

REPRESENTAÇÕES DE ÁLGBRAS
TENSORIAIS ESPECIAIS

Maria Rita Moreira Pinto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ÁLGEBRA

ORIENTADOR: PROF. DR. HECTOR A. MERKLEN

SUMÁRIO

	página
1 - <u>INTRODUÇÃO</u> - - - - -	1
2 - <u>ÁLGEBRAS TENSORIAIS ESPECIAIS E K-ESPÉCIES</u> - - - -	4
2.1 - Problema - - - - -	4
2.2 - Grafo Associado a uma K-espécie - - - - -	11
2.3 - Os anéis Λ_n e Γ_n - - - - -	13
3 - <u>MATRIZ ASSOCIADA A UM GRAFO</u> - - - - -	20
3.1 - Matriz Associada a um Grafo - - - - -	20
3.2 - Métrica sobre um Grafo - - - - -	24
3.3 - Matriz Reduzida - - - - -	30
4 - <u>O TEOREMA E EXEMPLOS</u> - - - - -	45
5 - <u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u> - - - - -	50

1 - INTRODUÇÃO

O texto, (1), em que foi baseada esta dissertação estuda um caso particular da questão de encontrar condições necessárias e suficientes sobre um anel R para que ele tenha Tipo de Representação Finito (abreviadamente T.R.F.). Lembramos que um anel R tem T.R.F., ou é do tipo finito, (à esquerda) se existe apenas um número finito de módulos finitamente gerados sobre R (à esquerda) não isomorfos.

Algumas convenções: todos os anéis aqui considerados têm unidade; um R -módulo é um módulo à esquerda sobre R ; $\text{Mod}(R)$ denota a categoria dos R -módulos e $\text{mod}(R)$ a categoria do R -módulos finitamente gerados.

Definição: Um anel R é artiniano à esquerda (respectivamente, à direita) se toda cadeia descendente de ideais de R à esquerda (respectivamente, à direita) é estacionária. Um anel é artiniano se é artiniano à esquerda e à direita.

O teorema de *Krull - Schmidt* nos garante que se R é um anel artiniano então todo R -módulo finitamente gerado se decompõe de forma única, a menos de isomorfismos, em uma soma direta de R -módulos indecomponíveis. Neste caso, podemos afirmar que R tem T.R.F. se, e somente se, o número de R -módulos indecomponíveis finitamente gerados é finito.

Os anéis que estudaremos são quocientes de álgebras tensoriais especiais, $T_R(M)$. Estas álgebras serão definidas na seção 2, onde damos alguns resultados sobre elas que serão úteis no desenvolvimento do texto.

Seguem algumas observações, definições e propriedades que deverão ser necessárias mais tarde.

Definição: Sejam R um anel, M um R -módulo à direita e

N um R - módulo à esquerda e S um grupo abeliano. Uma aplicação $f: M \times N \longrightarrow S$ é R - balanceada se satisfaz:

$$i) f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$$

$$f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n'), \text{ para todos } m, m' \in M \text{ e } n, n' \in N;$$

$$ii) f(mr, n) = f(m, rn), \text{ para todos } (m, n) \in M \times N \text{ e } r \in R.$$

Propriedade Universal do Produto Tensorial

Dados R , M e N como na definição anterior, seja $\phi: M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ a aplicação canônica, isto é $\phi(m, n) = m \otimes n$. A aplicação ϕ é R - balanceada e para todo grupo abeliano S e toda aplicação R - balanceada $f: M \times N \longrightarrow S$ existe um único homomorfismo $\tilde{f}: M \otimes_R N \longrightarrow S$ tal que $f = \tilde{f} \circ \phi$

Proposição: Se M é um R - bimódulo, então $M \otimes_R R$ é isomorfo a M como R - módulo.

Definição: Dizemos que um anel R é graduado pela família $(A_n)_{n \geq 0}$ de subgrupos do grupo aditivo R se $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ e $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$ para todos $m, n \geq 0$.

Num anel graduado R , A_0 é um subanel e cada A_n é um A_0 - bimódulo.

Exemplo: $R = K[x_1, \dots, x_r]$, K corpo

$A_n =$ conjunto dos polinômios homogêneos de grau n .

Se R é um anel graduado, um R - módulo graduado é um R - módulo M junto com uma família $(M_n)_{n \geq 0}$ de subgrupos de M tais que $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ e $A_m M_n \subseteq M_{m+n}$ para todos $m, n \geq 0$.

Se M e N são R - módulos graduados, um homomorfismo de R - módulos $f: M \longrightarrow N$ é dito de grau zero se $f(M_n) \subseteq N_n$, para todo $n \geq 0$. Veremos que as álgebras tensoriais especiais são anéis graduados.

Definição: Uma álgebra A é dita hereditária se todo ideal à esquerda de A é um A -módulo projetivo.

Proposição: Se A é uma álgebra artiniana, então as seguintes condições são equivalentes:

- 1) A é hereditária;
- 2) Todo submódulo de um A -módulo projetivo é projetivo;
- 3) $\text{rad}(A)$ é projetivo. (ver (4)).

Seja M um A -módulo, a dimensão homológica de M é o menor inteiro n (se existe) tal que M tem uma resolução projetiva.

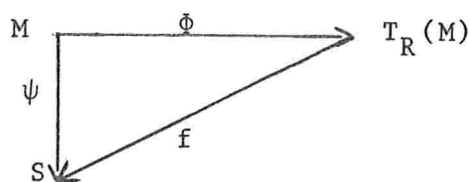
$$0 \longrightarrow C_n \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

A dimensão global de A é o máximo (se existe) do conjunto formado pelas dimensões homológicas dos A -módulos. Pela proposição anterior, vemos que uma álgebra artiniana A é hereditária se, e somente se, dimensão global de $A \leq 1$.

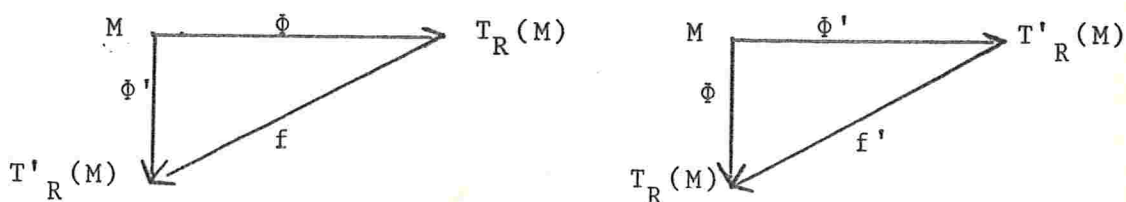
2 - ÁLGEBRAS TENSORIAIS ESPECIAIS E K-ESPÉCIES

2.1 - *Problema*

Sejam R um anel e M um R -bimódulo, queremos determinar um R -bimódulo $T_R(M)$, com estrutura de anel, com multiplicação R -balanceada e uma aplicação R -linear ($\tilde{}$ esquerda e $\tilde{}$ direita) $\Phi : M \longrightarrow T_R(M)$ tais que para todo R -bimódulo S possuindo estrutura de anel, com multiplicação R -balanceada e toda aplicação R -linear ($\tilde{}$ esquerda e $\tilde{}$ direita) $\Psi : M \longrightarrow S$ exista um único homomorfismo de anéis $f : T_R(M) \longrightarrow S$ tal que $f \circ \Phi = \Psi$, isto é, f torna comutativo o diagrama abaixo:



Unicidade: Suponhamos que $T_R(M), T'_R(M), \Phi : M \longrightarrow T_R(M)$ e $\Phi' : M \longrightarrow T'_R(M)$ tenham a propriedade acima



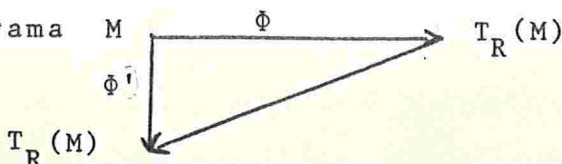
Então, existem dois únicos homomorfismos de anéis $f : T_R(M) \longrightarrow T'_R(M)$ e $f' : T'_R(M) \longrightarrow T_R(M)$ que tornam comutativos os diagramas acima, isto é, tais que

$$f \circ \Phi = \Phi' \quad \text{e} \quad f' \circ \Phi' = \Phi$$

Logo, $f' \circ f \circ \Phi = f' \circ \Phi' = \Phi$ e

$f \circ f' \circ \Phi' = f \circ \Phi = \Phi'$. Mas a aplicação identidade

$I : T_R(M) \longrightarrow T_R(M)$ é o único homomorfismo de anéis que torna comutativo o diagrama



Portanto, $f'of = I$. Analogamente, deduzimos que $fof' = I$. Logo f é um isomorfismo.

Existência: Para cada número inteiro $n \geq 0$, indicaremos por $M^{(n)}$ o produto tensorial, sobre R , de M por M n -vezes

$$M^{(n)} = M \otimes_R M \otimes_R \dots \otimes_R M$$

e

$$M^{(0)} = R$$

e tomamos $T_R(M) = R \oplus M \oplus M^{(2)} \oplus \dots \oplus M^{(m)} \oplus \dots$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $M^{(n)}$ é um R -bimódulo e, portanto, $T_R(M)$ é um R -bimódulo. Definimos em $T_R(M)$ a multiplicação induzida pelo isomorfismo canônico

$$M^{(n)} \otimes_R M^{(m)} \longrightarrow M^{(n+m)}$$

isto é, se $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n \in M^{(n)}$ e

$y = y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_m \in M^{(m)}$, então definimos

$$xy = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_m \in M^{(n+m)}$$

e estendemos, por linearidade, esta multiplicação a todos os elementos de $T_R(M)$.

Esta operação é associativa sobre $T_R(M)$ e tem unidade igual a $1_R + 0 + 0 + \dots$, onde 1_R é a unidade de R . Logo $T_R(M)$ é um R -bimódulo com estrutura de anel.

Seja $\Phi: M \longrightarrow T_R(M)$ a aplicação inclusão:

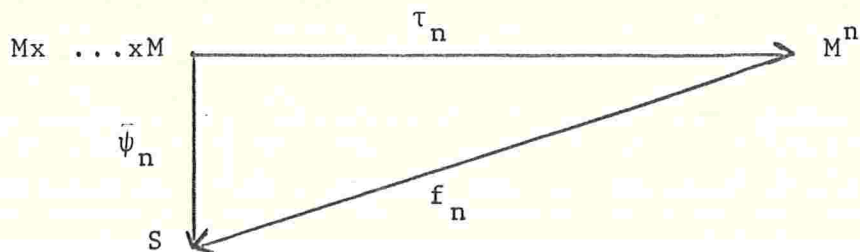
$$\Phi(m) = 0 + m + 0 + 0 + \dots, \quad m \in M$$

Se S é um R -bimódulo com estrutura de anel e multiplicação R -balanceada e $\psi: M \longrightarrow S$ é uma aplicação R -linear (à esquerda e à direita), então para $n \geq 1$ a aplicação

$$\psi_n: \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{n\text{-vezes}} \longrightarrow \text{definida por}$$

$$\psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \psi(x_i) \text{ é } R\text{-balanceada gene-}$$

ralizada



Pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único homomorfismo de grupos $f_n: M^{(n)} \longrightarrow S$ que torna o diagrama acima comutativo, onde $\tau_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n$

Seja $f: T_R(M) \longrightarrow S$ o homomorfismo de grupos que estende todas as f_n , isto é, se $m = \sum_{i \in \mathbb{N}} m_i$, onde $m_i \in M^{(i)}$, então $f(m) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(m_i)$ (se $r \in R$, $f(r) = f_0(r) = r \cdot 1_S$)

Para mostrar que f é um homomorfismo de anéis basta provar que se $x \in M^{(n)}$ e $y \in M^{(m)}$, então $f(xy) = f(x)f(y)$

$$x \in M^{(n)} \text{ e } y \in M^{(m)} \Rightarrow \begin{cases} x = \tau_n(x_1, \dots, x_n) & x_i \in M \\ y = \tau_m(y_1, \dots, y_m) & y_j \in M \end{cases}$$

$$f(xy) = f_{n+m}(xy) = f_{n+m} \circ \tau_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

$$= \psi_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \prod_{i=1}^n \psi(x_i) \prod_{j=1}^m \psi(y_j)$$

$$= \psi_n(x_1, \dots, x_n) \psi_m(y_1, \dots, y_m) =$$

$$[f_n \circ \tau_n(x_1, \dots, x_n)] [f_m \circ \tau_m(y_1, \dots, y_m)] =$$

$$f_n(x) f_m(y) = f(x) f(y)$$

Para se deduzir a unicidade de f basta ver que a imagem de Φ gera $T_R(M)$

Exemplo 1: Se $R = K \times K \times K$, onde K é um corpo,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e a ação de } R \text{ sobre } M \text{ à esquerda}$$

(respectivamente à direita) é dada pela multiplicação de ma-

trizes linha (respectivamente coluna). Então $M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e $M^{(n)} = 0$ para todo $n \geq 3$. Portanto $T_R(M) = R \oplus M \oplus M^{(2)}$.

Exemplo 2: Seja R um anel comutativo e $M=R$ então $T_R(M) \cong R \oplus R \oplus R \oplus \dots \cong R[x]$ (anel dos polinômios com coeficientes em R) pois $R \otimes_R R \cong R$.

Observação: Sendo R em geral não comutativo, não podemos dizer que $T_R(M)$ é uma álgebra sobre R , mas tem propriedades muito próximas disto.

De fato, sendo R' um subanel de R , então $T_R(M)$ é uma R' -álgebra se, e somente se, R' está contido no centro de R .

Temos, ainda, que $T_R(M)$ é um anel graduado pelos subgrupos $G_i = M^{(i)}$, $i \geq 0$.

Definição: $T_R(M)$ é a álgebra tensorial associada ao R -bimódulo M .

Suponhamos que R é o produto direto de uma família finita de anéis $R = \prod_{i \in I} F_i$. Então, cada R -bimódulo M pode ser escrito de maneira única como uma soma direta

$$M = \coprod_{i, j \in I} {}_i M_j$$

onde cada ${}_i M_j$ é um $F_i - F_j$ bimódulo.

Exemplo 3. Se $R = F_1 \times F_2$, onde F_1 e F_2 são anéis com divisão, e'_1 e e'_2 são as unidades de F_1 e F_2 respectivamente, então a unidade de R é $e = (e'_1, e'_2) = (e'_1, 0) + (0, e'_2) = e_1 + e_2$. Para todo R -bimódulo M , temos

$$M = e_1 M \oplus e_2 M = e_1 M e_1 \oplus e_1 M e_2 \oplus e_2 M e_1 \oplus e_2 M e_2$$

De maneira geral, $M = \coprod_{i, j \in I} {}_i M_j$, onde ${}_i M_j \cong e_i M e_j$ sendo e_i a unidade de F_i .

Para cada $i \in I$ a projeção $\Pi_i: R \rightarrow F_i$, $\Pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, é um epimorfismo de anéis, logo cada ${}_i M_j$ pode também ser considerado como um R -bimódulo.

Estamos interessados no caso particular que:

- (1) cada F_i é uma álgebra com divisão, central e de dimensão finita sobre um corpo K ;
- (2) para cada par (i, j) , K age centralmente sobre ${}_iM_j$, isto é, $xm = mx$ para todos $x \in K$ e $m \in {}_iM_j$;
- (3) $\dim_K({}_iM_j)$ é finita.

Definindo a ação de K sobre R como

$$xr = (xr_1, xr_2, \dots, xr_n),$$

onde $x \in K$ e $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R$, teremos que R e $T_R(M)$ são álgebras sobre K e $\dim_K R$ é finita. Ainda, $\dim_K T_R(M)$ é finita se, e somente se, $M^{(n)} = 0$ para algum $n > 0$.

Definição. Seja K um corpo. Uma K -espécie $S = (F_i, {}_iM_j)$ é formada por uma família $(F_i)_{i \in I}$, de álgebras com divisão, centrais e de dimensão finita sobre K e por outra família, $({}_iM_j)_{i, j \in I}$, de F_i - F_j bimódulos tais que K age centralmente sobre ${}_iM_j$ e $\dim_K({}_iM_j)$ é finita.

Se $R = \prod_{i \in I} F_i$ e $M = \coprod_{i, j \in I} {}_iM_j$, então M é um R -bimódulo pois cada ${}_iM_j$ é um R -bimódulo. A cada espécie $S = (F_i, {}_iM_j)_{i, j \in I}$ associamos uma álgebra tensorial $T(S)$ que é por definição a álgebra tensorial associada ao R -bimódulo M .

$T(S) = R \otimes M \otimes M^{(2)} \otimes \dots \otimes M^{(n)} + \dots$, onde $M^{(n)} = \otimes_R^n M$, $T(S)$ é uma K -álgebra. As K -álgebras desta forma são denominadas álgebras tensoriais especiais.

Exemplo 4: No exemplo 1, $T_R(M)$ é uma álgebra tensorial especial sobre K e, ainda, $\dim_K T_R(M)$ é finita.

A K -espécie associada a $T_R(M)$ é $S = (F_i, {}_iM_j)_{i, j \in \{1, 2, 3\}}$ onde cada $F_i = K$, ${}_1M_1 = {}_1M_3 = {}_2M_1 = {}_2M_2 = {}_3M_1 = {}_3M_2 = {}_3M_3 = 0$ e

$${}_1M_2 \cong {}_2M_3 \cong K, \text{ logo}$$

$$M = {}_1M_2 \oplus {}_2M_3$$

$$M \otimes_R M = ({}_1M_2 \otimes_R {}_1M_2) \oplus ({}_1M_2 \otimes_R {}_2M_3) \oplus ({}_2M_3 \otimes_R {}_1M_2) \oplus ({}_2M_3 \otimes_R {}_2M_3) =$$

$$1^{M_2} \otimes_R 2^{M_3}.$$

Observação: Se $S = (F_i, M_j)$ é uma K -espécie e $R = \prod_{i \in I} F_i$, então, obviamente, $i^{M_j} \otimes_R k^{M_l} = 0$ se $j \neq k$.

Sejam R um anel e M um R -bimódulo. Dados um R -módulo X e uma aplicação R -linear $\mu: M \otimes_R X \longrightarrow X$, podemos definir em X uma estrutura de $T_R(M)$ -módulo da seguinte maneira: se $m, m' \in M$ e $x \in X$, então

$$mx = \mu(m \otimes x) \quad \text{e} \quad (m \otimes m')x = m(m'x)$$

Inversamente, todo $T_R(M)$ -módulo X é obtido desta forma a partir do R -módulo X e da aplicação balanceada $(m, x) \longmapsto mx$. Logo, é fácil ver que se D é a categoria cujos objetos são os homomorfismos de módulos sobre R , $\phi: M \otimes_R X \longrightarrow X$, e cujos morfismos são os pares $(1 \otimes f, f)$ onde $f: X \longrightarrow X'$ é um morfismo de R -módulos tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R X & \xrightarrow{\phi} & X \\ 1 \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ M \otimes_R X' & \xrightarrow{\phi'} & X' \end{array}$$

então, D é equivalente à categoria $\text{Mod}(T_R(M))$. No caso de uma K -espécie, isto é, quando $T_R(M)$ é uma álgebra tensorial especial, esta equivalência de categorias adota uma forma bem mais explícita.

Seja $S = (F_i, i^{M_j})_{i, j \in I}$ uma K -espécie e X um R -módulo, $R = \prod_{i \in I} F_i$, então

$$X = \coprod_{i \in I} X_i, \quad \text{onde cada } X_i \text{ é um } F_i\text{-módulo e}$$

$$\begin{aligned} M \otimes_R X &= \left(\prod_{i, j \in I} i^{M_j} \right) \otimes_R \left(\prod_{k \in I} X_k \right) = \\ &= \prod_{i, j, k \in I} (i^{M_j} \otimes_R X_k) = \prod_{i, j \in I} (i^{M_j} \otimes_{F_j} X_j) \end{aligned}$$

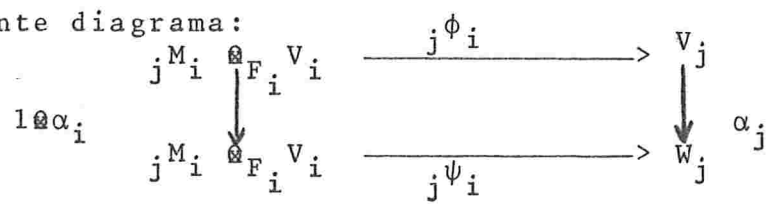
pois $i^{M_j} \otimes_R X_k = 0$ se $j \neq k$

Uma aplicação R -linear $\phi: M \otimes_R X \longrightarrow X$ induz as aplicações F_i -lineares $i\phi_j: i^{M_j} \otimes_{F_j} X_j \longrightarrow X_i$

Reciprocamente, dadas as famílias $(X_i)_{i \in I}$ e $({}_i\phi_j)_{i,j \in I}$, onde cada X_i é um F_i -módulo e ${}_i\phi_j: {}_iM_j \otimes_{F_j} X_j \longrightarrow X_i$ é um F_i -morfismo, obtemos um R -módulo $X = \coprod_{i \in I} X_i$ e um R -morfismo $\phi: M \otimes_R X \longrightarrow X$.

Definição: Seja $S = (F_i, {}_iM_j)_{i,j \in I}$ uma K -espécie, uma representação de S , ou S -representação, $(V_i, {}_j\phi_i)$ é uma coleção de F_i -módulos V_i e F_j -morfismos ${}_j\phi_i: {}_jM_i \otimes_{F_i} V_i \longrightarrow V_j$.

A categoria das S -representações é a categoria cujos objetos são as S -representações e os morfismos são definidos da maneira seguinte: dadas as S -representações $V = (V_i, {}_j\phi_i)$ e $W = (W_i, {}_j\psi_i)$ um S -morfismo $(\alpha_i): V \longrightarrow W$ é uma coleção de aplicações F_i -lineares $\alpha_i: V_i \longrightarrow W_i$ que tornam comutativo o seguinte diagrama:



De acordo com o que foi dito anteriormente, temos o seguinte:

Teorema 1 Seja $S = (F_i, {}_iM_j)_{i,j \in I}$ uma K -espécie. A categoria das S -representações é equivalente à categoria $\text{Mod}(T(S))$.

De acordo com isto, se $V = (V_i, {}_j\phi_i)$ e $W = (W_i, {}_j\psi_i)$ são representações de uma K -espécie $S = (F_i, {}_iM_j)$, definimos a soma direta $V \oplus W$ da maneira natural

$$V \oplus W = (V_i \oplus W_i, {}_j\mu_i), \text{ onde }$$

$${}_j\mu_i = {}_j\phi_i \oplus {}_j\psi_i: {}_jM_i \otimes_{F_i} (V_i \oplus W_i) \longrightarrow V_j \oplus W_j$$

e temos, portanto, o conceito de S -representação indecomponível.

Dizemos que S é do tipo finito se, salvo isomorfismo, existe apenas um número finito S -representações indecomponíveis.

níveis (V_i, ϕ_i) tais que $\dim_K(\coprod_{i \in I} V_i)$ é finita. Vale o seguinte teorema:

Teorema 2: Seja S uma K -espécie, a álgebra tensorial especial $T(S)$ tem tipo de representação finito se, e somente se, S é do tipo finito.

Observação: Dada $S = (F_i, {}_iM_j)_{i,j \in I}$, uma K -espécie, $T(S)$ é artiniana se, e somente se, $M^{(n)} = 0$ para algum $n \geq 1$ e, neste caso, $T(S)$ é uma álgebra de Artin (ver (4)).

2.2 - Grafo associado a uma K -espécie

A fim de caracterizar as K -espécies $S = (F_i, {}_iM_j)_{i,j \in I}$ com tipo de representação finito associamos a S um grafo $Q(S)$. Esta idéia e o resultado aludido são devidos a P. Gabriel no caso em que cada $F_i = K$ e foram generalizados por Dlab e Ringel(5).

Supondo I finito, sejam $S = (F_i, {}_iM_j)_{i,j \in I}$ uma K -espécie e

$$n_{ij} = \dim_{F_i}({}_iM_j) \times \dim({}_iM_j)_{F_j}$$

Por definição, os vértices do grafo associado a S , $Q(S)$, são os elementos de I e n_{ij} é o número de flechas de j a i .

Exemplos 5: Seja $T_R(M)$ como no exemplo 1, então

$$S = (F_i, {}_iM_j)_{i,j \in \{1,2,3\}}, \quad M = {}_1M_2 \oplus {}_2M_3,$$

$F_i = K$ para todo $i \in \{1,2,3\}$, $\dim_{F_1}({}_1M_2) = \dim({}_1M_2)_{F_2} = \dim_{F_2}({}_2M_3) = \dim({}_2M_3)_{F_3} = 1$ e nos demais casos $\dim_{F_i}({}_iM_j) = \dim({}_iM_j)_{F_j} = 0$

Temos que: $I = \{1,2,3\}$ é o conjunto de vértices de $Q(S)$
 $n_{12} = 1$, $n_{23} = 1$ e $n_{ij} = 0$ nos outros casos, logo o grafo associado a S é $Q(S) \underset{1}{\leftarrow} \underset{2}{\leftarrow} \underset{3}{\leftarrow}$.

Teorema 3. Uma K -espécie S tem tipo finito se e somente se, seu grafo $Q(S)$ é união disjunta de diagramas de Dynkin, isto é, $Q(S)$ é composto dos seguintes tipos de grafos.

$$A_n \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \dots \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \quad n \geq 1$$

$$B_n \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \dots \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \quad n \geq 2$$

$$C_n \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \dots \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \quad n \geq 3$$

$$D_n \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \dots \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \quad n \geq 4$$

$$E_n \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \dots \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \quad n = 6, 7, 8$$

$$F_4 \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array}$$

$$G_2 \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array}$$

onde $\begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array}$ significa $\begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array}$ ou $\begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array}$

mas não ambos e

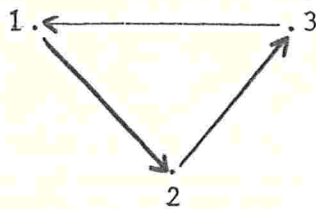
$$\begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \quad \hat{=} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} \\ \cdot \end{array}$$

Observação: Se o grafo Q é composto de diagramas de Dynkin disjuntos dos tipos A_n , D_n , E_6 , E_7 ou E_8 dizemos que é um grafo de Gabriel.

Se $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r$ são os componentes disjuntas do grafo associado a uma álgebra tensorial especial $T_R(M)$, então $T_R(M)$ se decompõe em um produto de álgebras tensoriais especiais indecomponíveis $T_{R_1}(M_1) \times \dots \times T_{R_r}(M_r)$, onde $R \sim R_1 \times \dots \times R_r$ como K -álgebra e, reordenando se necessário, ζ_i é o grafo associado a $T_{R_i}(M_i)$ para $i=1, \dots, r$. Assim, a categoria $\text{mod}(T_R(M))$ é equivalente ao produto cartesiano das categorias $\text{mod}(T_{R_i}(M_i))$, $i=1, \dots, r$.

Exemplo 6: Se na K -espécie $S = (F_i, {}_iM_j)$, $F_i = K$ para todo i , então $\dim_{F_i}({}_iM_j) = \dim({}_iM_j)_{F_j}$ e ${}_iM_j$ está determinado pelo número n_{ij} (isto é, pelo número de flechas de j a i em $Q(S)$).

Assim, sendo $Q(S)$ o grafo abaixo, temos que:



$$\dim_K {}_1M_2 = \dim_K {}_2M_3 = \dim_K {}_3M_1 = 0$$

$$\dim_K {}_iM_i = 0, \quad i=1,2,3$$

$$\dim_K {}_2M_1 = \dim_K {}_3M_2 = \dim_K {}_1M_3 = 1$$

$$R = K \times K \times K$$

$$M \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \end{pmatrix}$$

e $T_R(M)$ não tem tipo de representação finito pois, qualquer que seja n , ${}_2M_1 \otimes {}_1M_3 \otimes {}_3M_2 \dots \neq 0$ e portanto $M^{(n)} \neq 0$.

2.3 - Os Anéis Λ_n e Γ_n

Dada uma álgebra tensorial especial $T_R(M)$, indicamos por Λ_n o anel $T_R(M)/J^n$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $J = M + M^{(2)} + M^{(3)} + \dots$. Desde que $\dim_K(\Lambda_n) < \infty$, Λ_n é uma K -álgebra de Artin graduada.

O nosso objetivo é determinar condições necessárias e suficientes sobre $T_R(M)$ para que Λ_n tenha T.R.F., para todo $n \geq 1$. Afim de obter estas condições, consideremos, para cada $n \geq 1$, o anel

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} R & & & & \\ M & R & & & \\ M^{(2)} & M & R & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ M^{(n-1)} & M^{(n-2)} & & & R \end{pmatrix}$$

com a adição e multiplicação dadas pelas regras de operações com matrizes. Então valem as propriedades abaixo, provadas em (7).

1) Existe um monomorfismo de anéis $f_n: \Lambda_n \longrightarrow \Gamma_n$, para $n \geq 1$, tal que Γ_n tem dimensão global relativa zero sobre Λ_n

A aplicação é definida por

Dada uma álgebra tensorial especial, $T_R(M)$, e um número $n \in \mathbb{N}$, seja $M' = \prod_{i=1}^{n-1} ({}_{i+1}M'_i)$

onde ${}_{i+1}M'_i = R_{i+1} \otimes_R M \otimes_R R_i$. Temos que:

$$(1) R' = \prod_{i=1}^n R_i \quad \text{e} \quad R = \prod_{j=1}^m F_j$$

$$(2) M = \prod_{r,s=1}^m {}_rM_s, \text{ onde cada } {}_rM_s \text{ é um } F_r\text{-}F_s\text{-bimódulo}$$

(3) Se indicarmos por F_{j_i} o j -ésimo fator de R_i , isto

$$\text{é } F_{j_i} = e_i F_j e_i$$

$$\text{então, } R' = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m F_{j_i} \quad \text{e}$$

$${}_{i+1}M'_i = \prod_{r,s=1}^m {}_{r_{i+1}}M_{s_i}, \text{ onde}$$

$${}_{r_{i+1}}M_{s_i} = R_{i+1} \otimes_R {}_rM_s \otimes_R R_i \text{ é um } F_{R_{i+1}}\text{-}F_{s_i}\text{-bimódulo}$$

É fácil ver daí que $T_{R'}(M')$ é um K -álgebra tensorial especial e, utilizando o lema acima, vê-se que $\otimes_{R'}^n M' = 0$ (cf teorema 4 abaixo).

Exemplo 7: Se $R = K_1 \times K_2$, com $K_1 = K_2 = K$,

$${}_1M_1 = {}_2M_2 = 0 \quad \text{e} \quad {}_1M_2 \simeq {}_2M_1 \simeq K$$

O conjunto dos vértices do grafo associado a $T_R(M)$ é $I = \{1, 2\}$ e o grafo é:



Para $n=2$, $R' = R_1 \times R_2 = K_{1_1} \times K_{2_1} \times K_{1_2} \times K_{2_2}$, o conjunto de vértices é

$$I' = \{1_1, 2_1, 1_2, 2_2\} \quad \text{e} \quad M' = {}_2M_1 \simeq$$

$${}_2M_2 \otimes {}_2M_1 \otimes {}_1M_1. \text{ O grafo associado a } T_{R'}(M') \text{ é}$$

$$1_1 \cdot \longrightarrow \cdot 2_2$$

$$2_2 \cdot \longrightarrow \cdot 1_2$$

Seja $R'_i \cong R$ como K -álgebras para $i=1, \dots, n$, a afirmação do teorema é verdadeira.

Definição: Um anel A , artiniano à esquerda e à direita, é um anel de Nakayama se, para cada idempotente primitivo $e \in A$, eA e Ae têm uma única série de composição.

Se A é um anel artiniano, à esquerda e à direita, e $r = \text{rad}(A)$, então as seguintes propriedades são verdadeiras (ver (8), (9), (10)):

- 1) A é um anel de Nakayama se, e somente se, A/r^2 é um anel de Nakayama.
- 2) Se $r^2=0$, então A é um anel de Nakayama se, e somente se, para cada idempotente principal $e \in A$, er (respectivamente, re) é um A -módulo à direita (respectivamente, esquerda) simples.

Definição: Um grafo C é um ciclo se tem uma das seguintes formas:

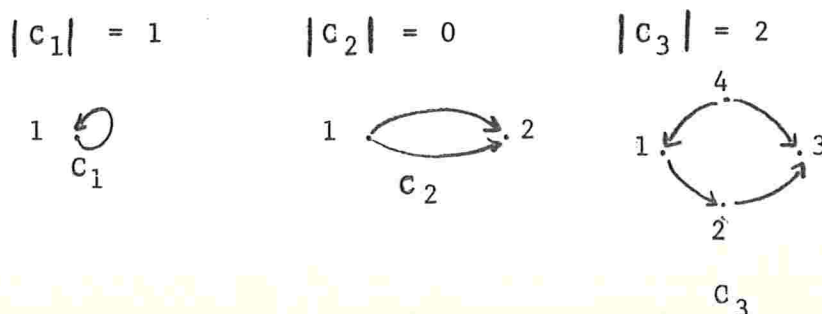


onde $i \xrightarrow{\quad} j$ é $i \xrightarrow{\quad} j$ ou $i \xleftarrow{\quad} j$ não ambos.

Dado um ciclo C e fixada uma orientação para o mesmo, sejam p o número de flechas de C no sentido positivo e q o número de flechas de C no sentido negativo. Associamos a C o número inteiro não-negativo $|C| = |p-q|$.

Exemplo 8:

Para os grafos abaixo, temos:



Note-se que o número $|C|$ independe da orientação fixa

da para o ciclo C .

Definição: Um ciclo C é do tipo Z_m se C tem m vértices e $|C| = m$


Proposição 1: Se o grafo associado a $T_R(M)$ é um ciclo do tipo Z_m então, para cada $n \geq 1$, $T_R(M)/J^n$ é um anel de Nakayama.

Demonstração: Desde que o grafo associado a $T_R(M)$ não contém subgrafos do tipo $\begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix}$, podemos assumir que $F_1 = F_2 = \dots = F_m = K$.

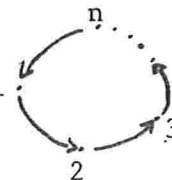
Temos que:

- (1) $\text{rad}(T_R(M)/J^n) = J/J^n$
- (2) $(T_R(M)/J^n)/(J/J^n)^2 \cong T_R(M)/J^2$
- (3) $\text{rad}(T_R(M)/J^2) = M$

Então, pelas afirmações feitas anteriormente, é suficiente mostrar que, para cada idempotente principal e de $T_R(M)/J^2$, eM e Me são $T_R(M)/J^2$ -módulos simples.

1º caso - O grafo associado a $T_R(M)$ é . Então $R = K$, $M = K$ e o resultado vale.

2º caso - O grafo associado a $T_R(M)$ é 1



com $n \geq 2$, sendo n o número de vértices.

Então, $R = \prod_{i=1}^n F_i$, os idempotentes principais

e_1, e_2, \dots, e_n de $T_R(M)/J^2$ são os elementos que correspondem aos idempotentes $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in R$ e i -ésima posição.

$M = R_2 \otimes_K R_1 + R_3 \otimes_K R_2 + \dots + R_n \otimes_K R_{n-1} + R_1 \otimes_K R_n$ onde $R_i = e_i R e_i$. Note que R_i é um R -módulo simples à esquerda e à direita.


Logo,

$$Me_i \cong \begin{cases} R_{i+1} \otimes_K R_i \cong R_{i+1} & \text{como } T_R(M)/J^2\text{-m\u00f3dulo} \\ & \text{\u00e0 esquerda para } 1 \leq i \leq n-1 \\ R_1 \otimes_K R_n \cong R_1 & \text{como } T_R(M)/J^2\text{-m\u00f3dulo \u00e0} \\ & \text{esquerda para } i=n \end{cases}$$

Analogamente,

$$e_i M \cong \begin{cases} R_{i-1} & \text{como } T_R(M)/J^2\text{-m\u00f3dulo \u00e0 direita para} \\ & 2 \leq i \leq n \\ R_n & \text{como } T_R(M)/J^2\text{-m\u00f3dulo \u00e0 direita para } i=1 \end{cases}$$

Ent\u00e3o, $T_R(M)/J^2$ \u00e9 um anel de Nakayama e, portanto, $T_R(M)/J^n$ \u00e9 um anel de Nakayama para todo $n \geq 1$.

Exemplo 9: Suponhamos que o grafo associado a $T_R(M)$ \u00e9 . Ent\u00e3o, $R = K$, $M = K$ e $T_R(M) = K \otimes K \otimes K \otimes \dots \cong K[X]$. Portanto, $T_R(M)/J^n \cong K[X]/(X^n)$.

Observa\u00e7\u00f5es:

(1) Suponhamos que o grafo associado a $T_R(M)$ \u00e9 do tipo Z_n , ent\u00e3o $\otimes_R^m M \neq 0$ para todo m . Logo, $T_R(M)$ n\u00e3o \u00e9 um anel artiniano e, portanto, $T_R(M)$ n\u00e3o \u00e9 um anel de Nakayama.

(2) Podemos reconhecer as \u00e1lgebras tensoriais especiais que s\u00e3o an\u00e9is de Nakayama atrav\u00e9s da proposi\u00e7\u00e3o abaixo.

Proposi\u00e7\u00e3o 2: Uma \u00e1lgebra tensorial especial $T_R(M)$ \u00e9 um anel de Nakayama se, e somente se, o grafo associado a $T_R(M)$ \u00e9 composto de grafos disjuntos do tipo.

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots \longrightarrow m \quad m \geq 1$$

(ver (8), (10))

Corol\u00e1rio: Seja $T_R(M)$ uma \u00e1lgebra tensorial especial e seja $J = M + M^{(2)} + \dots$. Ent\u00e3o, cada anel quociente $T_R(M)/J^r$ \u00e9 um anel de Nakayama para $r \geq 1$ se, e somente se, o grafo associado a $T_R(M)$ \u00e9 composto de grafos disjuntos dos tipos Z_n e

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots \longrightarrow m \quad m \geq 1$$

3 - MATRIZ ASSOCIADA A UM GRAFO

Vimos que se Γ_n não tem T.R.F. então Λ_n também não tem T.R.F.. Afim de obter condições necessárias e suficientes sobre $T_R(M)$ para que Γ_n tenha T.R.F., para todo $n \geq 1$, descrevemos, neste capítulo, o grafo associado a Γ_n em função do grafo de $T_R(M)$.

3.1 - *Matriz associada a um grafo.*

Sejam Q um grafo, com um número finito de vértices, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ o conjunto de vértices de Q e n_{ij} o número de flechas de v_j a v_i . A Q associamos a matriz $n \times n$ com coeficientes inteiros positivos $N = (n_{ij})$ e reciprocamente. Esta associação induz uma correspondência biunívoca entre as classes de isomorfismo de grafos e as classes de equivalência de matrizes cujos termos são inteiros não negativos.

Observação: Entendemos que duas matrizes de mesma ordem A e B são equivalentes se uma pode ser obtida da outra através de uma permutação da base. Isto é, se existe uma matriz de permutação U , com o mesmo tamanho que A , tal que $UAU^{-1} = B$.

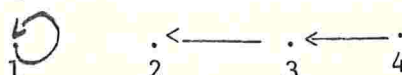
Exemplo 1: Se Q é o grafo:



Então, a matriz associada a Q é:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo Q_1 o grafo:




temos que Q_1 e Q são isomorfos e a matriz associada a Q_1 é

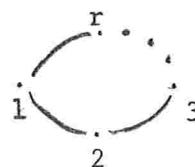
$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $U N U = N_1$ onde

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seja $N = (n_{ij})$ uma $m \times m$ matriz com coeficientes inteiros não negativos e seja Q o grafo associado a N . Notemos que $I = \{1, \dots, m\}$ é, também, o conjunto de vértices de Q . Para cada $(i, j) \in I \times I$, seja $q_{ij} = n_{ij} + n_{ji}$. Pretendemos encontrar condições necessárias e suficientes sobre N para que Q seja um grafo de Gabriel. (ver página 12).

Suponhamos que Q contém um ciclo, isto é, Q tem um subgrafo C de um dos tipos:  ou



Se I' é o conjunto dos vértices de C , então $\sum_{j \in I'} q_{ij} \geq 2$ para todo $i \in I'$. A desigualdade ocorre se o número de flechas entre dois vértices de I' é maior que o da figura.

Reciprocamente, se existe um conjunto $I' \subseteq I$ tal que para todo $i \in I'$, $\sum_{j \in I'} q_{ij} \geq 2$, então Q contém um ciclo. Pois, se I' tem r elementos então

$$2r = \sum_{i \in I'} 2 \leq \sum_{i \in I'} \sum_{j \in I'} q_{ij} =$$

$$\sum_{i \in I'} \sum_{j \in I'} (n_{ij} + n_{ji}) = 2 \sum_{i, j \in I'} n_{ij}$$

Isto é, o número de flechas entre os elementos de I' é maior ou igual ao número de vértices o que significa que Q contém

um ciclo.

Definição: Dizemos que a matriz N contém um ciclo se existe um conjunto de índices $I' \subseteq I$ tal que, para cada $i \in I'$, $\sum_{j \in I'} q_{ij} \geq 2$.

Definição: $I' \subseteq I$ é um ciclo de N se o subgrafo de Q formado por I' e todas as flechas de Q que ligam os vértices de I' for um ciclo.

Pelo que foi dito acima, vale o seguinte:

Proposição 1: O grafo Q associado à matriz N contém um ciclo se, e somente se, N contém um ciclo.

Proposição 2: Suponhamos que N contém um ciclo e seja $I' \subseteq I$ tal que, para cada $i \in I'$, $\sum_{j \in I'} q_{ij} \geq 2$. Se I' não tem nenhum subconjunto próprio com esta propriedade, então I' tem um ou dois elementos ou I' é um ciclo.

Observação: Consideremos os seguintes grafos:



Nestes dois grafos o conjunto I' formado pelos vértices satisfaz as condições da proposição mas não é um ciclo (o número de elementos de I' é um ou dois).

Demonstração da proposição 2:

Suponhamos que I' tem mais de dois elementos. Então $q_{ij} = 1$ ou 0 , para todo $(i, j) \in I' \times I'$, pois, caso contrário, $I'' = \{i, j\}$ seria um subconjunto de I' tal que $\sum_{k \in I''} q_{kl} \geq 2$ para todo $l \in I''$. Logo, temos que

(*) dado $v \in I'$ existem elementos distintos v' e $v'' \in I' - \{v\}$ tais que $q_{vv'} = 1 = q_{vv''}$, pois $\sum_{w \in I'} q_{vw} \geq 2$.

Seja $v_1 \in I'$, por (*), existe $v_2 \in I' - \{v_1\}$ tal que $q_{v_1 v_2} = 1$. Ainda por (*), existe $v_3 \in I' - \{v_1, v_2\}$ tal que $q_{v_2 v_3} = 1$.

Suponhamos que $v_1, \dots, v_n \in I'$ foram escolhidos de tal maneira que $q_{v_i v_{i+1}} = 1$ para $i = 1, \dots, n-1$.

Então $q_{v_i v_j} = 0$ se $|i-j| \neq 1$ e $|i-j| \neq n-1$ pois, em caso contrário, supondo que $i \leq j$, teríamos $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\} \subseteq I'$ e $\sum_{s=i}^j q_{v_i v_s} \geq 2$. Logo $\sum_{s=i}^j q_{v_r v_s} \geq 2$ para todo $r \in \{v_i, \dots, v_j\}$, o que contradiz a hipótese.

Se $\{v_1, \dots, v_n\} = I'$, então $q_{v_n v_1} = 1$ pois $\sum_{i=1}^n q_{v_i v_n} \geq 2$, $q_{v_{n-1} v_n} = 1$ e $q_{v_i v_n} = 0$ para $2 \leq i \leq n-2$. Portanto, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^n q_{v_i v_j} = 2$ e I' é um ciclo.

Note que $q_{v_i v_i} = 0$ para todo $v_i \in I'$.

Se $\{v_1, \dots, v_n\} \neq I'$, então $q_{v_1 v_n} = 0$ pois em caso contrário $\{v_1, \dots, v_n\}$ teria a propriedade $\sum_{i=1}^n q_{v_i v_j} \geq 2$, para todo $v_j \in \{v_1, \dots, v_n\}$. Logo, $q_{v_i v_n} = 0$ para $1 \leq i \leq n-2$ e, por (*), existe $v_{n+1} \in I' - \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $q_{v_n v_{n+1}} = 1$.

Sendo I' um conjunto finito, concluimos que I' é um ciclo.

Corolário: Se $I' \subseteq I$ é um ciclo em N com mais de dois elementos, então os índices de I' podem ser ordenados v_1, \dots, v_n tal que, se $v_1 = v_{n+1}$ então $q_{v_i v_{i+1}} = 1$, $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 2:

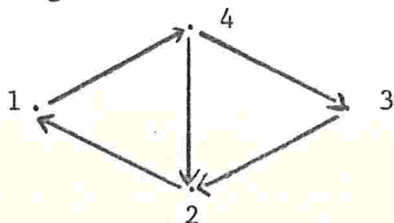
$$\text{Se } N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{então}$$

$I = \{1, 2, 3, 4\}$ e os subconjuntos de I .

$I_1 = \{1\}$ e $I_2 = \{2, 3, 4\}$ são ciclos de N .

$I_3 = \{1, 2, 4\}$ também tem a propriedade $\sum_{j \in I_3} q_{ij} \geq 2$, para todo $i \in I_3$, mas não é um ciclo.

O grafo associado a N é:



$$d_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 1 \\ 1, & \text{se } x = 2 \text{ ou } 3 \\ 2, & \text{se } x = 4 \text{ ou } 5 \\ \infty, & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$

$$d_7(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 7 \\ 1, & \text{se } x = 6, 8 \text{ ou } 9 \\ 2, & \text{se } x = 10 \text{ ou } 11 \\ \infty, & \text{se } x < 6 \end{cases}$$

Definição: Dizemos que $i \in I$ está ligado a $j \in I$ se $d_i(j) < \infty$.

Propriedades:

- 1) $d_i(j) \leq d_i(k) + d_k(j)$, $\forall i, j, k \in I$
- 2) $d_i(j) = d_j(i)$, $\forall i, j \in I$
- 3) d é uma métrica em I , onde $d(x, y) = d_x(y)$
- 4) Se $d_i(j) < \infty$ e $d_j(k) < \infty$, então $d_i(k) < \infty$.
- 5) Se existem $x_0, \dots, x_c \in I$ tais que $q_{x_i x_{i+1}} \neq 0$ para $0 \leq i \leq c-1$, então $d_{x_0}(x_c) \leq c$.
- 6) Se $d_{x_0}(x_c) = c$, então existem $x_1, \dots, x_{c-1} \in I$ distintos tais que $q_{x_i x_{i+1}} \neq 0$, para $0 \leq i \leq c-1$.

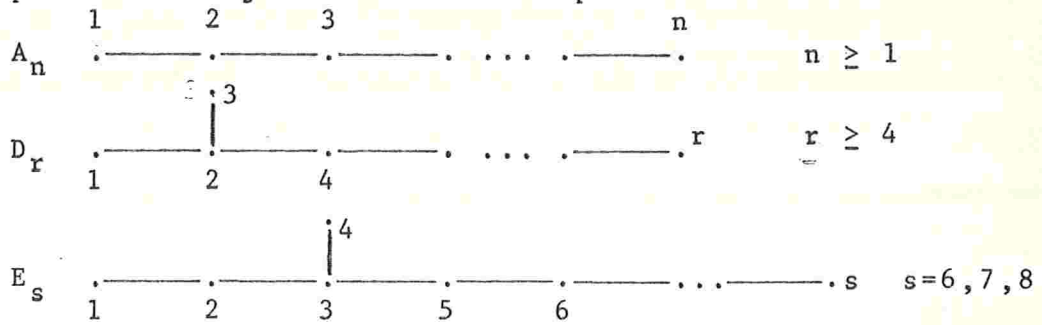
Com as notações introduzidas, um conjunto $I' \subseteq I$ é *conexo* se para todos $x, y \in I'$ existem $x_1 = x, x_2, \dots, x_n = y$ pertencentes a I' tais que $q_{x_i x_{i+1}} \neq 0$, para $i=1, \dots, n-1$.

Temos que $I' \subseteq I$ é *conexo* se, e somente se, $d_x(y)$ é finito, quaisquer que sejam $x, y \in I'$, ou seja se x e y estão ligados no grafo Q .

Pelas propriedades (1) - (6) acima, vemos que a relação em I definida por $i \sim j \iff d_i(j) < \infty$ é uma relação de equivalência e cada classe de equivalência V_i é um subconjunto conexo de I . Como $I = \bigcup V_i$, cada V_i é chamada de *componente* de

N. De fato os V_i 's são os subconjuntos conexos maximais de I.

Lembramos que um grafo Q é um grafo de Gabriel se suas componentes disjuntas são dos tipos

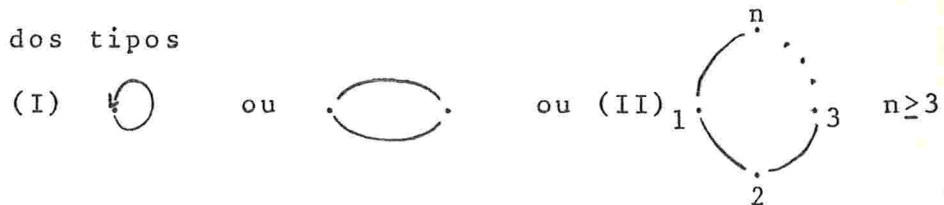


Dividir Q em componentes disjuntas corresponde à participação de I dada pela relação de equivalência acima. Logo, para obtermos condições necessárias e suficientes sobre N para que Q seja um grafo de Gabriel devemos trabalhar com as componentes V_i de I.

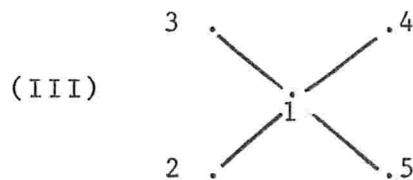
Damos a seguir condições que caracterizam os grafos de Gabriel.

Se Q é um grafo de Gabriel, temos que:

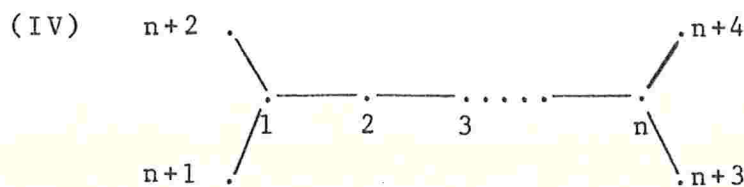
1) Q não contém ciclos, isto é, Q não tem subgrafos dos tipos



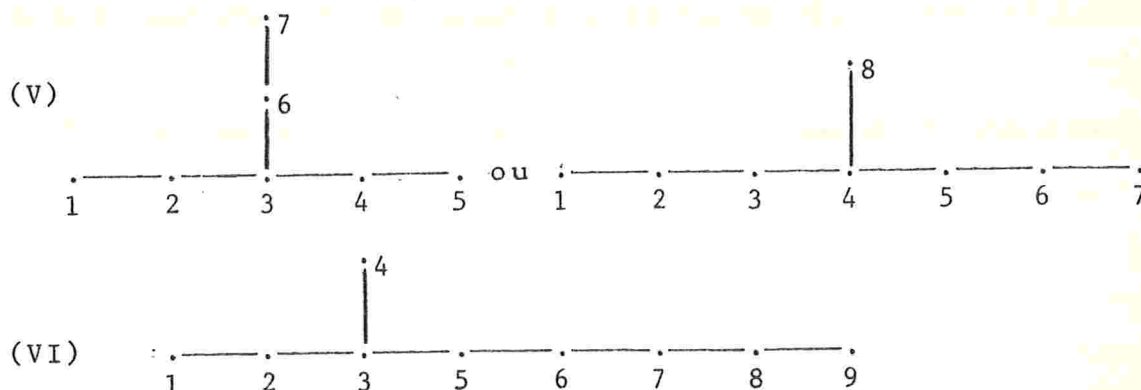
2) Q não tem nenhum vértice v com mais de três flechas com um dos extremos em v . Isto é, Q não tem subgrafos do tipo



3) Uma componente de Q tem no máximo um vértice v com três flechas de extremo v . Isto é, Q não tem subgrafos do tipo



- 4) Uma componente de Q que tem um v\u00e9rtice v com tr\u00eas flechas de extremo v \u00e9 do tipo D_r ou E_s . Isto \u00e9, Q n\u00e3o tem subgrafos dos tipos



Reciprocamente, se um grafo Q n\u00e3o cont\u00eam subgrafos dos tipos de (I) a (VI), ent\u00e3o Q \u00e9 um grafo de Gabriel.

Se $x \in I$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos $\ell(x, n)$ como sendo o n\u00famero de elementos $i \in I$ tais que $d_x(i) = n$. Por exemplo, $\ell(x, 0) = 1$ e $\ell(x, 1)$ \u00e9 igual ao n\u00famero de \u00edndices $i \in I$ tais que $n_{xi} \neq 0$ ou $n_{ix} \neq 0$.

Exemplo 4: Seja $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ent\u00e3o $\ell(1, 1) = 2$, $\ell(1, 2) = 1$, $\ell(1, 3) = 0$, etc.

Vamos agora traduzir as condi\u00e7\u00f5es anteriores em propriedades de N para caracterizar os grafos de Gabriel por propriedades da matriz correspondente.

Teorema: Seja N uma matriz $m \times m$ com coeficientes inteiros n\u00e3o negativos. O grafo Q associado a N \u00e9 um grafo de Gabriel se, e somente se, N satisfaz as condi\u00e7\u00f5es abaixo, onde $I = \{1, \dots, m\}$.

(1) $\forall i, j \in I, q_{ij} = 0$ ou 1 ,

(2) Se v_0, v_1, \dots, v_n s\u00e3o elementos distintos de I com $q_{v_i v_{i+1}} \neq 0$ para $1 \leq i \leq n-1$, ent\u00e3o $d_{v_0}(v_n) = n$,

(3) $\forall i \in I, \ell(i, 1) \leq 3$,

- (4) se $v \in I$ e $\ell(v,1)=3$, então $\ell(w,1) < 3$ para todo $w \in I - \{v\}$,
- (5) se $v \in I$ e $\ell(v,1) = 3$, então $\ell(v,3) < \ell(v,2) < 3$ se $\ell(v,2) \geq 2$,
- (6) se $v \in I$ e $\ell(v,1)=3$ e $\ell(v,2)=2$, então $\ell(v,n)=0$, para todo $n \geq 5$.

Para provar este teorema mostraremos primeiro o resultado abaixo:

Lema - Q não tem ciclos se, e somente se, satisfaz as condições (1) e (2).

Suponhamos que Q não tem ciclos. Então $q_{ij} = 0$ ou 1, para todo $(i,j) \in I \times I$, pois Q não contém subgrafos do tipo (I). A condição (1) é satisfeita.

Sejam v_0, \dots, v_n elementos distintos de I com $q_{v_i v_{i+1}} \neq 0$ para $0 \leq i \leq n-1$.

Queremos mostrar que $d_{v_0}(v_n) = n$ e o faremos utilizando indução sobre n .

Para $n=0$ ou 1 a afirmação é verdadeira.

Suponhamos que $d_{v_0}(v_n) = k < n$, então existem $w_0 = v_0, w_1, \dots, w_k = v_n$ elementos distintos de I tais que $q_{w_i w_{i+1}} \neq 0$, para $0 \leq i \leq k-1$. Por hipótese de indução, $d_{v_0}(w_i) = i$ e $d_{v_0}(v_j) = j$, para $0 \leq i \leq k-1$ e $0 \leq j \leq n-1$. Logo $w_{k-1} \neq v_{n-1}$ e se $w_i = v_j$ então $i = j$.

Seja $r = \max\{i \in \{0, \dots, k-1\}; w_i = v_i\}$. O conjunto $I' = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, w_{i+1}, \dots, w_{k-1}\}$ tem a propriedade

$\sum_{\ell \in I'} q_{\ell j} \geq 2$, para todo $j \in I'$. Logo I' é um ciclo, o que contradiz a hipótese.

A recíproca é verdadeira pois

i) Se Q contém ciclos do tipo (I), a condição (1) não é satisfeita.

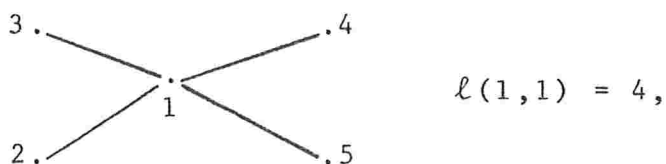
ii) Se Q contém ciclos do tipo II, a condição (2) não é satisfeita.

Demonstração do Teorema:

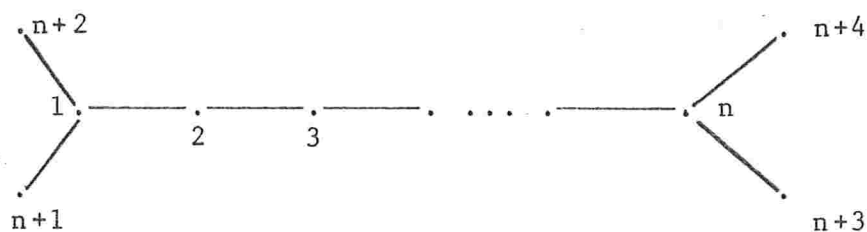
Primeiro supomos que Q é um grafo de Gabriel. Então Q não tem ciclos, e N satisfaz as condições (1) e (2). Temos que Q é formado por componentes disjuntas dos tipos $A_n, n \geq 1$; $D_r, r \geq 4$; $E_s, s = 6, 7$ ou 8 e é fácil ver que N satisfaz as condições (3) e (6).

Reciprocamente, supomos que Q não é um grafo de Gabriel. Se Q contém um ciclo, então N não satisfaz as condições (1) e (2). Supondo que Q não contém ciclos, então Q tem um subgrafo de um dos tipos III, IV, V ou VI. Se Q tem um subgrafo do tipo:

(III) então N não satisfaz a condição (3):

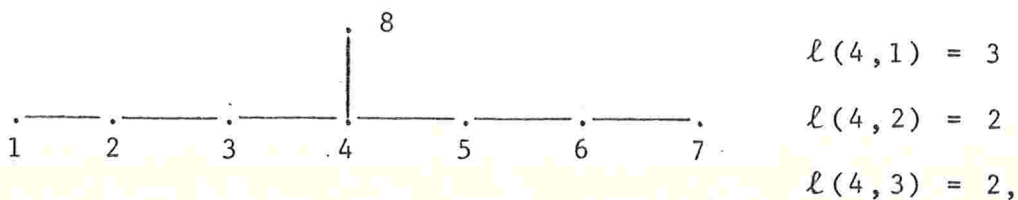
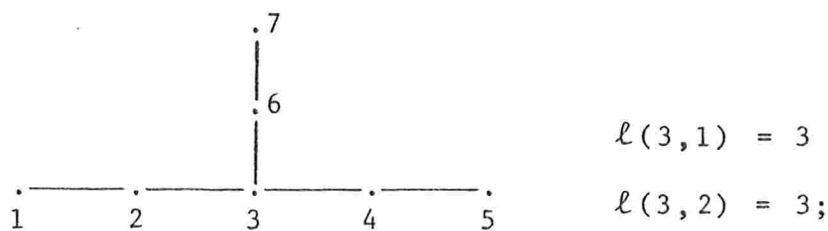


(IV) então N não satisfaz a condição (4):



$$\ell(1,1) = 3 = \ell(n,1)$$

(V) então N não satisfaz a condição (5):



em J (com $x^0, x^1, \dots, x^k \in I$) tais que $q'_{x^r} x^{\ell} x^{r\ell} x^{r\ell+1} \neq 0, 0 \leq \ell \leq k-1$.

Logo $q'_{x^r} x^{\ell} x^{r\ell} x^{r\ell+1} \neq 0, 0 \leq \ell \leq k-1$ e, portanto, $d_i(j) = d_{x^0}(x^k) \leq k < c$.
 Contradição.

Corolário: Se $d'_{i_r} j_s = c$, então $d_i(j) \leq c$.

Lema 2: Se $d_i(j) = c < \infty$, então, para cada r tal que $n-c \geq r \geq c+1$, existe $s \in \{-c, \dots, -1, 0, 1, \dots, c-1, c\}$ tal que $d'_{i_r}(j_{r+s}) = c$.

Demonstração: Indução sobre c

$c = 0$, então $i = j$ e $d_{i_r}(j_r) = 0$

$c = 1$, então $q_{ij} \neq 0$. Logo $n_{ij} \neq 0$ ou

$n_{ji} \neq 0$ ou ambos. Suponhamos $n_{ij} \neq 0$, então $m_{i_r} j_{r-1} \neq 0$ e, portanto, $q'_{i_r} j_{r-1} \neq 0$. Assim $d'_{i_r}(j_{r+s}) = 1$ para algum $s \in \{-1, 0, 1\}$.

$c > 1$, então existe $j' \in I$ tal que $d_i(j') = c-1$ e $d_j(j') = 1$. Por indução, existe $s' \in \{-c+1, -c+2, \dots, c-1\}$ tal que $d'_{i_r}(j'_{r+s'}) = c-1$. Por argumento acima, $q'_{j'_{r+s'}} j'_{r+s'+1} \neq 0$ ou $q'_{j'_{r+s'}} j'_{r+s'-1} \neq 0$.

Então, $d'_{i_r} j_{r+s'+1} \leq c$ ou $d'_{i_r} j_{r+s'-1} \leq c$, com $s' \pm 1 = s \in \{-c, \dots, c\}$. Pelo lema 1, a desigualdade implica na igualdade.

Corolário: $l(i, c) < l'(i_r, c)$ para c, r satisfazendo $1+c \leq r \leq n-c$.

Demonstração: $l(i, c)$ é igual ao número de elementos $j \in I$ tais que $d_i(j) = c$. Mas para cada um destes j e cada r satisfazendo $1+c \leq r \leq n-c$, $d'_{i_r}(j_{r+s}) = c$ para algum $s \in \{-c, \dots, -1, 0, 1, \dots, c\}$, pelo lema 2. Logo $l(i, c) \leq l(i_r, c)$.

Como consequência do corolário acima temos o seguinte:

Teorema: Se N'_n satisfaz as condições (3) - (6) para todo $n \geq 1$, então N satisfaz as condições (3) - (6).

Demonstração: Desde que as condições (3) - (6) sobre N são dadas através de uma limitação sobre $l(x,p)$ em várias circunstâncias, se N não satisfaz (3) - (6), N'_n também não satisfaz as condições (3) - (6) para n suficientemente grande.

Lembremos que um subconjunto $I' \subseteq I$ é um ciclo se $\sum_{j \in I'} q_{ij} = 2$ para cada $i \in I'$. Ainda, se I' tem $r \geq 3$ elementos, podemos ordenar os índices em I' , i_1, i_2, \dots, i_r , de tal maneira que $q_{i_j i_{j+1}} = 1 = q_{i_r i_1}$ para $1 \leq j \leq r-1$.

Se I' é um ciclo, então

$$|I'| = \begin{cases} 1 & \text{se } I' \text{ tem um elemento} \\ 2 & \text{se } I' = \{v,w\} \text{ e } n_{vw} = 1 = n_{wv} \\ 0 & \text{se } I' = \{v,w\} \text{ e } n_{vw} = 2 \text{ ou } n_{wv} = 2 \\ \left| \sum_{j=1}^r (n_{i_j i_{j+1}} - n_{i_{j+1} i_j}) \right| & \text{se } I' \text{ tem } r \geq 3 \text{ elementos, onde } i_{r+1} = i_1 \end{cases}$$

Teorema 2: N'_n satisfaz as condições (1) - (6) se, e somente se, cada componente de N satisfaz as condições (1)-(6) ou é um ciclo V com $|V| \neq 0$.

A demonstração do Teorema 2 é bastante longa e, por isso, será dividida em três passos.

Seja $V = \{1, \dots, s\}$ uma componente de N e seja W uma componente de N'_n contendo 1_r , para um r fixo. Temos que:

- a) pelo corolário do lema 1, se $1 \leq i \leq s$, $d_{1_r}^i(j_t) = \infty$ para todo $j \notin V$ e todos r e t, pois $d_i(j) = \infty$;
- b) se $i_t \in W$, então $i \in V$, pois $d_{1_r}(i_t) < \infty \implies d_1(i) < \infty$.

Nos passos 1 e 2 mostraremos que, se V satisfaz as condições (1) - (6) ou é um ciclo com $|V| \neq 0$, então W satisfaz as condições (1) - (6). Com isto fica provado que se as componentes de N satisfazem as condições (1) - (6) ou são ciclos C com $|C| \neq 0$, então N'_n satisfaz as condições (1) - (6).

No passo 3 mostraremos que, se N'_n satisfaz as condições (1)-(6), então as componentes de N satisfazem as condições (1)-(6) ou são ciclos C com $|C| \neq 0$.

Passo 1: Supondo que V satisfaz as condições (1)-(6), mostraremos que W também satisfaz as condições (1) - (6). Começamos provando o seguinte:

Lema: Se $v_{r_0}^0, v_{r_1}^1, \dots, v_{r_t}^t$ são elementos distintos de W , com $q_{v_{r_i}^i, v_{r_{i+1}}^{i+1}} \neq 0$ para $0 \leq i \leq t-1$, então v^0, v^1, \dots, v^t são elementos distintos de v .

Demonstração: Indução sobre t

$$t = 0$$

$$t = 1. \text{ Desde que } q_{v_{r_0}^0, v_{r_1}^1} \neq 0, q_{v_0, v_1} \neq 0.$$

Então $v^0 \neq v^1$ pois: $v^0 = v^1 \implies q_{v_0, v_0} \neq 0 \implies q_{v_0, v_0} \geq 2$, o que contradiz a condição (1).

$t = 2$. Pelo caso $t = 1$, $v^0 \neq v^1$ e $v^1 \neq v^2$. Suponhamos que $v^0 = v^2$. Sendo $q_{v_0, v_1} = 1$, então $n_{v_0, v_1} = 1$ ou $n_{v_1, v_0} = 1$ mas não ambos. Se $n_{v_0, v_1} = 1$, então

$$q_{v_{r_0}^0, v_{r_1}^1} \neq 0 \implies r_1 = r_0 - 1.$$

$$\text{Agora, } q_{v_{r_1}^1, v_{r_2}^2} \neq 0 \implies r_2 = r_1 + 1. \quad \text{Logo}$$

$v_{r_0}^0 = v_{r_2}^2$. O que é uma contradição pois $v_{r_0}^0, v_{r_1}^1, v_{r_2}^2$ são distintos.

$t \geq 3$. Por indução, v^0, \dots, v^{t-1} e v^1, \dots, v^t são distintos. Logo v^0, \dots, v^t são distintos se $v^0 \neq v^t$. Pela condição (2), $d_{v_0}(v^{t-1}) = t - 1 \geq 2$. Mas $d_{v_{t-1}}(v^t) = 1$, o que seria uma contradição se $v^0 = v^t$.

Logo, se V satisfaz as condições (1) - (6) e $i_t, j_s \in W$, pelo lema anterior,

$$d_{i_t}(j_s) = c < \infty \implies d_i(j) = c$$

$$d_{i_t}(i_t) = d_i(i) = 0 \implies t = t'$$

Logo, se $i_t \in W$, t é único.

Agora,

$$\begin{aligned}
\ell'(i_t, p) &= \text{número de } j_s \in W \text{ tais que} \\
d_{i_t}(j_s) &= p \leq (\text{número de } j \in V \text{ tais que} \\
d_i(j) &= p) = \ell(i, p).
\end{aligned}$$

Isto é, $\ell'(i_t, p) \leq \ell(i, p)$. Logo, se V satisfaz as condições (3) - (6), W também as satisfaz. Pois estas condições são dadas por $\ell'(i_t, p)$.

Finalmente, se V satisfaz as condições (1) e (2), então W satisfaz a condição (1), pois $q_{i_r j_s} \leq q_{ij} \leq 1$ e, pelo lema, W satisfaz a condição (2), desde que, se

$$\begin{aligned}
v_{r_0}^0, \dots, v_{r_p}^p &\text{ são elementos distintos de } W \text{ com} \\
q_{v_{r_i}^i} v_{r_{i+1}}^{i+1} \neq 0 &\text{ para } 0 \leq i \leq p-1, \text{ então } d_{v_0}(v_{r_p}^p) = d_{v_0}(v^p) = p.
\end{aligned}$$

Passo 2: Suponhamos que V é um ciclo com $|V| \neq 0$. (veja exemplo 5 página 41).

a) W satisfaz as condições (3) - (6).

Se provarmos que $\ell'(v_i, 1) \leq 2$ para todo $v_i \in W$, então W obviamente satisfaz as condições (3) - (6).

$$\begin{aligned}
\ell'(v_i, 1) &\leq \text{número de } w_j \in W \text{ tais que } q'_{v_i w_j} \neq 0 \leq (\text{número de } w \in V \text{ tais que } n_{vw} \neq 0) + (\text{número de } w \in V \text{ tais} \\
&\text{que } n_{vw} \neq 0) \leq \sum_{w' \in V} (n_{vw'} + n_{w'v}) = \sum_{w' \in V} q_{vw'} \text{ mas,} \\
\sum_{w' \in V} q_{vw'} &= 2 \text{ pois } V \text{ é um ciclo. Logo } \ell'(v_i, 1) \leq 2 \text{ pa} \\
&\text{ra todo } v_i \in W.
\end{aligned}$$

b) W satisfaz as condições (1) e (2).

Lembrando que V é conexo, começaremos provando dois lemas:

Lema: $n_{v,w} = 1$ ou 0 para $v, w \in V$.

Demonstração: Se $n_{vw} \geq 2$, então $n_{vw} = 2$ e $q_{vw'} = 0$ para $w \neq w'$, pois $2 = \sum_{w' \in V} q_{vw'}$. Analogamente, $q_{ww'} = 0$ para $w' \neq v$. Logo, desde que V é conexo, $V = \{v, w\}$. Mas $|V| \neq 0$ e, portanto,

$n_{vw} = 1 = n_{wv}$, o que é uma contradição.

Lema: Existe um $v \in V$ tal que $n_{vv} = 1$ se, e somente se, $V = \{v\}$.

Demonstração: Se $V = \{v\}$, então $2 = \sum_{w \in V} q_{vw} = q_{vv} = 2n_{vv}$.

Portanto $n_{vv} = 1$.

Se $n_{vv} = 1$, então $q_{vv} = 2$ e $q_{vw} = 0$ para todo $w \neq v$, pois $2 = \sum_{w \in V} q_{vw}$. Sendo V conexo, $V = \{v\}$.

Caso 1: Se $V = \{v\}$, então $|V| = 1$. Seja $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ um conjunto de vértices em W . Então, supondo que $i_1 < i_j$ para $2 \leq j \leq r$, $\sum_{j=1}^r q'_{v_{i_1} v_{i_j}} \leq 1$. Logo $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ não é um ciclo e, portanto, W não contém ciclos.

Caso 2: $V = \{v, w\}$ com $v \neq w$. Como $|V| = 1$, temos que $n_{vw} = 1 = n_{wv}$. Então $q'_{v_i v_j} = 0 = q'_{w_i w_j}$ para todos i e j e

$$q'_{v_i w_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{se } |i-j| \neq 1 \end{cases}$$

Seja $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$ um conjunto de vértices em W . Podemos supor que $i_1 \leq i_j$, para $2 \leq j \leq r$ e que $x_{i_1} = v_{i_1}$. Então $\sum_{j=1}^r q'_{x_{i_1} x_{i_j}} \leq 1$. Logo, W não contém ciclos.

Caso 3: $V = \{v^1, \dots, v^r\}$ com $r \geq 3$, $q_{v^i v^{i+1}} = 1 = q_{v^r v^1}$, para $1 \leq i \leq r-1$ e $|V| \neq 0$.

Seja $f: V \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(v^1) = \begin{cases} 1, & \text{se } n_{v^2 v^1} = 1 \\ -1, & \text{se } n_{v^1 v^2} = 1 \end{cases}$$

para $2 \leq i \leq r-1$,

$$f(v^i) = \begin{cases} f(v^{i-1}) + 1, & \text{se } n_{v^{i+1} v^i} = 1 \\ f(v^{i-1}) - 1, & \text{se } n_{v^i v^{i+1}} = 1 \end{cases}$$

$$f(v^r) = \begin{cases} f(v^{r-1}) + 1, & \text{se } n_{v^1 v^r} = 1 \\ f(v^{r-1}) - 1, & \text{se } n_{v^r v^1} = 1 \end{cases}$$

Temos que $|f(v^r)| = |v| \neq 0$

Suponhamos que $x_{k_1}^1, x_{k_2}^2, \dots, x_{k_s}^s \in W$ são tais que

$$q'_{x_{k_i}^i} x_{k_{i+1}}^{i+1} \neq 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq s-1.$$

Devemos mostrar que $\{x_{k_1}^1, \dots, x_{k_s}^s\}$ não é um ciclo. Re-
numerando os v^i 's, se necessário, podemos supor que $x^1 = -v^1$.

Então

$$q'_{v_{k_1}^1} w_j \neq 0 \implies (w_j = v_j^2 \text{ ou } w_j = v_j^r) \quad \text{e} \\ (j = k_1+1 \text{ ou } k_1-1)$$

Suponhamos que $w_j = v_j^2$, então

$$q_{x_{k_1}^1} v_j^2 = m_{x_{k_1}^1} v_j^2 + m_{v_j^2} x_{k_1}^1 \neq 0 \iff m_{x_{k_1}^1} v_j^2 \neq 0$$

ou $m_{v_j^2} x_{k_1}^1 \neq 0$.

$$m_{x_{k_1}^1} v_j^2 \neq 0 \implies j = k_1 - 1 \text{ e } f(v^1) = -1 \implies j = k_1 + f(v^1)$$

$$m_{v_j^2} x_{k_1}^1 \neq 0 \implies j = k_1 + 1 \text{ e } f(v^1) = 1 \implies j = k_1 + f(v^1)$$

Analogamente, se $w_j = v_j^r$ então $j = k_1 + f(v^{r-1}) - f(v^r)$

Logo

$$q_{x_{k_1}^1} w_j \neq 0 \iff w_j = v_{k_1 + f(v^1)}^1 \quad \text{ou}$$

$$w_j = v_{k_1 + f(v^{r-1}) - f(v^r)}^r$$

Invertendo, se necessário, a ordem dos v^i 's, podemos

supor que

$$x_{k_2}^2 = v_{k_1 + f(v^1)}^2$$

$$q'_{x_{k_2}^2} w_j \neq 0 \iff w_j = v_{k_1}^1 \text{ ou } w_j = v_{k_1 + f(v^2)}^3$$

$$\implies x_{k_3}^3 = v_{k_1 + f(v^2)}^3.$$

Continuando, encontraremos que

$$x_{k_i}^t = v_{k_1}^i + \ell f(v^r) + f(v^{i-1}) \text{ se}$$

$$t = \ell.r + i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (\text{se } i = 1, \text{ faça } f(v^0) = 0)$$

Se $x_{k_s}^s = v_{k_s}^i$ com $1 \leq i < r$, então

$$x_{k_{s-1}}^{s-1} = v_{k_s}^{i-1} + f(v^{i-2}) - f(v^{i-1}). \text{ Como } x_{k_s}^s \neq x_{k_t}^t$$

para $1 \leq t < s$,

$$q'_{x_{k_s}^s} w_j \neq 0 \iff w_j = x_{k_{s-1}}^{s-1}$$

Neste caso, $\{x_{k_1}^1, \dots, x_{k_s}^s\}$ não é um ciclo, pois

$$x_{k_{s-1}}^{s-1} \neq x_{k_1}^1$$

Suponhamos, agora, que $x_{k_s}^s = v_{k_s}^r$

Neste caso, $k_s = k_1 + \ell f(v^r) + f(v^{r-1})$ onde $s = \ell.r + r$. Então $q'_{v_t} x_{k_s}^s \neq 0 \iff t = k_s + f(v^r) - f(v^{r-1}) = k_1 + (\ell+1) f(v^r)$.

Mas $k_1 \neq k_1 + (\ell+1) f(v^r)$, pois $f(v^r) = |V| \neq 0$.

Logo $q'_{x_{k_1}^1} x_{k_s}^s \neq 0$, o que completa a demonstração do passo 2.

Passo 3: N'_n satisfaz as condições (1) - (6) para todo $n \geq 1$. Queremos mostrar que cada componente de N satisfaz as condições (1) - (6) ou é um ciclo C , com $|C| \neq 0$.

Seja V uma componente de N . Desde que N'_n satisfaz as condições (3) - (6) para todo $n \geq 1$, pelo Teorema 1 desta seção V satisfaz as condições (3) - (6). Agora, supondo que V não satisfaz as condições (1) - (2), mostraremos que V é um ciclo com $|V| \neq 0$.

Pelo lema da seção 3.2, V contém um ciclo. Então existe um subconjunto minimal $V' \subseteq V$ tal que

$$\sum_{w \in V'} q_{vw} \geq 2, \text{ para cada } v \in V'.$$

Pela proposição 2 da seção 3.1, V' tem um ou dois elementos

ou V' é um ciclo.

Notemos que $n_{vw} = 1$ ou 0 pois N'_n satisfaz a condição (1), $q_{v_2 w_1} = 1$ ou $0 \implies n_{v_2 w_1} \leq 1 \implies n_{vw} \leq 1$.

Caso 1: Suponhamos que $V' = \{v\}$. Então $n_{vv} = 1$ pois $q_{vv} \geq 2$ e $n_{vv} \leq 1$.

Se $V' = V$, então V é um ciclo com $|V| = 1 \neq 0$.

Suponhamos que $V' \neq V$, então existe $w \in V - V'$ tal que $q_{vw} \neq 0$. Em N'_n , $q'_{v_1 v_2} \neq 0 \neq q'_{v_2 v_3}$ e, ainda, $q'_{v_2 w_1} \neq 0$ ou $q'_{w_3 v_2} \neq 0$, pois $n_{vw} \neq 0$ ou $n_{wv} \neq 0$. Logo $\ell'(v_2, 1) \geq 3$. Analogamente $\ell'(v_3, 1) \geq 3$. Mas $d'_{v_2}(v_3) = 1$, isto é, v_2 e v_3 pertencem a uma mesma componente de N'_n , e portanto N'_n não satisfaz a condição (4). Contradição.

Caso 2: Suponhamos que $V' = \{v, w\}$ Então

$n_{vw} = 1$ ou $0 \implies n_{vw} = 1 = n_{wv}$ desde que $q_{vv} + q_{vw} \geq 2$ e $q_{vv} = 0$ pela minimalidade de V' . Logo V' é um ciclo e $|V'| = 2 \neq 0$. Mostraremos que $V' = V$.

Se $V' \neq V$, então existe $x \in V - V'$ tal que $q_{vx} \neq 0$ ou $q_{wx} \neq 0$. Suponhamos $q_{vx} \neq 0$. Então $\ell'(v_2, 1) \geq 3$, pois $d'_{v_2}(w_1) = 1 = d'_{v_2}(w_3)$ e $(d'_{v_2}(x_1) = 1$ ou $d'_{v_2}(x_3) = 1)$

Analogamente, $\ell'(v_4, 1) \geq 1$. Mas $d'_{v_2}(v_4) \leq 2$, pois $d'_{v_2}(w_3) = 1 = d'_{v_4}(w_3)$. Logo N'_n não satisfaz a condição (4), para n suficientemente grande. Isto é uma contradição e, portanto, $V = V'$.

Caso 3. Suponhamos que V' tem três ou mais elementos. Então V' é um ciclo.

(a) $|V'| \neq 0$

Pelo corolário da proposição 2, seção 3.1, os elementos de V' podem ser ordenados, v^1, \dots, v^r de tal maneira que $q_{v^i v^{i+1}} = 1 = q_{v^1 v^r}$, para $1 \leq i \leq r-1$.

Logo $n_{v_i v_{i+1}} = 1$ ou $n_{v_{i+1} v_i} = 1$, mas não ambos, e $n_{v^1 v^r} = 1$ ou $n_{v^r v^1} = 1$, mas não ambos.

Consideremos a função, já definida, $f: V' \rightarrow Z$ (ver pág. 37). Temos que

$$q'_{v_{s+f(v^{i-1})} v_{s+f(v^i)}}^{i+1} = 1 = q'_{v_{s+f(v^r)} v_{s+f(v^{r-1})}}^1$$

Se $|V'| = 0$, então $f(v^r) = 0$ e, portanto,

$$q'_{v_s v_{s+f(v^{r-1})}}^1 = 1$$

Daí, temos que $\{v_s^1, v_{s+f(v^2)}^2, \dots, v_{s+f(v^{r-1})}^r\}$ é um ciclo em N'_n , para $s \geq r+1$ e $n \geq r+s$. Isto é uma contradição pois N'_n não contém ciclos. Logo $|V'| \neq 0$.

(b) $V = V'$

Se $V \neq V'$, então existe $w \in V - V'$ tal que $q_{vw} \neq 0$, para algum $v \in V'$. Podemos supor que $q_{v^1 w} \neq 0$.

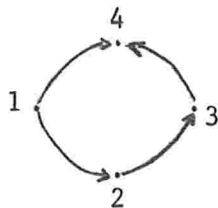
De acordo com o que foi mostrado nos casos 1 e 2, $\ell'(v_s, 1) \geq 3$ para $1 < s < n$. Mas $d_{v_s^1}(v_{s+f(v^r)}^1) < \infty$. Logo para $s \geq r+1$ e $n \geq r+s+1$, N'_n não satisfaz a condição (4). Contradição.

Isto completa a demonstração do teorema.

Exemplo 5:

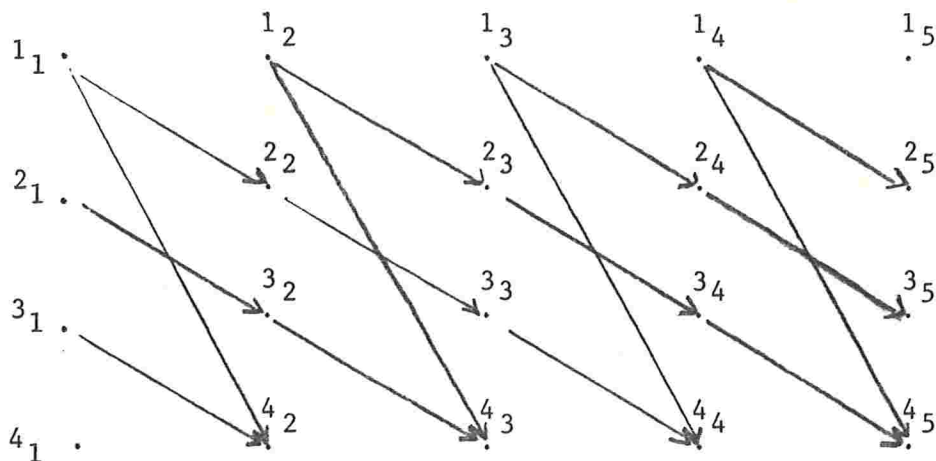
$$\text{Seja } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ então}$$

o grafo associado a N é



e N tem apenas uma componente $V = \{1, 2, 3, 4\}$. V é um ciclo e $|V| = 2$.

Para $n=5$, o grafo associado a N'_n é



$W = \{3_1, 4_2, 1_1, 2_2, 3_3, 4_4, 1_3, 2_4, 3_5\}$. Renumerando os elementos de V , podemos fazer $v^1 = 3$, $V = \{v^1, v^2, v^3, v^4\}$ onde $v^2 = 4$, $v^3 = 1$ e $v^4 = 2$.

$$f(v^1) = 1; f(v^2) = 0; f(v^3) = 1; f(v^4) = 2$$

W tem a propriedade $q'_{x_i} x_{k_i}^{i+1} \neq 0 \quad 1 \leq i \leq 8, (s=9)$.

Temos ainda,

$$\begin{aligned} k_1 &= 1; k_2 = 2 = k_1 + f(v^1); k_3 = 1 = k_1 + f(v^2); \\ k_4 &= 2 = k_1 + f(v^3); k_5 = 3 = k_1 + f(v^4); k_6 = 4 = k_1 + f(v^4) + f(v^1) \\ k_7 &= 3 = k_1 + f(v^4) + f(v^2); k_8 = 4 = k_1 + f(v^4) + f(v^3); \\ k_9 &= 5 = k_1 + 2f(v^1) \end{aligned}$$

Teorema 3: Γ_n tem tipo de representação finito para todo $n \geq 1$ se, e somente se, o grafo associado a $T_R(M)$ é composto por diagramas de Dynkin e ciclos C tais que $|C| \neq 0$.

Demonstração: Podemos supor que o grafo $Q_{T_R(M)}$ associado à $T_R(M)$ tem apenas uma componente.

Se $Q_{T_R(M)}$ é um diagrama de Dynkin, então $T_R(M)$ tem tipo de representação finito. Portanto $\Lambda_n = T_R(M)/J^n$ tem tipo de representação finito para todo $n \geq 1$. Logo Γ_n tem tipo de representação finito.

Se $Q_{T_R(M)}$ é um ciclo com $|Q_{T_R(M)}| \neq 0$, então, pelo teo

rema 2, o grafo associado a Γ_n satisfaz as condições (1)-(6). Logo o grafo associado a Γ_n é um grafo de Gabriel e, portanto, Γ_n tem tipo de representação finito.

Agora, suponhamos que Γ_n tem tipo de representação finito para todo $n \geq 1$. Então a matriz reduzida \bar{N}'_n associada a Γ_n satisfaz as condições (1)-(6). Pelo teorema 2, a matriz reduzida \bar{N} associada a $T_R(M)$ satisfaz as condições (1)-(6) ou é um ciclo V com $|V| \neq 0$:

(a) \bar{N} é um ciclo V com $|V| \neq 0$. Então $\bar{N} = N$, isto é, a matriz associada a $T_R(M)$ é igual a sua matriz reduzida. Pois se isto não ocorresse, existiriam índices i e j de N tais que $\dim_{K} F_i \neq \dim_{K} F_j$ e $n_{ij} = \dim_{F_i}({}_i M_j) \times \dim({}_i M_j)_{F_j} \neq 0$, onde $R = \prod_i F_i$ e $M = \prod_{i,j} {}_i M_j$. Pelo que foi feito na demonstração do passo 2 do teorema anterior, para n suficientemente grande, existe $r > 0$ tal que $d_{i_2}({}_{i_2+r}) < \infty$ em N'_n . Mas, $m'_{i_2 j_1} = n_{ij}$ e $m'_{i_{2+r} j_{1+r}} = n_{ij}$ e portanto o grafo associado a Γ_n tem uma componente com dois pares de vértices ligados por mais de uma flecha. Logo o grafo associado a Γ_n não é um diagrama de Dynkin. Contradição.

(b) \bar{N} é um grafo de Gabriel. Então N não contém ciclos. Mostraremos que as componentes do grafo associado a Γ_n são subgrafos do grafo associado a $T_R(M)$. Seja $V = \{v^1, \dots, v^s\}$ o conjunto de vértices de N e W uma componente de N'_n .

i) Suponhamos que v_i^1, v_j^1 pertençam a W , então $d_{v_j^1}(v_i^1) = c < \infty$ e, portanto, existem elementos distintos $x_{k_1}^1 = v_i^1, x_{k_2}^2, \dots, x_{k_{c+1}}^{c+1} = v_j^1$ em W tais que

$q_{x_i}^i x_{k_{i+1}}^{i+1} \neq 0$, para $1 \leq i \leq c$. Logo, $q_{x_i} x_{k_{i+1}}^{i+1} \neq 0$ para

$1 \leq i \leq c$ e, portanto, $V' = \{x^1, \dots, x^c\} \subseteq V$ contém um ciclo. Con-

tradição. Temos que

$$v_i^k, v_j^k \in W, 1 \leq k \leq s \implies i=j$$

e o número de elementos de W é menor ou igual ao número de elementos de V .

ii) Por (i), podemos supor que

$$W = \{v_{k_1}^1, v_{k_2}^2, \dots, v_{k_r}^r\}, r \leq s. \text{ Devemos mostrar que}$$

$$m'_{v_{k_i}^i v_{k_j}^j} = n_{v_i v_j} \text{ para todos } v_{k_i}^i, v_{k_j}^j \in W.$$

$$m'_{v_{k_i}^i v_{k_j}^j} = \begin{cases} n_{v_i v_j} & \text{se } k_i = k_j + 1 \\ 0 & \text{se } k_i \neq k_j + 1 \end{cases}$$

$$m'_{v_{k_i}^i v_{k_j}^j} = 0 \text{ e } n_{v_i v_j} \neq 0 \iff k_i \neq k_j + 1$$

Sabemos que $d_{v_j} (v_{k_i}^i) = c < \infty$. Do mesmo modo que no item (i), obtemos um conjunto $V' = \{x^1 = v^i, x^2, \dots, x^{c+1} = v^j\} \subseteq V$ tal que $q_x t_x^{t+1} \neq 0, 1 \leq t \leq c$, e $x^t \neq x^\ell$ se $t \neq \ell$. Como $q_x^1 x^{c+1} \neq 0$, V' contém um ciclo. Contradição.

Logo W é um subgrafo de V . Assim, para n suficientemente grande, existe uma componente do grafo associado a Γ_n que é o mesmo grafo associado a $T_R(M)$. Como Γ_n tem tipo de representação finito seu grafo é composto por diagramas de Dynkin. Portanto o grafo associado a $T_R(M)$ é um diagrama de Dynkin.

4 - O TEOREMA E EXEMPLOS

Tendo em vista os resultados das seções precedentes, obteremos agora condições necessárias e suficientes sobre $T_R(M)$ para que $\Lambda_n = T_R(M)/J^n$ tenha tipo de representação finita para cada $n \geq 1$.

Lembrando que se Λ_n tem T.R.F. então Γ_n tem T.R.F., pelo teorema 3 da seção 3.3, temos o seguinte:

Proposição 1: Se $T_R(M)$ é uma álgebra tensorial especial e $\Lambda_n = T_R(M)/J^n$ tem T.R.F. para todo $n \geq 1$, então o grafo associado a $T_R(M)$ é composto por diagramas de Dynkin ou ciclos C tais que $|C| \neq 0$.

Proposição 2. Seja $T_R(M)$ uma álgebra tensorial especial. Se $\otimes_{-R}^r M \neq 0$ para todo $r \geq 1$, então o grafo associado a $T_R(M)$ contém um subgrafo do tipo Z_m .

Demonstração:

Seja $M = \bigsqcup_{i,j=1}^n M_{ij}$ e $V = \{1, 2, \dots, n\}$ então

$$\otimes_{-R}^r M = \bigsqcup_{k_0, k_1, \dots, k_r=1}^n M_{k_0 k_1} \otimes_{k_1} M_{k_1 k_2} \otimes \dots \otimes_{k_{i-1}} M_{k_{i-1} k_0}$$

$\otimes_{-R}^r M \neq 0 \implies k_0, k_1, \dots, k_r \in V$ tais que $M_{k_i k_{i+1}} \neq 0$ para $i=0, \dots, r-1$.

Seja V um conjunto finito, para r suficientemente grande, os vértices k_0, k_1, \dots, k_r não podem ser todos distintos. Isto é, existem $i, j \in \{0, 1, \dots, r\}$ tais que $k_i = k_j$. Supondo $j = i+t$, vemos que $V' = \{k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+t}\}$ contém um ciclo do tipo Z_m .

Observação: A recíproca da proposição anterior é verdadeira.

Teorema: Seja $T_R(M)$ uma álgebra tensorial especial cuja decomposição em álgebras tensoriais especiais indecomponíveis é $\prod_{i=1}^r T_{R_i}(M_i)$. Sejam $J = M + M^{(2)} + \dots$ e $J_i = M_i + M_i^{(2)} + \dots$, para $1 \leq i \leq r$. Então Λ_n tem T.R.F. para todo $n \geq 1$ se, e somente se, para cada $i = 1, \dots, r$, $T_{R_i}(M_i)$ tem T.R.F. ou $T_{R_i}(M_i)/J_i^2$ é um anel de Nakayama. Isto é, Λ_n tem T.R.F. para todo $n \geq 1$ se, e somente se, o grafo associado a $T_R(M)$ é composto de diagramas de Dynkin ou ciclos do tipo Z_m , $m \geq 1$.

Demonstração: Suponhamos que cada $T_{R_i}(M_i)$ tem T.R.F. ou $T_{R_i}(M_i)/J_i^2$ é um anel de Nakayama. Então $T_R(M)/J^n = \Lambda_n$ tem T.R.F. para todo $n \geq 1$, pois $\Lambda_n / (\text{rad } \Lambda_n)^2 \cong \Lambda_2$ (ver proposição 1, seção 2.3).

Agora, suponhamos que $T_R(M)/J^n$ tem T.R.F. para todo $n \geq 1$. Então o grafo associado a cada $T_{R_i}(M_i)$ é um diagrama de Dynkin ou um ciclo C com $|C| \neq 0$, pois $T_{R_i}(M_i)$ tem T.R.F. para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.

O teorema estará demonstrado se provarmos que:

(I) Se o grafo associado a uma álgebra tensorial especial $T_R(M)$ é um ciclo C , com $|C| \neq 0$, então $T_R(M)/J^n$ tem T.R.F. para todo $n \geq 1$ se, e somente se, C é do tipo Z_m .

Para isto, consideremos a afirmação:

(II) $\bigotimes_R^r M \neq 0, \forall r \geq 1 \implies C$ é do tipo Z_m . Pela proposição 2 desta seção, II é verdadeira. Assim, nossa demonstração estará completa se provarmos que: (II) \implies (I).

Suponhamos que $T_R(M)/J^n$ tem T.R.F. para todo $n \geq 1$. Se $\bigotimes_R^r M = 0$ para algum r , então $J^r = 0$ e $T_R(M)/J^r = T_R(M)$. Mas se $T_R(M)$ tem T.R.F., o grafo associado a $T_R(M)$ é composto por diagramas de Dynkin. Isto contradiz o fato de ser o grafo associado um ciclo. Assim, $\bigotimes_R^r M \neq 0$ para todo r e, por II,

C é do tipo Z_m .

Reciprocamente, se C é do tipo Z_m , pela proposição 1, seção 2.3, $T_R(M)/J^n$ é um anel de Nakayama, para todo $n \geq 1$. Logo, os anéis $T_R(M)/J^n$ têm T.R.F. para $n \geq 1$.

Uma aplicação do teorema anterior:

Teorema: Seja $\underline{\Lambda}$ uma K -álgebra artíniana tal que $\text{rad}(\underline{\Lambda})$ é um somando direto de $\underline{\Lambda}$ e $\underline{\Lambda}/\text{rad}(\underline{\Lambda}) = \prod_{i=1}^m F_i$ como K -álgebra, onde cada F_i é uma álgebra com divisão, central e de dimensão finita sobre K . Então, $\underline{\Lambda}$ tem T.R.F. se o grafo associado a $T_{\underline{\Lambda}/\text{rad}(\underline{\Lambda})}(\text{rad}(\underline{\Lambda})/(\text{rad}(\underline{\Lambda}))^2)$ é composto por diagramas de Dynkin ou ciclos do tipo Z_p .

Demonstração: Sejam $R = \underline{\Lambda}/\text{rad}(\underline{\Lambda})$ e $M = \text{rad}(\underline{\Lambda})/(\text{rad}(\underline{\Lambda}))^2$. Consideremos o anel $T_R(M)/J^n$, onde $J = \prod_{i=1}^{\infty} M^{(i)}$ e n é o menor inteiro positivo tal que $(\text{rad}(\underline{\Lambda}))^n = 0$. A aplicação

$$f: T_R(M)/J^n \longrightarrow \underline{\Lambda}$$

definida por

$$f(r + m + m_1^1 \otimes m_2^1 + \dots + m_1^{n-2} \otimes \dots \otimes m_{n-1}^{n-2}) = r + m + m_1^1 \cdot m_2^1 + \dots + m_1^{n-2} \cdot \dots \cdot m_{n-1}^{n-2}$$

é um epimorfismo de anéis. Logo $\underline{\Lambda}$ tem T.R.F. pois $T_R(M)/J^n$ tem T.R.F.

Exemplo 1. Sejam $F_1 = F_2 = K$, $R = F_1 \times F_2$, r um número inteiro ≥ 1 e

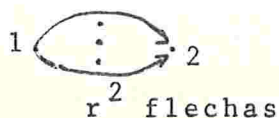
$${}^i M_j = \begin{cases} K^r, & \text{se } i = 2 \text{ e } j = 1 \\ 0, & \text{se } i \neq 2 \text{ ou } j \neq 1 \end{cases}$$

$$a) T_R(M) = K \times K + {}_2 M_1 + 0 + \dots, J^n = 0 \text{ para } n \geq 2$$

$$T_R(M) \simeq \begin{pmatrix} K & 0 \\ V & K \end{pmatrix} \text{ onde } V \text{ é um } K\text{-espaço vetorial de}$$

dimensão r .

b) O grafo associado a $T_R(M)$ é



Logo, $T_R(M)$ tem T.R.F. se, e somente se, $r=1$ e, neste caso $T_R(M)$ é a álgebra das matrizes 2×2 triangulares $\begin{pmatrix} K & 0 \\ K & K \end{pmatrix}$

$$c) T_R(M) / J^n = \begin{cases} R & \text{se } n=1 \\ T_R(M) & \text{se } n>1 \end{cases}$$


Exemplo 2: Sejam $R=K$ e ${}_1M_1 = K^r$, $r>0$.

a) $T_R(M) = K + K^r + K^r + \dots \cong K[x_1, x_2, \dots, x_r]$

b) O grafo associado a $T_R(M)$ é



$T_R(M)$ não tem T.R.F., para todo $r \geq 1$.

c) Para $r=1$, Q é  e $T_R(M) \cong K[x]$

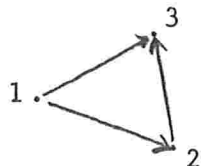
$T_R(M)$ não tem T.R.F., mas Γ_n e Λ_n têm T.R.F. para todo $n \geq 1$.

$\Lambda_n = T_R(M) / (x^n)$, onde (x^n) é o ideal de $K[x]$ gerado por x^n .

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} K & & & 0 \\ K & K & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ K & K & \dots & K \end{pmatrix}$$

Exemplo 3. Seja $R = K \times K \times K$. Se $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, sejam $R_i = e_i R e_i$ e $M = R_2 \otimes_K R_1 + R_3 \otimes_K R_2 + R_3 \otimes_K R_1$.

a) $T_R(M)$ não tem T.R.F. pois o grafo Q associado a $T_R(M)$ é



b) $M \otimes_R M = (R_3 \otimes_K R_2) \otimes_R (R_2 \otimes_K R_1)$

$$(M \otimes_R M) \otimes_R M = 0 \implies M^{(n)} = 0 \text{ para } n \geq 3$$

$$\implies T_R(M) = R + M + M \otimes_R M + 0 + 0 + \dots$$

Logo $T_R(M)$ é uma K -álgebra artiniana hereditária, com $(\text{rad}(T_R(M)))^3 = 0$.

c) Q é um ciclo e $|Q| = 1 \neq 0$, logo Γ_n tem T.R.F. para todo $n \geq 1$.

d) $\Lambda_2 = T_R(M)/M^{(2)}$ tem T.R.F.

Demonstração:

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ M & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_R(M)/J & 0 \\ J/J^2 & T_R(M)/J \end{pmatrix}, \text{ onde}$$

$J = \text{rad}(T_R(M))$, tem T.R.F.. A afirmação acima é consequência do seguinte teorema:

Teorema (Auslander-Reiten). Se Λ é um anel artiniano, $r = \text{rad}(\Lambda)$ e $r^2 = 0$, então Λ tem T.R.F. se, e somente se, $\begin{pmatrix} \Lambda/r & 0 \\ r & \Lambda/r \end{pmatrix}$ tem T.R.F. (ver (11))

Observação: O exemplo 3 mostra que para um anel artiniano Λ , com $r^3 = 0$, o anel

$$\begin{pmatrix} \Lambda/r & 0 & 0 \\ r/r^2 & \Lambda/r & 0 \\ r^2 & r/r^2 & \Lambda/r \end{pmatrix}$$

pode ter T.R.F. sem que Λ tenha T.R.F.

5 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - GREEN, Edward L. The Representation Theory of Tensor Algebras. Journal of Algebra. Abril 1975. Vol. 34.
- 2 - CHEVALLEY, Claude. Fundamental Concepts of Algebra. Columbia University, New York. 1956.
- 3 - ATIYAH, M.F. e MACDONALD, I.G. Introducción al álgebra comutativa. Editorial Reverté, S.A. 1978.
- 4 - JONES, A. e MERKLEN, H. Representações de Álgebras. Instituto de Matemática e Estatística. USP. 1986.
- 5 - DLAB, V. e RINGEL, C. On algebras of finite representation type. Department of Mathematics Lecture Notes nº 2. Carleton University. Ottawa. Ontario. 1973.
- 6 - MERKLEN, H. Representaciones de álgebras y el Teorema de Gabriel. Universidade de São Paulo. 1981.
- 7 - GREEN, E. A criteria for relative global dimension 0 with applications to graded rings. J. Álgebra. 34. 130-135p.
- 8 - DROZD, Yury A. y KIRICHENKO, Vladimir. Álgebras de Dimensión Finita. Publicaciones del Departamento de Matemáticas (Instituto de Ciências de la Universidad Autónoma de Puebla). Setembro de 1983.
- 9 - NAKAYAMA, T. On Frobenius algebras II. Ann of Math. 42. 1(1941). 1-21p.
- 10 - CIBILS, C., LARRIÓN, F. e SALMERÓN L. Métodos diagramáticos em teoria de representaciones.
- 11 - M. AUSLANDER AND I. REITEN, Notes on the representation theory of Artin algebras, Mimeographed notes, Brandeis University, Waltham, MA, 1973.