AÇÕES REDUTIVAS DE GRUPOS ALGÉBRICOS

Heloisa Daruiz Borsari

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR
Prof. Dr. Walter Ricardo Ferrer Santos

Durante o ano de 1987, a autora recebeu apoio financeiro do Programa de Desarrollo de las Ciencias Basicas da UNESCO (PEDECIBA – UNESCO)

– SÃO PAULO, Julho de 1989 –

AGRADECIMENTOS

Gostaria de registrar meu agradecimento às inúmeras pessoas que, de uma forma ou de outra, participaram do processo de elaboração deste trabalho. Dentre elas, agradeço especialmente ao Walter, pela orientação, estímulo, dedicação e amizade; aos amigos aqui da USP e lá de casa, e muito especialmente à Lucília, os quais, com suas cartas, telefonemas e visitas, adoçaram minha "temporada uruguaia", em 87; ao Waldir, por todos os nossos encontros, sempre repletos de compreensão, ternura e dedicação; ao Chico, meu companheiro de todas as horas que, acreditando sempre, me ajudou a crer também que chegaríamos até aqui; ao Daci, pela paciência, apoio e imensa solidariedade, tão fundamentais em todo esse período. Agradeço ainda ao João Carlos e Cristina pela datilografia deste trabalho.

É preciso registrar também que os obstáculos foram muitos. Não bastassem as dificuldades inerentes a estes processos, as batalhas contra a burocracia e a discriminação fizeram parte do nosso dia-a-dia ao longo destes anos. Contudo, não foram poucos os colegas com quem pudemos contar nesses embates. A eles, meu agradecimento especial.

Conteúdo

Abstract

In this work we extend some classical algebraic characterizations of linearly reductive groups to more general contexts. These characterizations are obtained in terms of an "integral" and in cohomological terms. In the first case, the concept of generalized integral is introduced and we prove that the existence of such an integral characterizes the geometric reductivity. In the second case, it is proved that reductivity is equivalent to verification of certain polynomial conditions for cocycles with values in an arbitrary representation.

Furthermore, we study linearly and geometrically reductive actions. In the linear case, necessary and sufficient conditions in terms of Reynolds Operator, Integral and in cohomological terms are presented. There is also a concept of "generalized integral" which characterizes the geometrically reductive actions.

Introdução

Em fins do século XIX, Hilbert provou que, para certas ações de $G = SL(n; \mathbb{C})$ em $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, a álgebra de invariantes $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^G$ é finitamente gerada sobre $\mathbb{C}$. Já em 1900, durante o Congresso Internacional de Paris, o próprio Hilbert propunha a questão de provar que o mesmo resultado valia para a ação natural de um subgrupo arbitrário G de $GL(n; \mathbb{C})$ em $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, questão essa que passou a ser conhecida como o 14º Problema de Hilbert.

Em 1926, E. Noether mostrou que a resposta é afirmativa no caso em que o grupo G é um subgrupo finito de $GL(n; \mathbb{C})$. Ainda nesse mesmo ano, em [21], *H. Weyl* obtém resultados que, em nossa linguagem, podem ser assim enunciados:

(i) Todo grupo conexo semisimples sobre $\mathbb{C}$ é linearmente redutivo e

(ii) O anel de invariantes para a ação de um tal grupo é finitamente gerado.

Em 1933, parte dos argumentos de Weyl foram simplificados e generalizados por M. Schiffer que, de modo bastante simples, mostrou que (ii) podia ser deduzido de (i). Seus argumentos apesar de colocados no contexto clássico, são válidos mais geralmente e em característica arbitrária, e podem ser estendidos, sem dificuldades, ao seguinte resultado:

"Para toda ação racional de um grupo algébrico linearmente redutivo G em uma k-álgebra finitamente gerada R, a álgebra de invariantes R^G é finitamente gerada sobre k."

O primeiro contra-exemplo para o 14º Problema de Hilbert foi obtido por Nagata, em 1958. Nos anos seguintes, o próprio Nagata construiu um contra-exemplo mais simples, no qual o grupo G em questão consistia de matrizes unipotentes triangulares, e obteve ainda uma classificação dos grupos linearmente redutivos. Em particular, mostrou que os únicos grupos algébricos conexos e linearmente redutivos sobre corpos de característica positiva são toros (veja [13] e [14] ou [16]).

Aproximadamente nessa mesma época Mumford suspeitava que muitos dos seus resultados em teoria geométrica de invariantes, demonstrados para característica zero, deveriam ser válidos também em característica positiva. No entanto, em função dos resultados de Nagata, a noção de redutividade linear, nesse caso, mostrava-se demasiado restritiva, tornando a teoria desinteressante. Mumford introduz então, em [12], o conceito de grupo algébrico geometricamente redutivo, conceito esse que generaliza a noção de redutividade linear e que com ela coincide em característica zero, como provou Nagata.

Em [15], Nagata mostrou também que se G é um grupo algébrico geometricamente redutivo agindo racionalmente em uma k-álgebra finitamente gerada R, então a álgebra de invariantes R^G é finitamente gerada sobre k. Juntamente com Miyata, provou ainda, em [17], que todo grupo geometricamente redutivo é redutivo, no sentido de que seu radical unipotente é trivial.

Em [12], Mumford já conjecturava que todo grupo algébrico redutivo seria geometricamente redutivo, o que, no entanto, nesse grau de generalidade, só foi provado quase dez anos mais tarde, por Haboush, em [6].

Os conceitos de ação linearmente redutiva e geometricamente redutiva de um grupo algébrico K em uma k-álgebra R, foram introduzidos em [4] e generalizam, respectivamente, os conceitos de redutividade linear e geométrica. Sua origem está relacionada com o problema de geração finita de anéis de invariantes e com o conceito de subgrupo exato de um grupo algébrico, introduzido por Cline, Parshall e Scott, em [2].

Vários resultados de Nagata sobre estruturas afins em espaços homogêneos ([16]), bem como resultados mais recentes de Cline et al ([2]), podem ser interpretados como casos particulares da teoria das ações redutivas. Além disso, em [4], prova-se que se K age em uma k-álgebra finitamente gerada R de modo linearmente redutivo, então R^K é também finitamente gerada.

Neste trabalho, tratamos de estender certas caracterizações algébricas, conhecidas para os grupos linearmente redutivos, aos grupos geometricamente redutivos e, mais geralmente, às ações redutivas.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos e propriedades básicas das categorias de módulos racionais, necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2, introduzimos as noções de redutividade linear e geométrica e mostramos a equivalência entre as várias definições de grupo geometricamente redutivo, que constam da literatura. Mostramos ainda os resultados clássicos de Nagata sobre grupos linearmente redutivos a que nos referimos anteriormente.

Iniciamos o Capítulo 3, apresentando caracterizações algébricas conhecidas para os grupos linearmente redutivos, em termos da cohomologia racional – introduzida por

Hochschild, em [8] – , da existência de uma família de operadores de Reynolds e de uma integral. Em seguida, introduzimos a noção de integral generalizada e obtemos uma caracterização da redutividade geométrica em termos da existência de uma tal integral. Esta caracterização nos permitiu introduzir a noção de índice de um grupo algébrico geometricamente redutivo, da qual tratamos na última seção deste capítulo. Além disso, obtemos uma condição, em termos da cohomologia racional, que caracteriza a redutividade geométrica e estende o resultado análogo para redutividade linear.

Finalmente, no Capítulo 4, estendemos ao contexto das ações linearmente redutivas as diferentes caracterizações, apresentadas no capítulo anterior, dos grupos linearmente redutivos. Para as ações geometricamente redutivas, apresentamos uma caracterização em termos da existência de uma "integral".

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos e resultados básicos, necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

1.1 A categoria dos G-módulos racionais.

Sejam k um corpo algebricamente fechado de expoente característico $p \geq 1$, G um grupo algébrico afim definido sobre k e $P(G)$ a k-álgebra das funções polinomiais de G em k.

Definição 1.1.1

(i) *Seja M um k-espaço vetorial de* **dimensão finita** *no qual G age à esquerda por automorfismos. Dizemos que M* é um G-módulo racional *à esquerda (ou que G age racionalmente à esquerda em M) se o morfismo $G \to GL(M)$, induzido pela ação, é um homomorfismo de grupo algébricos.*

(ii) *Seja M um k-espaço vetorial no qual G age (à esquerda) por automorfismos. Dizemos que M é um G-módulo racional (à esquerda) se*

- (a) *Para todo $m \in M$, existe um k-subespaço G-estável W_m, de dimensão finita sobre k, que contém m.*
- (b) *Para todo $m \in M$, a ação de G em W_m é racional.*

Definição 1.1.2 *Sejam M e N G-módulos racionais à esquerda e $\varphi : M \longrightarrow N$ uma aplicação k-linear. Dizemos que φ é um morfismo de G-módulos (ou um G-morfismo) se*

$$\varphi(x.m) = x.\varphi(m), \qquad \forall x \in G, \qquad \forall m \in M.$$

Notação 1.1.3 *Indicaremos por $\mathcal{M}(G)$ a categoria cujos objetos são os G-módulos racionais (à esquerda) e cujos morfismos são os morfismos de G-módulos. Em geral, os objetos de $\mathcal{M}(G)$ serão chamados simplesmente de G-módulos.*

Observação 1.1.4 *Sejam M um G-módulo de dimensão finita e $m \in M$. Consideremos $\{m_1, \ldots, m_t\}$ uma k-base de M. Então*

$$x.m = \sum_{j=1}^{t} a_j(x) m_j, \qquad \forall x \in G,$$

com $a_j \in P(G)$, para todo $j = 1, \ldots, t$.

Observação 1.1.5 *De modo inteiramente análogo, podemos definir a categoria dos G-módulos racionais à direita.*

Definição 1.1.6 *Seja $R \in \mathcal{M}(G)$ uma k-álgebra comutativa com unidade. Dizemos que R é uma G-módulo álgebra se a ação de G comuta com o produto de R, isto é, se*

$$x.(rs) = (x.r)(x.s), \qquad \forall x \in G \qquad \forall r, s \in R$$

Exemplos 1.1.7

(i) *O corpo k é um G-módulo, via a ação trivial de G. Em todo este trabalho k será sempre considerado como G-módulo trivial.*

(ii) *$P(G)$ é uma G-módulo álgebra à esquerda e à direita, com respeito às seguintes ações:*

$$\begin{array}{rcl} G \times P(G) & \rightarrow & P(G) \\ (x.f)(y) & = & f(yx) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} P(G) \times G & \rightarrow & P(G) \\ (f.x)(y) & = & f(xy) \end{array} \quad x, y \in G,\ f \in P(G)$$

Além disso a aplicação $\eta : \begin{array}{rcl} P(G) & \longrightarrow & P(G) \\ f & \longmapsto & \eta(f)(x) = f(x^{-1}) \end{array}$ *é um isomorfismo de k-álgebras tal que*

$$\eta(f.x) = x^{-1}.\eta(f) \qquad \forall f \in P(G)\ , \qquad \forall x \in G$$

(iii) *Se M e N são G-módulos então $Hom_k(M,N)$ é um G-módulo, via*

$$\begin{array}{rcll} G \times Hom_k(M,N) & \to & Hom_k(M,N) & \\ (x.T)(m) & = & x.[T(x^{-1}.m)] & \forall x \in G, \quad \forall m \in M \text{ e} \\ & & & \forall T \in Hom_k(M,N) \end{array}$$

Em particular, $M^* = Hom_k(M,k)$ é um G-módulo via

$$(x.\sigma)(m) = \sigma(x^{-1}.m) \qquad \forall x \in G, \qquad \forall \sigma \in M^*, \qquad \forall m \in M$$

(iv) *Sejam M um G-módulo de dimensão finita e $P(M)$ a k-subálgebra das funções de M em k, gerada por M^*. Então $P(M)$ é uma G-módulo álgebra, via a ação de G em $P(M)$ induzida pela ação de G em M^*. Explicitamente,*

$$(x.f)(m) = f(x^{-1}.m) \qquad \forall x \in G, \qquad \forall f \in P(M)\,, \qquad \forall m \in M$$

(v) *Se M e N são G-módulos, então $(M \oplus N)$ e $(M \underset{k}{\otimes} N)$ são G-módulos, via a ação diagonal.*

(vi) *Seja M um G-módulo. Consideremos $S(M)$ a álgebra simétrica construída sobre M e $S^q(M)$ sua componente homogênea de grau q, $q \geq 0$. Então a ação diagonal de G no produto tensorial $T^q(M) = \underbrace{M \underset{k}{\otimes} \cdots \underset{k}{\otimes} M}_{q}$, induz uma ação no quociente*

$$S^q(M) = \frac{T^q(M)}{R^q(M)}, \text{ onde}$$

$$R^q(M) = \left\langle m_1 \otimes \cdots \otimes m_q - m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(q)} \mid m_1, \ldots, m_q \in M,\ \sigma \in S_q \right\rangle_k.$$

Desse modo, para todo $q \geq 0$, $S^q(M)$ é um G-módulo e $S(M) = \underset{q \geq 0}{\oplus} S^q(M)$ é uma G-módulo álgebra.

Além disso, se $\lambda : M \longrightarrow N$ é um G-morfismo, então a aplicação

$$S^q(\lambda) : S^q(M) \longrightarrow S^q(N)$$

definida por

$$S^q(\lambda)(\overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_q}) = \overline{\lambda(m_1) \otimes \cdots \otimes \lambda(m_q)}$$

é um G-morfismo.

Se N é ainda uma G-módulo álgebra, então para cada $q \geq 1$, o produto em N induz um morfismo sobrejetor de G-módulos $S^q(N) \xrightarrow{\mu} N$ definido por $\mu(\overline{n_1 \otimes \cdots \otimes n_q}) = n_1 . \ldots . n_q \quad \forall n_i \in N, \quad \forall i, 1 \leq i \leq n.$

Nesse caso, dados um morfismo de G-módulos $\lambda : M \longrightarrow N$ e $q \geq 1$, vamos denotar por $\bar{S}^q(\lambda) : S^q(M) \longrightarrow N$ o G-morfismo definido pela composição

$$\bar{S}^q(\lambda) = \mu \circ S^q(\lambda)$$

O resultado que enunciamos a seguir será utilizado na próxima seção para provar a equivalência entre as definições de grupo algébrico lineramente redutivo apresentada em [20] e aquela que adotaremos nesse trabalho. Sua prova é bem conhecida e por isso será omitida.

Proposição 1.1.8 *Sejam M um G-módulo de dimensão finita sobre k e consideremos $M^* = Hom_k(M,k)$. Então a aplicação k-linear*

$$S(M^*) \xrightarrow{\theta} P(M)$$

definida por

$$\theta\left(\overline{\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r}\right) = \sigma_1. \ \ldots \ .\sigma_r, \qquad \forall r \geq 1, \qquad \forall \sigma_i \in M^*,\ i = 1, \ldots, r$$

é um isomorfismo de G-módulo álgebras graduadas.

Observações 1.1.9

(i) *Seja $M \in \mathcal{M}(G)$ e consideremos $\chi = \chi_M : M \longrightarrow M \otimes_k P(G)$ a aplicação k-linear definida por*

$$\chi_M(m) = \sum_i m_i \otimes f_i \Longleftrightarrow x.m = \sum_i f_i(x) m_i, \qquad \forall x \in G$$

É fácil verificar que:

$$\chi(m) = \sum_i m_i \otimes f_i \Longrightarrow \chi(y.m) = \sum_i m_i \otimes y.f_i, \qquad \forall y \in G$$

(ii) *Sejam $M, N \in \mathcal{M}(G)$ e $\lambda : M \longrightarrow N$ uma aplicação k-linear. Então λ é um G-morfismo se e somente se o diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\chi_M} & M \otimes_k P(G) \\
\Big\downarrow \lambda & & \Big\downarrow \lambda \otimes id \\
N & \xrightarrow[\chi_N]{} & N \otimes_k P(G)
\end{array}$$

é comutativo.

De fato, seja $m \in M$ e suponhamos

$$\chi_M(m) = \sum_i m_i \otimes f_i \qquad e \qquad \chi_N(\lambda(m)) = \sum_j n_j \otimes g_j$$

Então:

$$\begin{aligned}
(\lambda \otimes id) \circ \chi_M(m) = (\chi_N \circ \lambda)(m) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_i \lambda(m_i) \otimes f_i = \sum_j n_j \otimes g_j \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_i f_i(x)\lambda(m_i) = \sum_j g_j(x) n_j, \qquad \forall x \in G \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda(\sum_i f_i(x) m_i) = \sum_j g_j(x) n_j, \qquad \forall x \in G \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda(x.m) = x.\lambda(m), \qquad \forall x \in G
\end{aligned}$$

□

É um fato bastante conhecido que em característica zero os conceitos de redutividade linear e geométrica coincidem. Apresentaremos no próximo capítulo uma prova deste resultado que pode ser estendida a contextos mais gerais como os que introduziremos no capítulo 4. (Outra prova diferente desse fato, que não pode ser generalizada, pode ser encontrada em [20]). Para isso, a construção que se segue será fundamental.

Proposição 1.1.10 *Sejam $\lambda : M \longrightarrow k$ um morfismo de G-módulos e $r > 1$. Então para cada $1 \leq i \leq r-1$, existe um G-morfismo*

$$\lambda_r^{(i)} : S^r(M) \longrightarrow S^{r-i}(M)$$

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
S^r(M) \arrow[rr, "\lambda_r^{(i)}"] \arrow[dr, "\binom{r}{i}\bar{S}^r(\lambda)"'] & & S^{r-i}(M) \arrow[dl, "\bar{S}^{r-i}(\lambda)"] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração. Fixemos $\imath$, $1 \leq \imath \leq r-1$. Consideremos $I = \{1,\ldots,r\}$ e $m_1,\ldots,m_r \in M$. Para cada $K \subset I$, indiquemos por m_K o elemento de $S^{|K|}(M)$ obtido pelo produto dos m_k, $k \in K$, na álgebra simétrica $S(M)$, isto é, consideremos

$$m_K = \prod_{k\in K} m_k \in S^{|K|}(M) \subset S(M)$$

Defino $\lambda_r^{(\imath)} : T^r(M) \longrightarrow S^{r-\imath}(M)$ por

$$\lambda_r^{(\imath)}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r) = \sum_{\substack{J\subset I\\ |J|=\imath}} (\prod_{\jmath\in J} \lambda(m_\jmath))m_{I\setminus J}$$

e estendo, por linearidade, a $T^r(M)$.

É fácil verificar que $\lambda_r^{(\imath)}$é um G-morfismo.

Além disso se σ é uma permutação de $I = \{1,\ldots,r\}$ e $m_1,\ldots,m_r \in M$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_r^{(\imath)}(m_{\sigma 1} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma r}) &= \sum_{\substack{J\subset I\\ |J|=\imath}} (\prod_{\jmath\in J} \lambda(m_{\sigma\jmath}))m_{(I\setminus\sigma(J))} = \\
&= \sum_{\substack{J\subset I\\ |J|=\imath}} (\prod_{\jmath\in J} \lambda(m_{\sigma\jmath}))m_{(\sigma(I)\setminus\sigma(J))} = \\
&= \sum_{\substack{K\subset I\\ |K|=\imath}} (\prod_{k\in K} \lambda(m_k))m_{(I\setminus K)} = \lambda_r^{(\imath)}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)
\end{aligned}$$

Logo, $\lambda_r^{(\imath)}$é simétrica e portanto induz um G-morfismo em $S^r(M)$, que ainda chamaremos $\lambda_r^{(\imath)}$, dado por

$$\begin{aligned}
\lambda_r^{(\imath)} : \quad S^r(M) &\rightarrow S^{r-\imath}(M) \\
\lambda_r^{(\imath)}(m_I) &= \textstyle\sum_{\substack{J\subset I\\ |J|=\imath}} \left(\prod_{\jmath\in J} \lambda(m_\jmath)\right) m_{I\setminus J}
\end{aligned}$$

Vamos provar que $\lambda_r^{(\imath)}$assim definida satisfaz

$$\bar{S}^{r-\imath}(\lambda) \circ \lambda_r^{(\imath)} = \binom{r}{\imath} \bar{S}^r(\lambda)$$

Para isso, consideremos $m_1,\ldots,m_r$ elementos arbitrários de M.

Então

$$\bar{S}^{r-i}(\lambda) \circ \lambda_r^{(i)} = \bar{S}^{r-i}(\lambda)[\sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=i}} (\prod_{j \in J} \lambda(m_j)) m_{I \setminus J}] =$$

$$= \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=i}} [(\prod_{j \in J} \lambda(m_j))(\prod_{i \in I \setminus J} \lambda(m_i))] = \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=i}} [\prod_{j \in I} \lambda(m_j)] =$$

$$= \binom{r}{i} \lambda(m_1). \ldots . \lambda(m_r) = \binom{r}{i} \bar{S}^r(\lambda)(m_I)$$

e o resultado está provado.

□

A proposição que enuciamos a seguir será útil para provarmos um resultado de *Nagata* que caracteriza os grupos algébricos linearmente redutivos definidos sobre corpos de característica positiva. Sua prova é bastante simples, está baseada na finitude local dos G-módulos racionais e pode ser encontrada em [11].

Proposição 1.1.11 *Seja G um grupo algébrico afim definido sobre k. Então existe um G-módulo racional M, de dimensão finita sobre k, tal que se $\{m_1, \ldots, m_t\}$ é uma k-base de M e se*

$$x.m_i = \sum_{j=1}^{t} g_{ij}(x) m_j, \qquad \forall x \in G, \qquad \forall i, 1 \leq i \leq t,$$

com $g_{ij} \in P(G)$, $\forall 1 \leq i, j, \leq t$, então $P(G)$ é gerada como k-álgebra por

$$\{g_{ij} \mid \quad 1 \leq i, j \leq t\}$$

□

O que faremos a seguir tem por objetivo mostrar que a categoria dos G-módulos racionais tem suficientes injetivos.

Consideremos em $P(G)$ a ação de G definida por

$$x * f = f.x^{-1}, \qquad \forall x \in G, \qquad \forall f \in P(G)$$

e indiquemos por $P(G)_*$ o G-módulo $P(G)$, munido da ação acima definida. Observemos que $\eta : P(G)_* \longrightarrow P(G)$ é um isomorfismo de G-módulos à esquerda (veja (1.1.7,(ii))).

Além disso, dado $M \in \mathcal{M}(G)$, indicaremos por M^0 o G-módulo cujo espaço vetorial subjacente é M, munido da ação trivial de G. A aplicação $\chi_M : M \longrightarrow M^0 \underset{k}{\otimes} P(G)$, por (1.1.9,(i)), é um morfismo de G-módulos à esquerda. Os resultados que enunciamos em continuação aparecem em [8].

Proposição 1.1.12 *Seja G um grupo algébrico definido sobre k. Então*

(i) $M \underset{k}{\otimes} P(G)$ *é G-módulo injetivo, para todo $M \in \mathcal{M}(G)$.*

Em particular, $P(G) \approx k \underset{k}{\otimes} P(G)$ é G-módulo injetivo.

(ii) *$M \otimes I$ é G-módulo injetivo, para todo $M \in \mathcal{M}(G)$ e para todo G-módulo injetivo I.*

(iii) *Dado $M \in \mathcal{M}(G)$, existe um monomorfismo de G-módulos $M \hookrightarrow M \underset{k}{\otimes} P(G)$.*

Demonstração. Mostraremos apenas (ii) e (iii). A prova de (i) pode ser encontrada em [8].

(ii) Consideremos o diagrama de G-morfismos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & I \otimes P(G) \\ & I & \end{tikzcd}$$

onde $\alpha(m) = m \otimes 1$, $m \in I$.

Como I é G-módulo injetivo, existe um G-morfismo $\varphi : I \otimes P(G) \longrightarrow I$ tal que $\varphi \circ \alpha = \mathrm{id}_I$.

Logo, I é somando direto de $(I \otimes P(G)\ )$, como G-módulo .

Seja $J \in \mathcal{M}(G)$ tal que

$$I \oplus J = I \otimes P(G)$$

Então, para todo $M \in \mathcal{M}(G)$, temos que

$$M \otimes (I \oplus J) \approx M \otimes (I \otimes P(G)\ ) \approx (M \otimes I) \otimes P(G)$$

Por (i), $[(M \otimes I) \otimes P(G)\ ]$ é G-módulo injetivo e portanto

$$M \otimes (I \oplus J) \approx [(M \otimes I) \oplus (M \otimes J)]$$

é G-módulo injetivo.

Como $(M \otimes I)$ é somando de $M \otimes (I \oplus J)$, concluímos que $(M \otimes I)$ é G-módulo injetivo.

(iii) Sejam $M \in \mathcal{M}(G)$ e consideremos o morfismo injetivo de G-módulos

$$\chi_{M} : M \hookrightarrow M^{0} \otimes P(G)$$

Vamos provar que $M^{0} \underset{k}{\otimes} P(G) \approx M \underset{k}{\otimes} P(G)$, como G-módulos . Para isso observemos que a aplicação

$$(\mathrm{id} \otimes \eta) : M \otimes P(G) \longrightarrow M \otimes P(G)_{*}$$

é um isomorfismo de G-módulos . Além disso, pode-se provar que $(M \underset{k}{\otimes} P(G)_{*})$ e $(M^{0} \otimes P(G)\ )$ são G-módulos isomorfos (veja, por exemplo [8] ou [2]).

Assim, $M \underset{k}{\otimes} P(G) \approx M^{0} \underset{k}{\otimes} P(G)$ como G-módulos e segue o resultado.

□

Corolário 1.1.13 *A categoria dos G-módulos (racionais) tem suficientes injetivos.*

Dados $M \in \mathcal{M}(G)$ e $n \geq 0$, indicaremos por $H^{n}(G, M)$ o n-ésimo grupo de cohomologia (racional) de G com coeficientes em M, como introduzido em [8], por *Hochschild.*

Se M é um G-módulo e $\alpha : G \longrightarrow M$ é uma função arbitrária, dizemos que α é polinomial se

(i) $\alpha(G)$ está contido em um G-submódulo de M, de dimensão finita sobre k,

e

(ii) $(\lambda \circ \alpha) \in P(G)$, para todo $\lambda \in M^{*}$.

Consideremos, para cada $M \in \mathcal{M}(G)$,

$$C^1(G,M) = \{\alpha : G \longrightarrow M \mid \alpha \text{ é polinomial } \}$$

O primeiro grupo de cohomologia $H^1(G,M)$ pode então ser calculado mediante a seguinte fórmula

$$H^1(G,M) = \frac{Z^1(G,M)}{B^1(G,M)},$$

onde

$$Z^1(G,M) = \{\alpha \in C^1(G,M) \mid \alpha(xy) = \alpha(x) + x.\alpha(y), \qquad \forall x,y \in G\}$$

e

$$B^1(G,M) = \{\delta_m \in C^1(G,M) \mid m \in M \text{ e } \delta_m(x) = x.m - m, \qquad \forall x \in G\}$$

O resultado que enunciamos a seguir será utilizado em todo este trabalho e deve-se a *Hochschild.* Sua prova pode ser encontrada em [8].

Teorema 1.1.14 *A sequência dos funtores*

$$M \longrightarrow H^n(G,M) , \qquad n \geq 0,$$

é a sequência dos funtores derivados, na categoria dos G-módulos, do funtor parte-fixa, $M \rightsquigarrow M^G$.

Concluímos esta seção, com mais um resultado de *Hochschild*, que caracteriza os G-módulos injetivos em termos da cohomologia racional. Sua prova pode ser encontrada em [9].

Teorema 1.1.15 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k e $I \in \mathcal{M}(G)$. Então I é G-módulo injetivo se e somente se $H^1(G, I \otimes M) = (0)$, para todo $M \in \mathcal{M}(G)$.*

1.2 A categoria dos (R_0, K)-módulos.

Em toda essa seção, K indicará um grupo algébrico definido sobre k e R_0 uma K-módulo álgebra fixada.

Definição 1.2.1

(i) *Um K-módulo (racional) M diz-se um (R_0, K)-módulo se M é um R_0-módulo e*

$$x.(r.m) = (x.r)(x.m), \qquad \forall x \in K, \qquad \forall r \in R_0, \qquad \forall m \in M$$

(ii) *Se M e N são (R_0, K)-módulos, uma aplicação k-linear $\lambda : M \longrightarrow N$ diz-se um morfismo de (R_0, K)-módulos se:*

$$\lambda(r.m) = r.\lambda(m) \qquad \forall r \in R, \qquad \forall m \in M$$
$$e$$
$$\lambda(x.m) = x.\lambda(m), \qquad \forall x \in K, \qquad \forall m \in M$$

Indicaremos por $\mathcal{M}(R_0, K)$ a categoria dos (R_0, K)-módulos.

Exemplos 1.2.2

(i) *Se $R_0 = k$, então $\mathcal{M}(R_0, K) = \mathcal{M}(K)$.*

(ii) *Se K é um subgrupo fechado de um grupo algébrico G então $P(G)$ é K-módulo álgebra.*

(iii) *Se K age em uma variedade algébrica afim X definida sobre k, então $P(X)$ é uma K-módulo álgebra via*

$$(x.\alpha)(p) = \alpha(x^{-1}p), \qquad \forall x \in K, \qquad \forall \alpha \in P(X) , \qquad \forall p \in X$$

Exemplos 1.2.3

(i) *Se $M \in \mathcal{M}(K)$ então $(R_0 \underset{k}{\otimes} M)$ é um (R_0, K)-módulo via*

$$x(r \otimes m) = xr \otimes xm \qquad \forall x \in K, \qquad \forall r \in R_0, \qquad \forall m \in M$$
$$e$$
$$s(r \otimes m) = sr \otimes m \qquad \forall s, r \in R_0, \qquad \forall m \in M$$

(ii) *Se $M, N \in \mathcal{M}(K)$ e $\lambda : M \longrightarrow N$ é um K-morfismo, então*

$$(id \otimes \lambda) : R_0 \otimes M \longrightarrow R_0 \otimes N$$

é um (R_0, K)-morfismo.

(iii) *Se R é uma (R_0, K)-módulo álgebra e $\lambda : M \longrightarrow R$ é um K-morfismo, então para todo $q \geq 1$,*

$$S^q(\lambda) : S^q(M) \longrightarrow S^q(R)$$

é um K-morfismo e portanto

$$(id \otimes S^q(\lambda)) : R_0 \otimes S^q(M) \longrightarrow R_0 \otimes S^q(R)$$

é um morfismo de (R_0, K)-módulos.

Além disso, o produto em R e a estrutura de R como R_0-módulo induzem morfismos $\mu_R : S^q(R) \longrightarrow R$ e $\mu : R_0 \otimes R \longrightarrow R$. Como μ_R é um K-morfismo e μ é um morfismo de (R_0, K)-módulos, concluímos que

$$\bar{S}^q(\lambda) : R_0 \otimes S^q(M) \longrightarrow R$$

dada por

$$\bar{S}^q(\lambda) = \mu \circ (id \otimes \mu_R) \circ (id \otimes S^q(\lambda))$$

é um morfismo de (R_0, K)-módulos.

(iv) *Se $M \in \mathcal{M}(K)$ e $N \in \mathcal{M}(R_0, K)$ então $Hom_k(M, N)$ é (R_0, K)-módulo, via a ação usual de K e*

$$(r.T)(m) = rT(m), \qquad \forall r \in R_0, \qquad \forall T \in Hom_k(M, N)\ , \qquad \forall m \in M$$

Em particular $Hom_k(M, R_0)$ é um (R_0, K)-módulo para todo $M \in \mathcal{M}(K)$.

(v) *Se $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$ e $N \in \mathcal{M}(K)$ então $(M \otimes_k N) \in \mathcal{M}(R_0, K)$ via a ação usual de K e*

$$r(m \otimes n) = rm \otimes n, \qquad \forall r \in R_0, \qquad \forall m \in M, \qquad \forall n \in N$$

O resultado que veremos a seguir é uma adaptação da proposição (1.1.10), à categoria dos (R_0, K)-módulos, e nos permitirá provar que em característica zero, os conceitos de ação linearmente redutiva e geometricamente redutiva coincidem.

Proposição 1.2.4 *Sejam $\lambda : M \longrightarrow R_0$ um morfismo de (R_0, K)-módulos e $r \geq 1$. Então para cada $1 \leq i \leq r - 1$, existe um morfismo de (R_0, K)-módulos*

$$\bar{\lambda}_r^{(i)} : R_0 \otimes_k S^r(M) \longrightarrow R_0 \otimes_k S^{r-i}(M)$$

tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
R_0 \otimes S^r(M) \arrow[rr, "\bar{\lambda}_r^{(i)}"] \arrow[dr, swap, "\binom{r}{i}\bar{S}^r(\lambda)"] & & R_0 \otimes S^{r-i}(M) \arrow[dl, "\bar{S}^{r-i}(\lambda)"] \\
& R_0 &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Fixemos $\imath$, $1 \leq \imath \leq r-1$. Com a mesma notação da proposição (1.1.10) e, de modo análogo, pode-se mostrar que a aplicação

$$\tilde{\lambda}_r^{(\imath)} : T^r(M) \longrightarrow R_0 \underset{k}{\otimes} S^{r-\imath}(M)$$

definida por

$$\tilde{\lambda}_r^{(\imath)}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r) = \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=\imath}} (\prod_{\jmath \in J} \lambda(m_\jmath)) \otimes m_{I \setminus J}$$

é um K-morfismo simétrico. Consequentemente, podemos considerar o K-morfismo induzido em $S^r(M)$,

$$\lambda_r^{(\imath)} : S^r(M) \longrightarrow R_0 \otimes S^{r-\imath}(M)$$

dado por

$$\lambda_r^{(\imath)}(m_I) = \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=\imath}} (\prod_{\jmath \in J} \lambda(m_\jmath)) \otimes m_{I \setminus J}$$

Se $\mu : R_0 \otimes R_0 \longrightarrow R_0$ indica o morfismo produto em R_0 definimos

$$\bar{\lambda}_r^{(\imath)} : R_0 \otimes S^r(M) \longrightarrow R_0 \otimes S^{r-\imath}(M)$$

por

$$\bar{\lambda}_r^{(\imath)} = (\mu \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \lambda_r^{(\imath)})$$

Então $\bar{\lambda}_r^{(\imath)}$é um (R_0, K)-morfismo e dados $t \in R_0$, $m_I = \overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_r} \in S^r(M)$, temos

$$[\bar{S}^{r-\imath}(\lambda) \circ \bar{\lambda}_r^{(\imath)}](t \otimes m_I) = \bar{S}^{r-\imath}(\lambda)[\sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=\imath}} (t \prod_{\jmath \in J} \lambda(m_\jmath)) \otimes m_{I \setminus J}] =$$

$$= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes S^{r-\imath}(\lambda))[\sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=\imath}} (t \prod_{\jmath \in J} \lambda(m_\jmath)) \otimes m_{I \setminus J}] =$$

$$= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)[\sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=\imath}} (t \cdot \prod_{\jmath \in J} \lambda(m_\jmath)) \otimes S^{r-\imath}(\lambda)(m_{I \setminus J})] =$$

$$= \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=\imath}} [(t \prod_{\jmath \in J} \lambda(m_\jmath))(\prod_{k \in I \setminus J} \lambda(m_k))] = t \sum_{\substack{J \subset I \\ |J|=\imath}} (\prod_{\jmath \in I} \lambda(m_\imath)) =$$

$$= \binom{r}{\imath} t.\lambda(m_1). \ldots .\lambda(m_r) = \binom{r}{\imath} \bar{S}^r(\lambda)(t \otimes m_I)$$

com o que a prova está concluída.

$\square$

Paralelamente ao exposto na seção anterior, surge naturalmente a pergunta, para a qual não conhecemos resposta, sobre a existência de suficientes injetivos na categoria dos (R_0, K)-módulos. O resultado que apresentamos nessa direção é consequência da proposição (1.1.12).

Proposição 1.2.5 *Dado $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$, existem um (R_0, K)-módulo I, injetivo como K-módulo, e um monomorfismo de (R_0, K)-módulos $\iota : M \longrightarrow I$.*

Demonstração. Seja $I = M \underset{k}{\otimes} P(K)$. Sabemos, pela proposição (1.1.12,(ii)), que I é K-módulo injetivo. Além disso, como $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$, então $I \in \mathcal{M}(R_0, K)$ e a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \iota : M & \longrightarrow & M \otimes P(K) \\ m & \longmapsto & m \otimes 1 \end{array}$$

é um morfismo injetivo de (R_0, K)-módulos.

$\square$

Consideremos $\mathcal{F}$ o funtor K-parte-fixa da categoria dos (R_0, K)-módulos na categoria dos k-espaços vetoriais. Evidentemente, $\mathcal{F}$ é sempre exato à esquerda. O resultado que enunciamos a seguir aparece em [4] e estabelece uma condição necessária e suficiente para que $\mathcal{F}$ seja exato.

Teorema 1.2.6 *Seja K um grupo algébrico afim definido sobre k e consideremos R_0 uma K-módulo álgebra fixada. São equivalentes:*

(a) *R_0 é K-módulo injetivo*

(b) *$\mathcal{F}$ é exato*

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Seja $\lambda : M \longrightarrow N$ um morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos. Consideremos os morfismos de K-módulos

$$\begin{array}{rcl} u_M : R_0 \otimes M & \longrightarrow & M \\ (r \otimes m) & \longmapsto & rm \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} u_N : R_0 \otimes N & \longrightarrow & N \\ (r \otimes n) & \longmapsto & rn \end{array}$$

Sendo λ um morfismo de R_0-módulos, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
R_0 \otimes M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \lambda"'] & M \arrow[d, "\lambda"] \\
R_0 \otimes N \arrow[r, "u_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Por outro lado, a sequência exata de (R_0, K)-módulos

$$0 \longrightarrow R_0 \otimes \ker\lambda \hookrightarrow R_0 \otimes M \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\lambda} R_0 \otimes N \longrightarrow 0$$

dá lugar a uma sequência exata longa

$$0 \to (R_0 \otimes \ker\lambda)^K \to (R_0 \otimes M)^K \to (R_0 \otimes N)^K \to H^1(K, R_0 \otimes \ker\lambda) \to \cdots$$

Pelo teorema (1.1.15), concluímos que $H^1(K, R_0 \otimes \ker\lambda) = (0)$, pois R_0 é K-módulo injetivo, e portanto $(\mathrm{id} \otimes \lambda) : (R_0 \otimes M)^K \longrightarrow (R_0 \otimes N)^K$ é sobrejetora. Consideremos os morfismos de K-módulos

$$\begin{array}{rcl} s_M : M & \longrightarrow & R_0 \otimes M \\ m & \longmapsto & 1 \otimes m \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} s_N : N & \longrightarrow & R_0 \otimes N \\ n & \longmapsto & 1 \otimes n \end{array}$$

Então $u_M \circ s_M = \mathrm{id}_M$, $\quad u_N \circ s_N = \mathrm{id}_N \quad$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "s_M"] \arrow[d, "\lambda"'] & R_0 \otimes M \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \lambda"] \\
N \arrow[r, "s_N"'] & R_0 \otimes N
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Finalmente, seja $n \in N^K$. Então $s_N(n) \in (R_0 \otimes N)^K$ e portanto podemos tomar $t \in (R_0 \otimes N)^K$ tal que

$$(\mathrm{id} \otimes \lambda)(t) = s_N(n)$$

Seja $m = u_M(t) \in M^K$. Então

$$\lambda(m) = \lambda(u_M(t)) = u_N((\mathrm{id} \otimes \lambda)(t)) = u_N(s_N(n)) = n$$

Portanto, $\lambda|_{M^K} : M^K \longrightarrow N^K$ é sobrejetora e $\mathcal{F}$ é exato.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Sejam $M \in \mathcal{M}(K)$ arbitrário e I um K-módulo injetivo tal que $M \overset{\iota}{\hookrightarrow} I$, como K-submódulo.

Consideremos ainda $Q = I/\iota(M) \in \mathcal{M}(K)$.

Tensorizando a sequência exata de K-módulos

$$0 \longrightarrow M \overset{\iota}{\hookrightarrow} I \overset{\pi}{\longrightarrow} Q \longrightarrow 0$$

por R_0, obtemos a sequência exata de (R_0, K)-módulos

$$0 \longrightarrow (R_0 \otimes M) \overset{\mathrm{id}\otimes\iota}{\longrightarrow} (R_0 \otimes I) \overset{\mathrm{id}\otimes\pi}{\longrightarrow} (R_0 \otimes Q) \longrightarrow 0$$

Sendo $\mathcal{F}$ exato, tomando K-partes-fixas, concluímos que

$$H^1(K, R_0 \otimes M) = (0), \text{ para todo } M \in \mathcal{M}(K)$$

Pelo teorema (1.1.15), deduzimos então que R_0 é K-módulo injetivo.

$\square$

Aplicando o resultado anterior à situação em que K é um subgrupo fechado de um grupo algébrico afim G e $R_0 = P(G)$, obtemos :

Corolário 1.2.7 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k e $K \subset G$ um subgrupo fechado. São equivalentes :*

(a) *$P(G)$ é K-módulo injetivo.*

(b) *O funtor K-parte-fixa, da categoria dos $(P(G)\ , K)$-módulos na categoria dos k-espaços vetoriais, é exato.*

Os resultados que veremos a partir de agora dizem respeito, sempre, à categoria dos $(P(G)\ , K)$-módulos, onde $K \subset G$ é um subgrupo fechado. Começamos mencionando a adaptação da construção clássica do funtor representação induzida, para a categoria dos módulos racionais.

Sejam $K \subset G$ como acima. Dado um K-módulo N, definimos um G-módulo - que denotaremos por $N|^G$ e será chamado o G-módulo induzido por N - da seguinte forma :

Consideremos $(P(G) \otimes N)$ com a estrutura diagonal de K-módulo à esquerda e com estrutura de G-módulo à esquerda definida por

$$x.(f \otimes n) = f.x^{-1} \otimes n, \qquad \forall x \in G, \qquad \forall f \in P(G) , \qquad \forall n \in N$$

Como as ações de K à esquerda e de G à direita comutam, $(P(G) \otimes N)^K$ é um G-submódulo de $(P(G) \otimes N)$. Definimos então $N|^G = (P(G) \otimes N)^K$, com a estrutura de G-módulo acima considerada. Agora, se $\alpha : N \longrightarrow N'$ é um K-morfismo, então $(\mathrm{id} \otimes \alpha) : N|^G \longrightarrow N'|^G$ é um G-morfismo. Assim, podemos falar no **funtor representação induzida**, que é um funtor covariante da categoria dos K-módulos na categoria dos G-módulos.

É imediato verificar que o funtor representação induzida é exato à esquerda. A definição que se segue foi introduzida em [2].

Definição 1.2.8 *Sejam G um grupo algébrico afim definido sobre k e $K \subset G$ um subgrupo fechado. Dizemos que K* **é exato em** *G se o funtor representação induzida de $\mathcal{M}(K)$ em $\mathcal{M}(G)$ é exato.*

A definição acima nos diz que K é exato em G se e somente se, o morfismo de G-módulos $(\mathrm{id} \otimes \alpha) : (P(G) \otimes N)^K \longrightarrow (P(G) \otimes N')^K$ é sobrejetivo, para todo morfismo sobrejetivo de K-módulos $\alpha : N \longrightarrow N'$. Como a categoria dos K-módulos tem suficientes injetivos, deduzimos imediatamente que K é exato em G se e somente se $H^1(K, P(G) \otimes M) = (0)$, para todo $M \in \mathcal{M}(K)$. Mas pelo teorema (1.1.15), sabemos que esta última condição é equivalente a injetividade de $P(G)$ como K-módulo.

Reunindo essas observações com o corolário (1.2.7), obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.9 *Sejam G um grupo algébrico afim definido sobre k e $K \subset G$ um subgrupo fechado. São equivalentes:*

(a) *K é exato em G.*

(b) *$P(G)$ é K-módulo injetivo.*

(c) *O funtor K-parte-fixa, da categoria dos $(P(G)\ , K)$-módulos na categoria dos k-espaços vetoriais, é exato.*

O resultado que encerra esse capítulo foi provado por *Cline, Parshall e Scott* em [2], e relaciona o conceito de subgrupo exato com a estrutura de variedade do espaço homogêneo G/K.

Teorema 1.2.10 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k e $K \subset G$ um subgrupo fechado. São equivalentes:*

(a) *K é exato em G.*

(b) *O quociente G/K é variedade algébrica afim.*

Capítulo 2

Grupos Algébricos Linearmente Redutivos e Geometricamente Redutivos

Neste capítulo apresentaremos resultados já conhecidos sobre grupos algébricos linearmente redutivos e geometricamente redutivos, que serão utilizados ao longo deste trabalho.

2.1 Definições básicas.

Em tudo que se segue, salvo menção explícita em contrário, G denotará um grupo algébrico afim definido sobre um corpo algebricamente fechado k, $p = \text{expcar}(k) \geq 1$ e $\mathcal{M}(G)$ indicará a categoria dos G-módulos (racionais).

Definição 2.1.1 *Dizemos que G é* **linearmente redutivo** *se para todo $M \in \mathcal{M}(G)$ e para todo G-morfismo sobrejetor $\lambda : M \longrightarrow k$, existe $m \in M^G$ tal que $\lambda(m) = 1$.*

Definição 2.1.2 *Dizemos que G é* **geometricamente redutivo** *se para todo $M \in \mathcal{M}(G)$ e para todo G-morfismo sobrejetor $\lambda : M \longrightarrow k$, existem $q > 0$ e $x \in S^q(M)^G$ tais que $\bar{S}^q(\lambda)(x) = 1$.*

Segue imediatamente das definições que todo grupo linearmente redutivo é geometricamente redutivo, mas a recíproca não é verdadeira como veremos no final desta seção.

O resultado que se segue fornece algumas caracterizações dos grupos linearmente redutivos. Sua prova pode ser encontrada em [4].

Proposição 2.1.3 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *G é linearmente redutivo*

(ii) *Se $\varphi : R \longrightarrow S$ é um epimorfismo de G-módulo álgebras então $\varphi(R^G) = S^G$*

(iii) *Todo G-módulo (racional) é semisimples*

(iv) *Se $\lambda : M \longrightarrow N$ é um epimorfismo de G-módulos então $\lambda(M^G) = N^G$*

(v) *k é $P(G)$-módulo injetivo*

A seguir, apresentamos o resultado análogo para grupos geometricamente redutivos, que também pode ser encontrado em [4].

Proposição 2.1.4 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *G é geometricamente redutivo*

(ii) *Se $\varphi : R \longrightarrow S$ é um epimorfismo de G-módulo álgebras então para todo $s \in S^G$, existem $q > 0$ e $r \in R^G$ tais que $\varphi(r) = s^q$*

(iii) *Se $\lambda : M \longrightarrow N$ é um epimorfismo de G-módulos então, para todo $n \in N^G$, existem $q > 0$ e $x \in S^q(M)^G$ tais que $S^q(\lambda)(x) = \underbrace{n \otimes \cdots \otimes n}_{q}$*

Demonstração.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Seja $\varphi : R \longrightarrow S$ como em (ii) e consideremos $s \in S^G$. Se $s = 0$, nada há a demonstrar. Assim podemos supor $s \neq 0$. Fixemos então $r \in R$ tal que $\varphi(r) = s$.

Consideremos $M = \langle x.r \mid x \in G \rangle_k$ e $M' = \langle x.r - r \mid x \in G \rangle_k$. Então M e M' são G-módulos e $M = M' + kr$. Além disso, a soma é direta já que $\varphi(M) = (0)$ e $\varphi(r) = s \neq 0$. Assim, podemos considerar $\lambda : M \longrightarrow k$ definido pela igualdade

$$m = m' + \lambda(m)r, \quad \text{onde } m' \in M'.$$

Então λ é morfismo sobrejetor de G-módulos. De fato, se $m = m' + \lambda(m)r$, temos

$$\begin{aligned} x.m &= x.m' + \lambda(m)x.r = x.m' - \lambda(m)r + \lambda(m)x.r + \lambda(m)r = \\ &= x.m' + \lambda(m)(x.r - r) + \lambda(m)r = n' + \lambda(m)r \end{aligned}$$

com $n' = [x.m' + \lambda(m)(x.r - r)] \in M'$.

Logo, $\lambda(x.m) = \lambda(m)$, para todo $x \in G$ e $m \in M$.

Ainda, como $\lambda(r) = 1$, λ é sobrejetora.

Consideremos agora a inclusão natural $M \overset{\iota}{\hookrightarrow} R$ e $u : k \longrightarrow S$ definida por $u(a) = as$.

Então o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\iota"'] & k \arrow[d, "u"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Como G é geometricamente redutivo, existem $q > 0$ e $x \in S^q(M)^{\ G}$ tais que $\bar{S}^q(\lambda)(x) = 1$. Se μ indica o morfismo produto em k, R e S e u^q é o morfismo de k em S que consiste na multiplicação por s^q, então o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} S^q(M) \arrow[r, "S^q(\lambda)"] \arrow[d, "S^q(\iota)"'] & S^q(k) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "S^q(\mu)"] & k \arrow[d, "u^q"] \\ S^q(R) \arrow[r, "S^q(\varphi)"'] \arrow[dr, "\mu"'] & S^q(S) \arrow[r, "\mu"'] & S \arrow[dl, "\varphi"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Como μ e $S^q(i)$ são G-morfismos, então

$$r_1 = (\mu \circ S^q(\iota))\,(x) \in R^G$$

Além disso

$$\begin{aligned}\varphi(r_1) &= [\varphi \circ \mu \circ S^q(\iota)](x) = [u^q \circ \mu \circ S^q(\lambda)](x) = \\ &= u^q\left[\bar{S}^q(\lambda)(x)\right] = \\ &= u^q(1) = s^q\end{aligned}$$

Logo, vale (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Sejam $\lambda : M \longrightarrow N$ e $n \in N^G$, como em (iii). Então $S(\lambda) : S(M) \longrightarrow S(N)$ é morfismo sobrejetor de G-módulo álgebras e $n \in S(N)^G$. Por (ii), existem $q > 0$ e $r \in S(M)^G$ tais que

$$S(\lambda)(r) = n^q = \underbrace{\overline{n \otimes \cdots \otimes n}}_{q}$$

Como $r = (r_\imath)_{\imath \geq 0}$, com $r_\imath \in S^\imath(M)^G$ para todo $\imath \geq 0$, e $S(\lambda)$ preserva a graduação, então $r_q \in S^q(M)^G$ e $S^q(\lambda)(r_q) = \underbrace{\overline{n \otimes \cdots \otimes n}}_{q}$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

É imediato, já que (i) é um caso particular de (iii).

$\square$

Observação 2.1.5 *Para provarmos que um grupo algébrico G é linearmente redutivo (ou geometricamente redutivo) é suficiente verificar a condição da definição para epimorfismos de G-módulos $\lambda : M \longrightarrow k$, com $\dim_k M < \infty$.*

De fato, dado $\lambda : M \twoheadrightarrow k$ um G-morfismo sobrejetor, fixemos $m \in M$ tal que $\lambda(m) = 1$. Consideremos $M_1 = \langle x.m \mid x \in G\rangle_k \overset{\iota}{\hookrightarrow} M$. Como M é um G-módulo racional, $\dim_k M_1 < \infty$ e $\lambda|_{M_1} : M_1 \longrightarrow k$ é morfismo sobrejetor de G-módulos .

Como $M_1^G \subset M^G$ (ou $S^q(M_1)^G \xrightarrow{S^q(\iota)} S^q(M)\ ^G, q > 0$) a afirmação está provada.

Existem na literatura, várias definições de grupo algébrico geometricamente redutivo, todas equivalentes entre si. Em particular, vamos mostrar agora que a definição que adotamos é equivalente às apresentadas por *Mumford*, em [12] e por *Springer*, em [20].

Proposição 2.1.6 *Seja G um grupo algébrico afim definido sobre k. Então G é geometricamente redutivo se e somente se para todo $M \in \mathcal{M}(G)$ e para todo G-submódulo $N \subset M$, de codimensão 1 em M, existe $r > 0$ tal que $N.S^{r-1}(M)$ é somando de $S^r(M)$, como G-módulo .*

Demonstração. Suponhamos G geometricamente redutivo e sejam $N, M \in \mathcal{M}(G)$ tais que $N \subset M$ e codim ${}_M N = 1$. Consideremos o G-módulo quociente M/N e seja $m_0 \in M$, $m_0 \notin N$. Como $\dim_k(M/N) = 1$, existe um carácter γ de G tal que

$$x.(m_0 + N) = \gamma(x)(m_0 + N), \qquad \text{para todo } x \in G$$

Considere M_γ o G-módulo cujo k-espaço vetorial subjacente é M e cuja ação de G está dada por

$$x * m = \gamma(x)^{-1}(x.m), \qquad \forall x \in G, \forall m \in M$$

Seja $\lambda : M_\gamma \longrightarrow k$ a aplicação k-linear definida por

$$\lambda(N) = (0) \qquad \text{e} \qquad \lambda(m_0) = 1$$

Então , para todos $x \in G$ e $n \in N$,

$$\lambda(x * n) = \lambda(\gamma(x)^{-1}(x.n)) = \gamma(x^{-1})\lambda(x.n) = 0 = \lambda(n)$$

e

$$\lambda(x * m_0) = \lambda(\gamma(x)^{-1}(x.m_0)) = \gamma(x^{-1})\lambda(\gamma(x)m_0) = \lambda(m_0)$$

donde λ é morfismo de G-módulos sobrejetor.

Como G é geometricamente redutivo, existem $r > 0$ e $t \in S^r(M_\gamma)^G$ tais que $\bar{S}^r(\lambda)(t) = 1$.

Por outro lado, como $\ker \bar{S}^r(\lambda) = N.S^{r-1}(M)$, $t \notin N.S^{r-1}(M)$. Além disso, como $t \in S^r(M_\gamma)^G$ temos que

$$x.t = \gamma(x)^r t, \qquad \text{para todo } x \in G$$

Consequentemente, $T = \langle t \rangle_k$ é G-submódulo de $S^r(M)$.

Como codim ${}_{S^r(M)}$ $NS^{r-1}(M) = 1$, concluímos que $S^r(M) = N.S^{r-1}(M) \oplus T$, como G-módulos .

Reciprocamente, sejam $\lambda : M \longrightarrow k$ um epimorfismo de G-módulos e $N = \ker \lambda$. Então N é um G-submódulo de M com $\operatorname{codim}_M N = 1$.

Assim, existem $r > 0$ e um G-submódulo (de dimensão 1) T de $S^r(M)$ tais que

$$N.S^{r-1}(M) \oplus T = S^r(M)$$

como G-módulos .

Como $\bar{S}^r(\lambda) : S^r(M) \longrightarrow k$ é sobrejetora e $\ker \bar{S}^r(\lambda) = N.S^{r-1}(M)$, podemos considerar $t \in T$ tal que $\bar{S}^r(\lambda)(t) = 1$. Mas, para todo $x \in G$, $\bar{S}^r(\lambda)(x.t - t) = 0$, e portanto $(x.t - t) \in N.S^{r-1}(M) \cap T = (0)$. Assim, $t \in T^G \subset S^r(M)^G$ e $\bar{S}^r(\lambda)(t) = 1$. Logo, G é geometricamente redutivo.

□

Proposição 2.1.7 *Seja G um grupo algébrico definido sobre k.*

(i) *G é linearmente redutivo se e somente se para todo $M \in \mathcal{M}(G)$, de dimensão finita sobre k, e para todo $m \in M^G$, $m \neq 0$, existe $f \in P(M)^G$ tal que f é k-linear e $f(m) \neq 0$.*

(ii) *G é geometricamente redutivo se e somente se para todo $M \in \mathcal{M}(G)$, de dimensão finita sobre k, e para todo $m \in M^G$, $m \neq 0$, existe $f \in P(M)^G$ homogêneo tal que $f(m) \neq 0$.*

Demonstração. Vamos mostrar apenas (ii). A prova de (i) é análoga e por isso será omitida.

Suponhamos G geometricamente redutivo; sejam $M \in \mathcal{M}(G)$, $\dim_k M < \infty$ e $0 \neq m \in M^G$. Consideremos $\lambda : M^* \longrightarrow k$ definida por $\lambda(\alpha) = \alpha(m)$.

Como $0 \neq m \in M^G$, λ é morfismo sobrejetor de G-módulos.

Sendo G geometricamente redutivo, existem $q > 0$ e $t \in S^q(M^*)^G$ tais que $\bar{S}^q(\lambda)(t) = 1$.

Considermos o isomorfismo de G-módulos álgebras graduadas

$$\theta : S(M^*) \longrightarrow P(M)$$

definido na proposição (1.1.8).

Seja $\theta_q : S^q(M^*) \longrightarrow P(M)_q$ a restrição de θ a $S^q(M^*)$. Como $t \in S^q(M^*)^G$, então $f = \theta_q(t) \in (P(M)_q)^G$. Além disso, se $t = \sum_{i_1,\dots,i_q} \overline{\alpha_{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{i_q}}$, então a condição de que $\bar{S}^q(\lambda)(t) = 1$, diz que $\sum_{i_1,\dots,i_q} \alpha_{i_1}(m). \dots .\alpha_{i_q}(m) = 1$. Logo,

$$f(m) = (\theta_q(t))(m) = \sum_{i_1,\dots,i_q} \alpha_{i_1}(m). \dots .\alpha_{i_q}(m) = 1 \neq 0$$

Reciprocamente, sejam $M \in \mathcal{M}(G)$ e $\lambda : M \longrightarrow k$ um G-morfismo sobrejetor. Pela observação (2.1.5), podemos supor $\dim_k M < \infty$.

Fixemos uma k-base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de M e seja $\{e^*{}_1, \dots, e^*{}_n\}$ sua base dual. Seja $N = M^*$. Então $\lambda \in N^G$ e $\lambda \neq 0$. Assim, existe $f \in P(M^*)^G$ homogêneo de grau q tal que $f(\lambda) \neq 0$.

Consideremos $\theta^{-1} : P(M^*) \longrightarrow S(M^{**})$.

Sendo M de dimensão finita sobre k, a aplicação $\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\nu} & M^{**} \\ e_i & \longmapsto & e_i^{**} \end{array}$ é um isomorfismo de G-módulos, e portanto, $S(M) \xrightarrow{S(\nu)} S(M^{**})$ é um isomorfismo de G-módulo álgebras graduadas.

Seja $x = [S(\nu)^{-1} \circ \theta^{-1}](f) \in S(M)$. Como $f \in P(M^*)^G$, e é homogêneo de grau q, temos que $x \in S^q(M)^G$.

Além disso, se

$$f = \sum_{i_1,\dots,i_q} a_{i_1\dots i_q} e_{i_1}^{**}. \dots .e_{i_q}^{**} \in [P(M^*)_q]^G$$

então

$$x = \left[S(\nu)^{-1} \circ \theta^{-1}\right](f) = \sum_{i_1,\dots,i_q} a_{i_1\dots i_q} \overline{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q}}$$

Como $f(\lambda) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \bar{S}^q(\lambda)(x) &= \sum_{i_1,\dots,i_s} a_{i_1\dots i_s} \lambda(e_{i_1}). \dots .\lambda(e_{i_s}) = \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_s} a_{i_1\dots i_s} e_{i_1}^{**}(\lambda). \dots .e_{i_s}^{**}(\lambda) \neq 0 \end{aligned}$$

e portanto G é geometricamente redutivo.

□

Os resultados que veremos em continuação serão peças importantes para provarmos o resultado de *Nagata*, de que, em característica zero, os conceitos de redutividade linear e geométrica coincidem.

Lema 2.1.8 *Sejam G um grupo algébrico geometricamente redutivo definido sobre k e $p = expcar(k)$. Consideremos $\lambda : M \twoheadrightarrow k$ um epimorfismo de G-módulos e seja*

$$d = \min\{r \in \mathbb{N}^* \mid (\exists x \in S^r(M)^G)(\bar{S}^r(\lambda)(x) = 1)\}$$

Então d é potência de p.

Demonstração. Sejam $\lambda : M \to k$ e $d \geq 1$ como acima. Pela proposição (1.1.10), sabemos que para cada $1 \leq \imath \leq d-1$, existe um morfismo de G-módulos

$$\lambda_d^{(\imath)} : S^d(M) \longrightarrow S^{d-\imath}(M)$$

tal que

$$\bar{S}^{d-\imath}(\lambda) \circ \lambda_d^{(\imath)} = \binom{d}{\imath} \bar{S}^d(\lambda)$$

Consideremos $x \in S^d(M)^G$ tal que $S^d(\lambda)(x) = 1$. Então,

$$y_\imath = \lambda_d^{(\imath)}(x) \in S^{d-\imath}(M)^G \text{ e } \bar{S}^{d-\imath}(\lambda)(y_\imath) = \binom{d}{\imath}, 1 \leq \imath \leq d-1$$

Se car $k = 0$, da minimalidade de d, concluímos que $d = 1$ e portanto d é potência do expoente característico de k.

Se car $k = p > 0$, novamente pela minimalidade de d, concluímos que $\binom{d}{\imath} = 0$, $1 \leq \imath \leq d - \imath$ e portanto d é potência de p.

□

Corolário 2.1.9 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k e $p = expcar(k)$. Se G é geometricamente redutivo e $\lambda : M \longrightarrow k$ é um G-módulo sobrejetor então existem $u \geq 0$ e $x \in S^{p^u}(M)^G$ tais que $S^{p^u}(\lambda)(x) = 1$.*

Demonstração. Segue imediatamente do lema anterior, tomando-se

$$d = p^u = \min\{r \in \mathbb{N}^* \mid (\exists y \in S^r(M)^G)(\bar{S}^r(\lambda)(y) = 1)\}$$

□

Teorema 2.1.10 (Nagata,[14]) *Sejam G um grupo algébrico definido sobre um corpo algebricamente fechado k de* **característica zero**. *Então G é linearmente redutivo se e somente se G é geometricamente redutivo.*

Demonstração. Sejam G geometricamente redutivo e $\lambda : M \longrightarrow k$ um G-módulo sobrejetor. Como car $(k) = 0$, $p = \text{expcar}(k) = 1$ e, portanto, pelo corolário (2.1.9) segue-se que existe $m \in M^G$ tal que $\lambda(m) = 1$. Logo G é linearmente redutivo.

A outra implicação vale em qualquer característica.

$\square$

Exemplo 2.1.11 *Consideremos $G \subset GL(n;k)$ um grupo* **finito** *e $p = expcar(k)$. Então*

(i) *G é geometricamente redutivo*

(ii) *G é linearmente redutivo se $p = 1$ ou $p \not| \ |G|$*

(iii) *Se $p > 1$, a hipótese de que $p \not| \ |G|$ em (ii) é essencial.*

De fato, sejam $\lambda : M \longrightarrow k$ um G-morfismo sobrejetor e fixemos $m \in M$ com $\lambda(m) \neq 0$. Considere

$$t = \left(\prod_{x \in G} xm\right) = \overline{\bigotimes_{x \in G} x.m} \in S^{|G|}(M).$$

Então $t \in \left(S^{|G|}(M)\right)^G$ e $\bar{S}^{|G|}(M)(\lambda)(t) = \lambda(m)^{|G|} \neq 0$.

Logo G é geometricamente redutivo e vale (i).

Para $p = 1$, (ii) segue do teorema anterior. Suponhamos então $p > 1$ e $p + |G|$. Sejam $\lambda : M \longrightarrow k$ um morfismo de G-módulos sobrejetor e $m \in M$ tal que $\lambda(m) = 1$.

Considere

$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (x.m)$$

Então $t \in M^G$ e $\lambda(t) = 1$. Logo, G é linearmente redutivo.

Finalmente, para provar (iii), suponhamos $p > 1$ e consideremos $\mathbb{F}_p \subset k$ o corpo com p elementos. Seja

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}_p \right\} \subset GL(2,k)$$

Por (i) sabemos que G é geometricamente redutivo. Vamos mostrar que G não é linearmente redutivo. Consideremos $M = k^2$ com a estrutura usual de G-módulo, isto é,

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \rightarrow & M \\ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a + bx \\ b \end{pmatrix} \end{array} \qquad \forall x \in \mathbb{F}_p, \qquad \forall a, b \in k$$

Então é fácil verificar que

$$M^G = \{(a, 0) \in M \mid a \in k\}$$

Por outro lado, seja $\lambda : M \longrightarrow k$ a projeção na segunda coordenada. Então λ é morfismo sobrejetor de G-módulos, mas $\lambda \mid_{M^G} = (0)$.

Logo, G não é linearmente redutivo.

□

Os resultados que veremos agora, nos permitirão mostrar um resultado de *Nagata* (veja [13]) que caracteriza os toros como os únicos grupos algébricos conexos linearmente redutivos, sobre corpos de característica positiva. Os lemas que seguem, bem como a demonstração do teorema de *Nagata* que apresentaremos aqui podem ser encontrados em [10].

Lema 2.1.12 *Sejam G um grupo algébrico conexo definido sobre um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Se G possui um subgrupo fechado conexo e unipotente de dimensão positiva então G não é linearmente redutivo.*

Demonstração. Para mostrar que G não é linearmente redutivo, pela proposição (2.1.3), basta encontrar $V \in \mathcal{M}(G)$ que não seja semisimples como G-módulo. Pela proposição (1.1.11), sabemos que existe $M \in \mathcal{M}(G)$ de dimensão finita sobre k, tal que se $\{m_1, \ldots, m_n\}$ é uma k-base de M e

$$x.m_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x) m_j \qquad \forall x \in G,\ 1 \leq i \leq n$$

então $P(G) = k[g_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$, como k-álgebra.

Seja $V = S^p(M)$ a componente homogênea de grau p da álgebra simétrica $S(M)$.

Como k é algebricamente fechado de característica $p > 0$,

$$T = \{m^p = \underbrace{m \otimes \cdots \otimes m}_{p} \mid m \in M\} \subset V$$

é um G-submódulo de V.

Vamos mostrar que T não é somando de V como G-módulo. Para isso, seja U um subgrupo fechado conexo unipotente de dimensão positiva de G. Basta então provar que T não é somando de V como U-módulo. Para isso, começamos observando que como $P(G) = k[g_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n]$ então $P(U) = k[g_{ij}|_U \mid 1 \leq i,j \leq n]$. Por outro lado, sabemos que o corpo de frações de $P(U)$, que denotaremos por $[P(U)]$, é extensão finitamente gerada e separável de k. Assim,

$$[P(U)]^p = \{t^p \mid t \in [P(U)]\} \subsetneq [P(U)]$$

Consequentemente, $Q = \{f^p \mid f \in P(U)\}$ é k-subálgebra própria de $P(U)$. Além disso, sendo U conexo unipotente e M um U-módulo de dimensão finita, pelo teorema de *Lie-Kolchin* (veja [11]), existe $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma k-base de M tal que

$$(1) \qquad u.x_j - x_j = \sum_{i>j} f_{ij}(u)x_i, \qquad \forall u \in U, \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

com $f_{ij} \in P(U)$, $(1 \leq i,j \leq n)$.

Como $k[g_{ij}|_U \mid 1 \leq i,j \leq n] = k[f_{ij} \mid 1 \leq j < i \leq n] = P(U)$ e $Q \subsetneq P(U)$, podemos considerar

$$s = \max\{j \mid (\exists i > j)(f_{ij} \notin Q)\}$$
e
$$r = \max\{i \mid f_{is} \notin Q\}$$

Assim, temos:

$$(2) \qquad f_{rs} \notin Q$$

$$(3) \qquad f_{ij} \in Q, \qquad i > j > s$$

$$(4) \qquad f_{is} \in Q, \qquad i > r$$

Agora, entre todas as bases de M satisfazendo (1) escolho $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $(r - s)$ é minimal.

Vamos mostrar que, com essa escolha, f_{rs} **não** é soma de um elemento de Q com uma k-combinação linear de $\{f_{ks} \mid k \neq r\}$. Se o fosse, existiriam $q \in Q$ e $a_i \in k$ tais que

$$f_{rs} = q + \sum_{k \neq r} a_k f_{ks}$$

Como $f_{is} \in Q$, para todo $i > r$, teríamos que

$$(5) \qquad (f_{rs} - \sum_{s<k<r} a_k f_{ks}) \in Q$$

Considere $\mathcal{B}' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$ a k-base de M definida por

$$x'_i = \begin{cases} x_i & , \quad i \leq s \text{ ou } i \geq r \\ x_i + a_i x_r & , \quad s < i < r \end{cases}$$

Então

$$u.x'_j - x'_j = \sum_{i>j} f'_{ij}(u) x'_i, \qquad \forall u \in U, 1 \leq j \leq n$$

onde para todo $i > j$, temos

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} & j \geq r \\ f_{ij} & (s < j < r) \quad \text{e} \quad i < r \\ f_{ij} + a_j f_{ir} & (s < j < r) \quad \text{e} \quad i > r \\ f_{ij} + \sum_{\substack{k>j \\ r>k>s}} a_k f_{kj} & (s < j < r) \quad \text{e} \quad i = r \\ f_{ij} & j \leq s \quad \text{e} \quad i \neq r \\ f_{rj} - \sum_{\substack{k>j \\ r>k>s}} a_k f_{kj} & j \leq s \quad \text{e} \quad i = r \end{cases}$$

Consideremos

$$s' = \max\{j \mid (\exists i > j)(f'_{ij} \notin Q)\}$$

e

$$r' = \max\{i \mid f'_{is} \notin Q\}$$

Se $j > s$ então $f'_{ij} \in Q$ por (3). Logo $s' \leq s$. Se $s' < s$ então $f'_{is} \in Q$, para todo $i > s$.

Mas

$$f'_{is} = \begin{cases} f_{is} & , i \neq r \\ f_{rs} - \sum_{r>k>s} a_k f_{ks} & , i = r \end{cases}$$

logo, $f_{is} \in Q$, para todo $i \neq r$, e portanto $\sum_{r>k>s} a_k f_{ks} \in Q$. Como $f'_{is} \in Q$, segue-se que $f_{rs} \in Q$, o que contraria (2).

Logo, $s' = s$.

Por outro lado, para todo $i \geq r$ temos

$$f'_{is} = \begin{cases} f_{is} & , i > r \\ f_{rs} - \sum_{r>k>s} a_k f_{ks} & , i = r \end{cases}$$

Assim, por (4) e (5), concluímos que $f'_{ıs} \in Q$, para todo $ı \geq r$, donde $r' < r$ e portanto $(r' - s') < (r - s)$, o que contraria a minimalidade de $(r - s)$.

Mostramos até aqui que f_{rs} **não** é soma de um elemento de Q com uma combinação linear de $\{f_{ks} \mid k \neq r\}$.

Daí decorre que $x_r \in M^U$. De fato, $u.x_r - x_r = \sum_{ı>r} f_{ır}(u)x_ı$, para todo $u \in U$.

Por (4), $f_{ıs} \in Q$ para todo $ı > r$ e portanto $(f_{ıs}.u) \in Q$, para todo $ı > r$ e para todo $u \in U$.

Mas então, para todo $ı > r > s$,

$$f_{ıs}.u = f_{ıs}(u) + \sum_{k>s} f_{ık}(u)f_{ks} \in Q$$

ou seja,

$$f_{ıs}(u) + f_{ır}(u)f_{rs} + \sum_{r \neq k > s} f_{ık}(u)f_{ks} \in Q$$

Assim, para todo $u \in U$ e $ı > r$, existe $q_u^ı \in Q$ tal que

$$f_{ır}(u)f_{rs} = q_u^ı + \sum_{r \neq k > s} f_{ık}(u)f_{ks}$$

Como f_{rs} não é soma de um elemento de Q com uma k-combinação linear de $\{f_{ks} \mid k \neq r\}$, temos que $f_{ır} = 0$, para todo $ı > r$ e portanto $x_r \in M^U$.

Finalmente, suponhamos por absurdo que T seja somando de V como U-módulo e seja $H \subset S^p(M) = V$ um U-submódulo tal que

$$S^p(M) = T \oplus H$$

Para cada $ı \geq s$, $ı \neq r$, sejam $h_ı \in H$ e $t_ı \in T$ tais que

$$x_ı x_r^{p-1} = t_ı + h_ı$$

Como $x_ı \in M^U$,

$$u.\left(x_s x_r^{p-1}\right) = \sum_{ı \geq s} f_{ıs}(u)x_ı x_r^{p-1} \qquad \text{, com } f_{ss} = 1$$

Logo,

$$u.(t_s + h_s) = f_{rs}(u)x_r^p + \sum_{\substack{ı \geq s \\ ı \neq r}} f_{ıs}(u)(t_ı + h_ı)$$

Como a soma é direta, daí deduzimos que

$$u.h_s = \sum_{\substack{i>s\\ i\neq r}} f_{is}(u)h_i \in H$$

e

$$u.t_s = f_{rs}(u)x_r^p + \sum_{\substack{i>s\\ i\neq r}} f_{is}(u)t_i \in T$$

Mas existem $\alpha_j \in P(U)$ e $b_{ij} \in k$, $1 \leq i,j \leq n$ tais que

$$u.t_s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(u)^p x_j^p$$

e

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^p x_j^p$$

Logo,

$$f_{rs}(u)x_r^p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(u)^p x_j^p - \sum_{j=1}^{n}(\sum_{\substack{i>s\\ i\neq r}} f_{is}(u)b_{ij}^p)x_j^p$$

donde

$$f_{rs} = \alpha_r^p - \sum_{\substack{i>s\\ i\neq r}} b_{ir}^p f_{is}$$

o que já vimos que não pode acontecer.

Assim T não é somando de V como G-módulo e G não é linearmente redutivo.

□

Seja G um grupo algébrico conexo. Um subgrupo $\mathcal{B}$ de G diz-se um subgrupo de Borel de G se $\mathcal{B}$ é subgrupo fechado, conexo, solúvel de G, maximal com relação a estas propriedades.

Pode-se provar que se G é um grupo algébrico conexo que possui um subgrupo de Borel nilpotente, então G é nilpotente (e portanto $G = B$). Para detalhes, veja [11]. Vamos usar esse fato para provar o lema que se segue.

Lema 2.1.13 *Se G é um grupo algébrico conexo que não possui subgrupos fechados unipotentes infinitos então G é um toro.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B} \in G$ um subgrupo de Borel de G e $T \subset \mathcal{B}$ um toro maximal. Seja ainda $\mathcal{B}_u$ a parte unipotente de $\mathcal{B}$.

Sendo $\mathcal{B}$ conexo e solúvel, sabemos que $\mathcal{B} = T \times \mathcal{B}_u$.

Como $\mathcal{B}_u$ é subgrupo fechado e unipotente de G, $\mathcal{B}_u$ é finito. Mas sendo $\mathcal{B}_u$ conexo, concluímos que $\mathcal{B}_u = \{e\}$ e portanto $\mathcal{B} = T$ é um toro. Em particular, $\mathcal{B} = T$ é nilpotente, donde $G = \mathcal{B} = T$ é um toro.

□

Concluímos esse parágrafo com o resultado de *Nagata* a que nos referimos anteriormente.

Teorema 2.1.14 (Nagata) *Seja G um grupo algébrico conexo definido sobre um corpo algebricamente fechado k, de* **característica positiva**. *Se G é linearmente redutivo, então G é um toro.*

Demonstração. Sendo G linearmente redutivo, pelo lema (2.1.12), G não possui grupos fechados conexos unipotentes de dimensão positiva. Em particular, G não possui subgrupos fechados unipotentes infinitos. Logo, pelo lema anterior, G é um toro.

□

2.2 Subgrupos Normais, Quocientes e Homomorfismos.

Nesta seção estudaremos o comportamento das noções de redutividade linear ou geométrica em relação a subgrupos, quocientes e homorfismos.

Com esses resultados poderemos provar um teorema de *Nagata* e *Miyata* que afirma que todo grupo geometricamente redutivo é redutivo, no sentido de que seu radical unipotente é trivial.

A recíproca desse teorema ficou conhecida desde 1965 como a Conjectura de Mumford, tendo sido provada apenas em 1975, por *Haboush*, em [6].

Proposição 2.2.1 *Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um epimorfismo de grupos algébricos. Se G é geometricamente redutivo então G' também o é.*

Demonstração. Seja $\lambda : M \longrightarrow k$ um epimorfismo de G'-módulos e consideremos em M a estrutura de G-módulo induzida por φ, isto é

$$x * m = \varphi(x).m, \qquad \forall x \in G, \qquad \forall m \in M$$

Assim, λ é morfismo sobrejetor de G-módulos .

Sendo G geometricamente redutivo, existem $q > 0$ e $t \in S^q(M)^G$ tais que $\bar{S}^q(\lambda)(t) = 1$. Por outro lado, como φ é sobrejetora, é fácil ver que para todo $r \geq 1$, $S^r(M)^G = S^r(M)^{G'}$. Em particular, $t \in S^q(M)^{G'}$ e $\bar{S}^q(\lambda)(t) = 1$. Logo, G' é geometricamente redutivo.

□

Observação 2.2.2 *Vale o mesmo resultado para grupos linearmente redutivos.*

Corolário 2.2.3 *Seja U um grupo algébrico conexo e unipotente. Se* $\dim U > 0$ *então U não é geometricamente redutivo.*

Demonstração. Sendo U conexo unipotente de dimensão positiva, sabemos por ([11], §17.5) que existe $n \geq 2$ tal que $U \approx U(n,k)$, onde

$$U(n,k) = \{A = (a_{ij}) \in GL(n,k) \mid a_{ii} = 1,\ 1 \leq i \leq n, \text{ e } a_{ij} = 0,\ 1 \leq j < i \leq n\}$$

Consideremos $\psi : U_n(k) \longrightarrow U_2(k)$ dada por

$$\psi((a_{ij})) = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então ψ é epimorfismo de grupos algébricos. Pela proposição (2.2.1), para provar que U não é geometricamente redutivo, basta provar que $U_2(k)$ não é geometricamente redutivo.

Para isso, consideremos $k[X]$ e $k[X,Y]$ os anéis de polinômios com coeficientes em k. Consideremos em $k[X]$ a ação trivial de U_2 em $k[X,Y]$ a ação definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.f(X,Y) = f(X+aY, Y), \qquad a \in k, \quad f \in k[X,Y]$$

Consideremos $\varphi : k[X,Y] \longrightarrow k[X]$ dada por

$$\varphi(f) = f(X,0)$$

Então φ é epimorfismo de U_2-módulo álgebras e $X \in k[X]^U$. Além disso,

$$\begin{aligned} k[X,Y]^{U_2} &= \{f \in k[X,Y] \mid f(X+aY,Y) = f(X,Y), \quad \forall a \in k\} = \\ &= \{f \in k[X,Y] \mid f \text{ não depende de } X\} \end{aligned}$$

Logo, $\varphi(k[X,Y]^{U_2}) = k$ e portanto para todo $r > 0$ e para todo $f \in k[X,Y]^{U_2}$,

$$\varphi(f) \neq X^r$$

Assim, U_2 não é geometricamente redutivo e vale o resultado.

□

Proposição 2.2.4 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k e H um subgrupo fechado e* **normal** *de G. Temos:*

(i) *Se G é geometricamente redutivo então H e G/H também o são.*

(ii) *Reciprocamente, se H e G/H são geometricamente redutivos então G também o é.*

Demonstração.

(i) O fato de que H é geometricamente redutivo seguirá de resultados mais gerais que veremos na próxima seção (observação 2.3.2). Considere $\pi : G \longrightarrow G/H$ a projeção canônica. Como π é morfismo sobrejetor de grupos algébricos, pela proposição (2.2.1), concluímos que G/H é geometricamente redutivo, se G o for.

(ii) Sejam $M \in \mathcal{M}(G)$ e $\lambda : M \longrightarrow k$ um morfismo sobrejetor de G-módulos. Então λ é também um morfismo sobrejetor de H-módulos e como H é geometricamente redutivo, existe $r > 0$ tal que

$$\bar{S}^r(\lambda) : S^r(M)^H \longrightarrow k$$

é sobrejetora.

Mas $S^r(M)^H$ é um G/H-módulo, via

$$(xH).t = xt, \qquad \forall x \in G, \qquad \forall t \in S^r(M)^H$$

Além disso, $\bar{S}^r(\lambda)\ |_{S^r(M)^H}$ é um epimorfismo de G/H-módulos. Como G/H é geometricamente redutivo, existe $s > 0$ tal que

$$\bar{S}^s\left(\bar{S}^r(\lambda)\right) : S^s\left(S^r(M)^H\right)^{G/H} \longrightarrow k$$

é sobrejetora.

Consideremos $\mu : S^s\left(S^r(M)^H\right)^{G/H} \longrightarrow S^{sr}(M)^G$ definida por

$$\mu(\overline{t_1 \otimes \cdots \otimes t_s}) = \overline{t_1. \ldots .t_s}$$

onde $t_i \in S^r(M)^H$ e . indica o produto na álgebra simétrica. Então o diagrama

$$\begin{tikzcd} S^s\left(S^r(M)^H\right)^{G/H} \arrow[rr, "\bar{S}^s(\bar{S}^r(\lambda))"] \arrow[dr, "\mu"'] & & k \\ & S^{sr}(M)^G \arrow[ur, "\bar{S}^{sr}(\lambda)"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Considere $x \in S^s\left(S^r(M)^H\right)^{G/H}$ tal que $\bar{S}^s\left(\bar{S}^r(\lambda)\right)(x) = 1$. Então $\mu(x) \in S^{sr}(M)^G$ e $\bar{S}^{sr}(\lambda)(x) = 1$. Logo, G é geometricamente redutivo.

□

Observação 2.2.5 *Vale resultado análogo para o caso linearmente redutivo.*

Com esses resultados podemos provar o teorema de **Nagata e Miyata**, ([17]), a saber:

Teorema 2.2.6 *Seja G um grupo algébrico definido sobre k. Se G é geometricamente redutivo então G é redutivo.*

Demonstração. Seja $U = R_u(G) \lhd G$, o radical unipotente de G. Sendo U normal em G então pela proposição (2.2.4), concluímos que U é geometricamente redutivo.

Como U é conexo unipotente, pelo corolário (2.2.3), temos que $\dim U = 0$ e como U é conexo, $U = \{e\}$. Logo, G é redutivo.

□

Concluímos esta seção, com o enunciado do teorema de *Haboush*, cuja prova está em [6] e com alguns exemplos de grupos algébricos geometricamente redutivos.

Teorema 2.2.7 (Haboush) *Seja G um grupo algébrico redutivo. Então G é geometricamente redutivo.*

Exemplos 2.2.8 *Seja k um corpo algebricamente fechado. Os grupos abaixo são geometricamente redutivos.*

(i) $GL(n,k) = \{A \in M(n,k) \mid \det(A) \neq 0\}, \qquad n \geq 1$

(ii) $SL(n,k) = \{A \in GL(n,k) \mid \det(A) = 1\}, \qquad n \geq 1$

(iii) $D(n,k) = \{A \in GL(n,k) \mid A = (a_{ij}) \text{ e } a_{ij} = 0, i \neq j\}, \qquad n \geq 1$

(iv) $PGL(n,k) = GL(n,k)/k^*$, *onde* $k^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \mid a \in k^* \right\}$

(v) *Qualquer grupo algébrico semisimples*

2.3 Subgrupos Exatos.

A noção de subgrupo exato de um grupo algébrico foi introduzida na seção (1.2). Vamos mostrar agora que estes são exatamente os subgrupos de um grupo algébrico que herdam a propriedade da redutividade geométrica.

Teorema 2.3.1 (Cline, Parshall e Scott) *Sejam G um grupo algébrico geometricamente redutivo e H um subgrupo fechado de G. Então*

$$H \text{ é geometricamente redutivo} \Leftrightarrow H \text{ é exato em } G.$$

Demonstração. A prova que apresentaremos pode ser encontrada em [4].

Suponhamos H exato em G e seja $\lambda : M \longrightarrow k$ um H-morfismo sobrejetor. Se $N = \ker \lambda$, tensorizando por $P(G)$ e tomando a parte-fixa em relação a ação diagonal de H, obtemos a sequência exata longa

$$0 \to (P(G) \otimes N)^H \to (P(G) \otimes M)^H \to (P(G) \otimes k)^H \to H^1(H, P(G) \otimes N) \to \cdots$$

Sendo H exato em G, sabemos pela proposição (1.2.9), que $P(G)$ é H-módulo injetivo. Assim, $H^1(H, P(G) \otimes N) = (0)$.

Identificando $P(G) \underset{k}{\otimes} k$ com $P(G)$, concluímos que o morfismo

$$\begin{array}{rcll} \tilde{\lambda} : \ (P(G) \otimes M)^H & \to & P(G)^H & \quad \text{dado por} \\ \tilde{\lambda}\,(\sum_i f_i \otimes m_i) & = & \sum_i \lambda(m_i) f_i & \end{array}$$

é sobrejetor.

Além disso, se considerarmos $M|^G = (P(G) \otimes M)^H$, cuja estrutura de G-módulo está dada por

$$x.\left(\sum_i f_i \otimes m_i\right) = \sum_i \left(f_i.x^{-1}\right) \otimes m_i, \qquad \forall x \in G$$

e em $P(G)^H$ a estrutura de G-módulo dada por

$$x.f = f.x^{-1}, \qquad \forall x \in G, \qquad \forall f \in P(G)^H$$

teremos que $\tilde{\lambda}$ é um morfismo de G-módulos .

Por outro lado, se considerarmos em $M\,|^G$ a restrição da ação de G a H, a aplicação

$$\begin{array}{rcll} E_M : \ (P(G) \otimes M)^H & \to & M & \quad \text{definida por} \\ E_M\,(\sum_i f_i \otimes m_i) & = & \sum_i f_i(e) m_i & \end{array}$$

é um H-morfismo.

Além disso, o diagrama

$$\begin{tikzcd} (P(G) \otimes M)^H \arrow[r, "\tilde{\lambda}"] \arrow[d, "E_M"'] & P(G)^H \arrow[d, "E"] \\ M \arrow[r, "\lambda"'] & k \end{tikzcd}$$

é comutativo, onde E é a avaliação em $\mathbf{e}$.

Seja $t \in (P(G) \otimes M)^H$ tal que $\tilde{\lambda}(t) = 1$ e consideremos $\langle G.t \rangle_k$ ou G-submódulo gerado por t em $M \mid^G = (P(G) \otimes M)^H$. A restrição de $\tilde{\lambda}$ a $\langle G.t \rangle_k$ é um morfismo de G-módulos de $\langle G.t \rangle_k$ em k e, desse modo, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \langle G.t \rangle_k \arrow[rr, "\tilde{\lambda}"] \arrow[dr, "E_M"'] & & k \arrow[dl, "\lambda"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Como G é geometricamente redutivo, existem $q > 0$ e $x \in S^q(\langle G.t \rangle_k)^G$ tais que $\bar{S}^q(\tilde{\lambda})(x) = 1$.

Seja $y = S^q(E_M)(x) \in S^q(M)^H$. Então

$$\bar{S}^q(\lambda)(y) = \bar{S}^q(\lambda)\left(S^q(E_M)(x)\right) = \bar{S}^q(\tilde{\lambda})(x) = 1$$

Logo, H é geometricamente redutivo.

Faremos apenas um esboço da prova da recíproca.

Seja $H < G$ fechado e suponhamos G e H geometricamente redutivos. Mostraremos que H é exato em G, provando que G/H é afim (veja teorema (1.2.10)). Para isso, procedemos da seguinte forma:

(1) Prova-se que H é observável em G, o que é equivalente ao quociente G/H ser quasi-afim.

(2) Considera-se $0 \neq f \in P(G)^H$ tal que $(G/H)_f$ seja afim e I o ideal de $P(G)^H$ gerado por $\{f.x \mid x \in G\}$. Então I não tem zeros em $P(G)$ e $IP(G) = P(G)$. A partir disso, por indução no número de geradores de I, mostra-se que $I = P(G)^H$.

(3) Escolhendo um número finito de geradores para I, da forma $f_i = f.x_i$, com $x_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$, conclui-se que para todo i, $1 \leq i \leq n, (G/H)_{f_i}$ é afim e que $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle_{P(G)} = P(G)$. Daí decorre que G/H é afim.

□

Observação 2.3.2 *Do teorema anterior decorre que se G é geometricamente redutivo e H é um subgrupo fechado e* **normal** *de G, então H é geometricamente redutivo. Com isso, a prova da proposição (2.2.4) está completa.*

Capítulo 3

Caracterizações Algébricas dos Grupos Geometricamente Redutivos

Nas duas primeiras seções, apresentamos algumas caracterizações dos grupos linearmente redutivos, já conhecidas, em termos da existência de uma família de operadores de Reynolds, da cohomologia racional e da existência de uma integral.

A seguir, estenderemos parte destas caracterizações aos grupos geometricamente redutivos.

3.1 Operadores de Reynolds.

Sejam G um grupo algébrico definido sobre um corpo algebricamente fechado k e M um G-módulo racional.

Definição 3.1.1 *Uma aplicação k-linear $p_M : M \longrightarrow M^G$ diz-se um operador de Reynolds para M se verifica:*

(i) $p_M(x.m) = p_M(m), \quad \forall x \in G; \quad \forall m \in M.$

e

(ii) $p_M(m) = m, \quad \forall m \in M^G$

Observação 3.1.2 *Seja M um G-módulo racional. É fácil verificar que existe um operador de Reynolds p_M para M se e somente se M^G é somando de M como G-módulo e nesse caso, $M = M^G \oplus M_G$, onde $M_G = \ker p_M$ e $(M_G)^G = (0)$.*

Observação 3.1.3 *Da observação anterior e da proposição (2.1.3) decorre que se G é linearmente redutivo e $M \in \mathcal{M}(G)$ então existe um operador de Reynolds p_M para M. Nossos próximos resultados serão utilizados para mostrar que, nesse caso, a família de operadores $(p_M)_{M \in \mathcal{M}(G)}$ comuta com os morfismos de G-módulos . Tais resultados podem ser encontrados em [5].*

Proposição 3.1.4 *Seja G um grupo algébrico definido sobre k e M um G-módulo semisimples. Consideremos*

$$\mathcal{N} = \left\{ N \subset M \mid N \text{ é } G\text{-submódulo de } M \text{ e } N^G = (0) \right\}$$

Então

(i) *Existe em $\mathcal{N}$ um elemento máximo, que chamaremos M_G.*

(ii) *$M = M^G \oplus M_G$ e M_G é o único complemento de M^G em M, como G-módulo .*

Demonstração.

(i) Pelo Lema de Zorn, existe $N' \subset M$ um elemento maximal em $\mathcal{N}$. Consideremos $N \in \mathcal{N}$ arbitrário. Se $N \not\subset N'$ então, como N é semisimples, existe um G-submódulo simples P de N tal que $(0) \neq P \not\subset N'$. Logo, $P \cap N' \subsetneq P$. Como P é G-módulo simples, $P \cap N' = (0)$ e portanto $(N' \oplus P) \supsetneq N'$. Mas então $(N' \oplus P)^G = (N')^G \oplus P^G = P^G$. Novamente como P é simples, $P^G = (0)$ ou $P^G = P$. Se $P^G = P$, então $P^G \subset N^G = (0)$ e portanto $(0) = P^G = P$. Assim, de qualquer modo, $P^G = (0)$ e portanto $(N' \oplus P)^G = P^G = (0)$. Mas $(N' \oplus P) \supsetneq N'$ e $(N' \oplus P) \in \mathcal{N}$, o que contraria a maximalidade de N'. Logo, $N \subset N'$ e $\mathcal{N}$ tem máximo, que indicaremos por M_G.

(ii) Consideremos $\left(M^G + M_G\right) \subset M$. Como $(0) = (M_G)^G = M_G \cap M^G$, a soma é direta. Sendo M semisimples, para concluirmos que $M = M^G \oplus M_G$, basta mostrar que todo submódulo simples de M está contido em $\left(M^G \oplus M_G\right)$. Seja pois $Q \subset M$ um tal submódulo. Como antes, $Q^G = (0)$ ou $Q^G = Q$. Se $Q^G = (0)$, então por (i), $Q \subset M_G \subset \left(M^G \oplus M_G\right)$. Se $Q^G = Q$ então $Q = Q^G \subset M^G \subset \left(M^G \oplus M_G\right)$. Logo, $M = M^G \oplus M_G$.

Resta provar que M_G é o único G-complemento de M^G em M. Seja $T \subset M$ um G-complemento de M^G em M. Então $T^G = T \cap M^G = (0)$, donde $T \subset M_G$. Por outro lado, dado $x \in M_G$, se existem $y \in M^G$ e $t \in T$ tais que $x = y + t$. Assim, $y = (x - t) \in M^G \cap M_G = (0)$, donde $x = t \in T$ e portanto $T = M_G$.

□

Corolário 3.1.5 *Seja $f : M \longrightarrow N$ um morfismo de G-módulos semisimples. Consideremos p_M e p_N os operadores de Reynolds para M e N, respectivamente. Então o diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_M"'] & N \arrow[d, "p_N"] \\ M^G \arrow[r, "f"'] & N^G \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração. Consideremos $M_G \subset M$ e $N_G \subset N$ como na proposição anterior. Então $f(M_G) \subset N_G$. De fato, seja $Q \subset M_G$ um G-submódulo simples de M_G e consideremos a restrição $f\mid_Q$: $Q \longrightarrow f(Q)$. Como Q é simples, $\ker(f/Q) = (0)$ ou $\ker(f/Q) = Q$. Consequentemente, $f(Q) \approx Q$ ou $f(Q) = (0)$. Em qualquer caso,

$$f(Q)^G = f(Q^G) = f(Q \cap M^G) \subset f(M_G \cap M^G) = (0)$$

Logo, pela proposição (3.1.4), temos que $f(Q) \subset N_G$. Como M_G é G-módulo semisimples, concluímos que $f(M_G) \subset N_G$.

Com isso, podemos provar a comutatividade do diagrama. Consideremos assim $m \in M$, $m^G \in M^G$ e $m_G \in M_G$ tais que

$$m = m^G + m_G$$

Então $f(m) = f(m^G) + f(m_G)$ e $f(m^G) \in N^G$, $f(m_G) \in N_G$.

Como $N_G = \ker(p_N)$, temos:

$$(p_N \circ f)(m) = p_N(f(m^G)) + p_N(f(m_G)) = p_N(f(m^G)) = f(m^G)$$

Como $M_G = \ker(p_M)$ e $p_M(m^G) = m^G$,

$$f(p_M(m)) = f(p_M(m^G) + p_M(m_G)) = f(p_M(m^G)) = f(m^G)$$

Com isso, o resultado está provado.

□

Teorema 3.1.6 *Seja G um grupo algébrico definido sobre k. São equivalentes:*

(i) *G é linearmente redutivo*

(ii) *Para todo $M \in \mathcal{M}(G)$, existe um operador de Reynolds p_M para M, tal que se $f : M \longrightarrow N$ é um morfismo de G-módulos , então o diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_M"'] & N \arrow[d, "p_N"] \\ M^G \arrow[r, "f"'] & N^G \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Sendo G linearmente redutivo, sabemos que todo G-módulo é semisimples. Logo, o resultado segue da observação (3.1.2) e do corolário (3.1.5).

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Seja $\lambda : M \longrightarrow k$ um epimorfismo de G-módulos . Como G age trivialmente em k, $p_k : k \longrightarrow k^G = k$ é a identidade em k. Por outro lado, como λ é sobrejetor, existe $m_0 \in M$ tal que $\lambda(m_0) = 1$. Consideremos $m = p_M(m_0) \in M^G$.

Então

$$\lambda(m) = \lambda(p_M(m_0)) = p_k(\lambda(m_0)) = p_k(1) = 1$$

Logo, $\lambda\mid_{M^G}: M^G \longrightarrow k$ é sobrejetora, e G é linearmente redutivo.

□

3.2 Integrais e Cohomologia Racional.

Nesta seção, apresentamos uma caracterização dos grupos linearmente redutivos em termos da cohomologia racional, introduzida na seção (1.1), e em termos da existência de uma integral em $P(G)$. Começamos com a definição de integral.

Definição 3.2.1 *Seja G um grupo algébrico afim definido sobre k. Uma aplicação k-linear $I : P(G) \longrightarrow k$ diz-se uma* **integral para** G *se*

(i) $I(f.x) = I(f), \quad \forall f \in P(G) , \quad \forall x \in G$

e

(ii) $I(\mathbb{1}) \neq 0$, *(onde $\mathbb{1}$ denota a função constante igual a 1, de G em k).*

Exemplos 3.2.2

(i) *Seja $G = k^*$, o grupo multiplicativo de k. Então $P(G) = k[T, T^{-1}]$, com*

$$x.T = xT \quad \text{e} \quad x.T^{-1} = x^{-1}T^{-1}, \quad \forall x \in k^*$$

Consideremos $I : k[T, T^{-1}] \longrightarrow k$ definida por

$$I\left(\sum_{j=-m}^{n} a_j T^j\right) = a_0$$

É claro que I é k-linear e $I(\mathbb{1}) = 1$. Além disso, se $f\left(T, T^{-1}\right) = \sum_{j=-m}^{n} a_j T^j$, então

$$(f.x)\left(T, T^{-1}\right) = f\left(xT, x^{-1}T^{-1}\right) = \sum_{j=-m}^{-1} \left(a_j x^{-j} T^j\right) + a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j x^j T^j$$

Logo, $I(f.x) = a_0 = I(f)$, donde I é uma integral para $G = k^*$.

(ii) *Seja $G \subset GL(n.k)$ um grupo finito.*

Consideremos $\begin{array}{rcl} I: P(G) & \rightarrow & k \\ I(f) & = & .\sum_{x \in G} f(x) \end{array}$ *definido por*

Então I é k-linear e dados $f \in P(G)$, $y \in G$, temos

$$I(f.y) = \sum_{x \in G} (f.y)(x) = \sum_{x \in G} f(yx) = \sum_{z \in G} f(z) = I(f)$$

e

$$I(1) = |G|.1_k$$

Assim, se $car(k) \not| \ |G|$, I é uma integral para G.

(iii) *Sejam G e H grupos algébricos afins definidos sobre k e suponhamos que I_G e I_H sejam integrais em $P(G)$ e em $P(H)$, respectivamente.*

Então $(I_G \otimes I_H) : P(G) \otimes P(H) \longrightarrow k$ é uma integral para $(G \times H)$, já que $P(G \times H) \approx P(G) \underset{k}{\otimes} P(H)$.

Teorema 3.2.3 *Seja G um grupo algébrico afim definido sobre k. São equivalentes:*

(a) *G é linearmente redutivo*

(b) *G admite uma integral*

(c) *$H^1(G, M) = (0)$, para todo $M \in \mathcal{M}(G)$*

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Consideremos $P(G)$ como G-módulo à direita via

$$(f.x)(y) = f(xy), \qquad \forall f \in P(G), \qquad \forall x, y \in G$$

Sendo G linearmente redutivo, pelo teorema (3.1.6) podemos considerar o operador de Reynolds para $P(G)$, $p_{P(G)} : P(G) \longrightarrow P(G)^G$. Como $P(G)^G = k$, temos que

$$I = p_{P(G)} : P(G) \longrightarrow k$$

é um morfismo de G-módulos (à direita) e $I(\mathbb{1}) = 1$. Logo, I é uma integral para G.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Seja $M \in \mathcal{M}(G)$ e consideremos $H^1(G, M) = \dfrac{Z^1(G, M)}{B^1(G, M)}$, como na seção (1.1).

Seja $\alpha \in Z^1(G, M)$. Como $\alpha : G \longrightarrow M$ é polinomial, $\alpha(G) \subset M' \subset M$, onde M' é um G-submódulo de M, de dimensão finita sobre k.

Consideremos $\{m_1, \ldots, m_t\}$ uma k-base de M'.

Então existem $a_j \in P(G)$, $b_{ij} \in P(G)$, $1 \leq i, j \leq t$, tais que

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{t} a_j(x) m_j, \qquad \forall x \in G$$

e

$$x.m_i = \sum_{j=1}^{t} b_{ij}(x)m_j, \qquad \forall x \in G$$

Seja $I : P(G) \longrightarrow k$ uma integral para G tal que $I(\mathbb{1}) = 1$.

Consideremos $m = -\sum_{j=1}^{t} I(a_j)m_j \in M$.

Vamos mostrar que $\alpha = \delta_m$.

Como $\alpha \in Z^1(G, M)$, é fácil verificar que

$$(1) \qquad a_r.x = a_r(x) + \sum_{j=1}^{t} b_{jr}(x)a_j, \qquad \forall x \in G,\ 1 \leq r \leq t$$

Como I é morfismo de G-módulos à direita, temos

$$I(a_r) = I(a_r.x) = a_r I(1) + \sum_{j=1}^{t} b_{jr}(x)I(a_j)$$

e como $I(\mathbb{1}) = 1$, concluímos que

$$(2) \qquad a_r(x) = I(a_r) - \sum_{j=1}^{t} b_{jr}(x)I(a_j), \qquad \forall x \in G,\ 1 \leq r \leq t$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
\delta_m(x) = x.m - m \quad &= \quad -\sum_{j=1}^{t} I(a_j)x.m_j + \sum_{j=1}^{t} I(a_r)m_r = \\
&= \quad \sum_{r=1}^{t} I(a_r)m_r - \sum_{j=1}^{t} I(a_j) \sum_{r=1}^{t} b_{jr}(x)m_r = \\
&= \quad \sum_{r=1}^{t}[(I(a_r) - \sum_{j=1}^{t} b_{jr}(x)I(a_j))m_r] = \\
&= \quad \sum_{r=1}^{t} a_r(x)m_r = \alpha(x), \qquad \forall x \in G
\end{aligned}$$

Logo, $\alpha \in B^1(G, M)$ e $H^1(G, M) = (0)$.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Sejam $\lambda : M \longrightarrow k$ um epimorfismo de G-módulos e $N = \ker \lambda$. Então a sequência exata curta de G-módulos

$$0 \to N \hookrightarrow M \xrightarrow{\lambda} k \to 0$$

dá origem a uma sequência exata longa

$$0 \rightarrow N^G \hookrightarrow M^G \rightarrow k^G = k \rightarrow H^1(G,N) \rightarrow \cdots$$

Por (c), $H^1(G,N) = (0)$ e portanto $\lambda\mid_{M^G}: M^G \longrightarrow N^G$ é sobrejetora. Assim, G é linearmente redutivo e o resultado está provado.

□

3.3 Grupos Geometricamente Redutivos e Integrais Generalizadas.

Na seção anterior mostramos a equivalência entre a existência de uma integral para um grupo algébrico G e o fato de G ser linearmente redutivo. Nosso objetivo agora será apresentar uma generalização do conceito de integral, e provar que G é um grupo algébrico geometricamente redutivo se e somente se G admite uma "integral generalizada". Para começar faremos uma demostração da primeira parte do teorema (3.2.3), que motiva as definições e resultados desta seção.

Suponhamos G linearmente redutivo, consideremos a indução $k \overset{\iota}{\hookrightarrow} P(G)$ e o morfismo induzido nos duais $\begin{array}{ccc} P(G)^* & \xrightarrow{\epsilon} & k^* \approx k \\ \sigma & \longmapsto & \sigma(1) \end{array}$.

Então ϵ é morfismo sobrejetor de G-módulos e como G é linearmente redutivo, existe $I \in (P(G)^*)^G$ tal que $\epsilon(I) = 1$. Em outras palavras, existe um morfismo de G-módulos $I : P(G) \longrightarrow k$ tal que $I(\mathbb{1}) = 1$.

Assim, a integral para um grupo linearmente redutivo surge quando aplicamos a propriedade de redutividade linear ao morfismo sobrejetor de G-módulos

$$\begin{array}{ccc} P(G)^* & \xrightarrow{\epsilon} & k \\ \sigma & \longmapsto & \sigma(\mathbb{1}) \end{array}$$

Se aplicarmos a definição de grupo algébrico geometricamente redutivo ao G-morfismo ϵ, concluímos que existem $r > 0$ e $I \in S^r(P(G)^*)^G$ tais que $\bar{S}^r(\epsilon)(I) = 1$.

Definição 3.3.1 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k e $\epsilon = \epsilon_G : P(G)^* \longrightarrow k$ o G-morfismo definido por $\epsilon(\sigma) = \sigma(1)$, $\forall \sigma \in P(G)^*$. Dizemos que G admite uma integral generalizada I se existem $r > 0$ e $I \in S^r(P(G)^*)^G$ tais que $\bar{S}^r(\epsilon)(I) = 1$.*

Nesse caso, I diz-se uma **r-integral para G.**

Ao considerações feitas anteriormente mostram que se G é geometricamente redutivo, então G admite uma r-integral para algum $r > 0$.

Para provar a recíproca, precisamos do seguinte resultado.

Lema 3.3.2 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k, $\lambda : M \longrightarrow k$ um epimorfismo de G-módulos e $\epsilon : P(G)^* \longrightarrow k$ o G-morfismo definido por $\epsilon(\sigma) = \sigma(\mathbb{1})$. Então existe um morfismo de G-módulos $\varphi_\lambda : P(G)^* \longrightarrow M$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dr, "\lambda"] & \\
P(G)^* \arrow[ur, "\varphi_\lambda"] \arrow[rr, "\epsilon"'] & & k
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração. Observemos inicialmente que basta provar o resultado para morfismos $\lambda : M \longrightarrow k$ com $\dim_k M < \infty$.

De fato, seja $\lambda : M \longrightarrow k$ um G-morfismo sobrejetor e consideremos $m \in M$ tal que $\lambda(m) = 1$. O fato de que M é um G-módulo racional garante a existência de um G-submódulo $M_1 \subset M$ tal que $m \in M_1$ e $\dim_k M_1 < \infty$.

Consideremos $\lambda_1 = \lambda\,|_{M_1} : M_1 \longrightarrow k$. Como $m \in M_1$ e $\lambda(m) = 1$, λ_1 é um morfismo sobrejetor de G-módulos. Então existe $\varphi_{\lambda_1} : P(G)^* \longrightarrow M_1 \subset M$ tal que $\lambda_1 \circ \varphi_{\lambda_1} = \epsilon$. Como $\lambda_1 = \lambda\,|_{M_1}$, $\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda_1} : P(G)^* \longrightarrow M$ é um G-morfismo e $\lambda \circ \varphi_\lambda = \epsilon$.

Assim, podemos supor $\dim_k M < \infty$. Seja $\{m_1, \ldots, m_t\}$ uma k-base de M com $\{m_1, \ldots, m_{t-1}\}$ uma k-base de $\ker \lambda$ e $\lambda(m_t) = 1$.

Então existem $a_{ij} \in P(G)$, $1 \leq i, j \leq t$, tais que

$$(1) x.m_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}(x) m_j, \qquad \forall x \in G, \qquad \forall i, 1 \leq i \leq t$$

Defino $\varphi_\lambda : P(G)^* \longrightarrow M$ por

$$\varphi_\lambda(\sigma) = \sum_{j=1}^{t} \sigma(\eta(a_{tj})) m_j, \qquad \forall \sigma \in P(G)^*$$

Então

$$\begin{aligned}(\lambda\circ\varphi_\lambda)(\sigma) &= \lambda(\sum_{j=1}^{t}\sigma(\eta(a_{tj}))m_j)=\sum_{j=1}^{t}\sigma(\eta(a_{tj}))\lambda(m_j)=\\ &= \sigma(\eta(a_{tt}))\lambda(m_t)=\sigma(\eta(a_{tt}))\end{aligned}$$

Mas, por (1),

$$x.m_t=\sum_{j=1}^{t}a_{tj}(x)m_j,\qquad \forall x\in G$$

Logo, como λ é um G-morfismo,

$$\begin{aligned}1=\lambda(m_t) &= \lambda(x.m_t)=\sum_{j=1}^{t}a_{tj}(x)\lambda(m_j)=\\ &= a_{tt}(x)\lambda(m_t)=a_{tt}(x),\qquad \forall x\in G\end{aligned}$$

Portanto, $a_{tt}=1$ e

$$(\lambda\circ\varphi_\lambda)(\sigma)=\sigma(\eta(1))=\sigma(1)=\epsilon(\sigma),\qquad \forall\sigma\in P(G)^*$$

Vamos provar agora que φ_λ é um G-morfismo.

De (1) segue que

$$a_{ij}.x=\sum_{r=1}^{t}a_{rj}(x)a_{ir},\qquad \forall x\in G,\qquad \forall 1\le i,j\le t$$

Assim, dados $x\in G$ e $\sigma\in P(G)^*$,

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(x.\sigma) &= \sum_{j=1}^{t}(x.\sigma)(\eta(a_{tj}))m_j=\sum_{j=1}^{t}\sigma(x^{-1}.\eta(a_{tj}))m_j=\\ &= \sum_{j=1}^{t}\sigma(\eta(a_{tj}.x))m_j=\sum_{j,r=1}^{t}\sigma(\eta(a_{rj}(x)a_{tr}))m_j=\\ &= \sum_{r=1}^{t}[\sum_{j=1}^{t}\sigma(\eta(a_{tr}))a_{rj}(x)m_j]=\sum_{r=1}^{t}[\sigma(\eta(a_{tr}))(\sum_{j=1}^{t}a_{rj}(x)m_j)]=\\ &= \sum_{r=1}^{t}[\sigma(\eta(a_{tr}))(x.m_r)]=x.[\sum_{r=1}^{t}\sigma(\eta(a_{tr}))m_r]=\\ &= x.\varphi_\lambda(\sigma)\end{aligned}$$

Com isso, a prova do lema está completa.

□

Proposição 3.3.3 *Seja G um grupo algébrico definido sobre k. São equivalentes:*

(a) *G é geometricamente redutivo*

(b) *G admite uma r-integral, para algum $r > 0$.*

Demonstração.

Já vimos que (a) $\Rightarrow$ (b).

Sejam então $r > 0$ e $I \in S^r(P(G)^*)^G$ tais que $\bar{S}^r(\epsilon)(I) = 1$. Consideremos ainda $\lambda : M \longrightarrow k$ um G-morfismo sobrejetor e seja $\varphi_\lambda : P(G)^* \longrightarrow M$ como no lema anterior.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "\lambda"] & \\ P(G)^* \arrow[ur, "\varphi_\lambda"] \arrow[rr, "\epsilon"'] & & k \end{tikzcd}$$

Como $I \in S^r(P(G)^*)^G$ e φ_λ é um G-morfismo, então $u = \bar{S}^r(\varphi_\lambda)(I) \in S^r(M)^G$.

Além disso,
$$\bar{S}^r(\lambda)(u) = [\bar{S}^r(\lambda) \circ S^r(\varphi_\lambda)](I) = \bar{S}^r(\epsilon)(I) = 1$$

Assim, G é geometricamente redutivo.

□

Observações 3.3.4

(a) *O resultado anterior generaliza o resultado análogo para grupos linearmente redutivos.*

(b) *A definição de grupo geometricamente redutivo envolve a existência de um número natural estritamente positivo para cada morfismo $\lambda : M \twoheadrightarrow k$. No entanto, a demonstração da proposição anterior mostra que podemos tomar um mesmo natural para todo morfismo. Em outras palavras, se G admite uma r-integral, mostramos que para todo morfismo sobrejetor de G-módulos $\lambda : M \longrightarrow k$, o morfismo $\bar{S}^r(\lambda) \mid_{S^r(M)^G} : S^r(M)^G \longrightarrow k$ é sobrejetivo.*

Por outro lado, no lema (2.1.8) vimos que se

$$d = \min\{r \in \mathbb{N}^* \mid G \textit{ admite uma } r\textit{-integral}\}$$

então $d = p^u$, *onde* $p = expcar(k)$. *Essas observações motivam a seguinte definição.*

Definição 3.3.5 *Sejam G um grupo algébrico geometricamente redutivo, definido sobre k e $p = expcar(k)$. Dizemos que o* **índice de** G **é** u *(e indicamos $ind(G) = u$) se*

$$p^u = \min\{r \in \mathbb{N}^* \mid G \textit{ admite uma } r\textit{-integral}\}$$

Observemos que de acordo com a definição acima, G é linearmente redutivo se e somente se $ind(G) = 0$.

Observação 3.3.6 *Se G é geometricamente redutivo de índice u e $\lambda : M \longrightarrow k$ é um G-morfismo sobrejetor então para todo $v \geq u$, a aplicação*

$$\bar{S}^{p^v}\big|_{S^{p^v}(M)^G} : S^{p^v}(M)^G \longrightarrow k \qquad \textit{é sobrejetora}$$

De fato, sejam $v > u$ e $s = v - u > 0$.

Consideremos o morfismo

$$S^{p^s}(S^{p^u}(M)) \xrightarrow{\mu} S^{p^{s+u}}(M) = S^{p^v}(M)$$

dado por

$$\mu(\overline{t_1 \otimes \cdots \otimes t_{p^s}}) = t_1 . \ldots . t_{p^s}, \qquad \text{onde}$$

$t_i \in S^{p^u}(M)$, $\quad 1 \leq i \leq p^s$, e . indica o produto na álgebra simétrica.

Então o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
S^{p^s}(S^{p^u}(M)) \arrow[rr, "\bar{S}^{p^s}(\bar{S}^{p^u}(\lambda))"] \arrow[dr, "\mu"'] & & k \\
& S^{p^v}(M) \arrow[ur, "\bar{S}^{p^v}(\lambda)"'] &
\end{tikzcd}$$

Seja $t \in S^{p^u}(M)^G$ tal que $\bar{S}^{p^u}(\lambda) = 1$. Como $\mu(S^{p^s}(S^{p^u}(M)^G)) \subset S^{p^v}(M)^G$, temos que $\mu(\underbrace{t \otimes \cdots \otimes t}_{p^s}) \in S^{p^v}(M)^G$ e

$$\begin{aligned} \bar{S}^{p^v}(\lambda)(\mu(\underbrace{t \otimes \cdots \otimes t}_{p^s})) &= [\bar{S}^{p^s}(\bar{S}^{p^u}(\lambda))](t \otimes \cdots \otimes t) = \\ &= [\bar{S}^{p^u}(\lambda)(t)]^{p^s} = 1 \end{aligned}$$

Assim $\bar{S}^{p^v}(\lambda) \mid_{S^{p^v}(M)^G}: S^{p^v}(M)^G \longrightarrow k$ é sobrejetora.

Na seção (3.5), apresentaremos algumas propriedades deste índice.

3.4 Grupos Geometricamente Redutivos e Cohomologia Racional.

Na seção (3.2), mostramos que um grupo algébrico G é linearmente redutivo se e somente se $H^1(G, M) = (0)$, para todo G-módulo racional. Em outros termos, mostramos que G é linearmente redutivo se e somente se para todo $M \in \mathcal{M}(G)$ e para todo 1-cociclo $\alpha : G \longrightarrow M$, existe $m \in M$ tal que $\alpha = \delta_m \in \mathcal{B}^1(G, M)$.

Nesta seção, generalizamos o resultado anterior para grupos geometricamente redutivos, provando que para todo 1-cociclo $\alpha : G \longrightarrow M$, existe um polinômio $f \in S(M)[X]$, mônico de grau r tal que $f(\alpha) \in \mathcal{B}^1(G, S^r(M))$. A seguir precisaremos os conceitos acima envolvidos.

Seria interessante obter uma caracterização que melhore a anterior, no sentido de que possa ser traduzida em termos de classes de cohomologia e não em termos de 1-cociclos.

Lembremos que se M é um k-espaço vetorial então $S(M)$ é uma k-álgebra graduada.

Em particular, se $\alpha : G \longrightarrow S^r(M)$ é uma função arbitrária e $a_m \in S^m(M)$, então podemos considerar a função $a_m\alpha^n : G \longrightarrow S^{m+rn}(M)$.

Se M é um G-módulo e $\alpha : G \longrightarrow S^r(M)$ é um 1-cociclo, em geral, α^n e $a_m\alpha^n$ não são 1-cociclos.

No caso particular em que $n = p^u$, com $p = \text{expcar}(k)$, e $a_m \in S^m(M)^G$, se $\alpha : G \longrightarrow S^r(M)$ é um 1-cociclo então

$$a_m\alpha^n : G \longrightarrow S^{m+rn}(M)$$

será um 1-cociclo, para todo $m \geq 0$. De modo similar, se $\alpha : G \longrightarrow S^r(M)$ é um 1-cobordo então $a_m\alpha^n : G \longrightarrow S^{m+rn}(M)$ é um 1-cobordo. (De fato, se $\alpha = \delta_t$, com

$t \in S^r(M)$ então $a_m \alpha^n = \delta_{a_m t^n}$). Nesse caso, temos um multiplicação naturalmente definida

$$S^m(M)^G \times H^1(G,M) \longrightarrow H^1(G, S^{m+1}(M))$$

Com estas considerações podemos enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.4.1 *Sejam G um grupo algébrico afim definido sobre k e $p =$ expcar(k). São equivalentes*

(a) *G é geometricamente redutivo de índice menor ou igual a u*

(b) *Para todo $M \in \mathcal{M}(G)$ e para todo $\alpha \in Z^1(G,M)$ existe*

$$f = X^r + \sum_{k=1}^{r-1}(-1)^{r-k} a_{r-k} X^k \in S(M)[X], \qquad \text{com} \qquad r = p^u, \qquad \text{tal que}$$

(b_1) $a_{r-k} \in S^{r-k}(M), \qquad 1 \leq k \leq r-1$

(b_2) $f(\alpha) \in \mathcal{B}^{\,1}(G, S^r(M))$

(b_3) $\delta_{a_{r-k}}(x) = -\sum_{\iota=k+1}^{r-1} \binom{\iota}{\iota-k}(x.a_{r-\iota})\alpha(x)^{\iota-k}, \qquad \forall x \in G, 1 \leq k \leq r-1$

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sejam $u \geq \operatorname{ind}(G)$ e $r = p^u$. Consideremos $M \in \mathcal{M}(G)$ e $\alpha \in Z^1(G,M)$. Definimos em $M_\alpha = M \oplus k$ uma estrutura de G-módulo racional, via

$$x.(m,a) = (x.m + a\alpha(x), a) \qquad \forall x \in G, \qquad \forall m \in M, \qquad \forall a \in k$$

Então M_α é um G-módulo racional e

$$\begin{array}{rcl} \dot{\pi} : M_\alpha & \longrightarrow & k \\ (m,a) & \longmapsto & a \end{array}$$

é um G-morfismo sobrejetor.

Como $r = p^u$ e $u \geq \operatorname{ind}(G)$, segue da observação (3.3.6) que

$$\bar{S}^r(\pi) \mid_{S^r(M_\alpha)^G} : S^r(M_\alpha)^G \longrightarrow k$$

é sobrejetora.

A decomposição em k-espaços de $M_\alpha = M \oplus k$, dá lugar a uma decomposição em k-espaços

$$S^r(M_\alpha) = M^r \oplus M^{r-1}e \oplus \cdots \oplus M^{r-1}e^{r-1} \oplus ke^r, \qquad \text{onde}$$

$$e = (0,1) \in M_\alpha \qquad \text{e} \qquad M^i = S^i(M), \qquad 1 \leq i \leq r$$

Considere $t \in S^r(M_\alpha)^G$ tal que $\bar{S}^r(\pi)(t) = 1$.

Então $t = \sum_{i=0}^r a_{r-i}e^i$, com $a_{r-i} \in S^{r-i}(M)$, $\quad 0 \leq i \leq r$.

Como $\bar{S}^r(\pi)(t) = 1$, então

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^r \bar{S}^r(\pi)(a_{r-i}e^i) = \sum_{i=0}^r \bar{S}^{r-i}(\pi)(a_{r-i})\bar{S}^i(\pi)(e^i) = \\ &= a_0\bar{S}^r(\pi)(e^r) = a_0 \end{aligned}$$

Assim, $t = a_r + a_{r-1}e + \cdots + a_1e^{r-1} + e^r$.

Como t é fixo pela ação de G, para todo $x \in G$, temos

$$\sum_{i=0}^r (x.a_{r-i})(x.e)^i = \sum_{i=0}^r (x.a_{r-i})(\alpha(x) + e)^i = t$$

Logo, para todo $x \in G$,

$$\sum_{i=0}^r a_{r-i}e^i == \sum_{i=0}^r (x.a_{r-i})[\sum_{j=0}^i \binom{i}{j}\alpha(x)^j e^{i-j}]$$

Como $a_0 = 1$, $\quad x.e = x.(0,1) = (\alpha(x), 1) \quad$ e $\quad r = p^u$,

$$(\sum_{i=0}^r a_{r-i}e^i) + e^r = \sum_{i=0}^{r-1}[\sum_{j=0}^{i}(x.a_{r-i})\binom{i}{j}\alpha(x)^{i-j}e^{i-j}] + \alpha(x)^r + e^r$$

Consequentemente,

$$\alpha(x)^r + \sum_{i=0}^{r-1}[\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(x.a_{r-i})\alpha(x)^j e^{i-j}] = \sum_{k=0}^{r-1} a_{r-k}e^k$$

Comparando os coeficientes de e^k, $\quad 0 \leq k \leq r-1$, obtemos

$$(1) \quad a_{r-k} = \sum_{i=k}^{r-1} \binom{i}{i-k}(x.a_{r-i})\alpha(x)^{i-k}, \qquad 1 \leq k \leq r-1, \qquad \forall x \in G$$

$$(2) \quad a_r = \alpha(x)^r + \sum_{i=0}^{r-1}(x.a_{r-i})\alpha(x)^i, \qquad \forall x \in G$$

Seja

$$f(X) = X^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}a_{r-i}X^i \in S(M)[X]$$

Então de (1) obtemos

$$(\mathbf{b_3}) \quad \delta_{a_{r-k}}(x) = -\sum_{i=k+1}^{r-1}\binom{i}{i-k}(x.a_{r-i})\alpha(x)^{i-k}, \qquad 1 \le k \le r-1, \qquad \forall x \in G$$

De (2) obtemos

$$(2') \quad \alpha(x)^r + \sum_{i=1}^{r-1}(x.a_{r-i})\alpha(x)^i + \delta_{a_r}(x) = 0, \qquad \forall x \in G$$

Mas dado $x \in G$, de (1) segue-se que

$$\begin{aligned} x^{-1}.a_{r-j} &= \sum_{i=j}^{r-1}\binom{i}{i-j}a_{r-i}[x^{-1}.\alpha(x)]^{i-j} = \\ &= \sum_{i=j}^{r-1}\binom{i}{i-j}a_{r-i}(-1)^{i-j}\alpha(x^{-1})^{i-j} \end{aligned}$$

Assim,

$$x.a_{r-j} = \sum_{i=j}^{r-1}\binom{i}{i-j}(-1)^{i-j}a_{r-i}\alpha(x)^{i-j}, \qquad \forall x \in G,\ 1 \le j \le r-1$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r-1}(x.a_{r-j})\alpha(x)^j &= \sum_{j=1}^{r-1}(\sum_{i=j}^{r-1}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}a_{r-i}\alpha(x)^{i-j})\alpha(x)^j = \\ &= \sum_{j=1}^{r-1}(\sum_{i=j}^{r-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}a_{r-i}\alpha(x)^i) = \\ &= \sum_{k=1}^{r-1}[\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{k-j}]a_{r-k}\alpha(x)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{r-1}(-1)^{r-k}a_{r-k}\alpha(x)^k \end{aligned}$$

Substituindo em (2′), obtemos:

$$(\mathbf{2''})\quad \alpha(x)^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}a_{r-i}\alpha(x)^i + \delta_{a_r}(x) = 0, \qquad \forall x \in G$$

e portanto

$$(\mathbf{b_2})\quad f(\alpha) = -\delta_{a_r} \in \mathcal{B}^1(G, S^r(M))$$

(b) $\Rightarrow$ (a)

Sejam $M \in \mathcal{M}(G)$ e $\lambda : M \longrightarrow k$ um morfismo sobrejetor de G-módulos . Consideremos $N = \ker\lambda$ e $m \in M$ tal que $\lambda(m) = 1$. Então $M = N \oplus km$, como k-espaços vetoriais. Além disso, $x.m = \alpha(x) + a(x)m$, com $\alpha(x) \in N$ e $a(x) \in k$, $\quad \forall x \in G$. Como λ é um G-morfismo, $N = \ker\lambda$ e $\lambda(m) = 1$, concluímos que $a(x) = 1$, para todo $x \in G$ e portanto

$$x.m = \alpha(x) + m, \qquad \forall x \in G$$

Mas daí segue então que $\alpha \in Z^1(G, N)$.

Logo, existem $r = p^u$ e $f = X^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}a_{r-i}X^i \in S(N)[X]$ satisfazendo (b_1), (b_2) e (b_3).

Seja então $a_r \in S^r(N)$ tal que $f(\alpha) = -\delta_{a_r} \in \mathcal{B}^1(G, S^r(N))$ e consideremos

$$t = m^r + \sum_{i=1}^{r-1}(a_{r-i}m^i) + a_r \in S^r(M)$$

Então

$$\begin{aligned}\bar{S}^r(\lambda)(t) &= \bar{S}^r(\lambda)(m^r) + \sum_{i=1}^{r-1}\bar{S}^{r-i}(\lambda)(a_{r-i})\bar{S}^i(\lambda)(m^i) + \bar{S}^r(\lambda)(a_r) = \\ &= \bar{S}^r(\lambda)(m^r) = 1\end{aligned}$$

Resta provar que agora que $t \in S^r(M)^G$. Para isso, consideremos $x \in G$. Como $r = p^u$, temos

$$x.t - t \;=\; (x.m)^r + \sum_{k=1}^{r-1}(x.a_{r-k})(x.m)^k + x.a_r - m^r - \sum_{k=1}^{r-1}(a_{r-k}m^k) - a_r =$$

$$\begin{aligned}
&= (m+\alpha(x))^r + \sum_{k=1}^{r-1}(x.a_{r-k})(m+\alpha(x))^k - \sum_{k=1}^{r-1} a_{r-k}m^k + \delta_{a_r}(x) - m^r = \\
&= \alpha(x)^r + \delta_{a_r}(x) + \sum_{k=1}^{r-1}(x.a_{r-k})[\sum_{j=0}^{k}\tbinom{k}{j}m^j\alpha(x)^{k-j}] - \sum_{k=1}^{r-1} a_{r-k}m^k = \\
&= \alpha(x)^r + \delta_{a_r}(x) + \sum_{k=1}^{r-1}(x.a_{r-k})\binom{k}{0}\alpha(x)^k + \sum_{k=1}^{r-1}(x.a_{r-k})(\sum_{j=1}^{k}\tbinom{k}{j}m^j\alpha(x)^{k-j}) - \\
&\quad - \sum_{k=1}^{r-1} a_{r-k}m^k = \\
&= \alpha(x)^r + \sum_{k=1}^{r-1}[(x.a_{r-k})\alpha(x)^k] + \delta_{a_r}(x) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{r-1}[\sum_{i=k}^{r-1}(x.a_{r-i})\tbinom{i}{k}\alpha(x)^{i-k}]m^k - \sum_{k=1}^{r-1} a_{r-k}m^k = \\
&= \alpha(x)^r + \sum_{k=1}^{r-1}(x.a_{r-k})\alpha(x)^k + \delta_{a_r}(x) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{r-1}[(\sum_{i=k}^{r-1}(x.a_{r-i})\tbinom{i}{k}\alpha(x)^{i-k}) - a_{r-k}]m^k = \\
&= \alpha(x)^r + \sum_{k=1}^{r-1}(x.a_{r-k})\alpha(x)^k + \delta_{a_r}(x),
\end{aligned}$$

por (b_3).

Além disso, ainda por (b_3), temos que

$$a_{r-k} = \sum_{i=k}^{r-1}(x.a_{r-i})\tbinom{i}{i-k}\alpha(x)^{i-k}, \qquad 1 \le k \le r-1, \qquad \forall x \in G$$

donde

$$x^{-1}.a_{r-k} = \sum_{i=k}^{r-1} a_{r-i}\tbinom{i}{i-k}(-1)^{i-k}\alpha(x^{-1})^{i-k}, \qquad 1 \le k \le r-1, \qquad \forall x \in G$$

Consequentemente,

$$x.a_{r-k} = \sum_{i=k}^{r-1} a_{r-i}\tbinom{i}{i-k}(-1)^{i-k}\alpha(x)^{i-k}, \qquad 1 \le k \le r-1, \qquad \forall x \in G$$

Como na outra implicação, deduzimos daí que

$$\sum_{k=1}^{r-1}(x.a_{r-k})\alpha(x)^k = \sum_{k=1}^{r-1}(-1)^{r-k}a_{r-k}\alpha(x)^k, \qquad 1 \le k \le r-1, \qquad \forall x \in G$$

Assim finalmente,

$$x.t - t = \alpha(x)^r + \sum_{k=1}^{r-1}(-1)^{r-k}a_{r-k}\alpha(x)^k + \delta_{a_r}(x) = 0, \qquad \forall x \in G$$

e portanto $t \in S^r(M)^G$.

Logo, G é geometricamente redutivo.

□

Observação 3.4.2 *Seja G um grupo algébrico definido sobre k, com $car(k) = 0$. O teorema anterior, nesse caso, diz que :*

$$\begin{aligned} G \text{ geometricamente redutivo} \quad &\Leftrightarrow \quad H^1(G,M) = (0), \qquad \forall M \in \mathcal{M}(G) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad G \text{ é linearmente redutivo.} \end{aligned}$$

Observação 3.4.3 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k e $p = expcar(k)$. Pelo teorema anterior, temos:*

$$\begin{aligned} G \text{ linearmente redutivo} \quad &\Leftrightarrow \quad G \text{ é geometricamente redutivo de índice } 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad H^1(G,M) = (0), \text{ para todo } M \in \mathcal{M}(G) \end{aligned}$$

Observação 3.4.4 *Sejam G um grupo algébrico geometricamente redutivo definido sobre k, $p = expcar(k)$, $M \in \mathcal{M}(G)$ e $\alpha \in Z^1(G,M)$. Seja ainda $u = ind(G)$ e consideremos $r = p^u$.*

O teorema anterior garante a existência de

$$f(X) = X^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}a_{r-i}X^i \in S(M)[X],$$

satisfazendo (b_1), (b_2) e (b_3).

Suponhamos f um p-polinômio (isto é, $a_{r-i} = 0$, para todo i que não é potência de p).

Então, por (b_3), temos:

$$x.a_{r-k} - a_{r-k} = \sum_{i=k+1}^{r-1}\binom{i}{i-k}(x.a_{r-i})\alpha(x)^i, \qquad 1 \le k \le r-1, \qquad \forall x \in G$$

Como $a_{r-i} = 0$ *se* i *não é potência de* p *e* $\binom{i}{i-k} = 0$ *para todo* $1 \leq k \leq i-1$, *se* i *é potência de* p, *concluímos que* $a_{r-k} \in S^{r-k}(M)^G$, *para todo* $1 \leq k \leq r-1$.

Dessa forma, pelas observações feitas no início desta seção, poderíamos dizer que se $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{B}^1(G, M) \in H^1(G, M)$ *então* $f(\bar{\alpha}) = \bar{0} \in H^1(G, S^r(M))$ *ou seja que todo elemento de* $H^1(G, M)$ *é raiz de um p-polinômio mônico de grau* $r = p^u$.

Reciprocamente, suponhamos que exista $r = p^u$ *tal que para todo* $M \in \mathcal{M}(G)$, *dado* $\alpha \in H^1(G, M)$, α *é raiz de um polinômio mônico de grau* r *da forma* $f = X^r + \sum_{i=0}^{u-1} a_{r-p^i} X^{p^i}$, *com* $a_{r-p^i} \in S^{r-p^i}(M)^G$, $1 \leq i \leq u-1$.

Então G *é geometricamente redutivo e a demonstração desse fato, nesse caso, se simplifica bastante. De fato, consideremos* $\lambda : M \longrightarrow k$ *um epimorfismo de* G*-módulos,* $N = \ker \lambda$ *e* $m \in M$ *tal que* $\lambda(m) = 1$. *Então, como na prova do teorema, temos que existe* $\alpha \in Z^1(G, N)$ *tal que*

$$x.m = m + \alpha(x), \qquad \forall x \in G, \ e\ \alpha \in Z^1(G, N)$$

Seja $f \in S(N)^G[X]$ *como acima e consideremos* $a_r \in S^r(N)$ *tal que* $f(\alpha) + \delta_{a_r} = 0$.

Seja

$$t = m^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_{r-p^i} m^{p^i} + a_r \in S^r(M)$$

Então $\bar{S}^r(\lambda)(t) = 1$ *e para todo* $x \in G$,

$$\begin{aligned} x.t &= (m + \alpha(x))^r + \sum_{i=0}^{u-1} a_{r-p^i}(m + \alpha(x))^{p^i} + x.a_r = \\ &= m^r + \alpha(x)^r + \sum_{i=0}^{u-1} a_{r-p^i}(m^{p^i} + \alpha(x)^{p^i}) + x.a_r = \\ &= m^r + \sum_{i=0}^{u-1} a_{r-p^i} m^{p^i} + \alpha(x)^r + \sum_{i=0}^{u-1} a_{r-p^i} \alpha(x)^{p^i} + x.a_r = \\ &= m^r + \sum_{i=0}^{u-1} a_{r-p^i} m^{p^i} + a_r = t, \qquad \forall x \in G \end{aligned}$$

Logo, G *é geometricamente redutivo.*

Corolário 3.4.5 *Sejam* G *um grupo algébrico conexo definido sobre* k, $p = expcar(k)$. *Se* G *é geometricamente redutivo então* $H^1(G, k) = (0)$.

Demonstração. Como G age trivialmente em k, $H^1(G,k) = Z^1(G,k)$. Seja, pois, $\alpha \in Z^1(G,k)$ e suponhamos por absurdo que $\alpha \neq 0$. Pelo teorema (3.4.1), sabemos que existem $r = p^u \geq 1$ e

$$f = X^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}a_{r-i}X^i \in S(k)[X]$$

satisfazendo as condições (b_1), (b_2) e (b_3) do teorema (3.4.1). Consideremos os isomorfismos dados pelo produto em k

$$\mu_{r-i} : S^{r-i}(k) \longrightarrow k, \qquad 1 \leq i \leq r-1$$

e seja

$$\mu(f) = X^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}\mu_{r-i}(a_{r-i})X^i \in k[X]$$

Como $f(\alpha) \in \mathcal{B}^1(G,k) = (0)$, temos que

$$\begin{aligned}\mu(f)(\alpha(x)) &= \alpha(x)^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}\mu_{r-i}(a_{r-i})\alpha(x)^i = \\ &= \mu_r(\alpha(x)^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}a_{r-i}\alpha(x)^i) = \mu_r(0) = 0\end{aligned}$$

Como G é conexo e $\alpha : G \longrightarrow k$ é polinomial, concluímos que $\alpha(G) = k$ e portanto $\alpha(G)$ tem infinitos elementos. Mas então $\mu(f) \in k[X]$ é mônico de grau $r \geq 1$, com infinitas raízes em k, o que é impossível. Logo, $H^1(G,k) = (0)$.

□

Na seção anterior, mostramos que se o morfismo $\epsilon : P(G)^* \longrightarrow k$ satisfaz a condição da definição de grupo geometricamente redutivo, então qualquer outro morfismo
$\lambda : M \twoheadrightarrow k$ também a satisfaz e portanto G é geometricamente redutivo.

No contexto da cohomologia algo análogo vai ocorrer. Vamos provar a seguir que se os 1-cociclos de G com coeficientes em $(\ker \epsilon)$ satisfazem a condição (b) do teorema (3.4.1), então G é geometricamente redutivo.

Para isso precisaremos de um refinamento do lema (3.3.2).

Lema 3.4.6 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k, $p = expcar(k)$ e consideremos $\epsilon : P(G)^* \longrightarrow k$ o G-morfismo sobrejetor definido por $\epsilon(\sigma) = \sigma(1)$, $\sigma \in P(G)^*$.*

Sejam ainda $M \in \mathcal{M}(G)$ *e* $\alpha \in Z^1(G,M)$. *Consideremos* $M_\alpha = M \oplus k$, *com a estrutura de* G*-módulo dada por*

$$x.(m,a) = (x.m + a\alpha(x), a) \qquad \forall x \in G, \qquad \forall m \in M, \qquad \forall a \in k$$

Sejam π_1 *e* π_2 *as projeções canônicas de* M_α *sobre* M *e* k*, respectivamente. Então existe um morfismo de* G*-módulos* $\varphi_\alpha : P(G)^* \longrightarrow M$ *tal que*

(i) $\pi_2 \circ \varphi_\alpha = \epsilon$

(ii) $e = (0,1) \in \Im m(\varphi_\alpha)$

(iii) $(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)\mid_{\ker\epsilon}: \ker\epsilon \longrightarrow M$ *é um* G*-morfismo*

Demonstração. Sendo $\pi_2 : M_\alpha \longrightarrow k$ um morfismo sobrejetor de G-módulos, a existência de um G-morfismo $\varphi_\alpha : P(G)^* \longrightarrow M$ satisfazendo (i), segue do lema (3.3.2). Para provar que, neste caso, φ_α satisfaz (ii) e (iii), vamos construí-lo explicitamente, como no lema (3.3.2). Para isso, sejam $f = (0,1) \in M_\alpha$ e consideremos o G-módulo $M' = \langle x.(0,1) \mid x \in G\rangle_k = \langle(\alpha(x), 1) \mid x \in G\rangle_k$.

Seja $\{m_1, \ldots, m_{t-1}\}$ uma k-base do subespaço $\langle\alpha(x) \mid x \in G\rangle_k \subset M$.

O conjunto $\{(m_1, 0); \ldots, (m_{t-1}, 0); (0,1)\}$, é uma k-base de $(M' \oplus k)$. Além disso, se

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{t-1} b_j(x)m_j, \qquad \forall x \in G,$$

então

$$x.(0,1) = (\alpha(x), 1) = \sum_{j=1}^{t-1}[b_j(x)(m_j, 0)] + (0,1)$$

Assim, $\varphi_\alpha : P(G)^* \longrightarrow M' \oplus k \subset M_\alpha$ está dada por

$$\varphi_\alpha(\sigma) = \sum_{j=1}^{t-1}[\sigma(\eta(b_j))(m_j, 0)] + \sigma(1)(0,1); \qquad \forall \sigma \in P(G)^*$$

Como $\alpha \in Z^1(G,M)$ temos $\alpha(1_G) = 0$ e portanto $b_j(1_G) = 0$ para todo j.

Logo, $\mathbb{1} \notin \langle\eta(b_1), \ldots, \eta(b_{t-1})\rangle_k$.

Assim, existe $\sigma \in P(G)^*$ tal que $\sigma(\mathbb{1}) = 1$ e $\sigma(\eta(b_j)) = 0$, para todo $j = 1, \ldots, t-1$. Um tal σ satisfaz $\varphi_\alpha(\sigma) = (0,1)$ e portanto vale (ii).

Para provar (iii), observemos que como $\pi_2 \circ \varphi_\alpha = \epsilon$, então $(\pi_2 \circ \varphi_\alpha)(\ker \epsilon) = (0)$ e portanto

$$\varphi_\alpha(\ker \epsilon) \subset \{(m,0) \mid m \in M\} \subset (M \oplus k)$$

Mas, $\pi_1 : \{(m,0) \mid m \in M\} \longrightarrow M$ é um isomorfismo de G-módulo e φ_α é um G-morfismo. Assim, $(\pi_1 \circ \varphi_\alpha) : \ker \epsilon \longrightarrow M$ é um morfismo de G-módulos.

□

Proposição 3.4.7 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k, $p = expcar(k)$ e $\epsilon : P(G)^* \longrightarrow k$ o G-morfismo dado por $\epsilon(\sigma) = \sigma(\mathbf{1})$, $\forall \sigma \in P(G)^*$. São equivalentes:*

(a) *G é geometricamente redutivo de índice menor ou igual a u*

(b') *Para todo $\alpha \in Z^1(G, \ker \epsilon)$, existe*

$$f = X^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}a_{r-i}X^i \in S(\ker \epsilon)[X], \qquad com\ r = p^u,$$

tal que

(b_1') $a_{r-j} \in S^{r-j}(\ker \epsilon)$

(b_2') $f(\alpha) \in B^1(G, S^r(\ker \epsilon))$

(b_3') $\delta_{a_{r-k}}(x) = -\sum_{i=k+1}^{r-1} \binom{i}{i-k}(x.a_{r-i})\alpha(x)^{i-k}, \qquad \forall x \in G,\ 1 \leq k \leq r-1$

Demonstração. Do teorema (3.4.1), sabemos que (a) $\Rightarrow$ (b').

Basta provar então que (b') implica a condição (b) do teorema (3.4.1). Para isso, sejam $M \in \mathcal{M}(G)$ e $\alpha \in Z^1(G, M)$. Consideremos $M_\alpha = M \oplus k$, $\pi_2 : M_\alpha \longrightarrow k$ e $\varphi_\alpha : P(G)^* \longrightarrow M_\alpha$ como no lema anterior.

Seja ainda $\sigma \in P(G)^*$ tal que $\varphi_\alpha(\sigma) = (0,1)$.

Como $\pi_2 \circ \varphi_\alpha = \epsilon$, temos que $\epsilon(\sigma) = 1$.

Consideremos $\alpha_\sigma : G \longrightarrow \ker \epsilon$ definido por

$$\alpha_\sigma(x) = x.\sigma - \sigma, \qquad \forall x \in G$$

Como $\alpha_\sigma \in Z^1(G, \ker \epsilon)$, por (b'), sabemos que existe

$$f = X^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}a_{r-i}X^i \in S(\ker \epsilon)[X],$$

com $r = p^u$, satisfazendo (b_1'), (b_2') e (b_3').

Seja, pois, $a_r \in S^r(\ker \epsilon)$ tal que

$$f(\alpha_\sigma) + \delta_{a_r} = 0.$$

Consideremos $\pi_1 : (M \oplus k) \longrightarrow M$ a projeção na primeira coordenada. Defino

$$g(X) = X^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i} b_{r-i} X^i \in S(M)[X], \qquad \text{onde}$$

$$b_{r-i} = S^{r-i}(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(a_{r-i}), \qquad 0 \leq i \leq r-1$$

Vamos provar que o polinômio g acima definido satisfaz as condições $(b_1), (b_2)$ e (b_3) do teorema (3.4.1), para o cociclo α

Como $a_{r-i} \in S^{r-i}(\ker \epsilon)$, $0 \leq i \leq r-i$, então

$$b_{r-i} = S^{r-i}(\pi_1 \circ \varphi_\alpha) \in S^{r-i}(M) \ , \qquad 0 \leq i \leq r-1$$

e portanto vale (b_1).

Para provar (b_2), observemos que como $\varphi_\alpha(\sigma) = (0,1)$, temos

$$\alpha = \pi_1 \circ \varphi_\alpha \circ \alpha_\sigma$$

Assim, para todo $x \in G$,

$$\begin{aligned}
g(\alpha(x)) &= \alpha(x)^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i} b_{r-i}\alpha(x)^i = \\
&= [\pi_1 \circ \varphi_\alpha \circ \alpha_\sigma(x)]^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i} S^{r-i}(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(a_{r-i})[(\pi_1 \circ \varphi_\alpha \circ \alpha_\sigma)(x)]^i = \\
&= S^r(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(\alpha_\sigma(x)^r) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}[S^{r-i}(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(a_{r-i})][S^i(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(\alpha_\sigma(x)^i)] = \\
&= S^r(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(\alpha_\sigma(x)^r) + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i}[S^r(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(a_{r-i}\alpha_\sigma(x)^i)] = \\
&= S^r(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)[\alpha_\sigma(x)^r + \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{r-i} a_{r-i}\alpha_\sigma(x)^i] = \\
&= S^r(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(-\delta_{a_r}(x)) = \\
&= -S^r(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(x.a_r - a_r)
\end{aligned}$$

Por (iii) do lema anterior $(\pi_1 \circ \varphi_\alpha) : \ker \epsilon \longrightarrow M$ é um G-morfismo e portanto $S^r(\pi_1 \circ \varphi_\alpha) : S^r(\ker \epsilon) \longrightarrow S^r(M)$ é um G-morfismo.

Como $a_r \in S^r(\ker \epsilon)$, temos

$$\begin{aligned} g(\alpha(x)) &= -S^r(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(x.a_r - a_r) = \\ &= -[x.S^r(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(a_r) - S^r(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(a_r)] = \\ &= -x.b_r + b_r \end{aligned}$$

Logo, $g(\alpha) + \delta_{b_r} = 0$ e portanto g satisfaz (b_2). Sabemos que

$$x.a_{r-j} = \sum_{i=j}^{r-1} \binom{i}{i-j} (-1)^{i-j} a_{r-i} \alpha_\sigma(x)^{i-j}, \qquad \forall x \in G,\ j = 1, \ldots, r-1$$

Como $a_{r-j} \in S^{r-j}(\ker \epsilon)$ e $\alpha_\sigma \in Z^1(G, \ker \epsilon)$, temos

$$\begin{aligned} x.b_{r-j} &= x.S^{r-j}(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(a_{r-j}) = S^{r-j}(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(x.a_{r-j}) = \\ &= \sum_{i=j}^{r-1} \binom{i}{i-j} (-1)^{i-j} S^{r-j}(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(a_{r-i}\alpha_\sigma(x)^{i-j}) = \\ &= \sum_{i=j}^{r-1} \binom{i}{i-j} (-1)^{i-j} [S^{r-j}(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(a_{r-i})][S^{i-j}(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(\alpha_\sigma(x)^{i-j})] = \\ &= \sum_{i=j}^{r-1} \binom{i}{i-j} (-1)^{i-j} b_{r-i} [(\pi_1 \circ \varphi_\alpha \circ \alpha_\sigma)(x)]^{i-j} = \\ &= \sum_{i=j}^{r-1} \binom{i}{i-j} (-1)^{i-j} b_{r-i} \alpha(x)^{i-j}, \qquad \forall x \in G, \qquad \forall j = 1, \ldots, r-1 \end{aligned}$$

Logo, g satisfaz (b_3).

Pelo teorema (3.4.1), concluímos que G é geometricamente redutivo de índice menor ou igual a u.

□

Observação 3.4.8 *A proposição anterior mostra que um grupo algébrico G é geometricamente redutivo se e somente se os 1-cociclos de G com coeficientes em $\ker(\epsilon)$ satisfazem certos polinômios. Nesse caso, a demonstração da proposição indica que o polinômio associado a um cociclo arbitrário $\alpha \in Z^1(G, M)$ pode ser construído como imagem G-homomorfa do polinômio associado a um cociclo conveniente de $Z^1(G, \ker \epsilon)$.*

Assim, por exemplo, se pudéssemos provar que para todo cociclo de $Z^1(G, \ker \epsilon)$, os polinômios associados são p-polinômios (ou que seus coeficientes são fixos pela ação de G), o mesmo valeria para os polinômios associados a 1-cociclos arbitrários de G.

3.5 Índices de Morfismos, Módulos e Grupos.

A noção de índice de um grupo algébrico geometricamente redutivo G definido sobre k foi introduzida na seção (3.3).

Dizemos que $\text{ind}(G) = r$ se $p^r = \min\{u \in \mathbb{N}^* \mid G$ admite uma u-integral$\}$, onde $p = \text{expcar}(k)$. Por uma u-integral, entendíamos um elemento $I \in S^u(P(G)^*)^G$ tal que $\bar{S}^u(\epsilon)(I) = 1$, onde $\epsilon : P(G)^* \longrightarrow k$ é o G-morfismo sobrejetor dado por $\epsilon(\sigma) = \sigma(\mathbb{1})$. Em outras palavras, $\text{ind}(G) = r$ se e somente se p^r é o menor natural tal que

$$\bar{S}^{p^r}(\epsilon) \mid_{S^{p^r}(P(G)^*)^G} : S^{p^r}(P(G)^*)^G \longrightarrow k$$

é sobrejetora.

Por outro lado, sabemos que, como G é geometricamente redutivo, para todo G-morfismo sobrejetor $\lambda : M \longrightarrow k$, existe $t \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\bar{S}^t(\lambda) : S^t(M)^G \longrightarrow k$$

é sobrejetor.

Sabemos ainda, que o menor t que satisfaz a condição acima é potência do expoente característico de k. Essas observações motivaram a introdução do conceito de índice de um G-morfismo e de um G-módulo.

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades desses índices e sua relação com a noção de índice de um grupo algébrico geometricamente redutivo.

Em tudo que se segue, G indicará um grupo algébrico geometricamente redutivo, definido sobre k e $p = \text{expcar}(k)$. Motivados pelo corolário (2.1.9) introduzimos a seguinte noção.

Definição 3.5.1 *Sejam $M \in \mathcal{M}(G)$ e $\lambda : M \longrightarrow k$ um G-morfismo sobrejetor. Diremos que o índice de λ (relativo a G) é r, e escreveremos $r = \text{ind}_G(\lambda)$ se*

$$p^r = \min\{q \in \mathbb{N}^* \mid \bar{S}^q(\lambda) : S^q(M)^G \longrightarrow k \quad \textit{é sobrejetora}\}$$

Observação 3.5.2

(i) *Se não houver dúvida quanto ao grupo algébrico a que estamos nos referindo, indicaremos* $ind_G(\lambda)$ *simplesmente por* $ind(\lambda)$.

(ii) *É fácil verificar que*

$$ind(\lambda) = \min\{s \in \mathbb{N} \mid \bar{S}^{p^s}(\lambda) : S^{p^s}(M)^G \longrightarrow k \quad \textit{é sobrejetora}\}$$

Proposição 3.5.3 *Sejam* G *um grupo algébrico geometricamente redutivo definido sobre* k *e* $p = expcar(k)$. *Consideremos* $\epsilon : P(G)^* \longrightarrow k$ *o* G*-morfismo dado por* $\epsilon(\sigma) = \sigma(\mathbb{1})$. *Então*

(1) $ind(G) = ind(\epsilon)$

(2) *Se* $M \in \mathcal{M}(G)$ *e* $\lambda : M \longrightarrow k$ *é um* G*-morfismo sobrejetor, temos:*

(i) $ind(\lambda) \leq ind(G)$

(ii) $t \leq ind(\lambda) \Rightarrow ind(\bar{S}^{p^t}(\lambda)) \geq [ind(\lambda) - t]$

(iii) $u \geq ind(\lambda) \Rightarrow \bar{S}^{p^u}(\lambda) : S^{p^u}(M)^G \longrightarrow k$ *é sobrejetora.*

(iv) $ind(\lambda) = \min\{u \in \mathbb{N} \mid NS^{p^u-1}(M)$ *é* G*-somando de* M $\}$, *onde* $N = \ker\lambda$

(3) *Se* $M, N \in \mathcal{M}(G)$, $\lambda : M \longrightarrow k$, $\theta : N \longrightarrow k$ *são* G*-morfismos sobrejetores, valem:*

(v) $ind(\lambda \otimes \theta) \geq \max\{ind(\lambda),\ ind(\theta)\}$

(vi) $ind(\theta \circ \varphi) \geq ind(\theta)$, *para todo* G*-morfismo* $\varphi : M \longrightarrow N$, *tal que* $(\theta \circ \varphi)$ *seja sobrejetora.*

Demonstração.

(1) De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(G) = r \Leftrightarrow\ & p^r = \min\{u \in \mathbb{N}^* \mid G \quad \text{admite uma } u\text{-integral}\} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & p^r = \min\{u \in \mathbb{N}^* \mid \bar{S}^u(\epsilon)\ |_{S^u(P(G)^*)^G} \colon S^u(P(G)^*)^G \longrightarrow k \text{ é sobrejetora}\} \\
\Leftrightarrow\ & r = \mathrm{ind}(\epsilon)
\end{aligned}$$

(2)

(i) Segue imediatamente da observação (3.3.4,(b))

(ii) Seja $\lambda : M \longrightarrow k$ um G-morfismo sobrejetor de índice r e consideremos $t \leq r$. Se $t = r$, nada há a demonstrar, pois $\mathrm{ind}(\bar{S}^{p^t}(\lambda)) = 0 = t - \mathrm{ind}(\lambda)$.

Assim, podemos supor $t < \mathrm{ind}(\lambda)$. Seja $u = \mathrm{ind}(\bar{S}^{p^t}(\lambda))$. Então a aplicação

$$\bar{S}^{p^u}(S^{p^t}(M))^G \overset{\bar{S}^{p^u}(\bar{S}^{p^t}(\lambda))}{\longrightarrow} k \quad \text{é sobrejetora}$$

Seja $\mu : S^{p^u}(S^{p^t}(M)) \longrightarrow S^{p^{u+t}}(M)$ definida por $\mu(\overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_{p^u}}) = m_1. \ldots .m_{p^u}$, onde $m_i \in S^{p^t}(M)$, $1 \leq i \leq p^u$, e . indica o produto na álgebra simétrica.

Como o diagrama

$$\begin{tikzcd}
S^{p^u}(S^{p^t}(M)) \arrow[rr, "\bar{S}^{p^u}(\bar{S}^{p^t}(\lambda))"] \arrow[dr, "\mu"'] & & k \\
& S^{p^{u+t}}(M) \arrow[ur, "\bar{S}^{p^{u+t}}(\lambda)"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo e $\mu(S^{p^u}(S^{p^t}(M))^G) \subset S^{p^{u+t}}(M)^G$, concluimos que

$$\bar{S}^{p^{u+t}}(\lambda) : S^{p^{u+t}}(M)^G \longrightarrow k$$

é sobrejetora.

Logo, $(u + t) \geq \mathrm{ind}(\lambda)$, donde

$$u = \mathrm{ind}(\bar{S}^{p^t}(\lambda) \geq \mathrm{ind}(\lambda) - t$$

(iii) A prova de (iii) é análoga à da observação (3.3.6) e por isso será omitida.

(iv) Sejam $\lambda : M \longrightarrow k$ um G-morfismo sobrejetor de índice r e $N = \ker \lambda$. Como $r = \mathrm{ind}(\lambda)$, sabemos que a aplicação $\bar{S}^{p^r}(\lambda) \mid_{S^{p^r}(M)^G} : S^{p^r}(M)^G \longrightarrow k$ é sobrejetora.

Seja, pois, $t \in S^{p^r}(M)^G$ tal que $\bar{S}^{p^r}(\lambda)(t) = 1$.

Como $\ker \bar{S}^{p^r}(\lambda) = N.S^{p^r-1}(M)$,temos que

$$S^{p^r}(M) = N.S^{p^r-1}(M) \oplus kt, \qquad \text{como } G\text{-módulos}$$

Assim, $\mathrm{ind}(\lambda) = r \geq \min\{u \in \mathbb{N}^* \mid NS^{p^u-1}(M) \quad \text{é } G\text{-somando de } S^{p^u}(M)\}$

Para provar a outra desigualdade, seja

$$v = \min\{u \in \mathbb{N}^* \mid NS^{p^u-1}(M) \quad \text{é } G\text{-somando de } S^{p^u}(M)\}$$

e consideremos um G-submódulo $T \subset S^{p^v}(M)$ tal que

$$S^{p^v}(M) = NS^{p^v-1}(M) \oplus T$$

Como $\ker S^{p^v}(\lambda) = N.S^{p^v-1}(M)$, e $\bar{S}^{p^v}(\lambda) : S^{p^v}(M) \longrightarrow k$ é sobrejetora, concluímos que

$$\bar{S}^{p^v}(\lambda)\mid_T : T \longrightarrow k \qquad \text{é isomorfismo de } G\text{-módulos}$$

Então G age trivialmente em T e assim, $T^G = T$. Consideremos $t \in T^G$ tal que $\bar{S}^{p^v}(\lambda)(t) = 1$.

Então $t \in S^{p^v}(M)^G$ e $\bar{S}^{p^v}(\lambda)(t) = 1$, consequentemente, $v \geq \mathrm{ind}(\lambda)$ e temos a igualdade.

(v) Sejam $\lambda : M \longrightarrow k$, $\theta : N \longrightarrow k$ morfismos sobrejetores de G-módulos, $r = \mathrm{ind}(\lambda \otimes \theta)$ e $t \in S^{p^r}(M \otimes N)^G$ tal que $\bar{S}^{p^r}(\lambda \otimes \theta)(t) = 1$.

Da comutatividade dos diagramas de G-morfismos

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[rr, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "(\lambda \otimes \theta)"'] & & N \arrow[dl, "\theta"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes \theta"] \arrow[dr, "(\lambda \otimes \theta)"'] & & M \arrow[dl, "\lambda"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

concluímos que

$$x = S^{p^r}(\lambda \otimes \mathrm{id})(t) \in S^{p^r}(N)^G \quad , \quad y = S^{p^r}(\mathrm{id} \otimes \theta)(t) \in S^{p^r}(M)^G$$

e que

$$\bar{S}^{p^r}(\theta)(x) = 1 \quad , \quad \bar{S}^{p^r}(\lambda)(y) = 1.$$

Logo, $\mathrm{ind}(\theta) \leq r$ e $\mathrm{ind}(\lambda) \leq r$.

Assim, $\mathrm{ind}(\lambda \otimes \theta) = r \geq \max\{\mathrm{ind}(\lambda), \mathrm{ind}(\theta)\}$.

(vi) Finalmente, sejam $\theta : N \longrightarrow k$ e $\varphi : M \longrightarrow N$ morfismos de G-módulos tais que $(\theta \circ \varphi)$ seja sobrejetora de índice r.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "(\theta \circ \varphi)"'] & N \arrow[d, "\theta"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Consideremos $t \in S^{p^r}(M)^G$ tal que

$$\bar{S}^{p^r}(\theta \circ \varphi)(t) = 1$$

Seja $t' = S^{p^r}(\varphi)(t) \in S^{p^r}(N)^G$. Então

$$\bar{S}^{p^r}(\theta)(t') = \bar{S}^{p^r}(\theta)(S^{p^r}(\varphi)(t)) = \bar{S}^{p^r}(\theta \circ \varphi)(t) = 1$$

e portanto

$$\bar{S}^{p^r}(\theta) : S^{p^r}(N)^G \longrightarrow k \qquad \text{é sobrejetora}$$

Logo, $r \geq \mathrm{ind}(\theta)$.

□

Dado um G-módulo racional M indiquemos por $\mathrm{Mor}_G(M, k)$ o conjunto dos G-morfismos de M em k. A proposição anterior mostra que se G é geometricamente redutivo, então os índices desses morfismos são limitados superiormente por $\mathrm{ind}(G)$. Assim, podemos introduzir a seguinte noção

Definição 3.5.4 *Sejam G um grupo algébrico definido sobre k, $p = expcar(k)$ e M um G-módulo racional.*

(i) *Dizemos que o* **índice de M relativo a G** *é r (e denotaremos $ind_G(M) = r$) se*

$$r = \max\{ind_G(\lambda) \mid \lambda \in Mor_G(M, k),\ \lambda \neq 0\}$$

(ii) *Dizemos que o* **índice do reticulado de G-módulos de M** *é r (e denotaremos $ind_*(M) = r$) se*

$$r = \max\{ind_G(\lambda) \mid 0 \neq \lambda \in Mor_G(N, k) \text{ e } N \subset M \text{ é um } G\text{-submódulo}\}$$

A proposição anterior nos permite mostrar as seguintes propriedades.

Proposição 3.5.5 *Sejam G um grupo algébrico geometricamente redutivo definido sobre k e $p = expcar(k)$. Dados $M, M' \in \mathcal{M}(G)$, valem as seguintes propriedades.*

1. (i) $ind(M) \leq ind_*(M) \leq ind(G)$,

   (ii) $ind_*(M) = \max\{ind(N) \mid N \subset M \text{ é um } G\text{-submódulo}\}$

   (iii) $ind(M) = ind_*(M) \iff$ *Existe um morfismo sobrejetor de G-módulos $\lambda : M \longrightarrow k$ tal que $ind(\lambda) = ind_*(M)$*

2. (iv) *Se M' é um G-submódulo de M então*

$$ind_*(M') \leq ind_*(M)$$

   (v) *Se $\varphi : M \longrightarrow M'$ é um epimorfismo de G-módulos então*

$$ind(M) \geq ind(M') \text{ e } ind_*(M) \geq ind_*(M')$$

3. (vi) $ind(M \oplus M') = \max\{ind(M), ind(M')\}$

   (vii) $ind_*(M \oplus M') \geq \max\{ind_*(M), ind_*(M')\}$

   (viii) $ind(M \otimes M') \geq \max\{ind(M), ind(M')\}$

4. *Se M é semisimples então $ind(M) = ind_*(M) = 0$*

Demonstração.

1.

(i) Como

$$\{\mathrm{ind}(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Mor}_G(M,k),\ \lambda \neq 0\} \subset \{\mathrm{ind}(\lambda) \mid 0 \neq \lambda \in \mathrm{Mor}_G(N,k),\ N \subset M\}$$

temos imediatamente que

$$\mathrm{ind}(M) \leq \mathrm{ind}_*(M)$$

A outra desigualdade, segue imediatamente da proposição (3.5.3, (2), (i)).

(ii) Para cada G-submódulo $N \subset M$, fixemos um morfismo sobrejetor de G-módulos $\lambda_N : N \longrightarrow k$ tal que $\mathrm{ind}(\lambda_N) = \mathrm{ind}(N)$. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_*(M) &= \max\{\mathrm{ind}(\lambda) \mid 0 \neq \lambda \in \mathrm{Mor}_G(N,k) \text{ e } N \subset M \text{ é um } G\text{-submódulo}\} = \\
&= \max\{\mathrm{ind}(\lambda_N) \mid N \subset M \text{ é um } G\text{-submódulo de } M\} = \\
&= \max\{\mathrm{ind}(N) \mid N \subset M \text{ é um } G\text{-submódulo de } M\}
\end{aligned}$$

(iii) Se $\mathrm{ind}(M) = \mathrm{ind}_*(M)$, então basta considerar um G-morfismo sobrejetor $\lambda : M \longrightarrow k$ tal que $\mathrm{ind}(\lambda) = \mathrm{ind}(M)$. Reciprocamente seja $\lambda : M \longrightarrow k$ um G-morfismo sobrejetor tal que $\mathrm{ind}(\lambda) = \mathrm{ind}_*(M)$. Então

$$\mathrm{ind}_*(M) = \mathrm{ind}(\lambda) \leq \max\{\mathrm{ind}(\theta) \mid 0 \neq \theta \in \mathrm{Mor}_G(M,k)\} = \mathrm{ind}(M)$$

Como por (i), $\mathrm{ind}(M) \leq \mathrm{ind}_*(M)$, segue-se a igualdade.

2.

(iv) Segue imediatamente da definição de $\mathrm{ind}_*(M)$ ou de (1.,(ii)).

(v) Seja $\varphi : M \longrightarrow M'$ um epimorfismo de G-módulos . Consideremos $N' \subset M'$ um G-submódulo de M' e $\lambda : N' \longrightarrow k$ um morfismo sobrejetor de G-módulos tal que $\mathrm{ind}(\lambda) = \mathrm{ind}_*(M')$. Sejam $N = \varphi^{-1}(N')$ e $\tilde{\lambda} = \lambda \circ \varphi : N \longrightarrow k$. Então temos $0 \neq \tilde{\lambda} \in \mathrm{Mor}_G(N,k)$ e pela proposição (3.5.3, (vi)), $\mathrm{ind}(\tilde{\lambda}) \geq \mathrm{ind}(\lambda) = \mathrm{ind}_*(M')$.

Logo,

$$\mathrm{ind}_*(M) \geq \mathrm{ind}(\tilde{\lambda}) \geq \mathrm{ind}_*(M')$$

A prova de que $\mathrm{ind}(M) \geq \mathrm{ind}(M')$ é análoga e por isso será omitida.

3.

(vi) Consideraremos os epimorfismos de G-módulos

$$\begin{array}{rccc} \pi_1: & M\oplus M' & \rightarrow & M \\ & (m,m') & \mapsto & m \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \pi_2: & M\oplus M' & \rightarrow & M \\ & (m,m') & \mapsto & m' \end{array}$$

Por (v), sabemos que

$$\operatorname{ind}(M\oplus M') \geq \operatorname{ind}(M) \text{ e } \operatorname{ind}(M\oplus M') \geq \operatorname{ind}(M')$$

Logo, $\operatorname{ind}(M\oplus M') \geq \max\{\operatorname{ind}(M), \operatorname{ind}(M')\}$.

Sejam $0 \neq \lambda \in \operatorname{Mor}_G(M\oplus M', k)$ tal que $\operatorname{ind}(\lambda) = \operatorname{ind}(M\oplus M')$ e suponhamos $\operatorname{ind}(M) \geq \operatorname{ind}(M')$.

Consideremos as inclusões canônicas

$$\iota_1 : M \longrightarrow M\oplus M' \text{ e } \iota_2 : M' \longrightarrow M\oplus M'$$

Dividiremos a prova em dois casos:

1º caso $(\lambda\circ\iota_1) : M \longrightarrow k$ é sobrejetora.

Pela proposição (3.5.3, (vi)), sabemos que

$$\operatorname{ind}(\lambda\circ\iota_1) \geq \operatorname{ind}(\lambda)$$

Logo,

$$\operatorname{ind}(M\oplus M') = \operatorname{ind}(\lambda) \leq \operatorname{ind}(\lambda\circ\iota_1) \leq \operatorname{ind}(M) \leq \operatorname{ind}(M\oplus M')$$

Assim, $\operatorname{ind}(M\oplus M') = \operatorname{ind}(M) = \max\{\operatorname{ind}(M), \operatorname{ind}(M')\}$

2º caso $(\lambda\circ\iota_1) = 0$

Como $\lambda : M\oplus M' \longrightarrow k$ é sobrejetora e $\lambda\circ\iota_1 = 0$, então $(\lambda\circ\iota_2) : M' \longrightarrow k$ é sobrejetora. Analogamente ao que fizemos no 1º caso, concluímos que

$$\operatorname{ind}(M\oplus M') = \operatorname{ind}(M')$$

Mas então

$$\operatorname{ind}(M) \leq \operatorname{ind}(M\oplus M') = \operatorname{ind}(M') \leq \operatorname{ind}(M)$$

e portanto

$$\text{ind}(M) = \text{ind}(M \oplus M') = \text{ind}(M').$$

Logo,

$$\text{ind}(M \oplus M') = \max\{\text{ind}(M)\text{ind}(M')\}$$

(vii) Como M e M' são G-submódulos de $(M \oplus M')$, (vii) segue imediatamente de (iv).

(viii) Sejam $\lambda : M \longrightarrow k$ e $\theta : M' \longrightarrow k$ G-módulos sobrejetores tais que

$$\text{ind}(\lambda) = \text{ind}(M) \text{ e } \text{ind}(\theta) = \text{ind}(M')$$

Então $(\lambda \otimes \theta) : M \otimes M' \longrightarrow k$ é um G-morfismo sobrejetor e pela proposição (3.5.3, (v)), temos:

$$\text{ind}(\lambda \otimes \theta) = \max\{\text{ind}(\lambda), \text{ind}\theta\} = \max\{\text{ind}(M), \text{ind}(M')\}$$

Logo,

$$\text{ind}(M \otimes M') \geq \text{ind}(\lambda \otimes \theta) \geq \max\{\text{ind}(M), \text{ind}(M')\}$$

4.

Se M é G-módulo semisimples, todo G-submódulo de M é somando de M. Logo, pela proposição (3.5.3, (iv)), $\text{ind}(\lambda) = 0$, para todo $0 \neq \lambda \in \text{Mor}_G(M, k)$. Assim, $\text{ind}(M) = (0)$.

Se $N \subset M$ é um G-submódulo e M é semisimples, então N é também semisimples e portanto $\text{ind}(N) = 0$. Logo, $\text{ind}_*(M) = 0$, por (ii)

□

Corolário 3.5.6 *Sejam G um grupo algébrico geometricamente redutivo definido sobre k e $p = expcar(k)$, Para todo $M \in \mathcal{M}(G)$ valem as propriedades abaixo:*

(1)

$$ind(M) \leq \min\{s \in I\!N \mid (\forall N \subset M, codim_M N = 1)(N.S^{p^s-1}(M)) \text{ é } G\text{-somando de } S^{p^s}(M)\}$$

(2)

Se $ind_*(M) = r$ e $\phi : M \longrightarrow T$ é um epimorfismo de G-módulos então para todo $t \in T^G$, existe $m \in S^{p^r}(M)^G$ tal que $S^{p^r}(\phi)(m) = \underbrace{t \otimes \cdots \otimes t}_{p^r}$.

Demonstração.

(1) Sejam $\lambda : M \longrightarrow k$ um G-morfismo sobrejetor e $N_0 = \ker \lambda$.

Então pela proposição (3.5.3, (iv)) sabemos que

$$\text{ind}(\lambda) = \min\{s \in \mathbb{N} \mid N_0.S^{p^s-1}(M) \text{ é } G\text{-somando de } S^{p^s}(M)\}$$

Como

$$\{s \in \mathbb{N} \mid (\forall N \subset M, \text{codim }_M N = 1)(N.S^{p^s-1}(M)) \text{ é } G\text{-somando de } S^{p^s}(M)\} \subset$$

$$\subset \{s \in \mathbb{N} \mid N_0.S^{p^s-1}(M) \text{é } G\text{-somando de } S^{p^s}(M)\}$$

temos que

$$\text{ind}(\lambda) \leq \min\{s \in \mathbb{N} \mid (\forall N \subset M, \text{codim}_M N = 1)(N.S^{p^s-1}(M)) \text{ é } G\text{-somando de } S^{p^s}(M)\}$$

Assim,

$$\text{ind}(M) = \max\{\text{ind}(\lambda) \mid \lambda \in \text{Mor}_G(M, k), \lambda \neq 0\} \leq$$

$$\leq \min\{s \in \mathbb{N}^* \mid (\forall N \subset M, \text{codim }_M N = 1)(NS^{p^s-1}(M)) \text{ é } G\text{-somando de } S^{p^s}(M)\}$$

e vale (1).

(2) Sejam $M \in \mathcal{M}(G)$, $\phi : M \longrightarrow T$ e $t \in T^G$ como em (2).

Se $t = 0$, nada temos a demonstrar.

Se $t \neq 0$, consideremos $m \in M$ tal que $\phi(m) = t$ e seja $M_1 = \langle x.m \mid x \in G \rangle_k$.

Considere $\psi : \langle t \rangle_k \longrightarrow k$ a aplicação k-linear definida por $\psi(t) = 1$.

Como $t \in T^G$, ψ é um G-isomorfismo.

Seja

$$\lambda = \psi \circ (\phi \mid_{M_1}) : M_1 \longrightarrow k$$

Então λ é um G-morfismo sobrejetor definido em um submódulo de M.

Assim, se $r = \text{ind}_*(M)$ então, pela proposição (3.5.3, (iii)), temos que

$$\bar{S}^{p^r}(\lambda) : S^{p^r}(M_1)^G \longrightarrow k$$

é sobrejetora.

Seja, pois, $m \in S^{p^r}(M_1)^G$ tal que $\bar{S}^{p^r}(\lambda)(m) = 1$.

Então $[\bar{S}^{p^r}(\psi) \circ S^{p^r}(\phi)](m) = 1$ e como ψ é isomorfismo, temos

$$S^{p^r}(\phi)(m) = \bar{S}^{p^r}(\psi^{-1})(1) = \underbrace{t \otimes \cdots \otimes t}_{p^r},$$

o que prova (2).

$\square$

Vamos agora aplicar os resultados anteriores para estimar índices de subgrupos, quocientes e produto direto de grupos algébricos redutivos. Em particular, os resultados da seção (3.3) permitirão dar uma prova bastante simples de que subgrupos exatos herdam a propriedade da redutividade geométrica.

Proposição 3.5.7 *Sejam G um grupo algébrico geometricamente redutivo definido sobre k e $p = expcar(k)$.*

Valem as seguintes propriedades:

(1) $ind(G) = ind(P(G)^*) = ind_*(P(G)^*)$

(2) *Se $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um epimorfismo de grupos algébricos então $ind(G') \leq ind(G)$.*

(3) *Se H é um subgrupo exato de G então H é geometricamente redutivo e*

$$ind(H) \leq ind(G)$$

(4) *Se H é um subgrupo fechado e normal em G, então*

- **(i)** $ind(H) \leq ind(G)$ *e* $ind(G/H) \leq ind(G)$
- **(ii)** $ind(G) \leq ind(H) + ind(G/H) \leq 2ind(G)$

(5) *Se H é outro grupo algébrico geometricamente redutivo definido sobre k, então*

$$ind(G \times H) \leq ind(G) + ind(H) \leq 2ind(G \times H)$$

Demonstração.

(1) Seja $\epsilon : P(G)^* \longrightarrow k$ como sempre.

Sabemos que $\text{ind}(G) = \text{ind}(\epsilon)$ e que para todo morfismo sobrejetor G-módulos $\lambda : M \longrightarrow k$, $\text{ind}(\lambda) \leq \text{ind}(G)$. Daí segue imediatamente que

$$\max\{\text{ind}(\lambda) \mid \lambda \in \text{Mor}_G(P(G)^*, k), \lambda \neq 0\} = \text{ind}(\epsilon)$$

e

$$\max\{\mathrm{ind}(\lambda) \mid 0 \neq \lambda \in \mathrm{Mor}_G(M,k) \text{ e } M \subset P(G)^* \text{ é um } G\text{-submódulo}\} = \mathrm{ind}(\epsilon)$$

Logo,

$$\mathrm{ind}(G) = \mathrm{ind}(P(G)^*) = \mathrm{ind}_*(P(G)^*)$$

(2) Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um epimorfismo de grupos algébricos e consideremos o morfismo de k-álgebras induzido por φ

$$\tilde{\varphi} : P(G') \rightarrowtail P(G)$$

Consideremos $P(G')$ como G-módulo via φ, isto é, definimos:

$$x * f' = \varphi(x).f', \qquad \forall x \in G, \qquad \forall f \in P(G')$$

Desse modo, $\tilde{\varphi}$ é um G-morfismo e $\tilde{\varphi}(1_{P(G')}) = 1_{P(G)}$.

Consideremos φ^* a aplicação induzida nos duais por $\tilde{\varphi}$, isto é,

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* : & P(G)^* & \longrightarrow & P(G')^* \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tilde{\varphi} \end{array}$$

Então φ^* é um G-morfismo e o diagrama

$$\begin{tikzcd} P(G)^* \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[dr, "\epsilon_G"'] & P(G')^* \arrow[d, "\epsilon_{G'}"] \\ & k \end{tikzcd}$$

é comutativo, pois $\tilde{\varphi}(1) = 1$.

Seja $r = \mathrm{ind}(G)$ e consideremos $I \in S^{p^r}(P(G)^*)^G$ tal que $\bar{S}^{p^r}(\epsilon_G)(I) = 1$. Então

$$J = S^{p^r}(\varphi^*)(I) \in S^{p^r}(P(G')^*)^G = S^{p^r}(P(G')^*)^{G'}$$

e

$$\bar{S}^{p^r}(\epsilon_{G'})(J) = \bar{S}^{p^r}(\epsilon_{G'})(S^{p^r}(\varphi^*)(I)) = \bar{S}^{p^r}(\epsilon_G)(I) = 1$$

Assim, G' admite uma p^r-integral e portanto

$$p^r \geq \min\{s \in \mathbb{N}^* \mid G' \text{ admite uma } s\text{-integral}\}$$

Logo, $\text{ind}(G') \leq r$.

(3) Como H é exato em G, sabemos pela proposição (1.2.9) que $P(G)$ é injetivo como H-módulo. Mostraremos no próximo capítulo, que nesse caso, existe um morfismo de H-módulos

$$\sigma : P(H) \longrightarrow P(G) \qquad \text{tal que } \sigma(1) = 1$$

Consideremos o morfismo induzido nos duais $\sigma^* : P(G)^* \longrightarrow P(H)^*$. É fácil ver que $\epsilon_H \circ \sigma^* = \epsilon_G$, já que $\sigma(1) = 1$.

Sejam então $r = \text{ind}(G)$ e $I \in S^{p^r}(P(G)^*)^G$ tal que $\bar{S}^{p^r}(\epsilon_G)(I) = 1$.

Como $S^{p^r}(P(G)^*)^G \subset S^{p^r}(P(G)^*)^H$ e σ^* é um H-morfismo, concluímos que

$$J = S^{p^r}(\sigma^*)(I) \in S^{p^r}(P(H)^*)^H$$

Além disso,

$$\bar{S}^{p^r}(\epsilon_H)(J) = \bar{S}^{p^r}(\epsilon_H)(S^{p^r}(\sigma^*)(I)) = \bar{S}^{p^r}(\epsilon_H \circ \sigma^*)(I) = \bar{S}^{p^r}(\epsilon_G)(I) = 1$$

Assim, H admite uma p^r-integral e portanto H é geometricamente redutivo, de índice menor ou igual a $r = \text{ind}(G)$.

(4)

(i) Segue imediatamente de (3) e (2).

(ii) Considere
$$\begin{aligned} \epsilon_G : \ & P(G)^* && \longrightarrow && k \\ & \sigma && \longmapsto && \sigma(1) \end{aligned}$$

Sejam $r = \text{ind}(H)$ e $s = \text{ind}(G/H)$.

Como ϵ_G é um morfismo sobrejetor de H-módulos então existe $I \in S^{p^r}(P(G)^*)^H$ tal que $\bar{S}^{p^r}(\epsilon_G)(I) = 1$.

Seja $M = \langle x.I \mid x \in G\rangle_k \subset S^{p^r}(P(G)^*)$.

Então como I é fixo pela ação de H, M é um G/H-módulo e a restrição

$$\bar{S}^{p^r}(\epsilon_G)\mid_M : M \longrightarrow k$$

é um G/H-morfismo sobrejetor.

Como $\operatorname{ind}(G/H) = s$, existe $J \in S^{p^s}(M)^{G/H}$ tal que $\bar{S}^{p^s}(\bar{S}^{p^r}(\epsilon_G)\mid_M)(J) = 1$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \mu : & S^{p^s}(M) & \longrightarrow & S^{p^{s+r}}(P(G)^*) \\ & \overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_{p^s}} & \longmapsto & m_1. \ldots .m_{p^s} \end{array}$$

onde $m_i \in M \subset S^{p^r}(P(G)^*)$, $1 \leq i \leq p^s$, e $\;.\;$ indica o produto na álgebra simétrica.

O diagrama

$$\begin{tikzcd} S^{p^s}(M) \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\bar{S}^{p^s}(\bar{S}^{p^r}(\epsilon_G)\mid_M)"'] & & S^{p^{s+r}}(P(G)^*) \arrow[dl, "\bar{S}^{p^{s+r}}(\epsilon_G)"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

é comutativo e é fácil verificar que como $J \in S^{p^s}(M)^{G/H}$ então $\mu(J) \in S^{p^{s+r}}(P(G)^*)^G$.

Além disso,

$$\bar{S}^{p^{s+r}}(\epsilon_G)(\mu(J)) = \bar{S}^{p^s}(\bar{S}^{p^r}(\epsilon_G))(J) = 1$$

Logo, G admite uma p^{s+r}-integral e portanto

$$\operatorname{ind}(G) \leq r + s = \operatorname{ind}(H) + \operatorname{ind}(G/H)$$

(5) Como $H \lhd (G \times H)$ e $(G \times H)/H \approx G$, por (4) temos,

$$\operatorname{ind}(G \times H) \leq \operatorname{ind}(H) + \operatorname{ind}(G \times H/H) = \operatorname{ind}(H) + \operatorname{ind}(G) \leq 2\operatorname{ind}(G \times H)$$

□

Observação 3.5.8 *Sejam G e H grupos algébricos geometricamente redutivos, definidos sobre k, $p = expcar(k)$ e seja $\epsilon = \epsilon_{G\times H} : P(G\times H)^* \longrightarrow k$*

Então $ind(H) = ind_H(\epsilon)$ e $ind(G) = ind_G(\epsilon)$

De fato, sabemos que $P(G\times H) \approx P(G)\bigotimes_k P(H)$ e portanto

$$P(G\times H)^* \xrightarrow[\simeq]{\theta} Hom_k(P(G), P(H)^*)$$

Via esses isomorfismos, $\epsilon_{G\times H}$ se transforma em

$$\begin{array}{rccl} \epsilon : & Hom_k(P(G), P(H)^*) & \rightarrow & k \\ & \epsilon(T) & = & T(1_{P(G)})(1_{P(H)}) \end{array}$$

ou seja, $\epsilon_{G\times H} = \epsilon\circ\theta$ e θ é um isomorfismo de $(G\times H)$-módulos. Assim

$$ind(G\times H) = ind(\epsilon_{G\times H}) = ind_{G\times H}(\epsilon)$$

Por outro lado, a partir das sequências exatas

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow H \longrightarrow G\times H \longrightarrow G \longrightarrow 1 \quad e \\ 1 \longrightarrow G \longrightarrow G\times H \longrightarrow H \longrightarrow 1 \end{array}$$

e do isomorfismo θ acima, obtemos G-morfismos φ e ν e H-morfismos φ' e ν' que tornam os diagramas

$$\begin{tikzcd} P(G)^* \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\epsilon_G"'] & \mathrm{Hom}_k(P(G),P(H)^*) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\epsilon"] & P(G)^* \arrow[dl, "\epsilon_G"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P(H)^* \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\epsilon_H"'] & \mathrm{Hom}_k(P(G),P(H)^*) \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "\epsilon"] & P(H)^* \arrow[dl, "\epsilon_H"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

comutativos.

Pela proposição (3.5.3, (vi)), concluímos então que

$$ind_G(\epsilon) \leq ind_G(\epsilon \circ \varphi) = ind(\epsilon_G) \leq ind(\epsilon_G \circ \nu) = ind_G(\epsilon)$$

Logo,

$$ind_G(\epsilon) = ind(\epsilon_G) = ind(G)$$

Analogamente,

$$ind_H(\epsilon) = ind(\epsilon_H) = ind(H)$$

Como sabemos que $ind(G \times H) \leq ind(G) + ind(H)$, *concluímos que se* $\epsilon = \epsilon_{G\times H}$ *é o* $P(G \times H)$*-morfismo dado por* $\epsilon(\sigma) = \sigma(1)$, $\forall \sigma \in P(G \times H)^*$ *então*

$$ind(G \times H) = ind_{G\times H}(\epsilon) \leq ind_G(\epsilon) + ind_H(\epsilon)$$

□

Capítulo 4

Ações Linearmente Redutivas e Geometricamente Redutivas

Neste capítulo trataremos das noções de ação linearmente redutiva (ou geometricamente redutiva) de um grupo algébrico em variedades e, mais geralmente, em álgebras. Esses conceitos, introduzidos em [4], generalizam os de grupo algébrico linearmente (ou geometricamente) redutivo. Sua origem está relacionada com o conceito de subgrupo exato de um grupo algébrico e com o problema da geração finita de álgebras de invariantes. Mais precisamente, em [4] observa-se que a noção de K ser exato em G pode ser traduzida em termos da exatidão de um funtor "parte-fixa", definido na categoria dos $(P(G), K)$-módulos. A partir daí, o conceito de ação linearmente redutiva surgiu naturalmente, tendo sido introduzida no contexto mais amplo de ações de um grupo algébrico K em uma álgebra. Esse ponto de vista, juntamente com a introdução do conceito de ação geometricamente redutiva, tornaram tanto os resultados de *Nagata* (em [13]), sobre estruturas afins em variedades quociente por grupos redutivos, quando os resultados mais recentes de *Cline et al.*, em [2], casos particulares desta teoria mais geral. Assim, por exemplo, o resultado que afirma que subgrupos exatos herdam a propriedade de redutividade geométrica, aparece como um Teorema de Transitividade.

Nosso objetivo neste capítulo é estender os resultados conhecidos para grupos redutivos (linear ou geometricamente) a esse contexto mais geral. Mais precisamente, obter caracterizações das ações linearmente redutivas em termos da existência de uma "integral", de uma família de operadores de Reynolds e em termos da cohomologia racional.

Para ações geometricamente redutivas não foi possível generalizar a noção de operador de Reynolds. Porém, neste capítulo apresentaremos uma caracterização destas ações em termos da existência de uma "integral".

4.1 Definições e Propriedades Básicas.

Nesta seção, K indicará um grupo algébrico afim, definido sobre um corpo algebricamente fechado k, R_0 será uma K-módulo álgebra fixada e denotaremos por $\mathcal{M}\ (R_0, K)$ a categoria dos (R_0, K)-módulos, introduzida na seção (1.2).

Definição 4.1.1 *Dizemos que a ação de K em R_0 é linearmente redutiva (ou que K age em R_0 de modo linearmente redutivo) se para todo epimorfismo de (R_0, K)-módulo álgebras $\varphi : R \longrightarrow S$, a restrição $\varphi\mid_{R^K}: R^K \longrightarrow S^K$ é sobrejetora.*

Definição 4.1.2 *Dizemos que a ação de K em R_0 é geometricamente redutiva (ou que K age em R_0 de modo geometricamente redutivo) se para todo epimorfismo de (R_0, K)-módulo álgebras $\varphi : R \longrightarrow S$ e para todo $s \in S^K$, existem $q > 0$ e $r \in R^K$ tais que $\varphi(r) = s^q$.*

Observações 4.1.3

(a) *Se K é linearmente redutivo então a ação de K em toda K-módulo álgebra R_0 é linearmente redutiva. Analogamente para K geometricamente redutivo.*

(b) *K é linearmente redutivo se e somente se a ação de K em $R_0 = k$ é linearmente redutiva. Analogamente para K geometricamente redutivo.*

(c) *Se a ação de K em R_0 é linearmente redutiva então é também geometricamente redutiva.*

Os resultados que veremos a seguir fornecem condições, em termos de morfismos de módulos, para que uma ação seja linearmente redutiva ou geometricamente redutiva e foram provados por Ferrer, em [4].

Proposição 4.1.4 *As condições abaixo são equivalentes:*

(a) *A ação de K em R_0 é linearmente redutiva*

(b) *Se $\lambda : M \longrightarrow N$ é um epimorfismo de (R_0, K)-módulos então $\lambda(M^K) = N^K$*

(c) *Para todo $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$, para todo ideal K-estável J de R_0 e para todo morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos $\lambda : M \longrightarrow R_0/J$, existe $m \in M^K$ tal que $\lambda(m) = 1 + J$*

(d) *Para todo par de (R_0, K)-módulos $N \subset M$, N é somando de M como K-módulo*

Demonstração. A prova desse resultado é análoga à da proposição (2.1.3) e por isso será omitida.

□

A fim de estabelecer condições semelhantes que caracterizam as ações geometricamente redutivas, necessitamos de algumas construções auxiliares. No caso absoluto, isto é, no caso de grupos algébricos geometricamente redutivos, estas condições estavam dadas em termos de álgebras simétricas (ou de suas componentes homogêneas), construídas sobre um K-módulo.

Para o caso de uma ação geometricamente redutiva, isso não será suficiente, já que $S(M)$ ou $S^q(M)$, $q \geq 0$, não são mais (R_0, K)-módulos, mesmo que M o seja. As construções auxiliares que necessitamos aqui, foram introduzidas em (1.2.3, (iii)). Com elas podemos enunciar um resultado análogo à proposição (2.1.4), para ações geometricamente redutivas, que pode ser encontrado em [4].

Proposição 4.1.5 *As condições abaixo são equivalentes*

(a) *A ação de K em R_0 é geometricamente redutiva*

(b) *Para todo $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$, para todo ideal K-estável J de R_0 e para todo epimorfismo de (R_0, K)-módulos $\lambda : M \longrightarrow R_0/J$, existem $q > 0$ e $t \in (R_0 \otimes S^q(M))^K$ tais que $\bar{S}^q(\lambda)(t) = 1 + J$.*

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sejam M, J e λ como em (b). Então

$$(\mathrm{id} \otimes S(\lambda)) : R_0 \otimes S(M) \longrightarrow R_0 \otimes S(R_0/J)$$

é morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulo álgebras.

Como $(1 \otimes 1 + J) \in (R_0 \otimes S(R_0/J))^K$, da condição (a), segue-se que existem $q \geq 0$ e $t \in [R_0 \otimes S(R_0)]^K$ tais que

$$[\mathrm{id} \otimes S(\lambda)](t) = 1 \otimes (1 + J)^q$$

Mas $R_0 \otimes S(M) = \bigoplus_{m \geq 0} (R_0 \otimes S^m(M))$ e $S(\lambda)$ preserva a graduação de $S(M)$. Assim, se $t = (t_m)_{m \geq 0}$, com $t_m \in (R_0 \otimes S^m(M))$, $\forall m \geq 0$, então $t_q \in (R_0 \otimes S^q(M))^K$ e $\bar{S}^q(\lambda)(t_q) = 1 + J$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Sejam φ, R e S como na definição (4.1.2).

Sejam ainda $0 \neq s \in S^K$ e $r \in R$ tais que $\varphi(r) = s$.

Consideremos M o (R_0, K)-módulo gerado por r e $J = \mathrm{Ann}\,(s) = \{t \in R_0 \mid st = 0\}$, que é um ideal K-estável de R_0, já que $s \in S^K$.

Os elementos de M são da forma $\sum_i t_i(x_i.r)$, com $t_i \in R_0$ e $x_i \in K$. Além disso, se $\sum_i t_i(x_i.r) = \sum_j t'_j(x'_j.r)$, avaliando φ temos

$$\sum_i t_i s = \sum_j t'_j s$$

donde segue-se que $\left(\sum_i t_i - \sum_j t'_j\right) \in J$. Podemos então definir

$$\lambda : M \longrightarrow R_0/J \text{ por}$$

$$\lambda\left(\sum_i r_i(x_i.s)\right) = \left(\sum_i r_i\right) + J, \qquad \forall r_i \in R_0, \qquad \forall x_i \in K$$

É fácil verificar que λ é morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos. Além disso, se $\mu_s : R_0/J \longrightarrow S$ indica a multiplicação por s e $\iota : M \longrightarrow R$ é a inclusão, o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\iota"'] & R_0/J \arrow[d, "\mu_s"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Logo, para todo $q > 0$, o diagrama de K-módulos e K-morfismos abaixo é comutativo.

$$
\begin{tikzcd}
R_0 \otimes S^q(M) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes S^q(\lambda)"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes S^q(\iota)"'] & R_0 \otimes S^q(R_0/J) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes S^q(\mu_s)"] & R_0 \otimes R_0/J \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu_{s^q}"] & R_0/J \arrow[d, "\mu_{s^q}"] \\
R_0 \otimes S^q(R) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes S^q(\varphi)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\mu"'] & R_0 \otimes S^q(S) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu"'] & R_0 \otimes S \arrow[r, "\mu"'] & S \\
 & R_0 \otimes R \arrow[r, "\mu"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\varphi"] & R \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}
$$

Sejam $q > 0$ e $x \in (R_0 \otimes S^q(M))^K$ tais que $\bar{S}^q(\lambda)(x) = 1 + J$ e consideremos

$$r' = [\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes S^q(\imath))] \in R^K$$

Então

$$
\begin{aligned}
\varphi(r') &= [\varphi \circ \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes S^q(\imath))](x) = \\
&= [\mu_{s^q} \circ \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes S^q(\lambda))](x) = \\
&= [\mu_{s^q} \circ \bar{S}^q(\lambda))](x) = \\
&= \mu_{s^q}(1 + J) = s^q
\end{aligned}
$$

□

Concluiremos esta seção, com um resultado que será utilizado na demonstração de que, em característica zero, os conceitos de ação linearmente redutiva e geometricamente redutiva coincidem.

Lema 4.1.6 *Sejam K um grupo algébrico afim definido sobre k, $p = expcar(k)$ e R_0 uma K-módulo álgebra. Se a ação de K em R_0 é geometricamente redutiva e $\lambda : M \longrightarrow R_0$ é um morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos, então*

$$d = \min\{r \in \mathbb{N}^* \mid (\exists m \in (R_0 \otimes S^r(M))^K)(\bar{S}^r(\lambda)(m) = 1)\}$$

é potência de p.

Demonstração. Sejam $\lambda : M \longrightarrow R_0$ e $d \geq 1$ como acima. Pela proposição (1.2.4), sabemos que para cada $\imath$, $1 \leq \imath \leq d-1$, existe um morfismo de (R_0, K)-módulos

$$\bar{\lambda}_d^{(\imath)} : R_0 \otimes S^d(M) \longrightarrow R_0 \otimes S^{d-\imath}(M)$$

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} R_0 \otimes S^d(M) \arrow[rr, "\bar{\lambda}_d^{(\imath)}"] \arrow[dr, "\binom{d}{\imath}\bar{S}^d(\lambda)"'] & & R_0 \otimes S^{d-\imath}(M) \\ & R_0 \arrow[ur, "\bar{S}^{d-\imath}(\lambda)"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Seja $m \in (R_0 \otimes S^d(M))^K$ tal que $\bar{S}^d(\lambda)(m) = 1$.

Então $y_\imath = \bar{\lambda}_d^{(\imath)}(m) \in (R_0 \otimes S^{d-\imath}(M))^K$ e $\bar{S}^{d-\imath}(\lambda)(y_\imath) = \binom{d}{\imath}$ $\imath = 1, \ldots, d-1$.

Se $\text{car}(k) = 0$, pela minimalidade de d, concluímos que $d = 1$ e portanto d é potência do expoente característico de k.

Se $\text{car}(k) = p > 0$, novamente pela minimalidade de d, concluímos que $\binom{d}{\imath} = 0$, $1 \leq \imath \leq d-1$, donde d é potência de p.

□

Observação 4.1.7 *Na proposição (4.1.5) aparece a necessidade de considerar morfismos de (R_0, K)-módulos com valores em quocientes de R_0, para caracterizar as ações geometricamente redutivas ou linearmente redutivas. Os resultados das próximas seções permitirão provar que, na verdade, basta considerar morfismos com valores em R_0.*

4.2 Ações Linearmente Redutivas, Operadores de Reynolds, Integral e Cohomologia.

Nesta seção, como o próprio nome diz, estenderemos ao contexto das ações linearmente redutivas, os resultados vistos no capítulo anterior para grupos linearmente redutivos.

Em particular, provaremos a equivalência entre a existência de um morfismo de K-módulos $\sigma : P(K) \longrightarrow R_0$ que leva $1 \in P(K)$ em $1 \in R_0$, e o fato de K agir em R_0 de modo linearmente redutivo. Esse resultado já era conhecido nas seguintes situações:

(i) Quando K é um subgrupo fechado de G com a ação natural de K em $P(G)$, [4].

(ii) Quando U é um grupo unipotente agindo racionalmente em uma variedade álgebra afim, [2].

Em ambos os casos, mostrava-se que a existência de um tal morfismo era equivalente à injetividade da álgebra correspondente ($P(G)$ ou $P(X)$), como K-módulo.

Este fato é equivalente à ação de K ser linearmente redutiva, como mostra o resultado abaixo.

Proposição 4.2.1 *Seja K um grupo algébrico agindo racionalmente em uma K-módulo álgebra R_0. As afirmações abaixo são equivalentes:*

(a) *A ação de K em R_0 é linearmente redutiva*

(b) *R_0 é injetivo como K-módulo.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ o funtor parte-fixa da categoria dos (R_0, K)-módulos na categoria dos k-espaços vetoriais, que a cada $M \in M(R_0, K)$ associa o k-espaço vetorial $\mathcal{F}(M) = M^K$. Pelo teorema (1.2.6), sabemos que a injetividade de R_0 como K-módulo é equivalente à exatidão de $\mathcal{F}$ (à direita). Mas, pela proposição (4.1.4), sabemos que a exatidão de $\mathcal{F}$ é equivalente à condição (a).

□

Teorema 4.2.2 *Sejam K um grupo algébrico afim definido sobre k agindo racionalmente em um K-módulo álgebra R_0. São equivalentes:*

(a) *A ação de K em R_0 é linearmente redutiva*

(b) $H^1(K, M) = (0)$, *para todo* $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$

(c) *Existe um morfismo de K-módulos (à direita)* $\sigma : P(K) \longrightarrow R_0$ *tal que* $\sigma(1) = 1$.

(d) *Existe uma família de morfismos de K-módulos* $(p_M)_{M \in \mathcal{M}(R_0,K)}$ *tal que*

(d_1) *Para todo* $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$, $p_M : M \longrightarrow (M^K \otimes R_0)$ *e* $p_M(m) = m \otimes 1$, *para todo* $m \in M^K$.

(d_2) *Se* $\lambda : M \longrightarrow N$ *é um morfismo de* (R_0, K)*-módulos, então o diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_M"] \arrow[d, "\lambda"'] & M^K \otimes R_0 \arrow[d, "\lambda \otimes id"] \\ N \arrow[r, "p_N"'] & N^K \otimes R_0 \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Seja $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$. Pela proposição (1.2.5), sabemos que existe $I \in \mathcal{M}(R_0, K)$, injetivo como K-módulo, que tem M como (R_0, K)-submódulo.

Se $\iota : M \longrightarrow I$ indica a inclusão e $Q = I/M$, então

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} I \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

é sequência exata de (R_0, K)-módulos.

Assim, tomando partes fixas e lembrando que I é K-módulo injetivo, obtemos a sequência exata longa

$$0 \longrightarrow M^K \xrightarrow{\iota} I^K \xrightarrow{\pi} Q^K \xrightarrow{\delta} H^1(K, M) \longrightarrow 0$$

Como a ação de K em R_0 é linearmente redutiva, temos que $\pi \mid_{I^K} : I^K \longrightarrow Q^K$ é sobrejetora e portanto $\ker \delta = Q^K$ e $\delta = 0$. Como δ é sobrejetora, concluímos que $H^1(K, M) = (0)$.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Consideremos $\epsilon : \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0) \longrightarrow R_0$ definida por

$$\epsilon(T) = T(1), \qquad \forall T \in \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)$$

.

Então ϵ é morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos.

A sequência exata de (R_0, K)-módulos e morfismos

$$0 \longrightarrow \ker\epsilon \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0) \stackrel{\epsilon}{\longrightarrow} R_0 \longrightarrow 0$$

dá lugar a sequência exata longa de k-espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow (\ker\epsilon)^K \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)^{\ K} \stackrel{\epsilon}{\longrightarrow} {R_0}^K \longrightarrow H^1(K, \ker\epsilon) \longrightarrow \cdots$$

Por hipótese, $H^1(K, \ker\epsilon) = (0)$ e portanto

$$\epsilon \mid_{\mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)^{\ K}} : \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)^{\ K} \longrightarrow R_0^K \quad \text{é sobrejetora}$$

Assim, existe $\sigma_1 \in \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)^{\ K}$ tal que $\epsilon(\sigma_1) = 1$. Em outras palavras, existe um morfismo de K-módulos à esquerda $\sigma_1 : P(K) \longrightarrow R_0$ tal que $\sigma_1(1) = 1$.

Seja $\eta : P(K) \longrightarrow P(K)$ dada por

$$\eta(f)(x) = f(x^{-1}), \qquad \forall f \in P(K), \qquad \forall x \in K$$

e consideremos $\sigma = \sigma_1 \circ \eta$.

Se consideramos em $P(K)$ a ação natural à direita e em R_0 a ação de K à direita induzida pela ação de K à esquerda, concluímos que σ é morfismo de K-módulos à direita e $\sigma(1) = 1$.

(c) $\Rightarrow$ (d)

Seja $\sigma : P(K) \longrightarrow R_0$, como em (c). Vamos fazer a construção da família $(p_M)_{M \in \mathcal{M}(R_0, K)}$ em dois passos.

<u>1º passo:</u> Para cada $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$, considere $Q_M : M \longrightarrow M^K$ definida por

$$Q_M = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ \chi_M,$$

onde $\chi_M : M \longrightarrow M \otimes P(K)$ e $\mu : M \otimes R_0 \longrightarrow M$ dão a estrutura de M como K-módulo e como R_0-módulo respectivamente. Então

(i) $Q_M(m) = m, \qquad \forall m \in M^K$

(ii) $Q_M(m) \in M^K, \qquad \forall m \in M$

(iii) A família $(Q_M)_{M \in \mathcal{M}(R_0,K)}$ comuta com os morfismos de (R_0, K)-módulos.

De fato,

(i) Se $m \in M^K$ então $\chi_M(m) = m \otimes 1$ e portanto

$$Q_M(m) = [\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma)](m \otimes 1) = m, \qquad \text{pois} \quad \sigma(1) = 1$$

(ii) Sejam $m \in M$ e consideremos $\{m_1, \ldots, m_t\}$ uma k-base do espaço vetorial gerado por $\{x.m \mid \quad x \in K\}$. Então existem elementos $f_i \in P(K)$ e $g_{ij} \in P(K)$, $1 \leq i, j \leq t$ tais que

$$\chi_M(m) = \sum_{i=1}^{t} m_i \otimes f_i \quad \text{e} \quad \chi_M(m_i) = \sum_{j=1}^{t} m_j \otimes g_{ij}, \quad 1 \leq i \leq t$$

Como para todos $x, y \in K$

$$x.m = \sum_{i=1}^{t} f_i(x) m_i \quad \text{e} \quad y.m_i = \sum_{j=1}^{t} g_{ij}(y) m_j,$$

concluímos que

$$f_j.x = \sum_{i=1}^{t} g_{ij}(x) f_i, \qquad \forall x \in K,\ 1 \leq j \leq t$$

Além disso,

$$Q_M(m) = \sum_{i=1}^{t} \sigma(f_i) m_i$$

Logo,

$$\begin{aligned}
x.Q_M(m) &= \sum_{i=1}^{t} [x.\sigma(f_i)][x.m_i] = \\
&= \sum_{i=1}^{t} [x.\sigma(f_i)(\sum_{j=1}^{t} g_{ij}(x) m_j)] = \\
&= \sum_{j=1}^{t} (\sum_{i=1}^{t} g_{ij}(x)(x.\sigma(f_i))) m_j =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{t}[\sum_{i=1}^{t} g_{i,j}(x)(\sigma(f_i.x^{-1}))]m_j = \\
&= \sum_{j=1}^{t}[\sigma(\sum_{i=1}^{t} g_{i,j}(x)(f_i.x^{-1}))]m_j = \\
&= \sum_{j=1}^{t} \sigma((f_j.x).x^{-1})m_j = \\
&= \sum_{j=1}^{t} \sigma(f_j)m_j = Q_M(m), \qquad \forall x \in K
\end{aligned}
$$

Assim, $Q_M(m) \in M^K$, para todo $m \in M$.

(iii) Seja $\lambda : M \longrightarrow N$ um morfismo de (R_0, K)-módulos. Queremos provar que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "Q_M"] \arrow[d, "\lambda"'] & M^K \arrow[d, "\lambda"] \\
N \arrow[r, "Q_N"'] & N^K
\end{tikzcd}
$$

é comutativo.

Explicitando Q_M e Q_N, o diagrama anterior se transforma em:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\chi_M"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \otimes P(K) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \sigma"] \arrow[d, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] & M \otimes R_0 \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] & M \arrow[d, "\lambda"] \\
N \arrow[r, "\chi_N"'] & N \otimes P(K) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \sigma"'] & N \otimes R_0 \arrow[r, "\mu_N"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Sendo λ um morfismo de K-módulos, pela observação (1.1.9), temos que o quadrado à esquerda é comutativo. O quadrado do meio é obviamente comutativo. Como λ é morfismo de R_0-módulos, o quadrado à direita é comutativo. Assim, o retângulo é comutativo e vale (iii).

2 º passo: Para cada $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$, definimos $p_M : M \longrightarrow M^K \otimes R_0$ por

$$p_M = (Q_M \otimes (\sigma \circ \eta)) \circ \chi_M$$

onde $\eta : P(K) \longrightarrow P(K)$ é dada por

$$\eta(f)(x) = f(x^{-1}), \qquad f \in P(K),\ x \in K.$$

(d_1) Sejam $m \in M$ e $x \in K$. Com a notação anterior temos que se

$$\chi_M(m) = \sum_{i=1}^{t} m_i \otimes f_i \qquad \text{então} \qquad \chi_M(x.m) = \sum_{i=1}^{t} m_i \otimes x.f_i$$

Logo, como $Q_M(M) \subset M^K$, temos

$$\begin{aligned}
p_M(x.m) &= [Q_M \otimes (\sigma \circ \eta)](\sum_{i=1}^{t} m_i \otimes x.f_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{t} [Q_M(m_i) \otimes (\sigma \circ \eta)(x.f_i)] = \\
&= \sum_{i=1}^{t} [Q_M(m_i) \otimes \sigma(\eta(f_i).x^{-1})] = \sum_{i=1}^{t} [Q_M(m_i) \otimes x.\sigma(\eta(f_i))] = \\
&= \sum_{i=1}^{t} [x.Q_M(m_i) \otimes x.\sigma(\eta(f_i))] = x.\sum_{i=1}^{t} [Q_M(m_i) \otimes (\sigma \circ \eta)(f_i)] = \\
&= x.[(Q_M \otimes (\sigma \circ \eta))(\sum_{i=1}^{t} m_i \otimes f_i)] = x.[(Q_M \otimes (\sigma \circ \eta))(\chi_M(m))] = \\
&= x.[((Q_M \otimes (\sigma \circ \eta)) \circ \chi_M)(m)] = x.p_M(m), \qquad \forall m \in M, \qquad \forall x \in K
\end{aligned}$$

Como $Q_M(m) = m$, $\chi_M(m) = m \otimes 1$, para todo $m \in M^K$, e $\sigma(1) = 1$, temos também que

$$\begin{aligned}
p_M(m) &= [Q_M \otimes (\sigma \circ \eta)](\chi_M(m)) = \\
&= (Q_M \otimes (\sigma \circ \eta))(m \otimes 1) = \\
&= Q_M(m) \otimes (\sigma \circ \eta)(1) = m \otimes 1, \qquad \text{para todo} \qquad m \in M^K
\end{aligned}$$

Logo, $(p_M)_{M \in \mathcal{M}(R_0,K)}$ satisfaz (d_1).

Finalmente, para provar (d_2), considere $\lambda : M \longrightarrow N$ um (R_0, K)-morfismo. Devemos mostrar que o retângulo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\chi_M"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \otimes P(K) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes (\sigma \circ \eta)"] \arrow[d, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] & M \otimes R_0 \arrow[r, "Q_M \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] & M^K \otimes R_0 \arrow[d, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] \\
N \arrow[r, "\chi_N"'] & N \otimes P(K) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes (\sigma \circ \eta)"'] & N \otimes R_0 \arrow[r, "Q_N \otimes \mathrm{id}"'] & N^K \otimes R_0
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

O quadrado à esquerda é comutativo pois λ é morfismo de K-módulos. O quadrado do meio é obviamente comutativo. O quadrado à direita é comutativo, pelo que já foi provado.

Logo, a família $(p_M)_{M \in \mathcal{M}(R_0,K)}$ satisfaz (d_2) e portanto vale (d).

(d) $\Rightarrow$ (a)

Sejam $\lambda : M \longrightarrow N$ um epimorfismo de (R_0, K)-módulos e $n \in N^K$. Seja ainda $m \in M$ tal que $\lambda(m) = n$. Então, por (d), existem morfismos de K-módulos p_M e p_N tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "p_M"] \arrow[d, "\lambda"'] & M^K \otimes R_0 \arrow[d, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] \\
N \arrow[r, "p_N"'] & N^K \otimes R_0
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Como $n \in N^K$,

$$(\lambda \otimes \mathrm{id})(p_M(m)) = p_N(\lambda(m)) = p_N(n) = n \otimes 1$$

Considere $\{\alpha_\iota\}_{\iota \in I}$ uma k-base de R_0, com $\alpha_{\iota_0} = 1$.

Então existe $\{m_\iota\}_{\iota \in I} \subset M^K$ tal que

$$p_M(m) = \sum_{\substack{\iota \in J \subset I \\ |J| < \infty}} m_\iota \otimes \alpha_\iota$$

Assim

$$(\lambda \otimes \mathrm{id})(p_M(m)) = \sum_{\substack{\imath \in J \subset I \\ |J|<\infty}} \lambda(m_\imath) \otimes \alpha_\imath = n \otimes 1$$

Da independência linear do conjunto $\{\alpha_\imath\}_{\imath \in I}$, segue-se que

$$\lambda(m_{\imath_0}) = n \qquad \text{e como} \qquad m_{\imath_0} \in M^K, \qquad \text{vale (a)}$$

□

Definição 4.2.3 *Sejam K um grupo algébrico afim e R_0 uma K-módulo álgebra. Vimos que a ação de K em R_0 é linearmente redutiva se e somente se existe um morfismo de K-módulos à direita $\sigma : P(K) \longrightarrow R_0$ tal que $\sigma(1) = 1$. A existência de um tal morfismo é, por sua vez, equivalente à existência de um morfismo de K-módulos à esquerda $\tilde{\sigma} : P(K) \longrightarrow R_0$ tal que $\tilde{\sigma}(1) = 1$, e a passagem de um a outro se faz via composição com $\eta : P(K) \longrightarrow P(K)$, como vimos na demonstração do teorema anterior.*

Corolário 4.2.4 *Seja K um grupo algébrico afim agindo racionalmente em uma variedade algébrica afim X. São equivalentes*

(a) *A ação de K em X é linearmente redutiva*

(b) $H^1(K, M) = (0)$, *para todo* $M \in \mathcal{M}(P(X), K)$

(c) *Existe um morfismo de K-módulos $\sigma : P(K) \longrightarrow P(X)$ tal que $\sigma(1) = 1$.*

(d) *Existe uma família de morfismos de K-módulos $(p_M)_{M \in \mathcal{M}(P(X),K)}$ tal que*

(d_1) $p_M : M \longrightarrow M^K \otimes P(X)$ e $p_M(m) = m \otimes 1$, para todo $m \in M^K$ e para todo $M \in \mathcal{M}(P(X), K)$.

(d_2) Se $\lambda : M \longrightarrow N$ é um morfismo de $(P(X), K)$-módulos então o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_M"] \arrow[d, "\lambda"'] & M^K \otimes P(X) \arrow[d, "\lambda \otimes id"] \\ N \arrow[r, "p_N"'] & N^K \otimes P(X) \end{tikzcd}$$

é comutativo.

(e) $P(X)$ é K-módulo injetivo.

Demonstração. Segue imediatamente da proposição (4.2.1) e do teorema anterior, fazendo $R_0 = P(X)$.

□

Se $R_0 = k$ então $\mathcal{M}(R_0, K) = \mathcal{M}(K)$. Assim, obtemos novamente os resultados das seções (3.1) e (3.2), para grupos linearmente redutivos.

Corolário 4.2.5 *Seja K um grupo algébrico afim definido sobre k. São equivalentes:*

(a) *K é linearmente redutivo*

(b) *$H^1(K, M) = (0)$, para todo $M \in \mathcal{M}(K)$*

(c) *K admite uma integral*

(d) *Existe uma família de operadores de Reynolds $(p_M)_{M \in \mathcal{M}(K)}$, que comuta com os morfismos de K-módulos*

(e) *k é K-módulo injetivo.*

Observação 4.2.6 *É possível dar uma prova direta e bastante simples da equivalência entre a injetividade de R_0 como K-módulo e a existência de um K-morfismo $\sigma : P(K) \longrightarrow R_0$ tal que $\sigma(1) = 1$.*

De fato, se R_0 é K-módulo injetivo, a existência de um tal σ segue imediatamente da consideração do diagrama de K-módulos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k \arrow[r] \arrow[d] & P(K) \\ & R_0 & \end{tikzcd}$$

Reciprocamente, suponhamos que exista um tal σ e consideremos um diagrama de K-morfismos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & N \\ & R_0 & \end{tikzcd}$$

Tensorizando por $P(K)$ e usando o fato de que $R_0 \otimes P(K)$ é K-módulo injetivo (proposição (1.1.12)), concluímos que existe um morfismo de K-módulos

$$g_1 : N \otimes P(K) \longrightarrow R_0 \otimes P(K)$$

tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \otimes P(K) \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "g \otimes \mathrm{id}"] & N \otimes P(K) \arrow[dl, "g_1"] \\ & R_0 \otimes P(K) & \end{tikzcd}$$

Considere $\tilde{g} : N \longrightarrow N \otimes P(K)$ definida por

$$\tilde{g} = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ g_1 \circ \iota$$

onde $\begin{array}{rccc} \iota : & N & \longrightarrow & N \otimes P(K) \\ & n & \longmapsto & n \otimes 1 \end{array}$ e $\mu : R_0 \otimes R_0 \longrightarrow R_0$ é o morfismo produto em R_0.

Então $\tilde{g}$ é morfismo de K-módulos e

$$\begin{aligned} (\tilde{g} \circ f)(m) &= (\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ g_1 \circ \iota \circ f)(m) = \\ &= [\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ g_1 \circ (f \otimes \mathrm{id})](m \otimes 1) = \\ &= [\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ (g \otimes \mathrm{id})](m \otimes 1) = [\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma)](g(m) \otimes 1) = \\ &= \mu(g(m) \otimes \sigma(1)) = g(m), \qquad \forall m \in M \end{aligned}$$

Logo, R_0 é K-módulo injetivo.

□

Se G é um grupo algébrico afim definido sobre k e $K \subset G$ é um subgrupo fechado, então K age racionalmente em $P(G)$. Fazendo $X = G$, no corolário (4.2.4) obtemos, em particular o resultado de *Ferrer*, citado na introdução desta seção, a saber :

Corolário 4.2.7 *Sejam G um grupo algébrico afim definido sobre k e $K \subset G$ um subgrupo fechado. São equivalentes:*

(a) *$P(G)$ é um K-módulo injetivo*

(b) *Existe um morfismo de K-módulos $\sigma : P(K) \longrightarrow P(G)$ tal que $\sigma(1) = 1$.*

Finalmente, aplicando nosso resultado à situação em que U é grupo algébrico unipontente agindo racionalmente em uma variedade algébrica afim X, obtemos o resultado de *Cline, Parshall e Scott.*

Corolário 4.2.8 *Na situação acima, são equivalentes :*

(a) *$P(X)$ é um U-módulo injetivo*

(b) *Existe um morfismo de U-módulos $\sigma : P(U) \longrightarrow P(X)$ tal que $\sigma(1) = 1$.*

□

Concluiremos esta seção, observando que da equivalência entre as afirmações (a) e (c), no teorema (4.2.2), podemos deduzir que na definição de ação linearmente redutiva, basta considerar morfismos de (R_0, K)-módulos com valores em R_0.

Corolário 4.2.9 *Sejam K um grupo algébrico definido sobre k e R_0 uma K-módulo álgebra. São equivalentes:*

(a) *A ação de K em R_0 é linearmente redutiva*

(b) *Para todo $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$ e para todo morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos $\lambda : M \longrightarrow R_0$ existe $m \in M^K$ tal que $\lambda(m) = 1$.*

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Segue imediatamente da proposição (4.1.4), tomando $J = (0)$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Considere
$$\begin{array}{rcl} \epsilon : \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0) & \longrightarrow & R_0 \\ T & \longmapsto & T(1) \end{array}$$

Sabemos que ϵ é morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos. Consequentemente, por (b), existe $\sigma \in [\mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)\ ]^K$ tal que $\epsilon(\sigma) = 1$, ou seja, existe um morfismo de K-módulos $\sigma : P(K) \longrightarrow R_0$ tal que $\sigma(1) = 1$. Pelo teorema (4.2.2), concluímos que a ação de K em R_0 é linearmente redutiva.

□

4.3 Ações Geometricamente Redutivas e "Integrais".

Na seção (3.3), estudamos os grupos geometricamente redutivos, procurando determinar um objeto que fizesse o papel da integral que conhecíamos no caso dos grupos linearmente redutivos. Naquela situação, mostramos que um grupo algébrico K definido sobre k é geometricamente redutivo se e somente se existem $r > 0$ e $I \in S^r(P(K)^*)^K$ tais que $\bar{S}^r(\epsilon)(I) = 1$, onde $\epsilon : P(K)^* \longrightarrow k$ está dada por $\epsilon(\sigma) = \sigma(\mathbb{1})$, $\quad \forall \sigma \in P(K)^*$.

O que faremos aqui é descobrir o objeto correspondente à situação de ações geometricamente redutivas.

Com isso, poderemos mostrar a equivalência entre as noções de ação linearmente redutiva e geometricamente redutiva, no caso que a característica do corpo k é zero e poderemos também demonstrar de modo mais simples alguns do resultados de [4], a que nos referimos na introdução desse capítulo.

Começamos com um resultado de caráter geral, que desempenhará um papel análogo ao do lema (3.3.2).

Lema 4.3.1 *Sejam K um grupo algébrico definido sobre k e R_0 uma K-módulo álgebra fixada. Consideremos $J \subset R_0$ um ideal K-estável e $\lambda : M \longrightarrow R_0/J$ um epimorfismo de (R_0, K)-módulos. Então existe um morfismo de (R_0, K)-módulos*

$$\varphi_\lambda : Hom_k(P(K), R_0) \longrightarrow M$$

tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "\lambda"] & \\ Hom_k(P(K),R_0) \arrow[ur, "\varphi_\lambda"] \arrow[r, "\epsilon"'] & R_0 \arrow[r, "\pi"'] & R_0/J \end{tikzcd}$$

onde π é a projeção canônica e $\epsilon(T) = T(\mathbf{1})$, para todo $T \in Hom_k(P(K), R_0)$.

Demonstração. Seja $m \in M$ tal que $\lambda(m) = 1 + J$.

Consideremos $M_1 = \langle x.m \mid x \in K\rangle_k$ e $\lambda_1 = \lambda \mid_{M_1} : M_1 \longrightarrow R_0/J$.

Então $\lambda(M_1)$ é k-espaço vetorial de dimensão 1, e portanto $\ker \lambda_1$ é subespaço de M_1, de codimensão 1.

Fixemos $\{m_1, \ldots, m_t\}$ uma k-base de M_1 com $\{m_1, \ldots, m_{t-1}\}$ uma base de $\ker \lambda_1$ e $m_t = m$.

Sejam $a_{ij} \in P(K)$, $\quad 1 \leq i, j \leq t$, tais que

$$(1) \qquad x.m_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}(x) m_j, \qquad 1 \leq i \leq t, \quad x \in K$$

Então é fácil verificar que:

$$(2) \qquad a_{tj}.x = \sum_{k=1}^{t} a_{kj}(x) a_{tk}, \qquad 1 \leq j \leq t, \qquad \forall x \in K$$

e

$$(3) \qquad a_{tt} = 1.$$

Definimos $\varphi_\lambda : \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0) \longrightarrow M \qquad$ por

$$\varphi_\lambda(T) = \sum_{j=1}^{t} T(\eta(a_{tj})) m_j$$

Vamos mostrar que

(i) φ_λ é morfismo de (R_0, K)-módulos

(ii) $\lambda \circ \varphi_\lambda = \pi \circ \epsilon$

(i) Sejam $\alpha \in R_0$, $x \in K$ e $T \in \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)$. Então

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda(x(\alpha.T)) &= \sum_{j=1}^{t}[x.(\alpha.T)](\eta(a_{tj}))m_j = \\
&= \sum_{j=1}^{t}\{x.[(\alpha.T)(x^{-1}.\eta(a_{tj}))]\}m_j = \\
&= \sum_{j=1}^{t}\{x.[\alpha.T(x^{-1}.\eta(a_{tj}))]\}m_j = \\
&= \sum_{j=1}^{t}\{x.[\alpha.T(\eta(a_{tj}.x))]\}m_j = \\
&= \sum_{j=1}^{t}\{x.[\alpha.T(\eta(\sum_{k=1}^{t}a_{kj}(x)a_{tk}))]\}m_j = \\
&= \sum_{j=1}^{t}\{x.[\alpha.T(\sum_{k=1}^{t}a_{kj}(x)\eta(a_{tk}))]\}m_j = \\
&= (x.\alpha).\sum_{j=1}^{t}[x.T(\sum_{k=1}^{t}a_{kj}(x)\eta(a_{tk}))]m_j
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
x.[\alpha.\varphi_\lambda(T)] &= x.[\alpha.(\sum_{k=1}^{t}T(\eta(a_{tk}))m_k)] = \\
&= x.\{\sum_{k=1}^{t}[\alpha.T(\eta(a_{tk}))]m_k\} = \\
&= \sum_{k=1}^{t}[(x.\alpha)(x.T(\eta(a_{tk})))](x.m_k) = \\
&= (x.\alpha)\sum_{k=1}^{t}[x.T(\eta(a_{tk}))][x.m_k] = \\
&= (x.\alpha).\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}[x.T(\eta(a_{tk}))][a_{kj}(x)m_j] = \\
&= (x.\alpha)\sum_{j=1}^{t}\{\sum_{k=1}^{t}a_{kj}(x)[x.T(\eta(a_{tk}))]\}m_j = \\
&= (x.\alpha)\sum_{j=1}^{t}\{x.[\sum_{k=1}^{t}a_{kj}(x)T(\eta(a_{tk}))]\}m_j =
\end{aligned}$$

$$= (x.\alpha)\sum_{j=1}^{t}\{x.[T(\sum_{k=1}^{t} a_{kj}(x)\eta(a_{tk}))]\}m_j$$

Logo, $\varphi_\lambda(x.(\alpha.T)) = x.(\alpha.\varphi_\lambda(T))$, para todo $x \in K, \alpha \in R_0$ e $T \in \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)$, e portanto φ_λ é um (R_0, K)-morfismo.

(ii)

$$\begin{aligned}(\lambda \circ \varphi_\lambda)(T) &= \lambda(\sum_{j=1}^{t} T(\eta(a_{tj})))m_j = \\ &= \sum_{j=1}^{t} T(\eta(a_{tj}))\lambda(m_j) = T(\eta(a_{tt}))\lambda(m_t) = \\ &= T(\eta(1))(1+J) = T(1).(1+J) = T(1) + J = \\ &= \epsilon(T) + J = (\pi \circ \epsilon)(T), \qquad \text{para todo} \qquad T \in \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)\ .\end{aligned}$$

□

Com esse resultado, podemos provar a seguinte caracterização das ações geometricamente redutivas.

Teorema 4.3.2 *Sejam K um grupo algébrico definido sobre k e R_0 uma K-módulo álgebra. São equivalentes:*

(a) *A ação de K em R_0 é geometricamente redutiva*

(b) *Existem $r > 0$ e $I \in [R_0 \otimes S^r(Hom_k(P(K), R_0)\ )]^K$ tais que $\bar{S}^r(\epsilon)(I) = 1_{R_0}$, onde*

$$\begin{aligned}\epsilon : Hom_k(P(K), R_0) &\longrightarrow R_0\\ T &\leadsto T(1)\end{aligned}$$

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Considere $\epsilon : \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0) \longrightarrow R_0$ definido por

$$\epsilon(T) = T(1), \quad T \in \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)\ .$$

Como ϵ é morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos, pela proposição (4.1.5), existem $r > 0$ e $I \in [R_0 \otimes S^r(\mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)\ )]^K$ tais que $\bar{S}^r(\epsilon)(I) = 1$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Sejam $M \in \mathcal{M}(R_0, K)$, $J \subset R_0$ um ideal K-estável de R_0 e $\lambda : M \longrightarrow R_0/J$ um epimorfismo de (R_0, K)-módulos. Pelo lema anterior, sabemos que existe um morfismo de (R_0, K)-módulos

$$\varphi_\lambda : \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0) \longrightarrow M$$

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dr, "\lambda"] & \\
\mathrm{Hom}_k(P(K), R_0) \arrow[ur, "\varphi_\lambda"] \arrow[r, "\epsilon"'] & R_0 \arrow[r, "\pi"'] & R_0/J
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Sejam r e I como em (b). Tomando álgebra simétricas e tensorizando por R_0, obtemos o seguinte diagrama comutativo de morfismos de (R_0, K)-módulos.

$$\begin{tikzcd}
 & R_0 \otimes S^r(M) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes (\mu \circ S^r(\lambda))"] & R_0 \otimes R_0/J \arrow[dr, "\mu"] & \\
R_0 \otimes S^r(\mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)) \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes S^r(\varphi_\lambda)"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes (\mu \circ S^r(\epsilon))"'] & & & R_0/J \\
 & R_0 \otimes R_0 \arrow[r, "\mu"'] & R_0 \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $I \in [R_0 \otimes S^r(\mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)\ )]^K$, temos que

$$m = [\mathrm{id} \otimes S^r(\varphi_\lambda)](I) \in [R_0 \otimes S^r(M)]^K$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\bar{S}^r(\lambda)(m) &= [\mu \circ (\mathrm{id}(\mu \circ S^r(\lambda)))]((\mathrm{id} \otimes S^r(\varphi_\lambda))(I)) = \\
&= [\pi \circ \mu \circ (\mathrm{id} \otimes (\mu \circ S^r(\epsilon)))](I) = \\
&= \pi(\bar{S}^r(\epsilon)(I)) = \pi(1) = 1 + J
\end{aligned}$$

Logo, novamente pela proposição (4.1.5), concluímos que a ação de K em R_0 é geometricamente redutiva.

□

Observações 4.3.3

(i) *Como no caso absoluto, a noção de ação geometricamente redutiva envolve a existência de um número natural não nulo para cada epimorfismo de* (R_0, K)*-módulos* $\lambda : M \longrightarrow R_0/J$.

No entanto, a demonstração do resultado anterior, mostra que existe um natural que "serve" para todo morfismo, bastando para isso tomar $r \in \mathbb{N}^*$ *para o qual exista* $I \in [R_0 \otimes S^r(P(K)^*)]^K$ *com* $\bar{S}^r(\epsilon)(I) = 1$. *Vamos ver em seguida que todos esses números naturais podem ser tomados como potências do expoente característico de* k.

(ii) *Quando mostramos na seção (3.3) a existência de uma integral generalizada para grupos geometricamente redutivos, vimos que esse resultado estendia naturalmente a noção de integral para grupos linearmente redutivos bastando, para isso, fazer* $r = 1$, *na proposição (3.3.3).*

Tomando $r = 1$ *no teorema anterior, obtemos um elemento*

$$I \in (R_0 \otimes Hom_k(P(K), R_0)\ )^K$$

tal que $\bar{S}^1(\epsilon)(I) = \mu \circ (id \otimes \epsilon)(I) = 1$.

Se $\nu : R_0 \otimes Hom_k(P(K), R_0) \longrightarrow Hom_k(P(K), R_0)$ *indica o morfismo que dá a estrutura de* R_0*-módulo de* $Hom_k(P(K), R_0)$ *então sabemos que*

$$\sigma = \nu(I) \in Hom_k(P(K), R_0)\ ^K$$

e ainda $\sigma(1) = \nu(I)(1) = [\mu \circ (id \otimes \epsilon)](I) = 1$. *Deste modo, obtemos um morfismo de* K*-módulos* $\sigma : P(K) \longrightarrow R_0$ *tal que* $\sigma(1) = 1$, *ou seja, concluímos que a ação de* K *em* R_0 *é linearmente redutiva (veja teorema (4.2.2)).*

Reciprocamente, se a ação de K *em* R_0 *é linearmente redutiva e* $\sigma : P(K) \longrightarrow R_0$ *é um* K*-morfismo tal que* $\sigma(1) = 1$, *então*

$$I = (1 \otimes \sigma) \in (R_0 \otimes Hom_k(P(K), R_0)\ )^K$$

e

$$\bar{S}^1(\epsilon)(I) = [\mu \circ (id \otimes \epsilon)](1 \otimes \sigma) = \epsilon(\sigma) = \sigma(\mathbb{1}) = 1$$

Além disso, se tomarmos $R_0 = k$ *no teorema anterior, encontramos novamente a proposição (3.3.3).*

□

O teorema anterior mostra ainda que na definição de ação geometricamente redutiva, podemos tomar apenas morfismos de (R_0, K)-módulos com valores em R_0. Esse é o conteúdo do nosso próximo resultado.

Corolário 4.3.4 *Sejam K um grupo algébrico definido sobre k e R_0 uma K-módulo álgebra. São equivalentes:*

(a) *A ação de K em R_0 é geometricamente redutiva*

(b) *Para todo morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos $\lambda : M \longrightarrow R_0$, existem $r > 0$ e $m \in [R_0 \otimes S^r(M)]^K$ tais que $\bar{S}^r(\lambda)(m) = 1$.*

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Segue imediatamente da proposição (4.1.5), fazendo $J = (0)$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Segue diretamente do teorema anterior, aplicando a hipótese ao morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos

$$\begin{array}{rcl} \epsilon : \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0) & \longrightarrow & R_0 \\ T & \rightsquigarrow & T(\mathbf{1}) \end{array}$$

□

Concluímos essa seção mostrando que em característica zero os conceitos de ação linearmente redutiva e geometricamente redutiva coincidem.

Proposição 4.3.5 *Sejam K um grupo algébrico afim definido sobre um corpo algebricamente fechado k,* **de característica zero** *e R_0 uma K-módulo álgebra fixada. Então a ação de K em R_0 é geometricamente redutiva se e somente se é linearmente redutiva.*

Demonstração. Suponhamos que K age em R_0 de modo geometricamente redutivo e seja $\lambda : M \longrightarrow R_0$ um epimorfismo de (R_0, K)-módulos.

Consideremos

$$d = \min\{r \in \mathbb{N}^* \mid \quad (\exists t \in [R_0 \otimes S^r(M)]^K)(\bar{S}^r(\lambda)(t) = 1)\}$$

Pelo lema (4.1.6), sabemos que d é potência do expoente característico de k e portanto, como $\mathrm{car}(k) = 0$, $d = 1$. Assim, existe $t \in (R_0 \otimes M)^K$ tal que $\bar{S}^1(\lambda)(t) = 1$. Como $\begin{array}{rcl} \mu : R_0 \otimes M & \longrightarrow & M \\ (r \otimes m) & \longmapsto & r.m \end{array}$ é morfismo de K-módulos, temos que $m = \mu(t) \in M^K$ e ainda

$$\lambda(m) = (\lambda \circ \mu)(t) = [\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \lambda)](t) = \bar{S}^1(\lambda)(t) = 1$$

pois λ é morfismo de R_0-módulos.

Pelo corolário (4.2.9), a ação de K em R_0 é linearmente redutiva.

A outra implicação vale em característica arbitrária.

□

4.4 Subgrupos, Quocientes e Homomorfismos.

Nesta seção trataremos do comportamendo das noções de ação linearmente redutiva e geometricamente redutiva, com relação a homomorfismos, subgrupos e quocientes.

No que diz respeito a ação de subgrupos, os resultados que apresentaremos refletem propriedades de transitividade das ações redutivas e para prová-las, a caracterização destas em termos da existência de uma "integral", mostrou-se um instrumento eficiente. Além disso, estes teoremas de transitividade permitem mostrar resultados sobre geração finita de anéis de invariantes, para ações linearmente redutivas (veja [4]).

Começamos esta seção com alguns resultados que tratam do comportamento das ações redutivas, em relação a morfismos de álgebras e de grupos.

Proposição 4.4.1 *Sejam K um grupo algébrico e $\varphi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de K-módulo álgebras. Se a ação de K em R é geometricamente redutiva então a ação de K em S é geometricamente redutiva.*

Demonstração. Seja $\lambda : A \longrightarrow B$ um morfismo sobrejetor de (S, K)-módulo álgebras.

Definimos em A e B estruturas de R-módulos via φ; isto é,

$$\begin{array}{rcll} r.a & = & \varphi(r).a & r \in R, \quad a \in A, \quad b \in B \\ r.b & = & \varphi(r).b & \end{array}$$

É fácil ver que com estas estruturas, λ é morfismo de (R, K)-módulo álgebras.

Como a ação de K em R é geometricamente redutiva, então para todo $b \in B^K$, existem $q > 0$ e $a \in A^K$ tais que $\lambda(a) = b^q$ e portanto a ação de K em S é geometricamente redutiva.

□

Observação 4.4.2 *Substituindo a hipótese de redutividade geométrica pela de redutividade linear, na proposição anterior, obtemos um resultado análogo.*

Corolário 4.4.3 *Sejam G um grupo algébrico e $H \subset K$ subgrupos fechados de G. Se H age em G de modo geometricamente redutivo, então H age em K de modo geometricamente redutivo.*

Demonstração. Segue imediatamente da proposição anterior, considerando-se o morfismo de H-módulo álgebras, $\pi : P(G) \longrightarrow P(K)$.

□

Observação 4.4.4 *Vale resultado análogo, se no corolário anterior substituirmos a hipótese de redutividade geométrica por redutividade linear. Nesse caso, como vimos na seção (1.2), a hipótese de que H age em K de modo linearmente redutivo é equivalente ao quociente K/H ser variedade algébrica afim. Logo, o corolário anterior pode ser expresso nos seguintes termos:*

Corolário 4.4.5 *Sejam $H \subset K \subset G$ subgrupos fechados de um grupo algébrico afim G. Se G/H é afim então K/H é afim.*

Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um epimorfismo de grupos algébricos e R_0 uma G'-módulo álgebra fixada. Então R_0 é uma G-módulo álgebra via φ, bastando para isso, definirmos a ação de G em R_0 por

$$x.r = \varphi(x).r, \qquad x \in G, \qquad r \in R_0$$

Proposição 4.4.6 *Na situação acima, se a ação de G em R_0 é geometricamente redutiva então a ação de G' em R_0 é geometricamente redutiva.*

Demonstração. Sejam $\lambda : M \to R_0$ um morfismo sobrejetor de (R_0, K)-módulos.

Como $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um epimorfismo de grupos algébricos, sabemos que todo G'-módulo T pode ser pensado como G-módulo via φ, definindo

$$x.t = \varphi(x).t, \qquad x \in G, \qquad t \in T$$

Então, em particular, M é um G-módulo e $\lambda : M \longrightarrow R_0$ é um morfismo sobrejetor de (R_0, G)-módulos. Como a ação de G em R_0 é geometricamente redutiva, concluímos que existem $r > 0$ e $m \in [R_0 \otimes S^r(M)]^G$ tais que $\bar{S}^r(\lambda)(m) = 1$.

Como $[R_0 \otimes S^r(M)]^G = [R_0 \otimes S^r(M)]^{G'}$ concluímos que a ação de G' em R_0 é geometricamente redutiva, pelo corolário (4.3.4).

□

Passamos agora a estudar o comportamento da noções de ações redutivas com relação a subgrupos e quocientes.

Começamos com um resultado de transitividade a que nos referimos no início desse capítulo e que pode ser encontrado em [4]. Sua prova pode ser simplificada, em função das caracterizações das ações redutivas obtidas nas seções anteriores.

Teorema 4.4.7 *Sejam G um grupo algébrico afim, K um subgrupo fechado de G e R_0 uma G-módulo álgebra. Se a ação de K em $P(G)$ é linearmente redutiva e a ação de G em R_0 é geometricamente redutiva então a ação de K em R_0 é geometricamente redutiva.*

Demonstração. Como a ação de K em $P(G)$ é linearmente redutiva, pelo corolário (4.2.4), sabemos que existe um morfismo de K-módulos $\sigma : P(K) \longrightarrow P(G)$ tal que $\sigma(1) = 1$. Consideremos $\tilde{\sigma} : \mathrm{Hom}_k(P(G), R_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)$ definido por

$$\tilde{\sigma}(T) = T \circ \sigma, \qquad T \in \mathrm{Hom}_k(P(G), R_0)$$

Então $\tilde{\sigma}$ é morfismo de K-módulos. De fato, dados $x \in K$, $T \in \mathrm{Hom}_k(P(G), R_0)$ e $f \in P(K)$, temos

$$\tilde{\sigma}(x.T)(f) \; = \; [(x.T) \circ \sigma](f) = (x.T)(\sigma(f)) =$$

$$\begin{aligned} &= x.[T(x^{-1}.\sigma(f))] = x.[T(\sigma(x^{-1}.f))] = \\ &= x.[(T \circ \sigma)(x^{-1}.f)] = [x.(T \circ \sigma)](f) = \\ &= [x.\tilde{\sigma}(T)](f) \end{aligned}$$

Além disso, como $\sigma(1) = 1$, o diagrama de K-morfismos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_k(P(G), R_0) \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[dr, "\epsilon_G"'] & \mathrm{Hom}_k(P(K), R_0) \arrow[d, "\epsilon_K"] \\ & R_0 \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Por outro lado, como a ação de G em R_0 é geometricamente redutiva, pelo teorema (4.3.2), existem $r > 0$ e

$$I \in [R_0 \otimes S^r(\mathrm{Hom}_k(P(G), R_0)\ )]^G$$

tais que $\bar{S}^r(\epsilon_G)(I) = 1$.

Tomando álgebras simétricas e tensorizando por R_0, a partir do diagrama anterior, obtemos o seguinte diagrama comutativo de (R_0, K)-morfismos.

$$\begin{tikzcd} R_0 \otimes S^r(\mathrm{Hom}_k(P(G), R_0)) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes S^r(\tilde{\sigma})"] \arrow[dr, "\bar{S}^r(\epsilon_G)"'] & R_0 \otimes S^r(\mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)) \arrow[d, "\bar{S}^r(\epsilon_K)"] \\ & R_0 \end{tikzcd}$$

Como

$$I \in [R_0 \otimes S^r(\mathrm{Hom}_k(P(G), R_0)\ )]^G \subset [R_0 \otimes S^r(\mathrm{Hom}_k(P(G), R_0)\ )]^K$$

temos que

$$J = (\mathrm{id} \otimes S^r(\tilde{\sigma}))(I) \in [R_0 \otimes S^r(\mathrm{Hom}_k(P(K), R_0)\ )]^K$$

e

$$\bar{S}^r(\epsilon_K)(J) = [\bar{S}^r(\epsilon_K) \circ (\mathrm{id} \otimes S^r(\tilde{\sigma}))](I) = \bar{S}^r(\epsilon_G)(I) = 1$$

Assim, pelo teorema (4.3.2), concluímos que a ação de K em R_0 é geometricamente redutiva.

□

Corolário 4.4.8 *Sejam G um grupo algébrico afim, K um subgrupo fechado e* normal *em G e R_0 um G-módulo álgebra. Se a ação de G em R_0 é geometricamente redutiva então a ação de K em R_0 é geometricamente redutiva.*

Demonstração. Como K é normal em G, o quociente G/K é afim e portanto pela proposição (1.2.9) e pelo teorema (1.2.10), concluímos que $P(G)$ é K-módulo injetivo. Mas, então pelo corolário (4.2.4) aplicado a $X = G$, deduzimos que a ação de K em $P(G)$ é linearmente redutiva e portanto o resultado segue do teorema anterior.

□

Observação 4.4.9 *Se, no teorema anterior, substituirmos as hipóteses de redutividade geométrica por redutividade linear, obteremos um resultado análogo.*

No caso em que $R_0 = k$, com a ação trivial, sabemos que a ação de G em R_0 é geometricamente redutiva se e somente se G é geometricamente redutivo. Por outro lado, já vimos que a ação de K em $P(G)$ é linearmente redutiva se e somente se o quociente G/K é afim. Assim, do teorema anterior, deduzimos o seguinte resultado de Richardson, *que aparece em[19].*

Corolário 4.4.10 *Sejam G um grupo algébrico afim e K um subgrupo fechado tal que o quociente G/K é afim. Se G é geometricamente redutivo então K é geometricamente redutivo.*

Combinando o teorema (4.4.7) com o corolário (4.4.5), obtemos o seguinte resultado de *Bialynicki-Birula*, veja [1].

Corolário 4.4.11 *Sejam G um grupo algébrico afim e $H \subset K$ subgrupos fechados de G. Suponhamos que o quociente G/K seja afim. Então G/H é afim se e somente se K/H é afim.*

Demonstração. Se G/H é afim, o resultado já foi visto no corolário (4.4.5).

Reciprocamente, se K/H é afim então H age em $P(K)$ de modo linearmente redutivo e como G/K é afim, K age em $P(G)$ de modo linearmente redutivo. Assim pelo teorema (4.4.7), H age em $P(G)$ de modo linearmente redutivo e portanto o quociente G/H é afim.

□

Concluímos este capítulo com o enunciado de uma recíproca parcial do teorema (4.4.7), cuja prova pode ser encontrada em [4].

Teorema 4.4.12 *Sejam G um grupo algébrico afim, K um subgrupo fechado e normal em G e R_0 uma G-módulo álgebra. Se a ação de K em R_0 é geometricamente redutiva e a ação de G/K em R_0^K é geometricamente redutiva então a ação de G em R_0 é geometricamente redutiva.*

Observação 4.4.13 *Novamente, substituindo as hipóteses de redutividade geométrica por redutividade linear, no teorema anterior, vale um resultado análogo.*

Se G é um grupo algébrico afim, indiquemos por G_u seu radical unipotente. Como $G_u \lhd G$ e G/G_u é geometricamente redutivo, aplicando o teorema anterior a essa situação obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.4.14 *Sejam G um grupo algébrico afim e R_0 uma G-módulo álgebra. Então a ação de G em R_0 é geometricamente redutiva se e somente se a ação de G_u em R_0 é geometricamente redutiva.*

Demonstração. Se a ação de G em R_0 é geometricamente redutiva, o resultado segue imediatamente do corolário (4.4.8).

Reciprocamente, suponhamos que a ação de G_u em R_0 seja geometricamente redutiva. Como G/G_u é geometricamente redutivo, a ação de G/G_u em $R_0^{G_u}$ é geometricamente redutiva e portanto o resultado segue do teorema anterior.

□

Bibliografia

[1] Bialynicki-Birula, A., *On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups*, Amer. J. Math. **85** (1963), 577-582.

[2] Cline, E., Parshall, B., Scott, L., *Induced modules and affine quocients*, Math. Ann. **230** (1977), 1-14.

[3] Ferrer, W., *Cohomology of comodules*, Pacific Journal of Mathematics, vol.109, n º 1 (1983),179-213.

[4] Ferrer, W., *Espaços de órbitas de grupos algébricos em variedades afins*, Tese de Livre-docência, IME-USP (1988).

[5] Fogarty, J., *Invariant Theory*, W. A. Benjamin, New York (1969).

[6] Haboush, W. J., *Reductive groups are geometrically reductive*, Ann. of Mat. **107** (1975), 67-83.

[7] Hilbert, D., *Uber die theorie der algebraischen formen*, Math. Ann. **36** (1890), 473-534.

[8] Hochschild, G., *Cohomology of algebraic linear groups*, Illinois Journal of Mathematics, vol.5, n º 3 (September 1961), 492-519.

[9] Hochschild, G., *Rationally injective modules for algebraic linear groups*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol.14, n º 6 (1963), 880-883.

[10] Hochschild, G., *Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, vol.75, New York (1981).

[11] Humphreys, J. E., *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, vol.21, New York (1975).

[12] Munford, D., *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, New York.

[13] Nagata, M., *On the* 14^{th} *Problem of Hilbert*, Am. J. Math. **81** (1959), 766-772.

[14] Nagata, M., *Complete reducibility of rational representations of a matric group*, J. Math. Kyoto Univ. **1** (1961), 87-99.

[15] Nagata, M., *Invariants of a group in an affine ring*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1964), 369-377.

[16] Nagata, M. *Lectures on the* 14^{th} *Problem of Hilbert*, Tata Institute of Fundamental Research, 1965, Lectures on Math. and Physics , Bombay.

[17] Nagata, M., Miyata, T., *Note on semireductive groups*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1964), 379-382.

[18] Newstead, P. E., *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, **51**, Lectures on Math. and Physics , Bombay (1978).

[19] Richardson, R., *Affine cosets spaces of reductive algebraic groups*, Bulletin of the London Math. Soc. **9** (1977), 38-41.

[20] Springer, T. A., *Invariant Theory*, Springer-Verlag, **525**, Lectures Notes in Mathematics (1977).

[21] Weyl, H., *The Classical Groups*, Princeton (1939), 2^{nd} ed. (1946).