqcup_{i=1}^{n} (A_i \cap \overline{\complement F})$. Por (4.5) temos que
$K = \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$.

Podemos escrever $\mathcal{B} = \{\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{F}} : i \in I\} \cup \{\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{\complement F}} : i \in J\}$,
onde $I = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \mathring{A}_i \cap \mathring{F} \neq \emptyset\}$ e $J = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \mathring{A}_i \cap \mathring{\complement F} \neq \emptyset\}$.
(Note que se $\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{F}} = \overline{\mathring{A}_j \cap \mathring{\complement F}}$ então esse conjunto está contido em ∂F tendo portando interior vazio. Nesse caso $i \notin I$ e $j \notin J$).

Temos ainda que:

5. Se $i \in I$ então $\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{F}} \subset F \cap A_i$, e portanto
$\sum_{i \in I} \mu(\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{F}}) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i \cap F) \leq \mu(F) < \frac{\delta}{3M}$ (lembrar que
$\mu(A_i \cap A_j) = 0$, se $i,j \in I$, $i \neq j$).

6. Se $i \in J$ então $\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{\complement F}} \subset A_i$, mas
$\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{\complement F}} \subset \overline{\complement F} \subset \complement K_o = \complement \bigsqcup_{j=1}^{n} \partial A_j \subset \complement \partial A_i$. Logo
$\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{\complement F}} \subset A_i - \partial A_i = \mathring{A}_i$.

7. Dados A,B fechados temos que $A-\mathring{B} \subset (A-B) \cup \partial(B)$. Assim, se $i \in J$ temos que $A_i - \overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{\overline{\complement F}}} \subset (A_i - A_i \cap \overline{\complement F}) \cup \partial(A_i \cap \overline{\complement F})$. Como $\partial(A_i \cap \overline{\complement F}) \subset \partial A_i \cup \partial F$ e como A_i e F são μ-contínuos temos

$$\mu(A_i - \overline{\mathring{A} \cap \mathring{\overline{\complement F}}}) \leq \mu(A_i - A_i \cap \overline{\complement F}) = \mu(A_i \cap \mathring{F}) \leq \mu(A_i \cap F).$$

Logo $\displaystyle\sum_{i \in J} \mu(A_i - \overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{\overline{\complement F}}}) \leq \sum_{i \in J} \mu(A_i \cap F) \leq \mu(F) < \frac{\delta}{3M}$.

Tomemos agora $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$, $\{z_i\}_{i\in J}$, $\{w_i\}_{i\in J}$, famílias em X com $x_i, y_i \in \overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{F}}$ $\forall i \in I$ e $z_i, w_i \in \overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{\overline{\complement F}}}$, $\forall i \in J$. Sabemos de 6 que $z_i, w_i \in \mathring{A}_i$ $\forall i \in J$. Assim, usando 5, nossas hipóteses e também 7, temos que

$$\Big\| \sum_{i\in I} [f(x_i) - f(y_i)]\mu(\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{F}}) + \sum_{i\in J} [f(z_i) - f(w_i)]\mu(\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{\overline{\complement F}}}) \Big\|$$

$$\leq \Big\| \sum_{i\in I} [f(x_i) - f(y_i)]\mu(\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{F}}) \Big\| + \Big\| \sum_{i\in J} [f(z_i) - f(w_i)]\mu(A_i) \Big\|$$

$$+ \Big\| \sum_{i\in J} [f(z_i) - f(w_i)][\mu(A_i) - \mu(\overline{\mathring{A}_i \cap \mathring{\overline{\complement F}}})] \Big\| \leq M\frac{\delta}{3M} + \frac{\delta}{3} + M\frac{\delta}{3M} = \delta.$$

Agora, tendo em vista 1, 2, 3 e 4 e d) $\Longrightarrow$ a) de (4.28), a prova está completa.

4.32. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja $f: K \to X$ uma função limitada. Suponhamos que exista $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ exista uma seqüência $\{A_1, \ldots, A_n\}$ (n e A_i dependendo de ε) de fechados regulares μ-contínuos com $K = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ se $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ e $i \neq j$, verificando $\Big\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(A_i) - J \Big\| < \varepsilon$ se $x_i \in \mathring{A}_i$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

Então $f \in R(K,\mu,X)$ e $\int_K f\,d\mu = J$.

Prova. Decorre de (4.31) assim como (4.30) decorre de (4.28).

4.33. EXEMPLO. A hipótese "f limitada" é essencial em (4.32). Para mostrar isso, consideremos o seguinte exemplo: Sejam $K=[0,1]$, μ a medida de Lebesgue e $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = n$ se $x = \frac{1}{n}$ e $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 0$ caso contrário. Tomando-se para A_1 o fecho de $\overline{[\frac{1}{2},1] \cup [\frac{1}{4},\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{6},\frac{1}{5}] \cup \ldots}$ e $A_2 = \overline{\complement A_1}$ temos que $A_1 \cup A_2 = [0,1]$, A_1 e A_2 são fechados regulares por (4.3) ii) e iii) e como $\partial A_1 = \partial A_2 = \{\frac{1}{n}: n \in \{2,3,\ldots\}\} \cup \{0\}$ então A_1 e A_2 são μ-contínuos e $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$. Se $f(x) \neq 0$ então $x \in \partial A_1 = \partial A_2$. Logo se $x \in \overset{\circ}{A}_1$ ou $x \in \overset{\circ}{A}_2$ temos $f(x) = 0$. Tomando-se $J = 0$ estaríamos, então, nas condições de (4.32). No entanto, é fácil ver que $f \notin R(K,\mu,X)$ pois caso contrário, f seria limitada (ver por exemplo (4.36 c))).

4.34. COROLÁRIO. Sejam $f: [0,1] \to X$ e μ uma medida de Borel regular não-atômica em $[0,1]$ com $\operatorname{supp} \mu = [0,1]$. Se existe $J \in X$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, existem $t_o, t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ com $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_n = 1$ e $\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu([t_{i-1},t_i]) - J \right\| < \varepsilon$

se $x_i \in [0,t_1[$, $x_i \in]t_{i-1}, t_i[$ $\forall\, i \in \{1,\ldots,n-1\}$ e $x_n \in]t_{n-1},1]$, então $f \in R(K,\mu,X)$ e $\int_{[0,1]} f d\mu = J$.

Prova. É conseqüência imediata de (4.32) se observarmos que nossas hipóteses já garantem que f é limitada.

4.35. OBSERVAÇÃO. A proposição (4.32) sugere a seguinte definição:

a) Dizemos que $f: K \to X$ é Riemann-interior integrável em relação a μ se existe $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{P}_\varepsilon$ μ-partição de K tal que se $\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ é um refinamento de $\mathcal{P}_\varepsilon$ e $x_i \in \overset{o}{P}_i$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ então $\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(P_i) - J \right\| < \varepsilon$.

No caso clássico poderíamos considerar a seguinte definição:

b) Dizemos que $f: [0,1] \to X$ é Riemann-interior integrável se existe $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $0 = t_o < t_1 < \dots < t_n = 1$ são tais que $\max\limits_{i \in \{1,\dots,n\}} (t_i - t_{i-1}) < \delta$ então dados $x_i \in \overset{o}{[t_{i-1},t_i]}$, $i \in \{1,\dots,n\}$ temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) - J \right\| < \varepsilon .$$

Em (5.27) mostraremos que se μ é a medida de Lebesgue em $[0,1]$ então a definição de integral dada em (4.19) coincide com a usual. O mesmo acontece com as integrais interiores acima definidos se nos restringirmos a funções limitadas. De fato, se f está nas condições de b) então por (4.34) $f \in R(K,\mu,X)$ (μ medida de Lebesgue em $[0,1]$) e portanto verifica a). Reciprocamente se f verifica a) para a medida de Lebesgue em $[0,1]$ e f é limitada, então por (4.32) $f \in R(K,\mu,X)$ e pelo exposto acima f é integrável no sentido usual, verificando portanto b).

No entanto, a função do exemplo (4.33), que não é limitada, está nas condições de a) para a medida de Lebesgue em $[0,1]$ mas não verifica b) pois não é limitada.

Dada $f: [0,1] \to X$, sabemos que se f é Riemann-integrável então f é limitada e que f é Darboux-integrável se e só se f é limitada e o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida (de Lebesgue) nula. Vamos estudar os análogos desses resultados para as integrais em relação a uma medida de Borel regular num compacto.

4.36. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja $f \in R(K,\mu,X)$. Então temos que:

a) existe $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ μ-partição de K tal que $\sup_{x \in P_i} \|f(x)\| < \infty$ se $i \in \{1,\ldots,n\}$ e $\mu(P_i) > 0$;

b) existe um fechado regular μ-contínuo F com $\operatorname{supp} \mu \subset F$ e tal que f é limitada em F;

c) se $\operatorname{supp} \mu = K$, então f é limitada.

<u>Prova</u>. a) Tomemos $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ μ-partição de K tal que se $x_i \in P_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ então $\|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(P_i) - \int_K f d\mu\| < 1$. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ tomo $x_i \in P_i$ fixado. Dado $i_o \in \{1,\ldots,n\}$, para cada $x \in P_{i_o}$ tem-se $\|f(x)\mu(P_{i_o}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_o}}^{n} f(x_i)\mu(P_i) - \int_K f d\mu\| < 1$ e portanto

$$\|f(x)\|\mu(P_{i_o}) \leq \|\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_o}}^{n} f(x_i)\mu(P_i)\| + \|\int_K f d\mu\| + 1.$$

Se $\mu(P_{i_o}) > 0$ então

$$\sup_{x \in P_{i_o}} \|f(x)\| \leq \frac{1}{\mu(P_{i_o})} [1 + \|\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_o}}^{n} f(x_i)\mu(P_i)\| + \|\int_K f d\mu\|] < \infty$$

o que completa a prova de a).

b) Tomemos $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ como em a), $J = \{i \in \{1,\ldots,n\}: \mu(P_i) > 0\}$ e $F = \bigsqcup_{i \in J} P_i$. Por (4.3.iii)) F é um fechado regular que é evidentemente μ-contínuo. Como $\complement F \subset \bigsqcup_{i \in \{1,\ldots,n\}-J} P_i$ então $\mu(\complement F) = 0$ e portanto supp $\mu \subset F$.

c) Decorre imediatamente de b).

4.37. <u>EXEMPLO</u>. Podemos ter $f \in R(K,\mu, X)$ mas f não limitada. De fato, sejam $K = [0,1]$, $X = \mathbb{R}$, $\mu(A) = \lambda(A \cap [\frac{1}{2},1])$ onde λ é a medida de Lebesgue. Se tomarmos

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } 0 < x < 1/2 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

então f não é limitada mas $f \in R([0,1],\mu,\mathbb{R})$ e $\int_{[0,1]} f d\mu = 0$. Para ver isso, basta aplicar (4.30) tomando, para cada $\varepsilon > 0$, $A_1 = [0,\frac{1}{2}]$ e $A_2 = [\frac{1}{2},1]$.

Mais do que isso, se K é um compacto de Eberlein perfeito não metrizável então para cada medida μ de Borel regular em K, existe $f \in R(K,\mu,\mathbb{R})$ não limitada. De fato, sendo K um compacto de Eberlein, então por [Li] teorema 4.3e [Rol] teorema 4.5.a) temos que o suporte de μ é metrizável. Conseqüentemente existe $p \in K$, $p \notin$ supp μ. Por (4.10) existe um fechado regular μ-contínuo F tal que supp $\mu \subset \overset{\circ}{F}$ e $p \notin F$. Como K é perfeito então K-F é infinito. Tomemos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K-F$. Definimos $f(x) = 0$ se $x \notin \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $f(x_n) = n$ se $n = 1,2,\ldots.$ Assim $f(x) = 0$ $\forall x \in F$. Tomemos $A_1 = F$, $A_2 = \overline{\complement F}$. Então A_1 e A_2 são fechados regulares μ-contínuos e como supp $\mu \subset \overset{\circ}{F}$ temos $\overline{\complement F} \subset \complement \operatorname{supp} \mu$ e portanto $\mu(\overline{\complement F}) = 0$. Assim, como f é nula em A_1, se tomarmos $\xi_1 \in A_1$ e $\xi_2 \in A_2$ então $f(\xi_1)\mu(A_1) + f(\xi_2)\mu(A_2) = 0$ e por (4.30) $f \in R(K,\mu,X)$. No entanto f não é limitada.

A bola unitária de $\ell_2(\Gamma)$, onde $|\Gamma| > \chi_o$, considerada com a topologia fraca é exemplo de um compacto de Eberlein perfeito não metrizável.

4.38. PROPOSIÇÃO. Seja $f: K \to X$. As condições i), ii) e iii) abaixo são equivalentes.

i) $f \in D(K,\mu,X)$.

ii) a) o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida μ nula;

b) existe $P = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ μ-partição de K tal que $\sup_{x\in P_i} \|f(x)\| < \infty$ se $i \in \{1,\ldots,n\}$ e $\mu(P_i) > 0$.

iii) a) o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida μ nula;

b') existe F fechado regular μ-contínuo de K com supp $\mu \subset F$ e f limitada em F.

Em particular se f é contínua então $f \in D(K,\mu,X)$.

Prova.

i)$\Longrightarrow$ ii). Se $f \in D(K,\mu,X)$ então por (4.29) $f \in R(K,\mu,X)$ e por (4.36.a)) temos ii) b). Sendo $D(f)$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de f temos $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde $F_n = \{x \in K: w(f,x) \geq \frac{1}{n}\}$.

(Note que, como cada F_n é fechado, então $D(f)$ é boreliano). Suponhamos que ii)a) não se verifique. Então para algum $n_o \in \mathbb{N}$ temos $\mu(F_{n_o}) > 0$. Para cada μ-partição $P = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ temos, tomando $J = \{i \in \{1,\ldots,n\}: \overset{\circ}{P}_i \cap F_{n_o} \neq \emptyset\}$, que

$$\sum_{i=1}^{n} w(f,P_i)\mu(P_i) \geq \sum_{i=1}^{n} w(f,\overset{\circ}{P}_i)\mu(\overset{\circ}{P}_i) \geq \sum_{i\in J} w(f,\overset{\circ}{P}_i)\mu(\overset{\circ}{P}_i)$$

$\geq \frac{1}{n_o} \sum_{i \in J} \mu(\overset{\circ}{P}_i) \geq \frac{1}{n_o}\mu(F_{n_o})$. Assim $w(f,P) \geq \frac{1}{n_o}\mu(F_{n_o}) > 0$ para toda μ-partição P de K e portanto $f \notin D(K,\mu,X)$. Logo i) $\Longrightarrow$ ii).

ii)$\Longrightarrow$ iii) Tomar $J = \{i \in \{1,\ldots,n\}: \mu(P_i) > 0\}$ e $F = \bigcup_{i \in J} P_i$ (ver prova de (4.36 b))).

iii) $\Longrightarrow$ i). Na notação que introduzimos acima temos $\mu(D(f)) = 0$ e portanto $\mu(F_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $M = \sup\{\|f(x)\|: x \in F\} + 1$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja n_o com $\frac{1}{n_o} < \frac{\varepsilon}{2\mu(K)+1}$. Por (4.10) podemos tomar A interior de um fechado regular μ-contínuo com $F_{n_o} \subset A$ e $\mu(A) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Como $\complement A \subset \complement F_{n_o}$, para cada $x \in \complement A$, existe V_x vizinhança de x com $w(f,\overline{V_x}) < \frac{1}{n_o}$. A compacidade de $\complement A$ e o emprego de (4.9) garantem a existência de $A_1,\ldots,A_m$ interiores de fechados regulares μ-contínuos com $\complement A \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ e $w(f,\overline{A}_i) \leq \frac{1}{n_o}$. Temos então que $\overline{A},\overline{A}_1,\ldots,\overline{A}_m$ são fechados regulares μ-contínuos e que $K = \overline{A} \cup \bigcup_{i=1}^{m} \overline{A}_i$. Por (4.15) podemos conseguir $P' = \{P_i'\}_{i=1}^{p}$ μ-partição de K tal que para cada $i \in \{1,\dots,p\}$ tenhamos $P'_i \subset \overline{A}$ ou $P'_i \subset \overline{A}_j$ para algum $j \in \{1,\dots,m\}$.

Se $F \neq K$, seja $\mathcal{P}'' = \left\{P''_i\right\}_{i=1}^{q}$ um refinamento comum das partições $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P} = \{F, \complement F\}$. No caso em que $F = K$, fazemos simplesmente $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}'$. Temos que se $i \in \{1,\dots,q\}$ então $P''_i \subset \overline{A}$ ou $P''_i \subset \overline{A}_j$ para algum $j \in \{1,\dots,m\}$. Além disso, $\mu(P''_i) = 0$ (se $P''_i \subset \complement F$) ou $\sup_{x \in P''_i} \|f(x)\| < M$ (se $P''_i \subset F$). Assim façamos

$$I_1 = \{i \in \{1,\dots,q\}: \mu(P''_i) \neq 0 \quad \text{e } P''_i \subset \overline{A}\},$$

$$I_2 = \{i \in \{1,\dots,q\}: \mu(P''_i) \neq 0 \quad \text{e } P''_i \not\subset \overline{A}\}.$$

Temos que $I_1 \cup I_2 = \{i \in \{1,\dots,q\}: \mu(P''_i) \neq 0\}$ e que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Além disso, se $i \in I_2$ então $P''_i \subset \overline{A}_j$ para algum $j \in \{1,\dots,m\}$ e portanto $w(f,P''_i) < \frac{1}{n_o}$.

Por outro lado, se $i \in I_1$, temos $\sup_{x \in P''_i} \|f(x)\| < M$ e portanto $w(f,P''_i) < 2M$. Lembrando que $\mu(P''_i \cap P''_j) = 0$ se $i,j \in \{1,\dots,q\}$, $i \neq j$ temos

$$w(f, \mathcal{P}'') = \sum_{i=1}^{q} w(f,P''_i)\mu(P''_i) = \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w(f,P''_i)\mu(P''_i)$$

$$\leqq \sum_{i \in I_1} 2M\mu(P''_i) + \sum_{i \in I_2} \frac{1}{n_o}\,\mu(P''_i)$$

$$\leqq 2M\mu(\overline{A}) + \frac{1}{n_o}\,\mu(K) < 2M\,\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2\mu(K)+1}\,\mu(K) < \varepsilon .$$

Logo $\inf\{w(f,P): P$ é μ-partição de $K\} = 0$ e portanto $f \in D(K,\mu,X)$.

4.39. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Seja $S = \operatorname{supp}\mu$. Se S é μ-contínuo e μ é não nula então S é regular. De fato, se $x \in K-\overline{\overset{o}{S}}$ então existe V aberto com $x \in V$ e $V \cap \overset{o}{S} = \emptyset$. Assim, supondo S μ-contínuo temos $\mu(V \cap S) = \mu(V \cap \partial S) + \mu(V \cap \overset{o}{S}) = 0$ e portando $\mu(V) = 0$. Logo $x \notin S$ e assim $S = \overline{\overset{o}{S}}$. Como μ é não nula temos $S = \overline{\overset{o}{S}} \neq \emptyset$ e portanto S é regular. Assim se $\operatorname{supp}\mu$ é μ-contínuo, usando (4.48) iii) $\Longrightarrow$ i), dada $f: K \to X$ são equivalentes:

1. $f \in D(K,\mu,X)$.
2. f é limitada em $\operatorname{supp}\mu$ e o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida μ nula.

Não sabemos, no entanto, se 1. e 2. acima continuam equivaentes, quando $\operatorname{supp}\mu$ não é μ-contínuo.

4.40. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Se $f \in R(K,\mu,X)$ e $x \in K$ é tal que $\mu(\{x\}) > 0$ então f é contínua em x.

<u>Prova</u>. Seja $P = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ μ-partição de K. Então existe $i_o \in \{1,\dots,n\}$ tal que $x \in P_{i_o}$. Como $\mu(\{x\}) > 0$ então $x \notin \partial P_{i_o}$ e portanto $x \in \overset{o}{P}_{i_o}$. Assim existe $y \in \overset{o}{P}_{i_o}$ tal que $\|f(x)-f(y)\| \geq \frac{1}{2} w(f,x)$ e portanto $\|f(x) - f(y)\|\mu(P_i) \geq \frac{1}{2} w(f,x)\mu(\{x\})$. Conseqüentemente $\operatorname{diam} S(f,P) \geq \frac{1}{2} w(f,x)\mu(\{x\})$ para toda μ-partição P de K. Se f não fosse contínua em x teríamos $\operatorname{diam} S(f,P) \geq \frac{1}{2} w(f,x)\mu(\{x\}) > 0$

para toda μ-partição P de K. Por (4.28) teríamos que $f \notin R(K,\mu,X)$.

4.41. <u>COROLÁRIO</u>. Se μ é puramente atômica então $R(K,\mu,X) = D(K,\mu,X)$. Conseqüentemente se K é disperso então $R(K,\mu,X) = D(K,\mu,X)$ Para toda medida μ de Borel regular em K.

<u>Prova</u>. Por (4.29) temos $D(K,\mu,X) \subset R(K,\mu,X)$. Se $f \in R(K,\mu,X)$ então (4.40) garante que (4.38.ii)a)) se verifica e temos também, por (4.36.a)), que (4.38.ii)b)) se verifica. Logo $f \in D(K,\mu,X)$.

Se K é disperso, sabemos (ver [PS] pág. 24) que toda medida de Borel regular em K é puramente atômica, o que completa a prova.

O Corolário anterior sugere a seguinte questão que será respondida em (7.19): Caracterizar os compactos K para os quais $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$ para toda μ de Borel regular em K e para todo X Banach.

Por (4.38) temos $C(K,X) \subset D(K,\mu,X)$ para todo compacto K, toda μ de Borel regular em K e todo X Banach. Nossos próximos resultados dão condições para que se tenha $C(K,X) = D(K,\mu,X)$.

4.42. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Se $X \neq \{0\}$ e se μ é uma medida de Borel regular em K, então são equivalentes:

i) $C(K,X) = D(K,\mu,X)$.

ii) $\mu(\{x\}) > 0$ para todo $x \in K$ que é ponto de acumulação.

Prova. i) $\Longrightarrow$ ii). Se x é ponto de acumulação de K, consideramos $v \in X$, $v \neq 0$ e $f = \chi_{\{x\}} \cdot v$. Então $f \notin C(K,X)$. Por i) $f \notin D(K,\mu,X)$. Como f é limitada, então por (4.38), o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida μ positiva, isto é, $\mu(\{x\}) > 0$.

ii) $\Longrightarrow$ i). Por (4.38) temos $C(K,X) \subset D(K,\mu,X)$. Tomemos $f \in D(K,\mu,X)$ e $x \in K$ ponto de acumulação. Como $\mu(\{x\}) > 0$, então por (4.38) f deve ser contínua em x. Como f é contínua nos pontos isolados então temos que $f \in C(K,X)$.

4.43. COROLÁRIO. Se $X \neq \{0\}$, então para cada K compacto Hausdorff são equivalentes:

i) o conjunto dos pontos de acumulação de K é enumerável;

ii) existe μ em K tal que $C(K,X) = D(K,\mu,X)$.

Logo, se K é perfeito então $C(K,X) \neq D(K,\mu,X)$ para toda μ em K.

Prova. i) $\Longrightarrow$ ii). Seja $\{a_n\}_{n \in J}$ (onde $J \subset \mathbb{N}$) o conjunto de pontos de acumulação de K. Para cada A boreliano de K, tomo $J_A = \{n \in J: a_n \in A\}$ e defino $\mu(A) = \sum_{n \in J_A} \frac{1}{2^n}$. Então μ é uma medida de Borel regular em K e $\mu(\{x\}) > 0$ para todo $x \in K$ que é ponto de acumulação. Logo, por (4.42) temos $C(K,X) = D(K,\mu,X)$.

ii) $\Longrightarrow$ i). Se μ é tal que $C(K,X) = D(K,\mu,X)$ então, por (4.42), $\mu(\{x\}) > 0$ para todo x ponto de acumulação de K e temos então i).

Lembremos que se K é perfeito então K é não enumerável e portanto o conjunto dos pontos de acumulação de K é não enumerável. Logo i) não vale e portanto não temos ii).

4.44. COROLÁRIO. Dado K compacto Hausdorff, são equivalentes:

i) $C(K,\mathbb{R}) = D(K,\mu,\mathbb{R})$ para toda μ de Borel regular em K.

ii) K é finito.

Prova. i) $\Longrightarrow$ ii). Se K é infinito então K tem um ponto de acumulação x. Tomemos $y \in K$, $y \neq x$. Para cada A boreliano de K defino $\mu(A) = \chi_A(y)$. Então μ é uma medida de Borel regular em K e $\mu(\{x\}) = 0$. Como x é ponto de acumulação de K, decorre de (4.42) que $C(K,\mathbb{R}) \neq D(K,\mu,\mathbb{R})$.

ii) $\Longrightarrow$ i). Se K é finito então toda $f: K \to X$ é contínua o que prova i).

4.45. EXEMPLOS. Como exemplos de compactos cujo conjunto dos pontos de acumulação é enumerável (portanto verificando (4.43.i))) temos:

a) K enumerável. Estes são, na verdade, os metrizáveis enumeráveis, isto é, aqueles que são homeomorfos a $[0,\alpha]$ (topologia usual) onde α é um ordinal com $\alpha < \omega_1$, sendo então todos dispersos. (ver [Se] 8.5.7 e 8.6.10).

b) K é o compactificado de Alexandroff de um conjunto discreto (não necessariamente enumerável).

c) K é o compactificado de Alexandroff de uma reunião enumerável (disjunta) de compactos, cada um deles do tipo do exemplo a) ou b).

4.46. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja F um subconjunto fechado de K. Sendo $\tilde{\mu}$ a restrição de μ aos borelianos de F temos que:

a) Se $f \in R(K,\mu,X)$ então $f|_F \in R(F,\tilde{\mu},X)$ e se $\operatorname{supp} \mu \subset F$ temos também que $\int_K f d\mu = \int_F f|_F d\tilde{\mu}$.

b) Se $f \in D(K,\mu,X)$ então $f|_F \in D(F,\tilde{\mu},X)$.

No caso em que F é um fechado regular μ-contínuo tal que $\operatorname{supp} \mu \subset F$, valem as recíprocas, isto é:

c) Se $f|_F \in R(F,\tilde{\mu},X)$ então $f \in R(K,\mu,X)$.

d) Se $f|_F \in D(F,\tilde{\mu},X)$ então $f \in D(K,\mu,X)$.

<u>Prova</u>. a) Se $P = \left\{P_i\right\}_{i=1}^n$ é uma μ-partição de K, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, indiquemos por A_i o fecho do interior de $P_i \cap F$, tomado na topologia de F induzida pela topologia de K. Sejam $J = \{i \in \{1,\ldots,n\} : A_i \neq \emptyset\}$ e $P' = \{A_i : i \in J\}$. Então temos :

1. É imediato que A_i é um fechado regular de F para cada $i \in J$.

2. $\partial_F A_i \subset \partial_F(P_i \cap F) \subset (\partial P_i) \cap F$. Logo $\tilde{\mu}(\partial_F A_i) = 0 \ \forall\, i \in J$ e portanto A_i é $\tilde{\mu}$-contínuo, se $i \in J$. (Além disso, também temos $\tilde{\mu}(\partial_F(P_i \cap F)) = 0 \ \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$.)

3. Se $i \in \{1,\ldots,n\}$ então $A_i \subset P_i$ e portanto $\tilde{\mu}(A_i) \leq \mu(P_i)$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

4. $\tilde{\mu}(A_i \cap A_j) \leq \mu(P_i \cap P_j) = 0$ se $i,j \in J$, $i \neq j$ (ver 3).

5. $F = \bigsqcup_{i=1}^{n} (P_i \cap F)$, já que $\mathcal{P}$ é μ-partição de K. Por (4.5),

$F = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i \in J} A_i$.

Logo, se $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ é uma μ-partição de K tal que diam $S_\mu(f,\mathcal{P}) \leq \varepsilon$, então tomando $\mathcal{P}'$ e J como acima temos por (1.2.a)) que $\|\sum_{i \in J} [f(x_i)-f(y_i)]\tilde{\mu}(A_i)\| \leq 2\varepsilon$ se $x_i, y_i \in P_i$, $i \in J$. Em particular, temos $\|\sum_{i \in J} [f(x_i)-f(y_i)]\tilde{\mu}(A_i)\| \leq 2\varepsilon$, se $x_i, y_i \in A_i$, $i \in J$. Por (4.28) d) $\Longrightarrow$ a) temos que $f|_F \in R(F,\tilde{\mu},X)$.

Suponhamos agora supp $\mu \subset F$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{n}$ tal que $\|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(P_i) - \int_K f d\mu\| < \varepsilon$, se $x_i \in P_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Tomemos J e $\mathcal{P}' = \{A_i : i \in J\}$ como acima. Como $\tilde{\mu}(\partial_F(P_i \cap F)) = 0$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ (ver 2) então

$\mu(P_i) = \tilde{\mu}(P_i \cap \text{supp}\, \mu) = \tilde{\mu}(P_i \cap F) = \tilde{\mu}(A_i)$, $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$.

Com isso, temos

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\tilde{\mu}(A_i) = \sum_{i \in J} f(x_i)\tilde{\mu}(A_i),\ \forall\, x_1,\ldots,x_n \in K$$

e portanto $\|\sum_{i \in J} f(x_i)\tilde{\mu}(A_i) - \int_K f d\mu\| < \varepsilon$ se $x_i \in P_i$, $i \in J$. Em particular, por 3 temos que $\|\sum_{i \in J} f(x_i)\tilde{\mu}(A_i) - \int_K f d\mu\| < \varepsilon$ se $x_i \in A_i$, $i \in J$. Por (4.30) temos $\int_F f|_F d\tilde{\mu} = \int_K f d\mu$.

b) Seja $f \in D(K,\mu,X)$. Então existe uma μ-partição $\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ de K tal que $\sum_{i=1}^{n} w(f,P_i)\mu(P_i) < \varepsilon$. Tomando $A_1,\ldots,A_n$ e J como em a) temos por 3 que $\sum_{i\in J} w(f,A_i)\tilde{\mu}(A_i) \leq \sum_{i\in J} w(f,P_i)\mu(P_i) \leq \sum_{i=1}^{n} w(f,P_i)\mu(P_i) < \varepsilon$.

Usando d') $\Longrightarrow$ a') de (4.28) temos que $f|_F \in D(F,\tilde{\mu},X)$.

c) Se $F = K$, nada a fazer. Se $F \neq K$, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ $\tilde{\mu}$-partição de F tal que diam $S_{\tilde{\mu}}(f|_F,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Seja $\mathcal{P}'$ como em (4.17). Como supp $\mu \subset F$ e F é μ-contínuo temos $\mu(\overline{\complement F}) = \mu(\complement F) + \mu(\partial F) = 0$. Assim $S_\mu(f,\mathcal{P}') \subset S_{\tilde{\mu}}(f|_F,\mathcal{P})$ e portanto diam $S_\mu(f,\mathcal{P}') < \varepsilon$. Por (4.28) $f \in R(K,\mu,X)$.

d) Análoga à de c).

Os resultados seguintes deste parágrafo foram demonstrados pelo professor Antonio Gilioli, quando da leitura da versão preliminar deste trabalho, onde perguntávamos sobre a validade de (4.50).

4.47. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Sejam μ e ν medidas de Borel regulares em K com $\nu \leq \mu$. Então:

a) $R(K,\mu,X) \subset R(K,\nu,X)$.

b) $D(K,\mu,X) \subset D(K,\nu,X)$.

<u>Prova</u>. a) Seja $f \in R(K,\mu,X)$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ μ-partição de K tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} [f(x_i)-f(y_i)]\mu(P_i)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } x_i,y_i \in P_i,\ \forall i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Dados $x_i, y_i \in P_i$ e $\Theta_i \in \{-1,1\}, \forall i \in \{1,\dots,n\}$ temos $\|\sum_{i=1}^{n} \Theta_i [f(x_i)-f(y_i)]\mu(P_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Aplicando (1.2.a)) temos que $\|\sum_{i=1}^{n} [f(x_i)-f(y_i)]\nu(P_i)\| \leq \varepsilon$. Como $\mathcal{P}$ é também uma ν-partição de K, decorre de (4.28) que $f \in R(K,\nu,X)$.

b) Imediata.

4.48. <u>LEMA</u>. Sejam μ e ν medidas de Borel regulares em K, com $\nu \leq \mu$. Seja $f \in R(K,\nu,X)$ limitada. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}$ μ-partição de K tal que diam $S_\nu(f,\mathcal{P}) \leq \varepsilon$.

<u>Prova</u>. Seja $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M$ $\forall x \in K$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}' = \left\{P'_j\right\}_{j=1}^{m}$ ν-partição de K tal que diam $S_\nu(f,\mathcal{P}') \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Seja $K_o = \bigsqcup_{j=1}^{m} \partial P'_j$.

Por (4.10), existe F fechado regular μ-contínuo, com $K_o \subset \overset{\circ}{F}$ e $\mu(F) < \mu(K_o) + \frac{\varepsilon}{4M}$. Logo, como $\nu(K_o) = 0$, temos $\nu(F) = \nu(F-K_o) + \nu(K_o) = \nu(F-K_o) \leq \mu(F-K_o) = \mu(F) - \mu(K_o) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Para cada $j \in \{1,\dots,m\}$ seja B_j o interior de $P'_j \cap \overline{\complement F}$. Seja $\mathcal{B} = \{F\} \cup \{\overline{B_j}: B_j \neq \emptyset \text{ , } j \in \{1,\dots,m\}\}$. Então temos que:

1. Os elementos de $\mathcal{B}$ são fechados regulares.
2. Como $\partial P'_j \subset \overset{\circ}{F}$ então $\partial(P'_j \cap \overline{\complement F}) \cap \partial P'_j = \emptyset$. Assim, como $\partial B_j \subset \partial(P'_j \cap \overline{\complement F}) \subset \partial P'_j \cup \partial F$ temos $\partial B_j \subset \partial F$ e assim $\mu(\partial B_j) = 0$. Logo cada B_j é μ-contínuo e assim os elementos de $\mathcal{B}$ são μ-contínuos.

3. Se $j,k \in \{1,\dots,m\}$ e $j \neq k$ então $\overset{\circ}{\overline{B_j}} \cap \overset{\circ}{\overline{B_k}} \subset \overset{\circ}{P'_j} \cap \overset{\circ}{P'_k} = \emptyset$ e $\overset{\circ}{\overline{B_j}} \cap \overset{\circ}{F} \subset \overline{\complement \overset{\circ}{F}} \cap \overset{\circ}{F} = (\complement \overset{\circ}{\overline{F}}) \cap \overset{\circ}{F} = (\complement F) \cap \overset{\circ}{F} = \emptyset$.

4. Como $K = \bigcup_{j=1}^{m} P'_j = \bigcup_{j=1}^{m} (P'_j \cap \overline{\complement F}) \cup F$ então, por (4.5),

$$K = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{B_j} \cup F.$$

Assim $\mathcal{B}$ é uma μ-partição de K.

Seja $J = \{j \in \{1,\dots,m\}: B_j \neq \emptyset\}$. Para cada $j \in I$, sejam $x_j, y_j \in \overline{B_j}$. Dados $x,y \in F$ temos, usando (1.2. a)), que

$$\left\| \sum_{j\in J} [f(x_j)-f(y_j)]\nu(\overline{B_j}) + [f(x)-f(y)]\nu(F) \right\| \leqq$$

$$\left\| \sum_{j\in J} [f(x_j)-f(y_j)]\nu(\overline{B_j}) \right\| + \| f(x)-f(y) \| \nu(F) \leqq 2\,\frac{\varepsilon}{4} + 2M\,\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon .$$

Basta, então tomar $\mathcal{P} = \mathcal{B}$.

4.49. <u>COROLÁRIO</u>. Sejam μ e ν medidas de Borel regulares em K tais que $\nu \leqq \mu$. Seja $f \in R(K,\nu,X)$. Se existe F fechado regular μ-contínuo tal que supp $\nu \subset F$ e f é limitada em F então para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}'$ μ-partição de K tal que diam $S_\nu(f,\mathcal{P}') \leqq \varepsilon$.

<u>Prova</u>. Por (4.48), basta considerar o caso em que $F \neq K$. Indiquemos por $\tilde{\nu}$ a restrição de ν aos borelianos de F. Sabemos por (4.46a)) que $f|_F \in R(F,\tilde{\nu},X)$. Sendo $\tilde{\mu}$ a restrição de μ aos borelianos de F, temos $\tilde{\nu} \leqq \tilde{\mu}$. Como $f|_F$ é limitada, aplicando (4.48) ao compacto F e medidas $\tilde{\nu}$ e $\tilde{\mu}$ temos que para cada $\varepsilon > 0$, existe

$\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ $\tilde{\mu}$-partição de F tal que diam $S_{\tilde{\nu}}(f|_F, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$. Tomando $\mathcal{P}'$ como em (4.17) e procedendo como na prova de (4.46c)) temos diam $S_\nu(f, \mathcal{P}') \leq \varepsilon$, o que completa a prova.

4.50. PROPOSIÇÃO. Sejam μ e ν medidas de Borel regulares em K. Então temos:

a) $R(K,\mu+\nu,X) = R(K,\mu,X) \cap R(K,\nu,X)$ e $\int_K f d(\mu+\nu) = \int_K f d\mu + \int_K f d\mu$ para toda $f \in R(K,\mu,X) \cap R(K,\nu,X)$.

b) $D(K,\mu+\nu,X) = D(K,\mu,X) \cap D(K,\nu,X)$.

Prova. a) Seja $f \in R(K,\mu,X) \cap R(K,\nu,X)$. Por (4.36b)) existem F_1 e F_2 fechados regulares, F_1 μ-contínuo, F_2 ν-contínuo com supp $\mu \subset F_1$, supp $\nu \subset F_2$ e f limitada em F_1 e em F_2. Seja $F = F_1 \cup F_2$, que é um fechado regular, onde f é limitada. Além disso, F é $(\mu+\nu)$-contínuo. De fato,

$$\partial F \subset ((\partial F_1) - \overset{\circ}{F}_2) \cup ((\partial F_2) - \overset{\circ}{F}_1) = ((\partial F_1) \cap \complement \overset{\circ}{F}_2) \cup ((\partial F_2) \cap \complement \overset{\circ}{F}_1) \text{ e como}$$

$\mu(\partial F_1) = 0$, $\nu(\complement \overset{\circ}{F}_2) = \nu((\partial F_2) \cup \complement F_2) = \nu(\partial F_2) + \nu(\complement F_2) = 0$ e também, de modo análogo, $\nu(\partial F_2) = 0 = \mu(\complement \overset{\circ}{F}_1)$, então temos $(\mu+\nu)(\partial F) = 0$. Temos ainda que $\text{supp}(\mu+\nu) \subset \text{supp}\,\mu \cup \text{supp}\,\nu \subset F_1 \cup F_2 = F$.

Como $f \in R(K,\mu,X)$, existe, por (4.49), uma $(\mu+\nu)$-partição $\mathcal{P}_1$ de K tal que diam $S_\mu(f, \mathcal{P}_1) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Da mesma maneira, como $f \in R(K,\nu,X)$, existe $\mathcal{P}_2$ uma $(\mu+\nu)$-partição K tal que diam $S_\nu(f, \mathcal{P}_2) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Seja $\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ uma $(\mu+\nu)$-partição de K que é um refinamento comum de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ (ver (4.14)). Por (4.26.ii)), temos diam $S_\mu(f,\mathcal{P}) \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ e diam $S_\nu(f,\mathcal{P}) \leqq \frac{\varepsilon}{4}$.

Seja $\mathcal{P}'$ uma μ-partição de K mais fina que $\mathcal{P}$ tal que $\|z - \int_K f d\mu\| < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $z \in S_\mu(f,\mathcal{P}')$. Como, por (4.26.i)), temos $S_\mu(f,\mathcal{P}') \subset co(S_\mu(f,\mathcal{P}))$ então se $z \in S_\mu(f,\mathcal{P}')$ e $y \in S_\mu(f,\mathcal{P})$ temos, usando (4.24), que $\|y-z\| \leqq \text{diam}\, co(S_\mu(f,\mathcal{P})) = \text{diam}\, S_\mu(f,\mathcal{P}) \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ e portanto, escolhendo $z_o \in S_\mu(f,\mathcal{P}')$ temos

$$\|y-\int_K fd\mu\| \leqq \|y-z_o\| + \|z_o-\int_K d\mu\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } y \in S_\mu(f,\mathcal{P}).$$

Analogamente temos $\|y-\int_K fd\mu\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $y \in S_\nu(f,\mathcal{P})$.

Tomemos $\{x_i\}_{i=1}^n$ com $x_i \in P_i$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$. Então

$$\|\sum_{i=1}^n f(x_i)(\mu+\nu)(P_i) - (\int_K fd\mu + \int_K fd\nu)\| \leqq$$

$$\|\sum_{i=1} f(x_i)\mu(P_i) - \int_K fd\mu\| + \|\sum_{i=1}^n f(x_i)\nu(P_i) - \int_K fd\nu\| < \varepsilon .$$

Por (4.30) temos que $f \in R(K,\mu+\nu,X)$ e que $\int_K fd(\mu+\nu) = \int_K fd\mu + \int_K fd\mu$.

Para completar a prova de a) basta usar (4.47.a)).

b) Se $f \in D(K,\mu,X) \cap D(K,\nu,X)$ então por (4.38) o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida μ nula e também ν-nula. Usando a) e (4.29) temos que $f \in R(K,\mu+\nu,X)$. Assim, usando (4.36.a)) e (4.38), concluímos que $f \in D(K,\mu+\nu,X)$. O resultado decorre agora de (4.47.b)).

oOo

§5. COMPARAÇÃO ENTRE INTEGRABILIDADE SEGUNDO RIEMANN (OU DARBOUX) GENERALIZADA E INTEGRABILIDADE EM RELAÇÃO A UMA FUNÇÃO α

Neste parágrafo, vamos mostrar que quando $K = [a,b]$ e μ é a medida de Lebesgue em K, as funções Riemann (Darboux) integráveis em relação a μ são precisamente as funções Riemann (Darboux) integráveis e que a integral de Riemann em relação a μ é a integral de Riemann usual. Mais geralmente, se $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função crescente, estudaremos a relação entre Riemann (Darboux) integrabilidade em relação a α e Riemann (Darboux) integrabilidade em relação à medida (usualmente denotada por μ_α) naturalmente associada a α.

X continuará indicando um espaço de Banach.

5.1. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular em $[a,b]$. Então existe uma (única) função $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente, contínua à esquerda, com $\alpha(a) = 0$ e tal que $\mu([c,d]) = \alpha(d+)-\alpha(c-) = \alpha(d+)-\alpha(c)$ se $a \leq c \leq d \leq b$, onde convencionamos $\alpha(a^-) = \alpha(a)$ e $\alpha(b^+) = \alpha(b)$. Assim, se μ for não-atômica α será contínua. Reciprocamente se $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ é crescente então existe uma única medida μ_α regular, definida nos borelianos de $[a,b]$ tal que $\mu_\alpha([c,d]) = \alpha(d+) - \alpha(c^-)$ se $a \leq c \leq d \leq b$ (aqui também $\alpha(a^-)=\alpha(a)$ e $\alpha(b^+) = \alpha(b)$).

<u>Prova</u>. Ver [H], Capítulo IV, §2. exercício 7 e exemplo 1, fazendo as adaptações necessárias.

5.2. NOTAÇÕES. Sejam $f: [a,b] \to X$ e $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Se $d = (t_o, t_1, \ldots, t_n)$ é uma partição de $[a,b]$ escrevemos

$$w_\alpha(f,d) = \sum_{i=1}^{n} w(f,[t_{i-1},t_i])[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] =$$

$$= \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \|f(x_i) - f(y_i)\| [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] : x_i, y_i \in [t_{i-1},t_i], i=1,\ldots,n \right\}$$

(onde convencionamos $\infty.0 = 0$) e

$$S_\alpha(f,d) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})];\ x_i \in [t_{i-1},t_i],\ i=1,\ldots,n \right\}.$$

5.3. DEFINIÇÃO. Sejam $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente e $f: [a,b] \to X$.

a) Dizemos que f é N-Riemann-integrável em relação a α se existe $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $d = (t_o, t_1, \ldots, t_n)$ partição de $[a,b]$ com diâmetro menor do que δ e para cada $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ com $x_i \in [t_{i-1},t_i]$ $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$ tem-se que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - J \right\| < \varepsilon .$$

Nesse caso, escrevemos $J = N\int_a^b f d\alpha$ e dizemos que J é a N-integral de Riemann de f em relação a α.

b) Dizemos que f é σ-Riemann-integrável em relação a α se existe $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe d_ε partição de $[a,b]$ tal que para cada $d = (t_o, t_1, \ldots, t_n)$ que é um refinamento de d_ε e para cada $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ com $x_i \in [t_{i-1},t_i]$ $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$ tem-se que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - J \right\| < \varepsilon.$$

Nesse caso, escrevemos $J = \sigma\int_a^b f d\alpha$ e dizemos que J é a σ-integral de Riemann de f em relação a α.

c) Dizemos que f é N-Darboux integrável em relação a α se $\lim_{\Delta d \to 0} w_\alpha(f,d) = 0$, isto é se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se d é uma partição de $[a,b]$ com diâmetro menor do que δ então $w_\alpha(f,d) < \varepsilon$.

d) Dizemos que f é σ-Darboux integrável em relação a α se para cada $\varepsilon > 0$, existe d_ε partição de $[a,b]$ tal que se d é um refinamento de d_ε então $w_\alpha(f,d) < \varepsilon$.

Denotaremos por $R_N([a,b],\alpha,X)$ ($D_N([a,b],\alpha,X)$) o conjunto das funções N-Riemann (Darboux) integráveis em relação a α e por $R_\sigma([a,b],\alpha,X)$ ($D_\sigma([a,b],\alpha,X)$) o conjunto das funções σ-Riemann (Darboux) integráveis em relação a α.

Funções N-Riemann (Darboux) integráveis em relação a α foram estudadas em [He].

Para σ-Riemann integrabilidade, valem alguns critérios, semelhantes aos do §4, que apresentaremos a seguir.

5.4. PROPOSIÇÃO. Sejam $f: [a,b] \to X$ e $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. São equivalentes:

a) $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

b) existe uma seqüência $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de partições de $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} S_\alpha(f,d_n) = 0$.

c) existe uma seqüência $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de partições de $[a,b]$ tal que d_{n+1} é um refinamento de d_n $\forall\, n\in\mathbb{N}$ e tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} S_\alpha(f,d_n) = 0$.

d) para cada $\varepsilon > 0$, existe d_ε partição de $[a,b]$ com $\operatorname{diam} S_\alpha(f,d_\varepsilon) < \varepsilon$.

Prova: a) $\Longrightarrow$ b) é imediato. Para provar que b) $\Longrightarrow$ c) é suficiente, como em (4.28), mostrar que se d' é um refinamento de d então $\operatorname{diam} S_\alpha(f,d') \leqq \operatorname{diam} S_\alpha(f,d)$, que é precisamente (I.1.28b)) de [He].

c) $\Longrightarrow$ d) é imediato.

Para provar que d) $\Longrightarrow$ a), também procedemos como em (4.28). Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $d_{\varepsilon/2}$ tal que $\operatorname{diam} S_\alpha(f,d_{\varepsilon/2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por (4.24) temos então $\operatorname{diam} co(S_\alpha(f,d_{\varepsilon/2})) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se d e d' são refinamentos de $d_{\varepsilon/2}$ procedendo como em (4.25) demonstra-se que $S_\alpha(f,d) \subset co(S_\alpha(f,d_{\varepsilon/2}))$ e $S_\alpha(f,d') \subset co(S_\alpha(f,d_{\varepsilon/2}))$.

Assim, sendo $d = (t_0,t_1,\ldots,t_n)$, $d' = (s_0,s_1,\ldots,s_m)$, $x_i \in [t_{i-1},t_i]$, $i=1,\ldots,n$, $y_j \in [s_{j-1},s_j]$, $j=1,\ldots,m$ temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - \sum_{j=1}^{m} f(y_j)[\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})]\right\| \leqq$$

$\leqq \operatorname{diam} co(S_\alpha(f,d_{\varepsilon/2})) < \frac{\varepsilon}{2}$. Resultado análogo a (4.23) garante que $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

5.5. PROPOSIÇÃO. Sejam $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente e $f\colon [a,b] \to X$. Suponha que exista $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ exista $d_\varepsilon = (t_0,t_1,\ldots,t_n)$ partição de $[a,b]$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - J\right\| < \varepsilon \quad \text{se } x_i \in [t_{i-1},t_i] \ \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Então $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$ e $\int_a^b f d\alpha = J$.

<u>Prova</u>. É análoga à de (4.30).

5.6. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Sejam $f: [a,b] \to X$ e $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua crescente. Suponha que exista $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ exista d_ε partição de $[a,b]$, $d_\varepsilon = (t_o,t_1,\dots,t_n)$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - J\right\| < \varepsilon \text{ se } x_i \in]t_{i-1},t_i[, \ \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Então $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

<u>Prova</u>. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $d_{\varepsilon/2} = (t_o,t_1,\dots,t_n)$ como na hipótese. É fácil ver que se $\alpha(t_i) \neq \alpha(t_{i-1})$ então f é limitada em $]t_{i-1},t_i[$ e portanto em $[t_{i-1},t_i]$. Seja $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leqq M$ se $x \in [t_{i-1},t_i]$ e $\alpha(t_i) \neq \alpha(t_{i-1})$, $i = 1,\dots,n$. Seja $\delta > 0$ tal que $a = t_o < t_o+\delta < t_1-\delta < t_1 < t_1+\delta < t_2-\delta < \dots < t_n-\delta < t_n = b$ e

$$\alpha(t_o+\delta)-\alpha(t_o)+\sum_{i=1}^{n-1}[\alpha(t_i+\delta)-\alpha(t_i-\delta)]+\alpha(t_n)-\alpha(t_n-\delta) < \frac{\varepsilon}{8M}$$

(existe pois α é contínua). Consideremos a partição $(t_o,t_o+\delta,t_1-\delta,t_1,t_1+\delta,\dots,t_n-\delta,t_n)$. Se $x \in [t_{i-1}+\delta,t_i-\delta]$ então $x \in]t_{i-1},t_i[$. Como essa partição é um refinamento de $d_{\varepsilon/2}$ temos que, em cada um dos seus subintervalos, f é limitada por M, ou é constante. Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ tomemos $x_i \in [t_{i-1}+\delta,t_i-\delta] \subset]t_{i-1},t_i[$. Para cada $i \in \{0,\dots,n-1\}$ tomemos $z_i \in [t_i,t_i+\delta]$ e para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ tomemos $y_i \in [t_i-\delta,t_i]$.

Seja $J = \{i \in \mathbb{N}: i \leqq n \text{ e } \alpha(t_{i-1}) \neq \alpha(t_i)\}$. Temos que

$$\left\| \sum_{i\in J}^{n} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - J \right\| < \varepsilon/2 \qquad \text{e portanto}$$

$$\left\| \sum_{i\in J} f(x_i)[\alpha(t_i - \delta) - \alpha(t_{i-1} + \delta)] + \sum_{i\in J} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_i - \delta)] \right.$$

$$\left. + \sum_{i\in J} f(x_i)\ [\alpha(t_{i-1} + \delta) - \alpha(t_{i-1})] - J \right\| < \varepsilon/2.$$ Mas se $i \in J$ então $\|f(x_i)\| \leq M$ e portanto

$$\left\| \sum_{i\in J} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_i - \delta)] + \sum_{i\in J} f(x_i)[\alpha(t_{i-1} + \delta) - \alpha(t_{i-1})] \right\| < \varepsilon/4 .$$

Assim $\left\| \sum_{i\in J} f(x_i)[\alpha(t_i - \delta) - \alpha(t_{i-1} + \delta)] - J \right\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/4$.

Se $i \in J$ então como $[t_i - \delta, t_i] \subset [t_{i-1} - t_i]$ temos $\|f(y_i)\| \leq M$. Analogamente se $i+1 \in J$, $\|f(z_i)\| \leq M$ e portanto $\left\| \sum_{i\in J} f(y_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_i - \delta)] + \sum_{i+1\in J} f(z_i)[\alpha(t_i + \delta) - \alpha(t_i)] \right\| \leq \varepsilon/4$. Logo

$$\left\| \sum_{i\in J} f(x_i)[\alpha(t_i - \delta) - \alpha(t_{i-1} + \delta)] + \sum_{i\in J} f(y_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_i - \delta)] \right.$$

$$\left. + \sum_{i+1\in J} f(z_i)[\alpha(t_i + \delta) - \alpha(t_i)] - J \right\| < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Se $i \notin J$ então $\alpha(t_i) = \alpha(t_{i-1})$ e portanto $\alpha(t_{i-1}) = \alpha(t_{i-1} + \delta) = \alpha(t_i - \delta) = \alpha(t_i)$. Se $i+1 \notin J$ então $\alpha(t_{i+1}) = \alpha(t_i)$ e portanto $\alpha(t_i) = \alpha(t_i + \delta)$. Logo

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\alpha(t_i - \delta) - \alpha(t_{i-1} + \delta)] + \sum_{i=1}^{n} f(y_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_i - \delta)] \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)[\alpha(t_i + \delta) - \alpha(t_i)] - J \right\| < \varepsilon .$$ Por (5.5) $f \in R_\sigma([a,b], \alpha, X)$.

5.7. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Sejam $f: [a,b] \to X$ e $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua crescente. Suponha que para cada $\varepsilon > 0$ exista $d_\varepsilon = (t_o, t_1, \ldots t_n)$ partição de $[a,b]$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)-f(y_i)][\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \right\| < \varepsilon \text{ se } x_i, y_i \in]t_{i-1}, t_i[$$

$\forall i \in \{1,\ldots,n\}$. Então $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

Prova. É análoga à prova de (5.6) usando-se no final (5.4) a) $\Longleftrightarrow$ d). Ver também [He] - I.1.32.

5.8. PROPOSIÇÃO. Sejam $f\colon [a,b] \to X$ e $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Então $f \in D_\sigma([a,b],\alpha,X)$ se e só se para cada $\varepsilon > 0$ existe d_ε partição de $[a,b]$ com $w_\alpha(f,d_\varepsilon) < \varepsilon$.

Prova. É fácil ver que se d' é um refinamento de d então $w_\alpha(f,d') \leq w_\alpha(f,d)$. Assim se para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar d_ε com $w_\alpha(f,d_\varepsilon) < \varepsilon$, temos que $w_\alpha(f,d) < \varepsilon$ sempre que d for um refinamento de d_ε. Logo $f \in D_\sigma([a,b],\alpha,X)$. A recíproca é imediata.

5.9. DEFINIÇÃO. Seja $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente.

i) Indicamos por $B_\alpha([a,b],X)$ o conjunto das funções $f\colon [a,b] \to X$ para as quais existe $d = (t_o,t_1,\ldots,t_n)$ partição de $[a,b]$ tal que:

a) se $i \in \{1,\ldots,n\}$ e $\alpha(t_i) \neq \alpha(t_{i-1})$ então f é limitada em $[t_{i-1},t_i]$;

b) para cada $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ existe uma vizinhança de t_i onde f é limitada.

ii) Indicamos por $\tilde{B}_\alpha([a,b],X)$ o conjunto das funções $f\colon [a,b] \to X$ para as quais existe $d = (t_o,t_1,\ldots,t_n)$ partição de $[a,b]$ verificando a condição a) acima. (Ver [He] definição I.1.16).

iii) Indicamos por $C_\alpha([a,b],X)$ o conjunto das funções $f: [a,b] \to X$ que são contínuas em cada ponto de $]a,b[$ no qual α é descontínua.

5.10. PROPOSIÇÃO. Seja $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Então:

i) $R_N([a,b],\alpha,X) = R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B_\alpha([a,b],X) \cap C_\alpha([a,b],X)$;

ii) $D_N([a,b],\alpha,X) = D_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B_\alpha([a,b],X) \cap C_\alpha([a,b],X)$;

iii) dada $f: [a,b] \to X$ temos que $f \in D_N([a,b],\alpha,X)$ se e só se $f \in B_\alpha([a,b])$ e o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida μ_α nula.

Prova: i), ii) e iii) correspondem aos análogos dos resultados I.1.25, I.1.18 a) e b) de [He] para $[a,b]$ no lugar de $[0,1]$.

5.11. PROPOSIÇÃO. Seja $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Então:

i) $D_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

ii) $D_N([a,b],\alpha,X) \subset R_N([a,b],\alpha,X)$.

iii) $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset \tilde{B}_\alpha([a,b],X)$.

Prova. i) Se $f \in D_\sigma([a,b],\alpha,X)$ então para cada $\varepsilon > 0$ existe d_ε partição de $[a,b]$ tal que $w_\alpha(f,d_\varepsilon) < \varepsilon$ e portanto $\operatorname{diam} S_\alpha(f,d_\varepsilon) \leqq w_\alpha(f,d_\varepsilon) < \varepsilon$. Basta usar agora (5.4) a) $\Longleftrightarrow$ d) para concluir que $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

ii) Ver I.1.11 de [He].

iii) Muito simples.

5.12. OBSERVAÇÃO. Lembramos que as inclusões i) e ii) de (5.11) são, em geral próprias e que se dim $X < \infty$ valem as igualdades em i) e ii). A questão da validade da igualdade em ii) foi estudada em [He] em diversas classes de espaços de Banach X. No §7 trataremos da seguinte questão: Seja $i(x) = x$. Se $D_N([0,1],i,X) = R_N([0,1],i,X)$ (ou $D_N([0,1],i,X) \neq R_N([0,1],i,X)$) o que se pode dizer da igualdade $D_N([a,b],\alpha,X) = R_N([a,b],\alpha,X)$ para uma α crescente qualquer?

5.13. PROPOSIÇÃO. Seja $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Se $f \in R([a,b],\mu_\alpha,X)$ então f e α não têm ponto de descontinuidade comum. Assim $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset C_\alpha([a,b],X)$.

Prova. Seja $x_o \in [a,b]$. Se α é descontínua em x_o então $\mu_\alpha(\{x_o\})>0$. Assim, se $f \in R([a,b],\mu_\alpha,X)$, por (4.40), temos f contínua em x_o.

5.14. PROPOSIÇÃO. Seja $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Então:

i) $R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap \tilde{B}_\alpha([a,b],X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha,X)$ e se $f \in R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap \tilde{B}_\alpha([a,b],X)$ então $\int_{[a,b]} f d\mu_\alpha = \sigma\!\int_a^b f d\alpha$.

ii) $D([a,b],\mu_\alpha,X) \cap \tilde{B}_\alpha([a,b],X) \subset D_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

Prova i). Seja $f \in R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap \tilde{B}_\alpha([a,b],X)$. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\mathcal{P}_\varepsilon = \left\{P_i\right\}_{i=1}^n$ μ_α-partição de [a,b] tal que se $\mathcal{P} = \left\{P_i'\right\}_{i=1}^m$ é um refinamento de $\mathcal{P}_\varepsilon$ então

$$\Big\| \sum_{i=1}^m f(x_i)\mu_\alpha(P_i') - \int_{[a,b]} f d\mu_\alpha \Big\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } x_i \in P_i' \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ temos que existe $\{I_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$\overset{\circ}{P}_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^i$, cada I_j^i não vazio é do tipo $]c_j^i,d_j^i[$ ou $[c_j^i,d_j^i[$ com $c_j^i = a$ ou $]c_j^i,d_j^i]$ com $d_j^i = b$ ou $[c_j^i,d_j^i] = [a,b]$ e $I_j^i \cap I_k^i = \emptyset$ se $i \neq k$. Assim se $c_j^i \neq a$ então $c_j^i \in \partial P_i$ e portanto $\mu_\alpha(\{c_j^i\}) = 0$. Analogamente se $d_j^i \neq b$ temos $\mu_\alpha(\{d_j^i\}) = 0$. Logo α é contínua em c_j^i se $c_j^i \neq a$ e em d_j^i se $d_j^i \neq b$.

Seja $M' > 0$ tal que $\sup \{\|f(x)\|: x \in P_i\} \leq M'$ se $i \in \{1,\ldots,n\}$ e $\mu_\alpha(P_i) > 0$. Como $f \in \tilde{B}_\alpha([a,b],X)$, podemos tomar $d = (s_o,s_1,\ldots,s_r)$ partição de $[a,b]$ e $M'' > 0$ tais que $\sup \{\|f(x)\|: x \in]s_{k-1},s_k[\} \leq M''$ se $k \in \{1,\ldots,r\}$ e $\alpha(s_{k-1}) \neq \alpha(s_k)$.

Como $f \in R([a,b],\mu_\alpha,X)$, sabemos por (4.40) que se α é descontínua em algum s_k então, como $\mu_\alpha(\{s_k\}) > 0$, teremos f contínua em s_k e portanto f limitada numa vizinhança de s_k. Com isto, deslocando um pouco os s_k, se necessário, podemos supor α contínua em s_k, se $k \in \{1,\ldots,r-1\}$. [Para ilustrar, suponhamos α descontínua em s_1, $\alpha(s_o) = \alpha(s_1)$, f limitada em $[s_1,s_2]$. Então existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $[s_1-\delta,s_2]$, α é contínua em $s_1-\delta$ e $s_1-\delta > s_o$. Substituímos, então, s_1 por $s_1-\delta$ em d].

Seja $M = M'+M''$. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ tomemos $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=n_i+1}^{\infty} \mu_\alpha(I_j^i) < \frac{\varepsilon}{4nM}$ (note que $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_\alpha(I_j^i) = \mu_\alpha(\overset{\circ}{P}_i) < \infty$ e $\sum_{j=n_i+1}^{\infty} \mu_\alpha(I_j^i) = \mu_\alpha(\bigcup_{j=n_i+1}^{\infty} I_j^i))$.

Consideremos a μ_α-partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ formada pelos conjuntos $P_{ij} = [c_j^i,d_j^i]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,n_i\}$ e pelos conjuntos do tipo $P_i' = P_i - \bigcup_{j=1}^{n_i} [c_j^i,d_j^i]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ que forem não-vazios (para verificar que $\mathcal{P}$ é uma μ_α-partição notemos que a regularidade de cada P_i' não vazio é conseqüência de (4.3)iii) e iv) e e a μ_α-continuidade segue da continuidade de α em c_j^i se $c_j^i \neq a$ e d_j^i se $d_j^i \neq b$).

Temos que P é um refinamento de P_ε e que $\mu_\alpha(P_i^!) = \mu_\alpha(\overset{\circ}{P}_i^!) < \frac{\varepsilon}{4nM}$.

Consideremos, agora, d' a partição de $[a,b]$ determinada pelos pontos c_j^i e d_j^i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,n_i\}$ e pelos pontos s_k, $k \in \{0,1,\ldots,r\}$ tais que $s_k \notin [c_j^i, d_j^i]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ $j \in \{i,\ldots,n_i\}$.

Escrevendo $d' = (t_o, t_1, \ldots, t_p)$ temos que $t_\ell = c_j^i$ se e só se $t_{\ell+1} = d_j^i$.

Como α é contínua em cada s_k, c_j^i e d_j^i que não pertencem a $\{a,b\}$ temos $\mu_\alpha([t_{\ell-1}, t_\ell]) = \alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})$ se $\ell \in \{1,\ldots,p\}$.

Seja
$J = \{\ell \in \{1,\ldots,p\}: t_\ell = d_j^i$ para algum $i \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,n_i\}\}$.

Se $\ell \notin J$ e e $\ell \neq 0$ temos $t_\ell \neq d_j^i$ $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$, $\forall\, j \in \{1,\ldots,n_i\}$ e pela construção de d' temos, fazendo $J' = \{1,\ldots,p\} - J$, que $\bigsqcup_{\ell \in J'} [t_{\ell-1}, t_\ell] \subset [a,b] - \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{n_i} I_j^i \subset \bigsqcup_{i=1}^{n} (P_i - \bigsqcup_{j=1}^{n_i} I_j^i)$. Logo

$$\sum_{\ell \in J'} [\alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})] = \mu_\alpha(\bigsqcup_{\ell \in J'} [t_{\ell-1}, t_\ell]) \leq$$

$$\leq \mu_\alpha(\bigsqcup_{i=1}^{n} (P_i - \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j^i)) = \mu_\alpha(\bigsqcup_{i=1}^{n} (\overset{\circ}{P}_i - \bigsqcup_{j=1}^{n_i} I_i^j)) =$$

$$= \mu_\alpha(\bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=n_i+1}^{\infty} I_j^i) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

A construção de d' nos garante que se $\ell \in J'$ então $\alpha(t_{\ell-1}) = \alpha(t_\ell)$ ou $\sup\{\|f(x)\|: x \in [t_{\ell-1}, t_\ell]\} \leq M$.

Para cada $\ell \in \{1,\dots,p\}$ tomemos $x_\ell \in [t_{\ell-1},t_\ell]$ e para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, tal que $P_i^! \neq \emptyset$, tomemos $x_i^! \in P_i^!$. Então

$$\left\|\sum_{\ell=1}^{p} f(x_\ell)[\alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})] - \int_{[a,b]} fd\mu_\alpha\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{\ell\in J} f(x_\ell)[\alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})] - \int_{[a,b]} fd\mu_\alpha\right\| +$$

$$+\left\|\sum_{\ell\in J'} f(x_\ell)[\alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})]\right\|$$

$$\leq \left\|\sum_{\ell\in J} f(x_\ell)[\alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})] - \int_{[a,b]} fd\mu_\alpha\right\| + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\leq \left\|\sum_{\ell\in J} f(x_\ell)[\alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})] + \sum_{\substack{i=1\\ P_i^!\neq\emptyset}}^{n} f(x_i^!)\mu_\alpha(P_i^!) - \int_{[a,b]} fd\mu_\alpha\right\|$$

$$+\left\|\sum_{\substack{i=1\\ P_i^!\neq\emptyset}}^{n} f(x_i^!)\mu_\alpha(P_i^!)\right\| + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Como $\{[t_{\ell-1},t_\ell]: \ell\in J\} = \{P_{ij}: i\in\{1,\dots,n\},\ j\in\{1,\dots,n_i\}\}$

então $\sum_{\ell\in J} f(x_\ell)[\alpha(t_\ell)-\alpha(t_{\ell-1})] + \sum_{\substack{i=1\\ P_i^!\neq\emptyset}}^{n} f(x_i^!)\mu_\alpha(P_i^!)$ é do tipo

$\sum_{P\in\mathcal{P}} f(x_P)\mu_\alpha(P)$ com $x_P \in P$ $\forall\, P\in\mathcal{P}$ e portanto lembrando que $\mathcal{P}$ é um refinamento de $\mathcal{P}_\varepsilon$ temos

$$\left\|\sum_{s=1}^{p} f(x_s)[\alpha(t_s) - \alpha(t_{s-1})] - \int_{[a,b]} fd\mu_\alpha\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Por (5.5) temos que $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$ e que

$$\sigma\int_a^b fd\alpha = \int_{[a,b]} fd\mu_\alpha.$$

ii). Seja $f \in D([a,b],\mu_\alpha,X) \cap \tilde{B}_\alpha([a,b],X)$. Dado $\varepsilon > 0$, por (4.28), existe $\mathcal{P}_\varepsilon = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ μ_α- partição de $[a,b]$ tal que

$w_{\mu_\alpha}(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo refinamento P de P_ε. Usando que $f \in \tilde{B}_\alpha([a,b],X)$, tomamos d' como em i). Tomemos também M,P,J e J' como em i).

Para cada $\ell \in \{1,\ldots,p\}$, sejam $x_\ell, y_\ell \in [t_{\ell-1},t_\ell]$. Se $\ell \in J$ então $x_\ell, y_\ell \in [c_j^i, d_j^i] = P_{ij}$ para algum $i \in \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,n_i\}$ e portanto

$\sum_{\ell \in J} \|f(x_\ell) - f(y_\ell)\| [\alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})] < \frac{\varepsilon}{2}$ já que P é um refinamento de P_ε.

Por outro lado, se $\ell \notin J$ e $\alpha(t_{\ell-1}) \neq \alpha(t_\ell)$ então $\sup\{\|f(x)\| : x \in [t_{\ell-1},t_\ell]\} \leq M$ e como

$\sum_{\ell \in J'} [\alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})] < \frac{\varepsilon}{4M}$ (ver i)) temos

$\sum_{\ell \in J'} \|f(x_\ell)-f(y_\ell)\| [\alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})] < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo

$\sum_{\ell=1}^{p} \|f(x_\ell) - f(y_\ell)\| [\alpha(t_\ell) - \alpha(t_{\ell-1})] < \varepsilon$. Basta agora usar (5.8).

5.15. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Então:

i) $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap C_\alpha([a,b],X) \subset R([a,b],\mu_\alpha,X)$ e se $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap C_\alpha([a,b],X)$ então $\sigma\int_a^b f d\alpha = \int_{[a,b]} f d\mu_\alpha$.

ii) $D_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap C_\alpha([a,b],X) \subset D([a,b],\mu_\alpha,X)$.

<u>Prova</u>.i) Seja $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap C_\alpha([a,b],X)$. Dado $\varepsilon > 0$ seja $d = (t_0,t_1,\ldots,t_n)$ partição de $[a,b]$ tal que se $d'=(s_0,s_1,\ldots,s_m)$ é um refinamento de d e $x_i \in [s_{i-1},s_i]$ $i=1,\ldots,m$ então

$\|\sum_{i=1}^{m} f(x_i)[\alpha(s_i)-\alpha(s_{i-1})] - \sigma\int_a^b f d\alpha\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja

$J = \{i \in \{1,\ldots,n-1\}: \alpha$ é descontínua em $t_i\}$. Como f será contínua em t_i se $i \in J$ e como o conjunto dos pontos de descontinuidade de α é enumerável então para cada $i \in J$ podemos encontrar $\delta_i > 0$ de modo que $\delta_i < \frac{1}{2}\min\{t_i - t_{i-1}, t_{i+1} - t_i\}$, α contínua em $t_i - \delta_i$ e em $t_i + \delta_i$ e $\|f(t) - f(s)\| < \dfrac{\varepsilon}{4n[\alpha(b) - \alpha(a)] + 1}$ se $t, s \in [t_i - \delta_i, t_i + \delta_i]$.

Sejam d' o refinamento de d obtido pelo acréscimo dos pontos $t_i - \delta_i$ e $t_i + \delta_i$, $i \in J$ e d" a μ_α-partição determinada pelos pontos $t_i - \delta_i$, $t_i + \delta_i$ se $i \in J$, t_i se $i \notin J$. Notemos que os intervalos determinados por d' e que não são do tipo $[t_i - \delta_i, t_i]$ ou $[t_i, t_i + \delta_i]$, $i \in J$ são exatamente os intervalos determinados por d" que não são do tipo $[t_i - \delta_i, t_i + \delta_i]$, $i \in J$. Seja $\mathcal{D}$ o conjunto desses intervalos. Se $I \in \mathcal{D}$ e $I = [x,y]$ então $\mu_\alpha(I) = \alpha(y) - \alpha(x)$. Para cada $i \in J$, tomemos $x_i \in [t_i - \delta_i, t_i + \delta_i]$, $y_i \in [t_i - \delta_i, t_i]$ e $z_i \in [t_i, t_i + \delta_i]$. Para cada $I \in \mathcal{D}$ tomemos $w_I \in I$. Como d' é refinamento de d, temos

$$\Big\|\sum_{i\in J} f(y_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_i - \delta_i)] + \sum_{i \in J} f(z_i)[\alpha(t_i + \delta_i) - \alpha(t_i)] + \sum_{I \in \mathcal{D}} f(w_I)\mu_\alpha(I) - \sigma\int_a^b f\,d\alpha\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Temos também

$$\Big\| \sum_{i\in J} f(x_i)\mu_\alpha([t_i - \delta_i, t_i + \delta_i]) - \sum_{i\in J} f(y_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_i - \delta_i)]$$

$$- \sum_{i\in J} f(z_i)[\alpha(t_i + \delta_i) - \alpha(t_i)]\Big\| =$$

$$= \Big\| \sum_{i\in J} f(x_i)[\alpha(t_i + \delta_i) - \alpha(t_i)] + \sum_{i\in J} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_i - \delta_i)]$$

$$- \sum_{i\in J} f(y_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_i - \delta_i)] - \sum_{i\in J} f(z_i)[\alpha(t_i + \delta_i) - \alpha(t_i)]\Big\|$$

$$= \Big\| \sum_{i\in J} [f(y_i) - f(x_i)][\alpha(t_i) - \alpha(t_i - \delta_i)] + \sum_{i\in J} [f(z_i) - f(x_i)][\alpha(t_i + \delta_i) - \alpha(t_i)$$

$$\leqq 2n \frac{\varepsilon}{4n[\alpha(b) - \alpha(a)] + 1}[\alpha(b) - \alpha(a)] \leqq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Logo

$$\left\| \sum_{i\in J} f(x_i)\,\mu_\alpha([t_i-\delta_i,t_i+\delta_i]) + \sum_{I\in\mathcal{D}} f(w_I)\,\mu_\alpha(I) - \sigma\int_a^b f d\alpha \right\| < \varepsilon \text{ e portanto,}$$

se $u \in S_{\mu_\alpha}(f,d")$ então $\left\|u-\sigma\int_a^b f d\alpha\right\| < \varepsilon$. Aplicando (4.30) temos que $f \in R([a,b],\mu_\alpha,X)$ e $\int_{[a,b]} f d\mu_\alpha = \sigma\int_a^b f d\alpha$.

ii) Análogo.

5.16. <u>COROLÁRIO</u>. Seja $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Então:

i) $R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap \tilde{B}_\alpha([a,b],X) = R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap C_\alpha([a,b],X)$;

ii) $D([a,b],\mu_\alpha,X) \cap \tilde{B}_\alpha([a,b],X) = D_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap C_\alpha([a,b],X)$.

<u>Prova</u>. i) Por (5.14 i)) e (5.13) temos que $R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap \tilde{B}_\alpha([a,b],X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap C_\alpha([a,b],X)$. A outra inclusão decorre de (5.15 i)) e de (5.11 iii).

ii) Análogo.

5.17. <u>COROLÁRIO</u>. Seja $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Então:

i) $R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap B_\alpha([a,b],X) = R_N([a,b],\alpha,X)$ e se $f \in R_N([a,b],\alpha,X)$ então $N\int_a^b f d\alpha = \int_{[a,b]} f d\mu_\alpha$;

ii) $D([a,b],\mu_\alpha,X) \cap B_\alpha([a,b],X) = R_N([a,b],\alpha,X)$.

<u>Prova</u>. i) De acordo com (5.16. i)) e (5.10.i)),

$R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap \tilde{B}_\alpha([a,b],X) \cap B_\alpha([a,b],X) =$

$= R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap C_\alpha([a,b],X) \cap B_\alpha([a,b],X) = R_N([a,b],\alpha,X)$

e portanto $R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap B_\alpha([a,b],X) = R_N([a,b],\alpha,X)$.

Além disso, se $f \in R_N([a,b],\alpha,X)$ temos que $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap C_\alpha([a,b],X)$ e por (5.15 i)) temos que

$\sigma\int_a^b fd_\alpha = \int_{[a,b]} fd\mu_\alpha$. Por outro lado, é fácil ver que

$\sigma\int_a^b fd\alpha = N\int_a^b fd\alpha$. Logo $N\int_a^b fd\alpha = \int_{[a,b]} fd\mu_\alpha$.

ii) Análogo.

5.18. EXEMPLOS.

a) Sejam $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$

e

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x \in [1,2]. \end{cases}$$

É fácil ver que existe $\sigma\int_0^2 fd\alpha = 0$ mas não existe $\int_{[a,b]} fd\mu_\alpha$. Também temos que $f \in D_\sigma([0,2],\alpha,\mathbb{R})$ mas $f \notin D([0,2],\mu_\alpha,\mathbb{R})$. Usando (5.17) temos também que $f \notin D_N([0,2],\alpha,\mathbb{R})$ e portanto $f \notin R_N([0,2],\alpha,\mathbb{R})$.

b) Consideremos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências de pontos de $[0,1]$ com $0 = a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots$ e $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = 1$. Seja $\alpha: [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua crescente com $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$, α estritamente crescente em $]a_n,b_n[$ se n é ímpar e α constante em $[a_n,b_n]$ se n é par. Seja $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{se } x \in]a_n, b_n[\text{ e } n \text{ é par} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $f \in R([0,1], \mu_\alpha, \mathbb{R})$ pois se $P_1 = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} [a_{2k}, b_{2k}]}$ e $P_2 = \overline{[0,1] - P_1}$ então $P = \{P_1, P_2\}$ é uma μ_α-partição de $[0,1]$ e $S_{\mu_\alpha}(f,P) = \{0\}$. No entanto, $f \notin R_\sigma([0,1],\alpha,\mathbb{R})$ pois se $d = (t_o, t_1, \ldots, t_n)$ é partição de $[0,1]$ temos que $\sup_{x \in [t_{n-1},1]} |f(x)-f(1)|[\alpha(1)-\alpha(t_{n-1})] = \infty$. Também temos que

$f \in D([0,1], \mu_\alpha, \mathbb{R})$, mas $f \notin D_\sigma([0,1],\alpha,\mathbb{R})$.

c) Sejam $\alpha: [0,2] \to \mathbb{R}$ e $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{se } 0 \leqq x < 1 \\ 0, & \text{se } 1 \leqq x \leqq 2 \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqq x \leqq 1 \\ x-1, & \text{se } 1 < x \leqq 2 \end{cases}$$

Temos que $f \in R([0,2], \mu_\alpha, \mathbb{R})$ pois se P é um refinamento de $\{[0,1],[1,2]\}$ então $S_{\mu_\alpha}(f,P) = \{0\}$ e aplicamos (4.30). Por outro lado, $f \notin R_N([0,2],\alpha,\mathbb{R})$ pois se $d = (t_o, t_1, \ldots, t_n)$ é uma partição de $[0,1]$ e $1 \in]t_{i-1}, t_i[$ então $\sup S_\alpha(f,d) = \infty$. Temos também que $f \in D([0,2], \mu_\alpha, \mathbb{R})$, mas $f \notin D_N([0,2], \alpha, \mathbb{R})$. Notemos que $f \in \tilde{B}_\alpha([0,2],\mathbb{R})$, mas $f \notin B_\alpha([0,2],\mathbb{R})$.

Como vimos em (5.18), em geral não temos $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset R([a,b],\mu_\alpha,X)$, $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset R_N([a,b],\alpha,X)$, $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha,X)$ ou $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset R_N([a,b],\alpha,X)$. Nos próximos resultados encontraremos condições necessárias e suficientes sobre α para que cada uma dessas inclusões seja verdadeira. Observamos que, recorrendo a (5.14), (5.15) e (5.17) nossos próximos resultados garantem, além de inclusões verdadeiras, a coin cidência das integrais em questão. Para o primeiro caso, necessitamos da seguinte observação:

5.19. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Se $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$ então para cada $t \in [a,b]$ temos que:

i) se $t \in]a,b]$ e $f(t^-) \neq f(t)$ então $\alpha(t^-) = \alpha(t)$;

ii) se $t \in [a,b[$ e $f(t^+) \neq f(t)$ então $\alpha(t^+) = \alpha(t)$.

Provemos i). A prova de ii) é análoga. Seja $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$. Seja $t \in]a,b]$ tal que $f(t^-) \neq f(t)$. Façamos

$$A = \inf_{0<\varepsilon\leq t-a} \sup\{\|f(x)-f(y)\|: x,y \in [t-\varepsilon,t]\}.$$

Então $A > 0$.

Suponhamos $\alpha(t) - \alpha(t^-) > 0$.

Se $d = (t_o,t_1,\ldots,t_n)$ é uma partição de $[a,b]$, tomemos $i_o \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $t_{i_o-1} < t \leq t_{i_o}$. Então $\alpha(t_{i_o}) - \alpha(t_{i_o-1}) \geq \alpha(t) - \alpha(t^-) > 0$. Logo, tomando

$x_i,y_i \in [t_{i-1},t_i]$, $i=1,\ldots,n$ tais que $\|f(x_{i_o})-f(y_{i_o})\| > \frac{A}{2}$ e

$y_i = x_i$ se $i \neq i_o$ temos

$\|\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(y_i)][\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})]\| > \frac{A}{2}(\alpha(t) - \alpha(t^-)) > 0$ e portanto $f \notin R_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

5.20. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Se $X \neq \{0\}$ são equivalentes:

i) $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset C_\alpha([a,b],X)$;

ii) $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset R([a,b],\mu_\alpha,X)$;

iii) $D_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset C_\alpha([a,b],X)$;

iv) $D_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset D([a,b],\mu_\alpha,X)$;

v) Se $t \in]a,b[$ e α é descontínua em t então $\alpha(t) \neq \alpha(t+)$ e $\alpha(t) \neq \alpha(t-)$ (isto é, α é descontínua à esquerda e à direita).

<u>Prova</u>. i) $\Longrightarrow$ ii) decorre de (5.15 i)), i) $\Longrightarrow$ iii) decorre de (5.11 i)) e iii) $\Longrightarrow$ iv) decorre de (5.15 ii)). Mostremos que ii) ou iv) implica v) e que v) $\Longrightarrow$ i).

Se v) não vale, tomemos $t_o \in]a,b[$ tal que $\alpha(t_o) \neq \alpha(t_o^-)$ mas $\alpha(t_o) = \alpha(t_o^+)$ (o outro caso é análogo). Tomemos $v \in X$ com $\|v\| = 1$. Seja f: $[a,b] \to X$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} v & \text{se } a \leq t \leq t_o \\ 0 & \text{se } t_o < t \leq b \end{cases}.$$

Temos que $f \notin R([a,b],\mu_\alpha,X)$ (e portanto $f \notin D([a,b],\mu_\alpha,X)$) já que f e α são descontínuas em t_o (ver (5.13)).

Por outro lado, $f \in D_\sigma([a,b],\alpha,X)$ (e portanto $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$). De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que $t_o+\delta < b$ e $\alpha(t)-\alpha(t_o)<\varepsilon$, se $t_o \leq t \leq t_o+\delta$. Se $d = (a,t_o,t_o+\delta,b)$ então como $w(f,[a,t_o]) = 0$, $w(f,[t_o+\delta,b]) = 0$ e $w(f,[t_o,t_o+\delta]) = 1$, temos

$$w_\alpha(f,d) = w(f,[a,t_o])[\alpha(t_o)-\alpha(a)] + w(f,[t_o,t_o+\delta])[\alpha(t_o+\delta)-\alpha(t_o)]$$

$$+ w(f,[t_o+\delta,b])[\alpha(b)-\alpha(t_o+\delta)] = \alpha(t_o+\delta) - \alpha(t_o) < \varepsilon.$$

Com isso, por (5.8) temos que $f \in D_\sigma([a,b],\alpha,X)$. Logo não temos ii) nem iv). Assim ii) $\Longrightarrow$ v) e iv) $\Longrightarrow$ v).

Provemos que v) $\Longrightarrow$ i). Seja $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$. Se $t \in]a,b[$ e α é descontínua em t então temos que $\alpha(t^-) \neq \alpha(t)$ e $\alpha(t^+) \neq \alpha(t)$. Por (5.19), temos $f(t^+) = f(t)$ e $f(t^-) = f(t)$ e portanto f é contínua em t. Temos ainda que se f é descontínua em a então $f(a) \neq f(a^+)$ e por (5.19 ii)) temos $\alpha(a) = \alpha(a^+)$ e portanto α contínua em a. Analogamente se f é descontínua em b temos α contínua em b. Assim, $f \in C_\alpha([a,b],X)$ e temos i).

5.21. <u>DEFINIÇÃO</u>. Seja $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Sejam $c,d \in [a,b]$ com $c < d$. Dizemos que $]c,d[$ é um patamar de α se existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $]c,d[\subset \alpha^{-1}(\{\gamma\}) \subset [c,d]$.

Indicaremos por A_α o conjunto de todas as extremidades de patamares de α.

5.22. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Se $X \neq \{0\}$ são equivalentes:

i) $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset \tilde{B}_\alpha([a,b],X)$;

ii) $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha,X)$;

iii) $D([a,b],\mu_\alpha,X) \subset \tilde{B}_\alpha([a,b],X)$;

iv) $D([a,b],\mu_\alpha,X) \subset D_\sigma([a,b],\alpha,X)$;

v) α é descontínua em cada ponto de $[a,b]$ que é ponto de acumulação de A_α.

<u>Prova</u>. i) $\Longrightarrow$ ii) decorre de (5.16 i)), iii) $\Longrightarrow$ iv) decorre de (5.16 ii)) e i) $\Longrightarrow$ iii) decorre de (4.29).

Provemos que ii) $\Longrightarrow$ v) e que iv) $\Longrightarrow$ v).

Suponhamos que v) seja falso. Seja p um ponto de acumulação de A_α tal que α é contínua em p. Então existe uma seqüência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos distintos que são extremos de patamares de α, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p$. Sabemos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ terá uma subseqüência estritamente monótona, que vamos supor estritamente crescente (o outro caso é análogo). É fácil ver que existe $\{]c_n,d_n[\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência de patamares de α com $c_1 < d_1 \leq c_2 < d_2 \dots$ e $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = p$. Tomemos β_j,γ_j $j\in\mathbb{N}$ com $c_j < \beta_j < \gamma_j < d_j$ $\forall j\in\mathbb{N}$ e façamos $P = \bigsqcup\limits_{j\in\mathbb{N}} [\beta_j,\gamma_j] \cup \{p\}$. Como α é contínua em p, então $\mu_\alpha(P) = \mu_\alpha(\bigsqcup\limits_{j\in\mathbb{N}} [\beta_j,\gamma_j]) + \mu_\alpha(\{p\}) = 0$ e assim P é um fechado μ_α-contínuo que também é regular.

Tomemos $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $x_j \in]\beta_j,\gamma_j[$ $\forall j\in\mathbb{N}$ e $v\in X$ com $v \neq 0$. Seja $f: [a,b] \to X$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} jv\ , & \text{se } x = x_j\ , \quad j\in\mathbb{N} \\ 0\ , & \text{se } x \notin \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}. \end{cases}$$

É fácil ver que $f \in D([a,b],\mu_\alpha,X)$ pois tomando $\mathcal{P} = \{P, \complement P\}$ temos $w_{\mu_\alpha}(f,\mathcal{P}) = 0$. Logo $f \in R([a,b],\mu_\alpha,X)$.

Por outro lado, para cada $\varepsilon > 0$, existe $j\in\mathbb{N}$ tal que $p - \varepsilon < d_j \leq c_{j+1} < p$. Como $\alpha(d_j) < \alpha(c_{j+1})$ temos $\mu_\alpha(]p-\varepsilon,p[) > 0$.

Tomemos $d = (t_o,t_1,\dots,t_n)$ partição de [a,b] e seja $r \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tal que $t_r < p \leq t_{r+1}$. Então $\mu_\alpha([t_r,t_{r+1}]) > 0$ e

f não é limitada em $[t_r,t_{r+1}]$. Assim, $\sup\{\|x\|: x\in S_\alpha(f,d)\} = \infty$ e portanto $f \notin R_\sigma([a,b],\alpha,X)$. Logo $f \notin D_\sigma([a,b],\alpha,X)$. Assim ii) e iv) não se verificam. Portanto ii) $\Longrightarrow$ v) e iv) $\Longrightarrow$ v).

Resta provar que v) $\Longrightarrow$ i). Suponhamos v). Seja $f \in R([a,b],\mu_\alpha,X)$. Seja $t \in \overline{A}_\alpha$ tal que α é descontínua em t. Então, por (5.13) temos que f contínua em t. Assim, é possível encontrar $x_t, y_t \in [a,b]$ com $x_t < y_t$, f limitada em $[x_t,y_t]$, α contínua em x_t se $x_t \neq a$ e em y_t, se $y_t \neq b$ e tal que t pertença ao interior de $[x_t,y_t]$ tomado em $[a,b]$.

Se $t \in \overline{A}_\alpha$ e α é contínua em t, então t não é ponto de acumulação de A_α e assim $\{t\}$ é aberto em $\overline{A}_\alpha$.

A compacidade de $\overline{A}_\alpha$ nos permite encontrar
$A_1 \subset \{t \in \overline{A}_\alpha\colon \alpha$ é descotínua em $t\}$ e
$A_2 \subset \{t \in \overline{A}_\alpha\colon \alpha$ é contínua em $t\}$, ambos finitos e tais que $\overline{A}_\alpha$ esteja contido na reunião de A_2 com os interiores, tomados em $[a,b]$, dos conjuntos $[x_t,y_t]$, $t\in A_1$.

Seja $d = (s_o,s_1,\ldots,s_m)$ a partição de $[a,b]$ determinada pelos pontos de A_2 e pelos x_t e y_t com $t\in A_1$.

Pela construção, α é contínua em s_i $\forall i \in \{1,\ldots,m-1\}$. Observemos também que se α é descontínua em a e constante em $]a,s_1[$ então $a\in\overline{A}_\alpha$ e $a\notin A_2$. Logo $a \in [x_t,y_t]$ para algum $t\in A_1$ e portanto $[a,s_1] \subset [x_t,y_t]$. Portanto se α é constante em $]s_o,s_1[$ e $[s_o,s_1]$ não está contido em nenhum $[x_t,y_t]$ com $t\in A_1$ temos que α é contínua em $s_o = a$. Analogamente, se α é constante em $]s_{m-1},s_m[$ e $[s_{m-1},s_m]$ não está contido em nenhum $[x_t,y_t]$ com $t\in A_1$ temos que α é contínua em $s_m = b$.

Se $j \in \{1,\dots,m\}$ e $[s_{j-1},s_j] \subset [x_t,y_t]$ para algum $t\in A_1$ então f é limitada em $[s_{j-1},s_j]$ já que f é limitada em $[x_t,y_t]$.

Tomemos agora $j \in \{1,\dots,m\}$, tal que $[s_{j-1},s_j]$ não está contido em nenhum $[x_t,y_t]$ com $t\in A_1$. Nesse caso, $]s_{j-1},s_j[\cap [x_t,y_t] = \emptyset$ $\forall t\in A_1$ e como $]s_{j-1},s_j[\cap A_2 = \emptyset$ temos $]s_{j-1},s_j[\cap A_\alpha = \emptyset$. Assim, é fácil ver que ou α é constante em $]s_{j-1},s_j[$ ou α é estritamente crescente em $]s_{j-1},s_j[$ (de fato, se existem $x,y \in]s_{j-1},s_j[$ com $\alpha(x) = \alpha(y)$, então como $]s_{j-1},s_j[\cap A_\alpha = \emptyset$, temos que $]s_{j-1},s_j[$ está contido no patamar de α correspondente a $\alpha(x)$). Se α é constante em $]s_{j-1},s_j[$, conforme observado anteriormente, α é contínua em s_{j-1} e s_j e assim α é constante em $[s_{j-1},s_j]$. Se α é estritamente crescente em $]s_{j-1},s_j[$ então $[s_{j-1},s_j] \subset \operatorname{supp}\mu$ e assim, por (4.36 b)), f será limitada em $[s_{j-1},s_j]$. Logo $f \in \tilde{B}_\alpha([a,b],X)$.

5.23. <u>COROLÁRIO</u>. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Se o conjunto dos patamares de α é finito, então:

i) $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

ii) $D([a,b],\mu_\alpha,X) \subset D_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

<u>Prova</u>. Nossa hipótese garante que v) de (5.22) se verifica e portanto temos o resultado.

5.24. <u>COROLÁRIO</u>. Sejam α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua crescente e $X \neq \{0\}$. São equivalentes:

i) $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha,X)$;

ii) $D([a,b],\mu_\alpha,X) \subset D_\sigma([a,b],\alpha,X)$;

iii) α tem um número finito de patamares;

iv) $R([a,b],\mu_\alpha,X) = R_\sigma([a,b],\alpha,X)$;

v) $D([a,b],\mu_\alpha,X) = D_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

<u>Prova</u>. Como α é contínua, temos por (5.15) que i) é equivalente a iv) e ii) é equivalente a v).

Por (5.23) temos que iii) $\Longrightarrow$ i) e iii) $\Longrightarrow$ ii).

Suponhamos i). Então como α é contínua, por (5.22) temos que o conjunto dos pontos de acumulação de A_α é vazio. Logo A_α é finito e portanto temos iii). Analogamente temos ii) $\Longrightarrow$ iii), o que completa a prova.

5.25. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Se $X \neq \{0\}$ são equivalentes:

i) $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset B_\alpha([a,b],X)$;

ii) $R([a,b],\mu_\alpha,X) = R_N([a,b],\alpha,X)$;

iii) $D([a,b],\mu_\alpha,X) \subset B_\alpha([a,b],X)$;

iv) $D([a,b],\mu_\alpha,X) = D_N([a,b],\alpha,X)$

v) α é descontínua em cada ponto de $[a,b]$ que é ponto de acumulação de A_α e em cada ponto de $A_\alpha - \{a,b\}$.

<u>Prova</u>. i) $\Longrightarrow$ ii) decorre de (5.17 i)), iii) $\Longrightarrow$ iv) decorre de (5.17 ii)) e i) $\Longrightarrow$ iii) decorre de (4.29).

Provemos que ii) $\Longrightarrow$ v) e que iv) $\Longrightarrow$ v).

Suponhamos que v) seja falso. Temos dois casos a considerar:

<u>1º caso</u>: α é contínua em algum ponto de acumulação de A_α. Nesse caso, v) de (5.22) é falso e portanto ii) e iv) de (5.22) são falsos. De acordo com (5.10) i) e ii) temos que ii) e iv) são falsos.

<u>2º caso</u>: α é contínua em algum ponto de $A_\alpha - \{a,b\}$. Seja s esse ponto e suponhamos que s é extremidade superior um patamar de α (o outro caso é análogo). Como α é contínua em s, então existe $c \in]a,s[$ tal que α é cosntante em $[c,s]$. Tomemos $t \in]c,s[$ e $v \in X$, $v \neq 0$. Seja $f: [a,b] \to X$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \in [a,t] \\ \frac{1}{s-x} v, & \text{ se } x \in]t,s[\\ 0 & , \text{ se } x \in [s,b]. \end{cases}$$

Então $w(f,[a,t])=0=w(f,[s,b])$ e $\mu_\alpha([t,s])=0$. Assim, tomando $P = \{[a,t], [t,s], [s,b]\}$ temos que P é uma μ_α-partição de $[a,b]$ e $w_{\mu_\alpha}(f,P) = 0$. Logo $f \in D([a,b],\mu_\alpha,X) \subset R([a,b],\mu_\alpha,X)$. No entanto, $f \notin R_N([a,b],\alpha,X)$ (e portanto $f \notin D_N([a,b],\alpha,X)$). De fato, dado $\delta > 0$, tomemos $d = (t_o,t_1,\ldots,t_n)$ partição de $[a,b]$ com diâmetro menor do que δ e tal que exista $j \in \{1,\ldots,n\}$ com $t_{j-1} < s < t_j$. Como s é extremidade superior de um patamar temos $\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) > 0$ e como f não é limitada em $[t_{j-1},t_j]$ temos que $\sup\{\|x\|: x \in S_\alpha(f,d)\} = \infty$ e portanto $f \notin R_N([a,b],\alpha,X)$.

Resta provar que v) $\Longrightarrow$ i). Suponhamos v). Seja $f \in R([a,b],\mu_\alpha,X)$.

Para cada $t \in \overline{A}_\alpha - \{a,b\}$ temos que α é descontínua em t, e por (5.13) temos que f é contínua em t. Assim, existem $x_t,y_t,z_t,w_t \in]a,b[$ tais que $z_t < x_t < t < y_t < w_t$, f é limitada em $[z_t,w_t]$ e α é contínua em x_t e em y_t.

Se α é descontínua em a, também podemos encontrar $y_a, w_a \in\,]a,b[$ com $a < y_a < w_a$ tais que α é contínua em y_a e f é limitada em $[a,w_a]$. Nesse caso, façamos $x_a = a$.

Se α é descontínua em b, podemos encontrar $z_b < x_b < b$ tais que α é contínua em x_b e f é limitada em $[z_b,b]$. Nesse caso, façamos $y_b = b$.

Finalmente, observamos que se $a \in A_\alpha$ (ou $b \in A_\alpha$) e α é contínua em a (ou b) então a (ou b) não é ponto de acumulação de A_α e assim $\{a\}$ (ou $\{b\}$) é aberto em $\overline{A}_\alpha$.

A compacidade de $\overline{A}_\alpha$ garante que existem $A_1 \subset \{t \in \overline{A}_\alpha : \alpha$ é descontínua em $t\}$, A_1 finito e $A_2 \subset \{t \in \{a,b\}: \alpha$ é contínua em $t\}$ tais que A_α está contido na reunião de A_2 com os interiores, tomados em $[a,b]$, dos conjuntos $[x_t,y_t]$, $t \in A_1$.

Seja $d = (s_o,s_1,\ldots,s_m)$ a partição determinada pelos pontos x_t,y_t com $t \in A_1$.

Se $j \in \{1,\ldots,m\}$ e se $[s_{j-1},s_j] \subset [x_t,y_t]$ para algum $t \in A_1$ então f é limitada em $[x_t,y_t]$ e portanto em $[s_{j-1},s_j]$.

Tomemos agora $j \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $[s_{j-1},s_j]$ não está contido em nenhum $[x_t,y_t]$, $t \in A_1$. Assim, como na prova de (5.22) v) $\Longrightarrow$ i), temos que α é constante em $[s_{j-1},s_j]$ ou f é limitada em $[s_{j-1},s_j]$.

Nossa construção garante ainda que para cada $j \in \{1,\ldots,m-1\}$ existe uma vizinhança de s_j onde f é limitada. Logo $f \in B_\alpha([a,b],X)$. Assim temos i).

5.26. <u>COROLÁRIO</u>. Sejam α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente e $X \neq \{0\}$.

Consideremos as afirmações:

i) $R_N([a,b],\alpha,X) = R([a,b],\mu_\alpha,X)$.

ii) $D_N([a,b],\alpha,X) = D([a,b],\mu_\alpha,X)$.

iii) α é constante ou estritamente crescente.

Então iii) $\Longrightarrow$ i), iii) $\Longrightarrow$ ii) e se α é contínua i), ii) e iii) são equivalentes.

<u>Prova</u>. Se α é constante ou estritamente crescente então $A_\alpha \subset \{a,b\}$ e assim v) de (5.25) se verifica e portanto temos i) e ii).

Se vale i) ou ii) temos que v) de (5.25) se verifica. Sendo α contínua temos então que $A_\alpha - \{a,b\} = \emptyset$. Logo $A_\alpha \subset \{a,b\}$ e portanto temos iii).

5.27. <u>COROLÁRIO</u>. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua estritamente crescente. Então

i) $R([a,b],\mu_\alpha,X) = R_N([a,b],\alpha,X) = R_\sigma([a,b],\alpha,X)$;

ii) $D([a,b],\mu_\alpha,X) = D_N([a,b],\alpha,X) = D_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

Em particular, as igualdades acima se verificam para α: $[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha(t) = t$ e temos assim que a noção de integrabilidade segundo Riemann (ou Darboux) em relação a λ, introduzida no parágrafo 4, coincide com a noção clássica de integral de Riemann (ou Darboux).

Prova. Decorre de (5.24) e (5.26).

5.28. PROPOSIÇÃO. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente. Dada f: $[a,b] \to X$, são equivalentes:

i) $f \in R_N([a,b],\alpha,X)$;

ii) existe $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d = (t_o,t_1,\ldots,t_n)$ é uma partição de $[a,b]$ com diâmetro menor do que δ então $\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - J \right\| < \varepsilon$ para todo $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ com $x_i \in]t_{i-1},t_i[$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$;

iii) $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$;

iv) existe $J \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe d_ε partição de $[a,b]$ tal que se $d = (t_o,t_1,\ldots,t_n)$ é um refinamento de d_ε então $\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] - J \right\| < \varepsilon$ para todo $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ com $x_i \in]t_{i-1},t_i[$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

Prova. É imediato que i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iv). Por (5.6) temos que iv) $\Longrightarrow$ iii) e por (5.27) temos que iii) $\Longrightarrow$ i) o que completa a prova.

5.29. PROPOSIÇÃO. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Se $X \neq \{0\}$ são equivalentes:

i) $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset B_\alpha([a,b],X)$;

ii) $D_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset B_\alpha([a,b],X)$;

iii) para cada $\gamma \in \mathbb{R}$ e tal que $\alpha^{-1}(\{\gamma\})$ tem mais de um ponto, tem-se que $\alpha^{-1}(\{\gamma\})$ é aberto em $[a,b]$.

Prova. Muito simples e será omitida.

5.30. COROLÁRIO. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Se $X \neq \{0\}$ são equivalentes:

i) $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset R_N([a,b],\alpha,X)$;

ii) $R_\sigma([a,b],\alpha,X) = R_N([a,b],\alpha,X)$;

iii) $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset C_\alpha([a,b],X) \cap B_\alpha([a,b],X)$;

iv) a) para cada $\gamma \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha^{-1}(\{\gamma\})$ tem mais de um ponto tem-se que $\alpha^{-1}(\{\gamma\})$ é aberto em $[a,b]$;

b) Se α é descontínua em $t \in]a,b[$ então $\alpha(t^+) \neq \alpha(t)$ e $\alpha(t^-) \neq \alpha(t)$.

v) $D_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset D_N([a,b],\alpha,X)$;

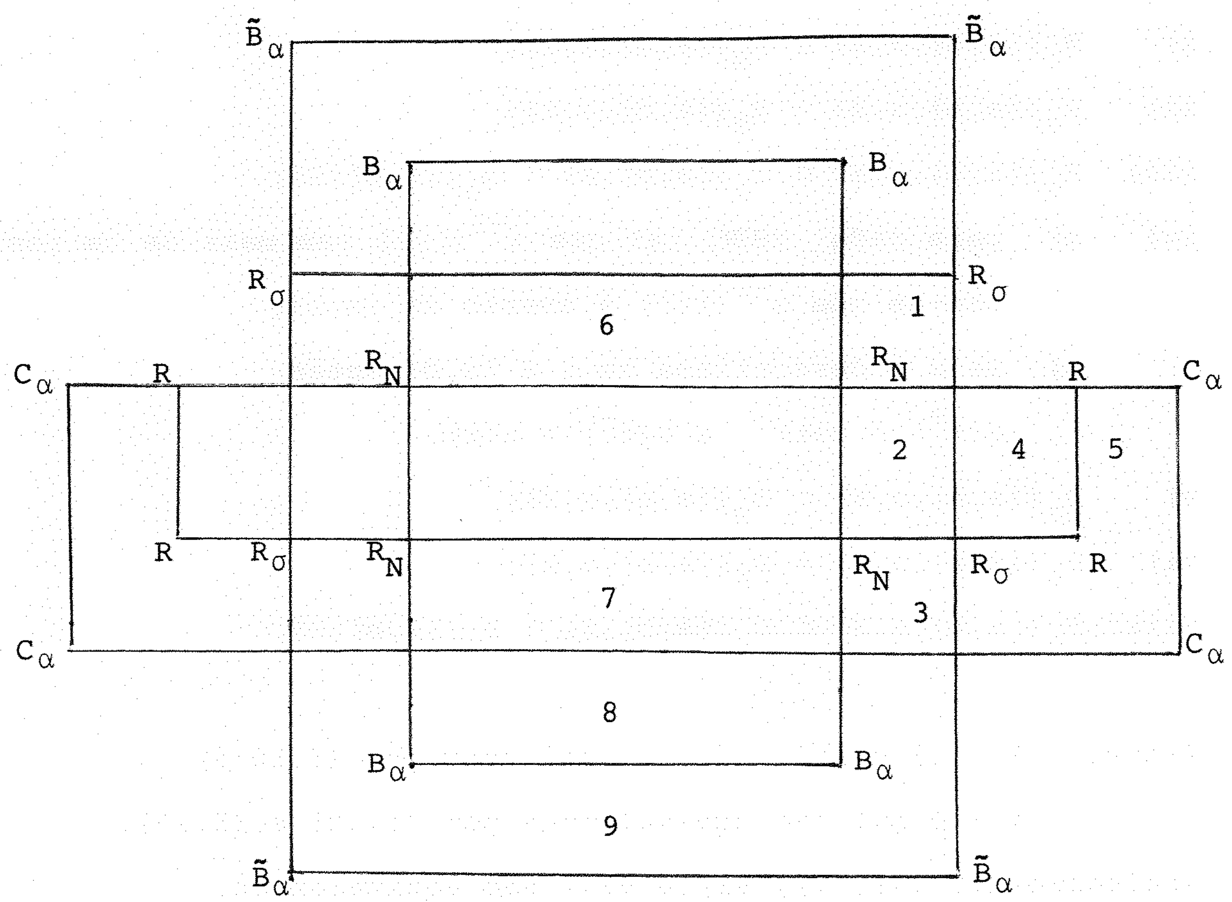
vi) $D_\sigma([a,b],\alpha,X) = D_N([a,b],\alpha,X)$;

vii) $D_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset C_\alpha([a,b],X) \cap B_\alpha([a,b],X)$.

Prova. i), ii) e iii) são equivalentes por (5.10 i)
iii) e iv) são equivalentes por (5.20) e (5.29). Analogamente, iv), v), vi) e vii) são equivalentes.

Na versão anterior deste parágrafo, demonstrávamos (5.23), (5.24) e (5.26) diretamente sme recorrer a (5.22) e (5.25). Agradecemos ao professor Antonio Gilioli que nos sugeriu esses dois últimos resultados, bem como outras modificações que, acreditamos, enriqueceram este parágrafo.

A ilustração seguinte fornece um resumo da comparação entre as diversas noções de integrabilidade envolvendo funções α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescentes. Cada retângulo representa o conjunto indicado em seus vértices, sendo que aqui usaremos uma notação reduzida: R indica $R([a,b],\mu_\alpha,X)$, R_σ indica $R_\sigma([a,b],\alpha,X)$, C_α indica $C_\alpha([a,b],X)$, etc. Os números indicam exemplos que estão relacionados em seguida.



EXEMPLOS.

1. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & \text{se } 0 \leqq x < 1 \\ 0, & \text{se } 1 \leqq x < 2 \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x \leqq 2 \end{cases} .$$

2. (5.18 c)) .

3. $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{se } x \in [0,1]-\mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{se } x \in]1,2] \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0,1] \\ 1, & \text{se } x \in]1,2] \end{cases} .$$

4. (5.18 b)) .

5. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \in \,]0,1] \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad , \quad \alpha(x) = x \ .$$

6. (5.18 a)) .

7. $$f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \quad , \quad \alpha(x) = x \ .$$

8. $$f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x \leqq 2 \end{cases} \ .$$

9. $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{se } x \in [0,1]-\mathbb{Q} \\ \frac{1}{x-1}, & \text{se } x \in \,]1,2] \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0,1[\\ 2, & \text{se } x \in [1,2] \end{cases} \ .$$

oOo

§6. ALGUNS RESULTADOS DE TEORIA DA MEDIDA

6.1. PROPOSIÇÃO. Sejam F e K compactos tais que existe $g: F \to K$ contínua e sobrejetora. Então para cada μ medida de Borel regular em K, existe uma medida ν de Borel regular em F tal que $\nu(g^{-1}(E)) = \mu(E)$ para todo E boreliano de K.

Além disso, se μ e ν estão nas condições acima temos que:

i) se μ é não atômica então ν é não atômica;

ii) se μ é não puramente atômica então ν é não puramente atômica.

Prova. Ver [HL] teorema 10 página 281 para a prova da existência de ν.

Para provar i) notemos que se $\nu(\{y\}) > 0$ então temos $0 < \nu(\{y\}) \leq \nu(g^{-1}(\{g(y)\})) = \mu(\{g(y)\})$. Assim, se ν tem átomos, então μ também tem átomos, o que prova i).

Para provar ii), tomemos E boreliano de K com $\mu(E) > 0$. Suponhamos que E não contenha átomos. Então, como na prova de i), $g^{-1}(E)$ não contém átomos de ν. Como $\nu(g^{-1}(E)) = \mu(E) > 0$, ii) está provado.

6.2. OBSERVAÇÃO. Na proposição (6.1) não podemos garantir a unicidade da medida ν. Tomemos, por exemplo, $K = [0,\frac{1}{2}]$, $F = [0,1]$, $g(x) = x$ se $x \in [0,1/2]$, $g(x) = 1-x$ se $x \in [1/2,1]$ e μ a medida de

Lebesgue sobre os borelianos de $[0,1/2] = K$. Indiquemos por λ a medida de Lebesgue sobre os borelianos de $[0,1]$. Vamos mostrar que existe mais de uma ν como em (6.1). Observemos que se $E \subset K = [0,1/2]$ é boreliano então existe $E' \subset [1/2,1]$ tal que $g^{-1}(E) = E \cup E'$ e $\lambda(E) = \lambda(E')$.

Tomemos $\nu_1(B) = 1/2\, \lambda(B)$, para cada B boreliano em $F = [0,1]$. Então dado E borelinao de $K = [0,1/2]$ temos $\nu_1(g^{-1}(E)) = \nu_1(E \cup E') = 1/2\, \lambda(E \cup E') = \lambda(E) = \mu(E)$.

Por outro lado, se definimos $\nu_2(B) = 1/4\, \lambda(B \cap [0,1/2]) + 3/4\, \lambda(B \cap [1/2,1])$, teremos

$$\begin{aligned}\nu_2(g^{-1}(E)) &= \tfrac{1}{4}\lambda(g^{-1}(E) \cap [0,1/2]) + \tfrac{3}{4}\lambda(g^{-1}(E) \cap [1/2,1]) \\ &= \tfrac{1}{4}\lambda(E) + \tfrac{3}{4}\lambda(E') = \lambda(E) = \mu(E).\end{aligned}$$

É fácil perceber que existe uma família infinita de medidas "ν" nas condições do teorema.

Quando, nas condições de (6.1), g é injetora (e sobrejetora) então temos que "$\nu(g^{-1}(E)) = \mu(E)$ para todo E boreliano de K", equivale e "$\nu(B) = \mu(g(B))$ para todo B boreliano de F", e portanto, nesse caso, temos a unicidade.

6.3. <u>COROLÁRIO</u>. Seja F compacto não disperso. Então existe μ de Borel regular em F não-nula e não atômica cujo suporte é um fechado separável.

<u>Prova</u>. Sendo F compacto não disperso então (ver [L] Teorema 2 pág. 29) existe $f: F \to [0,1]$ contínua sobrejetora. Por [L] Lema 2 pág. 29 existe $P \subset F$ fechado tal que $f(P) = [0,1]$ e $f(T) \subsetneq [0,1]$ para

todo T fechado $T \subsetneq P$. Aplicando (6.1) para $\mu = \lambda$, $K = [0,1]$ e $g = f|_P$ temos que existe ν_1 de Borel regular em P tal que $\nu_1(g^{-1}(E)) = \lambda(E)$ para todo E boreliano de $[0,1]$. Além disso, ν_1 é não-atômica.

Seja $\nu(B) = \nu_1(B \cap P)$ para cada B boreliano de F. Vamos mostrar que supp $\nu = P$. Temos supp $\nu \subset P$. Se supp $\nu \neq P$ então $f|_{\text{supp}\,\nu}$ não é sobrejetora, isto é $f(\text{supp}\,\nu) \subsetneq [0,1]$. Seja $A = [0,1]-f(\text{supp}\,\nu)$ que é aberto não-vazio. Então $g^{-1}(A)$ é aberto e $g^{-1}(A) \cap \text{supp}\,\nu = \emptyset$. Logo $\nu_1(g^{-1}(A)) = \nu(g^{-1}(A)) = 0$. Como $\lambda(A) > 0$ então $\lambda(A) \neq \nu_1(g^{-1}(A))$, contradição. Logo supp $\nu = P$.

Provemos então que P é separável. Para cada $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, seja $x_r \in P$ com $g(x_r) = r$. Então $g(\overline{\{x_r : r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}}) \supset \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$. Logo $g(\overline{\{x_r : r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}}) = [0,1]$ e portanto $\overline{\{x_r : r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}} = P$ e P é separável.

6.4. <u>LEMA</u>. Seja μ uma medida de Borel regular não-atômica num compacto K. Dados V e W abertos com $\mu(\partial V) = \mu(\partial W) = 0$ e tais que $\overline{V} \subset W$ e $\mu(V) < \mu(W)$, existe um aberto U com $\mu(\partial U) = 0$ e tal que $\overline{V} \subset U \subset \overline{U} \subset W$ e

$$\mu(V) + \frac{1}{3}\,[\mu(W)-\mu(V)] \leq \mu(U) \leq \mu(V) + \frac{2}{3}[\mu(W) - \mu(V)].$$

<u>Prova</u>. Seja $A \subset W - \overline{V}$ com $\mu(A) = \frac{1}{2}\,\mu(W-V) = \frac{1}{2}\mu(W-\overline{V})$ (que existe pois μ é não-atômica).

Sejam $F \subset A$, F fechado com $\mu(F) > \frac{1}{3}\,\mu(W-V)$ e B aberto com $A \subset B \subset W-\overline{V}$ e $\mu(B) < \frac{2}{3}\mu(W-V) - \varepsilon$ (onde ε é fixado

$\varepsilon < \frac{2}{3}\mu(W-V))$. Como $F \subset B$, então por (4.10) existe U_1 interior de um fechado regular μ-contínuo com $F \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset B$. Assim $\frac{1}{3}\mu(W-V) < \mu(F) \leqq \mu(U_1) \leqq \mu(B) < \frac{2}{3}\mu(W-V) - \varepsilon$. Por (4.10) existe U_2 interior de um fechado regular μ-contínuo com $\overline{V} \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset W$ e $\mu(U_2-\overline{V}) = \mu(U_2-V) < \varepsilon$. Então $\overline{V} \subset U_1 \cup U_2 \subset W$ e $\mu(V) + \frac{1}{3}\mu(W-V) \leqq \mu(V) + \mu(U_1) = \mu(V \cup U_1) \leqq$

$$\leqq \mu(U_1 \cup U_2) \leqq \mu(U_2-V) + \mu(V) + \mu(U_1) \leqq$$

$$\leqq \varepsilon + \mu(V) + \frac{2}{3}\mu(W-V) - \varepsilon = \mu(V) + \frac{2}{3}\mu(W-V).$$

Tomando $U = U_1 \cup U_2$ completamos a prova.

A proposição seguinte está enunciada em [B] pág. 120 como exercício. Como não encontramos referência para a demonstração, resolvemos apresentá-la.

6.5. PROPOSIÇÃO. Seja μ uma medida de Borel regular não-atômica não-nula num compacto K. Seja λ a medida de Lebesgue em $[0,\mu(K)]$. Então existe uma função $g: K \to [0,\mu(K)]$ contínua sobrejetora tal que $\mu(g^{-1}(E)) = \lambda(E)$, $\forall\, E \subset [0,\mu(K)]$, E boreliano.

Prova. É suficiente considerar $\mu(K) = 1$ pois se provarmos nesse caso, para o caso geral consideramos $\mu_1 = \frac{1}{\mu(K)}\mu$ e $g: K \to [0,1]$ tal que $\mu_1(g^{-1}(E)) = \lambda(E)$ para todo E boreliano de $[0,1]$. Então $\mu(g^{-1}(E)) = \mu(K)\,\lambda(E) = \lambda(\mu(K)E)$ para todo E boreliano de $[0,1]$. Definimos então $h: K \to [0,\mu(K)]$ por $h(x) = \mu(K)g(x)$. Para todo E boreliano de $[0,\mu(K)]$ temos $h^{-1}(E) = \{x\in K: h(x)\in E\} = \{x\in K: \mu(K)g(x)\in E\}$ $= g^{-1}(\frac{E}{\mu(K)})$ e assim $\lambda(E) = \mu\,(g^{-1}(\frac{E}{\mu(K)})) = \mu(h^{-1}(E))$.

Consideremos então $\mu(K) = 1$. Por indução, vamos construir para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, uma família de abertos $\left\{U_i^n\right\}_{i=0}^{k_n}$ com $\mu(\partial U_i^n) = 0 \ \forall i \in \{1,\dots,k_n\}$ e tal que:

(a) $U_o^n = \emptyset$ e $U_{k_n}^n = K \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) $\overline{U_i^n} \subset U_j^n$ e $\mu(U_i^n) < \mu(U_j^n) \ \forall\, i,j \in \{0,1,\dots,k_n\}$, $i < j$;

(c) $\mu(U_{i+1}^n) - \mu(U_i^n) \leq (\frac{2}{3})^n$ se $i \in \{0,1,\dots,k_n-1\}$;

(d) para cada $i \in \{0,\dots,k_n\}$, existe $j \in \{0,\dots,k_{n+1}\}$ tal que $U_i^n = U_j^{n+1}$

Façamos $U_o^o = \emptyset$, $U_1^o = K$, $k_o = 1$. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e construídos $U_o^n,\dots,U_{k_n}^n$, verificando (a), (b), (c) e (d) e dado $i \in \{0,1,\dots,k_n-1\}$, aplicando (6.4), como $\overline{U_i^n} \subset U_{i+1}^n$, existe um aberto U com $\mu(\partial U) = 0$, $\overline{U_i^n} \subset U \subset \overline{U} \subset U_{i+1}^n$ e $\mu(U_i^n)+\frac{1}{3}\mu(U_{i+1}^n-U_i^n) \leq \mu(U) \leq \mu(U_i^n)+\frac{2}{3}\mu(U_{i+1}^n-U_i^n)$. Assim por(c) temos:

(1) $\mu(U) - \mu(U_i^n) \leq \frac{2}{3}\,\mu(U_{i+1}^n - U_i^n) \leq \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n$ e usando ainda (b) temos

(2) $\mu(U) - \mu(U_i^n) \geq \frac{1}{3}\,\mu(U_{i+1}^n - U_i^n) > 0.$

Com isso temos também

(3) $\mu(U_{i+1}^n) - \mu(U) = \mu(U_{i+1}^n) - \mu(U_i^n) - [\mu(U) - \mu(U_i^n)] \geq$
$\geq \frac{1}{3}[\,\mu(U_{i+1}^n) - \mu(U_i^n)] > 0$;

(4) $\mu(U_{i+1}^n) - \mu(U) = \mu(U_{i+1}^n) - \mu(U_i^n) - [\mu(U) - \mu(U_i^n)] \leq$
$\leq \frac{2}{3}[\mu(U_{i+1}^n) - \mu(U_i^n)] \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$.

Consideremos $\mathcal{F}_n$ a família formada pelos conjuntos U_i^n , $i \in \{0,1,\dots,k_n\}$ e pelos conjuntos do tipo U construídos a cima para cada $i \in \{0,\dots,k_n-1\}$. Como $\mathcal{F}_n$ é totalmente ordenada por inclusão, podemos então indexar os conjuntos de $\mathcal{F}_n$ respeitando a ordem crescente, escrevendo:

$$\mathcal{F}_n = \left\{U_i^{n+1}\right\}_{i=0}^{k_{n+1}}, \text{ onde } U_i^{n+1} \subset U_{i+1}^{n+1}, \text{ se } i \in \{0,1,\dots,k_{n+1}-1\}.$$

Pela nossa construção temos, na verdade, $\overline{U_i^{n+1}} \subset U_{i+1}^{n+1}$ se $i \in \{0,1,\dots,k_{n+1}-1\}$ e usando (2) e (3) temos que $\mu(U_{i+1}^{n+1}) - \mu(U_i^{n+1}) > 0$ se $i \in \{0,1,\dots,k_{n+1}-1\}$.

De (1) e (4) decorre que $\mu(U_{i+1}^{n+1}) - \mu(U_i^{n+1}) \leqq (\frac{2}{3})^{n+1}$ se $i \in \{0,1,\dots,k_n-1\}$, o que completa o passo de indução.

Consideremos agora a família $\mathcal{A}$ de todos os U_i^n com $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0,\dots,k_n\}$. É fácil ver que $\mathcal{A}$ pode ser totalmente ordenada por inclusão e além disso se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subsetneqq B$ temos $\overline{A} \subset B$ e $\mu(A) = \mu(\overline{A}) < \mu(B)$. Além disso $D = \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ é denso em $[0,1]$ uma vez que dados $0 \leqq a < b \leqq 1$, tomando n com $(\frac{2}{3})^n < b-a$ temos que $\{\mu(U_i^n) : i=0,\dots,k_n\}$ define uma partição de $[0,1]$ com diâmetro menor ou igual a $(\frac{2}{3})^n$ e portanto para algum i temos $\mu(U_i^n) \in]a,b[$. Vamos usar D como conjunto de índices para $\mathcal{A}$, isto é, escreveremos $\mathcal{A} = \{U_d : d \in D\}$ (onde $\mu(U_d) = d$). Conforme o Lema 5 (pág. 29) de [L] (ver a prova) a função $g: K \to [0,1]$ definida por $g(x) = \sup\{d \in D : x \notin U_d\}$ é contínua e sobrejetora. Além disso temos $g^{-1}([0,t[) \subset \{x \in K : x \in U_r, \forall r \in D, r \geqq t\}$, se $0 \leqq t \leqq 1 \leqq$ e $\{x \in K : x \in U_r, \forall r \in D, r > t\} \subset g^{-1}([0,t])$ se $0 \leqq t < 1$. Temos também:

(5) $$g^{-1}([0,t[) \subset \bigcap_{\substack{r \geqq t \\ r \in D}} U_r \subset \bigcap_{\substack{r > t \\ r \in D}} U_r \subset g^{-1}([0,t]) \text{ se } 0 \leqq t < 1 .$$

(6) $$\mu\Big(\bigcap_{\substack{r > t \\ r \in D}} U_r\Big) = \inf_{\substack{r > t \\ r \in D}} \mu(U_r) = \inf_{\substack{r > t \\ r \in D}} r = t , \text{ se } 0 \leqq t < 1$$

(sendo a última igualdade devida a densidade de D).

De (5) e (6) temos que $\mu(g^{-1}([0,t[)) \leq t \leq \mu(g^{-1}([0,t]))$ para todo $t \in]0,1[$.

Se $t \in]0,1[$ temos então que

$t \leq \mu(g^{-1}([0,t])) \leq \mu(g^{-1}([0,r[)) \leq r$ para todo $r \in]t,1[$ e

$t \geq \mu(g^{-1}([0,t[)) \geq \mu(g^{-1}([0,r])) \geq r$ para todo $r \in]0,t[$ e

portanto $\mu(g^{-1}([0,t[)) = \mu(g^{-1}([0,t])) = t$ e $\mu(g^{-1}(\{t\})) = 0$.

Se $t \in]0,1[$ temos ainda que

$$0 \leq \mu(g^{-1}(\{0\})) \leq \mu(g^{-1}([0,t])) = t ,$$

$$1 = \mu(g^{-1}([0,1])) \geq \mu(g^{-1}([0,1[)) \geq \mu(g^{-1}([0,t])) = t$$

Logo $\mu(g^{-1}(\{0\})) = 0$ e $\mu(g^{-1}([0,1])) = \mu(g^{-1}([0,1[)) = 1$.

Temos então $\mu(g^{-1}(J)) = \lambda(J)$ para todo intervalo $J \subset [0,\mu(K)] = [0,1]$.

Consideremos a medida ν sobre os borelianos de $[0,1]$ definida por $\nu(E) = \mu(g^{-1}(E))$. Como ν é, de fato, uma medida regular e ν coincide com λ nos intervalos então ν coincide com λ nos borelianos e temos o resultado.

6.6. <u>COROLÁRIO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular não puramente atômica não nula num compacto K. Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Borel regulares em K tais que μ_1 é não atômica, μ_2 é puramente atômica e $\mu = \mu_1+\mu_2$. Seja λ a medida de Lebesgue em $[0,\mu_1(K)]$. Então existem λ' uma medida de Borel regular puramente atômica em $[0,\mu_1(K)]$ e uma função $g\colon K \to [0,\mu_1(K)]$ contínua sobrejetora tais que $\lambda(E) = \mu_1(g^{-1}(E))$ e $\lambda'(E) = \mu_2(g^{-1}(E))$ para todo E boreliano de $[0,\mu_1(K)]$.

Prova. Apliquemos (6.5) para μ_1. Seja $g\colon K \to [0,\mu_1(K)]$ contínua sobrejetora com $\mu_1(g^{-1}(E)) = \lambda(E)$ $\forall E \subset [0,\mu_1(K)]$ boreliano. Sejam $I \subset \mathbb{N}$ e $\{a_n\}_{n\in I}$ a família dos pontos de K que têm medida μ positiva. Definimos $\lambda'(E) = \mu_2(g^{-1}(E))$ $\forall E$ boreliano de $[0,\mu_1(K)]$, que é uma medida regular puramente atômica. Os pontos de $[0,\mu_1(K)]$ que têm medida λ' positiva são os pontos $g(a_n)$, $n\in\mathbb{N}$ e $\lambda'(\{g(a_n)\}) = \sum\limits_{\substack{i\in I \\ g(a_i) = g(a_n)}} \mu_2(\{a_i\})$. Temos ainda

$(\lambda+\lambda')(E) = (\mu_1+\mu_2)(g^{-1}(E)) = \mu(g^{-1}(E))$.

6.7. OBSERVAÇÃO. Seja $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente contínua com $\alpha(a) = 0$. Seja μ_α medida de Borel regular com $\mu_\alpha(]c,d[) = \mu_\alpha([c,d]) = \alpha(d) - \alpha(c)$ se $a \leqq c \leqq d \leqq b$ (ver (5.1)). Então temos que $\lambda(E) = \mu_\alpha(\alpha^{-1}(E))$ $\forall E$ boreliano de $[0,\alpha(b)]$, isto é, a função g de (6.5) para μ_α pode ser a própria α.

De fato, dados $0 \leqq c \leqq d \leqq \alpha(b)$, existem u,v tais que $c = \alpha(u)$, $d = \alpha(v)$ e $a \leqq u \leqq v \leqq b$. Assim

$\alpha^{-1}([c,d]) = \{t \in [a,b]\colon \alpha(t) \in [c,d]\} \supset [u,v]$ e

$\alpha^{-1}([c,d]) = [x,y]$ onde $x \leqq u \leqq v \leqq y$.

Mas como $\alpha(u) = c$ e $\alpha(v) = d$, temos $\alpha(x) = \alpha(u) = c$ e $\alpha(v) = \alpha(y) = d$. Logo

$$\mu_\alpha(\alpha^{-1}([c,d])) = \mu_\alpha([x,y]) = \alpha(y) - \alpha(x) =$$
$$\alpha(u) - \alpha(v) = d-c = \lambda([c,d]).$$

Como $\mu_\alpha(\alpha^{-1}(\{t\})) = 0$ $\forall t\in\mathbb{R}$, temos $\mu_\alpha(\alpha^{-1}(]c,d[)) = \lambda(]c,d[)$. Assim teremos $\mu_\alpha(\alpha^{-1}(E)) = \lambda(E)$ para cada E boreliano de $[0,\alpha(b)]$. De fato, em primeiro lugar lembremos que, sendo α contínua, temos que $\alpha^{-1}(E)$ é boreliano para todo E boreliano. Definamos

$\nu(E) = \mu_\alpha(\alpha^{-1}(E))$ para cada E boreliano de $[0,\alpha(b)]$. Temos então que

$$\nu(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} E_n) = \mu_\alpha(\alpha^{-1}(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} E_n)) = \mu_\alpha(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} \alpha^{-1}(E_n)) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_\alpha(\alpha^{-1}(E_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n) .$$

Assim ν é uma medida sobre os borelianos de $[0,\alpha(b)]$. Além disso, como todo aberto de $[0,\alpha(b)]$ é uma reunião de intervalos dois a dois disjuntos do tipo $]c,d[$ ou $[0,d[$ ou $]c,\alpha(b)]$, é fácil ver que $\nu(E) = \lambda(E)$ para todo E aberto, já que essa igualdade se verifica para os intervalos do tipo acima. Temos ainda que ν é regular pois μ_α é regular. De fato, dado E boreliano e $\varepsilon > 0$, como $\alpha^{-1}(E)$ é boreliano tomo $F \subset \alpha^{-1}(E)$ fechado tal que $\mu_\alpha(F) > \mu_\alpha(\alpha^{-1}(E)) - \varepsilon$. Assim $\alpha(F) \subset E$, $\alpha(F)$ é fechado e como $\alpha^{-1}(\alpha(F)) \supset F$ temos

$$\nu(\alpha(F)) = \mu_\alpha(\alpha^{-1}(\alpha(F))) \geqq \mu_\alpha(F) > \mu_\alpha(\alpha^{-1}(E)) - \varepsilon = \nu(E) - \varepsilon .$$

Assim ν é regular. Como ν e λ coincidem nos abertos de $[0,\alpha(b)]$ temos $\nu = \lambda$, isto é $\mu_\alpha(\alpha^{-1}(E)) = \lambda(E)$, $\forall E$ boreliano de $[0,\alpha(b)]$.

6.8. <u>TEOREMA</u>. (Oxtoby). Seja K um espaço métrico compacto e seja μ uma medida não-atômica em K. Suponhamos $\mu(K) = 1$. Sejam η o conjunto dos irracionais de $[0,1]$ e λ a medida de Lebesgue em $[0,1]$. Então existe um conjunto B que é um G_δ com $\mu(K-B) = 0$ e um homeomorfismo $h: \eta \to B$ tal que $\mu(E) = \lambda(h^{-1}(E))$ para todo $E \subset K$, E boreliano.

<u>Prova</u>. Ver [O].

oOo

§7. COMPARAÇÃO ENTRE AS NOÇÕES DE INTEGRABILIDADE SEGUNDO RIEMANN E DARBOUX

Em [R], Rocha Filho propôs o seguinte problema:

PROBLEMA 1A — Classificar os espaços de Banach X que têm a seguinte propriedade:

P1A: Se $f: [a,b] \to X$ é Riemann-integrável então f é Darboux-integrável.

Exemplos de espaços de Banach X que obedecem a P1A e de espaços que não obedecem a P1A foram apresentados em [R] e em [He]. Nesse último, foi proposto o seguinte problema:

PROBLEMA 1B — Dada $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente, classificar os espaços de Banach X que têm a seguinte propriedade:

P1B: $R_N([a,b],\alpha,X) \subset D_N([a,b],\alpha,X)$.

O Problema 1A é um caso particular do Problema 1B, que ocorre quando fazemos $\alpha(t)=t$.

Exemplos de espaços verificando (e não verificando) P1B foram apresentados em [He]. Em cada um desses exemplos observamos que, quando μ_α é não puramente atômica, então ou temos P1A e P1B simultaneamente ou temos que P1A e P1B são falsos. No entanto, a natural questão de equivalência entre os dois problemas não foi tratada em [He].

Neste parágrafo, provaremos que P1A e P1B são equivalentes quando μ_α é não puramente atômica.

Num contexto ainda mais geral, propusemo-nos, neste parágrafo, o seguinte problema:

PROBLEMA 1C — Dados K compacto e μ medida de Borel regular em K, classificar os espaços de Banach que têm a seguinte propriedade:

$$\text{P1C:} \quad R(K,\mu,X) \subset D(K,\mu,X).$$

Estaremos particularmente interessados em relacionar a validade de P1C com a validade de P1A.

Lembramos que as inclusões $D_N([a,b],\alpha,X) \subset R_N([a,b],\alpha,X)$ e $D(K,\mu,X) \subset R(K,\mu,X)$ são sempre verdadeiras (ver (5.11 ii)) e (4.29)) e que, portanto, P1B equivale a

$R_N([a,b],\alpha,X) = D_N([a,b],\alpha,X)$ e P1C equivale a

$R(K,\mu,X) = D(K,\mu,X)$.

Em (7.14) veremos diversas situações nas quais P1A e P1C são equivalentes.

Também neste parágrafo, X indicará um espaço de Banach.

7.1. OBSERVAÇÃO. Se $f \in R(K,\mu,X)$, sabemos por (4.36 a)) que b) de (4.38 ii)) se verifica. Assim, para decidir se $f \in D(K,\mu,X)$ é necessário e suficiente verificar se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida μ nula.

A partir daqui, dada $f: K \to X$, denotaremos por D(f) o conjunto dos pontos de descontinuidade de f.

7.2. PROPOSIÇÃO. Seja $B(K,X)$ o conjunto das funções $f\colon K \to X$ que são limitadas. São equivalentes:

i) $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$;

ii) $D(K,\mu,X) \cap B(K,X) = R(K,\mu,X) \cap B(K,X)$.

Prova. É imediato que i) $\Longrightarrow$ ii). Provemos que ii) $\Longrightarrow$ i). Suponhamos ii). Seja $f \in R(K,\mu,X)$. Por (4.36 b)) existe F fechado regular μ-contínuo tal que supp $\mu \subset F$ e f é limitada em F. Seja $\tilde{f} = f\chi_F$. Então $\tilde{f}|_F = f|_F$ e $\tilde{f}$ é limitada. Por (4.46) a) e c) temos que $\tilde{f} \in R(K,\mu,X)$ e portanto por ii) $\tilde{f} \in D(K,\mu,X)$. De (4.46) b) e d) decorre que $f \in D(K,\mu,X)$. Logo temos i).

7.3. COROLÁRIO. Seja $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. São equivalentes:

i) $D([a,b],\mu_\alpha,X) = R([a,b],\mu_\alpha,X)$;

ii) $D_N([a,b],\alpha,X) = R_N([a,b],\alpha,X)$.

Prova. Suponhamos i). Usando (5.17) i) e ii) temos que

$$R_N([a,b],\alpha,X) = R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap B_\alpha([a,b],X) =$$
$$= D([a,b],\mu_\alpha,X) \cap B_\alpha([a,b],X) = D_N([a,b],\alpha,X)$$

e portanto temos ii).

Suponhamos ii). Então, usando (5.17) i) e ii) temos

$R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap B([a,b],X) \subset R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap B_\alpha([a,b],X) =$
$= R_N([a,b],\alpha,X) = D_N([a,b],\alpha,X) \subset D([a,b],\alpha,X)$. Por (7.2) temos i).

7.4. PROPOSIÇÃO. Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Borel-regulares em K, μ_1 não-atômica e μ_2 puramente atômica. Seja $\mu = \mu_1+\mu_2$. Se $D(K,\mu_1,X) = R(K,\mu_1,X)$ então $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$.

Prova. Por (4.50 a)) temos $R(K,\mu,X) \subset R(K,\mu_1,X) \cap R(K,\mu_2,X)$. Usando a hipótese, (4.41) e (4.50 b)) temos $R(K,\mu_1,X) \cap R(K,\mu_2,X) \subset D(K,\mu_1,X) \cap D(K,\mu_2,X) = D(K,\mu,X)$ o que completa a prova.

7.5. PROPOSIÇÃO. Sejam F e K compactos e $g: F \to K$ contínua. Sejam μ uma medida de Borel regular em K e ν uma medida de Borel regular em F tais que $\mu(B) = \nu(g^{-1}(B))$ para todo B fechado de K. Se $f \in R(K,\mu,X)$ então $\tilde{f} = fog \in R(F,\nu,X)$. Analogamente se $f \in D(K,\mu,X)$ então $\tilde{f} = fog \in D(F,\nu,X)$.

Prova. Se $f \in R(K,\mu,X)$ e $\varepsilon > 0$, então existe $P = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ μ-partição de K tal que $\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} [f(x_i)-f(y_i)]\mu(P_i) \right\| < \varepsilon$, para $x_i, y_i \in P_i$, $i=1,\ldots,n$.

Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ sejam $B_i = g^{-1}(P_i)$ e $A_i = \overline{\mathring{B}_i}$. Temos que:

1. para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, A_i é fechado regular de F (lembrar (4.3.ii)) e que g é contínua);

2. para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ A_i é ν-contínuo pois $\partial A_i \subset \partial B_i \subset g^{-1}(\partial P_i)$ e portanto $\nu(\partial A_i) \leq \nu(g^{-1}(\partial P_i)) = $
$= \mu(\partial P_i) = 0$;

3. para cada $i,j \in \{1,\dots,n\}$ com $i \neq j$ temos

$$\nu(A_i \cap A_j) \leqq \nu(g^{-1}(P_i) \cap g^{-1}(P_j)) = \nu(g^{-1}(P_i \cap P_j)) =$$
$$= \mu(P_i \cap P_j) = 0;$$

4. como $K = \bigsqcup_{i=1}^{n} P_i$ então $F = \bigsqcup_{i=1}^{n} g^{-1}(P_i)$ e por (4.5) temos $F = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$.

Observemos ainda que para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ temos

$$g^{-1}(P_i) \subset A_i \cup \partial(g^{-1}(P_i)) \subset A_i \cup g^{-1}(\partial P_i)$$

e portanto

$$\mu(P_i) = \nu(g^{-1}(P_i)) \leqq \nu(A_i) + \nu(g^{-1}(\partial P_i)) =$$
$$= \nu(A_i)+\mu(\partial P_i) = \nu(A_i) \leqq \nu(g^{-1}(P_i)) = \mu(P_i).$$

Assim, se tomarmos, para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, $s_i, t_i \in A_i$, como $g(s_i) \in P_i$ e $g(t_i) \in P_i$ teremos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} [\tilde{f}(s_i)-\tilde{f}(t_i)]\nu(A_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} [f(g(s_i))-f(g(t_i))]\mu(P_i) \right\| < \varepsilon.$$

Recorrendo a (4.28) d) $\Longrightarrow$ a) teremos que $\tilde{f} \in R(F,\nu,X)$.

Analogamente, se $f \in D(K,\mu,X)$ então $\tilde{f} \in D(F,\nu,X)$.

Veremos a seguir algumas condições sobre K e μ que garantem que $P_1C \Rightarrow P_1A$.

No que segue λ indicará a medida de Lebesgue nos borelianos de $\mathbb{R}$ ou de algum intervalo de $\mathbb{R}$.

7.6. <u>TEOREMA</u>. Seja μ uma medida de Borel regular não puramente atômica (não-nula) num compacto K. Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Borel regulares, μ_1 não-atômica e μ_2 puramente atômica tais que $\mu = \mu_1+\mu_2$. Sejam $g: K \to [0,\mu_1(K)]$ contínua e sobrejetora e λ' medida de Borel regular puramente atômica em $[0,\mu_1(K)]$ tais que $\mu_1(g^{-1}(E)) = \lambda(E)$ e $\mu_2(g^{-1}(E)) = \lambda'(E)$ para todo E boreliano de $[0,\mu_1(K)]$ (ver (6.6)). Suponhamos que exista $D \subset K$ tal que

$\mu(\overline{D}) > 0$, $g(D)$ é enumerável e $\lambda'(\overline{g(D)}) = 0$. Nessa situação, temos que se $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$ então $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$.

<u>Prova</u>. Para simplificar suponhamos $\mu_1(K) = 1$. Como $g(D)$ é enumerável, existe $A \subset [0,1]$, A enumerável com $g(D) \subset A$ e A denso em $[0,1]$. Se $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$ temos, por (1.10), que existe $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que $\|f(x)\| = 1$ $\forall x \in A$ e $f(x) = 0$ se $x \notin A$. Como A é enumerável, é fácil ver que $h = f\chi_{g(D)} \in R([0,1],\lambda,X)$ (use (1.2 b)), por exemplo). Como h é limitada e como $\lambda'(D(h)) \leq \lambda'(\overline{g(D)}) = 0$, então, por (4.38), $h \in D([0,1],\lambda',X) \subset R([0,1],\lambda',X)$. Assim, por (7.5), $h\circ g \in R(K,\mu_1,X) \cap R(K,\mu_2,X)$ e por (4.50 a)), $h\circ g \in R(K,\mu,X)$.

Mostremos que $h\circ g \notin D(K,\mu,X)$. Observemos que, como $\lambda(g(D)) = 0$ (pois $g(D)$ é enumerável) e como $\lambda'(g(D)) = 0$, então $\mu(g^{-1}(g(D))) = (\lambda+\lambda')(g(D)) = 0$ e assim $\mu(\overline{D}-g^{-1}(g(D))) = \mu(\overline{D}) > 0$. Assim, por (4.38), para mostrar que $h\circ g \notin D(K,\mu,X)$ é suficiente mostrar que $h\circ g$ é descontínua em $\overline{D}-g^{-1}(g(D))$.

Seja $x \in \overline{D} - g^{-1}(g(D))$. Então $g(x) \notin g(D)$ e portanto $h(g(x)) = 0$. Se V é vizinhança de x tomemos $y \in D \cap V$ (que existe pois $x \in \overline{D}$). Então $\|h\circ g(y)\| = \|f\circ g(y)\| = 1$ já que $g(y) \in g(D)$. Logo $h\circ g$ é descontínua em x, o que completa a prova.

7.7. <u>COROLÁRIO</u>.

a) Seja μ uma medida de Borel regular não puramente atômica (não nula) num compacto K. Sejam μ_1, μ_2, g e λ' como em (6.6). Suponhamos que exista $F \subset K$ fechado separável com $\mu(F) > 0$ e $\lambda'(g(F)) = 0$. Se $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$ então $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$.

b) Seja μ uma medida de Borel regular não-atômica (não nula) num compacto K. Suponhamos que exista $F \subset K$ fechado separável com $\mu(F) > 0$. Se $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$ então $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$.

<u>Prova</u>. a) Tomando D enumerável denso em F temos g(D) enumerável, $\mu(\overline{D}) = \mu(F) > 0$ e como $\overline{g(D)} \subset \overline{g(F)} = g(F)$ temos $\lambda'(\overline{g(D)}) = 0$ e basta aplicar (7.6).

b) Basta aplicar a) lembrando que no caso de μ ser não-atômica, λ' é nula.

7.8. <u>OBSERVAÇÃO</u>.

a) Se $K = \{e^{it}: t \in [0,2\pi]\}^I$ onde $|I| > c$ e μ é a medida de Haar em K, então não existe $F \subset K$, F fechado separável com $\mu(F) > 0$. Isto mostra que existe uma medida de Borel regular não puramente atômica num compacto K que é diádico e localmente conexo, não verificando as hipóteses de (7.7 a)). Assim, os resultados (7.9) e (7.11) a seguir, que decorrem de (7.6), não decorrem de (7.7 a)).

b) Alertamos também que (7.12) não é conseqüência direta de (7.9) e (7.11), uma vez que dada μ medida de Borel regular não puramente atômica num compacto K, seu suporte pode ser diádico (ou localmente conexo) sem que K seja diádico (ou localmente conexo). Exemplos simples de tais situações podem ser obtidos facilmente e serão omitidos. Em especial, observamos que se K é um compacto de Eberlein não metrizável (por exemplo, a bola de $\ell_2(\Gamma)$ onde $|\Gamma| = c$) então K não é diádico (ver [Li] pág 253), mas o suporte de cada medida de Borel regular em K é diádico (ver a prova de (7.15)).

7.9. <u>COROLÁRIO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular não puramente atômica (não-nula) num compacto diádico K. Se μ_1, μ_2, g e λ' são como em (6.6) então existe $D \subset K$ tal que $g(D)$ é enumerável, $\mu(\overline{D}) > 0$ e $\lambda'(\overline{g(D)}) = 0$. Conseqüentemente se $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$ então $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$.

<u>Prova</u>. Tomemos um conjunto I e $h: \{0,1\}^I \to K$ contínua sobrejetora. Sabemos (ver, por exemplo [E]) que goh depende só de uma quantidade enumerável de coordenadas, isto é, existe $J \subset I$, J enumerável, tal que se $y = (y_i)_{i \in I} \in \{0,1\}^I$ e $z = (z_i)_{i \in I} \in \{0,1\}^I$ são tais que $y_i = z_i \ \forall i \in J$ então $goh(y) = goh(z)$. Seja $\Pi: \{0,1\}^I \to \{0,1\}^J$ a projeção canônica. Então existe $\phi: \{0,1\}^J \to [0,1]$ tal que $\phi o \Pi = goh$. Como goh é contínua temos que ϕ é contínua.

Tomemos $P \subset [0,1]$ fechado com $\lambda(P) > 0$ e $\lambda'(P) = 0$. Temos que $\Pi((goh)^{-1}(P))$ é separável pois sendo J enumerável, $\{0,1\}^J$ é metrizável.

Seja $F = (goh)^{-1}(P)$ e tomemos $D_1 \subset \Pi(F)$, enumerável denso em $\Pi(F)$. Façamos $D_2 = \Pi^{-1}(D_1)$ e $D = h(D_2)$. Como Π é sobrejetora temos que $\Pi(D_2) = D_1$. Assim temos :

(1) $g(D) = g(h(D_2)) = \phi(\Pi(D_2)) = \phi(D_1)$ que é enumerável, pois D_1 é enumerável.

Temos também que goh é sobrejetora e portanto

$$\phi(\Pi(F)) = \phi o\Pi((goh)^{-1}(P)) = (goh)((goh)^{-1}(P)) = P.$$

Como $D_1 \subset \Pi(F)$, decorre de (1) que

(2) $g(D) = \phi(D_1) \subset \phi(\Pi(F)) = P$ e portanto $\overline{g(D)} \subset P$. Logo $\lambda'(\overline{g(D)}) = 0$

Vamos mostrar que $\mu(\overline{D}) > 0$. Para isso mostremos que $g^{-1}(P) \subset \overline{D}$ e assim teremos $\mu(\overline{D}) \geqq \mu(g^{-1}(P)) = \lambda(P) > 0$. Para mostrar que $\mu(\overline{D}) > 0$, observemos que sendo Π aberta temos que $\Pi^{-1}(\overline{D_1}) \subset \overline{\Pi_1^{-1}(D_1)}$ e portanto temos

$$\begin{aligned} g^{-1}(P) &= h(h^{-1}(g^{-1}(P))) = h((goh)^{-1}(P)) = h(F) \\ &\subset h(\Pi^{-1}(\Pi(F))) \subset h(\Pi^{-1}(\overline{D_1})) \subset h(\overline{\Pi^{-1}(D_1)}) \\ &= h(\overline{D_2}) \subset \overline{h(D_2)} = \overline{D}. \end{aligned}$$

Portanto temos

(3) $\mu(\overline{D}) > 0$.

De (7.6) decorre que se $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$ então $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$.

7.10. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Seja P um subconjunto de $[a,b]$ e seja S denso em P. Seja

$$A = \{x \in P : \exists \varepsilon > 0 \text{ com } [x-\varepsilon, x] \cap S = \emptyset\}.$$

Então A é enumerável.

Para provar a afirmação, tomemos $x,y \in A$ com $x \neq y$ e $\varepsilon > 0$ tal que $[x-\varepsilon,x] \cap S = \emptyset$. Mostremos que $y \notin [x-\varepsilon,x]$. De fato, se $y \in [x-\varepsilon,x]$ então $[y,x] \cap S = \emptyset$ e tomando $\delta > 0$ tal que $[y-\delta,y] \cap S = \emptyset$ teríamos $[y-\delta,x] \cap S = \emptyset$ e também $y-\delta < y < x$. Como $y \in A \subset P$ e S é denso em P teríamos uma contradição. Com isso, se $x,y \in A$ $x \neq y$, tomando $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que $[x-\varepsilon,x] \cap S = \emptyset$ e $[y-\delta,y] \cap S = \emptyset$ teremos que $y \notin [x-\varepsilon,x]$ e $x \notin [y-\delta,y]$ e daí decorre que $[x-\varepsilon,x] \cap [y-\delta,y] = \emptyset$. Com isso, é imediato que A é enumerável.

Analogamente se

$$B = \{x \in P : \exists \varepsilon > 0 \text{ com } [x,x+\varepsilon] \cap S = \emptyset\}$$

então B é enumerável.

Conseqüentemente se $\lambda(P) > 0$ então $\lambda(P-(A \cup B)) = \lambda(P) > 0$.

7.11. <u>COROLÁRIO</u>. Seja K um compacto localmente conexo e seja μ uma medida de Borel regular não puramente atômica (não-nula) em K. Se μ_1, μ_2, g e λ' são como em (6.6) então existe $D \subset K$ tal que $g(D)$ é enumerável, $\mu(\overline{D}) > 0$ e $\lambda'(\overline{g(D)}) = 0$. Conseqüentemente, se $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$ então $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$.

<u>Prova</u>. Seja P fechado de $[0,\mu_1(K)]$ tal que $\lambda(P) > 0$ e $\lambda'(P) = 0$. Seja S enumerável denso em P e tomemos $D = g^{-1}(S)$. Então $g(D) = S$ é enumerável e como $\overline{g(D)} = \overline{S} = P$ então $\lambda'(\overline{g(D)}) = 0$. Resta mostrar que $\mu(\overline{D}) > 0$. Tomemos

$$A = \{x \in P : \exists\ \varepsilon > 0 \text{ com } [x-\varepsilon,x] \cap S = \emptyset\}$$

e

$$B = \{x \in P : \exists\ \varepsilon > 0 \text{ com } [x,x+\varepsilon] \cap S = \emptyset\} .$$

Por (7.10) temos $\lambda(P-(A\cup B)) > 0$. Assim

$$\mu(g^{-1}(P-(A\cup B)) \cap \mathrm{supp}\,\mu_1) \geq \mu_1(g^{-1}(P-(A\cup B))) =$$

$$= \lambda(P - (A\cup B)) > 0.$$

Basta mostrar, então, que $g^{-1}(P-(A\cup B)) \cap \mathrm{supp}\,\mu_1 \subset \overline{D}$. Seja $x \in g^{-1}(P-(A\cup B)) \cap \mathrm{supp}\,\mu_1$ e seja V vizinhança conexa de x. Então $g(V)$ é um conexo de $[0,\mu_1(K)]$ que contém $g(x)$. Logo $g(V)$ é um intervalo que contém $g(x)$ e como $\mu_1(V) > 0$ então $\lambda(g(V)) > 0$ já que $V \subset g^{-1}(g(V))$. Assim $g(V)$ contém algum intervalo do tipo $[g(x)-\varepsilon, g(x)]$ ou $[g(x), g(x)+\varepsilon]$ com $\varepsilon > 0$. Como $g(x) \in P-(A\cup B)$ então $[g(x)-\varepsilon, g(x)] \cap S \neq \emptyset$ e $[g(x), g(x)+\varepsilon] \cap S \neq \emptyset$. Assim existe $s \in S \cap g(V)$. Sendo $s = g(v) \in S$, onde $v \in V$ temos que $v \in V \cap g^{-1}(S) = V \cap D$. Logo $x \in \overline{D}$.

Aplicando (7.6) temos que se $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$ então $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$.

7.12. <u>COROLÁRIO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular não-puramente atômica não nula num compacto K tal que existe $F \subset K$, F fechado diádico ou localmente conexo com $\mathrm{supp}\,\mu \subset F$. Se $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$ então $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$.

<u>Prova</u>. Tomemos $\mu_1, \mu_2, g, \lambda'$ como em (6.6). Façamos $h = g|_F$, ν, ν_1 e ν_2 as restrições de μ, μ_1 e μ_2 respectivamente aos borelianos de F. Temos então que $\nu = \nu_1 + \nu_2$; ν_1 é não-atômica e ν_2 é puramente atômica; $\nu_1(F) = \mu_1(F) = \mu_1(K)$ já que $\mu_1(\complement F) \leq \mu(\complement \mathrm{supp}\mu) = 0$; $\lambda(E) = \mu_1(g^{-1}(E)) = \mu_1(g^{-1}(E) \cap F) = \mu_1(g|_F^{-1}(E)) = \mu_1(h^{-1}(E)) = \nu_1(h^{-1}(E))$ para todo boreliano de $[0,\mu_1(K)] = [0,\nu_1(F)]$ e de modo análogo $\lambda'(E) = \nu_2(h^{-1}(E))$ para todo boreliano de $[0,\mu_1(K)]$. Além disso, $h(F) = g(F) = [0,\mu_1(K)]$ pois caso contrário, sendo

$A = [0,\mu_1(K)] - g(F)$, teríamos A aberto não vazio de $[0,\mu_1(K)]$ e portanto $\lambda(A) > 0$. Logo $\mu_1(g^{-1}(A)) > 0$ o que é contradição pois $g^{-1}(A) \cap \operatorname{supp} \mu \subset g^{-1}(A) \cap F = \emptyset$. Assim $h\colon F \to [0,\nu_1(K)]$ é contínua e sobrejetora. Como vimos em (7.9) e (7.11), se F é diádico ou localmente conexo então existe $D \subset F$ tal que $\nu(\overline{D}) > 0$, $h(D)$ é enumerável e $\lambda'(\overline{h(D)}) = 0$. Assim, $D \subset K$, $\mu(\overline{D}) > 0$, $g(D)$ é enumerável e $\lambda'(\overline{g(D)}) = 0$. Por (7.6) temos o resultado.

O nosso próximo resultado diz que para cada compacto K e para cada μ de Borel regular em K temos que P1A $\Rightarrow$ P1C.

7.13. <u>TEOREMA</u>. Seja μ uma medida de Borel regular num compacto K. Se $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$ então $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$.

<u>Prova</u>. Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Borel regulares em K, μ_1 não atômica, μ_2 puramente atômica com $\mu = \mu_1+\mu_2$. Se $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$ então por (7.4) temos que $D(K,\mu_1,X) \neq R(K,\mu_1,X)$. Assim, podemos supor sem perda de generalidade μ não atômica e também $\mu(K) = 1$. Tomemos $f \in R(K,\mu,X)$, $f \notin D(K,\mu,X)$, f limitada (ver (7.2)). Por (4.14) e (4.16), podemos conseguir uma seqüência $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de μ-partições de K tais que:

1) para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{n+1}$ é um refinamento de $\mathcal{P}_n$;
2) para cada $n\in\mathbb{N}$ e para cada $F\in\mathcal{P}_n$ temos que $\mu(F) < \frac{1}{n}$;
3) para cada $n\in\mathbb{N}$, diam $S(f,\mathcal{P}_n) < \frac{1}{n}$;
4) para cada $n\in\mathbb{N}$ e para cada $F\in P_n$ com $\mu(F) > 0$ existem $r\in\mathbb{N}$ e $F_1,\dots,F_r \in P_{n+1}$ tais que $0 < \mu(F_i) < \mu(F)$ se $i \in \{1,\dots,r\}$, $\bigsqcup_{i=1}^{r} F_i \subset F$ e $\sum_{i=1}^{r} \mu(F_i) = \mu(F)$.

Como $f \notin D(K,\mu,X)$ e $f \in R(K,\mu,X)$, temos por (7.1) que existe $\delta > 0$ tal que $\mu(\{x \in K: w(f,x) > \delta\}) > 0$. Seja $P = \{x \in K: w(f,x) > \delta\}$.

Seja $\{F_1^1,\ldots,F_{k_1}^1\}$ o conjunto dos fechados de P_1 que têm medida positiva. Façamos $t_o^1 = 0$, $t_1^1 = \mu(F_1^1)$, $t_2^1 = \mu(F_1^1) + \mu(F_2^1),\ldots,t_{k_1}^1 = \sum_{i=1}^{k_1} \mu(F_i^1) = 1$.

Seja $\{F_1^2,\ldots,F_{k_2}^2\}$ o conjunto dos fechados de P_2 que têm medida positiva indexados de modo que se $F_i^2 \subset F_r^1$, $F_j^2 \subset F_s^1$ com $i,j \in \{1,\ldots,k_2\}$, $r,s \in \{1,\ldots,k_1\}$ e $r < s$ então $i<j$ (isto é, os primeiros F_i^2 são aqueles que são subconjuntos de F_1^1, os seguintes são os que são subconjuntos de F_2^1, etc.). Façamos $t_o^2 = 0$, $t_1^2 = \mu(F_1^2)$, $t_2^2 = \mu(F_1^2) + \mu(F_2^2),\ldots,$ $t_{k_2}^2 = \sum_{i=1}^{k_2} \mu(F_i^2) = 1$.

Temos então que $d_2 = (t_o^2,\ldots,t_{k_2}^2)$ é um refinamento de $d_1 = (t_o^1,\ldots,t_{k_1})$ e que o diâmetro de d_1 é menor do que 1 e o diâmetro de d_2 é menor do que $\frac{1}{2}$.

Indutivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\{F_1^n,\ldots,F_{k_n}^n\}$ o conjunto dos fechados de P_n que têm medida positiva, de modo que se $m \in \mathbb{N}$, $i,j \in \{1,\ldots,k_{m+1}\}$, $r,s \in \{1,\ldots,k_m\}$, $F_i^{m+1} \subset F_r^m$, $F_j^{m+1} \subset F_s^m$ e $r < s$ então $i < j$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, fazemos então $t_o^n = 0$, $t_1^n = \mu(F_1^n)$, $t_2^n = \mu(F_1^n) + \mu(F_2^n),\ldots,t_{k_n}^n = 1$ e $d_n = (t_o^n,t_1^n,\ldots,1)$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que d_{n+1} é um refinamento de d_n e que o diâmetro de d_{n+1} é menor do que $\frac{1}{n+1}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $J_n = \{i \in \{1,\ldots,k_n\}: P \cap \overset{\circ}{F}{}_i^n \neq \emptyset\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $i \in J_n$, escolhemos $x_i^n, y_i^n \in \overset{\circ}{F}{}_i^n$ com $\|f(x_i^n)-f(y_i^n)\| > \delta$.

Vamos definir $g \in R([0,1],\lambda,X)$, $g \notin D([0,1],\lambda,X)$.

Se $t \notin \{t_j^n\colon n\in\mathbb{N},\ j\in\{0,1,\dots,k_n\}\}$ definimos $g(t) = 0$.

Se $t \in \{t_j^1\colon j\in\{0,1,\dots,k_1\}\}$ definimos $g(t) = 0$.

Se $t \in \{t_j^2\colon j\in\{0,1,\dots,k_2\}\} - \{t_j^1\colon j\in\{0,1,\dots,k_1\}\}$, então existe um único $i \in \{1,\dots,k_1\}$ tal que $t \in \,]t_{1-1}^1, t_i^1[$. Se $i \in J_1$ definimos $g(t) = f(x_i^1) - f(y_i^1)$. Se $i\notin J_1$, definimos $g(t) = 0$.

Procedemos agora por indução. Definida $g(t_j^m)$ para $m\in\mathbb{N}$ $1 \leqq m \leqq n$ e $j \in \{1,\dots,k_m\}$ e dado $t \in \{t_j^{n+1}\colon j\in\{0,1,\dots,k_{n+1}\}\} - \bigcup_{m=1}^{n}\{t_j^m\colon j\in\{0,1,\dots,k_m\}\}$ então existe um único $i \in \{1,\dots,k_n\}$ tal que $t \in \,]t_{i-1}^n, t_i^n[$. Se $i \in J_n$, fazemos $g(t) = f(x_i^n) - f(y_i^n)$. Se $i\notin J$, fazemos $g(t) = 0$.

Com isso, se $t \in \,]t_{s-1}^n, t_s^n[$ para algum $n\in\mathbb{N}$ e para algum $s \in \{1,\dots,k_n\}$ e se $g(t) \neq 0$ então $t = t_\ell^{p+1}$ para algum $p \geqq n$ e $\ell \in \{1,\dots,k_{p+1}\}$. Assim, se $r = \min\{p\in\mathbb{N}\colon p \geqq n \text{ e } t\in\{t_1^{p+1},\dots,t_{k_{p+1}}^{p+1}\}\}$ temos que $r \geqq n$ e $t = t_j^{r+1}$ para algum $j \in \{1,\dots,k_r\}$.

Como $g(t) \neq 0$ temos $t = t_j^{r+1} \in \,]t_{i-1}^r, t_i^r[$ para algum $i \in J_r$ e $g(t) = f(x_i^r) - f(y_i^r)$. Como $r \geqq n$ temos $]t_{i-1}^r, t_i^r[\,\subset\,]t_{s-1}^n, t_s^n[$ (pois $t \in \,]t_{i-1}^r, t_i^r[\,\cap\,]t_{s-1}^n, t_s^n[$).

Podemos então afirmar que se $t \in \,]t_{s-1}^n, t_s^n[$ para algum $n\in\mathbb{N}$ e para algum $s \in \{1,\dots,k_n\}$ e se $g(t) \neq 0$ então existem $r \geqq n$, $j \in \{1,\dots,k_r\}$ e $i\in J_r$ tais que $t = t_j^{r+1} \in \,]t_{i-1}^r, t_i^r[\,\subset\,]t_{s-1}^n, t_s^n[$ e $g(t) = f(x_i^r) - f(y_i^r)$. Pela nossa construção, como $]t_{i-1}^r, t_i^r[\,\subset\,]t_{s-1}^n, t_s^n[$ temos que $F_i^r \subset F_s^n$. Assim temos que $x_i^r, y_i^r \in \overset{\circ}{F}{}_i^r \subset \overset{\circ}{F}{}_s^n$.

Conclusão: Se $t \in \,]t_{s-1}^n, t_s^n[$ para algum $n\in\mathbb{N}$ e para algum $s \in \{1,\dots,k_n\}$ ou temos que $g(t) = 0$ ou existem $a,b \in \overset{\circ}{F}{}_s^n$

tais que $g(t) = f(b) - f(a)$. Assim, se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ e $\xi_s \in]t^n_{s-1}, t^m_s[$ para $s \in \{1,\dots,k_n\}$, temos que existem $\alpha_s, \beta_s \in \overset{\circ}{F}{}^m_s$ tais que $g(\xi_s) = f(\beta_s) - f(\alpha_s)$. Logo

$$\left\| \sum_{s=1}^{k_n} g(\xi_s)(t^n_s - t^n_{s-1}) \right\| = \left\| \sum_{s=1}^{k_n} [f(\beta_s) - f(\alpha_s)]\mu(F^n_s) \right\| \leq$$

$$\leq \text{ diam } S(f, \mathcal{P}_n) < \frac{1}{n} .$$

Por (4.31) temos que $g \in R([0,1],\lambda,X)$ (note que sendo f limitada, temos também g limitada). Resta mostrar que $g \notin D([0,1],\lambda,X)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $0 < \mu(P) = \sum_{i \in J_n} \mu(F^n_i \cap P) \leq \sum_{i \in J_n} \mu(F^n_i)$. Assim, se $A_n = \bigcup_{i \in J_n}]t^n_{i-1}, t^n_i[$ temos

$\lambda(A_n) = \sum_{i \in J_n} \mu(F^n_i) \geq \mu(P)$. É fácil ver também que $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ e assim se $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ temos $\lambda(A) \geq \mu(P)$. Como $\{t \in [0,1]: g(t) \neq 0\}$ é enumerável então sendo $B = A \cap \{t \in [0,1]: g(t) = 0\}$ temos $\lambda(B) = \lambda(A) \geq \mu(P) > 0$.

Tomemos $t \in B$ e vamos mostrar que g é descontínua em t. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $t \in A_n$, existe $i \in J_n$ tal que $t \in]t^n_{i-1}, t^n_i[$. Tomemos j o menor inteiro pertencente a $\{1,\dots,k_{n+1}\}$ tal que $F^{n+1}_j \subset F^n_i$ e $0 < \mu(F^{n+1}_j) < \mu(F^n_i)$ (ver 4) no início da prova). Então $t^{n+1}_j \in]t^n_{i-1}, t^n_i[$ e assim como $i \in J_n$ temos $\|g(t^{n+1}_j)\| = \|f(x^n_i) - f(y^n_i)\| > \delta$. Como $g(t) = 0$ (pois $t \in B$) e como $|t - t^{n+1}_j| < \frac{1}{n}$ (pois $t, t^{n+1}_j \in]t^n_{i-1}, t^n_i[$) temos que g é descontínua em t. Assim $\lambda(D(g)) \geq \lambda(B) > 0$ e por (4.38) $g \notin D([0,1],\lambda,X)$.

7.14. <u>COROLÁRIO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular num compacto K. Em cada uma das situações abaixo temos que para cada espaço de Banach X, $D([0,1],\lambda,X) = R([0,1],\lambda,X)$ é equivalente a $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$.

a) μ é não-atômica não nula e existe $F \subset K$, F fechado separável com $\mu(F) > 0$;

b) μ é não-puramente atômica (não-nula) e K é diádico (ou existe $F \subset K$, F fechado diádico com supp $\mu \subset F$),

c) μ é não-puramente atômica (não-nula) e K é localmente conexo (ou existe $F \subset K$, F fechado localmente conexo com supp $\mu \subset F$).

<u>Prova.</u> Conseqüência imediata de (7.7 b)), (7.9), (7.11), (7.12) e (7.13).

7.15. <u>COROLÁRIO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular não puramente atômica (não-nula) num compacto de Eberlein K. Então $D([0,1],\lambda,X) = R([0,1],\lambda,X)$ é equivalente a $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$.

<u>Prova</u>. Basta lembrar que nesse caso supp μ é metrizável, (ver [Li] teorema 4.3 e [Ro1] teorema 4.5 a)) portanto diádico e usar (7.14 b)).

7.16. <u>COROLÁRIO</u>. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente tal que μ_α é não puramente atômica (não-nula). São equivalentes:

i) $D([0,1],\lambda,X) = R([0,1],\lambda,X)$;

ii) $D_N([a,b],\alpha,X) = R_N([a,b],\alpha,X)$;

iii) $D([a,b],\mu_\alpha,X) = R([a,b],\mu_\alpha,X)$;

iv) $D_\sigma([a,b],\alpha,X) = R_\sigma([a,b],\alpha,X)$;

Prova. Vimos em (7.3) que ii) e iii) são equivalentes. Como conseqüência de (7.14 b)) temos que i) e iii) são equivalentes o que completa a prova da equivalência entre i), ii) e iii).

Daremos um roteiro para a prova da equivalência entre iv) e ii) o que completará a prova.

Suponhamos iv). De acordo com (5.10) temos

$$\begin{aligned} R_N([a,b],\alpha,X) &= R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B_\alpha([a,b],X) \cap C_\alpha([a,b],X) \\ &\subset D_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B_\alpha([a,b],X) \cap C_\alpha([a,b],X) \\ &= D_N([a,b],\alpha,X) \end{aligned}$$

e portanto temos ii).

Para provar a recíproca, observemos que:

a) Decorre da equivalência entre i) e ii) aplicada a α e α_c; que ii) é equivalente a $R_N([a,b],\alpha_c,X) = D_N([a,b],\alpha_c,X)$.

b) É fácil provar que $R_\sigma([a,b],\alpha,X) = D_\sigma([a,b],\alpha,X)$ é equivalente a $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B([a,b],X) = D_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B([a,b],X)$.

c) $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B([a,b],X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha_c,X) \cap D_\sigma([a,b],\alpha_s,X)$.

De fato, seja $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$ limitada. Seja $M > 0$ tal que $\|f(x)\| < M \ \ \forall x \in [a,b]$.

Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $a = a_o < a_1 < \ldots < a_n = b$ tais que $\mu_{\alpha_s}([a,b] - \{a_o,a_1,\ldots,a_n\}) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Como α e f são limitadas, a plicando (5.19), podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$a = a_o < a_o+\delta < a_1-\delta < a_1 < a_1+\delta < \ldots < a_n-\delta < a_n = b$,

$w(f,[a_i,a_i+\delta])[\alpha(a_i+\delta)-\alpha(a_i)] < \frac{\varepsilon}{2n}$, se $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ e

$w(f,[a_i-\delta,a_i])[\alpha(a_i)-\alpha(a_i-\delta)] < \frac{\varepsilon}{2n}$, se $i \in \{1,\ldots,n\}$. Como

$\alpha_s(y)-\alpha_s(x) \leqq \alpha(y)-\alpha(x)$ se $a \leqq x \leqq y \leqq b$ então

$$\sum_{i=0}^{n-1} w(f,[a_i,a_i+\delta])[\alpha_s(a_i+\delta)-\alpha_s(a_i)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} w(f,[a_i-\delta,a_i])[\alpha_s(a_i)-\alpha_s(a_i-\delta)] < \frac{\varepsilon}{2}.$$ Além disso temos que

$$\sum_{i=1}^{n} w(f,[a_{i-1}+\delta,a_i-\delta])[\alpha_s(a_i-\delta)-\alpha_s(a_{i-1}+\delta)] \leqq$$

$$\leqq 2M \sum_{i=1}^{n} [\alpha_s(a_i-\delta)-\alpha_s(a_{i-1}+\delta)]$$

$$\leqq 2M \sum_{i=1}^{n} \mu_{\alpha_s}([a_{i-1}+\delta,a_i-\delta]) < 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, se $d = (a_o,a_o+\delta,a_1-\delta,a_1,a_1+\delta,\ldots,a_n-\delta,a_n)$ temos que $w_{\alpha_s}(f,d) < \varepsilon$. De (5.8) decorre de $f \in D_\sigma([a,b],\alpha_s,X)$.

Assim $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B([a,b],X) \subset D_\sigma([a,b],\alpha_s,X) \subset$ $\subset R_\sigma([a,b],\alpha_s,X)$ e portanto

$$R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B([a,b],X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha_c,X) \cap D_\sigma([a,b],\alpha_s,X).$$

Suponhamos agora ii). Por (5.10) e a) temos $R_\sigma([a,b],\alpha_c,X) \cap B([a,b],X) \subset R_N([a,b],\alpha_c,X) \subset D_N([a,b],\alpha_c,X)$ $\subset D_\sigma([a,b],\alpha_c,X)$. Decorre de c) que

$$R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B([a,b],X) \subset$$

$$\subset D_\sigma([a,b],\alpha_c,X) \cap D_\sigma([a,b],\alpha_s,X) \cap B([a,b],X)$$

$$\subset D_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B([a,b],X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B([a,b],X).$$

Usando b) temos iv).

Provamos então que para α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente com μ_α não puramente atômica temos que P1A e P1B são equivalentes. Vimos também, em (7.14), várias situações nas quais P1A e P1C são equivalentes.

7.17. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Como conseqüência dos resultados que acabamos de obter, dos resultados de [He], [R] e dos resultados dos §2 e §3 deste trabalho temos, por exemplo, que:

I. Se $X = \ell_1(\Gamma)$ ou $X = L(c_o(\Gamma_1), \ell_1(\Gamma_2))$ ou $X = \ell[(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}]$ onde para cada $\varepsilon > 0$, $\{\gamma\in\Gamma: p_\gamma > 1+\varepsilon\}$ é finito (ver [He] III.3.1 e III.3.2), ou X é o dual do espaço de Tsirelson (ver [R]), então $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$ para todo compacto K e toda μ de Borel regular em K.

II. Se K e μ se enquadram num dos casos considerados em (7.14) temos que $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$ para $X = c_o(\mathbb{N})$; $X = \ell_p(\mathbb{N})$ $1 < p \leqq \infty$ (ou ainda X uniformemente convexo de dimensão infinita); X não separável com base incondicional generalizada e norma equivalente U.D.E.D.; X com base simétrica generalizada e não isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$ ($|\Gamma|$=dens X); $X=\ell[(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}]$ não do tipo considerado em I.; $X = L(Y,Z)$ onde Y e Z têm base simétrica generalizada e Y não é isomorfo a $c_o(\Gamma_1)$ ou Z não é isomorfo a $\ell_1(\Gamma_2)$ ($|\Gamma_1|$ = dens Y; $|\Gamma_2|$ = dens Z).

III. Se K e μ se enquadram num dos casos considerados em (7.14), se X tem subespaço complementado com base incondicional e se $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$ então $D(K,\mu,X^*) \neq R(K,\mu,X^*)$.

Sabemos que se $X = c_o(\mathbb{N})$ ou $X = \ell_p(\mathbb{N})$, $p \in]1,\infty[$ então $D([0,1],\lambda,X) \neq R([0,1],\lambda,X)$. Os resultados anteriores nos permitiram mostrar que para diversos tipos de medidas μ (ou compactos K) podemos concluir que $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$, se $X = c_o(\mathbb{N})$ ou $X = \ell_p(\mathbb{N})$ $p \in]1,\infty[$. O teorema seguinte fornece mais uma situação na qual essa conclusão ainda é verdadeira.

7.18. <u>TEOREMA</u>. Seja μ uma medida de Borel regular não puramente atômica (não nula) num compacto K. Se existe $F \subset \text{supp}\,\mu$, F fechado separável com $\mu(F) > 0$ e $\mu(\{x\}) = 0$ $\forall x \in F$ então para $X = c_o(\mathbb{N})$, $X = \ell_p(\mathbb{N})$, $p \in]1,\infty]$ ou ainda X uniformemente convexo de dimensão infinita temos $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$.

<u>Prova</u>. Tomemos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso em F. Se $X = c_o(\mathbb{N})$ ou $X = \ell_p(\mathbb{N})$ e $1 < p < \infty$, consideremos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a base canônica de X. Se X é uniformemente convexo de dimensão infinita, tomemos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|e_n\|=1$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $A > 0$, $B > 0$ $q,r \in]1,\infty[$ tais que se $J \subset \mathbb{N}$ é finito então

$$A\Big(\sum_{n\in J}|a_n|^r\Big)^{1/r} \leq \Big\|\sum_{n\in J} a_n e_n\Big\| \leq B\Big(\sum_{n\in J}|a_n|^q\Big)^{1/q}$$

(para a existência ver [J]).

Seja $f: K \to X$ dada por $f(x_n) = e_n$ se $n\in\mathbb{N}$, $f(x) = 0$ se $x \notin \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Provemos que f é descontínua em $F-\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se $x\in F$ e $x \notin \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ então $f(x) = 0$ e como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em F e $\|f(x_n)\| = 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$, segue que f é descontínua em x. Como $\mu(F) > 0$ e F não contém átomos de μ temos $\mu(F - \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) > 0$ e por (4.38) $f \notin D(K,\mu,X)$. Mostremos que $f \in R(K,\mu,X)$.

Dado $\varepsilon > 0$, façamos $\delta = \varepsilon$ se $X = c_o(\mathbb{N})$;
$\delta = (\frac{\varepsilon^p}{2\mu(K)})^{1/(p-1)}$ se $X = \ell_p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$ e
$\delta = (\varepsilon B^{-1}\mu(K)^{-1}2^{-1/q})^{q/(q-1)}$ se X é uniformemente convexo. Para cada $x \in F$, temos $\mu(\{x\}) = 0$ e portanto por (4.10) existe F_x fechado regular μ-contínuo com $x \in \overset{o}{F}_x$ e $\mu(F_x) < \delta$. Como F é compacto, existem $F_1,\ldots,F_n$ fechados regulares μ-contínuos tais que $F \subset \bigsqcup_{i=1}^{n} \overset{o}{F}_i$, e $\mu(F_i) < \delta$ se $i=1,\ldots,n$. Sabemos, por (4.3 ii)) que se $\bigsqcup_{i=1}^{n} F_i \neq K$ então $\overline{\complement \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i}$ é um fechado regular que é μ-contínuo pois

$$\partial(\overline{\complement \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i}) \subset \partial(\complement \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i) = \partial(\bigsqcup_{i=1}^{n} F_i) \subset$$

$$\subset \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i - \bigsqcup_{i=1}^{n} \overset{o}{F}_i \subset \bigsqcup_{i=1}^{n} \partial F_i .$$

Com isso, temos que se $\bigsqcup_{i=1}^{n} F_i = K$ então $\{F_1,\ldots,F_n\}$ é uma cobertura de K por fechados regulares μ-contínuos e se $\bigsqcup_{i=1}^{n} F_i \neq K$ então $\{F_1,\ldots,F_n, \overline{\complement \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i}\}$ é uma cobertura por fechados regulares μ-contínuos. Vamos prosseguir a prova considerando esse segundo caso (para o primeiro caso, o argumento é semelhante).

De (4.15) decorre que existe uma μ-partição $\mathcal{P} = \{P_j\}_{j=1}^{m}$ tal que para cada $j = 1,\ldots,m$ temos $P_j \subset F_k$ para algum $k \in \{1,\ldots,n\}$ ou $P_j \subset \overline{\complement \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i}$ (neste caso $f_{|P_j} \equiv 0$ já que $F \subset \bigsqcup_{i=1}^{n} \overset{o}{F}_i \subset \overset{o}{\overbrace{\bigsqcup_{i=1}^{n} F_i}}$ e assim $P_j \subset \overline{\complement \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i} \subset \complement(F)$. Façamos

$S = \{j \in \{1,\dots,m\} : P_j \not\subset \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)}\}$. Se $j \in S$ temos então

$\mu(P_j) \leq \max_{k \in \{1,\dots,n\}} \mu(F_k) < \delta.$

Sejam $\left\{y_j\right\}_{j=1}^{m}$, $\left\{z_j\right\}_{j=1}^{m}$ com $y_j, z_j \in \overset{o}{P}_j$ se $j \in \{1,\dots,m\}$.

Então lembrando que $\overset{o}{P}_{j_1} \cap \overset{o}{P}_{j_2} = \emptyset$, se $j_1, j_2 \in \{1,\dots,m\}$ e $j_1 \neq j_2$

temos que:

1. Se $X = c_o(\mathbb{N})$ então

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} [f(y_j)-f(z_j)]\mu(P_j) \right\| = \left\| \sum_{j\in S} [f(y_j)-f(z_j)]\mu(P_j) \right\| \leq$$

$$\leq \max_{j\in S} \mu(P_j) \leq \delta = \varepsilon.$$

2. Se $X = \ell_p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$ então

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} [f(y_j)-f(z_j)]\mu(P_j) \right\|^p = \left\| \sum_{j\in S} [f(y_j)-f(z_j)]\mu(P_j) \right\|^p \leq \sum_{j\in S} 2\mu(P_j)^p$$

$$\leq 2\max_{j\in S} \mu(P_j)^{p-1} \sum_{j\in S} \mu(P_j) \leq 2\,\delta^{p-1}\mu(K)$$

$$= 2\left(\frac{\varepsilon^p}{2\mu(K)}\right)\mu(K) = \varepsilon^p$$

e portanto

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} [f(y_j)-f(z_j)]\mu(P_j) \right\| \leq \varepsilon.$$

3. Se X é uniformemente convexo então

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} [f(y_j)-f(z_j)]\mu(P_j) \right\| \leq B\left(\sum_{j\in S} 2\mu(P_j)^q\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq B2^{1/q} \max_{j\in\{1,\dots,m\}} \mu(P_j)^{(q-1)/q}\left(\sum_{j\in S}\mu(P_j)\right)^{1/q} \leq 2^{1/q}B\mu(K)\,\delta^{(q-1)/q} = \varepsilon .$$

Assim, por (4.31), $f \in R(K,\mu,X)$.

Provamos que $D(K,\mu,c_o(\mathbb{N})) \neq R(K,\mu,c_o(\mathbb{N}))$ e conseqüentemente, como $c_o(\mathbb{N})$ é isomorfo a um subespaço de $\ell_\infty(\mathbb{N})$, teremos também $D(K,\mu,\ell_\infty(\mathbb{N})) \neq R(K,\mu,\ell_\infty(\mathbb{N}))$.

7.19. <u>COROLÁRIO</u>. Se K é compacto, são equivalentes:

i) K é disperso;

ii) $D(K,\mu,c_o(\mathbb{N})) = R(K,\mu,c_o(\mathbb{N}))$ para toda μ de Borel regular em K;

iii) $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$ para toda μ de Borel regular em K e para todo X Banach.

<u>Prova</u>. Sabemos por (4.41) que i) $\Longrightarrow$ iii). É imediato que iii) $\Longrightarrow$ ii). Resta provar que ii) $\Longrightarrow$ i). Suponhamos K não disperso. Por (6.3) existe μ de Borel regular em K, μ não-atômica e não nula cujo suporte é um fechado separável. Por (7.18) (ou (7.14 a))) temos que $D(K,\mu,c_o(\mathbb{N})) \neq R(K,\mu,c_o(\mathbb{N}))$. Assim ii) $\Longrightarrow$ i).

7.20. <u>TEOREMA</u>. Seja μ uma medida de Borel regular em K. Se $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de espaços de Banach tal que $D(K,\mu,X_\gamma) = R(K,\mu,X_\gamma)$, $\forall\ \gamma \in \Gamma$ então tomando $X = (\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_1$ temos que $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$.

Prova. É análoga à de [R] para o caso $K = [0,1]$ e será omitida. Observamos que o teorema é uma conseqüência de (7.14) e do seu caso particular para $K = [0,1]$ e μ a medida de Lebesgue em $[0,1]$ (provado em [R]) se K e μ estão numa das situações consideradas em (7.14).

PROBLEMA

- Se μ é uma medida de Borel regular não puramente atômica num compacto K e se $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$ então $D([0,1],\lambda,X) = R([0,1],\lambda,X)$?

oOo

§8. MENSURABILIDADE DE FUNÇÕES RIEMANN INTEGRÁVEIS

Dada μ uma medida de Borel regular num compacto K, indicaremos por $\bar{\mu}$ o completamento de μ. Usaremos o mesmo símbolo λ para indicar a medida de Lebesgue nos borelianos de um intervalo $[a,b]$ ou seu completamento, isto é, a medida de Lebesgue na σ-álgebra dos Lebesgue mensuráveis de $[a,b]$.

Lembremos que se μ e uma medida numa σ-álgebra $\Sigma \subset \mathcal{P}(K)$, dizemos que uma função $f: K \to \mathbb{R}$ é μ-mensurável se $f^{-1}(]c,\infty[) \in \Sigma$ $\forall c \in \mathbb{R}$. Quando μ é completa, temos que f é μ-mensurável se e só se existem $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seqüência de funções do tipo $f_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}$ onde $k \in \mathbb{N}$, $E_i \in \Sigma$, $c_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \{1,\dots,k\}$ e $A \in \Sigma$ com $\mu(A) = 0$ tais que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall x \in \complement A$.

Sejam ν uma medida completa numa σ-álgebra $\Sigma \subset \mathcal{P}(K)$, X um Banach e $f: K \to X$. Diremos que f é ν-mensurável se existirem uma seqüência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções do tipo $f_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}$, onde $k \in \mathbb{N}$, $E_i \in \Sigma$, $c_i \in X$, $\forall i \in \{1,\dots,k\}$ e um conjunto $A \in \Sigma$ com $\nu(A) = 0$ tais que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in \complement A$.

Indicaremos por $M(K,\nu,X)$, o conjunto das $f: K \to X$ ν-mensuráveis.

Em [R], Rocha Filho propôs o seguinte problema:

PROBLEMA 2A — Classificar os espaços de Banach X que têm a seguinte propriedade:

P2A: Se $f: [a,b] \to X$ é Riemann-integrável então f é Lebesgue-mensurável.

É conhecido que $X = \mathbb{R}$ tem a propriedade acima. Em [R], foi provado que o mesmo vale para X separável e para $X = \ell_1(\Gamma)$, onde Γ é um conjunto qualquer. Lá, são apresentados exemplos de espaços que não têm a propriedade acima, como é o caso dos $\ell_p(\Gamma)$, para $1 < p < \infty$ e $|\Gamma| \geq c$. Em [D], foi provado que $X = C(K)$ para K diádico, verifica P2A.

Nosso objetivo, aqui, é estudar o problema mais geral que é o da mensurabilidade de funções $f \in R(K,\mu,X)$. O exemplo (8.1.a)) mostra que existe uma função $f: [0,1] \to \mathbb{R}$. Riemann-integrável mas não Borel-mensurável. Assim, propusemo-nos os seguintes problemas:

<u>PROBLEMA 2B</u> — Dada $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente, classificar os espaços de Banach X que têm a seguinte propriedade:

P2B: $R_N([a,b],\alpha,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$.

<u>PROBLEMA 2C</u> — Dados K compacto e μ medida de Borel regular em K, classificar os espaços de Banach X que têm a seguinte propriedade:

P2C: $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$.

Estaremos particularmente interessados na relação entre as questões propostas, isto é, em mostrar a equivalência entre P2A e P2B e em encontrar condições (sobre K ou μ) para que P2A e P2C sejam equivalentes. Observamos que o problema 2B não foi estudado em [He].

Em todo este parágrafo, X indicará um espaço de Banach.

8.1. EXEMPLOS.

a) Seja $K = [0,1]$ e seja F um subconjunto não boreliano do conjunto de Cantor. Como o conjunto de Cantor é um fechado de medida nula, então o conjunto dos pontos de descontinuidade de χ_F tem medida de Lebesgue nula e portanto existe $R\int_0^1 \chi_F(x)dx$. No entanto, χ_F não é Borel-mensurável.

b) Se μ é uma medida de Borel-regular puramente atômica num compacto K e f é uma função qualquer definida em K com valores em X então f é $\bar{\mu}$-mensurável. De fato, seja $A=\{x\in K: \mu(\{x\}) > 0\}$ (que é enumerável) e sejam $r\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $\{a_n\}_{n=1}^{r}$ seqüência de pontos distintos de K tais que $A = \{a_n: n\in\mathbb{N},\ n \leq r\}$. Como $f(x) = \sum_{n=1}^{r} f(a_n)\chi_{\{a_n\}}(x)$, $\forall\ x\in A$ e como $\bar{\mu}(\complement A) = \mu(\complement A) = 0$, então f é $\bar{\mu}$-mensurável.

8.2. PROPOSIÇÃO. Se μ é uma medida de Borel regular num compacto K então $D(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$.

Prova. Admitamos, por um momento, o resultado provado para o caso em que $\operatorname{supp}\mu = K$ e provemos o caso geral. Seja $f \in D(K,\mu,X)$. Por (4.46 b)) temos que $f|_{\operatorname{supp}\mu} \in D(\operatorname{supp}\mu,\tilde{\mu},X)$ onde $\tilde{\mu}$ é a restrição de μ aos borelianos de $\operatorname{supp}\mu$. Como $\operatorname{supp}\tilde{\mu} = \operatorname{supp}\mu$, então $f|_{\operatorname{supp}\mu} \in M(\operatorname{supp}\mu,\bar{\tilde{\mu}},X)$. Decorre facilmente daí que $f \in M(K,\bar{\mu},X)$.

A prova para o caso $\operatorname{supp}\mu = K$ está em [KR] e a idéia é a seguinte: Se $f \in D(K,\mu,X)$ tomemos $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência de μ-partições de K tal que para cada $n\in\mathbb{N}$ tenhamos $w(f,P_n) \leqq \frac{1}{n}$ e P_{n+1} refinamento de P_n (para a existência usamos (4.28) e (4.14)). Para cada $n\in\mathbb{N}$, escrevemos $P_n = \{ P_i^n : i\in\mathbb{N} \ \ i \leqq k_n\}$ de modo que se $P_i^{n+1} \subset P_j^n$ e $P_k^{n+1} \subset P_r^n$ onde $j < r$ então $i < k$ (isto é, ordeno os P_i^{n+1} de modo que os subconjuntos de P_1^n venham antes dos subconjuntos de P_2^n e assim por diante).

Como $\operatorname{supp}\mu = K$ então f é limitada (ver (4.36 c))). Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos $d_n: K \to [0,\infty[$ por

$$d_n(x) = \begin{cases} \operatorname{diam} f(P_1^n)\ , & \text{se } x \in P_1^n \\ \operatorname{diam} f(P_i^n)\ , & \text{se } x \in P_i^n - \bigcup_{j=1}^{i-1} P_j^n,\ i \in \{2,\dots,k_n\}\ . \end{cases}$$

Então $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência decrescente. Seja $d = \lim_{n\to\infty} d_n$. Pelo teorema da convergência dominada temos $\int_K d\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_K d_n d\mu$. Como para cada $n\in\mathbb{N}$

$$\int_K d_n d\mu = (\operatorname{diam} f(P_1^n))\,\mu(P_1^n) + \sum_{i=2}^{k_n} (\operatorname{diam} f(P_i^n))\,\mu(P_i^n - \bigcup_{j=1}^{i-1} P_j^n)$$

$\leqq \sum_{i=1}^{k_n} (\operatorname{diam} f(P_i^n))\,\mu(P_i^n) = w_\mu(f,P_n) < \frac{1}{n}$ então $\int_K d\,d\mu = 0$ e portanto $\mu(\{x\in K: d(x) \neq 0\}) = 0$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$ e para cada $i\in\{1,\dots,k_n\}$ tomamos $y_i^n \in f(P_i^n)$ e definimos $f_n: K \to X$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} y_1^n & \text{se } x \in P_1^n \\ y_i^n & \text{se } x\in P_i^n - \bigcup_{j=1}^{i-1} P_j^n \text{ e } i\in\{2,\dots,k\}\ . \end{cases}$$

Seja $A = \{x \in K: d(x) \neq 0\}$. Se $x \in \complement A$ então $d(x) = 0$ e portanto para cada $\varepsilon > 0$ existe n_o tal que se $n \geq n_o$ então $d_n(x) < \varepsilon$. Dado $n \geq n_o$, faço $i=1$ se $x \in P_1^n$ e se $x \notin P_1^n$, tomo $i \in \{2,\dots,k_n\}$ tal que $x \in P_i^n - \bigcup_{j=1}^{i-1} P_j^n$. Assim $f(x) \in f(P_i^n)$ e $f_n(x) = y_i^n \in f(P_i^n)$. Logo $\|f(x)-f_n(x)\| \leq \operatorname{diam} f(P_i^n) = d_n(x) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_o$. Portanto $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in \complement A$ e como $\bar{\mu}(A) = \mu(A) = 0$ então $f \in M(K,\bar{\mu},X)$.

8.3. <u>TEOREMA</u> (de Pettis). Sejam μ uma medida finita completa definida numa σ-álgebra de subconjuntos de um conjunto T e $f: T \to X$. São equivalentes:

a) f é μ-mensurável;

b) $x^* \circ f$ é μ-mensurável para todo $x^* \in X^*$ (isto é, f é fracamente μ-mensurável) e existe $A \subset T$ com $\mu(A) = 0$ tal que $f(T-A)$ é separável (isto é, f tem imagem μ-quase separável).

<u>Prova</u>. Ver [DU] Teorema 2 - Capítulo II - pág. 42.

8.4. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular num compacto K.

a) Seja $f: K \to X$. Então f tem imagem $\bar{\mu}$-quase separável se e só se f tem imagem μ-quase separável. De fato, uma das implicações é imediata. Para a outra, tomemos $f: K \to X$ com imagem $\bar{\mu}$-quase separável. Seja $A \subset K$, A $\bar{\mu}$-mensurável com $\bar{\mu}(A) = 0$ e $f(K-A)$ separável. Como $\bar{\mu}(A) = 0$, existe B boreliano, $B \supset A$ com $\mu(B) = 0$. Uma vez que $f(K-B) \subset f(K-A)$ temos $f(K-B)$ separável. Assim f tem imagem μ-quase separável.

b) Seja $f \in R(K,\mu,X)$. Então é fácil ver que para cada $x^* \in X^*$ temos que $x^* o f$ é Riemann-integrável (e portanto Darboux-integrável) em relação a μ. De (8.2) segue que $x^* o f$ é $\bar{\mu}$-mensurável para cada $x^* \in X^*$. Assim, usando (8.3) e a) temos que dada $f \in R(K,\mu,X)$, são equivalentes:

i) $f \in M(K,\bar{\mu},X)$;

ii) f tem imagem $\bar{\mu}$-quase separável;

iii) f tem imagem μ-quase separável.

Em tudo o que segue μ indicará uma medida de Borel regular num compacto K.

8.5. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Se f é $\bar{\mu}$-mensurável e $f \in R(K,\mu,X)$ então f é $\bar{\mu}$-Bochner integrável e a integral de Bochner de f em relação a $\bar{\mu}$ é $\overset{R}{\int_K} f d\mu$.

<u>Prova</u>. Sendo $f \in R(K,\mu,X)$, por (4.36 b)) f é limitada em $\operatorname{supp} \mu = \operatorname{supp} \bar{\mu}$. Assim, pelo teorema de Bochner, temos que f será $\bar{\mu}$-Bochner integrável já que f é $\bar{\mu}$-mensurável. Provemos que as integrais coincidem. Suponhamos inicialmente $\dim X < \infty$. Nesse caso, $f \in D(K,\mu,X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $\mathcal{P}_n = \left\{P_i^n\right\}_{i=1}^{i_n}$ μ-partição de K com $w(f,\mathcal{P}_n) < \frac{1}{n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $i \in \{1,\ldots,i_n\}$, escolhamos $x_i^n \in P_i^n$ e tomemos

$f_n = \sum_{i=1}^{i_n} f(x_i^n) \chi_{P_i^n}$. Então

$$\int_K \|f-f_n\| d\bar{\mu} \leq \sum_{i=1}^{i_n} \int_{P_i^n} \|f(x_i^n)-f\| d\bar{\mu} \leq \sum_{i=1}^{i_n} w(f,P_i^n)\mu(P_i^n) < \frac{1}{n} .$$

Logo $\quad \left\| \int_K f d\bar{\mu} - \sum_{i=1}^{i_n} f(x_i^n)\mu(P_i^n) \right\| < \frac{1}{n}$.

Como a desigualdade acima vale para toda escolha de $x_i^n \in P_i^n$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,\dots,i_n\}$, concluímos por (4.30) que $\int_K f d\bar{\mu} = {}^{R}\!\!\int_K f d\mu$.

Para o caso geral, tomemos $x^* \in X^*$. Temos então ${}^{R}\!\!\int_K x^* o f d\mu = \int_K x^* o f d\bar{\mu}$. Logo $x^*({}^{R}\!\!\int_K f d\mu) = x^*(\int_K f d\bar{\mu})$ $\forall x^* \in X^*$. Assim as integrais coincidem.

8.6. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Sejam μ, μ_1 e μ_2 medidas de Borel regulares em K, μ_1 não-atômica, μ_2 puramente atômica tais que $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Seja $A = \{x \in K: \mu_2(\{x\}) > 0\}$ (que é enumerável). Seja $f: K \to X$. Se f tem imagem μ_1-quase separável, tomando E boreliano de K com $\mu_1(E) = 0$ e $f(K-E)$ separável, temos que $E \cap \complement A$ é boreliano, $\mu(E \cap \complement A) = \mu_1(E) = 0$ e $f(K-(E \cap \complement A)) = f(K-E) \cup f(A)$ que é separável. Logo f tem imagem μ-quase-separável. Por outro lado, se $S \subset K$ é $\bar{\mu}_1$-mensurável, podemos tomar B e G borelianos de K e $D \subset G$ tais que $\mu_1(G) = 0$ e $S = B \cup D$, tendo assim que $S = B \cup (D \cap A) \cup (D \cap \complement A)$. Como $B \cup (D \cap A)$ é boreliano, $D \cap \complement A \subset G \cap \complement A$ e $\mu(G \cap \complement A) \leq \mu_1(G) + \mu_2(\complement A) = 0$ então S é $\bar{\mu}$-mensurável. Logo se f é $\bar{\mu}_1$-fracamente mensurável então f é $\bar{\mu}$-fracamente mensurável. De (8.4 a)) e (8.3) decorre que $M(K,\bar{\mu}_1,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$.

8.7. <u>PROPOSIÇÃO</u>. São equivalentes:

i) $\quad R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$;

ii) $\quad R(K,\mu,X) \cap B(K,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$ (onde lembramos que $B(K,X) = \{f: K \to X: f \text{ é limitada}\}$).

Prova. É imediato que i) $\Longrightarrow$ ii). Provemos que ii) $\Longrightarrow$ i). Suponhamos ii). Tomemos $f \in R(K,\mu,X)$. Por (4.36 b)) existe F fechado regular μ-contínuo tal que $\operatorname{supp}\mu \subset F$ e f é limitada em F. Seja $\tilde{f} = f\chi_F$. Então $\tilde{f}$ é limitada e $\tilde{f}|_F = f|_F$. Por (4.46) a) e c) temos que $\tilde{f} \in R(K,\mu,X)$ e por ii) temos que $\tilde{f} \in M(K,\bar{\mu},X)$. Como $\tilde{f} = f$ $\bar{\mu}$-q.s. então $f \in M(K,\bar{\mu},X)$. Logo temos i).

8.8. PROPOSIÇÃO. Seja $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. São equivalentes:

i) $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$;

ii) $R_N([a,b],\mu_\alpha,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$.

Prova i) $\Longrightarrow$ ii) pois por (5.17 i)) temos $R_N([a,b],\alpha,X) \subset R([a,b],\mu_\alpha,X)$.

ii) $\Longrightarrow$ i) Suponhamos ii). Por (8.7) basta provar que se $f \in R([a,b],\mu_\alpha,X) \cap B([a,b],X)$ então $f \in M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$. Mas isso decorre de (5.17 i)) e de ii).

8.9. PROPOSIÇÃO. Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Borel regulares em K, μ_1 não-atômica, μ_2 puramente atômica tais que $\mu = \mu_1+\mu_2$. Se $R(K,\mu_1,X) \subset M(K,\bar{\mu}_1,X)$ então $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$.

Prova. Usando (4.47 a)), a hipótese e (8.6) temos que $R(K,\mu,X) \subset R(K,\mu_1,X) \subset M(K,\bar{\mu}_1,X) \subset M(K,\mu,X)$, o que completa a prova.

Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Sabemos que existem α_s: $[a,b] \to \mathbb{R}$ e α_c: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescentes tais que $\alpha = \alpha_c + \alpha_s$, α_c é contínua e, indicando-se por $\{y_n : n \in I \subset \mathbb{N}\}$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de α, tem-se $\mu_{\alpha_s}(E) = \sum_{y_n \in E} \mu_{\alpha_s}(\{y_n\})$ para todo E boreliano de $[a,b]$. Assim, μ_{α_s} é puramente atômica, μ_{α_c} é não-atômica e $\mu_\alpha = \mu_{\alpha_c} + \mu_{\alpha_s}$ (ver [He] I.3.1 e I.3.3). Com essa notação temos:

8.10. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Se $R_N([a,b],\alpha_c,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_{\alpha_c},X)$ então $R_N([a,b],\alpha,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$.

<u>Prova</u>. Se $R_N([a,b],\alpha_c,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_{\alpha_c},X)$ então por (8.8) temos $R([a,b],\mu_{\alpha_c},X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_{\alpha_c},X)$. Por (8.9), $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$ e recorrendo novamente a (8.8), temos o resultado.

Nosso próximo Lema é o primeiro passo na direção de relacionar P2A e P2C. Apesar de tratar de um caso particular ($K = [0,1]$, $\mu = \lambda + \mu_2$ com μ_2 puramente atômica), ele será utilizado para mostrar que temos P2C $\Longrightarrow$ P2A para medidas não puramente atômicas em compactos.

8.11. <u>LEMA</u>. Seja $\nu = \lambda + \nu_2$ onde ν_2 é medida de Borel regular puramente atômica em $[a,b]$. São equivalentes:

i) $R([a,b],\nu,X) \subset M([a,b],\bar{\nu},X)$;

ii) $R([a,b],\lambda,X) \subset M([a,b],\lambda,X)$.

<u>Prova</u>. ii) $\Longrightarrow$ i). É conseqüência de (8.9).

i) $\Longrightarrow$ ii). Suponhamos que ii) não se verifique. Para simplificar faremos $a=0$ e $b=1$. Seja $f \in R([0,1],\lambda,X)$, $f \notin M([0,1],\lambda,X)$. Seja $\{a_j\}_{j\in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, o conjunto dos átomos pontuais de ν reunido com $\{0,1\}$, onde $a_0=0$ e $a_1=1$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ podemos conseguir uma seqüência $\left\{I_i^n\right\}_{i=1}^{k_n}$, $k_n \leq \infty$ de intervalos dois a dois disjuntos tais que $I_1^n = [0,d_1[$, $I_2^n =]c_2,d_2]$ onde $d_2=1$, $I_i^n =]c_i,d_i[$ se $i\in\mathbb{N}$, e $2<i\leq k_n$, $\sum_{i=1}^{k_n}\lambda(I_i^n) < \frac{1}{n}$, $\lambda(I_i^n)>0$ se $i\in\mathbb{N}$ $i\leq k_n$, $\{a_j\}_{j\in I} \subset \bigsqcup_{i=1}^{k_n} I_i^n$, $d_i \notin \{a_j\}_{j\in I}$, se $i\in\mathbb{N}$ e $1\leq i\leq k_n$, $i\neq 2$, $c_i \notin \{a_j\}_{j\in I}$, se $i\in\mathbb{N}$ e $2\leq i\leq k_n$.

Mostremos que, escolhidos para cada $n\in\mathbb{N}$, $\left\{I_i^n\right\}_{i=1}^{k_n}$ como acima, então existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que:

(1) $f([0,1]-(\bigsqcup_{i=1}^{k_{n_0}} I_i^{n_0} \cup B))$ não é separável, para cada $B\subset[0,1]$ com $\lambda(B)=0$.

De fato, se para cada $n\in\mathbb{N}$, existisse $B_n \subset [0,1]$ com $\lambda(B_n)=0$ e $f([0,1]-(\bigsqcup_{i=1}^{k_n} I_i^n \cup B_n))$ separável então

$$f([0,1]-\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\bigsqcup_{i=1}^{k_n} I_i^n \cup B_n)) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f([0,1]-(\bigsqcup_{i=1}^{k_n} I_i^n \cup B_n))$$ que é separável. Como $\lambda(\bigsqcup_{i=1}^{k_n} I_i^n \cup B_n) < \frac{1}{n}$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$ temos $\lambda(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigsqcup_{i=1}^{k_n}(I_i^n\cup B_n))=0$

e portanto f teria imagem λ-quase separável.

Fixemos então n_0 verificando (1). Para simplificar escreveremos k ao invés de k_{n_0} e I_i ao invés de $I_i^{n_0}$.

Seja $h: [0,1] \to X$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} f(d_i), \text{se} & t \in I_i \quad 1 \leqq i \leqq k, \ i \in \mathbb{N} \\ f(t), \text{ se} & t \notin \bigsqcup_{i=1}^{k} I_i \ . \end{cases}$$

Temos que h não tem imagem λ-quase separável já que vale (1) e

$$f([0,1]-(\bigsqcup_{i=1}^{k} I_i \cup B)) \subset h([0,1]-B) \quad \forall\, B \subset [0,1].$$

Conseqüentemente, h não tem imagem ν-quase separável.

Vamos prosseguir a prova supondo $k=\infty$. Para o caso $k < \infty$, a prova é praticamente a mesma, com adaptações na notação.

Mostremos que $h \in R([0,1],\nu,X)$. Observemos que, como f é limitada, h também é limitada. Além disso por (5.17 i)), $f \in R_N([0,1],\alpha,X)$ para $\alpha(t) = t$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\rho > 0$ tal que se $d = (t_o,t_1,...,t_r)$ é uma partição com diâmetro menor que que ρ e se $x_s,y_s \in [t_{s-1},t_s]$ $\forall s \in \{1,...,r\}$ então

$$\|\sum_{s=1}^{r} [f(x_s)-f(y_s)]\Delta t_s\| < \varepsilon/3.$$

Seja $M > 0$ com $\|h(x)\| \leqq M$ $\forall x \in [0,1]$. Tomemos $m_o > 1$ tal que $\sum_{i \geqq m_o} \nu_2(I_i) < \frac{\varepsilon}{6M}$ e $\lambda(I_i) < \rho/2$ se $i \geqq m_o$.

Para cada $i \in \{2,...,m_o\}$ temos que $\nu(\{c_i\}) = 0$ e portanto existe $\eta_i > 0$ tal que $c_i + \eta_i < d_i$, $c_i + \eta_i \notin \{a_j\}_{j \in I}$ e

$$\sum_{i=2}^{m_o} \nu([c_i, c_i + \eta_i]) < \frac{\varepsilon}{6M}.$$

Consideremos $P_1 = [0,d_1]$ e para cada $i \in \{2,\ldots,m_o\}$ tomemos $P_i = [c_i, c_i+\eta_i]$, $P_{m_o+i-1} = [c_i+\eta_i, d_i]$ (que são ν-contínuos). Como $\lambda(I_i) < \rho/2$ se $i \geq m_o$, é possível encontrar $\left\{P_i\right\}_{i=2m_o}^{m}$ intervalos ν-contínuos de modo que $\lambda(P_i)<\rho$ se $2m_o \leq i \leq m$, $\bigcup_{i=1}^{m} P_i = [0,1]$, $\overset{\circ}{P}_i \cap \overset{\circ}{P}_j = \emptyset$ se $i,j \in \{1,\ldots,m\}$, $i \neq j$, tais que para cada $i > m_o$ e para cada $j \in \{2m_o,\ldots,m\}$ tenhamos que se $]c_i,d_i[\cap P_j \neq \emptyset$ então $d_i \in P_j$.

Temos então que:

a) h é constante em P_i se $i=1$ ou $i \in \{m_o+1,\ldots,2m_o-1\}$;

b) se $x \in P_j$, $j \in \{2m_o,\ldots,m\}$ então existe $\bar{x} \in P_j$ tal que $h(x) = f(\bar{x})$. De fato, se $x \in P_j$ e $h(x) \neq f(x)$ então $x \in \bigcup_{i=1}^{k} I_i$, mas como $j \geq 2m_o > m_o+1 > 2$ temos que $x \notin \overset{\circ}{P}_1 = [0,d_1[$ e $x \notin \overset{\circ}{P}_2 \cup P_{m_o+1} =]c_2,1]$. Logo $x \in]c_i,d_i[$ para algum $i > 2$. Portanto $]c_i,d_i[\cap P_j \neq \emptyset$ e assim $i > m_o$ e portanto $d_i \in P_j$ e $h(x) = f(d_i) \in f(P_j)$. Temos assim que se $x_i, y_i \in P_i$ $i=1,\ldots,m$, então

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} [h(x_i)-h(y_i)]\nu(P_i)\right\| \leq \left\|\sum_{i=2}^{m_o} [h(x_i)-h(y_i)]\nu(P_i)\right\| +$$

$$+ \left\|\sum_{i=2m_o}^{m} [h(x_i)-h(y_i)]\nu(P_i)\right\| \leq 2M \sum_{i=2}^{m_o} \nu([c_i, c_i+\nu_i])$$

$$+\left\|\sum_{i=2m_o}^{m} [h(x_i)-h(y_i)]\lambda(P_i)\right\| + 2M \sum_{i=2m_o}^{m} \nu_2(P_i).$$

Como $\bigsqcup_{i=2m_o}^{m_o} P_i \subset \complement \bigsqcup_{i=1}^{m_o} I_i$ e como os P_i são ν-contínuos temos

$$\sum_{i=2m_o}^{m} \nu_2(P_i) \leq \sum_{i>m_o} \nu_2(I_i) < \frac{\varepsilon}{6M} .$$

Assim $\|\sum_{i=1}^{m} [h(x_i)-h(y_i)]\nu(P_i)\| < 2\frac{\varepsilon}{3} + \|\sum_{i=2m_o}^{m} [h(x_i)-h(y_i)]\lambda(P_i)\|$.

De b) e lembrando que $\lambda(P_i) < \rho$ se $i \in \{2m_o,\dots,m\}$ temos que

$\|\sum_{i=2m_o}^{m} [h(x_i)-h(y_i)]\lambda(P_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ e assim $\|\sum_{i=1}^{m} [h(x_i)-h(y_i)]\nu(P_i)\| < \varepsilon$.

Por (4.28), $h \in R([0,1],\nu,X)$.

8.12. LEMA. Sejam F e K espaços topológicos (Haussdorff) e $g: F \to K$ tal que $g(A)$ é boreliano de K, para todo A fechado de F e $g^{-1}(B)$ é borelinao de F para todo B boreliano de K (por exemplo, g contínua e F compacto). Sejam μ medida de Borel regular em K e ν medida de Borel regular em F tais que para cada E boreliano de K temos que $\mu(E) = 0$ se e só se $\nu(g^{-1}(E)) = 0$. Dada $f: K \to X$, seja $\tilde{f} = f\circ g: F \to X$. São equivalentes:

i) f tem imagem μ-quase separável;

ii) $\tilde{f}$ tem imagem ν-quase separável.

Prova. i) $\Longrightarrow$ ii). Se f tem imagem μ-quase separável tomemos B boreliano de K com $\mu(B) = 0$ e $f(K-B)$ separável. Temos então que $\nu(g^{-1}(B)) = 0$ e $\tilde{f}(F-g^{-1}(B)) \subset \tilde{f}(g^{-1}(\complement B)) \subset f(\complement B) = f(K-B)$ que é separável. Assim temos ii).

ii) $\Longrightarrow$ i). Se $\tilde{f}$ tem imagem ν-quase separável, tomemos A boreliano de F com $\nu(A) = 0$ e $\tilde{f}(F-A)$ separável. Fazendo $B = F-A$

temos $\nu(F-B) = \nu(A) = 0$, $\tilde{f}(B) = \tilde{f}(F-A)$ separável e B boreliano. Tomemos $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência de fechados de F com $B_n \subset B$ e $\nu(B-B_n) < \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Então $g(B_n)$ é boreliano e

$$\nu(F-B_n) = \nu(F-B) + \nu(B-B_n) < \frac{1}{n} .$$

Logo

$$\nu(g^{-1}(\complement g(B_n))) = \nu(\complement g^{-1}(g(B_n))) \leqq \nu(F-B_n) < \frac{1}{n} .$$

Assim

$$\nu(g^{-1}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement g(B_n)) = \nu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g^{-1}(\complement g(B_n))) = 0$$

e portanto $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement g(B_n)) = 0$. Como $f(\complement \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement g(B_n)) =$

$f(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} g(B_n)) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{f}(B_n) \subset \tilde{f}(B)$ que é separável, então f tem imagem μ-quase separável.

8.13. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Sejam F e K compactos, $g: F \to K$ contínua, μ medida de Borel regular em K e ν medida de Borel regular em F tais que $\mu(E) = \nu(g^{-1}(E))$ para todo E boreliano de K. Se $R(K,\mu,X) \not\subset M(K,\bar{\mu},X)$ então $R(F,\nu,X) \not\subset M(F,\bar{\nu},X)$.

<u>Prova</u>. Seja $f \in R(K,\mu,X)$, $f \notin M(K,\bar{\mu},X)$. Por (7.5) temos que $\tilde{f} = f\circ g \in R(F,\nu,X)$ e por (8.4 b)) e (8.12) temos que $\tilde{f}$ não tem imagem ν-quase separável. Por (8.4 b)) temos que $\tilde{f} \notin M(F,\bar{\nu},X)$.

8.14. <u>TEOREMA</u>. Seja μ uma medida de Borel regular não puramente atômica (não-nula) em K. Se $R([0,1],\lambda,X) \not\subset M([0,1],\lambda,X)$ então $R(K,\mu,X) \not\subset M(K,\bar{\mu},X)$.

<u>Prova</u>. Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Borel regulares em K, μ_1 não-atômica, μ_2 puramente atômica com $\mu = \mu_1+\mu_2$. Como $R([0,1],\lambda,X) \not\subset M([0,1],\lambda,X)$ e $\mu_1(K) \neq 0$ então

$R([0,\mu_1(K)],\lambda,X) \not\subset M([0,\mu_1(K)],\lambda,X)$. Sejam $g\colon K \to [0,\mu_1(K)]$ contínua e sobrejetora e λ_2 medida de Borel regular puramente atômica em $[0,\mu_1(K)]$ tais que $\lambda(E) = \mu_1(g^{-1}(E))$ e $\lambda_2(E)=\mu_2(g^{-1}(E))$ para todo E boreliano de $[0,\mu_1(K)]$ (ver (6.6)). Por (8.11), temos

que $R([0,\mu_1(K)],\lambda+\lambda_2,X) \not\subset M([0,\mu_1(K)],\overline{\lambda+\lambda_2},X)$ e por (8.12) temos que $R(K,\mu,X) \not\subset M(K,\bar{\mu},X)$.

Acabamos de provar então que para μ não puramente atômica temos que P2C $\Longrightarrow$ P2A. Adiante, daremos condições suficientes para a recíproca. Antes, algumas conseqüências dos resultados anteriores.

8.15. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja K um compacto.

a) Se K é disperso então $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$ para toda μ de Borel regular em K.

b) Se $R([0,1],\lambda,X) \not\subset M([0,1],\lambda,X)$, são equivalentes:

i) K é disperso;

ii) $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$ para toda μ de Borel regular em K.

<u>Prova</u>. a) (e i) $\Longrightarrow$ ii) de b)) decorre de (4.41) e de (8.2).
b) ii) $\Longrightarrow$ i). Se K não é disperso então existe μ de Borel regular não puramente atômica (não nula) em K (lembrar que existe $g\colon K \to [0,1]$ contínua e sobrejetora e usar (6.1)). Assim, se $R([0,1],\lambda,X) \not\subset M([0,1],\lambda,X)$, decorre de (8.14) que

$R(K,\mu,X) \not\subset M(K,\bar{\mu},X)$. Assim ii) $\Longrightarrow$ i).

8.16. <u>TEOREMA</u>. Seja K um compacto metrizável. Se μ é uma medida de Borel regular não puramente atômica (não nula) em K, são equivalentes:

i) $R([0,1],\lambda,X) \subset M([0,1],\lambda,X)$;

ii) $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$.

<u>Prova</u>. ii) $\Longrightarrow$ i). É (8.14).

i) $\Longrightarrow$ ii). Suponhamos ii) falso. Escrevendo $\mu = \mu_1+\mu_2$ onde μ_1 é não-atômica e μ_2 é puramente atômica, temos por (8.9) que $R(K,\mu_1,X) \not\subset M(K,\bar{\mu}_1,X)$. Assim, basta considerar o caso em que μ é não-atômica.

Tomemos então $f \in R(K,\mu,X)$, $f \notin M(K,\bar{\mu},X)$, f limitada (ver (8.7)). Suponhamos ainda $\mu(K) = 1$.

Seja η o conjunto dos irracionais de $[0,1]$. Por (6.8) existe $B \subset K$ um G_δ com $\mu(K-B)= 0$ e um homeomorfismo $h: \eta \to B \subset K$ tal que $\mu(E) = \lambda(h^{-1}(E))$ para todo $E \subset K$, E boreliano.

Seja $\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ uma μ-partição de K. Seja

$\mathcal{P}' = \left\{ \overline{\overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_i)}}} : \overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_i)}} \neq \emptyset \text{ , } i = 1,\dots,n \right\}$ (onde fechos e interiores são tomados em $[0,1]$).

Temos que:

a) $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{h^{-1}(P_i)}$ é um fechado de $[0,1]$ que contém η e portanto é igual a $[0,1]$. Por (4.5) temos que $[0,1] = \bigcup_{P\in\mathcal{P}'} P$.

b) Cada conjunto de $\mathcal{P}'$ é λ-contínuo. De fato, se $P = h^{-1}(P_i)$ para um certo $i \in \{1,\dots,n\}$ temos $\partial(\overline{\overset{\circ}{\overline{P}}}) \subset \partial(\overline{P})$. Mas se $x \in \partial(\overline{P})$ e V é vizinhança aberta de x então $V \cap \complement\overline{P} \neq \emptyset$, isto é $V - \overline{P}$ é aberto não vazio. Logo existe $y \in \eta \cap (V-\overline{P}) \subset \eta \cap (V-P) = \eta \cap V \cap \complement P$. Por outro lado $V \cap \overline{P} \neq \emptyset$ e portanto, como $P \subset \eta$, temos $V \cap P = V \cap P \cap \eta \neq \emptyset$. Temos assim que se $x \notin \mathbb{D}$ e $x \in \partial(\overline{P})$ então $x \in \partial_\eta(P)$. Logo

$$(1) \qquad \partial(\overline{\overset{\circ}{\overline{P}}}) \subset \partial(\overline{P}) \subset \mathbb{D} \cup \partial_\eta(P).$$

Como $\partial_\eta(P) = \partial_\eta(h^{-1}(P_i \cap B)) \subset h^{-1}(\partial_B(P_i \cap B))$ então

$\lambda(\partial_\eta(P)) \leq \mu(\partial_B(P_i \cap B)) \leq \mu(\partial P_i) = 0$, sendo a última desigualdade verdadeira, pois se $x \in \partial_B(P_i \cap B)$ então dada V vizinhança de x em K temos $V \cap B \cap P_i \neq \emptyset$ e $V \cap B \cap \complement P_i \neq \emptyset$. Logo $V \cap P_i \neq \emptyset$ e $V \cap \complement P_i \neq \emptyset$. Assim $\partial_B(P_i \cap B) \subset \partial P_i$. Com isso, por (1) tem-se que $\lambda(\partial(\overline{\overset{\circ}{\overline{P}}})) \leq \lambda(\partial_\eta(P)) = 0$, isto é, $\overline{\overset{\circ}{\overline{P}}} = \overline{\overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_i)}}}$ é λ-contínuo.

c) $\lambda(\overline{\overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_i)}}} \cap \overline{\overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_j)}}}) = 0$ se $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$.

De fato, temos que $\overline{h^{-1}(P_i)} \cap \eta = h^{-1}(P_i)$ já que $h^{-1}(P_i)$ é fechado em η. Assim

$$\lambda(\overline{h^{-1}(P_i)} \cap \overline{h^{-1}(P_j)} \cap \eta) = \lambda(h^{-1}(P_i) \cap h^{-1}(P_j)) =$$
$$= \mu(P_i \cap P_j) = 0$$

e portanto $\lambda(\overline{\overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_i)}}} \cap \overline{\overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_j)}}}) = 0$

Temos então que $\mathcal{P}'$ é uma λ-partição de $[0,1]$.

Seja $\tilde{f} = f \circ h\colon \eta \to X$. Vamos definir $\tilde{\tilde{f}}\colon [0,1] \to X$ da seguinte maneira: Se $t \in \eta$, fazemos $\tilde{\tilde{f}}(t) = \tilde{f}(t)$. Se $t \in \mathbb{Q}$, $t \neq 0$, escolhemos $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência crescente de irracionais tal que $\lim_{n\to\infty} i_n = t$. Como K é métrico, podemos (passando para uma subseqüência) conseguir ainda que exista $\lim_{n\to\infty} h(i_n) = a_t \in K$. Fazemos então $\tilde{\tilde{f}}(t) = f(a_t)$. Tomamos ainda $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \eta$ seqüência decrescente tal que $\lim_{n\to\infty} i_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} h(i_n) = a_o$ exista e fazemos $\tilde{\tilde{f}}(0) = f(a_o)$. Como f não tem imagem μ-quase separável, decorre de (8.12) que $\tilde{f}$ não tem imagem λ-quase separável e como $\tilde{f}$ e $\tilde{\tilde{f}}$ coincidem em η temos que $\tilde{\tilde{f}}$ não tem imagem λ-quase separável.

Provemos que $\tilde{\tilde{f}} \in R([0,1],\lambda,X)$. Como $f \in R(K,\mu,X)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{P} = \left\{P_i\right\}_{i=1}^{n}$ μ-partição de K tal que $\operatorname{diam} S_\mu(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Tomemos então $\mathcal{P}'$ construída a partir de $\mathcal{P}$ como no início da prova.

Se $t \in \overline{\overline{h^{-1}(\overset{o}{P_i})}} \cap \eta$ então como

$\overline{\overline{h^{-1}(\overset{o}{P_i})}} \cap \eta \subset \overline{h^{-1}(P_i)} \cap \eta = h^{-1}(P_i)$ temos que $t \in h^{-1}(P_i) \cap \eta$. Logo $h(t) \in P_i$ e fazendo $x = h(t)$ temos que $\tilde{\tilde{f}}(t) = \tilde{f}(t) = f(h(t)) = f(x)$ e $x \in P_i$.

Se $t \in \overset{o}{\overline{\overset{o}{\overline{h^{-1}(P_i)}}}} \cap \mathbb{Q} \subset \overset{o}{\overline{h^{-1}(P_i)}} \cap \mathbb{Q}$ e $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a seqüência escolhida para a definição de $\tilde{\tilde{f}}(t)$ então para n suficientemente grande temos que

$i_n \in \overset{o}{\overline{h^{-1}(P_i)}} \cap \eta \subset \overline{h^{-1}(P_i)} \cap \eta = h^{-1}(P_i)$ e portanto $h(i_n) \in P_i$.

Assim $\lim_{n\to\infty} h(i_n) = a_t \in P_i$ e $\tilde{\tilde{f}}(t) = f(a_t)$.

Assim, se $J = \{i \in \{1,\dots,n\}\colon \overset{o}{\overline{h^{-1}(P_i)}} \neq \emptyset\}$ e se tomamos

$\{t_i\}_{i\in J}$, $\{s_i\}_{i\in J}$ com $t_i, s_i \in \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_i)}}}}$, $\forall i \in J$ então existirão $\{x_i\}_{i\in J}$ e $\{y_i\}_{i\in J}$ com $x_i, y_i \in P_i$ $\forall i\in J$ tais que $\tilde{\tilde{f}}(t_i) - \tilde{\tilde{f}}(s_i) = f(x_i) - f(y_i)$. Como vimos na prova de b), para cada $i\in J$, $\overline{h^{-1}(P_i)}$ é λ-contínuo e como $F - \overset{\circ}{\overline{F}} \subset \partial F, \forall F \subset [0,1]$

temos $\lambda(\overline{\overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_i)}}}) = \lambda(\overline{h^{-1}(P_i)}) = \lambda(\overline{h^{-1}(P_i)} \cap \eta) = \lambda(h^{-1}(P_i)) = \mu(P_i)$.

Logo se $t_i, s_i \in \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_i)}}}}$ $\forall$ $i\in J$, temos

$\| \sum_{i\in J} [\tilde{\tilde{f}}(t_i) - \tilde{\tilde{f}}(s_i)]\lambda(\overline{\overset{\circ}{\overline{h^{-1}(P_i)}}}) \| \leq \text{diam } S_\mu(f,P) < \varepsilon$. Por (4.31), $\tilde{\tilde{f}} \in R([0,1],\lambda,X)$.

8.17. <u>COROLÁRIO</u>. Se μ é uma medida de Borel regular não puramente atômica (não nula) em K tal que supp μ é metrizável, são equivalentes:

i) $R([0,1],\lambda,X) \subset M([0,1],\lambda,X)$;

ii) $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$.

<u>Prova</u>. ii) $\Longrightarrow$ i). É (8.14).

i) $\Longrightarrow$ ii). Se ii) não se verifica, existe $f \in R(K,\mu,X)$, $f \notin M(K,\bar{\mu},X)$. Seja $g = f|_{\text{supp }\mu}$. Por (4.46 a)) $g \in R(\text{supp}\mu,\tilde{\mu},X)$, onde $\tilde{\mu}$ é a restrição de μ ao supp μ . Como f não tem imagem μ-quase separável (ver (8.4 b))) então g não tem imagem $\tilde{\mu}$-quase separável. Assim, por (8.4 b)), $g \notin M(\text{supp}\mu,\bar{\tilde{\mu}},X)$. Logo $R(\text{supp}\mu,\tilde{\mu},X) \not\subset M(\text{supp}\mu,\bar{\tilde{\mu}},X)$. Sendo supp$\mu$ metrizável, recorrendo a (8.16) temos que i) não se verifica.

8.18. COROLÁRIO. Se K é um compacto de Eberlein e μ é uma medida de Borel regular não puramente atômica (não nula) em K são equivalentes:

i) $R([0,1],\lambda,X) \subset M([0,1],\lambda,X)$;

ii $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$.

Prova. Basta aplicar (8.17) lembrando que supp μ é metrizável (ver [Li] teorema 4.3 e [Ro 1] teorema 4.5 a)).

8.19. COROLÁRIO. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente com μ_α não puramente atômica (não nula). São equivalentes:

i) $R([0,1],\lambda,X) \subset M([0,1],\lambda,X)$;

ii) $R([a,b],\mu_\alpha,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$;

iii) $R_N([a,b],\alpha,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$;

iv) $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$.

Prova ii) e iii) são equivalentes por (8.8).

i) e ii) são equivalentes por (8.16).

Suponhamos iv). De acordo com (5.10 i)) temos $R_N([a,b],\alpha,X) \subset R_\sigma([a,b],\alpha,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$ e portanto temos iii).

Vamos provar que iii) $\Longrightarrow$ iv).

É fácil ver que para provar iv) é suficiente mostrar que $R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B([a,b],\alpha) \subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X)$ já que se $h \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$, existe $g \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$ limitada com $g = h$, $\bar{\mu}_\alpha$-q.s.

Suponhamos iii). Decorre da equivalência entre i) e iii) aplicada a α e α_c que iii) é equivalente a $R_N([a,b],\alpha_c,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_{\alpha_c},X)$. Por (5.10 i)) temos que

$$R_\sigma([a,b],\alpha_c,X) \cap B([a,b],X) \subset R_N([a,b],\alpha_c,X) \subset M([a,b],\bar{\mu}_{\alpha_c},X).$$

Decorre, então do item c) da prova de (7.16) e de (8.6) que

$$\begin{aligned} R_\sigma([a,b],\alpha,X) \cap B([a,b],X) &\subset R_\sigma([a,b],\alpha_c,X) \cap B([a,b],X) \\ &\subset M([a,b],\bar{\mu}_{\alpha_c},X) \\ &\subset M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,X) \end{aligned}$$

o que completa a prova.

Mostramos, então, que para K compacto de Eberlein e μ não puramente atômica em K, ou mais geralmente para K compacto e μ não puramente atômica com supp μ metrizável, temos que P2A e P2C são equivalentes. Além disso, para $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente com μ_α não puramente atômica temos que P2A e P2B são equivalentes.

8.20. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Como conseqüência dos resultados que acabamos de obter, dos resultados de [R], [D], [MR] e dos resultados do §2 temos, por exemplo, que:

I. Se $X = \ell_\infty(\mathbb{N})$ ou $X = c_o(\Gamma)$ ou $X = \ell_p(\Gamma)$ para $p \in]1,\infty]$ e $|\Gamma| \geq c$, ou mais geralmente se X é uniformemente convexo com dens $X \geq c$, então $R(K,\mu,X) \not\subset M(K,\bar{\mu},X)$ para todo compacto K e toda μ de Borel regular não puramente atômica (não nula) em K.

II. Assumindo a hipótese do contínuo temos que se $X = C(T)$, onde T é compacto de Eberlein não metrizável ou se $X = C(T)^*$ onde T não é separável em medida então $R(K,\mu,X) \not\subset M(K,\bar{\mu},X)$, para todo compacto K e toda μ de Borel regular não puramente atômica (não nula) em K.

III. Se X é um espaço de Banach com base simétrica generalizada, dens $X \geq c$ e X não é isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$ então $R(K,\mu,X) \not\subset M(K,\bar{\mu},X)$ para todo compacto K e toda μ de Borel regular não puramente atômica (não nula) em K.

O próximo teorema generaliza o resultado obtido para $K = [0,1]$ e $\mu = \lambda$, em [D]. Para a prova precisaremos de um resultado sobre operadores de Darboux, assunto esse, que trataremos no §9.

8.21. <u>TEOREMA</u>. Seja $X = C(T)$ onde T é um compacto diádico. Então, para todo compacto K e toda medida μ de Borel regular em K temos que $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$.

<u>Prova</u>. Sabemos que $C(T)$ é isomorfo a um subespaço de $C(\{0,1\}^m)$ para algum cardinal m. Assim basta provar o teorema para $X = C(\{0,1\}^m)$. É conhecido (ver por exemplo [D] 1.5.2) que a natural inclusão $i: C(\{0,1\}^m) \to L_1(\{0,1\}^m) = Y$ é 1-somante. Seja $f \in R(K,\mu,X)$. Por (9.13 iii)) e (8.2) temos que

$i(f) \in M(K,\bar{\mu},Y)$. Logo por (8.4) existe $E \subset K$ boreliano com $\mu(F) = 0$ e $iof(K-E)$ separável. Por [D] teorema 3.1.1 temos que $f(K-E)$ é separável. Por (8.4) temos que $f \in M(K,\bar{\mu},X)$.

8.22. TEOREMA. $R(K,\mu,\ell_1(\Gamma)) \subset M(K,\bar{\mu},\ell_1(\Gamma))$ para todo compacto K, para toda μ de Borel regular em K e para todo conjunto Γ.

Prova. Decorre de (7.17 I) e (8.2) ou de (8.21), se observarmos que a bola do dual de $\ell_1(\Gamma)$ com a topologia w* é um compacto diádico.

8.23. OBSERVAÇÃO. Se μ é uma medida de Borel regular num compacto K e se supp μ é metrizável então decorre de (8.1 a)), [MR] Teorema 2 e (8.17) que se $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de espaços de Banach tal que $R(K,\mu,X_\gamma) \subset M(K,\bar{\mu},X_\gamma)$ $\forall\ \gamma\in\Gamma$ então para $X = (\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_1$ temos que $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$.

PROBLEMAS

- O resultado citado na observação (8.23) vale independente da hipótese "supp μ metrizável"?
- Se μ é uma medida de Borel regular (não puramente atômica) num compacto K e se $R([0,1],\lambda,X) \subset M([0,1],\lambda,X)$ então $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$?

oOo

CAPÍTULO III

§9. OPERADORES DE DARBOUX

O conceito de operador de Darboux foi introduzido por Pelczynski e Rocha Filho. Um resumo dos resultados por eles obtidos sobre esses operadores está em [PR]. Lembramos que um operador linear contínuo $T: X \to Y$ é chamado operador de Darboux se para cada $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável tem-se $T \circ f: [0,1] \to Y$ Darboux-integrável.

Neste parágrafo, obteremos, para operadores, resultados análogos a (1.10), (1.4) e (1.14), que garantem que quando um operador linear contínuo $T: X \to Y$ não é um operador de Darboux, esse fenômeno é sempre causado por um tipo especial de função $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável ou ainda por uma seqüência básica de X ou por algum subespaço separável de X.

Como visto em [D], resultados sobre operadores de Darboux fornecem resultados sobre o problema $R(X) \subset M(X)$. Nosso interesse em estudar os problemas $D(K,\mu,X) = R(K,\mu,X)$ e $R(K,\mu,X) \subset M(K,\bar{\mu},X)$ nos conduziu ao estudo de operadores, que chamaremos de operadores de Darboux em relação a μ e que definiremos em (9.2). Para esses operadores, generalizamos os resultados de [PR].

9.1. <u>NOTAÇÕES</u>. X e Y indicarão espaços de Banach. Adotaremos as seguintes notações:

$L(X,Y) = \{T: X \to Y : T$ é linear e contínuo$\}$;

$K(X,Y) = \{T \in L(X,Y): T$ é compacto$\}$;

$WK(X,Y) = \{T \in L(X,Y): T$ é fracamente compacto$\}$;

$DP(X,Y) = \{T \in L(X,Y): T$ é um operador de Dunford-Pettis$\}$

(lembramos que $T \in L(X,Y)$ é chamado operador de Dunford-Pettis se $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = 0$ sempre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente a zero);

$\Pi_p(X,Y) = \{T \in L(X,Y): T$ é um operador p-somante $\}$ ($p \in [1,\infty[$)

(lembramos que $T \in L(X,Y)$ é p-somante se existe $M > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $x_1,\dots,x_n \in X$ temos

$\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p \leq M \sup \{\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p : x^* \in X^*$ e $\|x^*\| \leq 1\})$.

9.2. <u>DEFINIÇÃO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular num compacto K. Dizemos que $T \in L(X,Y)$ é um operador de Darboux em relação a μ se para cada $f \in R(K,\mu,X)$ temos que $T\circ f \in D(K,\mu,Y)$.

Indicaremos por $D(K,\mu,X,Y)$ o conjunto de todos os operadores $T \in L(X,Y)$ que são operadores de Darboux em relação a μ .

9.3. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Sejam μ uma medida de Borel regular num compacto K e $T \in L(X,Y)$. São equivalentes:

i) $T \in D(K,\mu,X,Y)$;

ii) para cada $f \in R(K,\mu,X) \cap B(K,X)$ tem-se que $T\circ f \in D(K,\mu,Y)$.

Prova. Análoga à de (7.2). De fato, só temos que provar ii) $\Longrightarrow$ i). Se i) não se verifica, existe $f \in R(K,\mu,X)$ tal que $T \circ f \notin D(K,\mu,Y)$. Tomando $\tilde{f}$ como em (7.2) temos que $\tilde{f} \in R(K,\mu,X) \cap B(K,X)$, mas $T \circ \tilde{f} \notin D(K,\mu,Y)$ e assim ii) não se verifica.

9.4. OBSERVAÇÃO. Seja μ medida de Borel regular num compacto K.

a) É imediato que se $T \in L(X,Y)$ e $f \in R(K,\mu,X)$ então $T \circ f \in R(K,\mu,Y)$ (e também que se $f \in D(K,\mu,X)$ então $T \circ f \in D(K,\mu,Y)$).

b) É fácil ver que se X,Y,Z,W são espaços de Banach, $T \in D(K,\mu,X,Y)$, $F \in L(Z,X)$ e $S \in L(Y,W)$ então $S \circ T \circ F \in D(K,\mu,Z,W)$.

c) $D(K,\mu,X,Y)$ é um subespaço vetorial fechado de $L(X,Y)$. Isto decorre de (9.3) e de (4.22 ii)).

9.5. COROLÁRIO. Sejam $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente e $T \in L(X,Y)$. São equivalentes:

i) $T \in D([a,b],\mu_\alpha,X,Y)$;

ii) para cada $f \in R_N([a,b],\alpha,X)$ tem-se que $T \circ f \in D_N([a,b],\alpha,Y)$.

Prova. Análoga à de (7.3) usando (9.3).

9.6. PROPOSIÇÃO. Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Borel regulares em K, μ_1 não-atômica, μ_2 puramente atômica. Seja $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Então temos:

i) $D(K,\mu_2,X,Y) = L(X,Y)$.

ii) $D(K,\mu_1,X,Y) \subset D(K,\mu,X,Y)$.

Prova i) Decorre de (9.4 a)) e de (4.41).

ii) Análoga à de (7.4).

Os resultados seguintes são os análogos a (1.10), (1.4) e (1.14) para operadores. Daremos apenas uma indicação do roteiro a seguir para demonstrá-los: trata-se simplesmente de adaptar demonstrações do §1.

9.7. PROPOSIÇÃO: Seja $T \in L(X,Y)$ tal que $T \notin D([0,1],\lambda,X,Y)$. Se D é um subconjunto enumerável de $[0,1]$, denso em $[0,1]$ então existe $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que $f(t) = 0$ se $t \notin D$ e $\|Tof(t)\| = 1$, se $t \in D$.

Prova. Proceder como em (1.10). Para isso, observar inicialmente que se $T \in L(X,Y)$ e $T \notin D([0,1],\lambda,X,Y)$ então existem $A \subset \{\frac{1}{2^n}: n \in \mathbb{N},\ i \in \{0,1,\ldots,2^n\}\}$ e $h: [0,1] \to X$ Riemann integrável tais que Toh não é Darboux integrável, $h(x) = 0$ se $x \notin A$ e $\|Toh(x)\| = 1$ se $x \in A$ (ver a prova de (1.3)). Em seguida, seguir os passos de (1.6) para mostrar que se $T \in L(X,Y)$ e $T \notin D([0,1],\lambda,X,Y)$ então existem $D \subset [0,1]$ enumerável denso e $g: [0,1] \to X$ Riemann-integrável com $g(x) = 0$ se $x \notin D$ e $\|Tog(x)\| = 1$ se $x \in D$ (e portanto Tog não é Darboux-integrável). Repetir o argumetno da prova de (1.3) para mostrar que, a partir de g, podemos conseguir $h: [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que $\|Toh(x)\| = 1$ se x é racional diádico e $h(x) = 0$, caso contrário e portanto Toh não é Darboux-integrável. Agora, a partir dessa h construir f exatamente como em (1.10), alterando apenas a escolha de $x_1,\ldots,x_{n_1}$.

9.8. PROPOSIÇÃO. Seja $T \in L(X,Y)$. São equivalentes:

i) $T \in D([0,1],\lambda,X,Y)$;

ii) $T|_Z \in D([0,1],\lambda,Z,Y)$; para todo Z subespaço separável de X.

Prova. Análoga a de (1.4).

9.9. PROPOSIÇÃO. Se $T \in L(X,Y)$ e $T \notin D([0,1],\lambda,X,Y)$ então existe uma seqüência básica $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de X tal que:

i) A função $F\colon [0,1] \to X$ que verifica a $F(\frac{2i+1}{2^{n+1}}) = x_{2^n+i}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\, i \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$, $F(\frac{1}{2}) = x_1$ e que se anula nos outros pontos de $[0,1]$ é Riemann-integrável;

ii) $\|T(x_k)\| = 1$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$ (e portanto $T\circ F\notin D([0,1],\lambda,Y)$).

Se X tem base de Schauder $\mathcal{B}$ então podemos ainda conseguir $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ como acima que é também uma base de blocos de $\mathcal{B}$.

Prova. Por (9.8), temos que existe um subespaço Z de X, Z separável tal que $T|_Z \notin D([0,1],\lambda,X,Y)$. Com isso, basta considerar X separável. Podemos supor então $X \subset C([0,1])$. Como $T(X)$ é, então, separável, podemos supor $T(X) \subset \ell_\infty(\mathbb{N})$. Com isso, existe $\tilde{T} \in L(C([0,1]),\ell_\infty(\mathbb{N}))$ tal que $\tilde{T}|_X = T$. De acordo com (9.7), podemos tomar $D \subset [0,1]$ enumerável denso em $[0,1]$ e $g\colon [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que $g(t) = 0$ e se $t \notin D$ e $\|T\circ g(t)\| = 1$, se $t \in D$. Tomemos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, M e $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como em (1.14). Como em (1.14) temos que, para cada $a,b \in [0,1]$ com $a < b$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t \in\,]a,b[-D$ onde $P_n\circ g$ é contínua (e $P_n og(t) = 0$). Como D é denso, para cada $a,b \in [0,1]$, com $a < b$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $\varepsilon > 0$ existem $t \in]a,b[-D$ e $s \in]a,b[\cap D$ tais que $\|P_n og(s) - P_n og(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e portanto $\|P_n og(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Além disso, como $s \in D$, temos $\|\tilde{T}og(s)\| = 1$.

Façamos $I_1 =]0,1[$, $I_2 =]0,\frac{1}{2}[, \ldots, I_{2^n+i} =]\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}[$, $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_{2^n+i} = \frac{2i+1}{2^{n+1}}$ se $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$. Procedendo por indução, como na prova de (1.14), conseguimos seqüências $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de naturais e $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de pontos de $[0,1]$ com $n_1 < n_2 < ,\ldots$ e $s_k \in I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|\tilde{T}og(s_k)\| = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

$$\|P_{n_{k-1}} og(s_k)\| < \frac{1}{2^{k+2}M(\|\tilde{T}\|+1)} \;, \; \forall\, k \in \mathbb{N}\,,\; k > 1\,,$$

$$\|g(s_k) - P_{n_k} og(s_k)\| < \frac{1}{2^{k+2}M(\|\tilde{T}\|+1)} \;, \; \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Façamos $f(m_1) = P_{n_1} og(s_1)$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, façamos $f(m_k) = (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(g(s_k))$. Então $\|\tilde{T}of(m_k)\| > \frac{1}{2}$ e $\|f(m_k) - g(s_k)\| < \frac{1}{2^{k+1}M}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

De fato, fazendo $n_o = 0$ e $P_0 \equiv 0$ temos

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}of(m_k)\| &\geq \|\tilde{T}og(s_k)\| - \|\tilde{T}og(s_k) - \tilde{T}o(P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(g(s_k))\| \\ &\geq 1 - \|\tilde{T}\|\, \|g(s_k) - (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(g(s_k))\| \\ &> 1 - \frac{1}{2^{k+1}M} > \frac{1}{2}\,, \forall k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

e também

$$\|f(m_k)-g(s_k)\| \leq \|\mathbb{P}_{n_{k-1}} o g(s_k)\| + \|\mathbb{P}_{n_k} o g(s_k)-g(s_k)\|$$

$$< \frac{1}{2^{k+1}M}\ , \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se t não é um dos m_k, fazemos $f(t) = 0$.

Seja h como em (1.14). Então h é Riemann-integrável, mas como $\|\tilde{T}oh(m_k)\| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, temos que $\tilde{T}oh$ não é Darboux-integrável. Além disso, como em (1.14) temos que f é Riemann-integrável.

Se $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é base de X, façamos $F(x) = \Theta(x)f(x)$, onde $\Theta(x) = 0$ se $f(x) = 0$ e $\Theta(x) = \frac{1}{\|Tof(x)\|}$ se $f(x) \neq 0$. Lembrando que se $f(x) \neq 0$ então $\|Tof(x)\| = \|\tilde{T}of(x)\| > \frac{1}{2}$ temos por (1.2 b)) que F é Riemann-integrável e pela nossa construção fazendo $x_k = F(m_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ temos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é base de blocos de $\mathcal{B}$ com $\|T(x_k)\| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, o que completa a prova da segunda afirmação.

Para provar a primeira afirmação, tomamos $x_k = h(m_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Como na prova de (1.14) temos o resultado lembrando que $\|T(x_k)\| = \|Toh(m_k)\| = \|\tilde{T}oh(m_k)\| = 1$.

9.10. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular num compacto K. Então $D([0,1],\lambda,X,Y) \subset D(K,\mu,X,Y)$.

<u>Prova</u>. Análoga à de (7.13). De fato, por (9.6) podemos supor μ não-atômica (e $\mu(K) = 1$). Se $T \notin D(K,\mu,X,Y)$ então por (9.3) existe $f \in R(K,\mu,X) \cap B(K,X)$ tal que $Tof \notin D(K,\mu,Y)$. Como

$Tof \in R(K,\mu,Y)$ e $Tof \notin D(K,\mu,Y)$, por (7.1), existe $\delta > 0$ tal que, sendo $P = \{x \in K: w(Tof,x) > \delta\}$ temos $\mu(P) > 0$. Definindo, agora, g como na prova de (7.13) e procedendo como lá, mostramos que $g \in R([0,1],\lambda,X)$ mas $Tog \notin D([0,1],\lambda,Y)$. Assim $T \notin D([0,1],\lambda,X,Y)$. Logo $D([0,1],\lambda,X,Y) \subset D(K,\mu,X,Y)$.

9.11. PROPOSIÇÃO. Se μ é uma medida num compacto K verificando as hipóteses de (7.6) então $D([0,1],\lambda,X,Y) = D(K,\mu,X,Y)$ para todo Banach X e todo Banach Y. Conseqüentemente se μ é uma medida de Borel regular num compacto K e se uma das condições a), b) ou c) abaixo se verifica, então $D([0,1],\lambda,X,Y) = D(K,\mu,X,Y)$ para todo Banach X e todo Banach Y.

a) μ é não-atômica não-nula e existe $F \subset K$ fechado separável com $\mu(F) > 0$;

b) μ é não puramente atômica (não-nula) e K é diádico (ou existe F fechado diádico com $\operatorname{supp} \mu \subset F \subset K$);

c) μ é não puramente atômica (não-nula) e K é localmente conexo (ou existe F fechado localmente conexo com $\operatorname{supp} \mu \subset F \subset K$).

Prova. Para provar a primeira afirmação, procederemos como em (7.6), usando (9.7) ao invés de (1.10). Para simplificar supomos $\mu_1(K) = 1$ e tomamos $\mu_1, \mu_2, g, \lambda'$ e D como em (7.6) e $A \subset [0,1]$ enumerável, denso em $[0,1]$ com $g(D) \subset A$. Se $T \notin D([0,1],\lambda,X,Y)$, por (9.7), existe $f: [0,1] \to X$ Riemann-integrável tal que $\|Tof(x)\| = 1$ $\forall x \in A$ e $f(x) = 0$ se $x \notin A$. Toman do $h = f\chi_{g(D)}$ e procedendo como em (7.6) temos que $h\circ g \in R(K,\mu,X)$ mas $T\circ h\circ g \notin D(K,\mu,Y)$. Assim $T \notin D(K,\mu,X,Y)$. Com isso, $D(K,\mu,X,Y) \subset D([0,1],\lambda,X,Y)$ e portanto, por (9.10), temos $D(K,\mu,X,Y) = D([0,1],\lambda,X,Y)$.

Nos casos em que a), b) ou c) se verificam obtemos que $D(K,\mu,X,Y) \subset D([0,1],\lambda,X,Y)$ assim como (7.7. b)), (7.9), (7.11) e (7.12) decorrem de (7.6). De (9.10) decorre que $D(K,\mu,X,Y) = D([0,1],\lambda,X,Y)$.

9.12. <u>COROLÁRIO</u>. Seja $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente tal que μ_α é não puramente atômica (não-nula). Dado $T \in L(X,Y)$ são equivalentes:

i) $T \in D([0,1],\lambda,X,Y)$;

ii) $T \in D([a,b],\mu_\alpha,X,Y)$;

iii) $T\circ f \in D_N([a,b],\alpha,Y)$ para cada $f \in R_N([a,b],\alpha,X)$;

iv) $T\circ f \in D_\sigma([a,b],\alpha,Y)$ para cada $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

<u>Prova</u>. i) $\Longleftrightarrow$ ii) É um caso particular de (9.11) b) ou c).

ii) $\Longleftrightarrow$ iii) É (9.5).

iii) $\Longleftrightarrow$ iv) É análoga à prova de (7.16) ii) $\Longleftrightarrow$ iv).

9.13. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular num compacto K. Então temos:

i) $K(X,Y) \subset D(K,\mu,X,Y)$.

ii) $WK(C(S),Y) \subset D(K,\mu,C(S),Y)$ para todo compacto S.

iii) $\Pi_p(X,Y) \subset D(K,\mu,X,Y)$, $\forall\, p \in [1,\infty[$.

iv) $DP(L_1(m),Y) \subset D(K,\mu,L_1(m),Y)$, se m é medida finita.

Prova. De acordo com [PR] temos que i) ii), iii) e iv) valem para $K = [0,1]$ e $\mu = \lambda$. Assim i), ii) e iii) e iv) decorrem de (9.10).

9.14. PROPOSIÇÃO. Se K e μ verificam uma das condições a), b), c) de (9.11) (ou mais geralmente obedecem as hipóteses de (7.6)) então:

i) $WK(C(S),Y) = D(K,\mu,C(S),Y)$ para todo compacto S.

ii) $K(X,Y) = D(K,\mu,X,Y)$ para todo X uniformemente convexo.

iii) $DP(L_1(m),Y) = D(K,\mu,L_1(m),Y)$ se m é finita.

Prova. É conseqüência dos resultados de [PR] e de (9.11) já que em [PR] foram provadas as igualdades i), ii) e iii) para o caso $K = [0,1]$ e $\mu = \lambda$.

9.15. EXEMPLOS.

a) Se K e μ verificam uma das condições a), b) ou c) de (9.11) então $K(c_o(\Gamma),Y) = D(K,\mu,c_o(\Gamma),Y)$. De fato, por (9.14) temos $WK(c_o(\Gamma),Y) = D(K,\mu,c_o(\Gamma),Y)$ e por (2.18 b)) temos $WK(c_o(\Gamma),Y) = K(c_o(\Gamma),Y) = D(K,\mu,c_o(\Gamma),Y)$.

b) Se Y não contém subespaço isomorfo a $c_o(\mathbb{N})$ então $D(K,\mu,C(S),Y) = L(C(S),Y) = WK(C(S),Y)$ para toda μ de Borel regular em K e para todo compacto S. De fato, por (2.18 a)) temos a segunda igualdade e por (9.13 ii)) temos então $L(C(S),Y) = WK(C(S),Y) \subset D(K,\mu,C(S),Y) \subset L(C(S),Y)$.

c) Ao contrário dos exemplos acima, para $X = \ell_1(\mathbb{N}) = Y$ temos $D(K,\mu,X,Y) = L(X,Y) \not\subset K(X,Y)$ para toda μ de Borel regular em K.

d) Se $X = \ell_p(\mathbb{N}) = Y$, onde $1 < p < \infty$, então para cada K e μ verificando a), b) ou c) de (9.11) temos $WK(X,Y) \not\subset D(K,\mu,X,Y)$. Basta observar que o operador identidade está em $WK(X,Y)$ mas não em $D(K,\mu,X,Y)$ pois $D(K,\mu,X) \neq R(K,\mu,X)$ (ver (7.17.II)).

e) A inclusão $\Pi_p(X,Y) \subset D(K,\mu,X,Y)$, onde $p \in [1,\infty[$, é, em geral, própria pois se valesse $\Pi_p(X,Y) = D(K,\mu,X,Y)$ teríamos $D(K,\mu,X,Y) \subset WK(X,Y)$ (ver [LT] 2.b), o que é, em geral, falso (ver c) e (2.18 c))).

f) Se $X = L_1(S,\Sigma,m)$ para alguma medida m e Y é um espaço de Hilbert, então $L(X,Y) = \Pi_1(X,Y) = D(K,\mu,X,Y)$ para toda μ de Borel regular em K. De fato, temos $L(X,Y) = \Pi_1(X,Y)$ (ver [DU] Capítulo VIII) e por (9.13 iii)) temos então
$L(X,Y) = \Pi_1(X,Y) \subset D(K,\mu,X,Y) \subset L(X,Y)$.

9.16. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Seja $A \subset X$. Se para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \subset X$, A_n totalmente limitado tal que para cada $x \in A$ existe $y \in A_n$ com $\|x-y\| < \frac{1}{n}$, então A é totalmente limitado.

De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos $S_1,\dots,S_p$ com $\operatorname{diam} S_i \leq \frac{1}{2n}$, $i=1,\dots,p$ tais que $A_{4n} \subset \bigcup_{i=1}^{p} S_i$. Seja $T_i = S_i + B(0,\frac{1}{4n})$ (onde $B(0,r) = \{x \in X: \|x\| \leq r\}$). Temos que $\operatorname{diam} T_i \leq \operatorname{diam} S_i + \operatorname{diam} B(0,\frac{1}{4n}) \leq \frac{1}{2n} + 2\,\frac{1}{4n} = \frac{1}{n}$. Mostremos que $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} T_i$. Tomemos $x \in A$. Seja $y \in A_{4n}$ tal que $\|x-y\| < \frac{1}{4n}$. Então $x \in y+B(0,\frac{1}{4n})$. Como $y \in S_i$ para algum $i \in \{1,\dots,p\}$, temos que $x \in \bigsqcup_{i=1}^{p} T_i$. Logo $A \subset \bigsqcup_{i=1}^{p} T_i$. Assim A é totalmente limitado.

Assim se $A \not\subset X$ não é totalmente limitado, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que para cada $S \subset X$, S totalmente limitado, existe $x\in A$ tal que $\|x-y\| \geq \frac{1}{n}$, $\forall y\in S$.

9.17. <u>TEOREMA</u>. Sejam $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma família de espaços de Banach e $p \in]1,\infty[$. Seja $X = (\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_p$.

i) Se $D([0,1],\lambda,X_\gamma,Y) = K(X_\gamma,Y)$, $\forall\ \gamma\in\Gamma$, então $D([0,1],\lambda,X,Y) = K(X,Y)$.

ii) Se K é um compacto e μ é uma medida de Borel regular verificando a), b) ou c) de (9.11) (ou mais geralmente verificando as hipóteses de (7.6)) e se $D(K,\mu,X_\gamma,Y) = K(X_\gamma,Y)$ $\forall\ \gamma\in\Gamma$ então $D(K,\mu,X,Y) = K(X,Y)$.

<u>Prova</u>. Por (9.11) basta provar i). Dado $x\in X$ e $J \subset \Gamma$, indiquemos por $x|_J$ o elemento de X dado por $x|_J(\gamma) = x_\gamma$ se $\gamma \in J$ e $x|_J(\gamma) = 0$, se $\gamma \notin J$. Para cada $J\subset \Gamma$, sejam

$Y_J = \{x=(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\in X\colon x_\gamma = 0$ se $\gamma \in \Gamma-J\}$ e

$B_J = \{x\in Y_J\colon \|x\| \leq 1\}$. Dado $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in X$, o $\{\gamma\in\Gamma\colon x_\gamma \neq 0\}$ será chamado de suporte de x.

Seja $T \in D([0,1],\lambda,X,Y)$. Então $T|_{Y_{\{\gamma\}}} \in D([0,1],\lambda,Y_{\{\gamma\}},Y) = K(Y_{\{\gamma\}},Y)\ \forall\,\gamma\in\Gamma$. Assim, para cada $J \subset \Gamma$, J finito, temos que $T|_{Y_J} \in K(Y_J,Y)$.

Suponhamos $T \notin K(X,Y)$. Então $T(B)$ não é totalmente limitado. Por (9.16) existe $\delta > 0$ tal que para cada $S \subset Y$, S totalmente limitado, existe $b \in B$ tal que $\|T(b)-s\| > \delta \ \forall s \in S$.

Tomemos $S = \{0\} \subset Y$. Então existe $b_1 \in B$ com $\|T(b_1)\| \geq \delta$. Seja $\Gamma_1 \subset \Gamma$, Γ_1 finito tal que $\|b_1|_{\Gamma-\Gamma_1}\| \leq \frac{\delta}{2(\|T\|+1)}$. Então $\|T(b_1|_{\Gamma-\Gamma_1})\| \leq \frac{\delta}{2}$ e portanto $\|T(b_1|_{\Gamma_1})\| \geq \frac{\delta}{2}$. Seja $y^1 = b_1|_{\Gamma_1}$.

Como $T|_{Y_{\Gamma_1}}$ é compacto então $T(B_{\Gamma_1})$ é totalmente limitado. Logo, existe $b_2 \in B$ tal que $\|T(b_2)-s\| \geq \delta \ \forall s \in T(B_{\Gamma_1})$. Em particular temos $\|T(b_2)-T(b_2|_{\Gamma_1})\| \geq \delta$ ou $\|T(b_2|_{\Gamma-\Gamma_1})\| \geq \delta$. Seja $\Gamma_2 \subset \Gamma-\Gamma_1$, Γ_2 finito tal que $\|b_2|_{\Gamma-(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)}\| \leq \frac{\delta}{2(\|T\|+1)}$. Então $\|T(b_2|_{\Gamma-(\Gamma_1\cup\Gamma_2)})\| \leq \frac{\delta}{2}$ e portanto $\|T(b_2|_{\Gamma_2})\| \geq \frac{\delta}{2}$. Seja $y^2 = b_2|_{\Gamma_2}$.

Temos que os suportes de y^1 e y^2 são disjuntos; $\|T(y^1)\| \geq \frac{\delta}{2}$, $\|T(y^2)\| \geq \frac{\delta}{2}$, $\|y^1\| \leq 1$ e $\|y^2\| \leq 1$.

Lembrando que $T|_{Y_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}}$ é compacto, podemos conseguir $\Gamma_3 \subset \Gamma - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, Γ_3 finito e y^3 com $\|y^3\| \leq 1$, suporte de y^3 contido em Γ_3 e $\|T(y^3)\| \geq \frac{\delta}{2}$.

Por indução, conseguimos $\{y^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ com $\|y^n\| \leqq 1$, $\|T(y^n)\| \geqq \frac{\delta}{2}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ e tal que os suportes de y^n e y^m são disjuntos se $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

Tomemos $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração dos racionais de $[0,1]$ e façamos $f(r_n) = y^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(t) = 0$ se $t \in [0,1]-\mathbb{Q}$. Então temos que $f \in R([0,1],\lambda,X)$ mas $T\circ f \notin D([0,1],\lambda,Y)$ (para a prova proceder como em (7.18)). Assim $T \notin D([0,1],\lambda,X,Y)$. Logo $D([0,1],\lambda,X,Y) \subset K(X,Y)$. Por (9.13 i)) temos i).

oOo

§10. OPERADORES QUE LEVAM FUNÇÕES RIEMANN-INTEGRÁVEIS EM MENSURÁVEIS

Assim como o Problema 1A sugeriu a Pelczynski e Rocha Filho o estudo dos operadores de Darboux, o Problema 2A nos conduziu ao estudo dos operadores que levam funções Riemann-integráveis em mensuráveis, que é o assunto deste parágrafo.

Começaremos com alguns fatos relacionados com a densidade do dual de um espaço de Banach com respeito à sua topologia w*, que serão utilizados no estudo dos operadores.

10.1. <u>NOTAÇÕES</u>. X e Y indicarão espaços de Banach. Adotaremos as seguintes notações:

$$\text{dens } X^* = \begin{cases} \inf\{|D| : D \subset X^* \text{ e } D \text{ é w}^*\text{-denso em } X^*\}, & \text{se } X \neq \{0\} \\ \chi_0 & \text{, se } X = \{0\} \end{cases}$$

$S(X,Y) = \{T \in L(X,Y):\ T \text{ tem imagem separável}\}$.

Como é usual na literatura diremos que X é WCG se X for fracamente compactamente gerado, isto é, se existir $S \subset X$, S fracamente compacto tal que $\overline{\text{span } S} = X$ e diremos que X é injetivo se para cada espaço de Banach Z e para cada Y subespaço de Z isométrico a X, tivermos que Y é complementado em Z.

10.2. <u>OBSERVAÇÕES</u>.

a) Para cada espaço de Banach X, tem-se que dens X* ≤ dens X. (ver [S] 17.57).

b) Para cada espaço de Banach X tem-se

$$\overset{*}{\text{dens}}\ X^* \geq \inf\{|\Gamma|: \Gamma \subset X^* \text{ e } \Gamma \text{ é total}\}.$$

Se X tem dimensão infinita temos

$$\overset{*}{\text{dens}}\ X^* = \inf\{|\Gamma|: \Gamma \subset X^* \text{ e } \Gamma \text{ é total}\}$$

(lembramos que $\Gamma \subset X^*$ é chamado total se $\{x \in X: x^*(x)=0\ \forall x^* \in \Gamma\} = \{0\}$)

Para a prova, observemos que se $\Gamma \subset X^*$ é w^*-denso em X^* então Γ é total e portanto

$$\inf\{|\Gamma|: \Gamma \subset X^* \text{ e } \Gamma \text{ é total}\} \leq \inf\{|\Gamma|: \Gamma \subset X^* \text{ é } w^*\text{-denso}\} = \overset{*}{\text{dens}}\ X^*.$$

Por outro lado, se $\Gamma \subset X^*$ é total, seja Y o fecho de span Γ na topologia w^*. Seja ϕ um funcional w^*-contínuo que se anula em Y. Então existe $x \in X$ tal que $\phi(x^*) = x^*(x)$, $\forall x^* \in X^*$ e portanto $x^*(x) = 0$ $\forall x^* \in \Gamma \subset Y$. Logo $x=0$ e assim $\phi=0$. Pelo teorema 3.5. de [Ru] temos que $Y = X^*$. É fácil ver também que Y é o fecho na topologia w^* do conjunto Γ_1 de todas as combinações lineares com coeficientes racionais de elementos de Γ. Assim dens $X^* \leq |\Gamma_1| \leq |\Gamma|\,\aleph_0$. Mas se X tem dimensão infinita, então Γ, sendo total, é infinito e portanto dens $X^* \leq |\Gamma|$. Assim $\overset{*}{\text{dens}}\ X^* \leq \inf\{|\Gamma|: \Gamma \subset X^* \text{ e } \Gamma \text{ é total}\}$, se $\dim X = \infty$.

c) Se $X = \ell_\infty(\mathbb{N})$ então $\overset{*}{\text{dens}}\ X^* <$ dens X. De fato, se para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, tomamos $\phi_{n_0} \in \ell_\infty(\mathbb{N})^*$ dado por $\phi_{n_0}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_{n_0}$ temos que $\Gamma = \{\phi_n: n \in \mathbb{N}\}$ é total em $\ell_\infty(\mathbb{N})^*$ e portanto $\overset{*}{\text{dens}}\ X^* \leq \aleph_0$. No entanto, $\ell_\infty(\mathbb{N})$ não é separável.

d) Se $X = \ell_1(I)$ onde $|I| = c$ então $\overset{*}{\mathrm{dens}}\, X^* < \mathrm{dens}\, X$. De fato, temos que X é isométrico a um subespaço de $C([0,1]^c)$ já que $[0,1]^c$ com a topologia produto é homeomorfo à bola de X^* com a topologia w^*. Sendo $[0,1]^c$ separável temos que $C([0,1]^c)$ é isométrico a um subespaço de $\ell_\infty(\mathbb{N})$. Logo X é isométrico a um subespaço de $\ell_\infty(\mathbb{N})$. Como em c), temos que $\overset{*}{\mathrm{dens}}\, X^* \leqq \aleph_0 < \mathrm{dens}\, X$.

e) Se X é subespaço de um WCG então $\overset{*}{\mathrm{dens}}\, X^* = \mathrm{dens}\, X$. Este resultado foi provado em [Re], pág. 791.

f) Se $T\colon X \to Y$ é um isomorfismo sobre a imagem então temos $\mathrm{dens}\, X \leqq \mathrm{dens}\, Y$. No entanto, mesmo se $T\colon X \to Y$ é linear contínuo e injetor, podemos ter $\mathrm{dens}\, X > \mathrm{dens}\, Y$ como, por exemplo, ocorre para $T\colon \ell_\infty(\mathbb{N}) \to c_0(\mathbb{N})$ dado por $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Veremos adiante que isso não pode ocorrer quando $\mathrm{dens}\, X = \overset{*}{\mathrm{dens}}\, X^*$.

10.3. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Se $T \in L(X,Y)$ é injetor então $\mathrm{dens}\, Y \geqq \overset{*}{\mathrm{dens}}\, Y^* \geqq \overset{*}{\mathrm{dens}}\, X^*$.

<u>Prova</u>. Basta provar no caso em que X tem dimensão infinita e portanto Y tem dimensão infinita. Tomemos Γ total em Y^*. Então $T^*(\Gamma)$ é total em X^*. De fato, se $T^*(y^*)(x) = 0\ \forall\, y^* \in \Gamma$ então $y^*(T(x)) = 0\ \forall\, y^* \in \Gamma$ e sendo Γ total e T injetor temos $x=0$. Assim, por (10.2) a) e b) temos $\overset{*}{\mathrm{dens}}\, X^* \leqq \overset{*}{\mathrm{dens}}\, Y^* \leqq \mathrm{dens}\, Y$.

10.4. <u>COROLÁRIO</u>. Se $T \in L(X,Y)$ então $\mathrm{dens}\, Y + \overset{*}{\mathrm{dens}}\, (\ker T)^* \geqq \overset{*}{\mathrm{dens}}\, X^*$.

Prova. Basta provar no caso em que X tem dimensão infinita. Aplicando (10.3) ao operador $\tilde{T}: X/\mathrm{Ker}\, T \to Y$ dado por $\tilde{T}(\dot{x}) = T(x)$, que é injetor, temos

$$\mathrm{dens}\, Y \geq \overset{*}{\mathrm{dens}}\, (X/\mathrm{Ker}\, T)^*$$

e portanto

$$\mathrm{dens}\, Y + \overset{*}{\mathrm{dens}}\, (\mathrm{Ker}\, T)^* \geq \mathrm{dens}(X/\mathrm{Ker}\, T)^* + \overset{*}{\mathrm{dens}}\, (\mathrm{Ker}\, T)^*.$$

Basta provar, agora, que para cada Z subespaço de X temos $\overset{*}{\mathrm{dens}}\, (X/Z)^* + \overset{*}{\mathrm{dens}}\, Z^* \geq \overset{*}{\mathrm{dens}}\, X^*$.

Sejam $\{z_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ total em Z^*, $\{w_\beta^*\}_{\beta\in J}$ total em $(X/Z)^*$ e $\Pi: X \to X/Z$ a aplicação quociente. Para cada $\alpha\in I$, tomemos $\tilde{z}_\alpha^*$ extensão linear contínua de z_α^* a X. Seja $A = \{\tilde{z}_\alpha^*: \alpha\in I\} \cup \{w_\beta^* o\Pi: \beta\in J\}$.

Se $x\in X$ e $w_\beta^* o\Pi(x) = 0 \;\; \forall\, \beta\in J$ então $\Pi(x) = 0$ e portanto $x\in Z$. Se, além disso, $\tilde{z}_\alpha^*(x) = z_\alpha^*(x) = 0 \;\forall\, \alpha\in I$ então $x=0$. Logo A é total em X^*. Portanto $\overset{*}{\mathrm{dens}}\, X^* \leq |A|$. Assim

$$\overset{*}{\mathrm{dens}}\, X \leq \inf\{|\Gamma|: \Gamma \text{ total em } Z^*\} + \inf\{|\Gamma|: \Gamma \text{ total em } (X/Z)^*\}$$
$$\leq \overset{*}{\mathrm{dens}}\, Z^* + \mathrm{dens}\, (X/Z)^* \qquad \text{(ver (10.2 b)))}.$$

10.5. COROLÁRIO. Se X é subespaço de um WCG e $T \in L(X,Y)$ é injetor então dens $Y \geq$ dens X. Conseqüentemente, se X é subespaço de um WCG, se Y é separável e $T \in L(X,Y)$ é injetor então X é separável.

Prova. Decorre de (10.2.e)) e (10.3).

10.6. <u>DEFINIÇÃO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular num compacto K. Dizemos que um operador $T \in L(X,Y)$ é um operador RM em relação a μ se para cada $f \in R(K,\mu,X)$ temos que $Tof \in M(K,\bar{\mu},Y)$.

Indicaremos por $RM(K,\mu,X,Y)$ o conjunto de todos os operadores $T \in L(X,Y)$ que são RM em relação a μ.

10.7. <u>OBSERVAÇÃO</u>. Seja μ uma medida de Borel regular num compacto K.

a) É fácil ver que se X,Y,Z e W são espaços de Banach, $T \in RM(K,\mu,X,Y)$, $F \in L(Z,X)$ e $S \in L(Y,W)$ então $SoToF \in RM(K,\mu,Z,W)$.

b) Seja $T \in L(X,Y)$. Então $T \in RM(K,\mu,X,Y)$ se e só se para cada $f \in R(K,\mu,X)$ tem-se que Tof tem imagem μ-quase separável. Isto decorre de (9.4 a)) e (8.4 b)). Logo $S(X,Y) \subset RM(K,\mu,X,Y)$.

c) $RM(K,\mu,X,Y)$ é subespaço vetorial fechado de $L(X,Y)$. De fato, é imediato que se trata de um subespaço vetorial. Para mostrar que é fechado, tomemos $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset RM(K,\mu,X,Y)$ convergindo a T em $L(X,Y)$. Seja $f \in R(K,\mu,X)$. Por b), para cada $n\in\mathbb{N}$, podemos tomar B_n boreliano de K com $T_nof(K-B_n)$ separável e $\mu(B_n) = 0$. Assim $\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 0$ e como $Tof(K-\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \subset \overline{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} T_nof(K-\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} B_m)} \subset \overline{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} T_nof(K-B_n)}$, que é separável, decorre de b) que $T \in RM(K,\mu,X,Y)$.

d) Segue de (8.2) que $D(K,\mu,X,Y) \subset RM(K,\mu,X,Y)$.

10.8. PROPOSIÇÃO. Sejam μ uma medida de Borel regular num compacto K e $T \in L(X,Y)$. São equivalentes:

i) $T \in RM(K,\mu,X,Y)$;

ii) para cada $f \in R(K,\mu,X) \cap B(K,X)$ tem-se que $Tof \in M(K,\bar{\mu},Y)$.

Prova. Análoga à de (8.7).

10.9. PROPOSIÇÃO. Sejam α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente e $T \in L(X,Y)$. São equivalentes:

i) $T \in RM([a,b],\mu_\alpha,X,Y)$;

ii) $Tof \in M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,Y)$ para cada $f \in R_N([a,b],\alpha,X)$.

Prova. Análoga à de (8.8).

10.10. PROPOSIÇÃO. Sejam μ_1 e μ_2 medidas de Borel regulares num compacto K, com μ_1 não-atômica, μ_2 puramente atômica. Seja $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Então temos:

i) $RM(K,\mu_2,X,Y) = L(X,Y)$;

ii) $RM(K,\mu_1,X,Y) \subset RM(K,\mu,X,Y)$.

Prova. i) Decorre de(9.4 a)) e de (8.1 b))

ii) Análoga à de (8.9).

10.11. PROPOSIÇÃO. Seja μ uma medida de Borel regular não puramente atômica (não nula) num compacto K. Então $RM(K,\mu,X,Y) \subset RM([0,1],\lambda,X,Y)$.

Prova. Análoga à de (8.14).

10.12. PROPOSIÇÃO. Seja K um compacto. Se μ é uma medida de Borel regular não puramente atômica (não nula) em K tal que supp μ é metrizável então $RM(K,\mu,X,Y) = RM([0,1],\lambda,X,Y)$.

Prova. Análoga à de (8.17).

10.13. COROLÁRIO. Seja α: $[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente com μ_α não puramente atômica (não-nula). Dado $T \in L(X,Y)$ são equivalentes:

i) $T \in RM([0,1],\lambda,X,Y)$;

ii) $T \in RM([a,b],\mu_\alpha,X,Y)$;

iii) $T \circ f \in M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,Y)$ para cada $f \in R_N([a,b],\alpha,X)$;

iv) $T \circ f \in M([a,b],\bar{\mu}_\alpha,Y)$ para cada $f \in R_\sigma([a,b],\alpha,X)$.

Prova. Análoga à de (8.19) usando (10.12) e (10.9).

Um dos resultados de [MR] é que, assumindo a hipótese do contínuo, se X é uniformemente convexo não separável, temos que $R([0,1],\lambda,X) \not\subset M([0,1],\lambda,X)$. Se X é uniformemente convexo e I: $X \to X$ é o operador identidade, assumindo a hipótese do contínuo, temos então que são equivalentes:

i) $I \in RM([0,1],\lambda,X,X)$;

ii) $I \in S(X,X)$.

Como caso particular do nosso próximo resultado, teremos que esse resultado ainda vale se substituirmos I por um operador linear contínuo T.

No que segue μ indicará uma medida de Borel regular não puramente atômica (não nula) num compacto K, e estaremos admitindo a hipótese do contínuo sempre que aparecer a indicação (+CH).

10.14. TEOREMA.

a) Seja Z subespaço de um WCG tal que $R(K,\mu,Z) \not\subset M(K,\bar{\mu},Z)$. Se $T \in L(Z,Y)$ é injetor então $T \notin RM(K,\mu,Z,Y)$ (e, em particular, $R(K,\mu,Y) \not\subset M(K,\bar{\mu},Y)$).

b) Seja X um espaço de Banach tal que:

i) todo subespaço de X é WCG;

ii) para cada W subespaço não separável de X tem-se que $R(K,\mu,W) \not\subset M(K,\bar{\mu},W)$.

Então $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ para todo espaço de Banach Y.

Prova. a) Tomemos $f \in R(K,\mu,Z)$ tal que $f \notin M(K,\bar{\mu},Z)$. Mostremos que Tof não tem imagem μ-quase separável. Seja B boreliano de K com $\mu(B) = 0$. Se Tof (K-B) fosse separável então $E = \overline{\text{span Tof}(K-B)}$ seria separável. Tomando $F = \{z \in Z: T(z) \in E\}$, que é subespaço fechado de Z, teríamos $T|_F : F \to E$ injetor e E separável. Como Z (e portanto F) é subespaço de um WCG, por (10.5) teríamos F separável. Como $\text{Tof}(K-B) \subset E$ então $f(K-B) \subset F$ e assim $f(K-B)$ seria separável, o que é uma contradição pois $f \in R(K,\mu,Z)$, $f \notin M(K,\bar{\mu},Z)$ e $\mu(B) = 0$ (ver 8.4. b)). Assim por (10.7 b)), $T \notin RM(K,\mu,Z,Y)$.

b) Por (10.7 b)), resta provar que $RM(K,\mu,X,Y) \subset S(X,Y)$. Seja $T \in L(X,Y)$. Por i) temos que Ker T é WCG. Pelo teorema 2.5 de [Li], existe Z subespaço fechado de X tal que $\text{Ker } T \cap Z = \{0\}$ e

Ker $T + Z$ é denso em X. Suponhamos que $T \notin S(X,Y)$. Então $T(Z)$ não pode ser separável e portanto Z não é separável. Por i) e ii) temos então que Z é WCG e que $R(K,\mu,Z) \not\subset M(K,\bar{\mu},Z)$. Como $T|_Z$ é injetor, decorre de a) que $T|_Z \notin RM(K,\mu,Z,Y)$. Logo $T \notin RM(K,\mu,X,Y)$, o que completa a prova.

10.15. <u>OBSERVAÇÃO</u>.

a) Se $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ e se Z é um espaço de Banach para o qual existe $F \in L(X,Z)$ cuja imagem é densa em Z então $RM(K,\mu,Z,Y) = S(Z,Y)$.

De fato, se $T \in RM(K,\mu,Z,Y)$ então $T \circ F \in RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$. Como $T(Z) = T(\overline{F(X)}) \subset \overline{T \circ F(X)}$ temos que $T(Z)$ é separável e portanto $T \in S(Z,Y)$.

Em particular se $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ e se Z é um quociente de X então $RM(K,\mu,Z,Y) = S(Z,Y)$.

b) Não existe um espaço de Banach Y não separável tal que $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ para todo Banach X. De fato, sendo Γ um conjunto com $|\Gamma| = \text{dens}\, Y$, existe $T \in L(\ell_1(\Gamma),Y)$ sobrejetor e portanto $T \notin S(\ell_1(\Gamma),Y)$. Como $R(K,\mu,\ell_1(\Gamma)) \subset M(K,\bar{\mu},\ell_1(\Gamma))$, fazendo $X = \ell_1(\Gamma)$ temos que $T \in RM(K,\mu,X,Y)$, mas $T \notin S(X,Y)$.

c) Seja X WCG. Se $T \in S(X,Y)$ então $X/\text{Ker}\, T$ é WCG e T induz um operador linear contínuo injetor $\tilde{T}: X/\text{Ker}\, T \to \overline{T(X)}$. Assim, por (10.5), temos que $X/\text{Ker}\, T$ é separável. Por [JL], proposição 2, temos que Ker T é WCG. Assim, para que um operador definido num WCG tenha imagem separável, é necessário que o núcleo desse operador seja WCG. Isso justifica, em parte, a hipótese i) de

(10.14 b)). No entanto, essa hipótese não é necessária para que um WCG X verifique a $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ para todo Banach Y. De fato, veremos em (10.17) que para $X = L_1([0,1]^m)$, onde m é um cardinal qualquer, admitindo a hipótese do contínuo temos que $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ para todo Banach Y. No entanto, $L_1([0,1]^c)$ é WCG e tem subespaço que não é WCG (ver [Ro 3]).

10.16. <u>COROLÁRIO</u> (+CH). Em cada uma das situações abaixo temos que $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ para todo Banach Y.

a) X é uniformemente convexo.

b) X é complementado em $c_o(\Gamma)$ para algum Γ .

c) X é complementado em C(S) para algum S homeomorfo a um fraco-compacto de um Hilbert.

<u>Prova</u>. Se X é uniformemente convexo então X está nas condições de (10.14 b)) e assim temos o resultado. De fato, seja Z subespaço de X. Então Z é uniformemente convexo, portanto reflexivo e portanto WCG. Além disso, se Z é não separável temos, pelo resultado de [MR] e por (8.14) que $R(K,\mu,Z) \not\subset M(K,\bar{\mu},Z)$.

Se $W = c_o(\Gamma)$ para algum Γ então existe $T \in L(\ell_2(\Gamma),W)$ com imagem densa. Assim, por (10.15 a)) e por a) temos que $RM(K,\mu,W,Y) = S(W,Y)$ para todo Banach Y e, novamente por (10.15 a)), $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ para todo X complementado em $W = c_o(\Gamma)$.

Se S é homeomorfo a um fraco-compacto de um Hilbert então existem um Hilbert H e $T \in L(H,C(S))$ com imagem densa (ver [BRW] teorema 3.2). Como no caso anterior, concluimos que $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$, para todo X complementado em C(S).

(Na verdade b) é um caso particular de c)).

10.17. COROLÁRIO (+CH). Seja m uma medida.

a) Se $p \in]1,\infty[$ e X é subespaço de $L_p(m)$ então $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ para todo Banach Y.

b) São equivalentes :

i) $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ para todo X complementado em $L_1(m)$ e para todo Banach Y.

ii) $DP(L_1(m),Y) \subset S(L_1(m),Y)$ para todo Banach Y.

iii) $WK(L_1(m),Y) \subset S(L_1(m),Y)$ para todo Banach Y.

iv) Existem conjuntos enumeráveis A e Γ e uma família $\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de cardinais tais que $L_1(m)$ é isomorfo a $\ell_1(\Gamma) \oplus (\underset{\alpha\in A}{\oplus} L_1([0,1]^{m_\alpha}))_1$.

v) $L_1(m)$ é isomorfo a $L_1(\nu)$ para alguma ν σ-finita.

vi) $L_1(m)$ é isomorfo a $L_1(\nu)$ para alguma ν finita.

Prova. a) Decorre de (10.16 a))

b) Sabemos que existem conjuntos A e Γ e uma família $\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de cardinais tais que $L_1(m)$ é isomorfo a $W = \ell_1(\Gamma) \oplus (\underset{\alpha\in A}{\oplus} L_1([0,1]^{m_\alpha}))_1$ (ver [L] Corolário do teorema 3, §15). Sendo $I = \Gamma$ ou $I = A$, W tem subespaço complementado isomorfo a $\ell_1(I)$ e portanto existe um operador sobrejetor $F \in L(W,\ell_1(I)) = RM(K,\mu,\ell_1(I))$. Com isso, se vale i) temos que $F \in S(W,\ell_1(I))$ e assim I é enumerável. Logo temos iv). Por outro lado, sendo $J: \ell_1(I) \to \ell_2(I)$ a inclusão natural temos que

$J \circ F \in WK(W, \ell_2(I))$ e tem imagem densa. Assim, se vale iii) temos também iv).

É fácil ver que iv) $\Longrightarrow$ v) e que v) $\Longrightarrow$ vi).

Se vale vi) então existe $T \in L(L_2(\nu), L_1(m))$ com imagem densa e portanto por (10.15 a)) e (10.16 a)) temos i). Assim, i), iv), v) e vi) são equivalentes.

Se vale vi) então por (9.13 iv)) e (10.7 d)) temos $DP(L_1(m), Y)) \subset RM(K, \mu, L_1(m), Y)$ para todo Banach Y. Como já sabemos que vi) $\Longrightarrow$ i) então temos ii).

Se vale ii), então como $WK(L_1(m), Y) \subset DP(L_1(m), Y)$, para cada Banach Y (ver [DS] VI 8.12) temos iii). Como já vimos que iii) $\Longrightarrow$ iv) temos agora que vi) $\Longrightarrow$ ii), ii) $\Longrightarrow$ iii) e iii) $\Longrightarrow$ iv), o que completa a prova.

10.18. <u>COROLÁRIO</u> (+CH). Seja $Z = L_1(m)$ onde m é σ-finita ou $Z = C(S)$ onde S é homeomorfo a um compacto fraco de um Hilbert. Se X é um subespaço não separável e complementado de Z então $R(K;\mu, X) \not\subset M(K, \bar{\mu}, X)$.

<u>Prova</u>. Se X é complementado em Z então por (10.17 b)) e (10.16 c)) temos que $RM(K, \mu, X, X) = S(X, X)$. Assim, se X é não separável e $I: X \to X$ é a identidade então $I \notin RM(K, \mu, X, X)$, isto é, $R(K, \mu, X) \not\subset M(K, \bar{\mu}, X)$.

10.19. <u>PROPOSIÇÃO</u>. Se X é injetivo então $RM(K, \mu, X, Y) = D(K, \mu, X, Y) = WK(X, Y)$ para todo Banach Y. Conseqüentemente para $X = L_\infty(m)$ ou $X = C(S)$ onde S é extremamente desconexo temos $RM(K, \mu, X, Y) = D(K, \mu, X, Y) = WK(X, Y)$.

Prova: Seja X injetivo. Se $T \in L(X,Y)$ e $T \notin WK(X,Y)$ então, por [Ro 2] Corolário 1.4, existe Z subespaço de X isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$ tal que $T|_Z$ é isomorfismo. Por (8.20.I), $T \notin RM(K,\mu,X,Y)$. Assim $RM(K,\mu,X,Y) \subseteq WK(X,Y)$. Sabemos ainda que X é isométrico a um subespaço de $\ell_\infty(\Gamma)$ para algum Γ. Como $\ell_\infty(\Gamma)$ é isométrico a um $C(S)$ para algum compacto S temos que X é isométrico a um subespaço W de $C(S)$ e portanto W será complementado em $C(S)$. De acordo com (9.13 ii)) temos $WK(C(S),Y) \subset D(K,\mu,C(S),Y)$ para todo Y. Assim se $P: C(S) \to W$ é uma projeção sobrejetora, então dado $T \in WK(W,Y)$ temos que $ToP \in WK(C(S),Y) \subset D(K,\mu,C(S),Y)$. Como $ToP|_W = T$ temos que $T \in D(K,\mu,W,Y)$. Logo $WK(W,Y) \subset D(K,\mu,W,Y)$ e portanto $WK(X,Y) \subset D(K,\mu,X,Y)$. Por (10.7 d)) temos $D(K,\mu,X,Y) \subset RM(K,\mu,X,Y)$. Logo $WK(X,Y) \subset D(K,\mu,X,Y) \subset RM(K,\mu,X,Y) \subset WK(X,Y)$ e portanto esses conjuntos são todos iguais.

Para as outras afimrações, lembramos que se $X = C(S)$ para S extremamente desconexo ou $X = L_\infty(m)$ então X é injetivo.

10.20. OBSERVAÇÃO (+CH).

a) Até onde estamos informados não se sabe se para todo X WCG não separável vale que $R([0,1],\lambda,X) \not\subset M([0,1],\lambda,X)$. Com maior razão, não sabemos se para todo WCG X vale que $RM([0,1],\lambda,X,Y) = S(X,Y)$ para todo Banach Y já que, se essa igualdade fosse verdadeira, então para X WCG não separável, tomando $I: X \to X$ o operador identidade, teríamos que $I \notin S(X,X) = RM([0,1],\lambda,X,X)$ e portanto $R([0,1],\lambda,X) \not\subset M([0,1],\lambda,X)$. É conhecido, no entanto, que se $X = C(S)$ é um WCG não separável então $R([0,1],\lambda,X) \not\subset M([0,1],\lambda,X)$ (ver [MR]). Mesmo nesse caso, não sabemos se $RM([0,1],\lambda,X,Y) = S(X,Y)$ para todo Banach Y, a não ser no caso particular em que S é homeomorfo a um fraco--compacto de um Hilbert. Alertamos que existem espaços $X = C(S)$ que são WCG sem que S seja homeomorfo a um fraco-compacto de um Hilbert.

b) Com relação aos problemas citados em a), obtemos como conseqüência de (10.14 b)) que são equivalentes:

i) $R(K,\mu,X) \not\subset M(K,\bar{\mu},X)$ para todo X WCG não separável.

ii) $R(K,\mu,X) \not\subset M(K,\bar{\mu},X)$ para todo X reflexivo não separável.

iii) $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ para todo X reflexivo não separável e para todo Banach Y.

iv) $RM(K,\mu,X,Y) = S(X,Y)$ para todo X WCG não separável e para todo Banach Y.

De fato, é imediato que i) $\Longrightarrow$ ii). De (10.14 b)) decorre que ii) $\Longrightarrow$ iii). De (10.15 a)) e lembrando que se X é WCG (não separável), existem R reflexivo (não-separável) e $T \in L(R,X)$ com imagem densa (ver [DU] VIII.4. Corolário 10), decorre que iii) $\Longrightarrow$ iv). Para provar que iv) $\Longrightarrow$ i) basta fazer $Y = X$ em iv) e usar o operador identidade.

Como consequência dos resultados deste parágrafo, podemos demonstrar ainda:

10.21. PROPOSIÇÃO (+CH). Seja F compacto diádico. Se X é um subespaço não separável de C(F) então $R(K,\mu,X^*) \not\subset M(K,\bar{\mu},X^*)$.

Prova. Se F é diádico então C(F) é isométrico a um subespaço de $C(\{0,1\}^m)$ para algum m. Assim, podemos supor $F = \{0,1\}^m$.

Seja ν a medida produto em F e consideremos a inclusão $J: C(F) \to L_2(\nu)$. Se X é não-separável então por [D], teorema 3.11, $J(X)$ é não separável. Seja $J_1: X \to \overline{J(X)}$, $J_1(f)=J(f)$ $\forall\ f \in X$. Temos que $\overline{J(X)}$ é um subespaço não separável de $L_2(\nu)$ e J_1 tem imagem densa. Assim $J_1^*: \overline{J(X)}^* \to X^*$ é injetora. Por (10.5), J_1^* tem imagem não separável e portanto, por (10.15 a)) $J_1^* \notin RM(K,\mu,\overline{J(X)}^*,X^*)$. Logo $R(K,\mu,X^*) \not\subset M(K,\bar{\mu},X^*)$.

10.22. <u>PROPOSIÇÃO</u> (+CH). Sejam $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ uma família de espaços de Banach e Y um espaço de Banach tais que $RM(K,\mu,X_\gamma,Y) = S(X_\gamma,Y)$ para todo $\gamma\in\Gamma$. Seja $X = (\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_p$, onde $p = 0$ ou $p \in]1,\infty[$. Se Z é um subespaço complementado de X então $RM(K,\mu,Z,Y) = S(Z,Y)$.

<u>Prova</u>. Por (10.15 a)) basta provar para $Z = X(\neq\{0\})$. Para cada $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in X$ indiquemos por suporte de x o $\{\gamma\in\Gamma : x_\gamma \neq 0\}$ e para cada $S \subset \Gamma$ façamos $Y_S = \{x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in X\colon x_\gamma = 0 \text{ se } \gamma\notin S\}$.

Seja $T \in RM(K,\mu,X,Y)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $\mathcal{A}_n$ a família de todos os subconjuntos $\mathcal{F}$ de X para os quais temos:

1. $\|x\| \leq 1$, $\forall x \in \mathcal{F}$;
2. Se $x,y \in \mathcal{F}$ e $x \neq y$ então o suporte de x e o suporte de y são disjuntos;
3. Se $x,y \in \mathcal{F}$ e $x \neq y$ então $\|T(x)-T(y)\| \geq \frac{1}{n}$.

Tomando $x\in X$, com $\|x\| \leq 1$ temos que $\mathcal{F} = \{x\} \in \mathcal{A}_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Logo $\mathcal{A}_n \neq \emptyset$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, consideremos em $\mathcal{A}_n$ a ordem dada pela inclusão. Pelo Lema de Zorn $\mathcal{A}_n$ tem um elemento maximal $\mathcal{F}_n$.

Se para algum n, F_n é não enumerável, tomemos $g: [0,1] \to F_n$ injetora. Como os suportes dos elementos de F_n são dois a dois disjuntos e como F_n é limitada temos que $g \in R([0,1],\lambda,X)$ (proceder como em (7.18)). No entanto, como $\|T(x)-T(y)\| \geq \frac{1}{n}$ se $x,y \in F_n$ e $x \neq y$ então $T\circ g$ não tem imagem quase separável e portanto $T \notin RM([0,1],\lambda,X,Y)$. Assim, por (10.11), $T \notin RM(K,\mu,X,Y)$, contra a hipótese. Logo F_n é enumerável para cada $n\in\mathbb{N}$ e assim $S = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \bigsqcup_{x\in F_n}$ suporte de x é enumerável.

Para cada $x \in X$, tomemos $x_1,x_2 \in X$ com suporte de $x_1 \subset S$, suporte de $x_2 \subset \complement S$ e $x = x_1+x_2$ (portanto $T(x) = T(x_1)+T(x_2)$). Se o suporte de x_2 é vazio então $T(x) = T(x_1) \in T(Y_S)$. Se o suporte de x_2 é não vazio então $\frac{x_2}{\|x_2\|} \notin \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Assim, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $y_n \in F_n$ tal que $\|T(y_n)-T(\frac{x_2}{\|x_2\|})\| < \frac{1}{n}$ (pois caso contrário, para algum $n\in\mathbb{N}$ teríamos $F_n \subsetneq F_n \cup \left\{\frac{x_2}{\|x_2\|}\right\}$ e $F_n \cup \left\{\frac{x_2}{\|x_2\|}\right\} \in A_n$ e portanto F_n não seria maximal). Com isso, $T(\frac{x_2}{\|x_2\|}) \in \overline{T(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)}$ que é separável pois cada F_n é enumerável. Temos ainda que $T(x_1) \in T(Y_S)$. Como

$T|_{Y_{\{\gamma\}}} \in RM(K,\mu,Y_{\{\gamma\}},Y) = S(Y_{\{\gamma\}},Y)\ \forall \gamma \in \Gamma$ e como S é enumerável temos que $T(Y_S)$ é separável. Assim

$$T(x) = T(x_1)+T(x_2) \in T(Y_S) + \overline{T(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)}$$

que é separável e portanto $T \in S(X,Y)$.

10.23. EXEMPLOS

a) $RM(K,\mu,L_\infty([0,1]^c),L_2([0,1]^c)) \not\subset S(L_\infty([0,1]^c),L_2([0,1]^c))$. De fato, a inclusão natural $J: L_\infty([0,1]^c) \to L_2([0,1]^c)$ é fraco compacto e portanto $J \in RM(K,\mu,L_\infty([0,1]^c),L_2([0,1]^c))$ (ver (10.19)). No entanto, a imagem de J é densa em $L_2([0,1]^c)$ e portanto não separável.

Assim, para m finita, (ao contrário do que acontece com $X = L_p(m)$, $p\in[1,\infty[$) se $X = L_\infty(m)$ e Y Banach não necessariamente temos $RM(K,\mu,X,Y) \subset S(X,Y)$.

b) De acordo com (9.13 i)) e (10.7 d)) sempre temos $K(X,Y) \subset D([0,1],\lambda,X,Y) \subset RM([0,1],\lambda,X,Y) \subset L(X,Y)$. No exemplo seguinte as três inclusões são próprias.

Seja $X = Y = (\bigoplus_{i\in I} X_i)_1$ onde $I = \{1,2\}$, $X_1 = L_1([0,1])$, $X_2 = \ell_2(\Gamma)$ e $|\Gamma| = c$.

Seja $P: L_1([0,1]) \to L_1([0,1])$ uma projeção cuja imagem é isomorfa a $\ell_1(\mathbb{N})$. Seja $T: X \to Y$ dado por $T(x_1,x_2) = (P(x_1),0)$. Então $T \in D([0,1],\lambda,X,Y)$ mas $T \notin K(X,Y)$.

Seja $F: X \to Y$ dado por $F(x_1,x_2) = (x_1,0)$. Então $F \in S(X,Y) \subset RM([0,1],\lambda,X,Y)$ mas $F \notin D([0,1],\lambda,X,Y)$.

Seja $U: X \to Y$ dado por $U(x_1,x_2) = (0,x_2)$. Então $U \in L(X,Y)$ mas $U \notin RM([0,1],\lambda,X,Y)$.

c) Se K é um compacto que possui uma seqüência convergente de pontos distintos então (ao contrário do que acontece quando K é extremamente desconexo) existe um Banach Y tal que

$RM([0,1],\lambda,C(K),Y) \neq WK(C(K),Y) = D([0,1],\lambda,C(K),Y)$ (para a última igualdade ver (9.14 i))). De fato, se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de pontos distintos de K tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, consideramos $F = \{x_n: n\in\mathbb{N}\} \cup \{x\}$ com a topologia induzida de K. Sejam $J: C(F) \to c_o(\mathbb{N})$ Um isomorfismo, $U: C(K) \to C(F)$ dado por $U(f) = f|_F$, $\forall f \in C(K)$ e $T = JoU \in L(C(K),c_o(\mathbb{N}))$. Pelo teorema de extensão de Tietze, temos que U é sobrejetor e portanto T é sobrejetor. Assim $T \notin WK(C(K),c_o(\mathbb{N}))$ mas $T \in S(C(K),c_o(\mathbb{N})) \subset RM([0,1],\lambda,C(K),c_o(\mathbb{N}))$ e tomamos $Y = c_o(\mathbb{N})$.

São exemplos de compactos que possuem uma seqüência convergente de pontos distintos: os Eberlein infinitos, os dispersos infinitos e os diádicos infinitos. De fato, se K é Eberlein infinito, tomamos uma seqüência de pontos distintos de K e sabemos que essa seqüência tem uma subseqüência convergente. Se K é disperso infinito, seja K_1 o conjunto dos pontos de acumulação de K. Como K_1 não é perfeito, existe $p\in K_1$ isolado em K_1. Seja U aberto tal que $\bar{U} \cap K_1 = \{p\}$. Tomemos $t_1 \in K \cap U$, $t_1 \neq p$. Então $U - \{t_1\}$ é aberto e contém p. Tomemos $t_2 \in U - \{t_1\}$, $t_2 \neq p$. Escolhidos $t_1,\ldots,t_n$ com $t_{i+1} \in U-\{t_1,\ldots,t_i\}$, $t_i \neq p$ se $i < n$, tomo $t_{n+1} \in U-\{t_1,\ldots,t_n\}$, $t_{n+1} \neq p$. Assim $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de pontos distintos de $K-\{p\}$. Mostremos que $\lim_{n\to\infty} t_n = p$. Seja W aberto com $p\in W$. Se $\{n\in\mathbb{N}: t_n \in \bar{U}-W\}$ fosse infinito, como $\bar{U}-W$ é compacto, então $\{t_n: n\in\mathbb{N}\} \cap (\bar{U}-W)$ teria um ponto de acumulação que não pode ser p já que $p\in W$. Assim $(\bar{U}-W) \cap (K_1-\{p\}) \neq \emptyset$ e portanto $\bar{U} \cap K_1 \neq \{p\}$, o que é uma contradição. Logo $\{n\in\mathbb{N}: t_n \in \bar{U}-W\}$ é finito e como $t_n\in U$, $\forall n\in\mathbb{N}$ temos que $\{n\in\mathbb{N}: t_n \notin W\}$ é finito. Portanto $\lim_{n\to\infty} t_n = p$. Se K é diádico infinito, então o peso de K é maior ou igual a χ_0 e assim, por [Hg] teorema 1, K contém subespaço homeomorfo a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, que é metrizável infinito, e portanto existe em K uma seqüência convergente de pontos distintos.

oOo

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[A] ABUD, Z. I. Measurability lattice and algebric properties of Riemann integrable functions with values in C(K). In: SEMINÁRIO BRASILEIRO DE ANÁLISE, 19, São José dos Campos, 1984. Trabalhos Apresentados. Rio de Janeiro, SBM, 1984. p.309-348.

[B] BOURBAKI, N. Intégration des mesures. In:______. Elements de mathematique. v.6 Intégration. t.5

[BP] BESSAGA, C. & PELCZYNSKI, A. Some aspects of the present theory of Banach spaces. Apêndice de BANACH, S. Theory of linear operations. Amsterdam, North Holland, 1987. (North-Holland, Mathematics Library, 38)

[BRW] BENYAMINI, Y.; RUDIN, M. E.; WAGE, M. Continuous images of weakly compact subsets of Banach spaces. Pacific J. Math., 70(2):309-324, 1977.

[D] DINIZ, M. I. S. V. Mensurabilidade de funções Riemann integráveis em espaços de funções contínuas. São Paulo, 1984. 91p. (Tese(Doutorado)-IME-USP.

[DS] DUNFORD, N. & SCHWARTZ, J. T. Linear Operators. New York, Interscience, 1958. 858p. (Pure and Applied Mathematics, 7)

[DU] DIESTEL, J. & UHL, J. J. Vector measures. Providence, AMS, 1977. 322p. (Mathematical Surveys, 15)

[E] ENGELKING, R. Outline of general topology. Amsterdam, North-Holland, 1968. 388p.

[H] HONIG, C. S. A integral de Lebesgue e suas aplicações. Rio de Janeiro, IMPA, 1977. 298p. Trab. Apres. ao 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 1977.

[Ha1] HAYDON, R. On Banach spaces with contain $\ell^1(\tau)$ and types of measures on compact spaces. Israel J. Math., 28(4): 313-324, 1977.

[Ha2] HAYDON, R. Darboux integrability and separability of types in stable Banach spaces. In: SEMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Paris, 1983/84. /Travaux/. Paris, Université de Paris VII, 1984. p.95-115. (Publication Mathematiques de l'Université de Paris VII, 20)

[He] HELLMEISTER, A. C. P. Integração vetorial segundo Riemann e Darboux em relação a uma função de variação limitada. São Paulo, 1987. 240p. Tese(Doutorado)-IME-USP.

[Hg] HAGLER, J. On the structure of S and C(S) for S dyadic. Trans. Amer. Math. Soc., 214:415-428, 1975.

[HL] HARDY, J. & LACEY, H. E. Extensions of regular Borel measures. Pacific J. Math., 24(2):277-282, 1968.

[J] JAMES, R. C. Super-reflexive spaces with bases. Pacific J. Math., 41(2):409-419, 1972.

[JL] JOHNSON, W. B. & LINDENSTRAUSS, J. Some remarks on weakly compactly generated Banch spaces. Israel J. Math., 17(2):219-230, 1974.

[K] KOTHE, G. Topological vector spaces. Berlin, Springer, 1979. v.2 (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 237)

[KR] KLEIN, Ch. & ROLEWICZ, S. On Riemann integration of functions with values in topological linear spaces. Studia Math., 80(2):109-118, 1984.

[KT] KUTZAROVA, D. N. & TROYANSKI, S. L. Reflexive Banach spaces without equivalent norms wich are uniformly convex or uniformly differentiable in every direction. Studia Math., 72(1):91-95, 1982.

[L] LACEY, H. E. The isometric theory of classical Banach spaces. Berlin, Springer, 1974. 270p. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 208)

[Li] LINDENSTRAUSS, J. Weakly compact sets: their topological properties and the Banach spaces they generate. In: ANDERSON, R. D., ed. SYMPOSIUM ON INFINITE DIMENSIONAL TOPOLOGY, Baton Rouge, 1967. Proceedings. Princeton, University Press, c1972. p.235-273. (Annal of Mathematical Studies, 69)

[LT] LINDENSTRAUSS, J. & TZAFRIRI, L. Classical Banach spaces I. Berlin, Springer, 1977. 190p. (Ergebnisse der Mathematik und Ihres Grenzgebiet, 92)

[M] MARTI, J. T. Extended bases for Banach spaces. Illinois J. Math., 15(1):135-143, 1971.

[MR] MIRAGLIA NETO, F. & ROCHA FILHO, G. C. The measurability of Riemann integrable with values in Banach spaces and applications. São Paulo, IME-USP, 1984. 27p. (RT-MAT-8473)

[O] OXTOBY, J. C. Homeomorphic measures in metric spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 24:419-423, 1970.

[P] PARTHASARATHY, T. Selection theorems and their applications. Berlin, Springer, 1972. 101p. (Lecture Notes in Mathematics, 263)

[PR] PELCZYNSKI, A. & ROCHA FILHO, G. C. Operadores de Darboux. In: SEMINÁRIO BRASILEIRO DE ANÁLISE, 12, São José dos Campos, 1980. Trabalhos Apresentados. Rio de Janeiro, SBM, 1980. p.293-296.

[PS] PELCZYNSKI, A. & SEMADENI, Z. Spaces of continuous functions II. Studia Math., 18(2):211-222, 1959.

[R] ROCHA FILHO, G. C. Integral de Riemann vetorial e geometria dos espaços de Banach. São Paulo, 1979. 125p. Tese(Doutorado)-IME-USP.

[Re] REIF, J. Some remarks on subspaces of weakly compactly generated Banach spaces. Comment. Math. Univ. Carolin., 16(4):787-793, 1975.

[Ro1] ROSENTHAL, H. P. On injective Banach spaces and the spaces $L_\infty(\mu)$ for finite measures. Acta Math., 124:205-248, 1970.

[Ro2] ROSENTHAL, H. P. On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory. Studia Math., 37(1):13-36, 1970.

[Ro3] ROSENTHAL, H. P. The hereditary problem for weakly compactly generated Banach spaces. Compositio Math., 28(1): 83-111, 1974.

[Ru] RUDIN, W. Functional Analysis. New York, McGraw-Hill, 1973. 397p. (McGraw-Hill Series in Higer Mathematics)

[S] SINGER, I. Bases in Banach spaces. Berlin, Springer, 1970. v.2 (Die Grundlehren der Matematischen Wissenchaflen, 154)

[Se] SEMADENI, Z. Banach spaces of continuous functions. Warsawa, PWN, 1971. (Monografie Matematyczne, 55)

[T1] TROYANSKI, S. L. On non-separable Banach spaces with a symmetric basis. Studia Math., 53(3):253-263, 1975.

[T2] TROYANSKI, S. L. On uniform convexity and smoothness in every direction in non separable Banach spaces with an inconditional basis. (Russian). C. R. Acad. Bulgare Sci., 30(9):1243-1246, 1977.

[Z] ZIZLER, V. On some rotundity and somoothness properties of Banach spaces. Dissertationes Math., 87:5-37, 1971.