

FUNÇÕES DE MORSE: UMA TEORIA
COMBINATÓRIA EM DIMENSÃO TRÊS

Sebastião Antonio Izar

Tese apresentada ao Instituto
de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo,
para a obtenção do grau de
Doutor em Matemática.

Orientador: - PROF. DR. MÁRIO BARONE JÚNIOR

Agradeço aos professores

Alcilêa Augusto Homem de Mello

Ângelo Barone Netto

Mário Barone Júnior

Maurício Matos Peixoto

pelo estímulo,

pelo apoio e

pela confiança a mim dedicados.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	I
ABSTRACT	IV
PARTE I - <u>REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES DE MORSE EM DIMENSÃO TRÊS</u>	
§0. - Introdução à Parte I	3
§1. - Funções de Morse, Cobordismos e Equivalência de Funções	5
§2. - Grafo de Reeb de uma Função de Morse	35
§3. - Diagrama de Heegaard de uma Função de Morse em Dimensão Três	45
§4. - Representação de Funções de Morse em Dimensão Três	65
PARTE II - <u>EQUIVALÊNCIA DE REPRESENTAÇÕES</u>	
§0. - Introdução à Parte II	93
§1. - Funções de Gênero Zero e Rearranjamentos	95
§2. - Significado Geométrico dos Elementos de \sum_f^{ξ}	109
§3. - Equivalência de Representações	119
§4. - Exemplos e Complementos	139
BIBLIOGRAFIA	153

F U N Ç Õ E S D E M O R S E :

U M A T E O R I A C O M B I N A T Ó R I A E M D I M E N S ã O T R Ê S

INTRODUÇÃO

Nosso objetivo com este trabalho é o de estudar funções diferenciáveis sobre uma variedade fechada e conexa de dimensão três, sob o ponto de vista combinatório.

Por este tema entendemos o seguinte:

- i) Selecionar uma classe de funções juntamente com uma relação de equivalência;
- ii) definir uma classe de diagramas combinatórios e introduzir em tal classe uma relação de equivalência;
- iii) associar a cada função da classe considerada, um diagrama combinatório;
- iv) dado um diagrama, construir uma função que o origina e mostrar que duas funções construídas a partir de um mesmo diagrama são equivalentes; e
- v) Mostrar que duas funções são equivalentes se, e somente se tem diagramas equivalentes.

A classe de funções escolhida foi a das Funções de Morse estáveis, que constituem um subconjunto aberto e denso no espaço das funções diferenciáveis $C^\infty(M, \mathbb{R})$ com a topologia C^∞ e a relação de equivalência é a conjugação por difeomorfismos: $f, g: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes se existem difeomorfismos $h: M \longrightarrow M'$ e $k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, k crescente, tais que $k \circ g = f \circ h$; assim i) está completo.

Representaremos uma função de Morse sobre uma variedade fechada e conexa por um diagrama combinatório D que é um par $D=(\Gamma, \Sigma)$, onde Γ é o grafo de Reeb da função e Σ é um diagrama de Heegaard para M^3 com curvas adicionais. O grafo de Reeb foi definido e considerado em nossa tese de mestrado (FUNÇÕES DE MORSE: UM TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO EM DIMENSÃO DOIS) e para o problema acima, em dimensão dois, se mostrou suficiente.

O trabalho é constituído de duas partes: a primeira parte é dedicada à representação de funções de Morse pelo diagrama (Γ, Σ) e nela os pontos (i)-(v) são tratados tomando-se em (ii) uma definição provisória (não combinatória) para a equivalência de diagramas; e a segunda parte trata da substituição da referida definição de equivalência de diagramas por uma definição combinatória.

Na Parte I destacamos as definições dos diagramas Γ e Σ associados a $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e o Teorema principal que é o seguinte:

Teorema A: - "Duas funções de Morse construídas a partir de um mesmo diagrama (Γ, Σ) são equivalentes."

As definições e os resultados da Teoria de Morse que necessitamos são dados no §1 e os Corolários considerados são parte integrante da demonstração do Teorema acima que aparece no §4. Os parágrafos dois e três tratam das definições dos diagramas associados a $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Para isso, na parte II, introduzimos a definição de equivalência combinatória entre diagramas e demonstramos o teorema principal que é o seguinte:

Teorema B: - " f e g são equivalentes se, e somente se têm diagramas combinatorialmente equivalentes."

Estudamos funções diferenciáveis cujas superfícies de nível são reuniões disjuntas de esferas e também fazemos uma interpretação geométrica dos elementos do diagrama de Heegaard, associado a uma f .

Ressaltamos que neste trabalho não obtemos uma classificação das funções de Morse em dimensão três, mas uma redução do problema à classificação dos diagramas de Heegaard; em dimensão dois as funções são classificadas pelo grafo de Reeb, a menos de equivalência. Em dimensão três poderíamos obter resultados parciais para a classificação; definimos o gênero de uma função de Morse $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como o gênero da superfície de nível regular de f , conexa, de maior gênero. As funções de gênero zero (M orientável) são classificadas no parágrafo 1; poder-se-ia classificar as de gênero um, mas as de gênero dois, e mesmo as de gênero dois sobre a esfera S^3 , etc..., se constituem num problema extremamente difícil: necessitaríamos de uma classificação dos diagramas de Heegaard ou de uma classificação de nós e entrelaçamentos.

Finalmente acrescento meus sinceros agradecimentos aos professores Alcilêa A.H. de Mello, Ângelo Barone Netto e Mário Barone Júnior pelos Seminários e pelas várias sugestões que me deram, ao grupo de Sistemas Dinâmicos e Topologia Diferencial, aos meus colegas do IME-USP, em especial a Paulo F. Leite e Zara I. Abud; e à Antonia do Setor de Publicações do IME-USP pela eficiência e dedicação na difícil tarefa da datilografia deste trabalho.

São Paulo, outubro de 1983.

S.A. Izar

ABSTRACT

The subject of this work is the study of differentiable functions defined on closed 3-dimensional manifolds, from the combinatorial viewpoint.

My approach could be described as follows:

- i) to choose a class of functions with an equivalence relation;
- ii) to define a combinatorial class of diagrams with an equivalence relation;
- iii) to associate to each function, a combinatorial diagram;
- iv) given a diagram, to construct a function which originates to it, and prove that two such functions are equivalent, and
- v) to show that two functions are equivalent if, and only if their diagrams are equivalent.

I work with Morse functions and the relation is the conjugation by diffeomorphisms: if $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$, I say that $f \sim g$ if there exists $h: M \rightarrow M$ and $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescent such that $k \circ f = g \circ h$.

The diagram associated to $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ is a pair $D = (\Gamma, \Sigma)$ such that Γ is the Reeb's graph of f and Σ is a Heegaard diagram for M^3 with additional curves.

The work is divided in two parts: in Part I i-v is shown with a non combinatorial definition of the equivalence of diagrams, and in Part II I give the combinatorial definition and this completes i-v.

PARTE I

REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES DE MORSE
EM DIMENSÃO TRÊS

§0. Introdução à Parte I

Nesta Parte I representamos combinatorialmente uma função de Morse sobre uma variedade fechada e conexa 3-dimensional.

Tal representação de $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ será feita através de um par de diagramas (Γ, Σ) , onde Γ é um grafo e Σ é um diagrama de Heegaard com curvas adicionais para M^3 . O Teorema principal é o Teorema A cujo enunciado é dado na INTRODUÇÃO e cuja demonstração, que é bastante extensa, ocupa o §4 todo desta parte. Os lemas, definições e resultados necessários para tal prova são dados nos três primeiros parágrafos.

A idéia central da demonstração é a de considerar a variedade M^3 como reunião disjunta de subvariedades com bordo, saturadas por f , cada uma das quais, contendo um único ponto crítico da função de Morse; a conjugação nestas subvariedades é obtida no parágrafo um.

No §1 fazemos uma exposição do que se necessita para os Teoremas Fundamentais da Teoria de Morse em dimensão finita (Teoremas 1.12 e 1.13) e obtemos os Corolários que são parte integrante da demonstração do Teorema A. Também obtemos resultados que terão aplicação na Parte II: a proposição 1.17. Enunciamos os Teoremas do Rearranjamento e Cancelamento

4.

to: o primeiro é útil na Parte II e o segundo é fundamental para a construção de exemplos. Ainda no §1, fazemos uma convenção sobre os campos utilizados neste trabalho e enunciamos o Teorema 1.28 que permitirá, na Parte II, classificarmos (módulo diagramas de Heegaard) os campos pseudo gradientes para uma função de Morse $f:M^3 \rightarrow \mathbb{R}$. A referência fundamental para este parágrafo (e para o trabalho todo) é

Milnor, J.W. Lectures on the H-cobordism Theorem
Mathematical Notes - Princeton University Press 1965

No §2 definimos o grafo de Reeb de uma função de Morse e enunciamos algumas proposições. A referência para tal parágrafo é nossa tese de mestrado, onde os detalhes são for-
necidos.

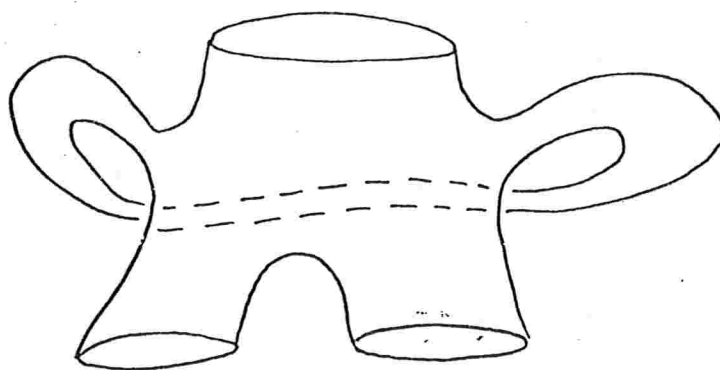
O §3 trata da construção de um diagrama de Heegaard para $f:M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ juntamente com um campo de vetores pseudo-gradiente para $f:3,1$, isto corresponde ao item (iii) do pro-
blema colocado no início da INTRODUÇÃO. O Teorema 3.6, as definições 3.10 e 3.11 são dados visando (ii).

No §4, além da prova do Teorema 4.3. = Teorema A que se constitui na parte não trivial de iv), o Teorema 4.1. com-
pleta ii) e com uma definição provisória para a equivalência de diagramas completamos iv) e mostramos v).

§1 - Funções de Morse, Cobordismos Elementares e Equivalência de Funções

Definição 1.0.: - Uma triada diferenciável é uma terna (W, V, V') , onde W é uma n variedade diferenciável compacta cujo bordo ∂W é reunião disjunta das subvariedades fechadas (compactas e sem bordo) V e V' .

Dizemos que W é um cobordismo entre V e V' que são ditas cobordantes.



Definição 1.1.: - Uma função de Morse sobre uma triada $(W; V, V')$ é uma função diferenciável $f: W \rightarrow [a, b]$ tal que:

- i) $f^{-1}(a) = V, f^{-1}(b) = V'$;
- ii) todos os pontos críticos de f são interiores e não degenerados, isto é, se p é ponto crítico de f , então $\det.(H_p f) \neq 0$, onde $H_p f$ é a matriz hessiana de f em p (em relação a um sistema de coordenadas) e
- iii) f é injetiva quando restrita ao conjunto de seus pontos críticos.

6.

Nota: Definimos em 1.1. função de Morse para uma tríada como uma função diferenciável entre ternas de variedades (uma variedade com duas subvariedades distinguidas):

$$f:(W;V,V') \longrightarrow ([a,b],a,b).$$

Uma variedade fechada (compacta e sem bordo) pode ser vista como uma tríada $(M;\emptyset,\emptyset)$ e, nestas condições, uma função de Morse sobre a tríada é tal que $f(a)=\emptyset$ e $f^{-1}(b)=\emptyset$.

Ao longo deste trabalho, quando dizemos "seja $f:M \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $f:M \longrightarrow [a,b]$ uma função de Morse sobre M ", sem menção a ternas de variedades, tomamos f sobre M verificando as condições ii) e iii) da Definição 1.1., mais a condição de f ser constante em cada componente conexa do bordo de M .

Teorema 1.2.: - Sobre uma tríada diferenciável o conjunto das funções de Morse é aberto e denso no espaço $C^\infty(M,\mathbb{R})$ com a topologia C^∞ .

Demonstração: [Hi].

A forma local de uma função de Morse é completamente de terminada: Se p é um ponto regular de $f:W \longrightarrow \mathbb{R}$ a forma local das submersões, aplica-se, e se p é um ponto crítico, tem-se o seguinte

Lema 1.3.: - (Lema de Morse) Se $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e $p \in W$ é um ponto crítico não degenerado de f , então existe uma carta (U, ϕ) para p em W tal que

$$f \circ \phi^{-1}(x) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{\lambda+1}^n x_i^2,$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $n = \dim W$. O inteiro λ não depende da particular carta (U, ϕ) e é chamado o índice do ponto crítico p relativamente a f . Denotamo-lo por $\text{ind}_f p$.

A prova desse lema pode ser vista em [M]₂ ou [I].

A carta (U, ϕ) do Lema é chamada uma carta de Morse para p em W relativamente a f .

Como consequência do Lema de Morse segue-se que se $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse para a tríada $(W; V, V')$, então seus pontos críticos são isolados e portanto formam um conjunto finito.

Definimos agora o tipo de campos de vetores considerados neste trabalho.

Definição 1.4.: - Seja f uma função de Morse para a tríada $(W; V, V')$. Um campo de vetores $\xi: W \rightarrow TW$ é pseudo-gradiente para f se:

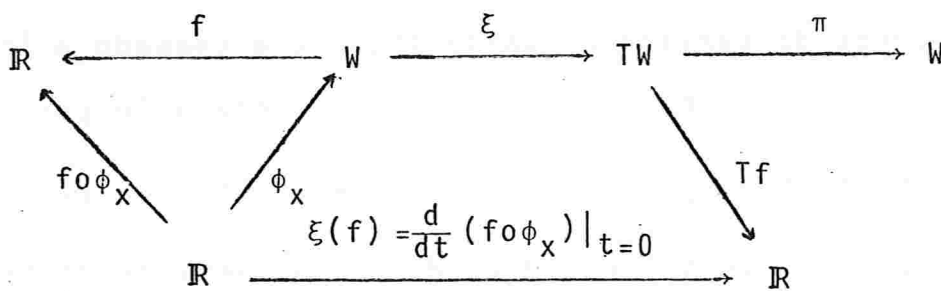
- i) $\xi(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_x) \Big|_{t=0} > 0$ ao longo do complemento do conjunto dos pontos críticos de f , onde ϕ_x é a trajetória de ξ que passa por x para $t=0$.

8.

ii) dado qualquer ponto crítico p de f , existem coordenadas $(x,y)=(x_1,\dots,x_\lambda,y_{\lambda+1},\dots,y_n)$ numa vizinhança U de p tais que

$$f(x)=f(p)-|x|^2+|y|^2$$

e ξ tem coordenadas $(-x,y)$ ao longo de U .



Demonstra-se (vide [M]₁, pag. 20) que para $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse, existe um campo pseudo gradiente.

Se $V=V'=\emptyset$ e ξ é um campo pseudo-gradiente para $f: W \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos por

$$\phi: \mathbb{R} \times W \rightarrow W$$

$$\phi(t,x) = \phi_x(t)$$

o grupo

a 1-parâmetro de difeomorfismos de W gerado por ξ .

Definição 1.5.: - Uma triada $(W;V,V')$ difeomorfa a $(V \times [0,1]; V \times 0, V \times 1)$ é chamada um cobordismo produto.

Proposição 1.6.: - $(W;V,V')$ é um cobordismo produto se, e so mente se admite uma função de Morse sem pontos críticos.

Corolário: - O bordo ∂W de uma variedade compacta com bordo tem uma vizinhança colarinho, isto é, uma vizinhança difeomorfa a $\partial W \times [0,1]$.

Demonstração de 1.6.: - Se $(W;V,V') \approx (V \times [0,1]; V \times 0, V \times 1)$, a

função $\begin{cases} f: V \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x,t) = t \end{cases}$ satisfaz a condição.

Reciprocamente, seja ξ um campo pseudo-gradiente para $f: W \longrightarrow [0,1]$. Normalizando o campo, podemos supor que $\xi(f) \equiv 1$ sobre W , dado o fato de que f não tem singularidades. Como $\xi(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi) \equiv 1$, segue-se que $f \circ \phi(t) = t + c$ e mudando-se o parâmetro tem-se $f(\psi(s)) = s$, onde ϕ é qualquer curva integral do campo de vetores ξ .

O difeomorfismo

$$h: V \times [0,1] \longrightarrow W$$

$$h(y_0, s) = \psi_{y_0}(s)$$

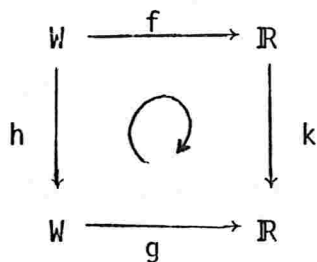
10.

cujo inverso é dado por

$$h^{-1}(y) = (\psi_y(o), f(y))$$

demonstra a proposição. △

Definição 1.7.: - Se $f, g: W \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis dizemos que f é equivalente a g e denotamos $f \sim g$, se existem difeomorfismos $h: W \rightarrow W$ e $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente, tais que $k \circ f = g \circ h$



Claramente a relação acima é de equivalência

Com as notações de 1.7., os resultados abaixo são imediatos:

- i) $k \circ f \sim f$, $g \circ h \sim g$;
- ii) p é ponto crítico de $f \iff h(p)$ é ponto crítico de $g \iff p$ é ponto crítico de $k \circ f$;
- iii) $\text{ind}_{k \circ f} p = \text{ind}_g h(p) = \text{ind}_f p$.

Proposição 1.8.: - Se $f, g: W \rightarrow \mathbb{R}$ são funções sem pontos críticos para a tríada $(W; V, V')$, então $f \sim g$.

Demonstração: - Segue diretamente de 1.6. △

O nosso objetivo com o que se segue é uma proposição análoga à 1.8. para tríadas que admitem funções de Morse com um único ponto crítico.

A proposição em questão é consequência do Teorema Fundamental da Teoria de Morse que passamos a tratar.

Definição 1.9.: - Seja V^{n-1} uma variedade fechada de dimensão $n-1$ e $\phi: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V^{n-1}$ um mergulho, aqui $S^{\lambda-1}$ é a esfera unitária de centro na origem e raio 1 em \mathbb{R}^λ , $B^{n-\lambda}$ é o disco aberto unitário de centro na origem de $\mathbb{R}^{n-\lambda}$.

Sobre o espaço $V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times 0) + B^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ consideremos a relação de equivalência que identifica $\phi(u, \theta v)$ com $(\theta u, v)$ onde $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$ e $0 < \theta < 1$.

Se V' é uma variedade diferenciável difeomorfa a

$$\chi(V, \phi) = \frac{V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times 0) + B^\lambda \times S^{n-\lambda-1}}{\sim},$$

V' é obtida de V por uma cirurgia do tipo $(\lambda, n-\lambda)$.

12.

Observamos que uma cirurgia do tipo $(\lambda, n-\lambda)$ sobre uma $n-1$ variedade fechada substitui uma esfera mergulhada em V de dimensão $\lambda-1$ por uma esfera de dimensão $n-\lambda-1$.

Exemplos 1.10.: - (i) Por uma cirurgia do tipo $(0, n)$ sobre V obtem-se a reunião disjunta $V+S^{n-1}$ e por uma cirurgia do tipo $(n, 0)$ sobre V (V deve ter uma componente conexa que $\bar{e} S^{n-1}$) obtem-se V desprovida de uma c3pia de S^{n-1} . Isto segue do fato que $\phi: S^{n-1} \times B^0 \longrightarrow V$ sendo mergulho, \bar{e} um difeomorfismo de uma componente conexa de V com S^{n-1} .

ii) Cirurgias do tipo $(\lambda, 2-\lambda)$ - Utilizamos o seguinte resultado, cuja demonstração encontra-se no apêndice de $[M]_3$.

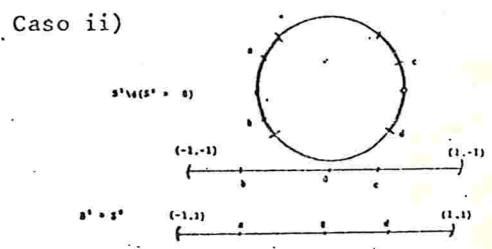
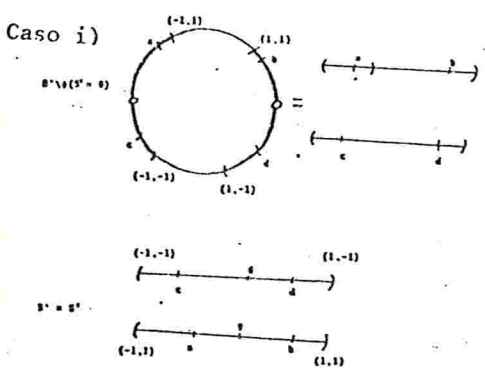
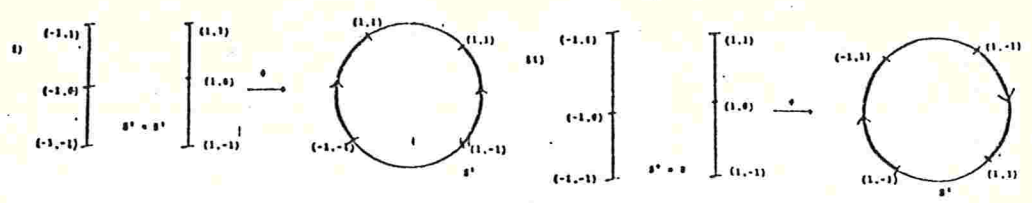
Proposição: - S^1 \bar{e} a \bar{u} nica variedade fechada e conexa de dimensão 1 a menos de difeomorfismo.

Se V \bar{e} uma 1-variedade fechada, ent3o V \bar{e} reuni3o disjunta de c3pias de S^1 :

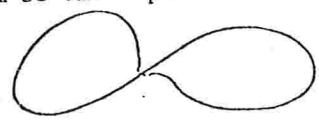
$$V = \underbrace{S^1 + \dots + S^1}_{k \text{ vezes}}.$$

Seja V' obtida de V por uma cirurgia do tipo $(\lambda, 2-\lambda)$.

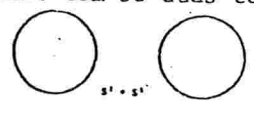
Para $\lambda = 0$ ou 2 , (i) mostra que V' \bar{e} reuni3o disjunta de $k+1$ ou $k-1$ c3pias de S^1 , respectivamente, e para $\lambda = 1$, temos:



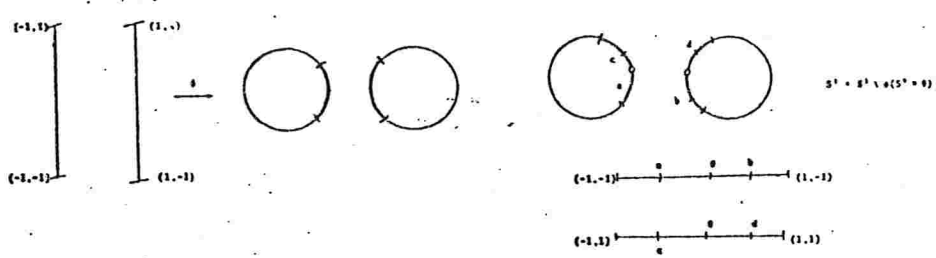
Tem-se uma cópia de S^1 .



Neste caso, tem-se duas cópias de S^1 .



Caso iii)



e tem-se $\chi(S^1 + S^1, \phi) = S^1$.

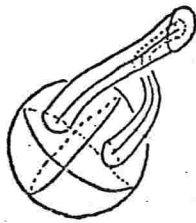
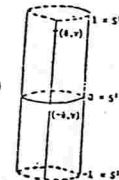
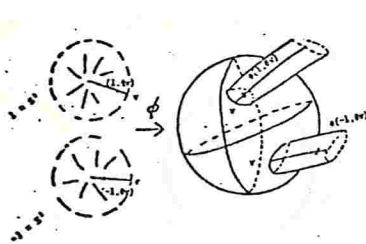
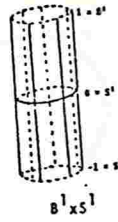
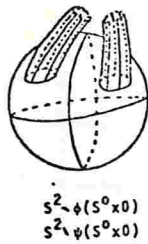
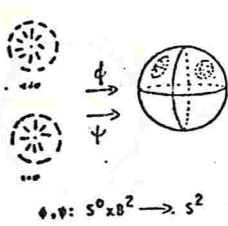
As demais componentes de V nos três casos não são alteradas.

iii) Por uma cirurgia do tipo (1,2) sobre a esfera S^2 obtem-se o toro ∂T_1 ou a garrafa de Klein ∂K_1

Com efeito,

$$\phi: S^0 \times B^2 \longrightarrow S^2$$

14.



Definição 1.11.: - O Mergulho Característico - Seja $(W; V, V')$ uma tríada com função de Morse $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ e campo pseudo-gradiante ξ .

Suponha que $p \in W$ é um ponto crítico para f ; $V_0 = f^{-1}(C_0)$, $V_1 = f^{-1}(C_1)$ são níveis regulares tais que $C_0 < C = f(p) < C_1$ e que c é o único valor crítico no intervalo $[C_0, C_1]$.

Existe uma vizinhança U_n de p em W e um difeomorfismo $\alpha: B_{2\varepsilon}^n \rightarrow U(B_{2\varepsilon}^n = n\text{-bola de raio } 2\varepsilon)$ tal que

$$f \circ \alpha(x, y) = C - |x|^2 + |y|^2,$$

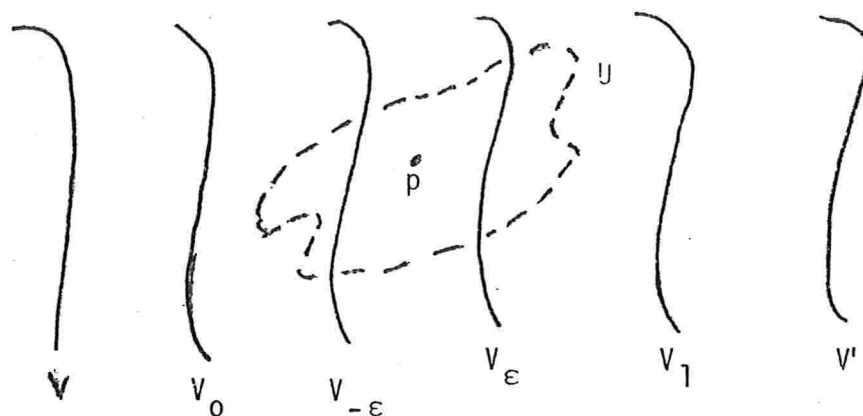
de modo que α tem coordenadas $(-x, y)$ ao longo de U , para algum

$$\lambda, 0 \leq \lambda \leq n \text{ e } \varepsilon > 0.$$

Sejam

$$V_{-\epsilon} = f^{-1}(C - \epsilon^2) \text{ e } V_{\epsilon} = f^{-1}(C + \epsilon^2)$$

e assumamos que $4\epsilon^2 < \min(|C - C_0|, |C - C_1|)$, de modo que $V_{-\epsilon}$ fica entre V_0 e $f^{-1}(C)$ e V_{ϵ} fica entre $f^{-1}(C)$ e V_1 .



O mergulho característico \bar{a} esquerda

$$\phi_L: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \longrightarrow V_0$$

\bar{a} é obtido como segue: primeiro defina um mergulho

$\phi: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \longrightarrow V_{-\epsilon}$ por $\phi(u, \theta v) = \alpha(\epsilon u \cos h \theta, \epsilon v \sin h \theta)$ para $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$ e $0 \leq \theta < 1$. Passando pelo ponto $\phi(u, \theta v) \in V_{-\epsilon}$ a curva integral de ξ é uma curva não singular que intercepta V_0 no ponto $\phi_L(u, \theta v)$.

A esfera \bar{a} esquerda S_L de p em V_0 é a intersecção de V_0 com as curvas integrais de ξ indo para p . O disco \bar{a} esquerda D_L é um disco diferenciavelmente mergulhado com bordo S_L definido como a reunião dos segmentos das curvas integrais começando em S_L e terminando em p .

16.

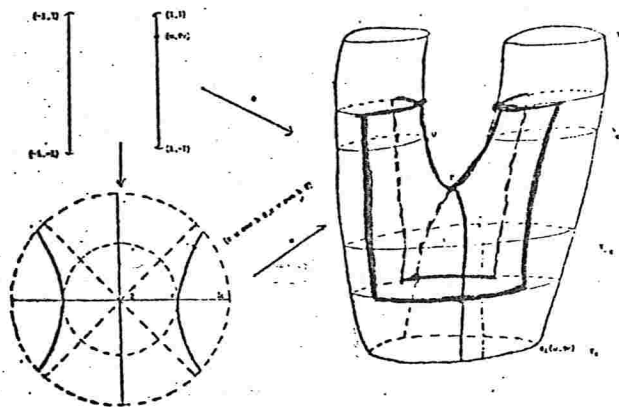
Similarmente se define o mergulho característico \tilde{a} direita

$$\phi_R: B^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \longrightarrow V_1,$$

obtido de

$\phi: B^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \longrightarrow V_\epsilon$, $(\theta, \mu, \nu) \mapsto \alpha(\epsilon \mu \sin h \theta, \epsilon \nu \cos h \theta)$ e transladando até V_1 .

Tem-se que $S_R = \phi(0 \times S^{n-\lambda-1})$ que é bordo do disco $D_R =$ reunião dos segmentos das curvas integrais que começam em p e terminam em S_R .



△

Note que as esferas \tilde{a} esquerda S_L e \tilde{a} direita S_R bordam discos diferenciavelmente mergulhados D_L e D_R , respectivamente, que são as variedades instável e estável do ponto crítico p relativamente ao campo de vetores ξ na variedade $f^{-1}[C_0, C_1]$.

Teorema 1.12.: - Se $V' = \chi(V, \phi)$ pode ser obtida de V por uma cirurgia do tipo $(\lambda, n-\lambda)$, então existe uma triada $(W; V, V')$ e uma função de Morse $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ com exatamente um ponto crítico de índice λ .

Demonstração: - (esboço de $[M]_1$, pág 30) A variedade W será denotada por $\omega(V, \phi)$ e é obtida assim: a partir da reunião disjunta

$$(V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times 0)) \times B^1 + L_\lambda,$$

onde

$$L_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{n-\lambda} \mid -1 \leq -|x|^2 + |y|^2 \leq 1 \quad \text{e}$$

$$|x||y| < \sin h \mid \cos h\},$$

para cada $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$, $0 < \theta < \pi$ e $c \in B^1$, identifique o ponto $(\phi(u, \theta v), c)$ do primeiro somando com o único ponto $(x, y) \in L_\lambda$ tal que:

- i) $-|x|^2 + |y|^2 = c$;
- ii) (x, y) está sobre a trajetória ortogonal que passa pelo ponto $(u \cos h\theta, v \sin h\theta)$.

A função $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(z, c) = c \quad \text{para } (z, c) \in (V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times 0)) \times B^1,$$

$$f(x, y) = -|x|^2 + |y|^2 \quad \text{para } (x, y) \in L_\lambda.$$

18.

Definição 1.13.: - Um cobordismo elementar \bar{e} é uma tríada que admite uma função de Morse com um único ponto crítico.

Teorema 1.14.: - Seja $(W;V,V')$ um cobordismo elementar com mergulho característico $\phi_L: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \longrightarrow V$. então

$$(W;V,V') \approx (\omega(V_1, \phi_L); V_1, \chi(V_1, \phi_L)).$$

Demonstração: - (esboço de $[M]_1$, pág. 30). Um difeomorfismo entre $(W_\epsilon; V_{-\epsilon}, V_\epsilon)$ e $(\omega(V_1, \phi_L); V_1, \chi(V_1, \phi_L))$, $k: \omega(V, \phi) \longrightarrow W_\epsilon$ é dado por: se

$$(x, t) \in V_{-\epsilon} \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times 0) \times B^1, \quad k(z, t)$$

é o único ponto em W_ϵ que está sobre a curva integral que passa por z e tal que

$$f(k(z, t)) = \epsilon^2 t + c; \quad \text{se } (x, y) \in L_\lambda$$

$k(x, y) = \alpha(\epsilon x, \epsilon y)$. Aqui $W_\epsilon = f^{-1}[\bar{c} - \epsilon^2, \bar{c} + \epsilon^2]$, $V_{\pm\epsilon} = f^{-1}(\bar{c} \pm \epsilon^2)$, ϵ satisfaz as condições da definição de mergulho característico.

O teorema segue do fato que $W_\epsilon \approx W$.

(Vide [I], pág. 63). A

Proposição 1.15.: - Se $(W;V,V')$ é um cobordismo elementar com função de Morse f , mergulho característico $\phi: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \longrightarrow V$ e $k: \omega(V, \phi) \longrightarrow W_\epsilon$ e g são o difeomorfismo do Teorema 1.14

e a função de Morse do Teorema 1.12., então $g = \ell \circ f \circ k$, onde

$$\ell(t) = \frac{t-c}{\varepsilon^2}$$

Demonstração: - O diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} W_\varepsilon & \xrightarrow{f} & [C-\varepsilon^2, C+\varepsilon^2] \xrightarrow{\ell} [-1, 1] \\ k \uparrow & & \nearrow g \\ \omega(V, \phi) & & \end{array}$$

$$\ell \circ f \circ k(z, t) = (\varepsilon^2 t + c) = \frac{\varepsilon^2 t + c - c}{\varepsilon^2} = t = g(z, t), \quad e$$

$$\ell \circ f \circ k(x, y) = \ell \circ f \circ \alpha(\varepsilon x, \varepsilon y) = \ell(C - \varepsilon^2 |x|^2 + \varepsilon^2 |y|^2) = -|x|^2 + |y|^2 = g(x, y).$$

△

Proposição 1.16.: - Seja V uma $n-1$ variedade fechada e $\phi, \phi': S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V$ mergulhos tais que existe um difeomorfismo $k: V \rightarrow V$ com $k \circ \phi = \phi'$. Então k se estende a um difeomorfismo $h: \omega(V, \phi) \rightarrow \omega(V, \phi')$ com a propriedade de que se f e g são as funções de Morse do Teorema 1.12., então $f = g \circ h$.

Demonstração: - Com efeito, a aplicação

$$(k, \tau_{\overline{B}^1}) + \tau_{L_\lambda}: V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \overline{B}^1) \times \overline{B}^1 + L_\lambda \rightarrow V \setminus \phi'(S^{\lambda-1} \times \overline{B}^1) \times \overline{B}^1 + L_\lambda$$

é compatível com a relação de equivalência:

$$(\phi(u, \theta v), c) \sim (x, y) \iff -|x|^2 + |y|^2 = c \quad e \quad (x, y)$$

está sobre a trajetória ortogonal que passa pelo ponto

$$(u \cos h\theta, v \sin h\theta) \iff (\phi'(u, \theta v), c) \sim (x, y).$$

20.

Logo k se estende a um difeomorfismo

$$h: \omega(V, \phi) \longrightarrow \omega(V, \phi')$$

obtido passando-se ao quociente a aplicação acima.

h conjugã as funções. De fato,

$$g(h(z), t) = g(k(z), t) = t = f(z, t) \text{ , e } g(h(x, y)) = g(x, y) = \\ = -|x|^2 + |y|^2 = f(x, y) \text{ , donde } f = g \circ h$$

△

Notas 1.17: i) O índice de um cobordismo elementar $(W; V, V')$ é, por definição, o índice do ponto crítico de uma função de Morse $f: W \longrightarrow \mathbb{R}$ com um único ponto crítico.

A definição acima não depende da particular função sobre W , pois por $[M]_1$ pág. 32, $H(W; V)$ é isomorfo a \mathbb{Z} na dimensão λ e zero fora. Um gerador de $H_\lambda(W; V)$ é representado por D_L .

ii) Se o índice de $(W; V, V')$ é λ , então o índice de $(W; V', V)$ é $n - \lambda$, onde $n = \dim W$.

Isto segue do fato que $-f$ é função de Morse para $(W; V', V)$ com índice $n - \lambda$ se f tem índice λ .

iii) Vizinhanças Tubulares - Seja S uma subvariedade de V . Uma vizinhança tubular de S em V consiste de um fibrado vectorial $(E; \pi, S)$, uma vizinhança aberta Z da secção nula de E

$$f: Z \longrightarrow U$$

de Z sobre um aberto U de V contendo S tal que

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ z \nearrow & & \searrow f \\ S & \xrightarrow{\quad} & V \end{array}$$

é comutativo, isto significa que identificando-se S com a secção nula $f|_S = 1_S$.

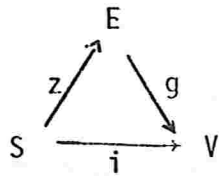
Diz-se que a vizinhança tubular é total se $Z = E$ e parcial caso contrário. A aplicação f é chamada aplicação tubular e U é um tubo contendo S .

Mostra-se que existe uma vizinhança tubular de S em V e também que toda vizinhança tubular parcial contém uma vizinhança tubular total no seguinte sentido: existe um difeomorfismo $\phi: E \longrightarrow Z_1$, onde Z_1 é uma vizinhança aberta de S em Z , tal que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & Z_1 \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & S & \end{array}$$

é comutativo. Assim

22.



é total, onde $g = f|_{Z_1}$ o ϕ .

Uma isotopia de vizinhanças tubulares de S em V é uma isotopia de mergulhos $F: Z \times I \longrightarrow V$ tal que $F(.,t)$ é aplicação tubular de S em V .

O Teorema de unicidade a menos de isotopia para vizinhanças tubulares é enunciado assim:

"Sejam $(E; \pi, S)$ e (E_1, π_1, S) fibrados vetoriais, $f: E \longrightarrow V$ e $g: E_1 \longrightarrow V$ aplicações tubulares de S em V . Então existe uma isotopia de vizinhanças tubulares e um isomorfismo de fibrados vetoriais $\xi: E \longrightarrow E_1$ tais que $F_0 = f$ e $F_1 = g \circ \xi$."

A referência utilizada até aqui foi [L], pág. 73-78.

O Teorema abaixo encontra-se em [B-J] pág. 131 e dá a unicidade de vizinhanças tubulares a menos de isotopia ambiente:

"Seja S uma subvariedade compacta de uma variedade V , sejam $f_0, f_1: E \longrightarrow V$ aplicações tubulares para S e sejam também U_0 e U_1 os tubos correspondentes de S . Então existe uma difeotopia H de V que conserva S fixa, tal que H_1 aplica U_0 sobre U_1 respeitando as fibras. Além disso, pode-se tomar H de modo que os pontos fora de um subconjunto compacto de V ficam fixos."

iv) Uma cirurgia do tipo $(1, n-1)$ sobre uma $(n-1)$ -variedade orientável e conexa V pode produzir dois resultados distintos, dependendo do mergulho $\phi: S^0 \times B^{n-1} \rightarrow V$.

Orientar a n -bola \bar{B}^m de \mathbb{R}^m e sobre $S^{m-1} = \partial \bar{B}^m$ considere a orientação de bordo. Considere $S^0 \times B^{n-1}$ a orientação produto e em $\phi(S^0 \times B^{n-1}) \subset V$ a orientação induzida ($\phi(S^0 \times B^{n-1})$ é um aberto de V).

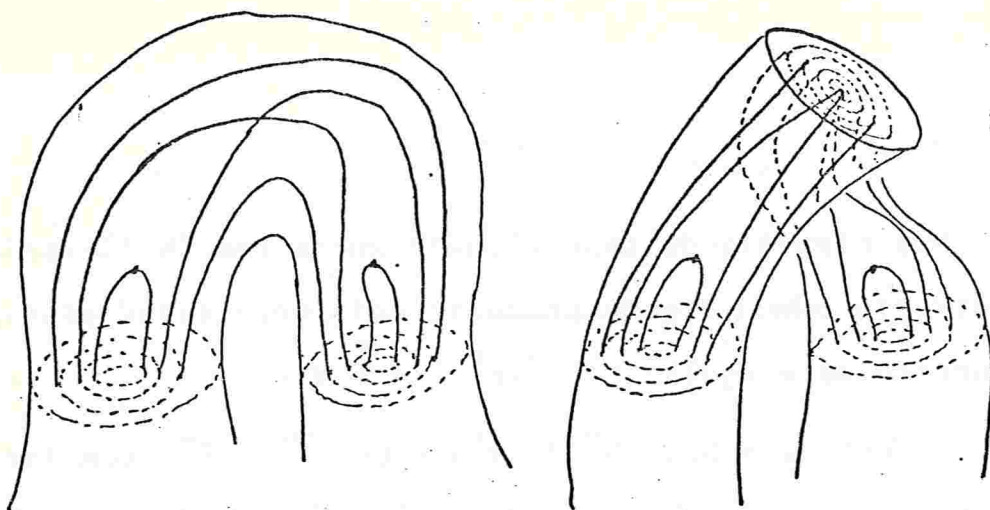
Dizemos que o mergulho ϕ é coerente quanto às orientações se ϕ preserva ou inverte as orientações fixadas acima, quando considerado como um difeomorfismo em sua imagem; caso contrário, ϕ é chamado incoerente.

Em [W1]₁ pág. 513 tem-se o seguinte resultado:

" $X(V, \phi)$ é orientável se, e somente se ϕ é coerente."

No caso em que ϕ é coerente a cirurgia do tipo $(1, n-1)$ é dita orientável e em caso contrário, não orientável.

$X(V, \phi)$ é obtida de V por introdução de uma alça orientável ou não. De fato, retiramos S^0 de V e introduzimos S^{n-2} em seu lugar.



24.

v) Para se efetuar uma cirurgia do tipo $(\lambda, n-\lambda)$ sobre uma variedade de dimensão $n-1$, deve-se ter um mergulho

$$\phi: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \longrightarrow V^{n-1}.$$

Note que se $S = \phi(S^{\lambda-1} \times 0)$, então $\phi(S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda})$ é um tubo para S em V e a vizinhança tubular correspondente é uma vizinhança tubular produto.

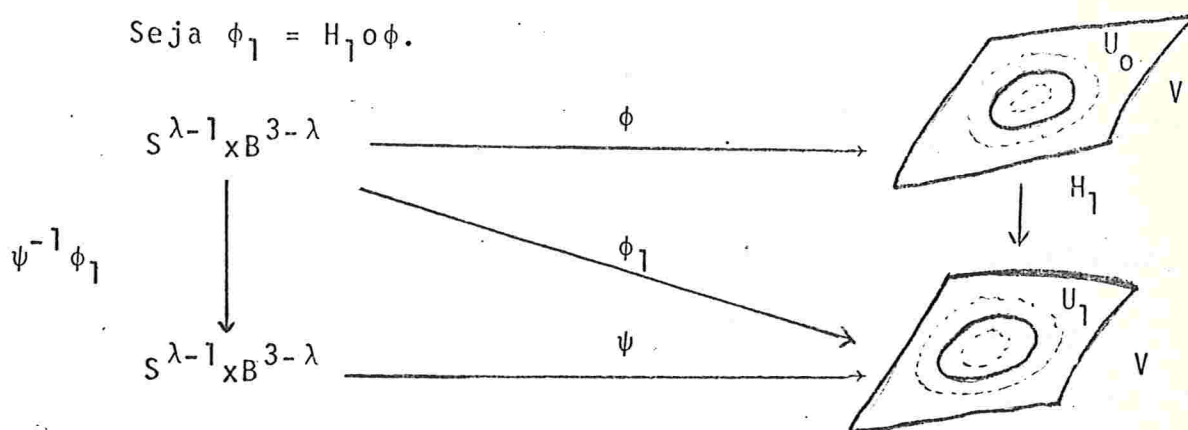
Observamos que não se pode efetuar cirurgias sobre quaisquer esferas mergulhadas em V . As esferas que se prestam são as esferas que admitem uma vizinhança tubular produto: são as "esferas de dois lados" (desconectam uma sua vizinhança tubular se a dimensão de S é diferente de 0 ou n). Vide [W1]₁ pág. 501.

△

Proposição 1.10: - Seja S um $(\lambda-1)$ -esfera conexa e de dois lados em uma 2-variedade V . Sejam $\phi, \psi: S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \rightarrow V$, com $S = \phi(S^{-1} \times 0) = \psi(S^{-1} \times 0)$ aplicações tubulares de S em V . Então existe um difeomorfismo $h: \omega(V, \phi) \rightarrow \omega(V, \psi)$ natural, através do qual $\omega(V, \phi)$ e $\omega(V, \psi)$ são identificadas, de modo que $\omega(V, \phi)$ depende de S e não das parametrizações utilizadas. Se S é desconexa ($\lambda=1$), o resultado acima vale com a hipótese de ϕ e ψ terem o mesmo caráter quanto a orientação.

Demonstração: - Com efeito, pelo Teorema de unicidade de vizinhanças tubulares a menos de isotopia ambiente, existe uma difeotopia H de V que conserva S fixa e tal que H_1 aplica U_0 sobre U_1 respeitando as fibras.

Seja $\phi_1 = H_1 \circ \phi$.



Pela Proposição 1.16 $\omega(V, \phi) \approx (V, \phi_1)$ por um difeomorfismo que é extensão de H_1 que é isotópico à identidade de V .

Assim podemos substituir ϕ por ϕ_1 e temos ψ e ϕ_1 tem a mesma imagem; $\psi^{-1} \phi_1|_{S^{-1} \times 0} = 1_{S^{\lambda-1} \times 0}$, pois

$$\begin{array}{ccc}
 & & S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \xrightarrow{\phi_1} V \\
 & \nearrow z & \downarrow \psi^{-1} \phi_1 \\
 S^{\lambda-1} \times 0 & & S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \xrightarrow{\psi} V
 \end{array}$$

é comutativo e $\psi^{-1} \phi_1$ respeita as fibras.

Por unicidade de vizinhanças tubulares e o fato de que toda vizinhança tubular parcial contém uma vizinhança tubular total, existe um difeomorfismo de fibrados vetoriais

$$\xi: S^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{3-\lambda} \longrightarrow S^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{3-\lambda}$$

tal que ϕ_1 é isotópico a $\psi \circ \xi|_{S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda}}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} & \xrightarrow{i} & S^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{3-\lambda} & \xrightarrow{a} & S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} & \xrightarrow{\phi_1} & V \\
 & & & & & & \downarrow \\
 S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} & \xrightarrow{i} & S^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{3-\lambda} & \xrightarrow{a} & S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} & \xrightarrow{\psi} & V
 \end{array}$$

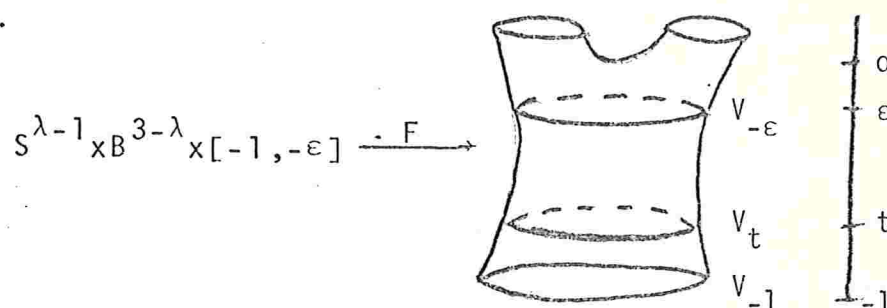
Seja $f: \omega(V, \psi \circ \xi) \longrightarrow [-1, 1]$ a função de Morse sobre $\omega(V, \psi \circ \xi)$, 0 é o valor crítico.

Vem $f^{-1}[-1, -\epsilon] \approx V \times [-1, -\epsilon]$ e seja $F_1: S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \times [-1, -\epsilon] \longrightarrow V$ isotopia entre ϕ_1 e $\psi \circ \xi$ do Teorema de unicidade de vizinhanças tubulares a menos de isotopia. Consideremos

$$F: S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \times [-1, -\epsilon] \longrightarrow V \times [-1, -\epsilon]$$

$$F(x, t) = (F_1(x, t), t),$$

com $F(\cdot, -1) = (F_1(\cdot, -1), -1) = (\psi \circ \xi(x), -1)$ e $F(\cdot, -\epsilon) = (\phi_1(x), -\epsilon)$.



Temos $\omega(V, \psi \circ \xi) \approx f^{-1}[-\epsilon, -1]$, de modo que

$\omega(f^{-1}(gt), (F_t, t)) \approx f^{-1}[t, 1] \approx \omega(V, \psi \circ \xi)$, para todo $t \in [-1, -\epsilon]$.

Assim, $\omega(V, \phi_1) \approx \omega(V, \psi \circ \xi)$.

Resta a verificação de que $\omega(V, \psi \circ \xi) \approx (V, \psi)$.

Temos $\xi: S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \longrightarrow S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda}$ onde $k: S^{-1}$

$$k: S^{\lambda-1} \longrightarrow GL(3-\lambda, \mathbb{R}).$$

k é homotópica a uma aplicação constante. De fato, temos:

i) $\lambda = 0$ $k: S^{-1} \longrightarrow GL(3, \mathbb{R})$ é vazia;

ii) $\lambda = 1$ $k: S^0 \longrightarrow GL(2, \mathbb{R})$ e o número de classes de homotopia de aplicações de S^0 em $GL(2, \mathbb{R})$ é dois: $GL(2, \mathbb{R})$ tem duas componentes conexas por arcos, donde ϕ e ψ serem coerentes ou incoerentes dão as duas classes de homotopia;

iii) $\lambda = 2$ $k: S^1 \longrightarrow GL(1, \mathbb{R})$, e as classes de homotopia dão $\pi_1(GL(1, \mathbb{R}), \text{ponto}) = [0]$, e

iv) $\lambda = 3$ $k: S^2 \longrightarrow GL(0, \mathbb{R}) = [0]$ e a homotopia é trivial.

28.

Assim $k: S^{\lambda-1} \longrightarrow GL(3-\lambda, \mathbb{R})$ é homotópica a constante:
para $\lambda \neq 0, 3$

$$\ell: \mathbb{R}^{3-\lambda} \longrightarrow \mathbb{R}^{3-\lambda}$$

$$\ell(x_1, \dots, x_{3-\lambda}) = (\pm x_1, \dots, x_{3-\lambda})$$

e para $\lambda = 0$, $\ell = 1_{\mathbb{R}^3}$ e para $\lambda = 3$, $\ell = 1_{\mathbb{R}^0}$.

Por conseguinte,

$$\xi: S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \longrightarrow S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda}$$

é homotópica a

$$\xi': S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \longrightarrow S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda}$$

$$\xi'(p, q) = (p, \ell(q)).$$

Claramente $\omega(V, \psi \circ \xi) \approx (V, \psi \circ \xi')$, pois $\psi \circ \xi$ e $\psi \circ \xi'$ são isotópicos e o difeomorfismo é obtido como antes.

Para concluirmos, $\omega(V, \psi) \approx \omega(V, \psi \circ \xi')$. Com efeito, o difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \psi(S^{\lambda-1} \times 0) \times \bar{B}^1 & + L_\lambda & \\ \downarrow 1 & \downarrow 1 & \downarrow \ell \\ V \setminus \psi \circ \xi'(S^{\lambda-1} \times 0) \times \bar{B}^1 & + L_\lambda & \end{array}$$

é tal que

$$(\psi(u, Bv), c) \sim (x, y) \iff -|x|^2 + |y|^2 = c$$

e (x, y) está na trajetória ortogonal que passa por

$(u \cos h \theta, v \operatorname{sen} h \theta) \Leftrightarrow [\psi \circ \xi'(u, \theta v), c] =$
 $[\psi(u, \theta \ell(v)), c] \sim [(x', y') \in L_\lambda \text{ com } -|x'|^2 + |y'|^2 = c \text{ e } (x', y')$
 está sobre a trajetória ortogonal que passa pelo ponto
 $(u \cos h \theta, \ell(v) \operatorname{sen} h \theta) = \xi \circ h(u \cos h \theta, v \operatorname{sen} h \theta)] = \ell(x, y)$.

Assim $(1 \times 1_{\mathbb{B}^1} + \ell)$ é um difeomorfismo de $\omega(V, \psi)$ em $\omega(V, \psi \circ \xi')$ que estende a identidade de V conjugando as funções elementares.

A Proposição 1.18 está completa. Δ

Proposição 1.19: - Sejam $(W; V, V')$ e $(W'; V, V'')$ dois cobordismos elementares de índice 1 e que são ambos orientáveis ou ambos não orientáveis, com funções de Morse f e g , respectivamente. Suponha que para a obtenção de V' e V'' a partir das cirurgias sobre V , as mesmas componentes conexas de V são utilizadas. Então existe um difeomorfismo $h: W \rightarrow W'$ tal que $h|_V \cong 1_V$, conjugando f e g .

Demonstração: - A Proposição 1.19 é consequência do Lema de Homogeneidade (vide [Mi] pág. 22) das Proposições 1.16 e 1.18.

Proposição 1.20.: - Se $(W; V, V')$ é um cobordismo elementar de índice 0 ou n e W é conexa, então $W^n \sim \mathbb{B}^n$.

Demonstração: - Com efeito, $W \approx \frac{V_\lambda \phi(S^{\lambda-1} \times 0) \times \bar{B}^1 + L_\lambda}{\sim}$ e se $\lambda=0$ o mergulho $\phi: S^{-1} \times B^n \longrightarrow V^{n-1}$ é vazio, donde

$$W \approx V \times \bar{B}^1 + L_0 \approx V \times \bar{B}^1 + \bar{B}^n.$$

Como W é conexa, vem $V = \emptyset$, donde $W \approx \bar{B}^n$. Se $\lambda=n$,

$(W; V', V)$ tem índice 0 e a prova é completa. Δ

Passamos agora ao estudo de triadas $(W; V, V')$ com funções de Morse $f: W \longrightarrow \mathbb{R}$ admitindo dois pontos críticos p e p' .

Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(p) < c < f(p')$, ξ um campo pseudo-gradiente para P . Denotamos por K_p o conjunto dos pontos sobre as trajetórias de ξ indo ou vindo de p .

Teorema 1.21.: - (Teorema do Rearranjamento) - Se $f(W) = [0, 1]$, $a, a' \in]0, 1[$, $a \neq a'$ e $K_p \cap K_{p'} = \emptyset$, então existe uma nova função de Morse, g sobre W tal que.

- i) ξ é campo pseudo-gradiente de g ;
- ii) Os pontos críticos de g são p e p' e $g(p)=a$, $g(p')=a'$;
- iii) g coincide com f próximo de V e V' e é igual a $f + \text{constante}$ em alguma vizinhança de P e em alguma vizinhança de P' .

Demonstração: - $[M]_1$, pág. 38. Δ

Proposição 1.22.: - O campo pseudo-gradiente ξ para f pode ser tomado de modo que $S_R \frown S'_L$ em $V_0 \approx f^{-1}(c)$, onde S_R e S'_L são as esferas à direita de p e à esquerda de p' em V_0 .

Demonstração:- [M]₁, pág. 46.

Corolário 1.23.: - Se $\text{ind } p = \lambda \geq \lambda' = \text{ind } p'$, então existe ξ para f tal que $S_R \cap S'_L = \emptyset$.

Corolário 1.24.: - Se $\text{ind } p' = \text{ind } p + 1$, $\#(S_R \cap S'_L)$ é finito.

Teorema 1.25.: - (Teorema do Cancelamento).

Se $S_R(p) \frown S'_L(p')$ e $S_R \cap S'_L = \{x\}$, então $(W; V, V')$ com dois pontos críticos de índices λ e $\lambda+1$ é um cobordismo produto.

Demonstração: - [M]₁, pág. 48. Δ

1.26 - Convenção Básica

Os campos pseudo-gradientes tomados para $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ são campos nas condições da Proposição 1.22. para níveis regulares V_1, V_2, \dots, V_n previamente fixados de modo que em qualquer nível regular tem-se transversalidade das variedades invariantes.

Os campos são também considerados normalizados fora de uma vizinhança do conjunto dos pontos críticos.

Teorema 1.27.: - Se M^n é uma n -variedade fechada, então M é homeomorfa a S^n se, e somente se sobre M existe uma função de Morse com dois pontos críticos. Além disso, se $n < 4$, homeomorfismo pode ser substituído por difeomorfismo.

Demonstração: - S^n admite função de Morse com dois pontos críticos e reciprocamente, se M admite uma função de Morse com dois pontos críticos, $M = \bar{B}^n \cup_{\phi} \bar{B}^n$, donde M é homeomorfa a S^n . Se $n < 4$ homeomorfismo pode ser substituído por difeomorfismo, dada a unicidade de estruturas diferenciáveis em dimensão ≤ 3 . △

O Teorema seguinte é o que se necessita para alterar os campos pseudo-gradientes de $f: W \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 1.28.: - Dada uma tríada $(W; V_0, V_1)$ com função de Morse f e campo pseudo-gradiente ξ , um nível regular $V=f^{-1}(b)$ e um difeomorfismo $h: V \longrightarrow V$ que é isotópico à identidade, se $f^{-1}[a,b]$, $a < b$, não contém pontos críticos, então é possível construir um campo pseudo-gradiente ξ para f tal que

- i) ξ coincide com ξ fora de $f^{-1}(a,b)$;
- ii) $\bar{\phi}=h \circ \phi$, onde ϕ e $\bar{\phi}$ são os difeomorfismos $f^{-1}(a) \longrightarrow V$ dados pelos fluxos de ξ e $\bar{\xi}$, respectivamente.

Analogamente pode-se alterar ξ sobre $f^{-1}(b,c)$, $b < c$.

Demonstração: - [M]₁ pág. 43. △

Definição 1.29.: - Seja $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse sobre M fechada e conexa de dimensão n : Denotamos por $\eta(i)$ o número de pontos críticos de f de índice i , $0 \leq i \leq n$.

f é polar se $\eta_f(0) = \eta_f(n) = 1$.

f é ordenada se para p, q pontos críticos de f , $f(p) < f(q)$, então $\text{ind } p \leq \text{ind } q$.

Proposição 1.30.: - Seja M uma variedade fechada e conexa, $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Pelos Teoremas do rearranjo e cancelamento podemos obter, a partir de f , uma função de Morse $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$, polar e ordenada.

Demonstração: - Com efeito, escolha $\xi: M \longrightarrow TM$ pseudo-gradiante para f nas condições da convenção 1.26.

Pelo Corolário 1.23 o Teorema do rearranjo se aplica em f pode ser ordenada. Através de novos rearranjos, se necessário, podemos fazer com que os primeiros pontos críticos de índice 1 conectam mínimos. Aplique o Teorema do Cancelamento, produzindo uma função com um único mínimo, dado que o cancelamento de um índice 1 que conecta mínimos com um mínimo, sendo estes consecutivos é sempre possível.

34.

Se $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ é a função obtida, h tem um único mínimo
 $-h: M \rightarrow \mathbb{R}$ tem um único máximo e os mínimos excedentes de
 $-h$ são eliminados pelo processo acima.

Assim, a partir de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ obtem-se por rearranjo-
mento e cancelamento, uma função de Morse polar e ordenada,
como se queria.

△

§2. Grafo de Reeb de uma Função de Morse

Definição 2.0.: - Um grafo Γ é um par (Y, V) , onde Y é um espaço topológico de Hausdorff e V é um subespaço de Y verificando as seguintes condições:

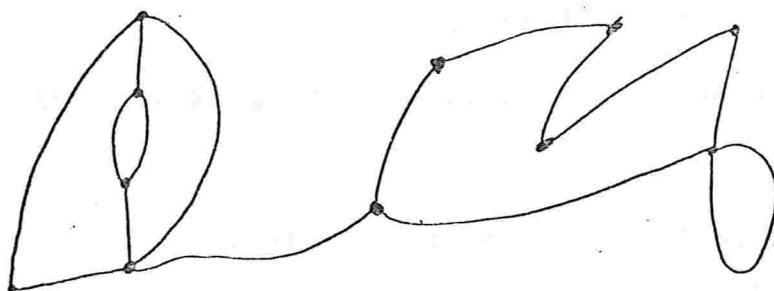
- i) V é fechado e discreto. Os pontos de V chamam-se vértices de Γ .
- ii) $Y \setminus V$ é reunião disjunta de subconjuntos abertos e_i , cada um dos quais homeomorfo a um intervalo aberto da reta real. Os conjuntos e_i chamam-se arestas de Γ .
- iii) Para cada aresta e_i , seu bordo $\bar{e}_i \setminus e_i$ é um subconjunto de V formado por um ou dois pontos. Se $\bar{e}_i \setminus e_i$ consiste de dois pontos, então o par (\bar{e}_i, e_i) é homeomorfo ao par $([0,1], (0,1))$; se $\bar{e}_i \setminus e_i$ consiste de um único ponto, então o par (\bar{e}_i, e_i) é homeomorfo ao par $(S^1, S^1 \setminus \text{ponto})$.
- iv) A topologia de Y é tal que um subconjunto $A \subset Y$ é fechado se, e somente se para cada aresta e_i , $A \cap \bar{e}_i$ é fechado em \bar{e}_i .

Notas 2.1.: - i) A condição iv) de 2.0 é automaticamente verificada no caso em que o grafo é finito. Um grafo é finito se tem um número finito de vértices e arestas.

36.

ii) Um grafo $\bar{\gamma}$ é compacto (conexo) se γ é compacto (conexo).

ii) Grafos podem ser representados através de diagramas: cada vértice é representado por um ponto e cada aresta é uma curva simples ligando seus vértices.



iv) Um grafo $\bar{\gamma}$ é planar se admite uma representação plana.

v) Um grafo $\bar{\gamma}$ é uma árvore se não contém laços. Um laço é uma aresta tal que $\bar{e}_i \setminus e_i$ é um ponto.

Definição 2.2.: - Sejam $\Gamma=(\gamma, V)$ e $\Gamma'=(\gamma', V')$ grafos. Dizemos que Γ e Γ' são isomorfos se existe um homeomorfismo $h: \gamma \rightarrow \gamma'$ que leva vértices em vértices e arestas em arestas.

Neste parágrafo $M=M^m$, denota sempre uma variedade diferenciável m -dimensional fechada e conexa e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse sobre M .

2.3. Grafo de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

Seja $R_f = \{(x, y) \in M \times M \mid y \in \text{componente conexa de } f^{-1}(f(x)) \text{ que contém } x\}$. R_f é uma relação de equivalência e tem-se o espaço quociente $\gamma(f) = M/R_f$ (com a topologia quociente).

A função $\bar{f}: \gamma(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}(\bar{x})=f(x)$, onde $x \in \bar{x}$, é bem definida e contínua, pois $\bar{f} \circ p = f$, onde $p: M \longrightarrow \gamma(f)$ é a projeção canônica.

Sejam $V_f = \{\bar{x} \in \gamma(f) \mid x \text{ é ponto crítico de } f\}$ e $c_f = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ é valor crítico de } f\}$.

Em [I], pág. 95, demonstra-se o seguinte

Teorema $\Gamma_f = (\gamma(f), V)$ é um grafo finito.

Seja $\sigma_f(x) = \text{ind}_f x$, onde x é um ponto crítico de f . Associamos então, ao vértice $\bar{x} \in V_f$ o número natural $i = \sigma_f(x)$, $0 \leq i \leq m$. Denotamos por σ_f esta aplicação.

$$\sigma_f: V_f \longrightarrow \{0, 1, \dots, m\}$$

$$\sigma_f(\bar{x}) = \text{ind}_f x.$$

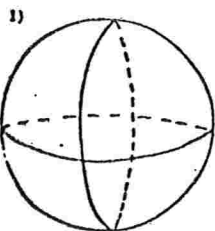
Definição: - A 4-upla $\Gamma(f) = (\gamma(f), V_f; \bar{f}, \sigma_f)$ é o grafo de Reeb da função de Morse $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$

A

Exemplos 2.4.:

i)

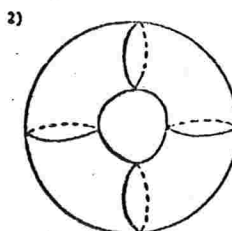
Função altura sobre M



Grafo



Função altura sobre M



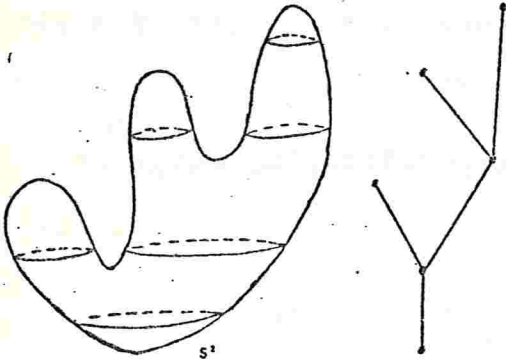
Grafo



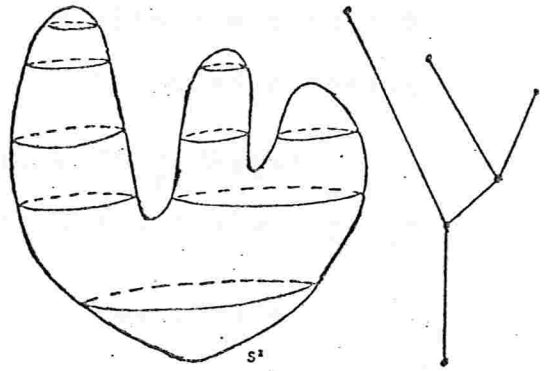
$$T_1 = S^1 \times S^1$$

38.

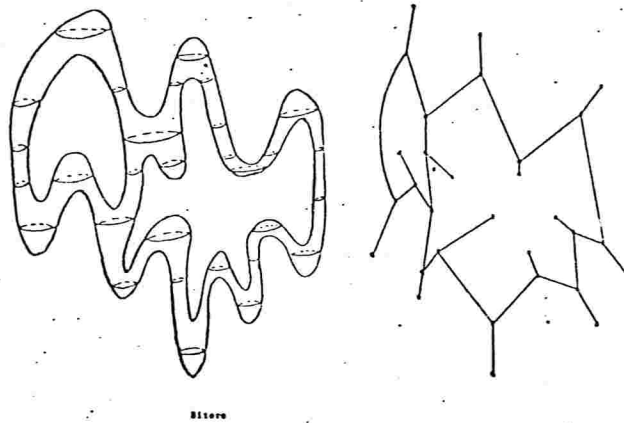
ii)



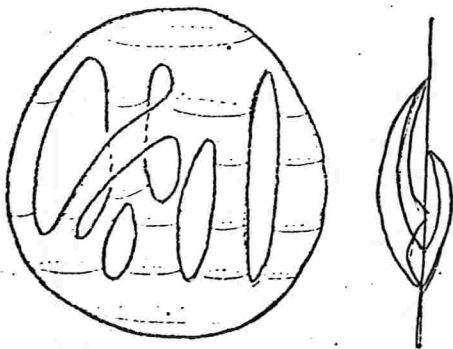
iii)



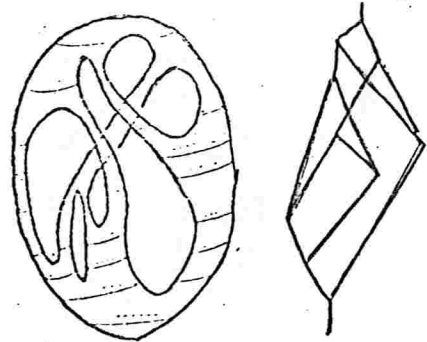
iv)



v)



vi)



Os dois últimos exemplos mostram que o grafo associado a uma função pode não ser planar. Os grafos referidos admitem para subgrafos os grafos Kuratowsky.

Também os exemplos ii) e iii) mostram funções sobre a esfera S^2 que tem grafos isomorfos mas que não são equivalentes. Δ

Definição 2.5.: - Se $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de Morse sobre M com grafos de Reeb $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$, dizemos que $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$ são isomorfos e denotamos $\Gamma(f) \cong \Gamma(g)$ se $\Gamma_f = (\gamma(f), V_f)$ e $\Gamma(g) = (\gamma(g), V_g)$ são isomorfos como grafos por um isomorfismo k tal que

$$\begin{array}{ccc}
 V_f & \xrightarrow{\bar{f}|_{V_f}} & c_f \\
 k|_{V_f} \downarrow & & \downarrow \ell \\
 V_g & \xrightarrow{\bar{g}|_{V_g}} & c_g
 \end{array}$$

é comutativo, onde $\ell: c_f \rightarrow c_g$ é crescente e k é compatível com σ , isto é, preserva índices.

A relação de isomorfismo é uma equivalência para grafos de Reeb.

Os exemplos ii) e iii) de 2.4. são isomorfos como grafos, mas não como grafos de Reeb.

40.

O papel de $\bar{f}: \gamma(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ é detectar a não equivalência de certas funções através do grafo de Reeb, fixando "tamanhos" para as arestas, introduzindo uma restrição no conceito de isomorfismo de grafos. Em dimensão dois tal restrição é suficiente para a equivalência das funções, vide [I].

A numeração dos vértices em dimensão dois é desnecessária, como é fácil ver e exemplos em dimensão três para justificar σ serão dados nos parágrafos seguintes.

As proposições seguintes são úteis e as demonstrações encontram-se em [I].

Proposição 2.6.: - Se $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse, então no grafo de Reeb $\Gamma(f) = (\gamma(f), V_f; \bar{f}, \sigma_f)$ incidindo em um vértice tem-se no máximo três arestas.

Proposição 2.7.: - Se $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ é de Morse e

$k: [a, b] \longrightarrow [c, d]$ é um difeomorfismo com derivada positiva, então

i) $\gamma(f) = \gamma(kof)$

ii) $V_f = V_{kof}$

iii) $\overline{kof} = \overline{kof}$

iv) $t \in C_f \iff k(t) \in C_{kof}$

Essencialmente as condições i-iv dizem que $(\gamma(f), V_f; \bar{f}, \sigma_f) \equiv (\gamma(kof), V_{kof}; \overline{kof}, \sigma_{kof})$ canonicamente.

Proposição 2.8.: - Se $f: M \longrightarrow [a,b]$ e $g: M \longrightarrow [c,d]$ são funções de Morse com grafos de Reeb isomorfos, então dado um difeomorfismo crescente $k: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ tal que $k|_{c_f} = \ell$, onde $\ell: c_f \longrightarrow c_g$ é a aplicação crescente da equivalência dos grafos; existe um homeomorfismo $h: \gamma(\overline{kof}) \longrightarrow \gamma(g)$ tal que $\overline{goh} = kof$

Demonstração: - [I], pág. 106.

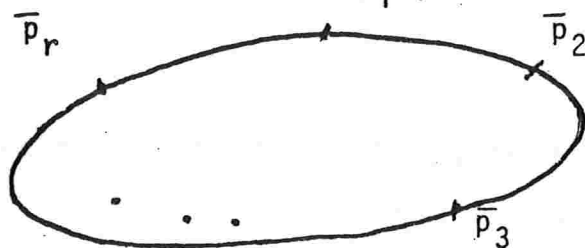
Teorema 2.9.: - $f \sim g \implies \Gamma(f) \cong \Gamma(g)$.

Demonstração: - [I], pág. 107.

Proposição 2.10.: - A aplicação quociente $p: M \longrightarrow \gamma(f)$ é tal que o homeomorfismo $p: \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(\gamma(f))$ é sobrejetor.

Demonstração: - Dado um laço $\alpha: S^1 \longrightarrow \gamma(f)$ em $\gamma(f)$ mostraremos que existe $\beta: S^1 \longrightarrow M$ tal que $p\beta = \alpha$.

Com efeito, para simplificar poderemos tomar um vértice de $\gamma(f)$ e o ponto crítico correspondente sobre M para pontos base. Sejam $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_k$ os vértices de $\gamma(f)$ em $\alpha(S^1)$ e suponhamos $\overline{f}(\overline{p}_1) < \overline{f}(\overline{p}_2) < \dots < \overline{f}(\overline{p}_k)$.



42.

$\alpha(S^1) \setminus \{\bar{p}_i\}_{i=1}^k$ é reunião disjunta de segmentos contidos nos interiores das arestas de Γ . Consideremos os caminhos próprios definidos em $[I]$ para tais segmentos (segmentos de curvas integrais de ξ que se projetam nas arestas de γ via \bar{f} e via tais homeomorfismos definimos β sobre estes segmentos, a partir de α .

Para cada nível crítico $f^{-1}(p_k)$ considere um caminho sobre a componente conexa que contém p_i ligando as trajetórias do fluxo de ξ escolhidas para caminho próprio e obtém-se assim, por mudança de parametrização do laço em $\gamma(f)$, $\beta: S^1 \rightarrow M$ tal que $\rho\beta = \alpha$. △

Notas 2.1.: - Ressaltamos que em dimensão 3 os tipos de grafos de cobordismos elementares conexos são os seguintes:

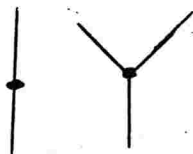
i) Índice 0



ii) Índice 1



iii) Índice 2



iv) Índice 3



de modo que podemos afirmar, tendo presente a definição de cirurgia do tipo $(\lambda, 3-\lambda)$ o seguinte:

- i) Uma sela de índice 1 introduz uma alça ou conecta componentes conexas do nível regular inferior;
- ii) Uma sela de índice 2 desfaz uma alça ou desconecta uma componentes conexas do nível regular inferior.

§3. Diagrama de Heegaard para uma Função de Morse em Dimensão Três

Neste parágrafo construímos um diagrama para $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ com um campo pseudo-gradiente ξ fixado, que consiste essencialmente de uma esfera S^2 sobre a qual se assina la os traços dos mergulhos característicos das selas de índices 1 e 2 de f relativamente a ξ .

$M=M^3$ é sempre uma variedade fechada e conexa de dimensão três.

Como pretendemos definir diagramas e trabalhar com eles, condições de finitude são vitais, de modo que iniciamos a seção redefinindo campo pseudo-gradiente para $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ e a partir daí todos os campos de vetores nesse trabalho são campos que satisfazem a definição 3.0.

Definição 3.0.: - Um campo de vetores $\xi: M \longrightarrow TM$ é pseudo-gradiente para uma função de Morse $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ se satisfaz a definição 1.4. e a convenção 1.26.

3.1.: Construção de ξ_f

Sejam $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse sobre M e p_1, p_2, \dots, p_k os pontos críticos de índice 0 de

46.

f , $f(p_i) = c_i$, $1 \leq i \leq k$ e $\epsilon > 0$ tal que p_i é o único ponto crítico de f sobre $f^{-1}[c_i - \epsilon, c_i + \epsilon]$.

Denotamos por Σ_i o bordo da componente conexa de $f^{-1}[c_i, c_i + \epsilon]$ que contém p_i ; claramente $\Sigma_i \approx S^2$

Seja ξ um campo de vetores pseudo-gradiente para f . Através do fluxo de ξ consideramos sobre Σ_i as esferas à esquerda das selas de índices 1 e 2 de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Para obtenção de Σ_f^ξ , o procedimento é o seguinte:

i) Pontos Críticos de Índice 1

A esfera à esquerda de uma sela de índice um é S^0 , de modo que se pode ter os dois pontos sobre um mesmo Σ_i ou um ponto sobre Σ_i e o outro sobre Σ_j . Tais pontos, são chamados pontos associados e centrado em cada ponto associado consideramos um disco fechado mergulhado do seguinte modo: se p é um ponto crítico de índice 1, $f(p) = c$ e $\epsilon > 0$ são tais que sobre $f^{-1}[f(p) - \epsilon, f(p) + \epsilon]$, p é o único ponto crítico de f , sobre $V_1 = f^{-1}(f(p) - \epsilon)$, o mergulho característico à esquerda de p é uma aplicação $\phi: S^0 \times B^2 \rightarrow V_1$, de modo que $\phi(S^0 \times 0)$ é o par de pontos associados; seja $\delta > 0$ tal que $\phi(S^0 \times \overline{B}_\delta^2)$ é um par de discos fechados e disjuntos centrados em $\phi(S^0 \times 0)$ sobre V_1 e δ é tomado de modo que o iterado de $\phi(S^0 \times \overline{B}_\delta^2)$ pelo fluxo de ξ é um par de discos fechados e disjuntos sobre $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k$. (A existência de um tal

δ é dada pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo).

Um homeomorfismo entre os bordos desses discos, que são ditos associados é dado, de modo que desprovendo-se o nível regular V_1 dos interiores desses discos e identificando-se os bordos pelo homeomorfismo dado, obtêm-se uma cópia do nível regular imediatamente superior ao ponto crítico p (cirurgia do tipo (1,2)).

Se o ponto crítico de índice 1, p , é do tipo que conecta componentes conexas de $f^{-1}(-\infty, f(p) - \epsilon]$, neste caso dizemos que " p conecta mínimos", através do par de discos associados em Σ_i e Σ_j efetuamos a soma conexa $\Sigma_i \# \Sigma_j$, e se o ponto crítico de índice 1 não conecta componentes conexas de $f^{-1}(-\infty, f(p) - \epsilon]$, o par de discos associados é mantido. No primeiro caso a curva obtida identificando-se os bordos dos pares de discos associados em questão é assinalada.

Desta forma, no final do processo ter-se-á uma única cópia de S^2 :

$$\Sigma = \Sigma_1 \# \Sigma_2 \# \dots \# \Sigma_r$$

sobre a qual as selas de índice 1 que "não conectam mínimos" originam pares de discos associados com homeomorfismos entre os bordos e os que conectam mínimos dão origem a curvas fechadas que são as curvas de adjunção da reunião disjunta

$$\Sigma_1 + \dots + \Sigma_k$$

As selas de índice 1 que conectam mínimos produzem sobre $\Sigma = \Sigma_1 \# \Sigma_2 \# \dots \# \Sigma_k$, $k-1$ curvas fechadas simples e disjuntas que são numeradas na mesma ordem dos valores da função nas selas de índice 1 às quais elas correspondem. Tais curvas são denominadas curvas de índice 1.

Nota: - Desprovendo-se $S^2 = \Sigma$ dos interiores desses discos e efetuando-se as identificações dos bordos pelos homeomorfismos, obtêm-se uma superfície 2-dimensional fechada e conexa, digamos L , que pode ser orientável ou não, conforme todas as alças são orientáveis ou alguma alça é não orientável, respectivamente.

Os pares de discos associados que permaneceram sobre $\Sigma = \Sigma_1 \# \Sigma_2 \# \dots \# \Sigma_k$ são numerados por $1, 2, \dots, \ell$, segundo a ordem em que os pontos críticos de índice 1 aparecem na função: a cada par de discos associados fazemos corresponder um par de números $(i, \pm i)$ conforme a alça introduzida é orientável ou não.

Pontos Críticos de Índice 2 - As esferas à esquerda das selas de índice 2 proporcionam curvas fechadas e segmentos em Σ de modo que na superfície L os segmentos e as curvas se juntam para produzir curvas fechadas simples e disjuntas. A maneira como os segmentos em Σ , dão origem a curvas fechadas em L , é descrita, em Σ , através de uma numeração onde pontos correspondentes nos bordos dos discos recebem o

mesmo número. Tais curvas são denominadas curvas de índice 2 e são numeradas através do mesmo critério: a ordem em que as selas de índice 2 correspondentes aparecem na função.

Utilizaremos símbolos distintos para distinguir as curvas de índice 1 das de índice 2.

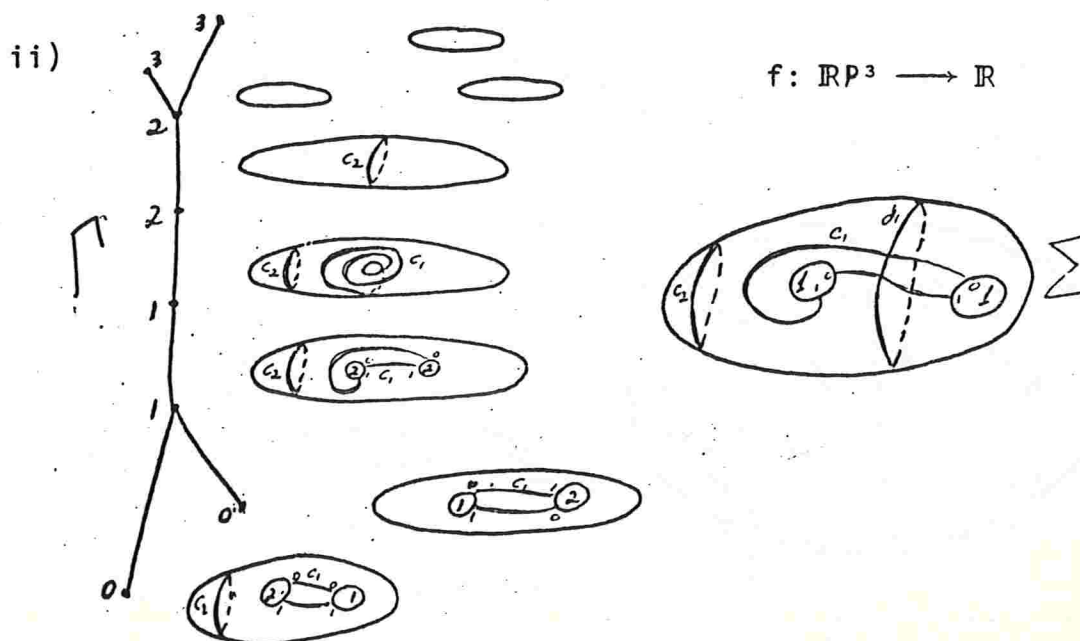
Resulta disso um diagrama que depende de f e do campo pseudo-gradiente ξ escolhido para sua definição. Esse diagrama é denotado por Σ_f^ξ e o denominamos esqueleto geométrico de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplos:

- i) $f: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com dois pontos críticos tem para grafo de Reeb

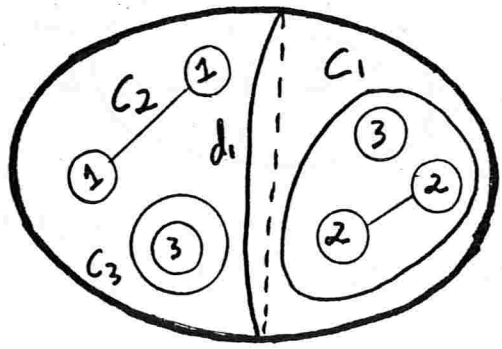
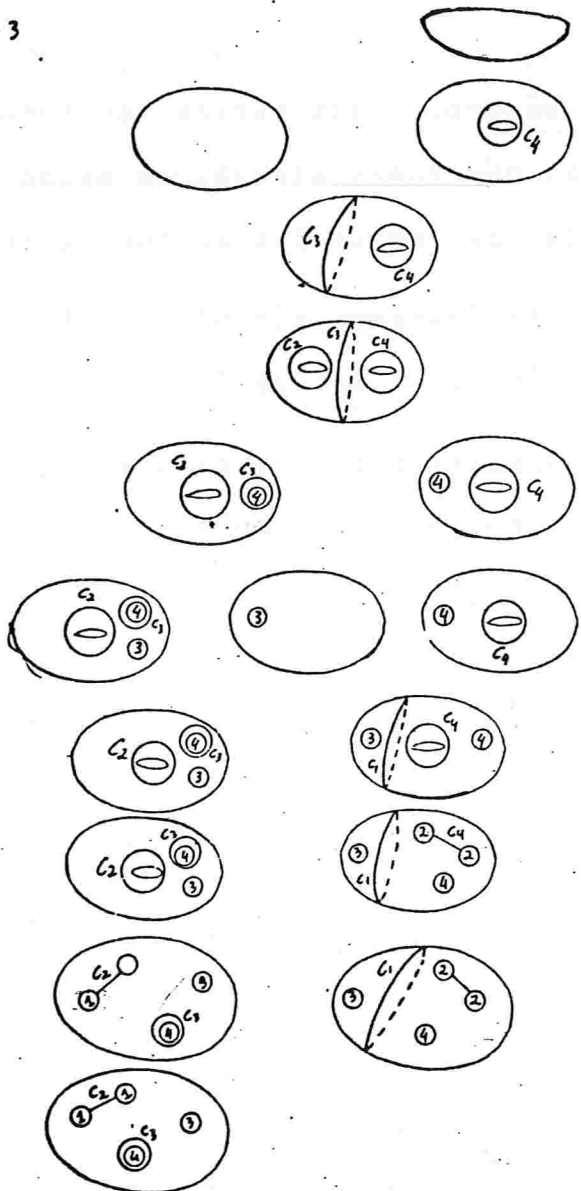
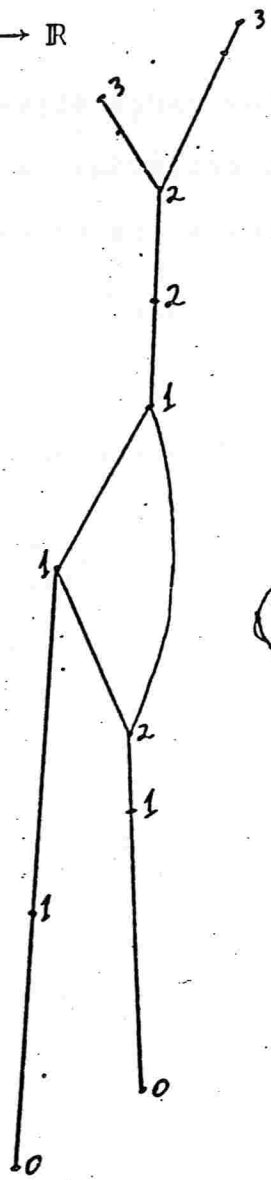


e para esqueleto uma cópia de S^2 sem elementos associados.



50.

$$f: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\Sigma = \Sigma_1 \# \Sigma_2$$

Definição 3.2.: - Um diagrama esférico Σ consiste de uma esfera S^2 sobre a qual são assinalados pares de discos associados com homeomorfismos de bordo, arcos e curvas fechadas, de modo que retirando-se os interiores dos discos e identificando-se os bordos pelos homeomorfismos obtêm-se uma superfície fechada sobre a qual os arcos e as curvas se juntam para dar um sistema de curvas fechadas simples e disjuntas.

Definição 3.3.: - Um diagrama esférico é possível se é esqueleto geométrico de alguma função $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definição 3.4.: - Um diagrama de Heegaard consiste de uma superfície fechada 2-dimensional sobre a qual se fixam dois sistemas de curvas fechadas simples e disjuntas topologicamente independentes, isto é, o complemento de cada sistema é conexo a cada sistema é maximal relativamente a esta propriedade.

Notas 3.5.: - i) É fácil ver que cortando-se a superfície da definição 3.4. por um dos sistemas de curvas e colando-se pares de discos nos bordos obtêm-se um diagrama esférico.

Definição: - Se S é uma superfície e α é uma curva simples, fechada e de dois lados em S , $\phi: S^1 \times [-1,1] \longrightarrow S$ é um

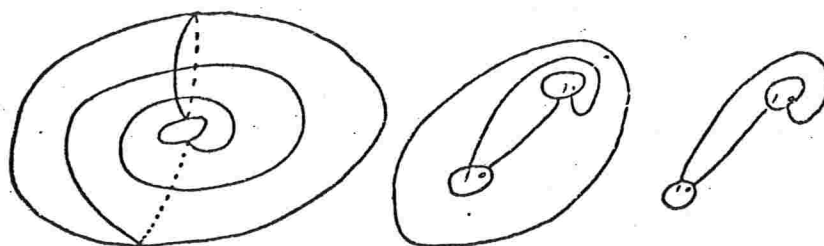
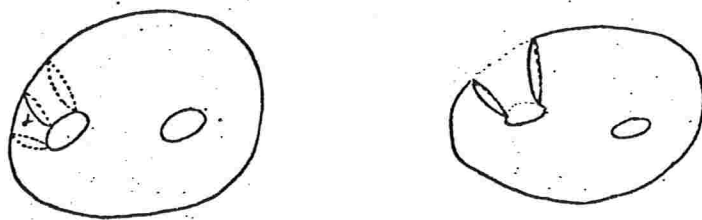
mergulho tal que $\alpha = \phi(S^1 \times 0)$, a variedade cujo bordo tem duas curvas isotópicas a α : $R = S \setminus \phi(S^1 \times]-1, 1[)$ é o que se entende por cortar S ao longo de α .

ii) Retirando-se um ponto fora dos elementos associados de um diagrama esférico, obtém-se um plano com elementos associados, de modo que se tem uma representação plana de uma superfície com um sistema de curvas fechadas e disjuntas.

O plano acima, a esfera com elementos associados ou a superfície L , quando s̄o existem dois sistemas de curvas topologicamente independentes é um diagrama de Heegaard para M^3 . (Vide [S],[H]).

iii) Também segue-se que o esqueleto geométrico de uma função de Morse polar, sobre M^3 é um diagrama de Heegaard para M^3 .

Com efeito, sem perda de generalidade podemos supor f ordenada. Seja a um valor regular para f entre o último valor crítico de índice 1 e o primeiro valor crítico de índice 2. $L = f^{-1}(a)$ é uma superfície de Heegaard para M^3 e os sistemas de curvas fechadas e disjuntas topologicamente independentes requeridos sobre L são as esferas \tilde{a} à direita das selas de índice 1 e as esferas \tilde{a} esquerda das selas de índice 2 sobre L . ▲

Exemplos:i). Diagrama de Heegaard para $\mathbb{R}P^3$ ii) Corte de M^2 ao longo de α 

Teorema 3.6.: - Σ é possível se, e somente se Σ contém um diagrama de Heegaard.

Demonstração: \Rightarrow) Se Σ é possível, então existe uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ com campo pseudo-gradiente ξ tal que $\Sigma = \Sigma_f^\xi$. Pela proposição 1.30. f produz uma função de Morse $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ polar e ordenada.

É fácil ver que os rearranjos efetuados na proposição 1.30. não alteram Σ_f^ξ pois o campo $\xi: M \rightarrow TM$ não é alterado, como também f não é alterada numa vizinhança satura-

54.

da dos pontos críticos de índice 0, a menos de uma constante. Os "novos rearranjos" da proposição 1.30. também não alteram \sum_f^ξ , pois a numeração dos elementos associados às selas de índice 1 que conectam mínimos e selas de índice 1 que não conectam mínimos é independente.

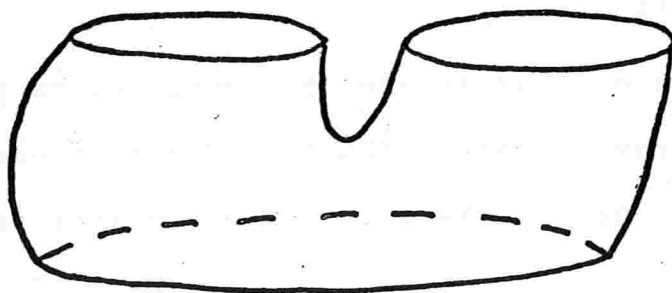
Resta observar que os cancelamentos efetuados "apagam" as curvas de índice 1 e algumas curvas de índice 2, de modo que $\Sigma = \sum_f^\xi$ contém um diagrama de Heegaard.

\Leftarrow) Suponha que Σ contém um diagrama de Heegaard. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ as curvas de índice 1 sobre Σ e sejam $\phi_i: S^1 \times B^1 \rightarrow \Sigma$ parametrizações de vizinhanças tubulares de α_i , $1 \leq i \leq k-1$ tais que $\phi_i(S^1 \times B^1)$ são disjuntas duas a duas e $\phi_i(S^1 \times B^1)$ não encontra pares de discos associados em Σ .

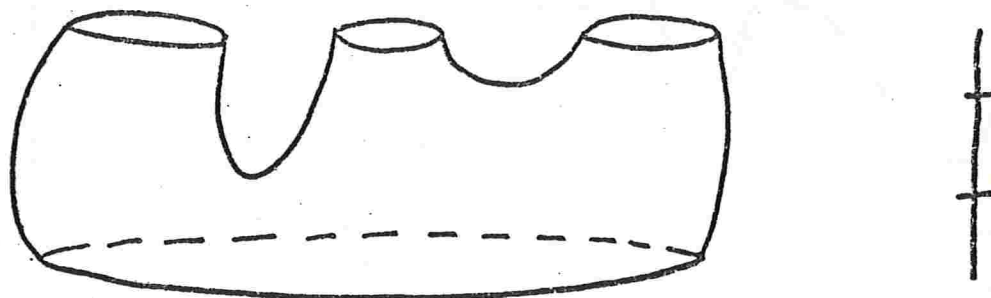
$$\begin{aligned} \text{Sejam } \chi(\Sigma, \phi_{k-1}) &= \Sigma_k + \Sigma_{k-1}, \quad (W_{k-1}; \Sigma, \Sigma_k + \Sigma_{k-1}) = \\ &= (\omega(\Sigma, \phi_{k-1}); \Sigma, (\Sigma, \phi_{k-1})) \end{aligned}$$

o cobordismo elementar com função de Morse

$f_{k-1}: W_{k-1} \rightarrow [0,1]$ com um único ponto crítico de índice 2 e campo pseudo-gradiente ξ_{k-1} .



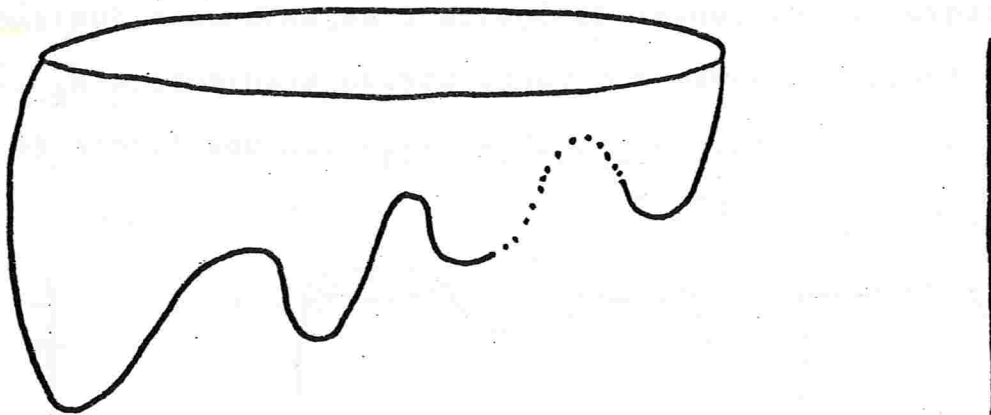
O fluxo de ξ_{k-1} leva a vizinhança tubular de ℓ_{k-2} em uma das componentes conexas de $\chi(\Sigma, \phi_{k-1})$. Tome tal mergulho para mergulho característico sobre $\chi(\Sigma, \phi_{k-1})$ e construa um cobordismo elementar de índice 2 adjuntando-o juntamente com a função de Morse e o campo pseudo-gradiente a W_{k-1} , obtendo um cobordismo $(W_{k-2}; \Sigma, \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3)$ com uma função de Morse $f_{k-2}: W_{k-2} \rightarrow [0, 2]$ e campo pseudo-gradiente ξ_{k-2} .



O processo se repete até a última curva de índice 1, de modo que se obtém uma tríada $(W; \Sigma, \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k)$ com uma função de Morse com $k-1$ pontos críticos de índice 2 e campo pseudo-gradiente ξ_1 . Sobre cada componente de $\Sigma_1 + \dots + \Sigma_k$ adjunte um disco fechado \bar{B}^3 ao longo de $\partial\bar{B}^3 = S^2$ juntamente com uma função de Morse com um único ponto crítico de índice 3.

Obtém-se pela construção acima uma bola \bar{B}^3 cujo bordo é Σ , juntamente com uma função de Morse $-g$ com $k-1$ pontos críticos de índice 2, e k pontos críticos de índice 3.

$g: (\mathbb{B}^3; \emptyset, \Sigma) \longrightarrow ((-\infty, 0]; -K, 0)$ é uma função de Morse com K pontos críticos de índice 0 e $k-1$ pontos críticos de índice 1 que conectam mínimos.



Sejam $W_0 = \mathbb{B}^3$, $\Sigma = S_0$, $g = f_0$ a função de Morse e ξ_0 o campo pseudo-gradiente acima.

Seja A o conjunto dos pares de discos associados sobre Σ , $\#A = a$ e consideremos os cobordismos elementares $(W_i; S_{i-1}, S_i)$, $1 \leq i \leq a$, com funções de Morse f_i , campos pseudo-gradientes ξ_i construídos tomando-se para mergulho característico o par de discos associados de número i levados até S_{i-1} pelo fluxo do campo pseudo-gradiente ξ_{i-1} .

Sobre a reunião $(W; \emptyset, S_a) = \bigcup_{i=0}^a (W_i; S_{i-1}, S_i)$ as extensões de f_i e ξ_i são consideradas, de modo que se tem sobre o bordismo W_a uma função de Morse com k mínimos, $k-1$ índices 1 que conectam mínimos e a índices 1 que introduzem alças.

A superfície S_a é conexa e sobre S_a as curvas de índice 2 são curvas fechadas e disjuntas.

Por hipótese Σ contém um diagrama de Heegaard, de modo que dentre as curvas de índice 2 sobre S_a , um sistema máximo de curvas topologicamente independentes é dado. S_a tem gênero a e seja $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_a\}$ um tal sistema.

Sejam os cobordismos elementares $(X_i; S_{a+i-1}, S_{a+i})$ com funções de Morse f_{a+i} e campos pseudo-gradiente ξ_{a+i} com um único ponto crítico de índice 2 construídos tomando-se para mergulho característico as curvas c_i levadas até S_{a+i-1} pelo fluxo de ξ_{a+i-1} .

As funções f_{a+i} e os campos ξ_{a+i} , $0 \leq i \leq a$ se juntam para definir sobre

$$(X; \emptyset, S_{2a}) = (W; \emptyset, S_a) \cup \bigcup_{i=1}^a (X_i; S_{a+i-1}, S_{a+i})$$

uma função de Morse com um campo pseudo-gradiente com k mínimos, $k-1$ índices 1 que conectam mínimos a índices 1 que introduzem alças e a índices 2 que desfazem as alças.

Sobre $S_{2a} \approx S^2$ considere as curvas de índice 2 de Σ excetadas através do fluxo do campo pseudo-gradiente acima. Tais curvas são tomadas para mergulhos característicos de selas de índice 2 definindo-se cobordismos elementares juntamente com funções de Morse e campos pseudo-gradientes como antes. Se b é o número de curvas de índice 2 em Σ , no final

obtêm-se um bordismo de $b-a+1$ cópias de S^2 . Sobre cada cópia de S^2 cole um disco \bar{B}^3 juntamente com uma função de Morse com um único ponto crítico de índice 3.

Obtem-se uma 3-variedade fechada e conexa M^3 juntamente com uma função de Morse $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ e um campo pseudo-gradiante $\xi: M \rightarrow TM$ tais que \sum_g^ξ difere de Σ pela numeração das curvas de índice 2.

Rearranje g , obtendo f , de modo que as curvas de índice 2 sobre \sum_f^ξ tem a numeração dada em Σ . Isto completa a prova do Teorema. △

Definição 3.7.: - Dado um diagrama esférico Σ com k curvas de índice 1, chama-se função padrão para Σ a uma função de Morse ordenada $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com $k+1$ mínimos e tal que $\sum_f^\xi = \Sigma$ e as selas de índice 1 que conectam mínimos aparecem antes das demais selas de índice 1.

Definição 3.8.: - Dois diagramas esféricos Σ e Σ' são isomorfos se existe um difeomorfismo $d: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ preservando os elementos associados. Denotamos por $\Sigma \equiv \Sigma'$ o fato de Σ e Σ' serem isomorfos.

Claramente isomorfismo de diagramas esféricos é uma relação de equivalência para o conjunto dos diagramas esféricos.

Proposição 3.9.: - Seja $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse.

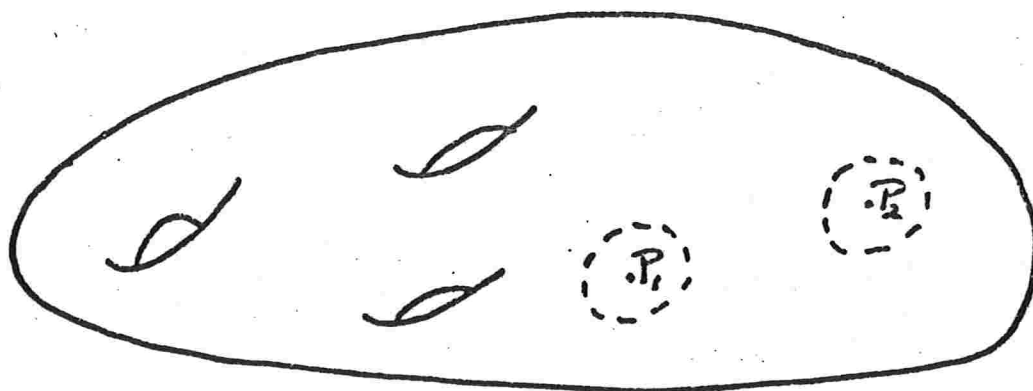
a) O campo pseudo-gradiente Σ para f pode ser tomado de modo que se um par de discos associados introduz alça, então os seus iterados pelo fluxo de ξ estão sempre numa mesma componente conexa em qualquer nível de f .

b) Se p é um ponto crítico de f que conecta mínimos, existe um campo pseudo-gradiente ξ para f relativamente ao qual podem ser escolhidas curvas simples e fechadas isotópicas à esfera à direita de p num nível regular que sucede p e que não encontram pares de discos associados sobre qualquer nível de f .

Demonstração: - a) Seja $p \in M^3$ um ponto crítico de índice 1 de $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ que introduz alça, ξ um campo pseudo-gradiente para f e $\epsilon > 0$ tal que p é o único ponto crítico de f em $f^{-1}[f(p)-\epsilon, f(p)+\epsilon]$. Denotamos por $V_{\pm\epsilon} = f^{-1}(f(p) \pm \epsilon)$.

Seja $\phi|_{S^0 \times 0}: S^0 \times 0 \longrightarrow V_{-\epsilon}$ a esfera à esquerda de p :

$$\phi(S^0 \times 0) = \{p_1, p_2\} \subset V_{-\epsilon}$$



60.

Se α é a trajetória de ξ por p_1 , α intercepta a esfera Σ_i para algum i . Seja U uma vizinhança de p_1 em $V_{-\epsilon}$ que é trazida pelo fluxo de ξ até Σ_i . (Teorema do fluxo tubular longo).

Seja $k: V_{-\epsilon} \rightarrow V_{-\epsilon}$ um difeomorfismo isotópico à identidade de $V_{-\epsilon}$ que leva p_2 em U e deixa p_1 fixo.

O campo pseudo-gradiente ξ é modificado sobre

$$f^{-1}\left[f(p) - \frac{\epsilon}{\alpha}, f(p) - \epsilon\right]$$

por esta difeotopia de $V_{-\epsilon}$ através do Teorema 1.28.

O par de discos associados ao ponto crítico p não é separado por nenhum nível da função e a prova de (a) é completa.

b) Análoga \tilde{a} de (a). A

3.10.: Ação de Γ sobre Σ

Seja $\Gamma = (\gamma, V; f, \sigma)$ um grafo de Reeb, $V = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ ordenado por f e $C_f = f(V) = (c_0, c_1, \dots, c_n)$, com $c_i = f(p_i)$, $0 \leq i \leq n$.

Distinguiremos os seguintes subconjuntos ordenados de

V :

$$P_m = (p \in V \mid \sigma(p) = 0) = (p_{m_0}, p_{m_1}, \dots, p_{m_q})$$

$$P_c = (p \in V \mid \sigma(p) = 1 \text{ e } p \text{ conecta mínimos}) = (p_{c_1}, p_{c_2}, \dots, p_{c_q})$$

$$P_a = (p \in V \mid \sigma(p) = 1 \text{ e } p \text{ não conecta mínimos}) = (p_{a_1}, p_{a_2}, \dots, p_{a_r})$$

$$P_n = (p \in V \mid \sigma(p) = 2) = (p_{n_1}, \dots, p_{n_s})$$

$$P_M = (p \in V \mid \sigma(p) = 3) = (p_{M_1}, \dots, p_{M_t}).$$

Seja Σ um diagrama esférico que é considerado decomposto como a soma conexa de tantos diagramas quantas forem as curvas de índice 1 mais um. Tal decomposição é feita cortando-se Σ através das curvas de índice 1 e colando-se bolas \bar{B}^2 ao longo dos bordos componentes conexas obtidas. Os discos introduzidos são denotados aos pares e a cada par destes discos associamos um elemento de P_c correspondente à numeração que a curva tinha. Desta forma tem-se $\Sigma = \Sigma_0 \# \dots \# \Sigma_k$.

Associamos a cada esfera Σ_i um vértice de P_m e temos

$$\Sigma = \Sigma_{m_0} \# \Sigma_{m_1} \# \dots \# \Sigma_{m_q}$$

O número i do i -ésimo par de discos associados é substituído pelo vértice p_{a_i} de p_a e o número j da j -ésima curva de índice 2 de Σ é designada com o símbolo p_{n_j} , $1 \leq j \leq s$.

Para cada j , $0 \leq j \leq n$, definimos uma superfície S_j com elementos associados assim:

$$S_0 = \Sigma_{m_0} \quad \text{e}$$

$$S_j = \chi(S_{j-1}, \phi_{p_j})$$

onde Σ_{m_0} tem os elementos associados que estavam em Σ e

$$\phi_{p_j}: S^{\sigma(p_j)-1} \times 0 \longrightarrow S_{j-1}$$

\bar{e} é o mergulho associado ao elemento p_λ em $\Sigma_{m_0} \dots \Sigma_{m_q}$

Note-se que $\sigma(p_j)=1$ ou 2 o traço desse mergulho aparece propriamente em S_{j-1} definindo ϕ_{p_j} (vide proposição 1.18).

Por outro lado, se $\sigma(p_j)=0$ o mergulho correspondente \bar{e} é vazio, o que, na cirurgia corresponde a fazer a reunião disjunta de S_{j-1} com uma cópia de S^2 . Convencionamos que

$$S_j = S_{j-1} + \Sigma_{m_j}.$$

Ainda se $\sigma(p_j)=3$, o traço do mergulho \bar{e} é uma cópia de S^2 que, na cirurgia, deve ser eliminada. Neste caso, pelo menos uma das componentes de S_{j-1} , deve ser uma esfera S^2 sem elementos associados: escolha uma destas componentes e a retire de S_{j-1}

$$S_j = S_{j-1} \setminus S^2.$$

Construimos um grafo com vértices p_0, p_1, \dots, p_n do seguinte modo: tem-se tantas arestas incidindo simultaneamente em p_i e p_j , com $i < j$ e $\sigma(p_i) \neq 3 \neq \sigma(p_j)$, quantas forem as componentes conexas nas quais aparece o traço de ϕ_{p_j} que surgiram ou foram modificadas quando da obtenção de S_i e não mais foram modificadas até S_{j-1} ; se $\phi(p_j)=3$, uma esfera S^2 foi esquecida na obtenção de S_j e se tal esfera aparece quando da obtenção de p_i , uma aresta entre p_i e p_j é introduzida.

Se $r \in f(\gamma) \subset C_f; f^{-1}(r)$ é constituída de pontos interiores sobre arestas de γ e a cada ponto tem-se associado uma superfície fechada e conexa, de modo que $f^{-1}(r)$ corresponde a S_j para j tal que $c_j < r < c_{j+1}$.

Definição: - Γ atua sobre Σ se existem escolhas que tornam as construções acima possíveis, de modo que o grafo obtido resulta isomorfo a Γ por um isomorfismo que estende a identidade de V .

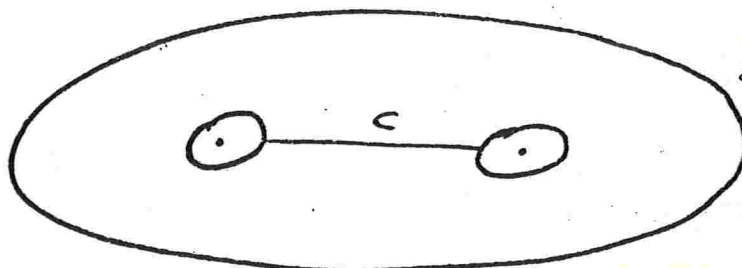
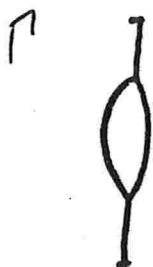
Nota: - Γ Pode atuar sobre Σ de maneiras diferentes.

Definição 3.11.: - Γ e Σ são compatíveis se Σ admite uma ação de Γ .

Exemplos: - i) Γ e Σ são compatíveis

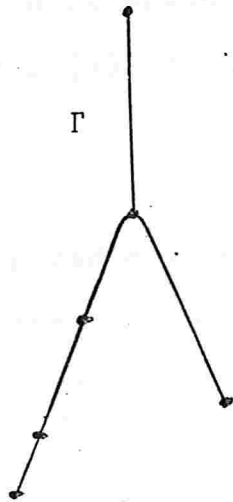


ii) Γ e Σ não são compatíveis.

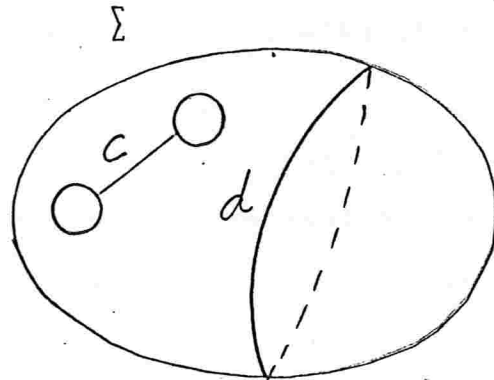


64.

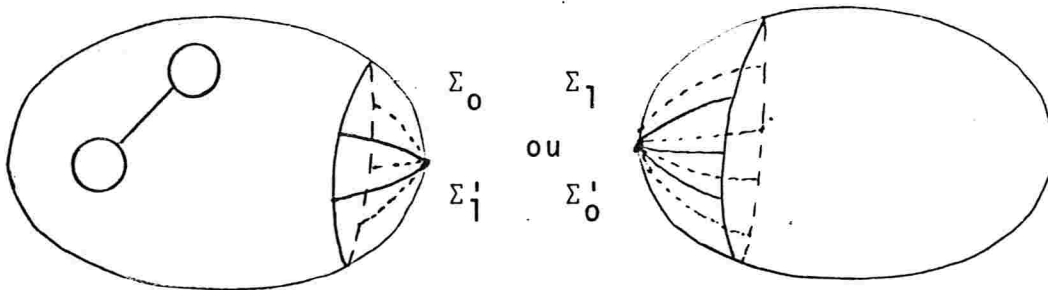
iii) Consideremos o grafo



e o diagrama



Decompondo Σ e numerando as componentes conexas, temos



$$\Sigma = \Sigma_0 \# \Sigma_1 = \Sigma'_0 \# \Sigma'_1 .$$

Γ e Σ são compatíveis com a escolha Σ_0 e Σ_1 mas relativamen-

te a Σ'_0 e Σ'_1 o grafo da ação resulta



que não é

isomorfo a Γ , donde Γ não atua sobre Σ com a escolha Σ'_0 e Σ'_1 .

Δ

§4. Representação de Funções de Morse em Dimensão Três

Definição 4.0.: - Um par $D=(\Gamma, \Sigma)$ onde Γ é um grafo de Reeb e Σ é um diagrama esférico é possível se existem $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e um campo pseudo-gradiente ξ para f tais que,

$$\Gamma \equiv \Gamma(f) \text{ e } \Sigma \equiv \Sigma_f^\xi$$

Teorema 4.1.: - $D=(\Gamma, \Sigma)$ é possível se, e somente se Γ e Σ são compatíveis.

Demonstração: - Se D é possível, por 4.0. existem $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\xi: M \rightarrow TM$, pseudo-gradiente para f tais que $\Gamma \equiv \Gamma(f)$ e $\Sigma \equiv \Sigma_f^\xi$. Segue-se que Γ e Σ são compatíveis, pois Σ admite uma desconexão dada por ξ e f via o difeomorfismo $d: \Sigma \rightarrow \Sigma_f^\xi$ sobre a qual Γ atua. Pela definição 3.10. Γ atua sobre Σ , donde a compatibilidade.

Reciprocamente, suponha que Γ e Σ são compatíveis. Efetue a decomposição de Σ em soma conexa $\Sigma_1 \# \Sigma_2 \# \dots \# \Sigma_k$ através das curvas de índice 1 de Σ , k é o número de índices 0 de Γ e as operações indicadas por Γ sobre a decomposição são possíveis.

Vamos construir $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$, juntamente com um campo pseudo-gradiente $\xi: M \rightarrow TM$, de modo que $\Gamma \equiv \Gamma(f)$ e $\Sigma \equiv \Sigma_f^\xi$.

Com efeito, o grafo de Reeb Γ é uma 4-upla $\Gamma = (\gamma, V; \bar{f}, \sigma)$ onde γ é o espaço topológico subjacente, V é o conjunto de vértices $\bar{f}: \gamma \rightarrow [a, b]$ é a função "altura" e σ é a numeração dos vértices de γ , $c_i = f(p_i)$ e r_i , $1 \leq i \leq n$ níveis regulares de \bar{f} tais que

$$a = c_0 < r_1 < c_1 < r_2 < \dots < r_{n-1} < c_{n-1} < r_n < c_n = b.$$

$f^{-1}[a, r_1]$ é um subespaço de γ homeomorfo a um segmento I_0 .

Sejam $M_0 = (\bar{B}^3; \emptyset, \Sigma_1)$ um cobordismo elementar com função de Morse, $f: \bar{B}^3 \rightarrow [a, r_1]$, campo pseudo-gradiente ξ_0 , de modo que

$$\gamma(f_0) = \bar{f}^{-1}[a, r_1] \text{ e } \bar{f}_0 = \bar{f}|_{\bar{f}^{-1}[a, r_1]}.$$

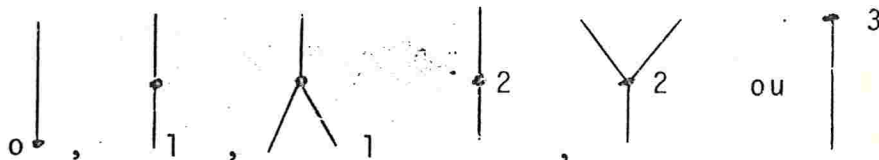
A construção de $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\xi: M \rightarrow TM$ é feita por recorrência $f_0: M_0 \rightarrow [a, r_1]$ e $\xi_0: M_0 \rightarrow TM_0$ são dados acima. Suponha que se tenha $f_k: M_k \rightarrow [a, r_k]$ tal que

$$f_k = f|_{f^{-1}[a, r_k]}, \quad \gamma(f_k) = \bar{f}^{-1}[a, r_k], \quad \xi_k: M_k \rightarrow TM_k$$


pseudo-gradiente para f_k tal que o diagrama esférico (esqueleto de f_k) é um subdiagrama de $\Sigma_1 + \dots + \Sigma_k$ contendo os traços dos mergulhos característicos dos pontos críticos correspondentes a p_0, p_1, \dots, p_k considerados na definição 3.0.

Vamos construir M_{k+1} juntamente com f_{k+1} e ξ_{k+1} com a propriedade acima.

$\bar{f}^{-1}[r_k, r_{k+1}]$ é grafo de um cobordismo elementar. A componente conexa que contém o vértice \bar{e} é de um dos seguintes tipos:



e as outras componentes são segmentos.

Seja $V_k = f_k^{-1}(r_k)$. Se p_{k+1} tem índice 0, sua vizinhança em $\bar{f}^{-1}[r_k, r_{k+1}]$ é  e $(M_{k+1}; \emptyset, V_{k+1})$ é obtido assim:

$$(M_k; \emptyset, V_k) \bigcup_{V_k} (V_k \times [r_k, r_{k+1}]; V_k \times r_k, V_k \times r_{k+1}) + (\bar{B}^3; \emptyset, \Sigma_j),$$

onde Σ_j é a esfera da decomposição de Σ associada ao vértice de índice 0 de Γ . A função f_{k+1} é f_k sobre M_k ,

$$f_{k+1}|_{V_k \times [r_k, r_{k+1}]}: V_k \times [r_k, r_{k+1}] \longrightarrow [r_k, r_{k+1}]$$

e é análoga a f_0 sobre $(\bar{B}^3; \emptyset, \Sigma_j)$. O campo pseudo-gradiente ξ_{k+1} , é ξ_k sobre M_k , a extensão de $\xi|_{V_k}$ óbvia sobre

$V_k \times [r_k, r_{k+1}]$ e como ξ_0 sobre \bar{B}^3 .

Sobre $V_{k+1} = V_k + S^2$ os traços dos mergulhos característicos dos vértices p_{k+2}, \dots, p_n que não foram introduzidos por Σ_j são levados pelo fluxo que é tubular até $f_{k+1}^{-1}|_{V_{k+1}}$.

Se p_{k+1} é um vértice dos outros tipos, o mergulho característico de p_{k+1} aparece em V_{k+1} porque Γ atua sobre Σ .

Seja $\phi: S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \longrightarrow V_{k+1}$, $\lambda \neq 0$ tal mergulho.

$$M_{k+1} = (M_k; \emptyset, V_k) \bigcup_{V_k} (\omega(V_k, \phi); V_k, \chi(V_k, \phi)) ,$$

f_{k+1} é f_k sobre M_k , a função padrão sobre $\omega(V_k, \phi)$; ξ_{k+1} é ξ_k sobre M_k , o campo padrão sobre $\omega(V_k, \phi)$, (vide [M₁] pág. 26).

Sobre $V_{k+1} = f_{k+1}^{-1}(r_{k+1})$ os traços dos mergulhos característicos de p_{k+2}, \dots, p_n são levados pelo fluxo de ξ_{k+1} que é um difeomorfismo entre $V_k \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times 0)$ e $V_{k+1} \setminus \phi_D(0 \times S^{2-\lambda})$, onde $\phi_0: B^\lambda \times S^{2-\lambda} \longrightarrow \chi(V_k, \phi)$ é o mergulho à direita de p .

$$\text{Claramente, } \gamma(f_{k+1}) = \bar{f}^{-1}[a, r_{k+1}], \quad \bar{f}_{k+1} = \bar{f}|_{\bar{f}^{-1}[a, r_{k+1}]},$$

ξ_{k+1} proporciona um esqueleto de f_{k+1} que é um subdiagrama de $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k$ contendo os traços dos mergulhos característicos dos pontos críticos p_0, p_1, \dots, p_{k+1} .

Isto completa a prova do Teorema 4.1. △

Definição 4.2.: - i) Dada $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\xi: M \longrightarrow TM$, o par $D_f^\xi = (\Gamma(f), \Sigma_f^\xi)$ é um diagrama para o par (f, ξ) .

ii) Dois pares $D = (\Gamma, \Sigma)$ e $D' = (\Gamma', \Sigma')$ são isomorfos se têm coordenadas isomorfas.

Claramente isomorfismo para pares de diagramas é uma relação de equivalência.

Teorema 4.3.: - Se $D = (\Gamma, \Sigma)$ é possível, então existe uma única função $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, a menos de equivalência, tal que $D \equiv D_f^\xi$, onde ξ é um campo pseudo-gradiente para f .

Demonstração: - Sejam $f, g: M \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de Morse com campos pseudo-gradientes ξ e η , respectivamente, tais que $D_f^\xi \equiv D_g^\eta \equiv D$. Vem $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$ e $\Sigma_f^\xi \equiv \Sigma_g^\eta$.

Pela definição de $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$ existe um homeomorfismo $i: \gamma(f) \longrightarrow \gamma(g)$ tal que

$$\begin{array}{ccc} & \bar{f}|_{V_f} & \\ & \longrightarrow & \\ i|_{V_f} \downarrow & & \downarrow \ell \\ V_f & & C_f \\ & \longrightarrow & \\ V_g & \bar{g}|_{V_g} & C_g \end{array}$$

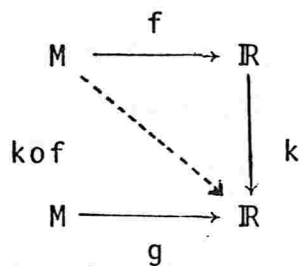
é comutativo, com ℓ crescente.

Pela proposição 2.8. existe um homeomorfismo $j: \gamma(f) \longrightarrow \gamma(g)$ e um difeomorfismo $k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{array}{ccc} \gamma(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R} \\ j \downarrow & & \downarrow k \\ \gamma(g) & \xrightarrow{\bar{g}} & \mathbb{R} \end{array}$$

é comutativo.

Considere o difeomorfismo $k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Temos a seguinte situação:



Para a equivalência de f com g é suficiente que exista um difeomorfismo $h: M \rightarrow M$ tal que $g \circ h = k \circ f$, de modo que substituimos f por $k \circ f$ e supomos que f e g têm a mesma imagem, os mesmos valores críticos e correspondendo a pontos críticos de mesmos índices. Também $\Sigma_f^\xi = \Sigma_{k \circ f}^\xi$, pois k é crescente.

Suponhamos então que $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de Morse tais que $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g) \equiv \Gamma$ e $\Sigma_f^\xi \equiv \Sigma_g^\eta \equiv \Sigma$. Temos então, homeomorfismo $j: \gamma(f) \rightarrow \gamma(g)$ global para a equivalência dos grafos de Reeb e difeomorfismo $\ell: \Sigma_f \rightarrow \Sigma_g$ preservando elementos associados.

Seja $\Sigma_f^\xi = \Sigma_1 \# \Sigma_2 \# \dots \# \Sigma_k$ e $\Sigma_1 + \dots + \Sigma_k$ a reunião disjunta associada de modo que Γ atua: a ordem $1, 2, \dots, k$ é a ordem dos mínimos de f e $\Sigma_g^\eta = \Sigma_1' \# \dots \# \Sigma_k'$, $\Sigma_1' + \dots + \Sigma_k'$ o correspondente para g .

Claramente a bijeção dos vértices de índice 0 sobre as esferas $\Sigma_1' + \Sigma_2' + \dots + \Sigma_k'$ para g não precisa ser compatível com ℓ .

Seja $\alpha: \{0, 1, \dots, k\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ a bijeção para o par (g, η) .

Se $P_c = (p \in V \mid \sigma(p) = 1 \text{ e } p \text{ conecta mínimos}) = (p_{c_1}, \dots, p_{c_{k-1}})$, seja $\epsilon > 0$ tal que p_{c_j} é o único vértice de $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$ sobre

$$\bar{f}^{-1}, \bar{g}^{-1}[\bar{f}(p_{c_j}) - \epsilon, \bar{f}(p_{c_j}) + \epsilon].$$

Seja A_j a componente conexa de $\bar{f}^{-1}(-\infty, f(p_{c_j}) + \epsilon]$, $1 \leq j \leq k-1$ que contém o vértice p_{c_j} e $B_j^{1,2}$ as componentes conexas de

$$\bar{f}^{-1}(-\infty, f(p_{c_j}) - \epsilon] \cap A_j.$$

A obrigatoriedade de α ter pontos fixos fica vinculada ao fato de $B_j^{1,2}$ conter vértices de índices maiores do que zero.

Asserção 0 - O campo η para g pode ser modificado de modo que com o novo campo τ pseudo-gradiente para g o difeomorfismo $d: \sum_f^\xi \longrightarrow \sum_g^\tau$ é compatível com a escolha da bijeção dos vértices de índice 0.

Demonstração: - Seja $(p_{c_1}, p_{c_2}, \dots, p_{c_k}) = (\text{pontos críticos de índice 1 que conectam mínimos de } g)$ e $\epsilon > 0$ tal que

$$g^{-1}[g(p_{c_i}) - \epsilon, g(p_{c_i}) + \epsilon]$$

são tem p_{c_i} para ponto crítico.

Denotamos por $S_f^\xi(i)$, $S(i)$ e $S_g^\eta(i)$ as superfícies da ação de Γ sobre Σ_f^ξ , Σ e Σ_g^η , respectivamente., $0 \leq i \leq n$.

Do fato de $\Sigma_f^\xi \equiv \Sigma \equiv \Sigma_g^\eta$, seja

$$\ell: \Sigma_f^\xi \longrightarrow \Sigma_g^\eta$$

difeomorfismo preservando elementos associados. Efetuando-se as operações indicadas por Γ sobre Σ_f^ξ e Σ_g^η , a partir de ℓ obtemos

$$\bar{\ell}: S_f^\xi(c_k) \longrightarrow S_g^\eta(c_k)$$

preservando elementos associados. Com efeito, corte $\Sigma_f^\xi \equiv \Sigma \equiv \Sigma_g^\eta$ pelas curvas de índice 1 e ao longo de cada componente conexa do bordo cole disco \bar{B}^2 , o qual é assinalado e é associado a um vértice p_{c_j} da ação. O difeomorfismo $\ell: \Sigma_f^\xi \longrightarrow \Sigma_g^\eta$ origina $\ell_1: \Sigma_f^\xi \setminus \{ \text{curvas de índice 1} \} \longrightarrow \Sigma_g^\eta \setminus \{ \text{curvas de ind 1} \}$ e é estendido a $\ell: \Sigma_0 + \Sigma_1 + \dots + \Sigma_k \longrightarrow \Sigma'_0 + \dots + \Sigma'_k$; a numeração das componentes conexas é dada pela ação de Γ sobre Σ_f^ξ e Σ_g^η

$$\bar{\ell}: S_f^\xi(c_k) \longrightarrow S_g^\eta(c_k)$$

é obtido de ℓ e efetuando-se as operações indicadas por Γ sobre $\Sigma_0 + \dots + \Sigma_k$, $\Sigma'_0 + \dots + \Sigma'_k$. Alternativamente, $S_f^\xi(c_k)$ pode ser obtida apagando-se as curvas de índice 1 de Σ_f^ξ e efetuando-se as operações correspondentes aos vértices p_j que não conectam mínimos com $j < c_k$.

Ainda com relação a $\tilde{\ell}$ não se tem $\tilde{\ell}(\sum_i) = \sum_i'$, necessariamente.

Seja $\alpha: (0, 1, 2, \dots, k) \longrightarrow (0, 1, 2, \dots, k)$ dada por $\alpha(i) = j$ se $\tilde{\ell}(\sum_i) = \sum_j'$.

A cada vértice p_{C_i} do grafo de Reeb $\Gamma \equiv \Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$ associamos um par ordenado de subconjuntos de $\{0, 1, 2, \dots, k\}$:

$$p_{C_i} \longmapsto (C_{i_1} = \{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_1}\}, C_{i_2} = \{a_{i_1+1}, \dots, a_{i_m}\})$$

que consistem dos índices dos vértices das componentes conexas de $\bar{g}^{-1}(-\infty, \bar{g}(P_{C_i}) - \varepsilon]$ que são conectadas por P_{C_i} e a ordem (C_{i_1}, C_{i_2}) é dada por: C_{i_1} contém o mínimo de

$$C_{i_1} \cup C_{i_2}.$$

Segue-se da ação de Γ sobre \sum_f^ξ , Σ e \sum_g^η que

$$S(c_{i-1}) = A_{C_{i_1}} + A_{C_{i_2}} + D \quad \text{e} \quad S(c_i) = A_{C_{i_1}} \# A_{C_{i_2}} + D, \quad \text{onde } A_{C_{i_1}} \text{ e } A_{C_{i_2}}$$

representam os níveis sobre os quais o mergulho de P_{C_i} incide e D é a reunião disjunta das demais componentes

O campo pseudo gradiente ξ para g é modificado para τ assim:

$$\text{se } \bar{\alpha}: S_f^\xi(c_k) = A_{C_{k_1}} \# A_{C_{k_2}} + D \longrightarrow S_g^\eta(c_k) = A'_{C_{k_1}} \# A'_{C_{k_2}} + D$$

é compatível com a ordem, o campo pseudo-gradiente η é mantido:

$$\eta_k = \eta \quad \text{e caso contrário} \quad \bar{\alpha}(A_{C_{k_1}}) = A'_{C_{k_2}} \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}(A_{C_{k_2}}) = A'_{C_{k_1}};$$

74.

segue-se $A_{C_{k_1}} \approx A_{C_{k_2}}$ dada a ação e o campo ξ_k é obtido de ξ por uma isotopia (Teorema 1.28).

Procedendo-se desta maneira para cada $i, 1 \leq i \leq k$, obtêm-se $\eta_i = \tau$ que demonstra a asserção 0.

Construção de $h: M \rightarrow M$

Sejam c_0, c_1, \dots, c_n os valores críticos de f e g e sejam r_1, r_2, \dots, r_n valores regulares para f e g tais que

$$c_0 < r_1 < c_1 < \dots < r_n < c_n.$$

Asserção 1: - Para os valores regulares $r_i, 1 \leq i \leq n$, tem-se que $f^{-1}(r_i) \approx g^{-1}(r_i)$ por um difeomorfismo que preserva os elementos associados sobre $f^{-1}(r_i)$ e $g^{-1}(r_i)$.

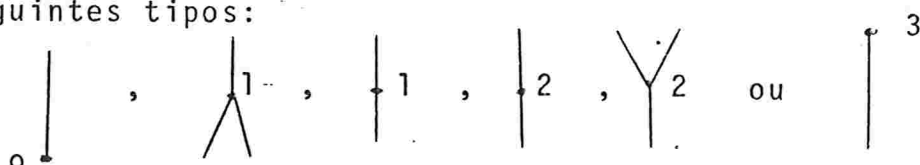
Demonstração: - Com efeito, do fato de c_0 ser valor mínimo absoluto de f e g , segue-se que $f^{-1}(r_1) \approx g^{-1}(r_1) \approx S^2$. Também na decomposição de Σ_f^ξ e Σ_g^η em reunião disjunta, tais esferas correspondem à primeira esfera via a ação de Γ , de modo que $d|_{\Sigma_1}: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1^i$ preservando os elementos associados e assim $d|_{\Sigma_1}: \Sigma_1 \approx f^{-1}(r_1) \rightarrow \Sigma_1^i \approx g^{-1}(r_1)$ proporciona um difeomorfismo entre $f^{-1}(r_1)$ e $g^{-1}(r_1)$ preservando elementos associados.

Suponha, por indução, que $f^{-1}(r_{k-1}) \approx g^{-1}(r_{k-1})$ por um difeomorfismo que preserva os elementos associados em $f^{-1}(r_{k-1})$ e $g^{-1}(r_{k-1})$.

Da comutatividade de

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R} \\
 \downarrow j & & \nearrow \bar{g} \\
 \gamma(g) & &
 \end{array}$$

segue-se que $\bar{f}^{-1}[r_{k-1}, r_k] \sim \bar{g}^{-1}[r_{k-1}, r_k)$ e como são grafos de cobordismos elementares, segue-se que em ambos os grafos a componente conexa que contém o vértice \bar{e} de um mesmo dos seguintes tipos:

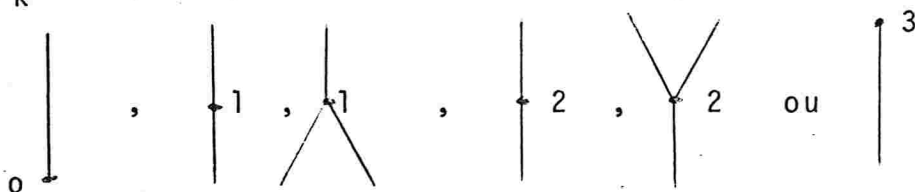


e as outras componentes são segmentos que correspondem a cobordismos-produto.

Nestas condições, como $f^{-1}(r_{k-1}) \approx g^{-1}(r_{k-1})$ por um difeomorfismo que preserva os elementos associados e $f^{-1}(r_k) \approx \chi(f^{-1}(r_{k-1}), \phi_{p_k}), g^{-1}(r_k) \approx \chi(g^{-1}(r_{k-1}), \phi'_{p_k})$, onde ϕ_{p_k}, ϕ'_{p_k} são respectivamente os mergulhos do vértice p_k sobre $f^{-1}, g^{-1}(r_{k-1})$ e como tais mergulhos são conjugados, pe-

la proposição 1.16. $f^{-1}(r_k) \approx g^{-1}(r_k)$. Resta a verificação de que tal difeomorfismo preserva os elementos associados sobre $f^{-1}(r_k)$ e $g^{-1}(r_k)$.

Com efeito, $f^{-1}[r_{k-1}, r_k]$ e $g^{-1}[r_{k-1}, r_k]$ são cobordismos elementares, a componente conexa que contém o ponto crítico p_k tem para grafo de Reeb um dos tipos abaixo



e as demais são segmentos que correspondem a cobordismos-produto.

Nas componentes cujo grafo \bar{e} um cobordismo-produto o difeomorfismo $f^{-1}(r_{k-1}) \approx g^{-1}(r_{k-1})$ da hipótese de indução não \bar{e} alterado, de modo que preserva elementos associados.

Sejam A e B as componentes conexas de $f^{-1}[r_{k-1}, r_k]$ e $g^{-1}[r_{k-1}, r_k]$, respectivamente, que contém p_k ;

$$A_1 = A \cap f^{-1}(r_{k-1}), \quad A_2 = A \cap f^{-1}(r_k),$$

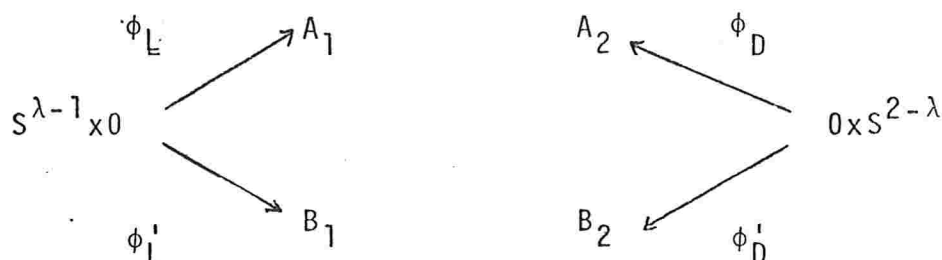
$$B_1 = B \cap g^{-1}(r_{k-1}) \text{ e } B_2 = B \cap g^{-1}(r_k).$$

1º caso: - $\text{ind } p_k = 0$ - Neste caso $A_2 \approx A_1 + \sum p_k$ e $B_2 \approx B_1 + \sum' p_k$

e o difeomorfismo $A_1 \approx B_1$ \bar{e} o da hipótese de indução e

$$d|_{\sum p_k} : \sum p_k \longrightarrow \sum' p_k \text{ satisfaz a condição.}$$

2º caso: - $\text{ind } p_k = 1$ ou 2 - Sejam



os mergulhos \tilde{a} esquerda e \tilde{a} direita de p_k em A e B . Temos

$A_2 \setminus \phi_D(0 \times S^{2-\lambda}) \approx A_1 \setminus \phi_L(S^{\lambda-1} \times 0)$ e $B_2 \setminus \phi'_D(0 \times S^{2-\lambda}) \approx B_1 \setminus \phi'_L(S^{\lambda-1} \times 0)$, os elementos associados a p_k estão sobre $A_2 \setminus \phi_D(0 \times S^{2-\lambda})$ e $B_2 \setminus \phi'_D(0 \times S^{2-\lambda})$ e os difeomorfismos procurados são obtidos pela proposição 1.16. como extensões dos considerados acima.

3º caso: - $\text{ind } p_k = 3$. - Neste caso, $A_1 \approx B_1 \approx S^2$ sem elementos associados e $A_2 \approx B_2 \approx \emptyset$, de modo que o difeomorfismo da hipótese de indução satisfaz as condições. Isto completa a prova da asserção 1.

Asserção 2: - Sejam x e y valores regulares de f tais que $f^{-1}[x, y]$ é um cobordismo elementar ou um cobordismo-produto. Então existe um difeomorfismo $h: f^{-1}[x, y] \rightarrow g^{-1}[x, y]$ tal que $f = g \circ h$ neste cobordismo.

Demonstração: - Com as notações da asserção 1 sejam r_k tal que entre x e r_k f não tem valores críticos. Claramente entre y e r_{k+1} f também não tem valores críticos.

Considere os difeomorfismos

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(r_k) & \xrightarrow{k} & g^{-1}(r_k) \\
 \uparrow \psi & & \uparrow \psi' \\
 f^{-1}(x) & \xrightarrow{\ell} & g^{-1}(x)
 \end{array}$$

onde $k: f^{-1}(r_k) \longrightarrow g^{-1}(r_k)$ é dado pela asserção 1 e preserva os elementos associados sobre $f^{-1}(r_k)$ e $g^{-1}(r_k)$,

$\psi: f^{-1}(x) \longrightarrow f^{-1}(r_k)$ e $\psi': g^{-1}(x) \longrightarrow g^{-1}(r_k)$ são dados pelos fluxos de ξ e η , respectivamente (vide proposição 1.6.)

e $\ell = \psi^{-1} k \psi$.

Se $f^{-1}[x,y]$ é um cobordismo-produto, a proposição 1.8. demonstra a asserção 2 e se $f^{-1}[x,y]$ é cóbordismo elementar, segue-se pelo Teorema 1.13. que $f^{-1}[x,y] \approx \omega(f^{-1}(x), \phi)$ e $g^{-1}[x,y] \approx \omega(g^{-1}(x), \phi')$ com ϕ e ϕ' os mergulhos característicos à esquerda dos pontos críticos de f e g , respectivamente. Como $\ell: f^{-1}(x) \longrightarrow g^{-1}(x)$ conjuga os elementos associados aos pontos críticos, pela proposição 1.16. ℓ se estende a $h: f^{-1}[x,y] \longrightarrow g^{-1}[x,y]$ conjugando f e g , e a prova da asserção 2 é completada.

Sejam $a = c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = b$ os valores críticos de f e g e $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ os $\bar{\varepsilon}$ psilons da definição 1.11.

Pela asserção 2 existem difeomorfismos $h : f^{-1}[a, b]$
 $h_i : f^{-1}[a_i, b_i] \longrightarrow g^{-1}[a_i, b_i]$, onde $a_i = c_i - 3\varepsilon_i^2$ e
 $b_i = c_i + 3\varepsilon_i^2$, tais que $f = g \circ h_i$ quando restritas a $f^{-1}[a_i, b_i]$
e de modo que $c_i + 4\varepsilon_i^2 \leq c_{i+1} - 4\varepsilon_{i+1}^2$.

As subvariedades $B_{i,i+1} = f^{-1}[c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2]$ e
 $B'_{i,i+1} = g^{-1}[c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2]$ são cobordismos produto donde
pela proposição 1.8. existem difeomorfismos

$$\phi : B_{i,i+1} \longrightarrow f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \text{ e}$$

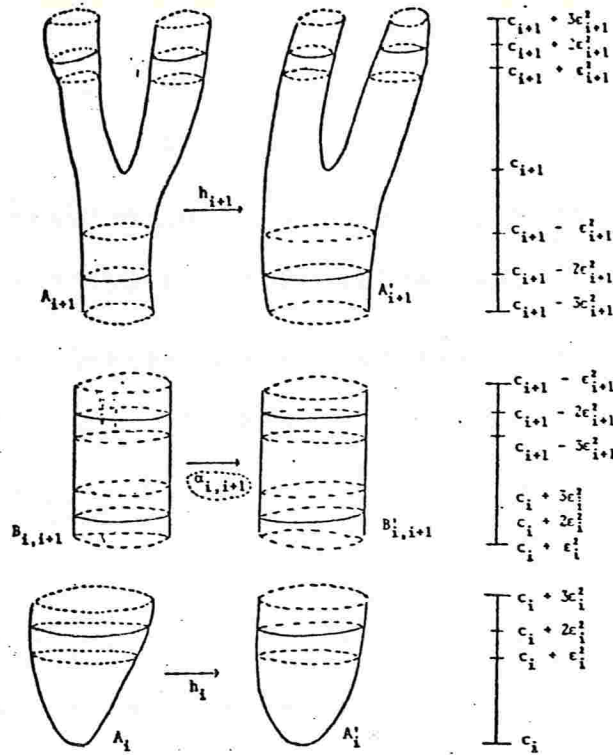
$$\psi : B'_{i,i+1} \longrightarrow g^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \text{ tais que}$$

$$f_1 \circ \phi = f|_{B_{i,i+1}} \text{ e } g_1 \circ \psi = g|_{B'_{i,i+1}}, \text{ onde } f_1 \text{ e } g_1 \text{ são as}$$

projeções na segunda coordenada.

Pela asserção 2 segue-se que $B_{i,i+1}$ e $B'_{i,i+1}$ são difeomorfos por um difeomorfismo que torna as funções equivalentes nestes cobordismos.

Considere agora, os difeomorfismos h_i restritos a
 $A_i = f^{-1}[c_i - 2\varepsilon_i^2, c_i + 2\varepsilon_i^2]$ e dois níveis consecutivos:



Asserção 3.: - Os difeomorfismos h_j podem ser tomados de modo que existem difeomorfismos $\alpha_{i,i+1}: B_{i,i+1} \rightarrow B'_{i,i+1}$ com

$$\alpha_{i,i+1}|_{A_i \times B_{i,i+1}} = h_i \quad \text{e} \quad \alpha_{i,i+1}|_{B_{i,i+1} \times A_{i+1}} = h_{i+1}$$

Demonstração: - Com efeito, consideremos sobre M os campos pseudo-gradientes ξ e η para f e g respectivamente, normalizados, isto é,

$$\xi(f) \equiv 1 \text{ fora de } \bigcup_{i=0}^n f^{-1}(c_i - \epsilon_i^2, c_i + \epsilon_i^2) \quad \text{e}$$

$$\eta(g) \equiv 1 \text{ fora de } \bigcup_{i=0}^n g^{-1}(c_i - \epsilon_i^2, c_i + \epsilon_i^2).$$

Observamos que a normalização acima não influi nos diagramas Σ_f^ξ e Σ_g^η , ou seja, se Σ_1 é normalizado de ξ no sentido acima, tem-se $\Sigma_f^\xi = \Sigma_f^{\xi^1}$ como já foi visto.

Construiremos a sequência acima por recorrência.

Consideremos as esferas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k; \Sigma'_1, \dots, \Sigma'_k$, onde $\Sigma'_i = d(\Sigma_i)$ mergulhadas em M .

$h_0: A_0 \longrightarrow A'_0$ é um difeomorfismo entre os discos \bar{B}^3 tal que $g \circ h_0 = f$ e $h_0|_{\partial A_0}: \partial A_0 = \Sigma_1 \longrightarrow \partial A'_0 = \Sigma'_1$ é o isomorfismo $d: \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma'_1$, de modo que h_0 preserva os diagramas.

Dado $h_i: A_i \longrightarrow A'_i$ preservando os diagramas vamos construir h_{i+1} e $\alpha_{i,i+1}$. Claramente o nível regular $f^{-1}(c_{i+2}\xi_i^2)$ é reunião disjunta $\bigcup_i T_i$ de superfícies fechadas que é obtida de Σ aplicando-se as cirurgias indicadas pelo par (Γ, Σ) : ação de Γ sobre Σ . Temos dois tipos de cirurgias: aquelas cujo traço do mergulho característico aparece em $\sum_f \xi$ e as que o traço não aparece. As últimas são dadas pelo grafo de Reeb: são as que introduzem mínimos ou máximos relativos de f .

Introduzimos as seguintes notações:

$$V_1 = f^{-1}(c_{i+2}\varepsilon_i^2), \quad V'_1 = g^{-1}(c_{i+2}\varepsilon_i^2),$$

$$V_2 = f^{-1}(c_{i+1}-2\varepsilon_{i+1}^2) \text{ e } V'_2 = g^{-1}(c_{i+1}-2\varepsilon_{i+1}^2).$$

Temos $V_1 \sim V_2 \sim V'_1 \sim V'_2$ e seja V uma cópia desta superfície. Difeomorfismos $\ell_1: V \longrightarrow V_1$ e $\ell_2: V \longrightarrow V'_1$; $h_i: V \longrightarrow V$ é dado por $h_i = \ell^{-1} \circ h_i|_V \circ \ell_1$; ϕ_t e ψ_t são os fluxos de ξ e η , respectivamente; $\theta_1: S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \longrightarrow V_2$ e $\theta_2: S^{\lambda-1} \times B^{3-\lambda} \longrightarrow V'_2$ são os mergulhos característicos dos pontos críticos de f e g , respectivamente.

Temos que

$$\phi_t: f^{-1}(c_{i+2}\varepsilon_i^2) = V_1 \longrightarrow f^{-1}(c_{i+1}-2\varepsilon_{i+1}^2) = V_2$$

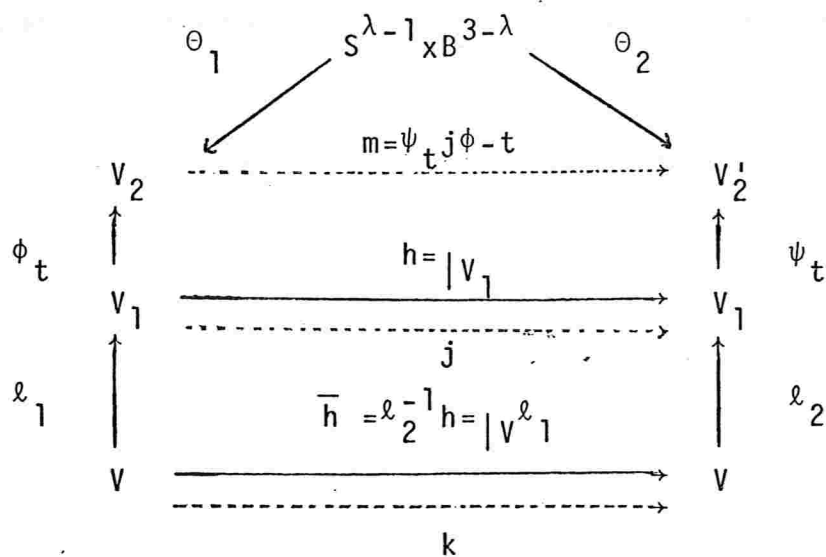
e

$$\psi_t: g^{-1}(c_{i+2}\varepsilon_i^2) = V'_1 \longrightarrow g^{-1}(c_{i+1}-\varepsilon_{i+1}^2) = V'_2$$

são os difeomorfismos dados pelos fluxos, onde t

$$t = c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2 - c_i - 2\varepsilon_i^2.$$

Consideremos o diagrama abaixo



onde as flechas cheias já foram definidas e as flechas pontilhadas definimos a seguir.

Existe $k: V \longrightarrow V$ isotópico a $\ell_2^{-1} \circ h = |V^{\ell_1}$ tal que

$$k \circ \ell_1^{-1} \circ \phi_{-t} \circ \theta_1 = \ell_2^{-1} \circ \psi_{-t} \circ \theta_2.$$

De fato, $h_i|_V: V_1 \longrightarrow V'_1$ a menos de isotopia tem esta propriedade pois preserva os traços dos mergulhos característicos e então pela prop. 1.18 os conjuga a menos de isotopia.

Seja $j = \rho_2 \circ \rho_1^{-1}$, donde j é difeomorfismo isotópico a $h_i|_V$ com tal propriedade.

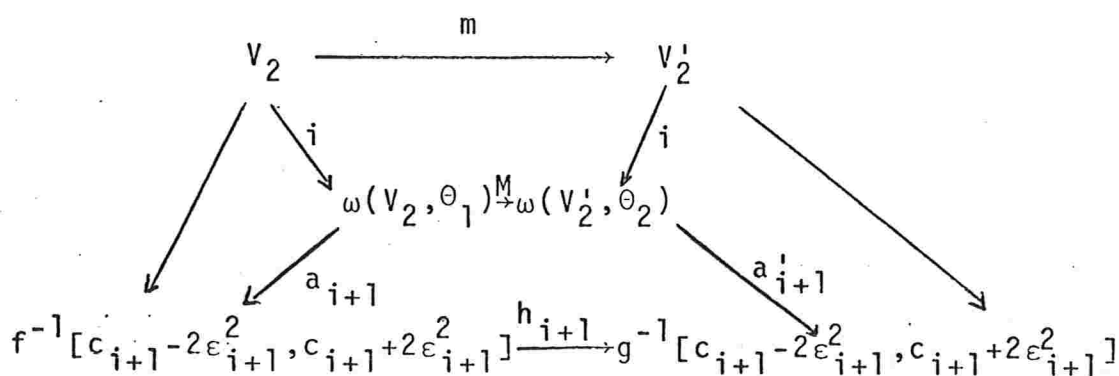
Via o difeomorfismo $m = \psi_t \circ j \circ \phi_{-t}$ construímos h_{i+1} .

Sejam $a_{i+1}: \omega(V_2, \theta_1) \longrightarrow f^{-1}[c_{i+1}-2\varepsilon_{i+1}^2, c_{i+1}+2\varepsilon_{i+1}^2]$ e $a'_{i+1}: \omega(V'_2, \theta_2) \longrightarrow g^{-1}[c_{i+1}-2\varepsilon_{i+1}^2, c_{i+1}+2\varepsilon_{i+1}^2]$ parametrizações dos cobordismos elementares que conjugam f e g com as funções padrões sobre $\omega(V, \phi)$.

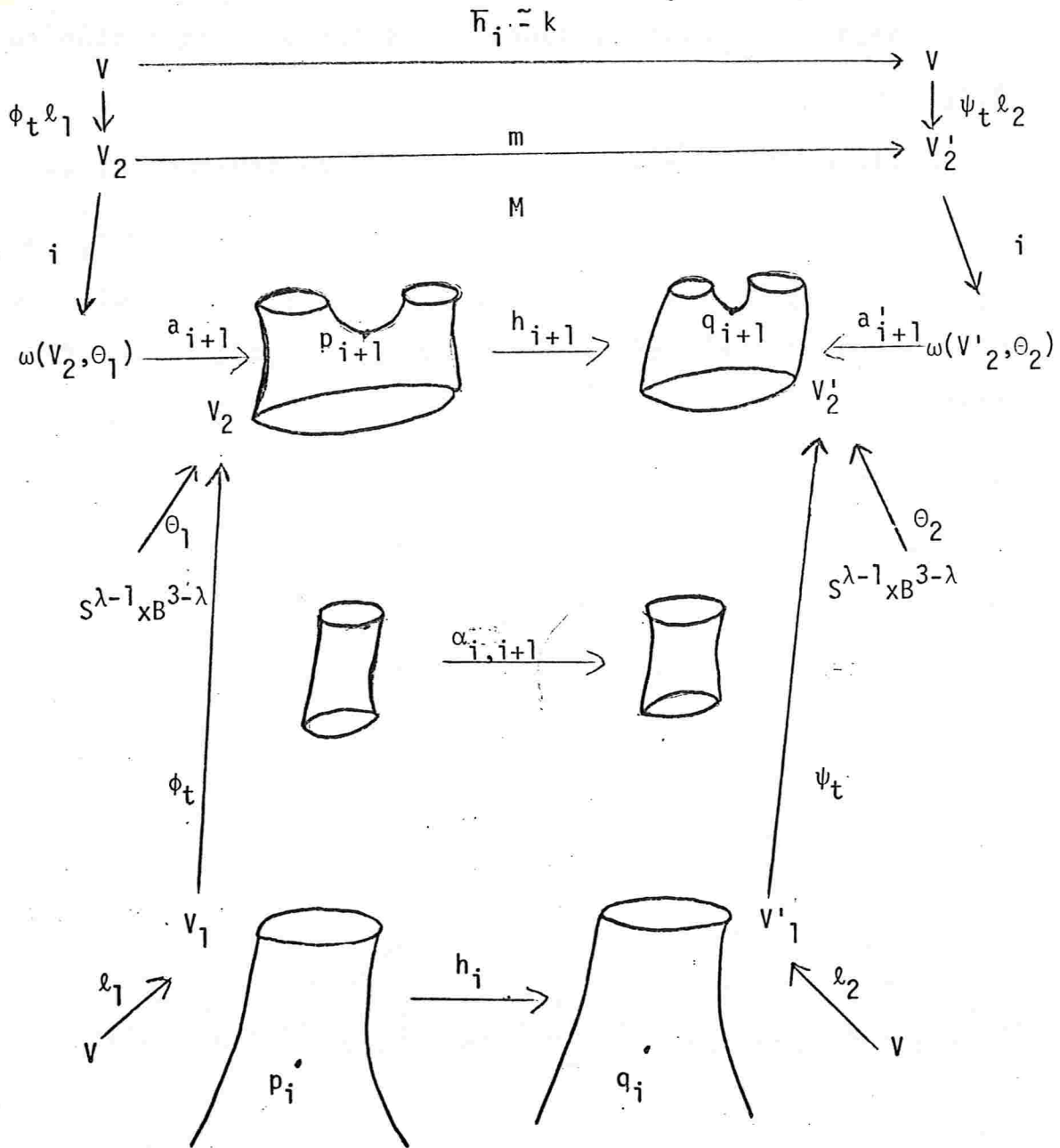
Definimos

$$h_{i+1}: f^{-1}[c_{i+1}-2\varepsilon_{i+1}^2, c_{i+1}+2\varepsilon_{i+1}^2] \longrightarrow g^{-1}[c_{i+1}-2\varepsilon_{i+1}^2, c_{i+1}+2\varepsilon_{i+1}^2]$$

por $h_{i+1} = a'_{i+1} \circ M \circ a_{i+1}^{-1}$ onde $M: \omega(V_2, \theta_1) \longrightarrow \omega(V'_2, \theta_2)$ é a extensão de m da proposição 1.16.



Claramente $h_{i+1}|_{f^{-1}(c_{i+1} + 2\epsilon_{i+1}^2)}$ preserva o diagrama a menos de isotopia, isto é, mantém discos e arcos que são levados pelo fluxo.



Vamos agora construir $\alpha_{i,i+1}$.

Com efeito, j e $h_i|_{V^{-1}(c_{i+2}\epsilon_i^2)}$ são isotópicos: se

$K: V \times [0,1] \longrightarrow V$ é uma isotopia entre $\ell^{-1}h_i\ell_1$ e k , a aplicação $\bar{K}: V_1 \times I \longrightarrow V_1'$ dada por

$\bar{K} = \ell_2 K (\ell_1; 1_I)^{-1}$ é uma isotopia entre j e $h_i|_{V_1}$.

Seja $\alpha: V_1 \times [c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2] \longrightarrow V_1' \times [c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2]$

uma isotopia entre h_i e j tal que $\alpha(x,t) = (h_i(x), t)$ se

$c_i + \epsilon_i^2 \leq t \leq c_i + 3\epsilon_i^2$ e $\alpha(x,t) = (j(x), t)$ se $c_{i+1} - 3\epsilon_{i+1}^2$

$c_{i+1} - 3\epsilon_{i+1}^2 \leq c_{i+1} - 2\epsilon_{i+1}^2$ e seja $\alpha_{i,i+1}: B_{i,i+1} \longrightarrow B_{i,i+1}'$

$$\alpha_{i,i+1} = \psi \alpha \phi^{-1}$$

Relativamente a $\alpha_{i,i+1}$, temos, sobre

$$f^{-1}[c_{i+1} - 3\epsilon_{i+1}^2, c_{i+1} - 2\epsilon_{i+1}^2], \alpha_{i,i+1}(x) = \psi \alpha(\phi_{c_i + 2\epsilon_i^2 - f(x)}(x), f(x)) =$$

$$= \psi(j\phi_{c_i + 2\epsilon_i^2 - f(x)}(x), f(x)) =$$

$$= \psi_{f(x) - c_i - 2\epsilon_i^2}^{j\phi_{c_i + \epsilon_i^2 - f(x)}}(x) =$$

$$= \psi_{f(x) - c_{i+1} + 2\epsilon_{i+1}^2}^{(\psi_t j \phi_{-t})\phi_{c_{i+1} - 2\epsilon_{i+1}^2 - f(x)}}(x) =$$

$$= \psi_{f(x) - c_{i+1} + 2\epsilon_{i+1}^2}^{\ell_{i+1}|_{f^{-1}(c_{i+1} - 2\epsilon_{i+1}^2)}}\phi_{c_{i+1} - 2\epsilon_{i+1}^2 - f(x)}(x) = \ell_{i+1}(x)$$

e sobre $f^{-1}[c_i+2\varepsilon_i^2, c_i+3\varepsilon_i^2]$, temos

$$\begin{aligned} \alpha_{i,i+1}(x) &= \psi\alpha\phi^{-1}(x) = \\ &= \psi\alpha(\phi_{c_i+2\varepsilon_i^2-f(x)}(x), f(x)) = \\ &= \psi(h_i|_{f^{-1}(c_i+2\varepsilon_i^2)}\phi_{c_i+2\varepsilon_i^2-f(x)}(x), f(x)) = \\ &= \psi_{f(x)-c_i-2\varepsilon_i^2}(h_i|_{f^{-1}(c_i+2\varepsilon_i^2)}\phi_{c_i+2\varepsilon_i^2-f(x)}(x)) = h_i(x) \end{aligned}$$

e a prova da asserção 3 é completada.

Segue-se também que

$$\alpha_{i,i+1}: B_{i,i+1} \longrightarrow B'_{i,i+1}$$

é tal que $g\alpha_{i,i+1} = f$.

De fato, tem-se

$$\begin{array}{ccccc} B_{i,i+1} & \xrightarrow{\quad} & f^{-1}(c_i+2\varepsilon_i^2) \times J & \xrightarrow{\quad} & g^{-1}(c_i+2\varepsilon_i^2) \times J & \xrightarrow{\quad} & B'_{i,i+1} \\ & \searrow f & \downarrow f_1 & \swarrow g_1 & & \swarrow g & \\ & & J & & & & \end{array}$$

onde $J = [c_i+\varepsilon_i^2, c_{i+1}-\varepsilon_{i+1}^2]$. $g\alpha_{i,i+1} = g(\psi\alpha\phi^{-1}) = g_1\alpha\phi = f_1\phi = f$.

Além disso,

$$M = \bigcup_{i=0}^{n-1} (A_i \cup B_{i,i+1} \cup A_{i+1})$$

e

$$M = \bigcup_{i=0}^{n-1} (A'_i \cup B'_{i,i+1} \cup A'_{i+1})$$

e a aplicação

$$h = \bigcup_{i=0}^{n-1} (h_i \cup \alpha_{i,i+1} \cup h_{i+1}): M \longrightarrow M$$

é um difeomorfismo tal que $f = goh$

A

O que foi feito até aqui mostra que os diagramas $D=(\Gamma, \Sigma)$ descrevem efetivamente as funções de Morse sobre as variedades 3-dimensionais.

Um problema que se coloca naturalmente é o de descobrir quando duas funções são equivalentes através de seus diagramas.

Com este objetivo vamos dar uma definição provisória (não combinatória) de equivalência entre diagramas que traduz a equivalência das funções.

Na 2ª parte essa definição será substituída por um critério combinatório para a equivalência dos diagramas.

Definição 4.4.: - Um par $D=(\Gamma, \Sigma)$ é dito uma representação de $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ se existe um campo de vetores pseudo-gradiente ξ para f tal que $D \equiv (\Gamma(f), \sum_f \xi)$.

Definição 4.5.: - $D = (\Gamma, \Sigma)$ e $D' = (\Gamma', \Sigma')$ são equivalentes se existem uma função de Morse $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ e campos pseudo-gradientes ξ e η para f , tais que $\Gamma \equiv \Gamma' \equiv \Gamma(f)$, $\Sigma = \Sigma_f^\xi$ e $\Sigma' = \Sigma_f^\eta$. Denotamos a equivalência entre D e D' por $D \sim D'$ e dizemos também que $\Sigma \equiv \Sigma'$.

Proposição 4.6.: - A relação definida em 4.5 é uma relação de equivalência para o conjunto de pares (Γ, Σ) compatíveis.

Demonstração: - A relação é claramente reflexiva e simétrica. Para transitividade, sejam $D \sim D'$ e $D' \sim D''$. Temos então, f e g tais que

$$\Gamma(f) \equiv \Gamma' \equiv \Gamma, \quad \Gamma(g) \equiv \Gamma' \equiv \Gamma'' \quad \text{e} \quad \Sigma_f^{\xi_1} = \Sigma, \quad \Sigma_f^{\xi_2} = \Sigma'; \quad \Sigma_g^{\eta_1} = \Sigma', \quad \Sigma_g^{\eta_2} = \Sigma''.$$

Segue-se que $\Gamma \equiv \Gamma' \equiv \Gamma'' \equiv \Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$ e como $\Sigma' = \Sigma_f^{\xi_2} = \Sigma_g^{\eta_1}$, vem f e g equivalentes pelo Teorema 4.3.

Assim existem difeomorfismos $h: M \longrightarrow M$ e $k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{array}{ccc} M^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

Substituindo f por kof , os diagramas (esqueletos geométricos) não se alteram e temos

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & \nearrow g & \\ M & & \end{array} \quad \text{comutativo.}$$

O campo ξ_1 para f induz o diagrama $\Sigma = \Sigma_f^{\xi_1}$ e o campo $(Th)^{-1}(\eta_2)$ é pseudo-gradiente para f e induz para f o diagrama $\Sigma_g^2 = \Sigma''$. Daí \sim é transitiva. \triangle

Definição 4.7.: - Seja $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse para M^3 .

- I) $\Sigma(f)$ é a classe de equivalência dos esqueletos geométricos de $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$;
- II) $D(f) = (\Gamma(f), \Sigma(f))$ e
- III) $D(f) \sim D(g)$ se $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$ e $\Sigma(f) \equiv \Sigma(g)$ para $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$ também de Morse sobre M^3 .

Teorema 4.8.: $f \sim g \iff D(f) \sim D(g)$.

Demonstração: - \implies) $f \sim g$ implica que existem difeomorfismos $h: M^3 \longrightarrow M^3$ e $k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente, tais que $kof = goh$.

Pela proposição 2.9 $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$ e se ξ é campo pseudo-gradiente para f , $\eta = (Th)(\xi)$ é pseudo-gradiente para g e h proporciona um difeomorfismo $\Sigma_f^\xi \longrightarrow \Sigma_g^\eta$ preservando os elementos associados, de modo que $\Sigma_f^\xi \equiv \Sigma_g^\eta$. Assim $D(f) \sim D(g)$.

\Leftarrow) Suponha que $D(f) \sim D(g)$. Segue-se que $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$ e existe $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ com campos pseudo-gradientes τ_1 e τ_2 tais que $\sum_f^\xi = \sum_h^{\tau_1}$ e $\sum_g^\eta = \sum_h^{\tau_2}$. h pode ser tomada com grafo de Reeb $\Gamma(f)$. Com efeito, $\Gamma(f)$ é compatível com $\sum_h^{\tau_1}$ e com $\sum_h^{\tau_2}$, pois $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$. Daí h é representada por $(\Gamma(f), \sum_h^{\tau_1})$, donde $f \sim h$. Também h é representada por $(\Gamma(g), \sum_h^{\tau_2}) = (\Gamma(g), \sum_g^\eta)$, de modo que $g \sim h$.

Pela transitividade de \sim , $f \sim g$, como queríamos. △

P A R T E I I

E Q U I V A L Ê N C I A D E R E P R E S E N T A Ç Õ E S

§0. Introdução à Parte II

Nesta parte tratamos, fundamentalmente dos itens ii) e v) do problema colocado na INTRODUÇÃO. Mais precisamente, definimos a relação de equivalência para os diagramas associados às funções de Morse em dimensão três e isto é feito no parágrafo três desta parte.

No §1 mostramos que as funções cujas superfícies de nível regular são reuniões disjuntas de esferas são classificadas pelo grafo de Reeb. Este resultado é o análogo 3-dimensional do resultado obtido para as funções de Morse em dimensão dois em [I] que são classificadas pelo grafo de Reeb. Também uma relação de rearranjo para as funções de Morse, inspirada no Teorema do Rearranjo, é dada e se mostra fundamental para a redução do problema ao estudo de funções polares, via uma operação que será definida: soma conexa de Funções de Morse.

Demonstramos, ainda neste parágrafo que o sistema de curvas de índice 1 considerados no diagrama de Heegaard de f é desnecessário, no sentido que qualquer outro sistema de curvas de índice 1 dado sobre Σ com a condição de que o grafo de Reeb atue é suficiente. A prova deste Teorema é baseada na decomposição de f em soma conexa e, fundamentalmente no Teorema de representação, Teorema 4.3. da Parte I.

No §2 damos o significado geométrico dos elementos considerados no diagrama de Heegaard de f e mostramos como a Teoria dos Nós e Entrelaçamentos está envolvida.

No §3 efetuamos a decomposição de f em soma conexa: f é equivalente, a menos de rearranjos, com a soma conexa de duas funções de gênero zero sobre S^3 com uma função polar sobre M^3 ; definimos as modificações combinatórias efetuadas

nos diagramas de Heegaard de funções polares, inspiradas por um Teorema que afirma que dois diagramas de Heegaard definem a mesma decomposição de Heegaard de M^3 se, e somente se pode-se passar de um ao outro por um número finito de isotopias e deslizamentos de alças, vide [Wd], e demonstramos o Teorema 3.10. que completa ii) e v).

A parte II e o trabalho são encerrados com o parágrafo 4 que é dedicado a exemplos.

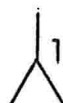
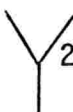
§1. Funções de Gênero Zero e Rearranjamentos

Definição 1.0.: - Sejam $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. O gênero de f , $\text{gen}(f)$, é o maior dos gêneros dentre os gêneros das superfícies de nível regular de f .

Segue-se que se $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tem gênero 0 e r é um valor regular de f , então $f^{-1}(r)$ é reunião disjunta de cópias de S^2 .

Teorema 1.1.: - Sejam $f, g: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, M orientável, funções de Morse de gênero 0. Então $f \sim g$ se, e somente se $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$.

Demonstração: - Claramente $f \sim g$ implica $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$ e a recíproca é dada pelo Teorema 4.3. onde, se $\text{gen}(f) = \text{gen}(g) = 0$, os esqueletos geométricos são dispensáveis, pois todos os pontos críticos de índice 1 conectam níveis regulares: são do tipo

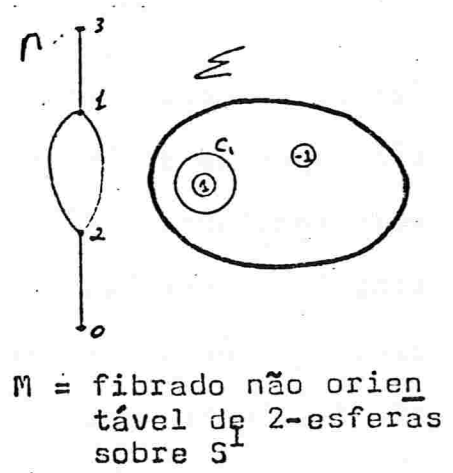
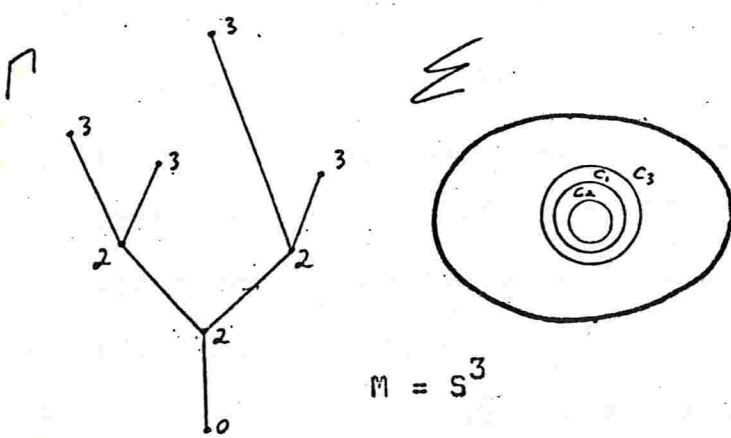
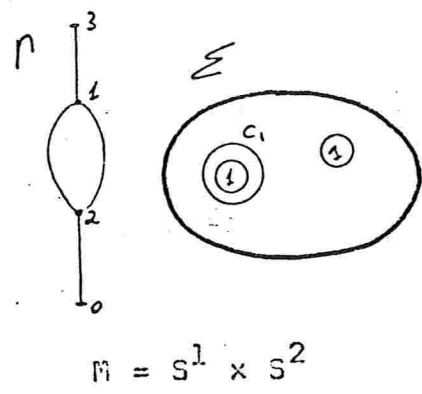
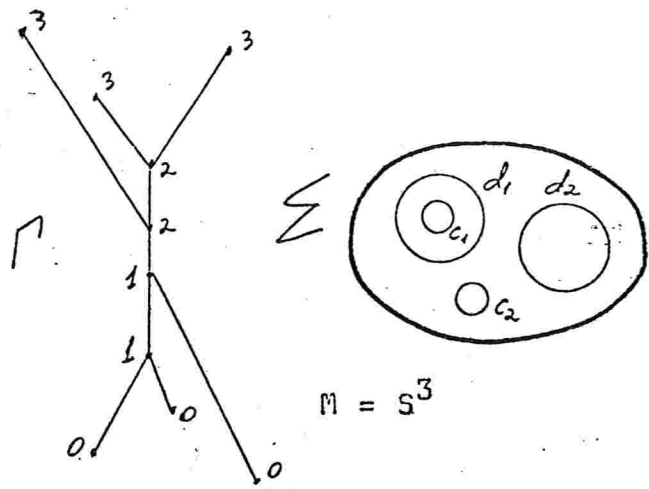

 1 e todos os pontos críticos de índice 2 desconectam: são do tipo
 
 2 .

Como todos os níveis são esferas, os mergulhos característicos das selas de índice 1 são pares de discos em componentes conexas distintas de níveis regulares, as curvas de índice 2 são curvas fechadas, simples em esferas S^2 , de modo que os difeomorfismos conjugando os mergulhos característicos requeridos no Teorema 4.3. são facilmente obtidos sem o apêlo a $\sum_f \xi$. ▲

Nota: - O Teorema acima é o análogo 3-dimensional do Teorema de Classificação em dimensão 2, dado que, em dimensão 2 as superfícies (curvas) de nível são reuniões disjuntas de esferas S^1 .

Em dimensão 3, a hipótese M orientável é fundamental, pois os mergulhos das selas de índice 1 podem ser coerentes ou incoerentes. M é orientável se, e somente se todos os mergulhos de índice 1 são coerentes.

Exemplos



1.2. Rearranjamentos

Seja $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse com campo pseudo-gradiente ξ . Sejam p e q com $f(p) < f(q)$ pontos críticos de f consecutivos, isto é, sobre $f^{-1}([f(p)-\epsilon, f(q)+\epsilon])$ p e q são os únicos pontos críticos de f .

Seja r um valor regular de f entre $f(p)$ e $f(q)$, $V=f^{-1}(r)$ e sobre V considere as esferas à direita de p : $S_R(p)$ e à esquerda de q : $S_L(q)$.

Pelo Teorema do Rearranjamento (Teorema 1.21) se $S_R(p) \cap S_L(q) = \emptyset$, existe uma nova função de Morse $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que ξ é campo pseudo-gradiente para g , g coincide com f fora de $A = g^{-1}(]f(p)-\epsilon, f(q)+\epsilon[)$, p e q são os únicos pontos críticos de g em A e $g(p) = a$, $g(q) = a'$ com $a, a' \in]f(p)-\epsilon, f(q)+\epsilon[$.

Definição: - A função g acima é dita obtida de f por um rearranjamento elementar. Dizemos que $g: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é obtida de $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ por rearranjamento se g é obtida de f por um número finito de rearranjamentos elementares sucessivos. \triangle

Notas 1.3.: - Com as notações de 1.2., temos:

- i) se $\text{ind } p \geq \text{ind } q$, então o rearranjamento elementar de 1.2. é sempre possível (Corolário 1.23);

98.

- ii) se $\text{ind } p > \text{ind } q$ ou se $\text{ind } p = \text{ind } q = 0$ ou 3 , ou ainda, se $\text{ind } p = \text{ind } q = 1$ com p e q de tipos distintos (um conecta mínimos e o outro não conecta mínimos), então $\sum_f^\xi = \sum_g^\xi$;
- iii) se $\text{ind } p < \text{ind } q$ e o rearrançamento de 1.2. é possível, então $\sum_f^\xi = \sum_g^\xi$;
- iv) se $\text{ind } p = \text{ind } q = 1$ e os pontos críticos são de mesmo tipo: ambos conectam mínimos ou ambos não conectam mínimos ou se $\text{ind } p = \text{ind } q = 2$, então \sum_f^ξ difere de \sum_g^ξ por mudança de numeração dos elementos associados ao tipo de índice em questão.

Teorema 1.4.: - Seja $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Com $\text{gen}(f) = 0$. Então $\Gamma(f)$ é uma árvore se, e somente se $M^3 \simeq S^3$.

Demonstração: - Com efeito, se $f: S^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse, então $\Gamma(f)$ é uma árvore, pois pela Proposição 2.10, dado que $p: \pi_1(S^3) \longrightarrow \pi_1(\gamma(f))$ é um epimorfismo de grupos e $*\pi_1(S^3) = \{0\}$, vem $\pi_1(\gamma(f)) = 0$, donde $\gamma(f)$ é uma árvore.

Reciprocamente, se $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tem gênero 0 e $\gamma(f)$ é uma árvore, ordenamos f pelo Teorema do Rearrançamento. Segue-se que o grafo da nova função ainda é uma árvore. O Teorema do Cancelamento (Teorema 1.25.) cancela as selas de índice 2 com máximos. Resulta disto uma função de Morse sobre

M^3 com dois pontos críticos: um máximo e um mínimo, donde pelo Teorema 1.27, $M^3 \approx S^3$. △

Corolário 1.5.: - Se $(W; \emptyset, S^2)$ ou $(W; S^2, \emptyset)$ é uma tríada que admite uma função de Morse de gênero zero, cujo grafo é uma árvore, então $W \approx \mathbb{B}^3$.

Teorema 1.6.: - Seja M uma 3-variedade fechada e conexa que admite uma função de Morse de gênero 0. Então M é a esfera S^3 , $S^1 \times S^2$, P -fibrado de 2-esferas não orientável sobre S^1 , ou soma conexa de cópias das variedades acima.

Demonstração: - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de gênero 0. Através dos Teoremas do Rearranjamento e Cancelamento obtém-se sobre M uma função de Morse polar e de gênero 0 a partir de f .

Para os rearranjos o procedimento é o seguinte: sejam p_1, p_2, \dots, p_k os pontos críticos de índice 1 que conectam mínimos, $q_0, q_1, q_2, \dots, q_k$ os mínimos de f . Numa primeira sequência de rearranjos obtém-se f_1 tal que os mínimos são os primeiros $k+1$ pontos críticos de f_1 . Agora obtém-se f_2 por rearranjos sucessivos sobre f_1 fazendo-se com que os próximos pontos críticos sejam os de índice 1 que conectam mínimos. O Teorema do cancelamento proporciona f_3 com um único mínimo.

$-f_3$ tem um único ponto crítico de índice 3 e as operações acima são efetuadas sobre $-f_3$ rearranjando os mínimos, as conexões de mínimos e cancelando. Obtém-se $-f_4$ polar de gênero 0 sobre M^3 .

$g=f_4$ tem para diagrama \sum_g^n o diagrama obtido de \sum_f^ξ eliminando-se todas as curvas de índice 1 e algumas curvas de índice 2. Além disso, o número de pares de discos associados, pois g é polar.

Assim \sum_g^n é um diagrama de Heegaard para M^3 .

Temos as seguintes possibilidades para \sum_g^n :

I) \sum_g^n não tem pares de discos associados.

Neste caso $M^3 \approx S^3$, pois g é polar com dois pontos críticos.

II) \sum_g^n tem um único par de discos associados.

Neste caso o grafo de g é $\begin{matrix} \uparrow 3 \\ 0 \\ \downarrow 0 \end{matrix}$ pois g tem gênero 0 e segue-se que $M \approx S^1 \times S^2$ se M é orientável ou $M \approx P$ se M é não orientável. Isto é dado pela orientação dos bordos dos pares de discos associados, como já foi visto.

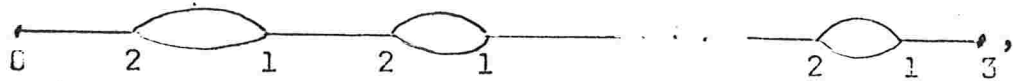
III) \sum_g^n tem m pares de discos associados orientáveis e n pares de discos associados não orientáveis.

Neste caso

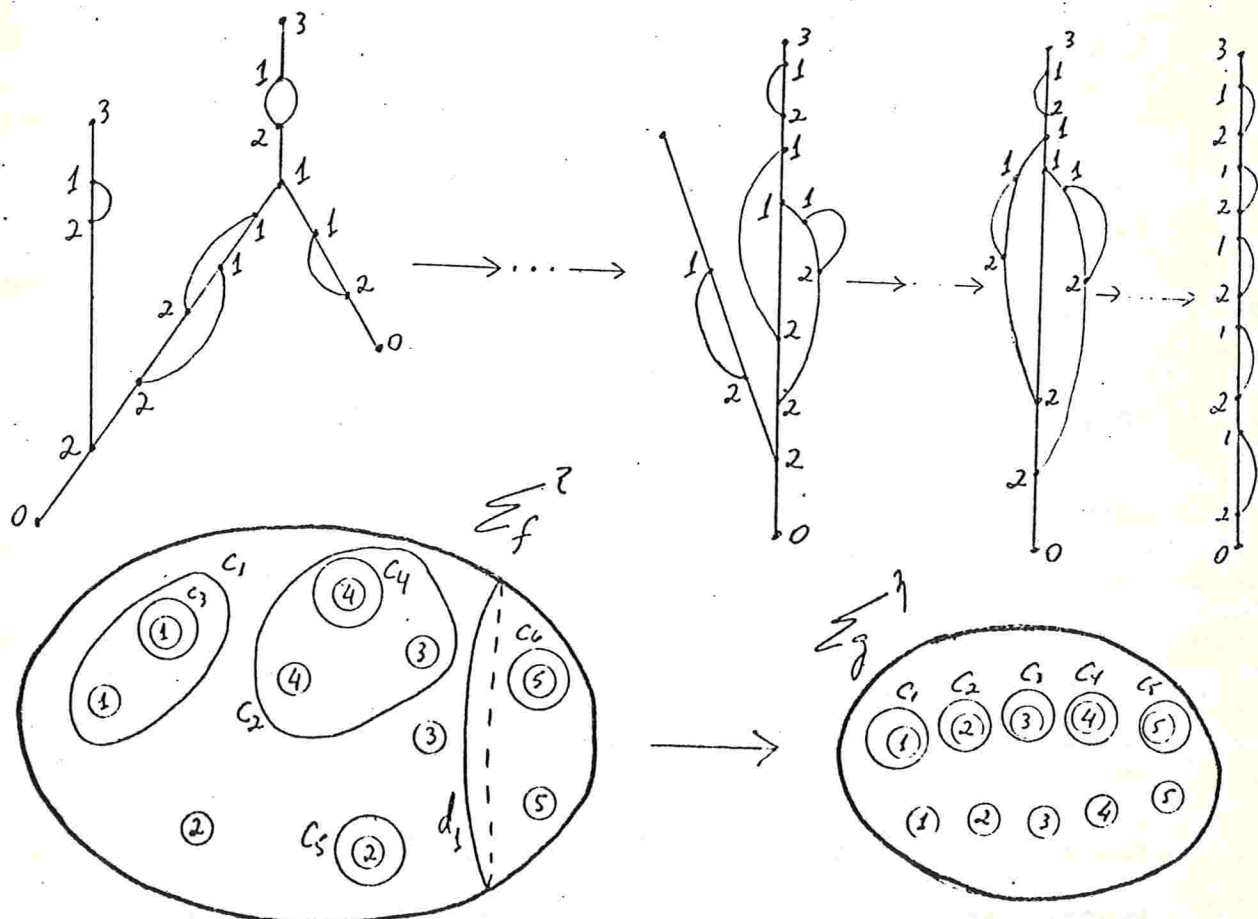
$$M^3 \approx \left(\#_{i=1}^m S^1 \times S^2 \right) \# \left(\#_{i=1}^n P \right),$$

pois, por rearranjos sucessivos sobre g , obtemos

$g_1: M \rightarrow \mathbb{R}$ com grafo de Reeb



onde os primeiros m pontos críticos de índice 1 são orientáveis e os n últimos são não orientáveis.



Teorema 1.7.: - Sejam $f, g: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de Morse equivalentes, $h: M \rightarrow M$ e $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ os difeomorfismos tais que $k \circ f = h \circ g$. Sejam p e q pontos críticos de f consecutivos que podem ser rearranjados segundo a definição 1.2. e $p' = h(p)$, $q' = h(q)$ os correspondentes de g .

Se $f_1, g_1: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são obtidos de f e g pelos rearranjos de p, q e p', q' , respectivamente, então $f_1 \sim g_1$.

Demonstração: - Dado que o diagrama abaixo é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

com k crescente, substituímos como no Teorema 4.3. por $k \circ f$ e

supomos $f \sim g$ com

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & \nearrow & g \\ M & & \mathbb{R} \end{array} \quad \text{comutativo.}$$

Seja $D_f^\xi = (\Gamma(f), \Sigma_f^\xi)$ uma representação de f e $\eta = \text{Th}(\xi)$.

Segue-se que η é campo pseudo-gradiente para g e g é representada por $D_g^\eta = (\Gamma(g), \Sigma_g^\eta)$. Além disso, D_f^ξ e D_g^η são isomorfos canonicamente, isto é, o difeomorfismo $h: M \rightarrow M$ define $\bar{h}: \gamma(f) \rightarrow \gamma(g)$ por passagem ao quociente e $d: \Sigma_f^\xi \rightarrow \Sigma_g^\eta$ é obtido pela soma conexa de $h_i: \Sigma_i \rightarrow \Sigma'_i$, com

$$\Sigma_f^\xi = \sum_{i \neq 1} \Sigma_i \quad \text{e} \quad \Sigma_g^\eta = \sum_{i \neq 1} \Sigma'_i.$$

Os rearranjos de p e q sobre f e de p' e q' sobre g , pelas notas 1.3 da Parte II, não alteram Σ_f^ξ e Σ_g^η ou se a]

teram Σ_f^ξ , tal alteração é dada pela mudança de numeração de curvas ou de pares de discos associados. Neste caso Σ_g^η é também alterado e $d: \Sigma_f^\xi \longrightarrow \Sigma_g^\eta$ é compatível com tal alteração, de modo que $d: \Sigma_{f_1}^\xi \longrightarrow \Sigma_{g_1}^\eta$ é um isomorfismo.

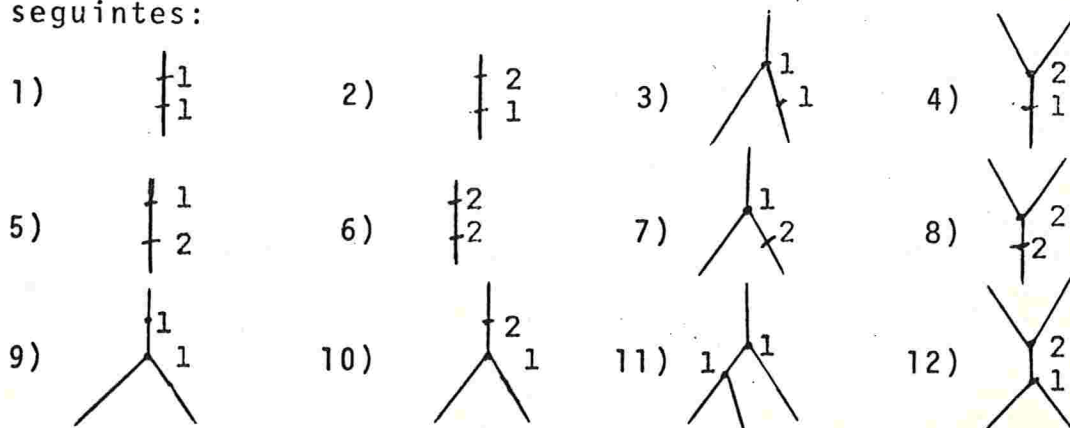
Também é fácil ver que $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$ produzem $\Gamma(f_1)$ e $\Gamma(g_1)$ isomorfos. Com efeito, suponhamos $f(p) < f(q)$ e $\varepsilon > 0$ tal que sobre $A = \bar{f}^{-1}[f(p)-\varepsilon, f(q)+\varepsilon]$ os únicos vértices de $\Gamma(f)$ são \bar{p} e \bar{q} . Seja B a reunião das componentes conexas de A que contêm \bar{p} e \bar{q} . Note-se que B tem, no máximo, duas componentes conexas.

Claramente $\gamma(f) \setminus B = \gamma(f_1) \setminus B_1$ e $\gamma(g) \setminus B' = \gamma(g_1) \setminus B'_1$, onde $B' = \bar{h}(B)$, B_1 e B'_1 são os grafos dos cobordismos após os rearranjos.

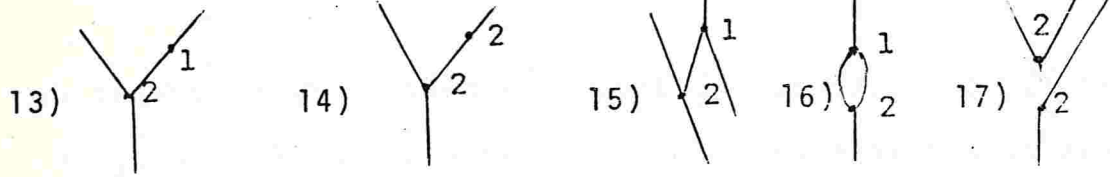
Temos dois casos a considerar:

1º Caso: - B é desconexo. Então B' também o é e $\left. \begin{array}{c} | \\ p \\ | \\ q \end{array} \right\}^q$ produz $\left. \begin{array}{c} |^p \\ | \\ | \\ q \end{array} \right\}$ e o isomorfismo entre $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$ é trivial.

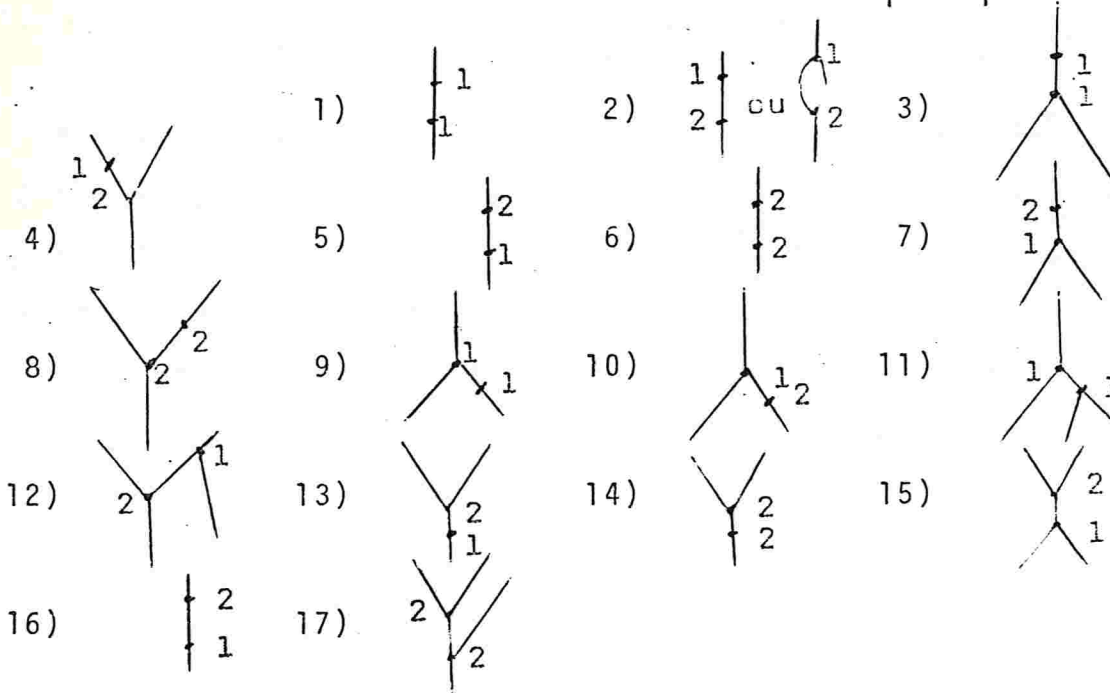
2º Caso: - B é conexo. As possibilidades para $B \sim B'$ são as seguintes:





104.



Em cada caso, o rearranjo produz B_1 e B_1' :



Claramente B_1' tem o mesmo tipo que B_1 , exceto eventualmente no caso número 2 onde se tem duas possibilidades: se B_1 é , q desmancha a alça distinta da introduzida por p e , q desmancha a alça que p introduz e a curva de q é disjunta do par de discos associados a q. Do fato de $d: \sum_{f_1}^{\xi} \longrightarrow \sum_{g_1}^{\eta}$ ser isomorfismo segue o isomorfismo entre B_1 e B_1' , donde $\Gamma(f_1) \cong \Gamma(g_1)$.

Assim $(\Gamma(f_1), \sum_{f_1}^{\xi}) \cong (\Gamma(g_1), \sum_{g_1}^{\eta})$, donde pelo Teorema 4.3, $f_1 \sim g_1$. ▲

O Teorema seguinte demonstra que as curvas de índice 1 não são essenciais em Σ_f^ξ tendo-se presente a definição de ação de Γ em Σ . Utilizaremos este Teorema no parágrafo seguinte que é dedicado à interpretação geométrica dos elementos em Σ_f^ξ .

Teorema 1.8.: - Seja $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, $D_f^\xi = (\Gamma(f), \Sigma_f^\xi)$ uma representação de f e $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ as curvas de índice 1 de Σ_f^ξ . Seja $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ outro sistema de curvas simples, fechadas e disjuntas, disjuntas dos pares de discos associados de Σ_f^ξ e seja Σ o diagrama esférico obtido de Σ_f^ξ substituindo-se o sistema de curvas C pelo sistema D e suponha que $\Gamma(f)$ atua sobre Σ .

Nestas condições, existe uma função de Morse $g: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \sim f$ e um campo pseudo-gradiente η para g tal que $\Sigma = \Sigma_g^\eta$.

Demonstração: - Seja $f': M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ obtida de f por rearranjos sucessivos, da seguinte forma: os mínimos de f' aparecem antes de qualquer outro índice, após os mínimos as conexões, e em seguida os demais pontos críticos. Obviamente tal rearranjo é sempre possível (foi considerado no Teorema 1.6 de II). Também ξ é campo pseudo-gradiente para f' .

Se r é um valor regular de f' entre a última conexão e o primeiro ponto crítico que não conecta mínimos, $f'^{-1}(r) \approx S^2$, $f'^{-1}(-\infty, r] \approx \bar{B}^3$ por II.1.5. e também o esqueleto geométrico de f' restrita a $f'^{-1}([r, +\infty))$ é \sum_f^ξ desprovido do sistema de curvas de índice 1:C.

Seja g' uma função de Morse com campo pseudo-gradiente η' para o disco \bar{B}^3 tal que $f' \sim g'|_{\bar{B}^3}$ e as esferas à direita das selas de índice 1 de g' em $S^2 \approx f'^{-1}(r)$ são as curvas do sistema D.

Definimos $f'' : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f'' = f'$ sobre $f'^{-1}[r, +\infty)$ e g' sobre $f'^{-1}(-\infty, r]$.

f'' é de Morse sobre M e tem a propriedade de ter o diagrama $\sum_{f''}^{\xi \# \eta} = \Sigma$.

Rearranje f'' , de modo que $\Gamma(f'') = \Gamma(f)$ obtendo g . Claramente tal rearranjo é possível, graças ao fato de $\Gamma(f)$ atuar sobre Σ .

Temos $g \sim f$, pois $f' \sim f''$ e f e g são obtidas de f' e f'' , respectivamente, pelos mesmos rearranjos nas representações.

Isto completa a prova do Teorema 1.8.

Corolário 1.9.: - Com as notações de 1.8, dado um novo sistema de curvas de índice 1 para Σ_f^ξ sobre o qual $\Gamma(f)$ atua, existe um campo pseudo-gradiente η para f que o induz.

Demonstração: - Com efeito, pelo Teorema II.1.8 existem g e τ tais que $\Sigma = \Sigma_f^\xi = \Sigma_g^\tau$ e o sistema de curvas de índice 1 de Σ é o dado.

Como $f \sim g$, vem

$$\begin{array}{ccc} M^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array} \quad \text{comutativo. Defi-}$$

nimos $\eta = (Th)^{-1}(\tau)$ e η tem as propriedades requeridas. Δ

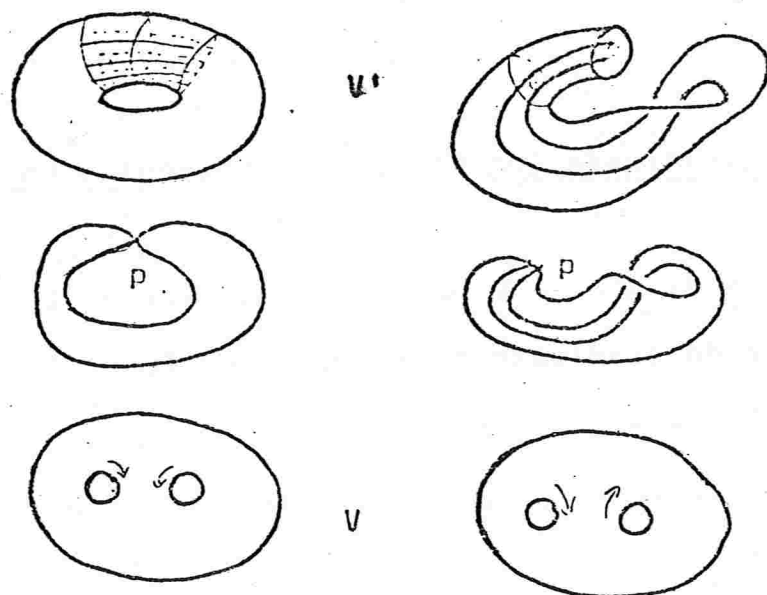
§2. Significado Geométrico dos Elementos em \sum_f^ξ

Seja $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, $\xi: M \rightarrow TM$ um campo pseudo-gradiente para f e seja $D_f^\xi = (\Gamma(f), \sum_f^\xi) = (\Gamma, \Sigma)$ a representação associada.

Consideremos Σ decomposto em soma conexa dos \sum_i , $1 \leq i \leq \eta_0(f) = k$: $\Sigma = \sum_1 \# \dots \# \sum_k$. Sobre $\sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_k$, via o fluxo do campo pseudo-gradiente foram considerados os traços dos mergulhos característicos das selas de índices 1 e 2 que serviram para a reconstrução de f , a menos de equivalência, a partir do par (Γ, Σ) .

Lembramos que os centros dos pares de discos associados representam as esferas à esquerda dos pontos críticos de índice 1 associados aos pares e uma vizinhança tubular destes discos representa o mergulho característico do ponto crítico de índice 1 associado.

Considere o par de discos associados no nível regular V que precede o ponto crítico em correspondência. Se a cirurgia do tipo (1,2) é feita sobre V , obtêm-se V' . Os homeomorfismos entre os bordos dizem se a alça introduzida por tal ponto é orientável ou não. Além disso, os bordos dos discos associados representam em V' duas cópias isotópicas da esfera à direita da sela de índice 1.



Considere $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k$ mergulhados em M^3 como na definição I.3.0. Pela Proposição I.3.9., o campo pseudo-gradiente \bar{e} é escolhido de modo que, se uma sela de índice 1 introduz alça, isto é, a vizinhança do vértice em Γ associada é do tipo $\text{---} \bullet \text{---}$, o par de discos associados correspondente não é separado por nenhum nível da função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposição 2.0.: - Existem arcos $\alpha: [-1, 1] \rightarrow M^3$ com extremos fixos sobre os centros dos pares de discos associados de $\Sigma_1 + \dots + \Sigma_k$ que introduzem alças com $\alpha([-1, 1]) \cap (\Sigma_1 + \dots + \Sigma_k) = \emptyset$, tais que as alças introduzidas pelos pontos críticos de índice 1 o são através destes arcos.

Demonstração: - Seja p um ponto crítico de f de índice 1, $f(p) = c$ e $\epsilon > 0$ tal que p é o único ponto crítico de f em $W = f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$. Sejam $V_1 = f^{-1}(c - \epsilon)$, $V_2 = f^{-1}(c + \epsilon)$ e sejam $\phi_L: S^0 \times B^2 \rightarrow V_1$ e $\sigma_R: B^1 \times S^1 \rightarrow V_2$ os mergulhos característicos à esquerda e à direita, respectivamente.

Temos que $V_2 \approx \chi(V_1, \phi_L)$ e $W \approx \omega(V_1, \phi_L)$ e que o difeomorfismo acima pode ser escolhido de modo que conjuga a função padrão sobre $\omega(V_1, \phi_L)$ com a restrição de f a W . Seja $h: \omega(V_1, \phi_L) \rightarrow W$ um tal difeomorfismo. Também

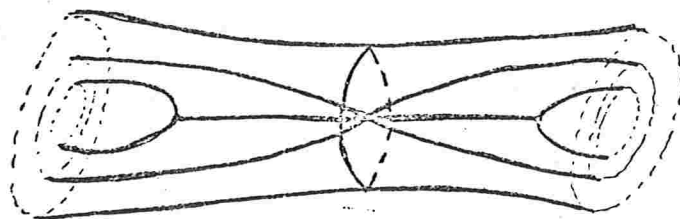
$$\omega(V_1, \phi_L) = \frac{(V_1 \phi_L(S^0 \times 0)) \times \bar{B}^1 + L_1}{\sim}$$

por I.1.12, onde

$$L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq -x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

e

$$\{|x| \sqrt{y^2 + z^2} < (\sin h + 1)(\cos h + 1)\}.$$



Seja $\alpha: [-1, 1] \rightarrow M^3$ a aplicação dada por

$$[-1, 1] \xrightarrow{\ell} L_1 \xrightarrow{i_1} \omega(V_1, \phi_L) \xrightarrow{h} W \xrightarrow{i_2} M^3$$

α

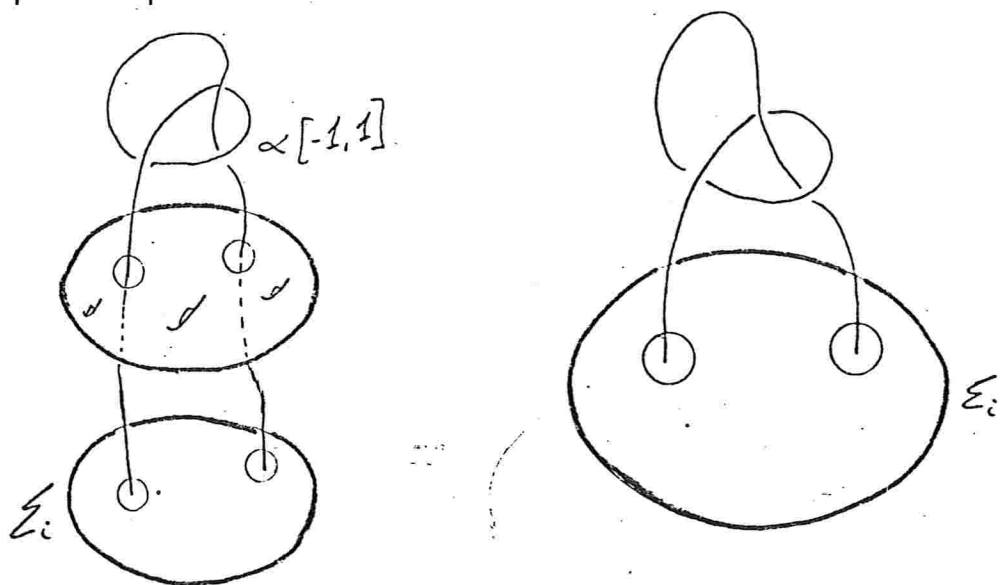
onde $\ell: [-1, 1] \rightarrow L_1$ é dada por $\ell(x) = (x, 0, 0)$, i_1 e i_2 são as inclusões canônicas e h é o difeomorfismo acima.

Segue-se que α é um arco em M^3 cujos extremos estão no nível regular V_1 de f e coincidem com $\phi_L(S^0 \times 0)$. Também $\alpha(]-1, 1[) \cap V_1 = \emptyset$.

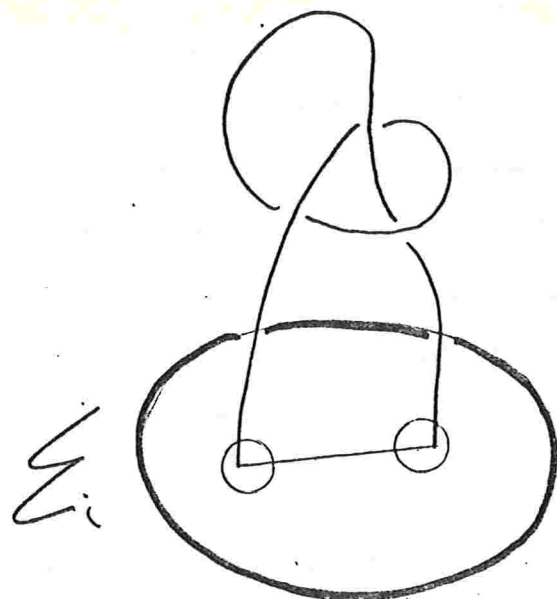
112.

Além disso, $\alpha(0)=p$ e $\alpha([-1,1])$ representa o disco $\tilde{\alpha}$ esquerda de p em W , pois h é uma equivalência topológica entre o campo ξ restrito a W e o gradiente da função padrão sobre $\omega(V_1, \phi_L)$ como segue do Teorema I.4.14.

Para se obter α com extremos fixos sobre $\Sigma_1 + \dots + \Sigma_k$, colapse cada segmento de trajetória de ξ da esfera $\tilde{\alpha}$ esquerda de p em V_1 até Σ_j , a um ponto.



Nota: - O arco $\alpha: [-1,1) \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k$ pode ser tornado uma curva simples e fechada sobre M^3 : existe sobre V_1 um segmento ligando os centros do par de discos associados e que não é separado por nenhum nível de f . Considere a curva cujo traço é o traço de α mais o segmento sobre V_1 e colapse o segmento à sua base em Σ_j .



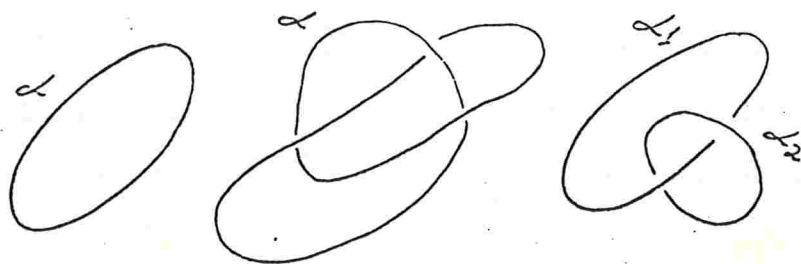
Definição 2.1.: - i) Um nó em M^3 é um mergulho $\alpha: S^1 \rightarrow M^3$.

ii) Um nó em M^3 é trivial se é bordo de um disco \bar{B}^2 difeomorficamente mergulhado em M^3 .

iii) Dois nós em M^3 são do mesmo tipo se existe um difeomorfismo $h: M^3 \rightarrow M^3$ tal que $h\alpha = \beta$.

iv) Sobre S^3 dois nós estão entrelaçados se um dos nós no complemento do outro nó é homotópico a constante.

v) Um sistema de nós em S^3 : $\alpha_i: S^1 \rightarrow S^3$, $1 \leq i \leq k$ está entrelaçado se dois nós α_i e α_j estão entrelaçados.



Notas 2.2.: - i) Os arcos e curvas de índice 2 sobre $\Sigma = \sum_f \xi$ representam os mergulhos característicos das selas de índice 2 de $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ relativamente a ξ . Se p é um ponto crítico de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, o mergulho característico de p é dado sobre $f^{-1}(f(p) - \epsilon) = V$. A curva fechada em questão é bordo de um disco em M^3 : o disco à esquerda de p e, por conseguinte, constitui um nō trivial.

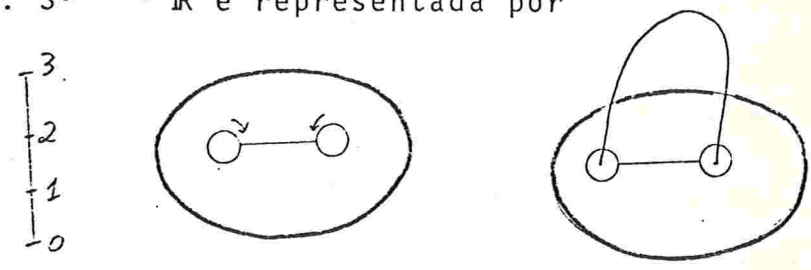
Segue-se que como a curva sobre M^3 é trivial, o que pode não ser trivial é como as superfícies de nível regular estão mergulhadas em M^3 .

ii) A Proposição II.2.0. permite definir um diagrama aparentemente mais restritivo para $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ juntamente com um campo de vetores $\xi: M \rightarrow TM$. Tal diagrama seria $\sum_f \xi$ mais um conjunto de arcos $\alpha_i: [-1, 1] \rightarrow \sum_f \xi$ com extremos fixos sobre os centros dos pares de discos associados que introduzem alças.

Claramente, tal diagrama mergulha em \mathbb{R}^3 , pois é constituído de uma esfera 2-dimensional sobre a qual se tem elementos associados e arcos α_i com extremos fixos em S^2 . O que pode ocorrer é o seguinte: o mergulho pode não provir da estrutura de variedade diferenciável de M^3 : o único modo de se mergulhar um subespaço de uma 3-variedade em \mathbb{R}^3 é colocá-lo dentro de uma carta em M^3 . Se o nō obtido consideran-

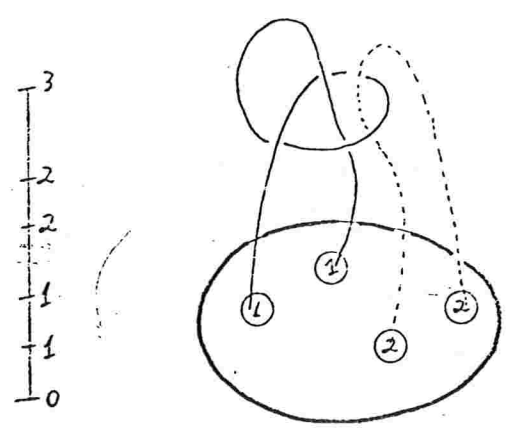
do-se o arco α_i juntamente com o segmento em Σ_i não é homotópico a constante, claramente não existe carta de M^3 que o contenha (uma carta é contável) e Σ_f^ξ com arcos não mergulha em \mathbb{R}^3 .

Exemplos: i) $f: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é representada por

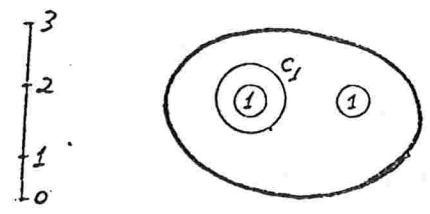


O arco do par de discos associados é trivial.

ii) $f: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$



iii) $f: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$



O diagrama Σ_f com o arco não está em nenhuma carta de M^3 , pois a curva fechada adicionada não é homotópica a zero.

Proposição 2.3.: - Dado Σ possível para M^3 , sobre os centros dos pares de discos associados os nós são dados a menos de uma difeotopia de M^3 .

Demonstração: - Sejam $f, g: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\xi, \eta: M \rightarrow TM$ funções de Morse e campos pseudo-gradientes para as funções tais que $\sum_f^\xi = \Sigma = \sum_g^\eta$.

Acrescentamos em \sum_f^ξ e \sum_g^η os arcos que são postos pela Proposição II.2.0.

Vamos mostrar que existe uma difeotopia de M^3 (difeomorfismo isotópico à identidade) deixando Σ fixo e levando os arcos construídos por f nos arcos construídos por g .

De fato, Σ pode ser tomado sem curvas de índice 1, de modo que f e g podem ser tomadas com um único ponto crítico de índice 0. A afirmação segue do fato que índices 1 que conectam mínimos são cancelados com mínimos e os arcos introduzidos ficam em componentes conexas de $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k$ e não são alterados pelos rearranjos e cancelamentos requeridos, como é fácil ver.

Supondo f e g com um único mínimo e esqueleto geométrico Σ , por rearranjo de g podemos supor que os grafos $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$ são isomorfos, de modo que pelo Teorema 1.4.3, $g \sim f$.

Sejam $h: M^3 \longrightarrow M^3$ e $k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ difeomorfismos tais que $k \circ f = g \circ h$. Pela construção de h no Teorema I.4.3. segue-se que $h \cong 1_{M^3}$ e deixa Σ fixo.

Além disso, h leva os nós de f nos nós de g .

Com efeito, se p é índice 1 de f e de g e ϵ^2 é tal que $W_{k \circ f} = (k \circ f)^{-1}[f(p) - \epsilon^2, f(p) + \epsilon^2]$ só tem p para ponto crítico,

$$\omega(V, \phi) \xrightarrow{a_i} W_{k \circ f} \xrightarrow{h} W_g \xrightarrow{a_{i+1}} \omega(V, \phi)$$

são os difeomorfismos, $a = (a_{i+1}^{-1} \circ h \circ a_i): L_1 \longrightarrow L_1$

e $a|_{(x,0,0)} = 1_{(x,0,0)}$.

△

§3. Equivalência de Representações

3.0.: - Somas Conexas de Funções de Morse

Sejam $f: M^3 \rightarrow [a, b+\epsilon]$ e $g: N^3 \rightarrow [b-\epsilon, c]$ funções de Morse para M e N . $0 < \epsilon$ acima é tomado tal que sobre $A = f^{-1}[b, b+\epsilon]$ e $B = g^{-1}[b-\epsilon, b]$, f e g tem um único ponto crítico.

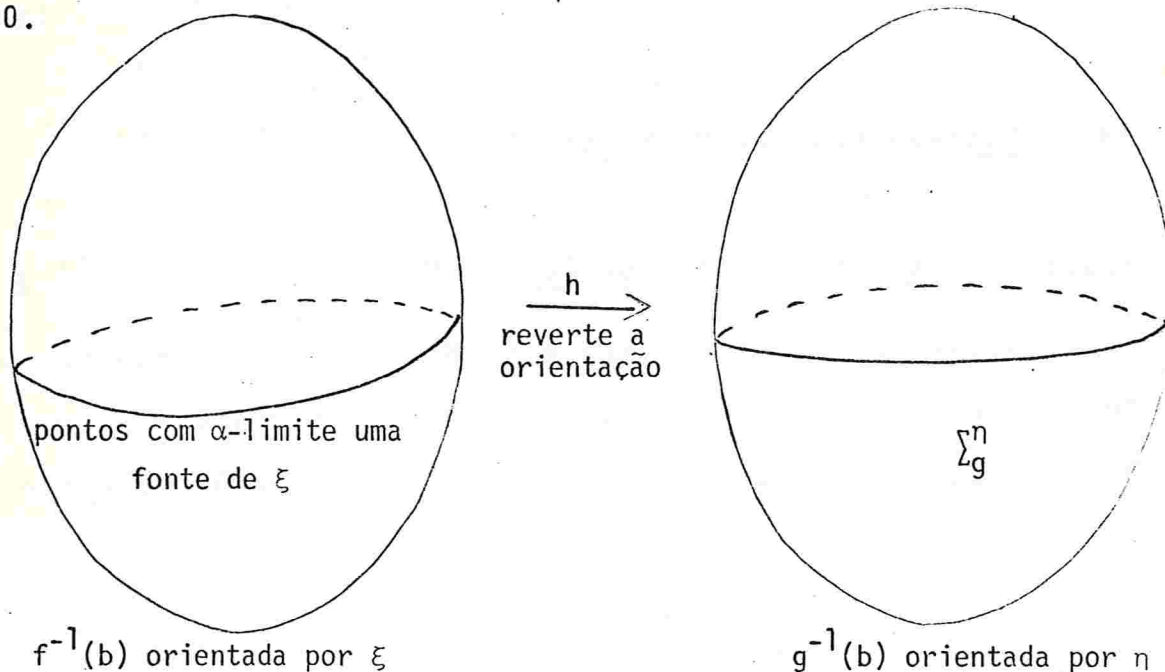
Através do par de discos A e B acima, efetuamos a soma conexa $M \# N$ e definimos

$$f \# g: M \# N \rightarrow [a, c]$$

$$f \# g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in f^{-1}[a, b] \\ g(x) & \text{se } x \in g^{-1}[b, c] \end{cases}$$

A soma conexa $M \# N$ resulta orientável no caso em que M e N são orientáveis e é feita por um difeomorfismo de $S^2 \approx f^{-1}(b) \approx g^{-1}(b)$ que leva os elementos associados de \sum_g^1 que incidem em $g^{-1}(b)$ sobre um disco em $f^{-1}(b)$ com a propriedade de que seus pontos têm para α -limite uma fonte do campo pseudo-gradiente ξ para f . Vide [M], pág. 26 e [S-J], capítulo 10.

120.



Os resultados abaixo s\u00e3o imediatos:

3.1.: - Representa\u00e7\u00e3o de $f \# g$

Com as nota\u00e7\u00f5es de 3.0., se f e g s\u00e3o representadas por $(\Gamma(f), \Sigma_f^\xi)$ e $(\Gamma(g), \Sigma_g^\eta)$, ent\u00e3o $(\Gamma(f) \# \Gamma(g), \Sigma_{f \# g}^{\xi \# \eta})$ \u00e9 uma representa\u00e7\u00e3o de $f \# g$, onde a soma conexa de $\Gamma(f)$ com $\Gamma(g)$ \u00e9 feita atrav\u00e9s das vizinhan\u00e7as correspondentes a A e B em $\gamma(f)$ e $\gamma(g)$ e $\Sigma_{f \# g}^{\xi \# \eta}$ \u00e9 feita atrav\u00e9s de uma escolha de discos em Σ_f^ξ e Σ_g^η disjuntos dos elementos associados.

3.2.: - $\#$ \u00e9 compat\u00edvel com \sim .

Se $f \sim f_1$ e $g \sim g_1$, ent\u00e3o $f \# g \sim f_1 \# g_1$.

3.3.: - $\#$ \u00e9 associativa e tem para elemento neutro a fun\u00e7\u00e3o sobre S^3 com dois pontos cr\u00edticos.

3.4.: $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ admite decomposição em soma conexa se, e somente se existe um valor regular r de f tal que $f^{-1}(r) \sim S^2$. Uma decomposição de f em soma conexa, $f = f_1 \# f_2$, é não trivial se f_1 e f_2 são funções com mais de dois pontos críticos.

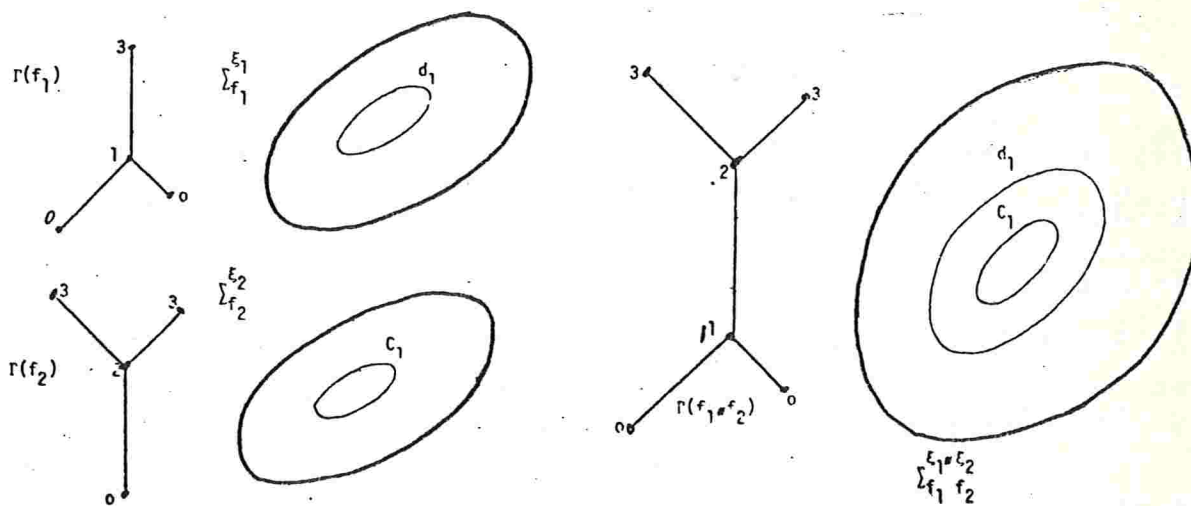
3.5.: - Lei do Cancelamento

i) $f_1 \# g \sim f_2 \# g \implies f_1 \sim f_2$

ii) $f \# g_1 \sim f \# g_2 \implies g_1 \sim g_2$.

△

Exemplo



3.6.: - Decomposição Canônica de f a menos de rearranjo

Se Σ é um diagrama esférico possível, uma função de Morse $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com os pontos críticos dados na seguinte ordem: primeiro os índices 0, depois os índices 1 que conec-

tam mínimos, em seguida os índices 1 que não conectam mínimos (introduzem alças), depois os índices 2 e, finalmente os índices 3, foi considerada em I.3.6. O grafo de Reeb de f é tal que se r_1 é um valor regular entre a última conexão e a primeira alça, $f^{-1}(-\infty, r_1]$ é uma árvore, a restrição de f a $W = f^{-1}(-\infty, r_1]$ é de gênero 0, de modo que, pela Proposição II.1.5, $W \approx \mathbb{B}^3$.

Assim, f se decompõe como a soma conexa $f = f_1 \# f_2$, onde f_1 é a extensão de $f|_W$ a S^3 com um único máximo e f_2 é a extensão de $f|_{f^{-1}[r_1, +\infty)}$ a M^3 com um único mínimo.

Se r_2 é um valor regular de f_2 entre o último índice 1 e o primeiro índice 2, $V = f^{-1}(r_2)$ é uma superfície fechada e conexa que é obtida de \sum_f^{ξ} retirando-se os interiores dos pares de discos associados e efetuando-se as identificações dos bordos. Sobre V as curvas de índice 2 são curvas simples, fechadas e numeradas: c_1, c_2, \dots, c_k com $k \geq \text{gen}(V)$. Seja i_1 o primeiro índice em $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que c_{i_1} não desconecta V . A existência de c_{i_1} é dada pelo fato de $(V; \{c_1, c_2, \dots, c_k\})$ conter um diagrama de Heegaard, vide I.3.6.

Como dois pontos críticos e mesmo índice sempre podem ser rearranjados, notas II.1.3, rearranjando $f_2 = f_2^{(1)}$ obtemos $f_2^{(2)}$ tal que c_{i_1} é a curva de índice 2 associada à primeira sela de índice 2.

O valor regular r_3 de $f_2^{(2)}$ entre esta sela e a próxima é tal que $f_2^{(2)-1}(r_3) = V_1$ que tem gênero igual a $(\text{gen} V - 1)$ e tem-se o sistema de curvas $\{c_1, c_2, \dots, c_k\} \setminus \{c_{i_1}\}$ sobre V_1 , via a fluxo do campo pseudo-gradiente ξ para f .

Existe i_2 tal que c_{i_2} não desconecta V_1 . A construção acima é repetida proporcionando V_2 com $\text{gen}(V_2) = \text{gen}(V) - 2$ sobre a qual o sistema de curvas $\{c_1, \dots, c_k\} \setminus \{c_{i_1}, c_{i_2}\}$ é considerado.

Assim, existe um subconjunto de $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$: $\{c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_{\text{gen}(V)}}\}$ cujo complementar em V é conexo e tal sistema é maximal relativamente a esta propriedade. Construiu-se uma função $f_3: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por rearrançamento de f_2 que tem um único mínimo, as selas de índice 1 introduzindo alças, as selas de índice 2 desmanchando alças e as selas de índice 2 que desconectam, de modo que

$$f_3 = f_4 \# f_5, \text{ onde}$$

$f_4: M \rightarrow \mathbb{R}$ é polar e ordenada e $f_5: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tem um único mínimo e para esqueleto geométrico o conjunto das curvas $\{c_1, c_2, \dots, c_k\} \setminus \{c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_{\text{gen}(V)}}\}$ no nível regular após o ponto crítico associado a $c_{i_{\text{gen}(V)}}$.

Em resumo, dada $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$, por rearranjos de f , obtêm-se $f_R: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que se decompõe em soma conexa

$$f_R = f_m \# f_p \# f_M, \text{ onde}$$

124.

$f_m: S^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é de gênero 0 com um único índice 3,

$f_p: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é polar ordenada e $f_M: S^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é de gênero 0 com um único índice 0.

Tal decomposição é denominada decomposição canônica de f a menos de rearranjo e denotada f_R .

A Proposição abaixo mostra que f_R é bem definida, a menos de equivalência.

Proposição 3.7.: - $f \sim g \implies f_R \sim g_R \implies f_m \sim g_m, f_p \sim g_p$ e $f_M \sim g_M$.

Demonstração: - Com efeito, de $f \sim g$ segue-se que f e g são representadas por um par (Γ, Σ) .

Pela construção em II.3.6, f_m e g_m tem para esqueleto geométrico o conjunto das curvas de índice 1 de Σ , donde claramente $\Gamma(f_m) \cong \Gamma(g_m)$ e $f_m \sim g_m$.

Dado que sobre f e g os rearranjos são os mesmos para a obtenção de f_m e g_m , vemos que as funções rearranjadas f' e g' são equivalentes, de modo que

$$f' = f_m \# f'_1 \sim g_m \# g'_1 = g'$$

e como $f_m \sim g_m$, pela lei do cancelamento dada em II.3.5, segue-se que $f'_1 \sim g'_1$ e a representação tem para esqueleto geométrico Σ desprovido das curvas de índice 1.

Através da ordem dada na escolha do sistema de curvas $\{c_{i_1}, \dots, c_{i_{\text{gen}V}}\}$ obtemos $f \sim g$ (mesmos rearranjos), de modo que $f_p \sim g_p$ e, novamente pela lei do cancelamento, $f_M \sim g_M$. Daí

$$f_m \# f_p \# f_M \sim g_m \# g_p \# g_M, \text{ donde } f_R \sim g_R.$$

A

Proposição 3.8.: - Seja $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse.

Então existem funções de Morse $f_m, f_M: S^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e

$f_p: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ com f_m de gênero 0 com um único índice 3, f_M de gênero 0 com um índice 0 e f_p polar ordenada, tais que $f \sim f'$, onde f' é obtida de $f_m \# f_p \# f_M$ por rearranjo.

Também f e f' admitem um campo de vetores $\xi: M \longrightarrow TM$ comum para pseudo-gradiente e os esqueletos geométrico $\sum_f \xi$ e $\sum_{f'} \xi$, diferem por uma permutação da numeração das curvas de índice 2.

Mais geralmente, todo campo pseudo-gradiente para f é também pseudo-gradiente para f' e vale a propriedade acima para os esqueletos geométricos.

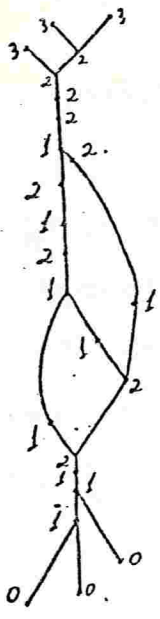
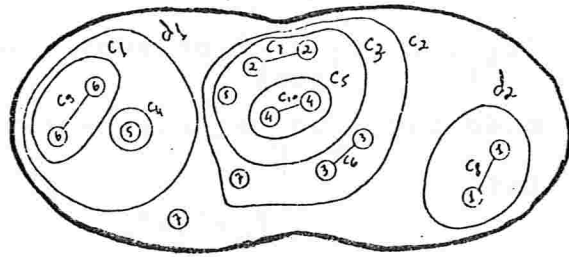
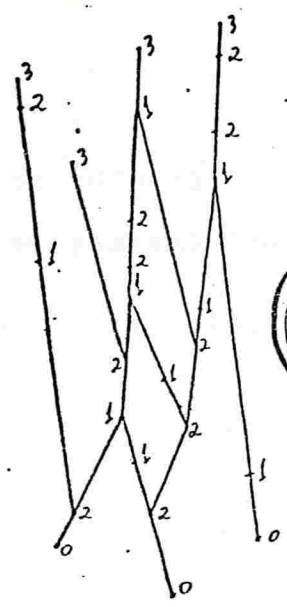
Demonstração:- A Proposição 3.8. representa um resumo das construções efetuadas até aqui.

A

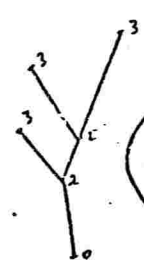
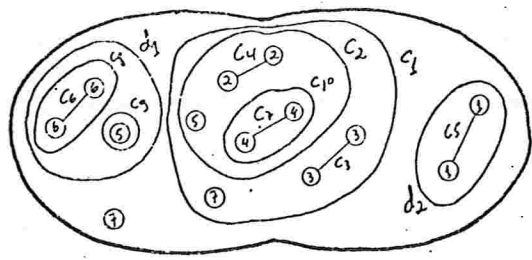
126.

Exemplo

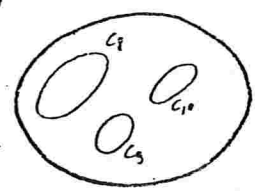
$$f: S^1 \times S^2 \times S^1 \times S^2 \rightarrow R$$



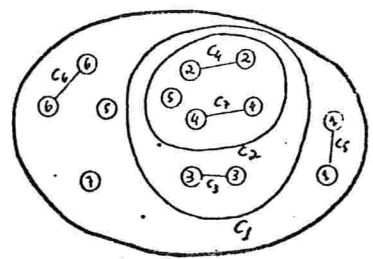
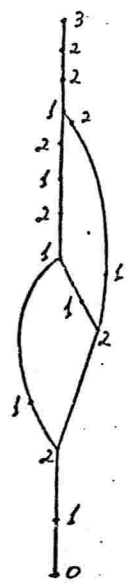
f_R



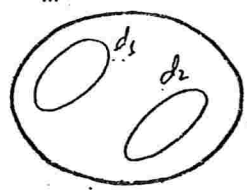
f_M



f_p



f_m



3.9.: - Modificações para Esqueletos Geométricos de Funções de Morse Polares Ordenadas

Descrevemos aqui as transformações que serão efetuadas sobre os esqueletos geométricos de funções polares e ordenadas e que, como será visto, dois esqueletos geométricos de $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ são tais que um pode ser transformado no outro por um número finito de modificações.

$f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse polar e ordenada, r um valor regular entre a última sela de índice 1 e a primeira sela de índice 2, $V=f^{-1}(r)$ é a superfície de Heegaard associada. Σ representa o esqueleto geométrico de f relativamente a um campo de vetores $\xi: M \longrightarrow TM$ pseudo-gradiente para f .

Sobre V consideremos os dois sistemas de curvas: as esferas à esquerda das selas de índice 2 e as esferas à direita das selas de índice 1. O diagrama de Heegaard associado a f e ξ é, então

$$(V; C=\{c_1, c_2, \dots, c_n\}, D=\{d_1, d_2, \dots, d_n\})$$

Denotamos por V_Σ a superfície V com os elementos associados de Σ .

Definimos dois tipos de modificações:

TIPO I - Isotopia

Dizemos que Σ' é isotópico a Σ se existe um difeomorfismo $d: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ isotópico à identidade de S^2 preservando os elementos associados ou, se existe um difeomorfismo

$h: V \rightarrow V$ isotópico à identidade de V tal que

i) $V_{\Sigma'} = (V; h(\mathcal{D}), h(C))$,

ii) $V_{\Sigma'} = (V; h(\mathcal{D}), C)$ ou

iii) $V_{\Sigma'} = (V; \mathcal{D}, h(C))$, onde

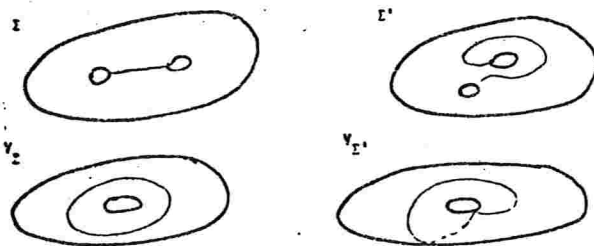
$$h(\mathcal{D}) = \{h(d_1), \dots, h(d_n)\} \text{ e } h(C) = \{h(c_1), \dots, h(c_n)\}.$$

Claramente a relação definida acima é de equivalência e se Σ' é isotópico à Σ , denotamos este fato por

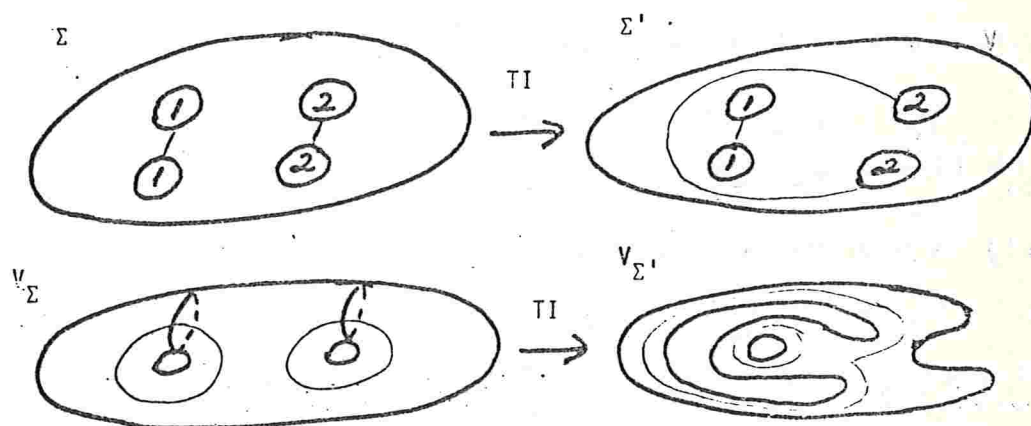
$$\Sigma \xrightarrow{T_1} \Sigma'$$

Lembramos que Σ é obtido de V_{Σ} cortando-se V ao longo do sistema de curvas \mathcal{D} e colando-se pares de discos ao longo dos bordos.

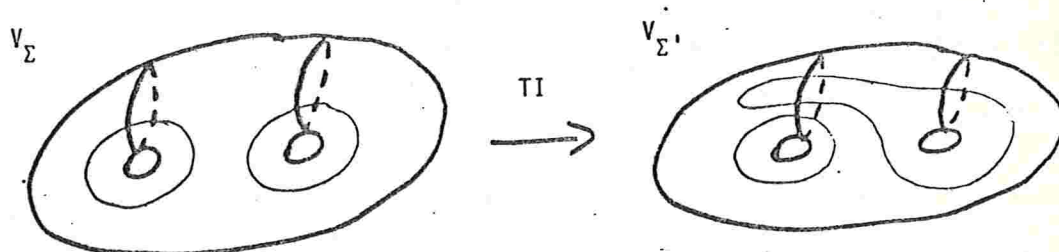
Se existe um difeomorfismo $d: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ isotópico à identidade de S^2 preservando os elementos associados, obtemos, por exemplo, o seguinte:



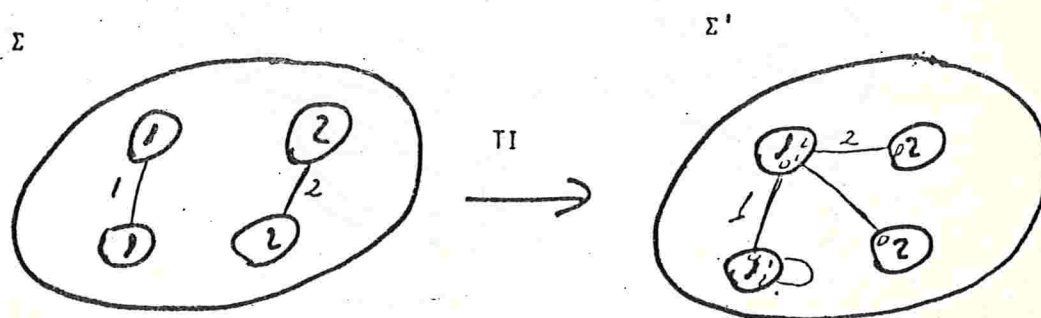
No caso i) existe um difeomorfismo $d: \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ isotópico à identidade de S^2 preservando elementos associados, como é fácil ver. Note-se que a situação contrária não é obtida a partir de i).



No caso ii) além de Σ ser modificado por uma isotopia, o sistema de curvas fechadas e arcos que produzem C é alterado da seguinte forma:



Obtemos



130.

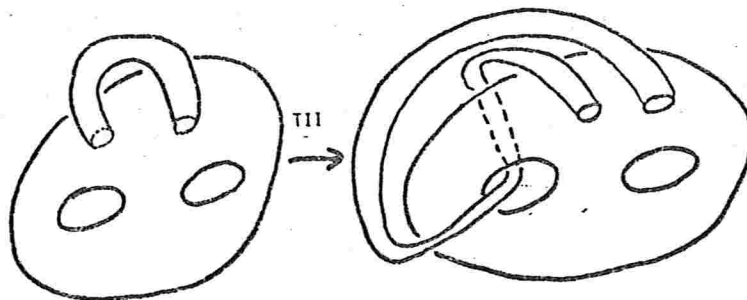
Uma curva ou um arco penetra transversalmente num disco de um par e o pedaço interior é representado no outro disco do par.

O movimento inverso sobre Σ' produzindo Σ é óbvio.

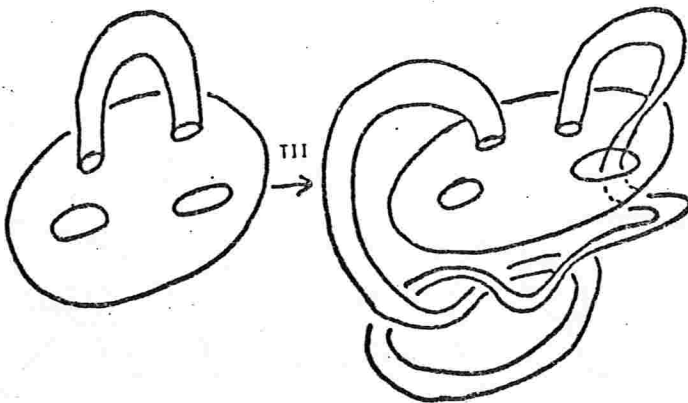
O caso iii) nada acrescenta.

TIPO II - Deslizamento de Alças

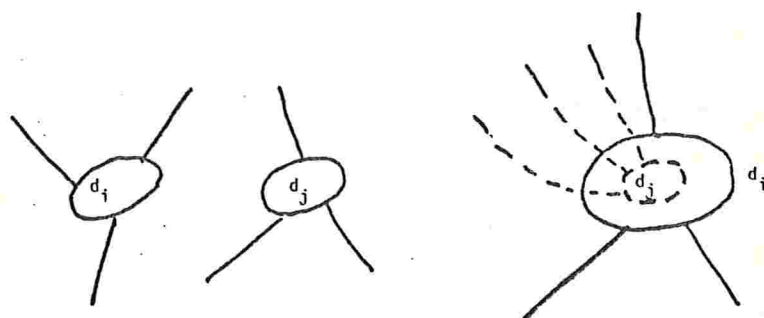
O movimento do tipo II consiste no seguinte: por uma isotopia faz-se com que a alça de número j deslize ao longo das precedentes:



ou



Em termos de Σ , sejam $(d_i, \pm d_i)$, $(d_j, \pm d_j)$ dois pares de discos associados de Σ e suponhamos $i < j$. Diminua o raio de d_j , se necessário e faça por uma isotopia, sem criar intersecções além das essenciais, com que os discos d_i e d_j fiquem concêntricos: d_j dentro de d_i .



Seguindo o arco α_j sobre o par $(d_i, \pm d_i)$ fora de Σ , o disco d_j junto com os segmentos de arcos que incidem nele e que estão em d_i , passam para o outro disco do par $(d_i, \pm d_i)$, sendo em seguida retirados dele:

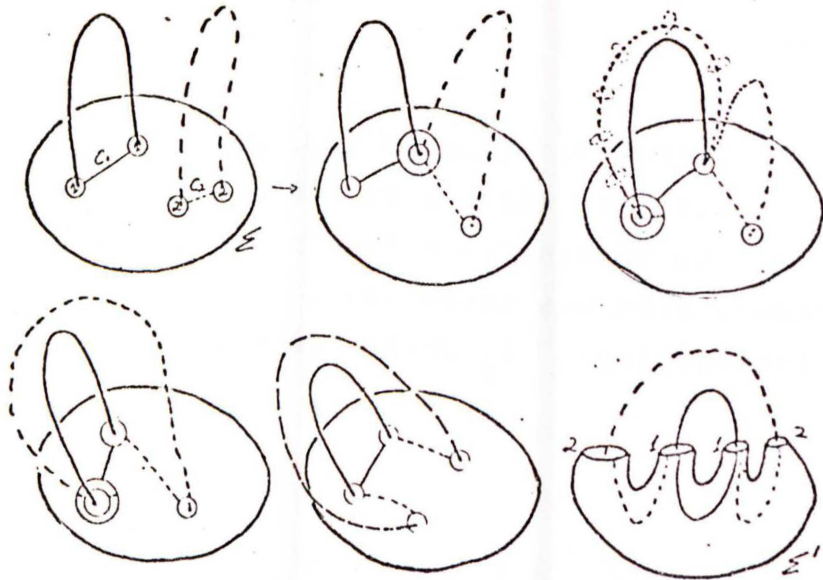
Vide os exemplos abaixo para maiores detalhes.

Tais modificações para diagramas de Heegaard são consideradas em [S] e em [Wd].

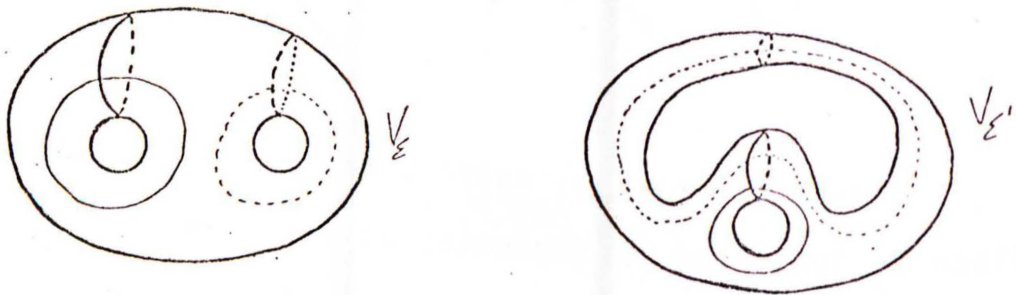
Exemplos

132.

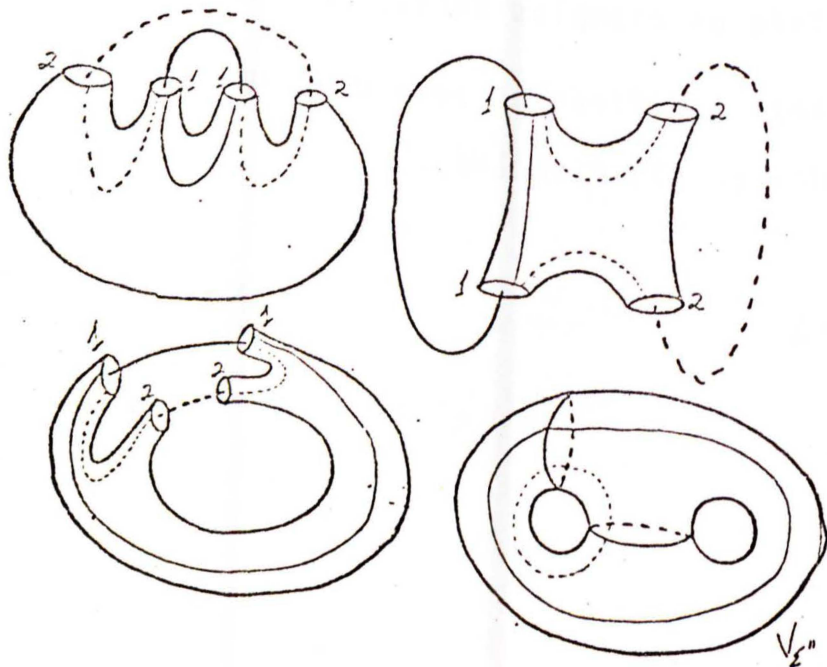
i)



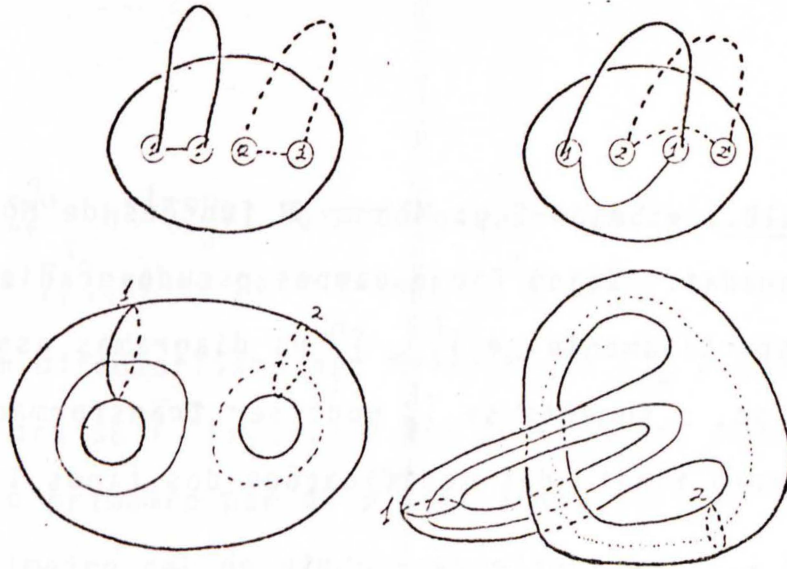
Temos, por exemplo:



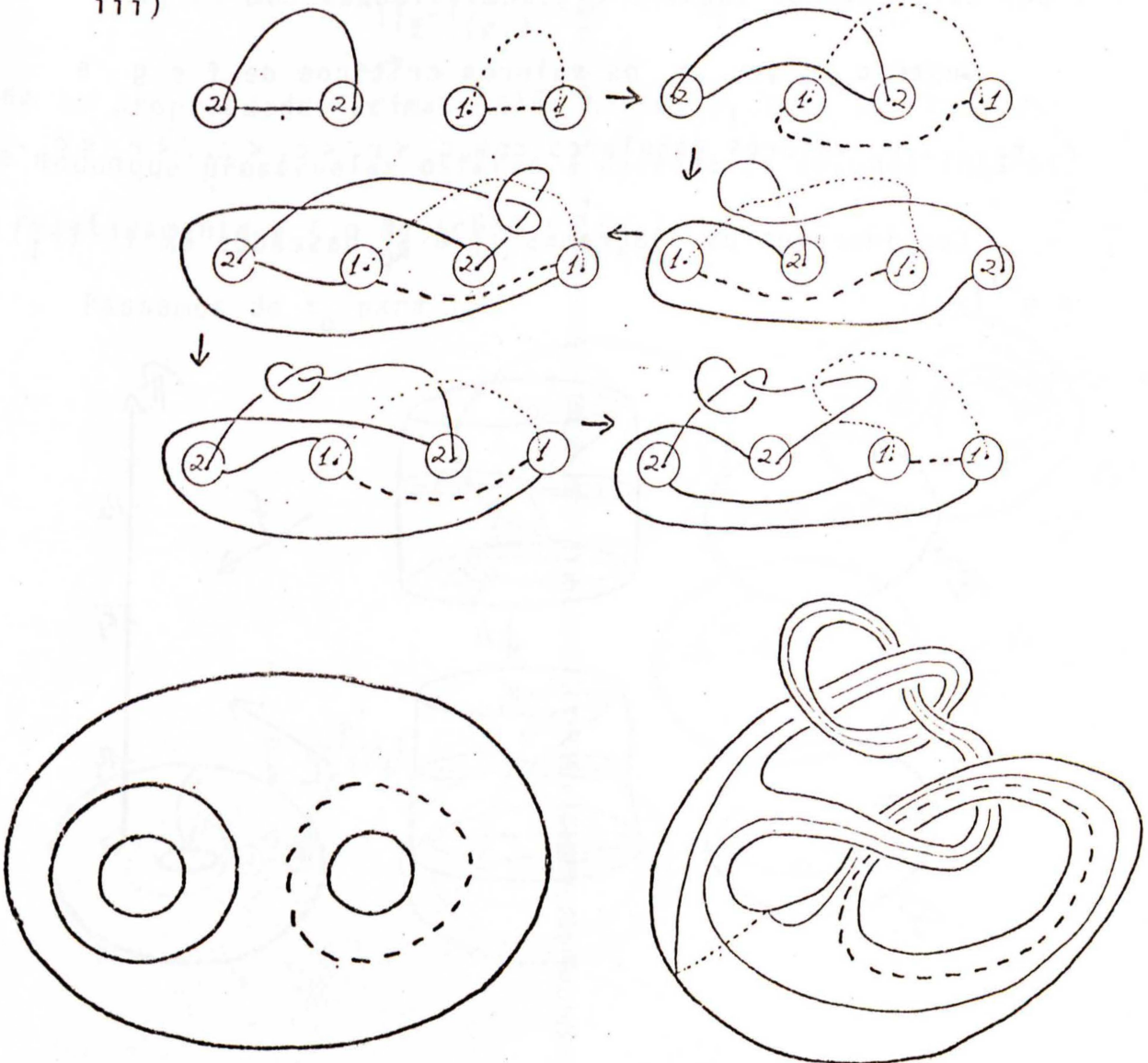
Alternativamente



ii)



iii)

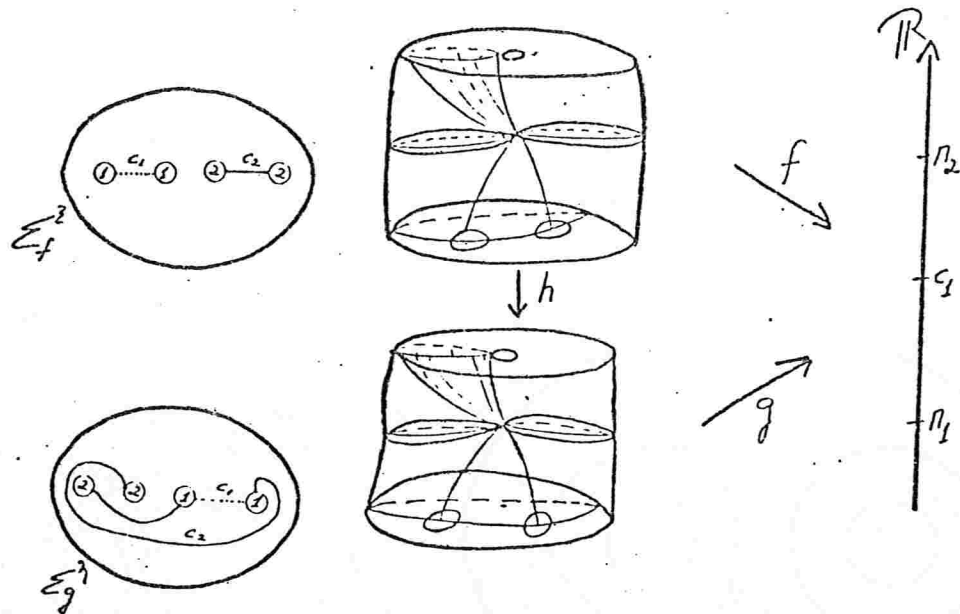


Teorema 3.10.: - Sejam $f, g: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de Morse polares e ordenadas. Sejam ξ e η campos pseudo-gradientes para f e g , respectivamente, e Σ_f^ξ , Σ_g^η os diagramas associados. Então $f \sim g$ se, e somente se Σ_f^ξ pode ser transformado em Σ_g^η por um número finito das modificações dos tipos I e II.

Demonstração: - \implies) Se $f \sim g$, sejam $h: M \rightarrow M$ e $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ os difeomorfismos tais que $k \circ f = g \circ h$. Substituindo f por $k \circ f$, podemos supor f e g equivalentes com $f = g \circ h$.

Sejam c_0, c_1, \dots, c_n os valores críticos de f e g e r_1, r_2, \dots, r_n valores regulares com $c_0 < r_1 < c_1 < \dots < r_n < c_n$.

Consideremos os diagramas Σ_f^ξ e Σ_g^η baseados em $f^{-1}(r_1)$ e $g^{-1}(r_1)$.



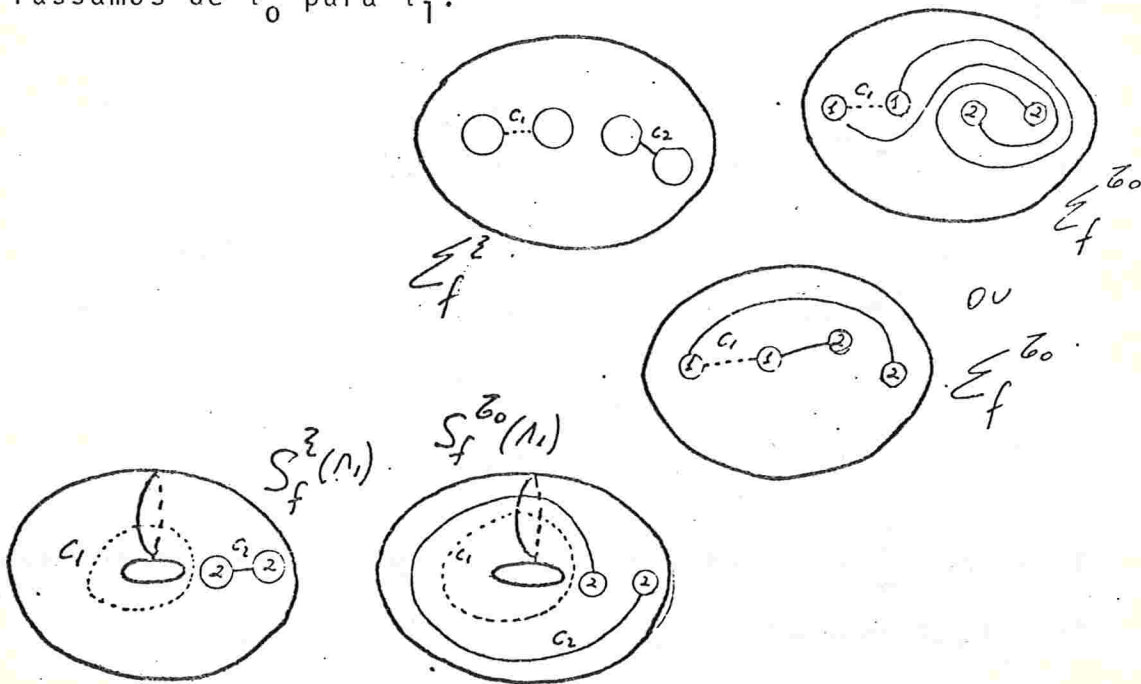
Seja $\Sigma_f^{\tau_0} = h^{-1}(\Sigma_g^{\eta})$, de modo que se tem dois diagramas para $f: \Sigma_f^{\xi}$ e $\Sigma_f^{\tau_0}$ tendo para esfera $f^{-1}(r_1) \approx S^2$.

Por um difeomorfismo $h_1: M \rightarrow M$, $h_1|_{M \setminus f^{-1}[r_1, r_2]}$ é a identidade fora de $f^{-1}[r_1, r_2]$ e tal que $f \circ h_1 = f$, podemos fazer com que o primeiro par de discos associados de Σ_f^{ξ} seja levado no primeiro par de discos associados de $\Sigma_f^{\tau_0}$, como também os nós relativos a este primeiro par, isto é,

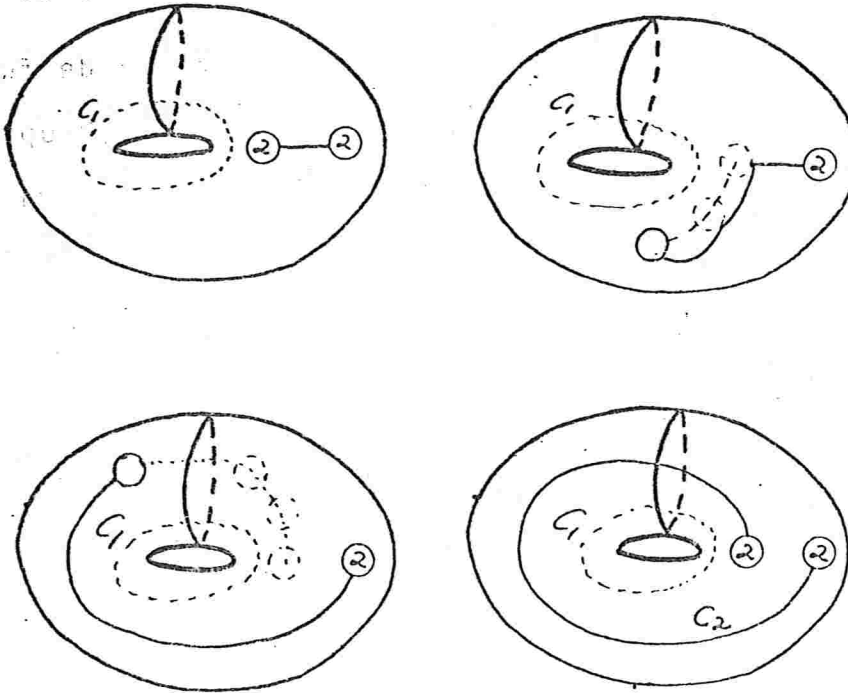
$$h_1|_{f^{-1}(r_1)}: \Sigma_f^{\xi} \rightarrow \Sigma_f^{\tau_0}$$

tem as propriedades acima. Além disso, h_1 pode ser tomado de modo que preserve as esferas à direita da sela de índice 1 relativamente a ξ e τ_0 sobre $f^{-1}(r_2)$.

Passamos de τ_0 para τ_1 .



1.8.8. Sucessivamente passa-se de τ_1 para $\tau_{\eta_f(1)}$.



Procedendo de modo análogo com relação a $-f$ e $-g$ nas selas de índice 1 obtemos que a condição \bar{e} é necessária.

\implies) As modificações dos tipos I e II são dadas por isotopia e o Teorema 1.28 da parte I mostra que o campo pseudo gradiente \bar{e} é alterado com a função preservada, donde a condição \bar{e} é suficiente. △

Teorema 3.11.: - Sejam $f, g: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$. Então $f \sim g$ se, e somente se $f_R \sim g_R$.

Demonstração: - Se $f \sim g$, então $f_R \sim g_R$ pela Proposição 3.7.

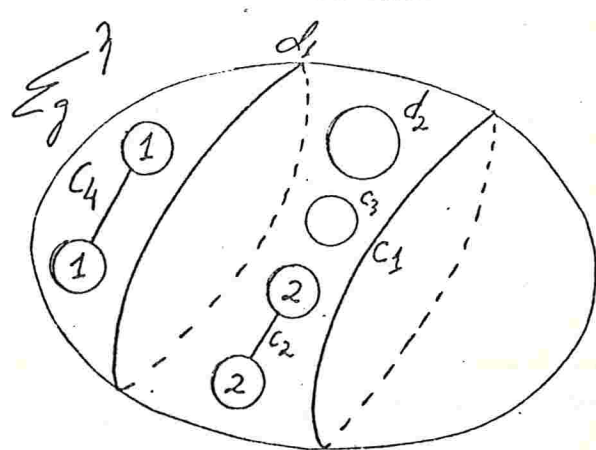
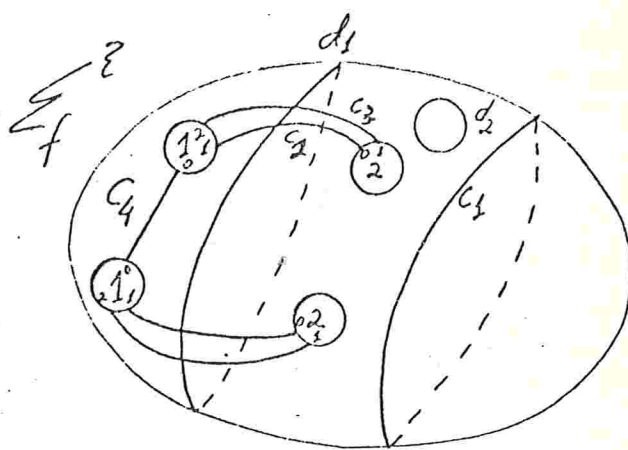
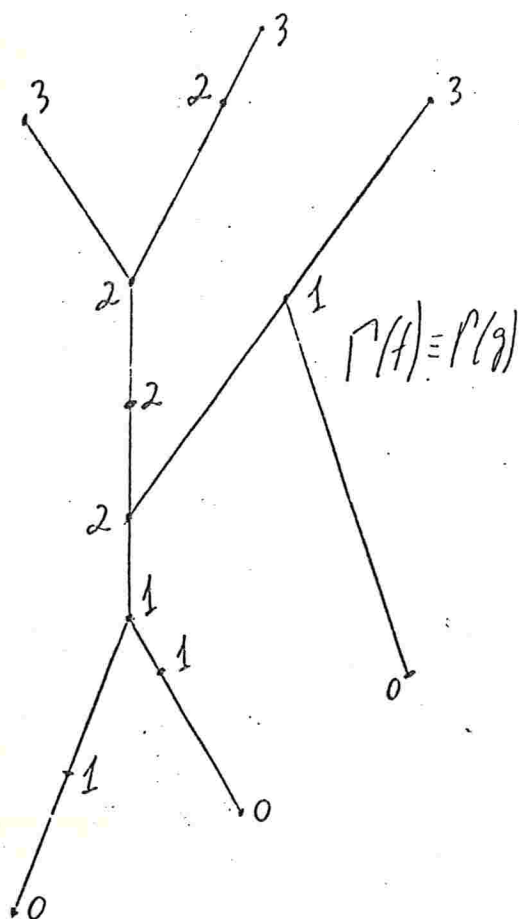
Reciprocamente, se $f_R \sim g_R$, f e g são obtidas de f_R e g_R por rearrançamento e as classes de equivalência de funções que podem ser obtidas de f_R e g_R são as mesmas (Proposição 3.7.). Também os esqueletos geométricos de f e f_R , g e g_R diferem por uma mudança na numeração das curvas de índice 2. Tal mudança é dada pelo grafo de Reeb e como $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$, segue-se que as permutações para as curvas de índice 2 que permitem obter f_R e g_R a partir de f e g são as mesmas, donde as inversas também coincidem e, em consequência, f e g têm representações isomorfas.

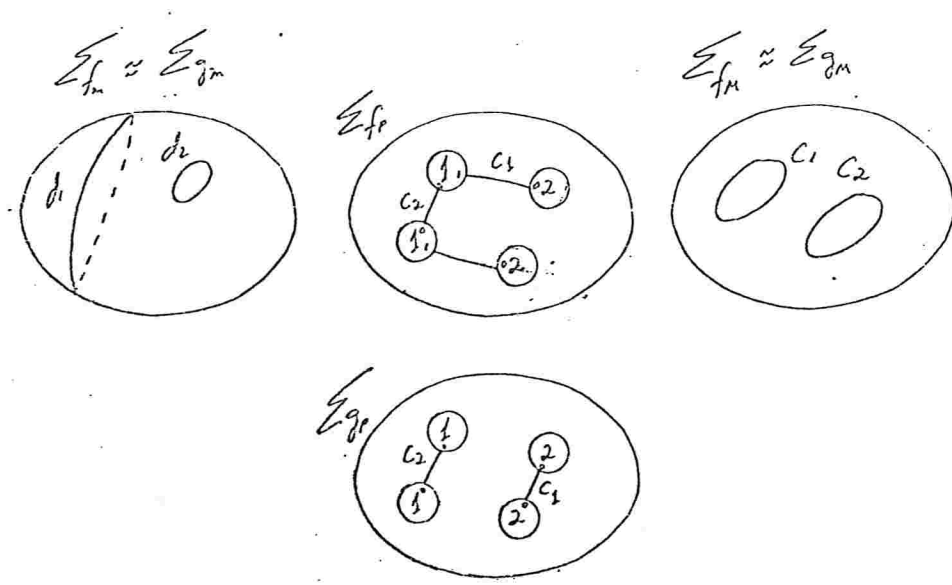
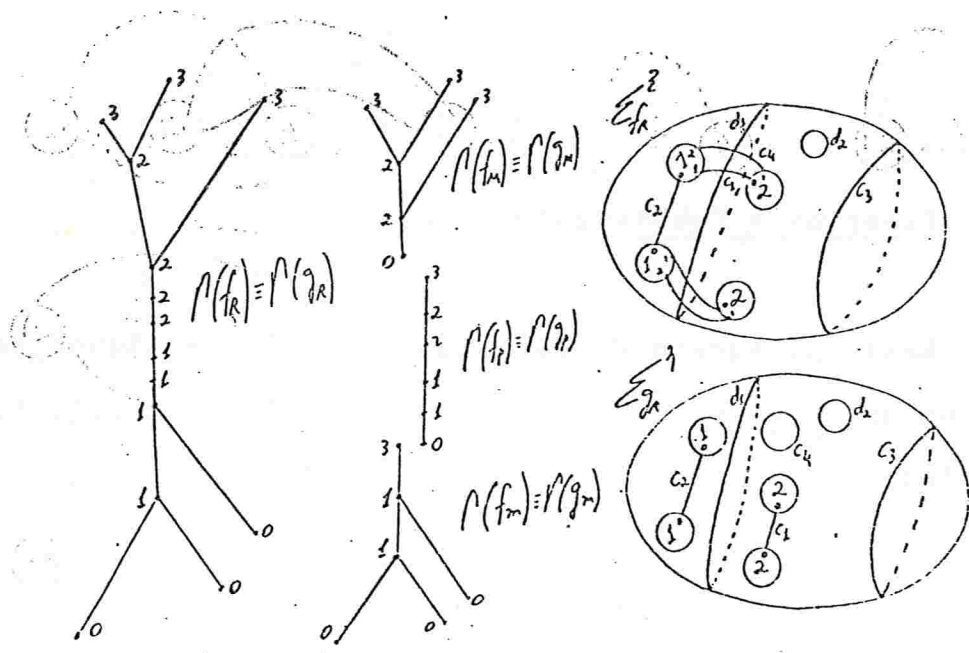
Assim, $f \sim g$ e 3.11. está completo. △

§4. Exemplos e Complementos

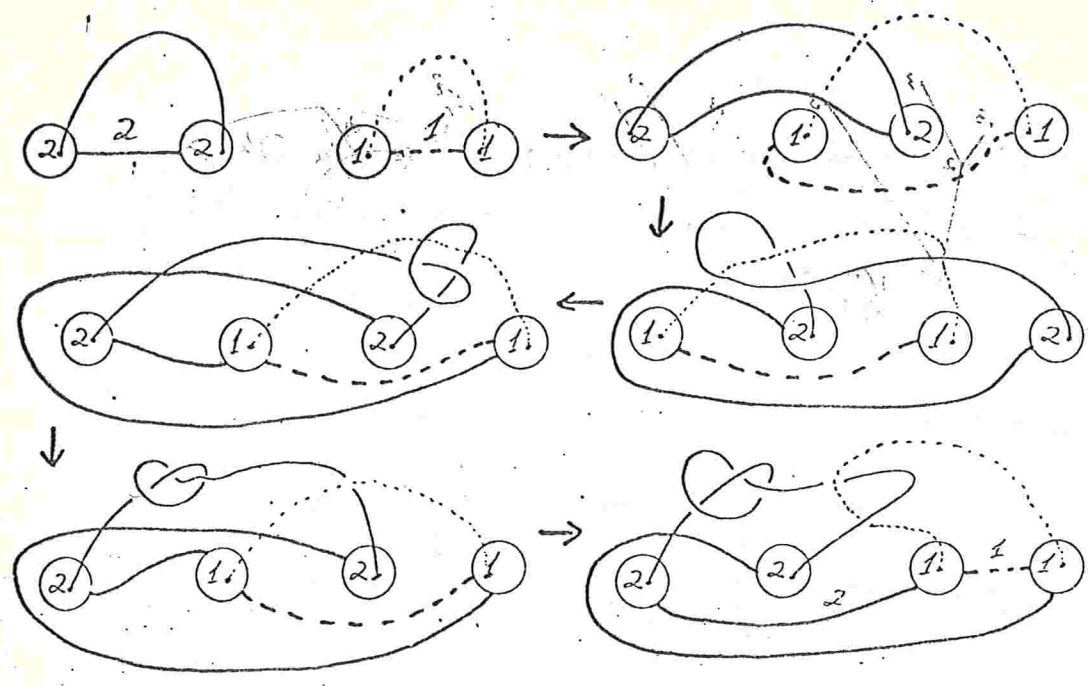
Neste parágrafo damos alguns exemplos e alguns resultados sem nos preocuparmos com as demonstrações e detalhes pertinentes.

4.0.: $f, g: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$





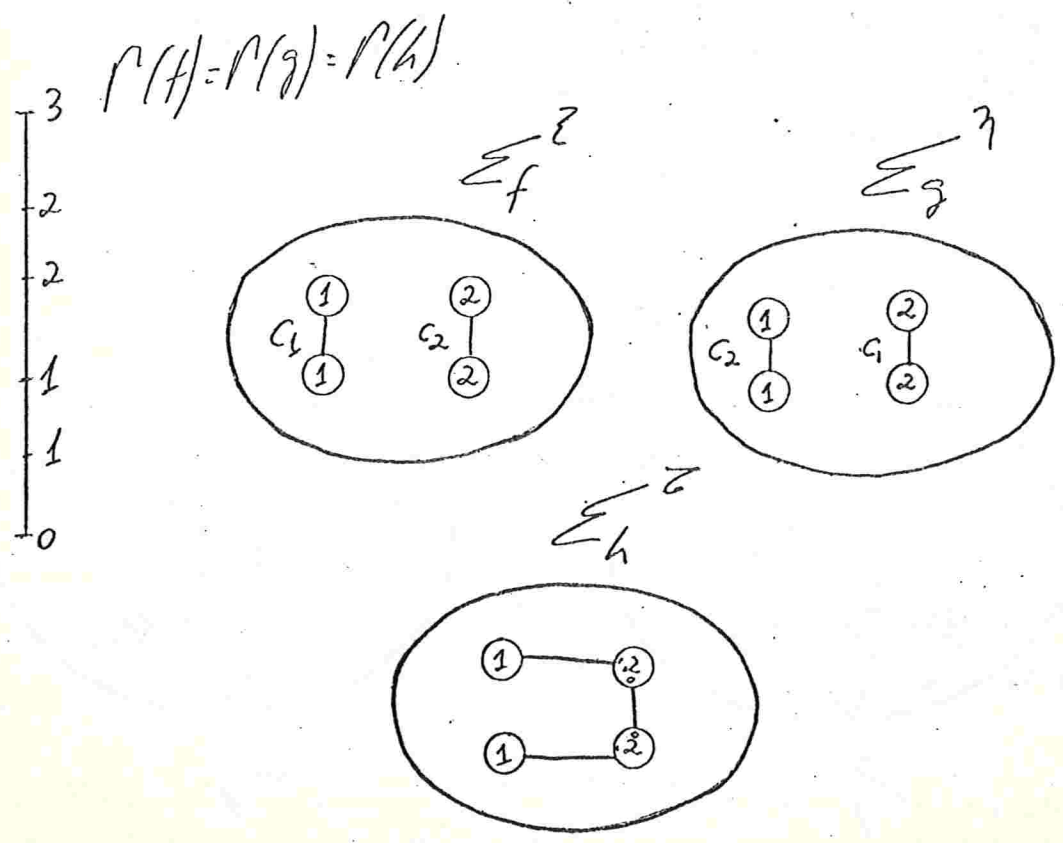
Vem $f \sim g$, pois $f_m \sim g_m, f_M \sim g_M$ e a figura a seguir mostra a equivalência entre g_p e f_p .



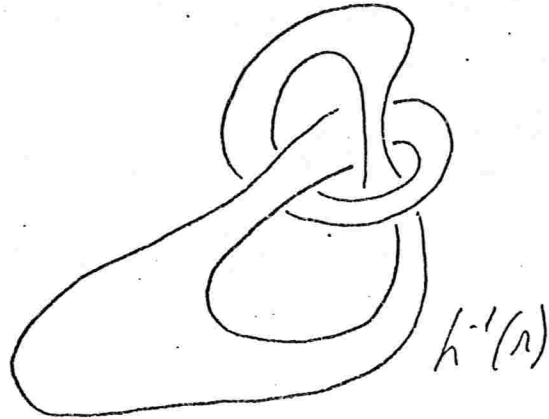
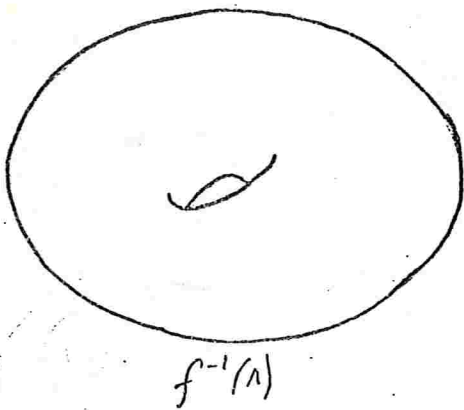
A

4.1.:

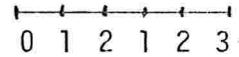
$f, g, h: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$



$f \neq h$ e $g \neq h$, pois se r é um valor regular entre as duas se-
 las de índice 1, $f^{-1}(-\infty, r]$ é vizinhança tubular de um n \bar{o}
 trivial e $h^{-1}(-\infty, r]$ é vizinhança tubular de um n \bar{o} n \bar{a} o trivial.



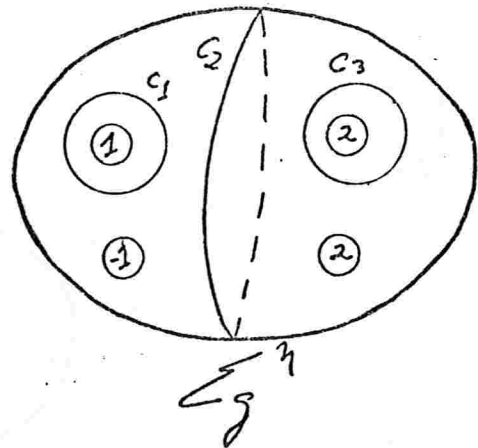
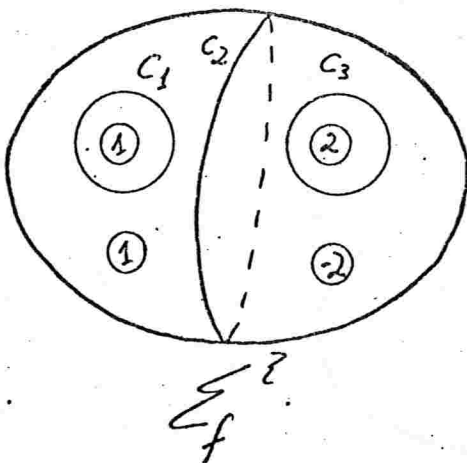
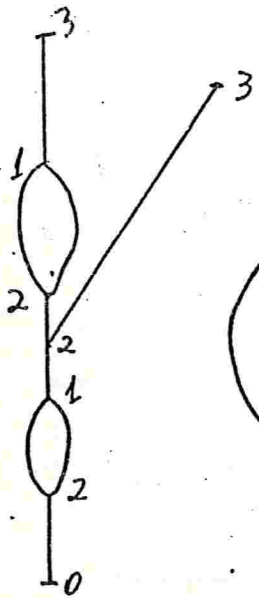
$f \neq g$, pois f admite um rearrançamento com grafo



e g n \bar{a} o.

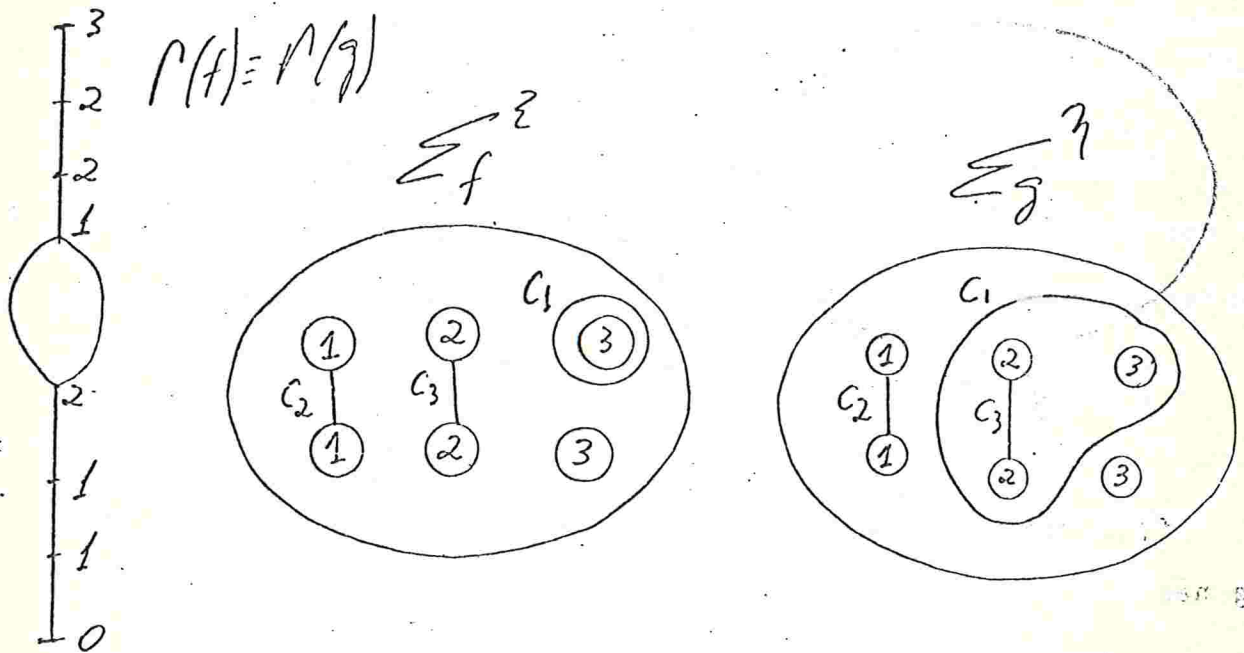
4.2.:

$$f, g: P \# S^1 \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$



Seja r um valor regular para f e g entre os dois laços
 $f^{-1}(-\infty, r] \approx S^1 \times S^2 \setminus \bar{B}^3$, $g^{-1}(-\infty, r] \approx P \setminus \bar{B}^3$, donde $f \neq g$ e $f \neq g \Delta$ as
 ...

4.3.: $f, g: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$



Se r é um valor regular no laço, temos:

$f^{-1}(r) = \partial T_2 + S^2$ e $g^{-1}(r) = \partial T_1 + \partial T_1$. Assim $f \neq g$.

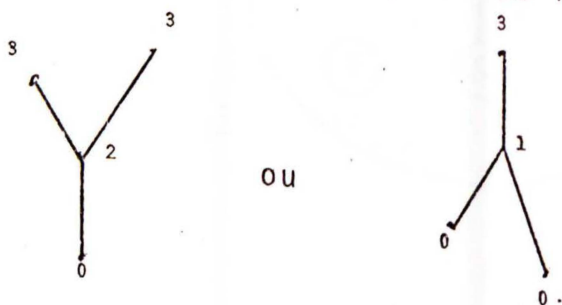


4.4.: Funções de Gênero Um.

Definição: - $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tem gênero um se para cada valor regular t de f , $f^{-1}(t)$ é reunião disjunta de superfícies de gênero menor ou igual a um, existindo um valor regular r tal que $f^{-1}(r)$ tem uma componente conexa de gênero um.

Pode-se demonstrar que toda função de gênero um é obtida por rearranjo de soma conexa de um número finito de cópias das funções "elementares" descritas abaixo:

$f: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de gênero zero com grafo de Reeb



$S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ de gênero zero com grafo de Reeb $\begin{matrix} | \\ 0 \end{matrix}$, ou $f: \mathcal{L}(p,q) \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ou $S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com grafo de Reeb $\begin{matrix} | \\ 3 \\ | \\ 2 \\ | \\ 1 \\ | \\ 0 \end{matrix}$

Em consequência, as variedades que admitem funções de gênero um são somas conexas de esferas, fibrados de 2-esferas sobre S^1 e espaços lenticulares.

Uma observação interessante é que $\mathbb{R}P^2$ não pode ser nível regular de uma função de Morse de gênero um. Δ

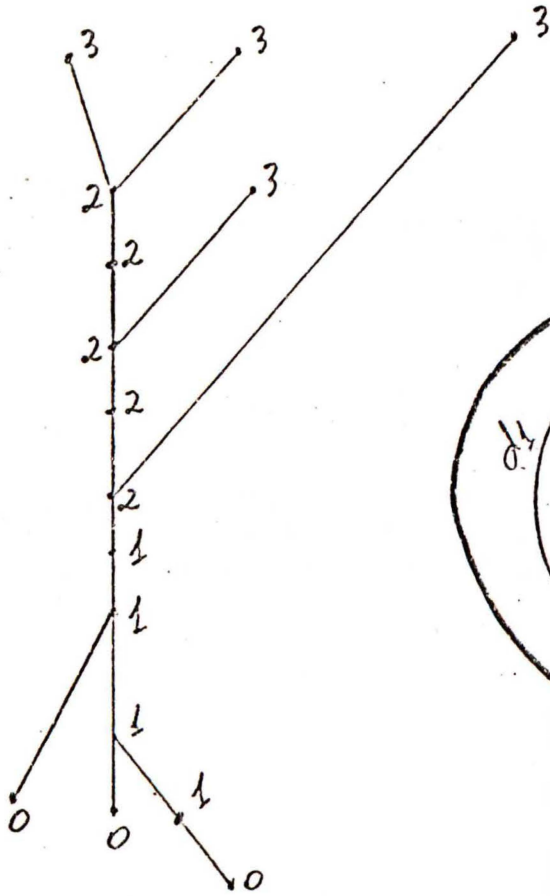
4.5.: $-f$ a partir de f .

Dada $f: M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $(\Gamma(f), \sum_f^\xi)$, o grafo de $-f$ é tal que $\gamma(f) = \gamma(-f)$, $V_f = V_{-f}$, $-f = -f$ e $\sigma_{-f}(p) = 3 - \sigma_f(p)$.

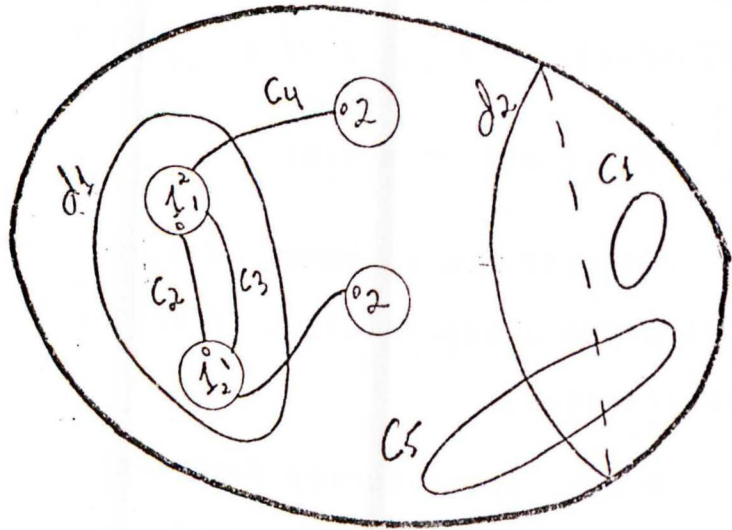
$\sum_{-f}^{-\xi}$ é obtido assim:

- a) Identifique os pares de discos associados pelos bordos, construindo a superfície L de Heegaard, destacando as curvas identificadas;
- b) Numere essas curvas juntamente com as de índice um com a numeração de $\Gamma(-f)$. Estas são as curvas de índice 2 de $\sum_{-f}^{-\xi}$ (dualizando).
- c) Corte L ao longo das curvas de índice 2 e cole um disco \mathbb{B}^2 em cada componente conexa do bordo.
- d) Numere dualmente os pares de discos que ficam numa mesma componente conexa e numere os demais com uma numeração independente, também dualmente. Numere as componentes conexas de modo que $\Gamma(-f)$ atue.
- e) Efetue a soma conexa pelos pares de discos destacados e assinale as curvas que são as curvas de índice 1 de $\sum_{-f}^{-\xi}$.

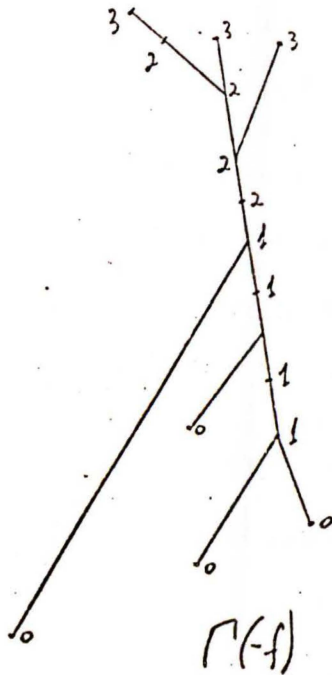
EXEMPLO



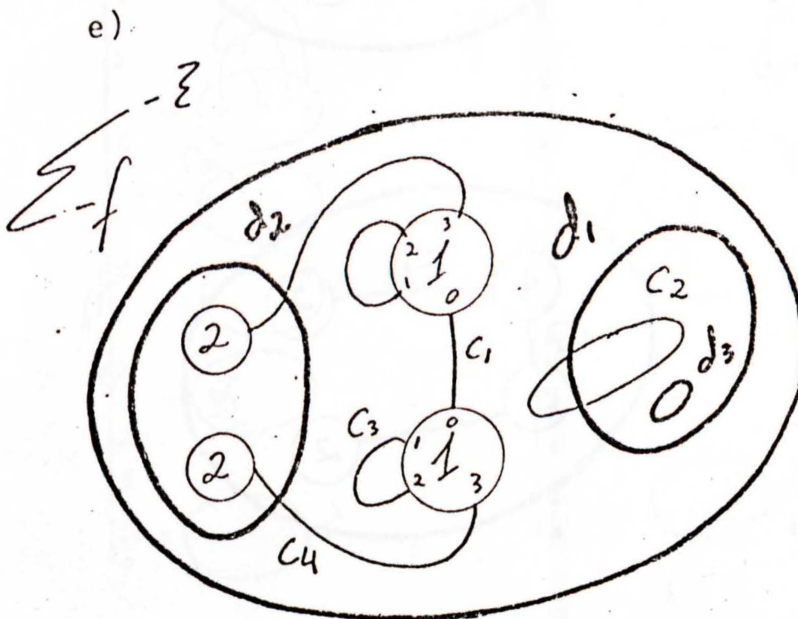
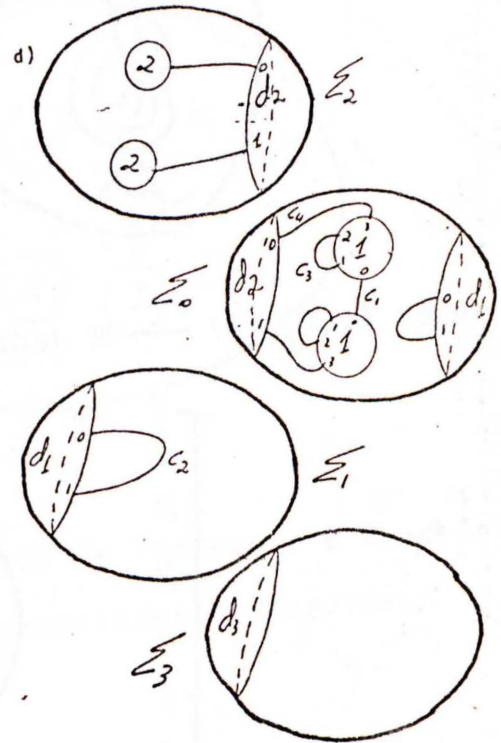
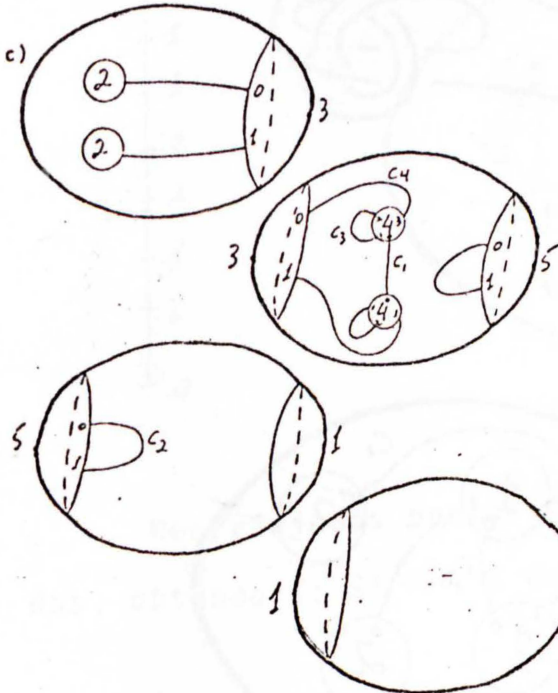
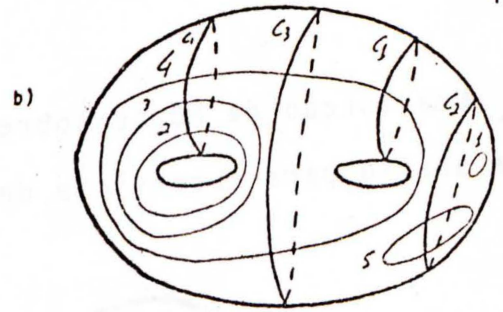
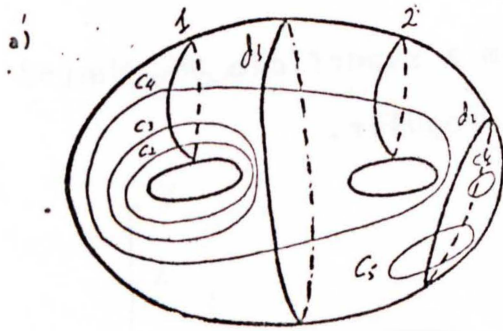
$\cap(f)$



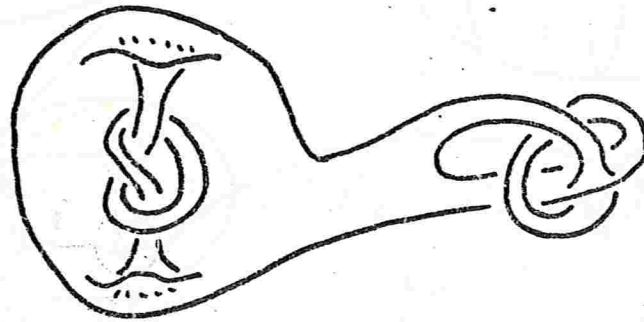
$\sum f$



$\cap(-f)$

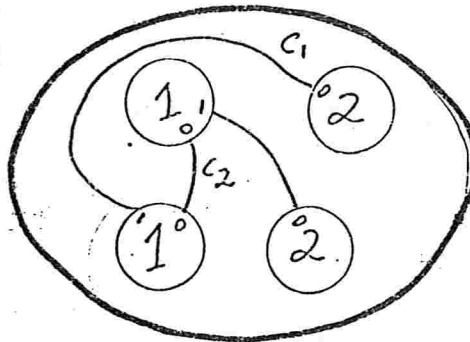


4.6.: Uma função de Morse sobre S^3 com a superfície ∂F_2 da figura abaixo para superfície de nível regular.



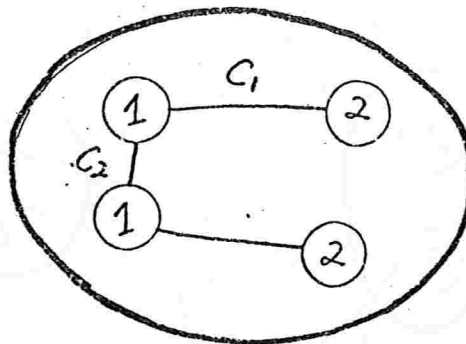
Sejam $f_1, f_2: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

f_1

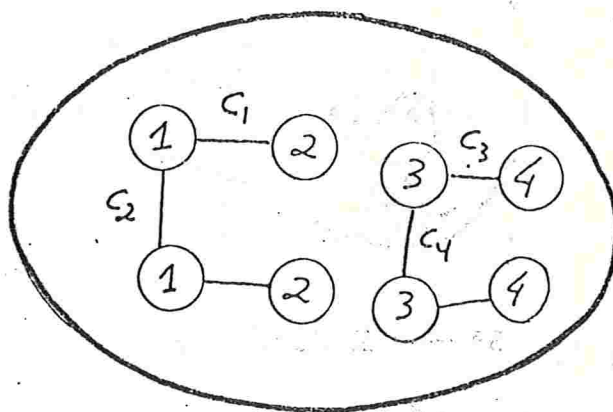
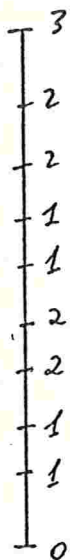


e $f_2 = -f_1$

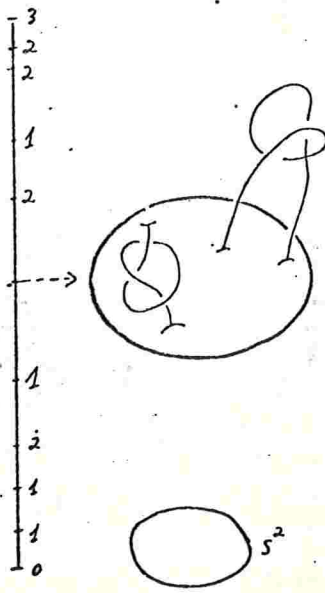
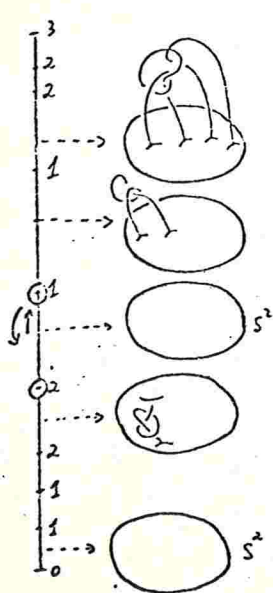
f_2



Seja $f: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse sobre S^3 com o seguinte diagrama de Morse para o nível c abaixo para $c \in \mathbb{R}$.



Rearranje os pontos críticos de índices 1 e 2 assinalados, obtendo $f: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade requerida.



4.7.: - Em [S] são definidas transformações elementares efetuadas sobre um diagrama de Heegaard produzindo novos diagramas de Heegaard para a mesma variedade. O Teorema principal é o seguinte:

Teorema: - Dois diagramas de Heegaard representam a mesma variedade M^3 se, e somente se pode-se passar de um para o outro, por um número finito das transformações elementares.

Em [F], a um campo pseudogradiante polar sobre M^3 é associado um diagrama de Heegaard e dois diagramas de Heegaard definem campos pseudo-gradientes sobre a mesma variedade se, e somente se pode-se passar de um para o outro por um número finito de transformações elementares que são definidas levando-se em conta o Teorema do Cancelamento e que são equivalentes às definidas em [S].

As transformações consideradas neste trabalho são as que preservam decomposições de Heegaard, estão definidas em [Wd] e coincidem com as de Singer desprovidas da adição ou retirada de um par (alça, curva) nas condições do Teorema do Cancelamento.

Assim, tem-se um critério para que duas funções dadas por representações estejam definidas numa mesma variedade M^3 :

Teorema: - $D = (\Gamma, \Sigma)$ e $D' = (\Gamma', \Sigma')$ correspondem a $f, g: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se, e somente se as funções polares associadas a D e D' na decomposição do rearranjo em soma conexa de soluções de D e D' , tem para diagramas, diagramas de Heegaard de uma mesma M^3 .

BIBLIOGRAFIA

- [B-J] Brocker, T. ; Janish, K - Introducción a la Topología Diferencial - Ed. A. C. Madrid, 1977.
- [F] Fleitas, G. - Classification of gradients like flows on dimensions two and three - Bol. Soc. Bras. Mat. 6(1975), 155-183.
- [G] Gramain, A. - Topologie des Surfaces - Presses Universitaires de France - Col. SUP, 1971.
- [Hè] Hempel, J. - 3-Manifolds - (Annals of Math Studies) Princeton Univ. Press, 1975.
- [Hi] Hirsh, M.W. - Differential Topology - GTM Springer-Verlag - New York, 1976.
- [I] Izar, S.A. - Funções de Morse: Um Teorema de classificação em Dimensão Dois - Tese de Mestrado - IME-USP, 1978.
- [L] Lang, S. - Introduction to Differentiable Manifolds, Interscience - New York, 1962.
- [M]₁ Milnor, J.W. - Lectures on the h-Cobordism Theorem Math. Notes - Princeton Univ. Press, 1965.
- [M]₂ Milnor, S.W. - Morse Theory - (Annals of Math Studies) Princeton Univ. Press, 1963.

154.

- [M]₃ Milnor, J.W. - Topology from the Differentiable Viewpoint - The University Press of Virginia, 1965.
- [R] Rolfsen, D. - Knots and Links, Publish or Perish Inc., Berkeley, 1976.
- [S] Singer, J. - Three Dimensional Manifolds and their Heegaard Diagrams - Trns. Amer. Math. Soc. 35-(1933), 88-111.
- [Wd] Waldhausen, F. - Some problems on 3-dimensional manifolds - Proc. of Symposium in Pure Mathematics - Vol 32, 1978 - 313-322.
- [W1]₁ Wallace, A. - Modifications and Cobounding Manifolds I - J. Math. Math. 12(1960), 503-528.
- [W1]₂ Wallace, A. - Modifications and Cobounding Manifolds II - J. Math. Math. 10(1961), 773-809.