SOBRE A ÁLGEBRA SIMPLIFICADA DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS DE COLOMBEAU

Alessandra Aparecida da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: **Análise**
Orientador: **Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

São Paulo, julho de 2005

Durante parte da elaboração deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro do Programa Bolsa-Mestrado.

Sobre a álgebra simplificada das funções generalizadas de Colombeau

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Alessandra Aparecida da Silva
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 21 de julho de 2005.

BANCA EXAMINADORA:

•Prof. Dr. Oswaldo Rio Branco de Oliveira (orientador)	IME-USP
•Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo	IME-USP
•Prof. Dr. Roberto Luiz Soraggi	UFRJ

Aos meus pais, *José* e *Neusa*,
à minha irmã, *Adriana*,
ao meu padrinho, *Rubens* e
ao meu amor, *Clayton*.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida e coragem para nela enfrentar os muitos obstáculos que transpus para chegar até aqui.

Agradeço o esforço de meus pais, José e Neusa, para manter-me estudando desde a pré-escola.

A minha irmã que muitas tarefas assumiu para que eu tivesse um tempo maior dedicado aos estudos.

Ao meu padrinho Rubens, pela costumeira e valiosa ajuda.

Ao professor Dr. Oswaldo Rio Branco de Oliveira por sugerir o tema desse trabalho.

A todos os professores que tive, em especial, aos professores Henrique Panzarelli, Roseli Fernandez e Jorge Aragona, que muito contribuiram para a realização desse trabalho, ao fazer sugestões e correções.

Aos meus amigos, por entenderem minha ausência. Em especial ao Antônio Ronaldo, sem o qual não seria possível essa digitação.

Agradeço ao meu namorado Clayton, pelos vários dias, que esteve ao meu lado pacientemente vendo-me estudar e dando-me força e incentivo quando eu quis desistir.

Alessandra Aparecida da Silva

RESUMO

Nesse trabalho abordaremos os principais resultados sobre a álgebra simplificada das funções generalizadas de Colombeau.

ABSTRACT

In this work we approach the main result about the special Colombeau algebra of generalized functions.

Índice

Introdução

O objetivo desse trabalho é definir e reunir os principais resultados sobre a álgebra simplificada $\mathcal{G}_s(\Omega)$ das funções generalizadas de Colombeau, a fim de torná-lo um texto base para futuros estudantes do assunto.

Sendo assim, no capítulo 1, definimos $\mathcal{G}_s(\Omega)$ que ao longo desse trabalho, para simplificar notações, será denotado por $\mathcal{G}(\Omega)$, damos a inclusão $\mathscr{C}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{G}_s(\Omega)$ e mostramos que, uma vez definidas a derivação parcial e a integração sobre $\mathcal{G}_s(\Omega)$, quando restritas a $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, são coerentes com os valores clássicos [ver [1], [14], [2]]. Mostramos, também, a composição de funções generalizadas [ver [5]], a relação de associação sobre $\mathcal{G}(\Omega)$ [ver [1], [21]], que é considerada o coração da teoria desenvolvida por J. F. Colombeau, por apresentar solução para alguns problemas clássicos com distribuições [ver [20]].

Ainda neste capítulo, definimos a álgebra simplificada $\overline{\mathbb{K}}_s$, ao longo do trabalho denotada por $\overline{\mathbb{K}}$, dos números (reais ou complexos) generalizados, sua inclusão em $\mathcal{G}(\Omega)$, e o conjunto $\tilde{\Omega}_c$ [ver [19]], cuja construção é imprescindível para caracterizar a função *zero* de $\mathcal{G}(\Omega)$.

Dentre os resultados aqui apresentados, destacamos o fato de que $\overline{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{G}(\Omega)$ são fractais, segundo a definição de Mandelbrot [ver [11], [18]].

Como usaremos fortemente o fato de que $\overline{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{G}(\Omega)$ são espaços ultramétricos, no capítulo 2, apresentamos as principais propriedades topológicas desses espaços e mostramos como construir uma ultramética sobre $\mathcal{G}(\Omega)$. A ultramétrica aqui apresentada foi construída por D. Scarpalezos [ver [17], [16]] (para a *full-algebra* das funções generalizadas de Colombeau, resultados análogos foram obtidos por J. Aragona, R. Fernandez e S.O. Juriaans [ver [10]]).

Uma vez definida uma ultramétrica sobre $\mathcal{G}(\Omega)$, mostramos na seção 2.2 que $\overline{\mathbb{K}}$ é um anel topológico completo que não é localmente compacto e não é $\overline{\mathbb{K}}$-espaço vetorial topológico.

A definição de Mandelbrot para fractal requer alguns conhecimentos sobre dimensão de Hausdorff, e para facilitar o entendimento, a apresentamos ao leitor no Apêndice A.

Notações e definições

Este capítulo inicial é dedicado às notações e definições necessárias ao estudo que propomos ao longo desse trabalho:

$\mathbb{K}$ significará o corpo $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Uma métrica sobre um conjunto M é uma função $\rho : M \times M \longrightarrow [0, +\infty$ que satisfaz, para todo $x, y \in M$, as seguintes propriedades :

1. $\rho(x, y) = 0$ se, e somente se $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

O número real associado a $\rho(x, y)$ é chamado **distância** de x a y. Sendo assim, muitas vezes $\rho(x, y)$ será notado por $dist(x, y)$. O par (M, ρ), onde ρ é uma métrica sobre M, é denominado **espaço métrico**.

Se $X \subset M$ então:

- $B_r(a) := \{x \in M : \rho(x; a) < r\}$ denotará a bola aberta de centro em a e raio r.
- $D_r(a) := \{x \in M : \rho(x; a) \leq r\}$ denotará a bola fechada de centro em a e raio r.
- $S_r(a) := \{x \in M : \rho(x; a) = r\}$ denotará a esfera de centro em a e raio r.
- $\overline{X}^M := \overline{X} := \{a \in M : B_\epsilon(a) \bigcap X \neq \emptyset, \quad \forall \quad \epsilon > 0\}$ indicará o fecho de X em M. Os elementos de $\overline{X}$ são chamados pontos aderentes de X.
- $X^c := \{y \in M : y \notin X\}$ denotará o complementar de X.

- $\overset{\circ}{X} := \{x \in X : B_r(x) \subset X \text{ para algum } r > 0\}$ denotará o conjunto dos pontos interiores de X.
- $\partial X := \{x \in M : B_r(x) \cap X \neq \emptyset$ e $B_r(x) \cap X^c \neq \emptyset, \forall \quad r > 0\}$ indicará a fronteira de X.
- Se $Y \subset M$ então $Y \backslash X := \{y \in Y : y \notin X\}$ indicará o conjunto complementar de X em relação a Y.
- $K \subset\subset X$ denotará um subconjunto compacto de um conjunto X.
- Se $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma função limitada em X, então $\|f\|_X := \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Símbolo de Kronecker $\delta_{u,v} := \begin{cases} 1, & \text{se} \quad u = v \\ 0, & \text{se} \quad u \neq v \end{cases}$

Dado $a \in M$, os **Símbolos de Bachamann-Landau** são definidos como:

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$

- $y = \mathcal{O}(x)$ em uma vizinhança de a se, e só se, existe $K > 0$ tal que existe $\eta > 0$
  $|y| \leq K.|x|$ em uma vizinhança de a para $|x-a| < \eta$
- $y = o(x)$, quando $x \longrightarrow a$, se, e só se, $y/x \longrightarrow 0$, quando $x \longrightarrow a$.

Intervalos notáveis $\begin{cases} I :=]0, 1] \\ I_\eta :=]0, \eta[\quad \forall\, \eta \in I \end{cases}$

Se E for algum dos conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ então:

- $E^* = E \backslash \{0\}$.
- $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$.

Se E for um conjunto finito, então $card(E)$ denotará a cardinalidade de E.

Denotando por Ω um conjunto aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$, definimos:

- $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência exaustiva de abertos para Ω, se

$$\Omega := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m, \qquad \Omega_m \text{ é aberto do } \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \overline{\Omega}_m \subset\subset \Omega_{m+1}, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

• $(K)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência exaustiva de compactos para Ω, se

$$\Omega := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m, \quad K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1} \quad \text{e} \quad K_m \subset\subset \Omega, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

• $\mathscr{C}(\Omega;\mathbb{K})$ significará o conjunto de todas as funções contínuas de Ω em $\mathbb{K}$.

• $\mathscr{C}^\infty(\Omega;\mathbb{K})$ significará o conjunto das funções de Ω em $\mathbb{K}$ que são de classe $\mathscr{C}^\infty$.

• Seja f é uma função qualquer. Chamamos o conjunto $\overline{\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\}}$ de suporte de f e o denotaremos por $supp(f)$.

• $\mathscr{D}(\Omega;\mathbb{K})$ significará o conjunto das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, tal que $supp(f) \subset\subset \Omega$.

Observação: Quando não houver perigo de confusão, denotaremos $\mathscr{C}(\Omega;\mathbb{K})$, $\mathscr{C}^\infty(\Omega;\mathbb{K})$ e $\mathscr{D}(\Omega;\mathbb{K})$, respectivamente, por $\mathscr{C}(\Omega)$, $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e $\mathscr{D}(\Omega)$.

Sejam A um anel e N um ideal de A. Denotaremos por j a projeção canônica de A ao quociente A/N. A classe do elemento x será denotada por $[x]$.

O teorema abaixo, conhecido como "**Teorema do homomorfismo**", será usado por diversas vezes ao longo do capítulo 2. Como não o provaremos, indicamos ao leitor interessado consultar [13].

Teorema: Sejam A e B dois anéis comutativos e unitários, $J \subset A$ e $I \subset B$ ideais e $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis tal que $f(J) \subset I$. Então existe um único homomorfismo de anéis $f_* : A/J \longrightarrow B/I$ tornando comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ j\downarrow & & j\downarrow \\ A/J & \xrightarrow{f_*} & B/I \end{array}$$

Fórmula de Leibniz:

$$\partial^\alpha(u.v) = \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta}u).(\partial^\beta v)$$

onde $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, $\beta = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ e $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ são tais que

$$\beta \leq \alpha \Longleftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i, \ \forall\, i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Lembramos que:

- $|\alpha-\beta| = |\alpha| - |\beta|$;
- $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$;
- $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

CAPÍTULO 1

A álgebra simplificada das funções generalizadas

Nesse capítulo mostramos como é definida a álgebra simplificada das funções generalizadas, aqui denotada por $\mathcal{G}(\Omega)$, sendo Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$.

Como pretendemos reunir as principais propriedades de $\mathcal{G}(\Omega)$, reescrevemos aqui alguns resultados dados em [1], [14] e [2].

1.1 A definição de $\mathcal{G}(\Omega)$

Definição 1.1.1. *Denotamos por $\mathcal{E}[\Omega;\mathbb{K}]$ o conjunto de todas as funções $\widehat{f} : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $\widehat{f}(\epsilon,\cdot) \in \mathscr{C}^\infty(\Omega;\mathbb{K}) \quad \forall \quad \epsilon \in I$.*

$\hat{f}_\epsilon(\cdot)$

Definição 1.1.2. *Denotamos por $\mathcal{E}_M[\Omega;\mathbb{K}]$ a álgebra diferencial de todas a funções $\widehat{f} \in$ $\in \mathcal{E}[\Omega;\mathbb{K}]$ tais que para todo $K \subset\subset \Omega$ e para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K = o(\epsilon^\sigma) \quad \textit{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0^+.$$

Definição 1.1.3. *Denotamos com $\mathcal{N}[\Omega;\mathbb{K}]$ o ideal de $\mathcal{E}[\Omega;\mathbb{K}]$ formado pelas funções $\widehat{f} \in \mathcal{E}[\Omega;\mathbb{K}]$ tais que para todo $K \subset\subset \Omega$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e para todo $b \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K = o(\epsilon^b) \quad \textit{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0^+.$$

Um elemento de $\mathcal{E}_M[\Omega;\mathbb{K}]$ é chamado função moderada em Ω.

Um elemento de $\mathcal{N}[\Omega;\mathbb{K}]$ é chamado função nula em Ω.

As duas proposições a seguir serão úteis nas provas de alguns resultados que se seguem:

Proposição 1.1.4. *Para $\widehat{f} \in \mathcal{E}[\Omega;\mathbb{K}]$ são equivalentes:*

1. $\forall \; K \subset\subset \Omega \quad e \quad \forall \, \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \exists \, N \in \mathbb{N},\ c > 0$ *e* $\eta \in I$ *tais que*
$$\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K \leq c.\epsilon^{-N} \quad \forall \, \epsilon \in I_\eta;$$

2. $\forall \; K \subset\subset \Omega \quad e \quad \forall \, \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \exists \, N \in \mathbb{N}$ *tal que*
$$\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K = \mathcal{O}(\epsilon^{-N}) \quad se \quad \epsilon \longrightarrow 0^+;$$

3. $\forall \; K \subset\subset \Omega \quad e \quad \forall \, \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \exists \, \sigma \in \mathbb{R}$ *tal que*
$$\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K = o(\epsilon^\sigma) \quad quando \quad \epsilon \longrightarrow 0^+.$$

Prova:

- (1) $\Longleftrightarrow$ (2) decorre da definição de $\mathcal{O}$.

- (1) $\Longrightarrow$ (3) pois $\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K \leq c.\epsilon^{-N} \Longrightarrow \epsilon^{N+1}\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K \leq c.\epsilon \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \frac{\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K}{\epsilon^{-N-1}} \leq c.\epsilon \Longrightarrow \lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0^+} \frac{\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K}{\epsilon^{-(N+1)}} = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K = o(\epsilon^\sigma)$ quando $\epsilon \longrightarrow 0^+$ *onde* $\sigma = -N-1$.

- (3) $\Longrightarrow$ (1). De fato, se (3) vale, então $\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K = o(\epsilon^\sigma) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0^+} \frac{\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K}{\epsilon^\sigma} = 0 \Longrightarrow \|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K \leq c.\epsilon^\sigma, \epsilon \in I_\eta,\ \eta \in I.$

Basta tomarmos $N \in \mathbb{N}$ tal que $-N \leq \sigma$ pois $\epsilon^\sigma \leq \epsilon^{-N}$ $(0 \leq \epsilon < 1)$ e deste modo $\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K \leq c.\epsilon^{-N}$.

∎

Proposição 1.1.5. *Para $\widehat{f} \in \mathcal{E}[\Omega;\mathbb{K}]$ são equivalentes:*

1. $\forall\ K \subset\subset \Omega,\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$ *e* $\forall\, q \in \mathbb{N},\ \exists\, c > 0$ *e* $\exists\, \eta \in I$ *tais que*

$$\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_K \leq c.\epsilon^q \quad \forall\, \epsilon \in I_\eta;$$

2. $\forall\ K \subset\subset \Omega,\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$ *e* $\forall\, q \in \mathbb{N}$ *tem-se*

$$\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_K = \mathcal{O}(\epsilon^q) \quad se \quad \epsilon \longrightarrow 0+;$$

3. $\forall\ K \subset\subset \Omega,\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$ *e* $\forall\, b \in \mathbb{R}$, *tem-se*

$$\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_K = o(\epsilon^b) \quad quando \quad \epsilon \longrightarrow 0^+.$$

Prova:

- (1) $\Longleftrightarrow$ (2) decorre da definição de $\mathcal{O}$.

- (1) $\Longrightarrow$ (3) pois, dado $b \in \mathbb{R}$, consideremos $q \in \mathbb{N}$ tal que $b < q$.

Então $\epsilon^q \leq \epsilon^b$ e $\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_K \leq c.\epsilon^q \Longrightarrow \frac{\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K}{\epsilon^b} \leq c.\epsilon^{q-b} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon,\cdot)\|_K}{\epsilon^b} = 0 \Longrightarrow \|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_K = o(\epsilon^b)$.

- Que (3) $\Longrightarrow$ (1) é óbvio.

∎

Definição 1.1.6. *Denotamos por $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K})$ o anel quociente de $\mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{K}]$ por $\mathcal{N}[\Omega; \mathbb{K}]$.*

Um elemento de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K})$ é chamado função generalizada.

Sempre que não houver perigo de confusão, denotaremos $\mathcal{E}[\Omega; \mathbb{K}], \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{K}], \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{K}]$ e $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K})$, respectivamente por $\mathcal{E}[\Omega], \mathcal{E}_M[\Omega], \mathcal{N}[\Omega]$ e $\mathcal{G}(\Omega)$.

1.2 Derivadas parciais em $\mathcal{G}(\Omega)$

Se $\widehat{f} \in \mathcal{E}[\Omega]$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então está bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \widehat{f} : I \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\epsilon, x) &\longmapsto \partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, x), \end{aligned}$$

onde $\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, x) := \partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)(x)$.

Decorre diretamente da Definição 1.1.1 que $\partial^\alpha \widehat{f} \in \mathcal{E}[\Omega]$.

Observemos que deste modo temos definida uma aplicação $\mathbb{K}$-linear

$$\partial^\alpha : \widehat{f} \in \mathcal{E}[\Omega] \longmapsto \partial^\alpha \widehat{f} \in \mathcal{E}[\Omega], \tag{1.1}$$

que satisfaz a seguinte proposicão:

Proposição 1.2.1. *Se Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então $\partial^\alpha(\mathcal{E}_M[\Omega]) \subset \mathcal{E}_M[\Omega]$ e $\partial^\alpha(\mathcal{N}[\Omega]) \subset \mathcal{N}[\Omega]$.*

Prova:

Fixados $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$, $K \subset\subset \Omega$ e $\beta \in \mathbb{N}^n$, é trivial notar que $\partial^\beta(\partial^\alpha \widehat{f}) = \partial^{\alpha+\beta} \widehat{f}$.

Se $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$, então segue diretamente da Definição 1.1.2 que existe σ correspondente a $\widehat{f}$, K e $\alpha + \beta$.

De modo análogo, se $\widehat{f} \in \mathcal{N}[\Omega]$, então é óbvio que $\partial^{\alpha+\beta} \widehat{f}$ satisfaz o limite da Definição 1.1.3 para todo $b \in \mathbb{R}$.

∎

Segue, da proposição acima e do teorema do homomorfismo para anéis, que a função ∂^α em (1.1) define uma única aplicação $\mathbb{K}$-linear de $\mathcal{G}(\Omega)$ em $\mathcal{G}(\Omega)$, que será também denotada por ∂^α, tornando comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_M[\Omega] & \xrightarrow{\partial^\alpha} & \mathcal{E}_M[\Omega] \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ \mathcal{G}(\Omega) & \xrightarrow{\partial^\alpha} & \mathcal{G}(\Omega). \end{array} \tag{1.2}$$

Definição 1.2.2. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Para cada $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, o elemento $\partial^\alpha f \in \mathcal{G}(\Omega)$ é chamado derivada parcial de ordem α de f.*

Proposição 1.2.3. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Então*

$$\partial^\alpha(f.g) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f).(\partial^{\alpha-\beta} g),$$

quaisquer que sejam $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$.

Prova:

Fixados $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$ quaisquer, sejam $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ representantes quaisquer de f, g, respectivamente. O Resultado segue da Fórmula de Leibniz e da comutatividade do diagrama (1.2):

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(f.g) = \partial^\alpha(j(\widehat{f}.\widehat{g})) = j(\partial^\alpha(\widehat{f}.\widehat{g})) &= j\left[\sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \tbinom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta \widehat{f}).(\partial^{\alpha-\beta}\widehat{g})\right] \\ &= \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \tbinom{\alpha}{\beta}\, j(\partial^\beta \widehat{f}).j(\partial^{\alpha-\beta}\widehat{g}) \qquad (1.3) \\ &= \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \tbinom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f).(\partial^{\alpha-\beta} g) \end{aligned}$$

∎

1.3 A inclusão de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{G}(\Omega)$

Dada $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, seja a função

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : I \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \widetilde{f}(\epsilon, x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

.

A função $\widetilde{f}$ é claramente um elemento moderado em Ω, isto é, $\widetilde{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$.

Deste modo, aplicando o teorema do homomorfismo para anéis, temos definido um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras

$$\begin{aligned} i_{\mathscr{C}^\infty} : \mathscr{C}^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{G}(\Omega) \\ f &\longmapsto \widetilde{f} + \mathcal{N}[\Omega], \end{aligned}$$

que é injetivo pois $\widetilde{f} \in \mathcal{N}[\Omega] \iff f = 0$.

Identificando $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ com a imagem de $i_{\mathscr{C}^\infty}$ em $\mathcal{G}(\Omega)$, escrevemos $\mathscr{C}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{G}(\Omega)$.

A próxima proposição nos mostra que a derivação parcial em $\mathcal{G}(\Omega)$ é coerente com a noção clássica de derivada em $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$.

Proposição 1.3.1. *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\Omega) & \xrightarrow{\partial^\alpha} & \mathscr{C}^\infty(\Omega) \\ \downarrow i_{\mathscr{C}^\infty} & & \downarrow i_{\mathscr{C}^\infty} \\ \mathcal{G}(\Omega) & \xrightarrow{\partial^\alpha} & \mathcal{G}(\Omega) \end{array} \qquad (1.4)$$

é comutativo.

Prova:

Notemos que se $f \in \mathscr{C}^\infty$, então $\partial^\alpha(f) = \partial^\alpha f \in \mathscr{C}^\infty$ e $\widetilde{\partial^\alpha f} = \partial^\alpha(\widetilde{f})$, . Pelo diagrama (1.2), temos

$$i_{\mathscr{C}^\infty}(\partial^\alpha f) = j(\widetilde{\partial^\alpha f}) = j(\partial^\alpha(\widetilde{f})) = \partial^\alpha(j(\widetilde{f})) = \partial^\alpha(i_{\mathscr{C}^\infty}(f)).$$

∎

1.4 Propriedades locais das funções generalizadas

O resultado dado nesta seção é de distinta importância uma vez que nos fornece informações globais a partir das locais.

Comecemos, entretanto, definindo a restrição de uma função generalizada f de $\mathcal{G}(\Omega)$ a um aberto Ω_1, onde $\Omega_1 \subset \Omega$.

Se $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e Ω_1 é um subconjunto aberto de Ω, temos uma restrição $\mathbb{K}$-linear

$$r^\Omega_{\Omega_1} : \widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega] \longmapsto r^\Omega_{\Omega_1}(\widehat{f}) \in \mathcal{E}_M[\Omega_1],$$

sendo

$$r^\Omega_{\Omega_1}(\widehat{f})(\epsilon, \cdot) = \hat{f}(\epsilon, \cdot) \mid_{\Omega_1}, \quad \forall \quad \epsilon \in I,$$

que satistaz $r^\Omega_{\Omega_1}(\mathcal{N}[\Omega]) \subset \mathcal{N}[\Omega_1]$.

Do exposto acima e do teorema do homomorfismo para anéis, segue que existe um único homomorfismo $(r^\Omega_{\Omega_1})^*$ tornando comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_M[\Omega] & \xrightarrow{r^\Omega_{\Omega_1}} & \mathcal{E}_M[\Omega_1] \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ \mathcal{G}(\Omega) & \xrightarrow{(r^\Omega_{\Omega_1})^*} & \mathcal{G}(\Omega_1) \end{array}, \tag{1.5}$$

o que dá sentido à seguinte definição:

Definição 1.4.1. *Sejam Ω e Ω_1 dois abertos do $\mathbb{R}^n$ tais que $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega$. Se $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, então o elemento $(r^\Omega_{\Omega_1})^*(f) \in \mathcal{G}(\Omega_1)$ é chamado **restrição** de f a Ω_1 e é denotado por $f \mid_{\Omega_1}$.*

Para o próximo teorema precisaremos das seguintes notações que introduziremos agora:

• ${}_{\mathbb{C}}Alg$ é a categoria das $\mathbb{C}$-álgebras;

•$\mathcal{U}_{\mathbb{R}^n} := \{X : X \text{ é aberto do } \mathbb{R}^n\}$.

Teorema 1.4.2. $\mathcal{G}(\cdot;\mathbb{K}) : \Omega \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}^n} \longmapsto \mathcal{G}(\Omega) \in {}_{\mathbb{C}}Alg$ *é um feixe de álgebras diferenciais sobre* $\mathbb{R}^n$.

Prova:

Fixemos $\Omega \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}^n}$ e $f \in \mathcal{G}(\Omega)$. Temos que $\mathcal{G}(\cdot;\mathbb{K})$ é um pré-feixe pois, pelo diagrama (1.5), para cada Ω_1 (aberto do $\mathbb{R}^n$) tal que $\Omega_1 \subset \Omega$, existe $(r^{\Omega}_{\Omega_1})^* : \mathcal{G}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{G}(\Omega_1)$ tal que $(r^{\Omega}_{\Omega})^*$ é a identidade sobre Ω e, se $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$, então $(r^{\Omega_2}_{\Omega_1})^* \circ (r^{\Omega}_{\Omega_2})^* = (r^{\Omega}_{\Omega_1})^*$, isto é, $(f\mid_{\Omega_2})\mid_{\Omega_1} = f\mid_{\Omega_1}$.

Seja $(\Omega_i)_{i\in J}$ uma cobertura aberta para Ω tal que $\Omega = \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i$.

Para provar que $\mathcal{G}(\cdot;\mathbb{K})$ é um feixe, devemos mostrar que $\mathcal{G}(\cdot;\mathbb{K})$ satisfaz as seguintes condições:

(F_1) Se $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $f\mid_{\Omega_i} = g\mid_{\Omega_i}$ para todo $i \in J$, então $f = g$.

(F_2) Seja $f_i \in \mathcal{G}(\Omega_i)$ para cada $i \in J$. Se $f_i\mid_{\Omega_i\cap\Omega_j} = f_j\mid_{\Omega_i\cap\Omega_j}$ sempre que $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, então existe uma única $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ tal que $f\mid_{\Omega_i} = f_i$ para todo $i \in J$.

Passemos então à prova.

Para mostrarmos (F_1), consideremos $\widehat{f}, \widehat{g}$ representantes arbitrários de f, g, respectivamente, e mostremos que $(\widehat{f} - \widehat{g}) \in \mathcal{N}[\Omega]$.

Seja $K \subset\subset \Omega$. Uma vez que $(\Omega_i)_{i\in J}$ cobre K, existem compactos $K_1, K_2, \ldots, K_n$ tais que $K = \bigcup\limits_{k=1}^{n} K_k$ e $K_k \subset \Omega_{i_k}$, $i_k \in J$ e $1 \leq k \leq n$.

Uma vez que por hipótese $(\widehat{f} - \widehat{g})\mid_{I\times\Omega_{i_k}} \in \mathcal{N}[\Omega_{i_k}]$, dados $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $q \in \mathbb{N}$, existem $c_{i_k} > 0$ e $\eta_{i_k} \in I$ tais que

$$|\partial^\alpha(\widehat{f} - \widehat{g})(\epsilon, x)| \leq c_{i_k}\epsilon^q, \ \forall\, x \in K_k, \ \forall\, \epsilon \in I_{\eta_{i_k}}.$$

Fazendo $c := \max\limits_{1\leq k\leq n}\{c_{i_k}\}$ e $\eta := \min\limits_{1\leq k\leq n}\{\eta_{i_k}\}$, temos

$$|\partial^\alpha(\widehat{f} - \widehat{g})(\epsilon, x)| \leq c\epsilon^q, \ \forall\, x \in K, \ \forall\, \epsilon \in I_\eta,$$

o que prova (F_1).

Mostremos (F_2):

<u>Unicidade:</u> Se $f, f_* \in \mathcal{G}(\Omega)$ satisfazem (F_2), então $f\mid_{\Omega_i} = f_*\mid_{\Omega_i}$ para todo $i \in J$. Logo por (F_1) temos $f = f_*$.

Existência: Seja $\mathscr{X}_i : \Omega \longrightarrow [0,1]$ tal que $\mathscr{X}_i \in \mathscr{D}[\Omega;\mathbb{R}]$ e $supp(\mathscr{X}_i) \subseteq \Omega_i$, para todo $i \in J$, isto é, $(\mathscr{X}_i)_{i\in J}$ é uma $\mathscr{C}^\infty$-partição da unidade subordinada a cobertura $(\Omega_i)_{i\in J}$ (veja existência em [12] página 289).

Como $(supp(\mathscr{X}_i))_{i\in J}$ é localmente finita,

$$\begin{array}{l} \text{dado } x \in \Omega, \text{ existe uma vizinhança } \mathcal{V}_x \text{ de } x \text{ tal que o conjunto} \\ F_x := \{i \in J : supp(\mathscr{X}_i) \cap \mathcal{V}_x \neq \emptyset\} \quad \text{é finito.} \end{array} \tag{1.6}$$

Seja $\widehat{f_i}$ representante de $f_i \in \mathcal{G}(\Omega_i)$.

Estendendo $\widehat{f_i}$ a Ω fazendo

$$\widehat{f_i}(\epsilon, x) := 0, \ \forall\, x \in \Omega \cap \Omega_i^c, \ \forall\, \epsilon \in I,$$

e considerando que $\mathscr{X}_i \equiv 0$ se $i \in (F_x)^c$, temos definida, para cada $i \in J$, a função

$$\widetilde{\mathscr{X}_i}\hat{f}_i : (\epsilon, x) \in I \times \Omega \longmapsto \widetilde{\mathscr{X}_i}\hat{f}_i(\epsilon, x) \in \mathbb{K},$$

onde $\widetilde{\mathscr{X}_i}$ é como na seção 1.3.

Pelo exposto em (1.6), dado $x \in \Omega$, é finita a soma

$$\sum_{i\in J} \widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f_i}(\epsilon, y) = \sum_{i\in F_x} \widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f_i}(\epsilon, y), \ \forall\, \epsilon \in I, \ y \in \mathcal{V}_x \tag{1.7}$$

e podemos definir

$$\hat{f} : (\epsilon, x) \in I \times \Omega \longmapsto \sum_{i\in J} \widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f_i}(\epsilon, x) \in \mathbb{K}.$$

Observemos que dado $x \in \Omega$, por (1.6), podemos supor $\mathcal{V}_x \subset \Omega_j$, para algum $j \in J$, de onde seguirá por (1.7), que

$$\hat{f}(\epsilon, y) = \begin{cases} 0, & \forall\, \epsilon \in I, \quad \forall\, y \in \Omega_j^c \\ \widetilde{\mathscr{X}_j}\widehat{f_j}(\epsilon, y), & \forall\, \epsilon \in I, \ \forall\, y \in \mathcal{V}_x. \end{cases}$$

Da arbitrariedade de $x \in \Omega$ e do fato de $\widetilde{\mathscr{X}_j}\widehat{f_j} \in \mathcal{E}[\Omega_j]$, segue que $\hat{f} \in \mathcal{E}[\Omega]$.

Para mostrarmos que $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$, suponhamos dados $K \subset\subset \Omega$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e fixemos um aberto W tal que $K \subset W \subset \overline{W} \subset\subset \Omega$.

Por (1.6) e pela compacidade de $\overline{W}$, existe e é finito o conjunto

$$F := \{i \in J : supp(\mathscr{X}_i) \cap \overline{W} \neq \emptyset\}. \tag{1.8}$$

Se $i \in F$ e $(supp(\mathscr{X}_i) \cap K) \neq \emptyset$, temos, neste caso, $supp(\mathscr{X}_i) \cap K \subset\subset \Omega_i$.

Como $\widetilde{\mathscr{X}_i} \in \mathcal{E}_M[\Omega_i]$, resulta da hipótese de $f_i \in \mathcal{G}(\Omega_i)$, que $\widetilde{\mathscr{X}_i}\hat{f}_i \mid_{I\times\Omega_i} \in \mathcal{E}_M[\Omega_i]$ e portanto, existem $N_i \in \mathbb{N}$, $c_i > 0$ e $\eta_i \in I$ tais que

$$|\partial^\alpha(\widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f}_i)(\epsilon, x)| \leq c_i\epsilon^{-N_i}, \ \forall\ x \in supp(\mathscr{X}_i) \cap K, \ \forall\ \epsilon \in I_{\eta_i}.$$

Por outro lado, se $i \in F$ e $(supp(\mathscr{X}_i) \cap K) = \emptyset$, então $\widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f}_i \mid_K \equiv 0$ e o resultado acima segue trivialmente.

Assim, provamos que para todo $i \in F$, existem $N_i \in \mathbb{N}$, $c_i > 0$ e $\eta_i \in I$ tais que

$$|\partial^\alpha(\widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f}_i)(\epsilon, x)| \leq c_i\epsilon^{-N_i}, \ \forall\ x \in K, \ \forall\ \epsilon \in I_{\eta_i}.$$

Logo, fazendo $c := card(F).\max_{i\in F}\{c_i\}$, $N := \max_{i\in F}\{N_i\}$ e $\eta := \min_{i\in F}\{\eta_i\}$, temos, por (1.8), que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, x)| &= |\partial^\alpha(\sum_{i\in F} \widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f}_i)(\epsilon, x)| \\
&\leq \sum_{i\in F} |\partial^\alpha(\widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f}_i)(\epsilon, x)| \\
&\leq \sum_{i\in F} c_i\epsilon^{-N_i} \\
&\leq c\epsilon^{-N}, \ \forall\ x \in K, \ \forall\ \epsilon \in I_\eta,
\end{aligned}$$

isto é, $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$.

Para mostrarmos que $j(\widehat{f}) = f \in \mathcal{G}(\Omega)$, onde j é a projeção canônica de $\mathcal{E}_M[\Omega]$ ao quociente $\mathcal{G}(\Omega)$, é tal que $f \mid_{\Omega_k} = f_k$, provemos que

$$\widehat{f} \mid_{I\times\Omega_k} - \widehat{f}_k \in \mathcal{N}[\Omega_k], \ \forall\ k \in J.$$

Fixemos $k \in J$, $K \subset\subset \Omega_k$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e um aberto W tal que $K \subset W \subset \overline{W} \subset\subset \Omega_k$.

Por (1.8), existe uma parte finita F de J que nos permite, por ser $(\mathscr{X}_i)_{i\in J}$ partição da unidade, escrever

$$\sum_{i\in F, i\neq k} \mathscr{X}_i(x) + \mathscr{X}_k(x) = 1, \quad \forall\ x \in W.$$

E disso, resulta para cada $\epsilon \in I$ e para cada $x \in W$, que

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\epsilon,x)-\widehat{f}_k(\epsilon,x) &= \left(\sum_{i\in F, i\neq k}\widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f}_i(\epsilon,x)+\widetilde{\mathscr{X}_k}\widehat{f}_k(\epsilon,x)\right)-1.\widehat{f}_k(\epsilon,x)\\
&= \left(\sum_{i\in F, i\neq k}\widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f}_i(\epsilon,x)+\widetilde{\mathscr{X}_k}\widehat{f}_k(\epsilon,x)\right)+\left(\sum_{i\in F, i\neq k}\mathscr{X}_i(x)+\mathscr{X}_k(x)\right)\hat{f}_k(\epsilon,x)\\
&= \sum_{i\in F, i\neq k}\widetilde{\mathscr{X}_i}(x)(\widehat{f}_i-\widehat{f}_k)(\epsilon,x).
\end{aligned}$$

Se $i\in F$ e $\Omega_i\cap\Omega_k=\emptyset$, então $W\subset\Omega_k\subset(\Omega_i)^c\subset(supp(\mathscr{X}_i))^c$ e $\mathscr{X}_i\mid_W=0$ e assim, vamos supor $\Omega_i\cap\Omega_k\neq\emptyset$.

Como a soma é finita, é suficiente mostrar que cada parcela da expressão

$$\widehat{f}(\epsilon,x)-\widehat{f}_k(\epsilon,x)=\sum_{i\in F, i\neq k}\widetilde{\mathscr{X}_i}(x)(\widehat{f}_i-\widehat{f}_k)(\epsilon,x)$$

satisfaz a condição da Definição 1.1.3.

De fato, pela hipótese dada em (F_2), para $x\in(K\cap supp(\mathscr{X}_i))\subset(\Omega_i\cap\Omega_k)$ temos que $\widetilde{\mathscr{X}_i}(\widehat{f}_i-\widehat{f}_k)\mid_{\Omega_i\cap\Omega_k}\in\mathcal{N}[\Omega_i\cap\Omega_k]$,isto é, dado $q\in\mathbb{N}$, existem $c_i>0$ e $\eta_i\in I$ tais que

$$|\partial^\alpha(\widetilde{\mathscr{X}_i}\widehat{f}_i-\widetilde{\mathscr{X}_k}\widehat{f}_k)(\epsilon,x)|\leq c_i\epsilon^q,\ \forall\epsilon\in I_{\eta_i}. \tag{1.9}$$

Observemos que se $i\in F$ e $supp(\mathscr{X}_i)\cap K=\emptyset$, então $K\subset(supp(\mathscr{X}_i))^c$ e $\mathscr{X}_i\equiv 0$ num aberto $\mathcal{W}$ que contém K mas não contém $supp(\mathscr{X}_i)$, e portanto,

$$\partial^\alpha[\widetilde{\mathscr{X}_i}(\widehat{f}-\widehat{f}_k)](\epsilon,\cdot)\equiv 0 \text{ em } \mathcal{W},\ \epsilon\in I,$$

o que mostra que (1.9) vale em todo K.

Sejam $c:=card(F).\max_{i\in F}\{c_i\}$ e $\eta:=\min_{i\in F}\{\eta_i\}$.

Então

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(\widehat{f}-\widehat{f}_k)(\epsilon,x)| &= |\partial^\alpha[\sum_{i\in F}\widetilde{X_i}(\widehat{f}_i-\widehat{f}_k)](\epsilon,x)|\\
&\leq \sum_{i\in F}|\partial^\alpha[\widetilde{X_i}(\widehat{f}_i-\widehat{f}_k)](\epsilon,x)|\\
&\leq c\epsilon^q,\ \forall\, x\in K,\ \forall\,\epsilon\in I_\eta.
\end{aligned}$$

∎

Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega)$. Se $(W_i)_{i\in J}$ é a família das partes abertas não vazias de Ω tais que $f\,|_{W_i}=0$ para todo $i \in J$, então temos $f\,|_{\bigcup\limits_{i\in J} W_i}=0$ e $W := \bigcup\limits_{i\in J} W_i$ é o maior aberto de Ω onde $f=0$.

Isso nos permite dar a seguinte definição:

Definição 1.4.3. *Sejam $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e W o maior aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$ tal que $f|_W = 0$. Então o conjunto $\Omega \cap W^c$ é chamado* ***suporte*** *de f e é denotado por $supp(f)$.*

1.5 Composição de funções generalizadas

Nesta seção, ao abordar composição de funções generalizadas, estamos seguindo de perto as notações, definições e resultados dados em [5].

Definição 1.5.1. *Seja $p \in \mathbb{N}^*$. Denotamos por $\mathcal{E}[\Omega;\mathbb{R}^p]$ o conjunto das funções vetoriais $\hat{f} : I\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_p)$ tais que $\hat{f}_i \in \mathcal{E}[\Omega;\mathbb{R}]$, $\forall\ i \in \{1,\ldots,p\}$.*

Definição 1.5.2. *Seja $p \in \mathbb{N}^*$. Denotamos por $\mathcal{E}_M[\Omega;\mathbb{R}^p]$ o conjunto das funções vetoriais $\hat{f} : I\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_p)$ tais que $\hat{f}_i \in \mathcal{E}_M[\Omega;\mathbb{R}]$, $\forall\ i \in \{1,\ldots,p\}$.*

Um elemento de $\mathcal{E}_M[\Omega;\mathbb{R}^p]$ é chamado **aplicação moderada** em Ω a valores em $\mathbb{R}^p$.

Definição 1.5.3. *Seja $p \in \mathbb{N}^*$. Denotamos por $\mathcal{N}[\Omega;\mathbb{R}^p]$ o conjunto das funções vetoriais $\hat{f} : I\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_p)$ tais que $\hat{f}_i \in \mathcal{N}[\Omega;\mathbb{R}]$, $\forall\ i \in \{1,\ldots,p\}$.*

Um elemento de $\mathcal{N}[\Omega;\mathbb{R}^p]$ é chamado **aplicação nula** em Ω a valores em $\mathbb{R}^p$.

Definição 1.5.4. *Se $p \in \mathbb{N}^*$, então denotamos por $\mathcal{G}(\Omega;\mathbb{R}^p)$ o espaço vetorial quociente de $\mathcal{E}_M[\Omega;\mathbb{R}^p]$ por $\mathcal{N}[\Omega;\mathbb{R}^p]$.*

Um elemento de $\mathcal{G}[\Omega;\mathbb{R}^p]$ é chamado **aplicação generalizada** em Ω a valores em $\mathbb{R}^p$.

Definição 1.5.5. *Sejam* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$ *e* Ω' *um aberto do* $\mathbb{R}^p$. *Denotamos por* $\mathcal{G}_*(\Omega;\Omega')$ *o conjunto das aplicações generalizadas* $f \in \mathcal{G}(\Omega;\mathbb{R}^p)$ *para as quais existe um representante* $\hat{f}_0$ *de* f *satisfazendo:*

$$\forall\ K \subset\subset \Omega,\ \exists K' \subset\subset \Omega' \text{ e } \eta \in I \text{ tais que } \hat{f}_0(I_\eta \times K) \subset K'. \tag{1.10}$$

Proposição 1.5.6. *Sejam* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$, Ω' *um aberto do* $\mathbb{R}^p$ *e* $f \in \mathcal{G}_*(\Omega;\Omega')$. *Então todo representante* $\hat{f}$ *de* f *satisfaz a condição (1.10) da Definição 1.5.5.*

Prova:

Ver [5] (Proposição 1.1.19).

∎

Lema 1.5.7. *Sejam* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$, Ω' *um aberto de* $\mathbb{R}^p$, $f \in \mathcal{G}_*(\Omega;\Omega')$, $g \in \mathcal{G}(\Omega';\mathbb{R}^s)$, $\hat{f}$ *um representante de* f, $\hat{g}$ *um representante de* g, $K = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência exaustiva de compactos para* Ω *e* $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* I *stisfazendo:*

(a) $\eta_i > \eta_{i+1}$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$;

(b) $\overline{\{\hat{f}(\epsilon,x) : (\epsilon,x) \in I_{\eta_i} \times K_i\}} \subset\subset \Omega'$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

Sejam $i \in \mathbb{N}$ *e* $\hat{h}_i$ *a aplicação definida em* $I \times \overset{\circ}{K}_i$ *por*

$$\hat{h}_i(\epsilon,x) := \begin{cases} \hat{g}(\epsilon,\hat{f}(\epsilon,x)), & se\ \epsilon \in I_{\eta_i} \\ \hat{g}(\epsilon,\hat{f}(\frac{\eta_i}{2},x)), & se\ \epsilon \in [\eta_i,1] \end{cases}$$

Então

1. $\hat{h}_i \in \mathcal{E}_M[\overset{\circ}{K}_i;\mathbb{R}^s]$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$;

2. *existe* $\Theta_{K,\hat{f}\hat{g}} \in \mathcal{E}_M[\Omega;\mathbb{R}^s]$ *tal que* $\Theta_{K,\hat{f}\hat{g}}|_{I\times\overset{\circ}{K}_i} - \hat{h}_i \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{K}_i;\mathbb{R}^s]$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

Prova:

Ver [5] (Lema 1.1.21)

∎

Observando o Lema1.1.22 de [5] segue a seguinte definição:

Definição 1.5.8. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, Ω' um aberto de $\mathbb{R}^p$, $f \in \mathcal{G}_*(\Omega;\Omega')$ e $g \in \mathcal{G}(\Omega';\mathbb{R}^s)$. Denotamos por $g \circ f$ a classe da aplicação moderada $\Theta_{K,\hat{f}\hat{g}}$ (como em (2) do lema precedente), onde $K = (K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência exaustiva de compactos para Ω, $\hat{f}$ é um representante de f e $\hat{g}$ um representante de g.*

1.6 A definição de $\overline{\mathbb{K}}$

Definição 1.6.1. *Denotamos com $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ a álgebra das funções $\widehat{\lambda} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ que verificam a condição :*

$n \in \mathbb{N}$

$$\exists \quad a \in \mathbb{R} \text{ tal que } |\widehat{\lambda}(\epsilon)| = o(\epsilon^a) \text{ se } \epsilon \longrightarrow 0^+.$$

Definição 1.6.2. *Denotamos com $\mathcal{N}(\mathbb{K})$ o ideal de $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ constituídos dos elementos $\widehat{\lambda} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ verificando a condição:*

$$\forall \quad b \in \mathbb{R} \text{ tem-se } |\widehat{\lambda}(\epsilon)| = o(\epsilon^b) \text{ se } \epsilon \longrightarrow 0^+.$$

Um elemento de $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ é chamado elemento moderado.

Um elemento de $\mathcal{N}(\mathbb{K})$ é chamado elemento nulo.

Proposição 1.6.3. *Se $\widehat{\lambda} \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$, então $\lim\limits_{\epsilon\longrightarrow 0^+} \widehat{\lambda}(\epsilon) = 0$, $\epsilon \in I$.*

Prova:

Segue diretamente da definição de $\mathcal{N}(\mathbb{K})$.

∎

Definição 1.6.4. *Denotamos com $\overline{\mathbb{K}}$ a álgebra quociente de $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ por $\mathcal{N}(\mathbb{K})$.*

Um elemento de $\overline{\mathbb{K}}$ é chamado número real (complexo) generalizado, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

O anel quociente $\overline{\mathbb{K}}$ é visivelmente uma $\mathbb{K}$-álgebra e é uma sub-$\mathbb{K}$-álgebra de $\mathcal{G}(\Omega)$ (para cada aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \neq \emptyset$).

1.7 A inclusão de $\mathbb{K}$ em $\overline{\mathbb{K}}$

Proposição 1.7.1. *$\mathbb{K}$ identifica-se canonicamente a um sub-corpo* de *$\overline{\mathbb{K}}$.*

Prova:

Para cada $k \in \mathbb{K}$ seja a função constante $\widehat{k} : \epsilon \in I \longmapsto k \in \mathbb{K}$.

Observemos que sendo $\widehat{k}$ um elemento moderado, temos definido um homomorfismo $i_{\mathbb{K}} : k \in \mathbb{K} \longmapsto \widehat{k} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$.

Afirmamos que $(j \circ i_{\mathbb{K}}) : k \in \mathbb{K} \longmapsto [\widehat{k}] \in \overline{\mathbb{K}}$ é um homomorfismo injetivo de $\mathbb{K}$-álgebras.

De fato, $k \in Ker(j \circ i_{\mathbb{K}}) \Longleftrightarrow k = 0$.

∎

Identificando a imagem de $\mathbb{K}$ em $\overline{\mathbb{K}}$ pela aplicação $(j \circ i_{\mathbb{K}})$, escrevemos $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{K}}$.

1.8 A inclusão de $\overline{\mathbb{K}}$ em $\mathcal{G}(\Omega)$

Proposição 1.8.1. *Existe $i^* : \overline{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$ tal que, identificando $\overline{\mathbb{K}}$ com $i^*(\overline{\mathbb{K}})$, tem-se $\overline{\mathbb{K}} \subset \mathcal{G}(\Omega)$.*

Prova:

Seja $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$ tal que $\widehat{\lambda} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ seja um de seus representantes, e consideremos

$$\widehat{\lambda}_* : (\epsilon, x) \in I \times \Omega \longmapsto \widehat{\lambda}(\epsilon) \in \mathbb{K}$$

É óbvio que $\widehat{\lambda}_*(\epsilon, \cdot) \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ pois $\partial^\alpha \widehat{\lambda}_*(\epsilon, \cdot) \equiv 0$, para todo $\alpha \neq 0$.

Afirmamos que $\widehat{\lambda}_* \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ e que $\widehat{\lambda}_* \in \mathcal{N}[\Omega]$ se $\widehat{\lambda} \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$. De fato, se $\widehat{\lambda} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$, dado $K \subset\subset \Omega$, teremos

$$\|\partial^\alpha \widehat{\lambda}_*(\epsilon, \cdot)\|_K = \begin{cases} |\widehat{\lambda}(\epsilon)| = o(\epsilon^b) \text{ para algum } b \in \mathbb{R}, \text{ se } \alpha = 0 \\ 0 = o(\epsilon^b) \text{ para todo } b \in \mathbb{R}, \text{ se } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Se $\widehat{\lambda} \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$, então $\|\partial^\alpha \widehat{\lambda}_*(\epsilon, \cdot)\|_K = o(\epsilon^b)$ para todo $b \in \mathbb{R}$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Assim, está definida uma função

$$\begin{aligned} i : \mathcal{E}_M(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{E}_M[\Omega] \\ \widehat{\lambda} &\longmapsto \widehat{\lambda}_* \end{aligned}$$

que é um homomorfismo de anéis, e determina um único homomorfismo

$$i^* : \lambda \in \overline{\mathbb{K}} \longmapsto \lambda_* \in \mathcal{G}(\Omega),$$

tornando comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\lambda} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K}) & \xrightarrow{i} & \widehat{\lambda}_* \in \mathcal{E}_M[\Omega] \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ \lambda \in \overline{\mathbb{K}} & \xrightarrow{i^*} & \lambda_* \in \mathcal{G}(\Omega). \end{array}$$

∎

Identificando $\overline{\mathbb{K}}$ com a imagem de $\overline{\mathbb{K}}$ em $\mathcal{G}(\Omega)$ pela aplicação i^*, escrevemos $\overline{\mathbb{K}} \subset \mathcal{G}(\Omega)$.

Definição 1.8.2. *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e i^* o homomorfismo dado em 1.8.1. Um elemento de $Im(i^*)$ é chamado* ***constante generalizada****.*

Proposição 1.8.3. *Se $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ é uma constante generalizada, então $\partial^\alpha f = 0$ para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \geq 1$.*

Prova:

Por definição, existe $\widehat{\lambda} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ tal que $f = j[i(\widehat{\lambda})]$.

Logo, pela comutatividade do diagrama (1.2) temos

$$\partial^\alpha f = \partial^\alpha j[i(\widehat{\lambda})] = j\{\partial^\alpha[i(\widehat{\lambda})]\} = 0,$$

pois sendo $|\alpha| \geq 1$, $i(\widehat{\lambda})$ independe de $x \in \Omega$.

∎

1.9 Valor num ponto de uma função generalizada

Proposição 1.9.1. *Sejam $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ um representante de f. Então para cada $x \in \Omega$ a função parcial $\widehat{f}_x : \epsilon \in I \longmapsto \widehat{f}(\epsilon, x)$ pertence a $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$. Se $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ são dois representantes quaisquer de f, então $(\widehat{f}_1)_x - (\widehat{f}_2)_x \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$.*

Prova:

Fixado $x \in \Omega$ arbitrário, associado ao compacto $K := \{x\}$ e a $\alpha := (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$, existem $N \in \mathbb{N}$, $c > 0$ e $\eta \in I$ tais que

$$|\widehat{f}_x(\epsilon)| = |\widehat{f}(\epsilon, x)| \leq c\epsilon^{-N}, \ \epsilon \in I_\eta.$$

Para provarmos a segunda afirmação, notemos que, se $\widehat{f_1}, \widehat{f_2} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ são dois representantes quaisquer de f, então $\widehat{f_1} - \widehat{f_2} \in \mathcal{N}[\Omega]$. Assim, dado $q \in \mathbb{N}$, associado ao compacto $K := \{x\}$ e a $\alpha := (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$, existem $c > 0$ e $\eta \in I$ tais que

$$|\left((\widehat{f_1})_x - (\widehat{f_2})_x\right)(\epsilon)| = |(\widehat{f_1} - \widehat{f_2})(\epsilon, x)| \leq c\epsilon^q, \ \epsilon \in I_\eta.$$

∎

A Proposição 1.9.1 dá sentido à seguinte definição:

Definição 1.9.2. *Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega)$. Chamamos de valor de f no ponto $x \in \Omega$, e denotamos por $f(x)$, à classe em $\overline{\mathbb{K}}$ da função $\widehat{f}_x \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$, dada na Proposição 1.9.1.*

Usando as notações das proposições 1.7.1 e 1.9.1, podemos escrever

$$f(x) := (j \circ i_{\mathbb{K}})(\widehat{f}_x),$$

e podemos definir uma aplicação $\overline{\nu}_x : f \in \mathcal{G}(\Omega) \longmapsto f(x) \in \overline{\mathbb{K}}$, que é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.

Proposição 1.9.3. *Se Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ e $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, então o valor, $f(x) \in \overline{\mathbb{K}}$, de f no ponto x, considerada como elemento de $\mathcal{G}(\Omega)$, coincide com o valor clássico $f(x) \in \mathbb{K}$.*

Prova:

Seja, para $x \in \Omega$, $\nu_x : f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \longmapsto f(x) \in \mathbb{K}$. Pela definição de $j \circ i_{\mathbb{K}}$ em 1.7.1, temos

$$(j \circ i_{\mathbb{K}})(\nu_x(f)) = (j \circ i_{\mathbb{K}})(f(x)) = j\left(\widehat{f(x)}\right), \quad \forall \quad f \in \mathscr{C}^\infty.$$

Por outro lado,

$$\overline{\nu}_x\left(i_{\mathscr{C}^\infty}(f)\right) = \overline{\nu}_x\left(j(\widetilde{f})\right) = j(\widetilde{f})(x) = j(\widetilde{f}_x) = j(\widehat{f(x)}).$$

∎

Consideremos $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ onde f é a classe de $\hat{f} : (\epsilon, x) \in I \times \mathbb{R} \longmapsto e^{-\frac{x^2}{\epsilon}}$. É de fácil verificação que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mas $f \neq 0 \in \mathcal{G}(\Omega)$. Portanto, uma função generalizada não está bem definida por seu valor pontual. M. Kunzinger e M. Oberguggenberger solucionaram o problema ao introduzir o conjunto $\tilde{\Omega}_c$ (veja [14]), o qual apresentamos na próxima seção.

1.10 O conjunto $\tilde{\Omega}_c$

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e

$$\Omega_M := \{(x_\epsilon)_{\epsilon \in I} \in \Omega^I \mid \exists\, N > 0,\ \exists \eta > 0,\ \exists c > 0 : \|x_\epsilon\| \leq c.\epsilon^{-N}, \epsilon \in I_\eta\}.$$

Sobre Ω_M, definamos a seguinte relação de equivalência $\sim$:

$$(x_\epsilon)_{\epsilon \in I} \sim (y_\epsilon)_{\epsilon \in I} \iff \forall\, q > 0,\ \exists\, \eta > 0 \text{ tais que } \|x_\epsilon - y_\epsilon\| \leq \epsilon^q, \epsilon \in I_\eta,$$

e consideremos, $\tilde{\Omega} := \Omega_M / \sim$.

Observemos que se $\Omega = \mathbb{K}$, então $\tilde{\Omega} = \overline{\mathbb{K}}$.

A partir dessas considerações, temos a seguinte definição:

Definição 1.10.1.

$$\tilde{\Omega}_c := \{\tilde{x} = [(x_\epsilon)_{\epsilon \in I}] \in \tilde{\Omega} \mid \exists\, K \subset\subset \Omega,\ \exists\, \eta \in I \text{ com } x_\epsilon \in K,\ \forall\, \epsilon \in I_\eta\}.$$

Proposição 1.10.2. *Se $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$, então existe $K \subset\subset \Omega$ satisfazendo:*

1. *se $(x_\epsilon)_{\epsilon \in I}$ é um representante de $\tilde{x}$, então existe $\eta \in I$, com $x_\epsilon \in K$ para todo $\epsilon \in I_\eta$;*
2. *se $(x_\epsilon)_{\epsilon \in I}$ e $(y_\epsilon)_{\epsilon \in I}$ são representantes de $\tilde{x}$, então existe $\eta_2 \in I$ tal que o segmento de extremidades x_ϵ e y_ϵ está contido em K, para todo $\epsilon \in I_{\eta_2}$.*

Prova:

Seja $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$ e tomemos $(x^1_\epsilon)_{\epsilon \in I}$ um representante de $\tilde{x}$ para o qual, por hipótese, existem $L \subset\subset \Omega$ e $\eta_1 \in I$ tais que $x^1_\epsilon \in L$ para todo $\epsilon \in I_{\eta_1}$.

Tomemos V aberto de Ω com $L \subset V \subset \overline{V} \subset\subset \Omega$ e seja $r = dist(L, V^c \cap \Omega) > 0$.

Então

$$L \subset \bigcup_{w\in L} B_{\frac{r}{4}}(w) \subset \bigcup_{w\in L} \overline{B_{\frac{r}{2}}(w)} \subset \Omega$$

e como $L \subset\subset \Omega$ existem $w_1, \ldots, w_s \in L$ tais que

$$L \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\frac{r}{4}}(w_i) \subset \bigcup_{i=1}^{s} \overline{B_{\frac{r}{2}}(w_i)} \subset\subset \Omega.$$

Seja $K = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \overline{B_{\frac{r}{2}}(w_i)}$ e provemos que vale (1) e (2).

(1): Seja $(x_\epsilon)_{\epsilon\in I}$ um representante de $\tilde{x}$. Como $(x_\epsilon)_\epsilon \sim (x_\epsilon^1)_{\epsilon\in I}$, dado $q = 1$, existe $\eta_3 \in I$ com $\|x_\epsilon - x_\epsilon^1\| \leq \epsilon$, para todo $\epsilon \in I_{\eta_3}$.

Seja $\eta = \min\{\eta_1, \eta_3, \frac{r}{4}\}$ e fixemos $\epsilon \in I_\eta$.

Como $x_\epsilon^1 \in L$, existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\|x_\epsilon^1 - w_i\| < \frac{r}{4}$, e portanto

$$\|x_\epsilon - w_i\| \leq \|x_\epsilon - x_\epsilon^1\| + \|x_\epsilon^1 - w_i\| \leq \epsilon + \frac{r}{4} < \eta + \frac{r}{4} \leq \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2},$$

e assim $x_\epsilon \in B_{\frac{r}{2}}(w_i) \subset K$, o que completa a prova de (1).

(2): Sejam $(x_\epsilon)_{\epsilon\in I}, (y_\epsilon)_{\epsilon\in I}$ representantes de $\tilde{x}$.

Como $(x_\epsilon)_{\epsilon\in I} \sim (x_\epsilon^1)_{\epsilon\in I}$ e $(y_\epsilon)_{\epsilon\in I} \sim (x_\epsilon^1)_{\epsilon\in I}$, existe $\eta_4 \in I$ tal que

$$\|x_\epsilon - x_\epsilon^1\| \leq \epsilon \quad \text{e} \quad \|y_\epsilon - x_\epsilon^1\| \leq \epsilon, \ \forall\, \epsilon \in I_{\eta_4}.$$

Tomando $\eta_2 = \min\{\eta_4, \eta_1, \frac{r}{4}\}$ concluímos, pela prova de (1), que dado $\epsilon \in I_{\eta_2}$ existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $x_\epsilon^1 \in B_{\frac{r}{4}}(w_i)$ e $x_\epsilon, y_\epsilon \in B_{\frac{r}{2}}(w_i)$, e portanto o segmento de extremidades x_ϵ e y_ϵ pertence a $B_{\frac{r}{2}}(w_i) \subset K$.

∎

Proposição 1.10.3. *Sejam $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$. Então valem a afirmações:*

1. *se $\hat{f}$ é um representante de f e $(x_\epsilon)_{\epsilon\in I}$ é um representante de $\tilde{x}$ então a função*

$$\epsilon \in I \longmapsto \hat{f}(\epsilon, x_\epsilon) \quad \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K});$$

2. *se $\hat{f}$ é um representante de f e $(x_\epsilon)_{\epsilon\in I}$, $(y_\epsilon)_{\epsilon\in I}$ são representantes de $\tilde{x}$, então a função*

$$\epsilon \in I \longmapsto \hat{f}(\epsilon, x_\epsilon) - \hat{f}(\epsilon, y_\epsilon) \quad \in \mathcal{N}(\mathbb{K});$$

3. se $\hat{f}, \hat{g}$ são representantes de f e $(x_\epsilon)_{\epsilon\in I}, (y_\epsilon)_{\epsilon\in I}$ são representantes de $\tilde{x}$, então a função

$$\epsilon \in I \longrightarrow \hat{f}(\epsilon, x_\epsilon) - \hat{g}(\epsilon, y_\epsilon) \quad \in \mathcal{N}(\mathbb{K}).$$

Prova:

(1): É imediata uma vez que $\hat{f}$ é moderada e existem $\eta \in I$ e $K \subset\subset \Omega$ tais que $x_\epsilon \in K$ para todo $\epsilon \in I_\eta$.

(2): Seja K como na Proposição 1.10.2. Então existe $\eta_2 \in I$ tal que o segmento de extremidades x_ϵ, y_ϵ está contido em K para todo $\epsilon \in I_{\eta_2}$.

Como $\hat{f}$ é moderada, dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| = 1$, exitem $N \in \mathbb{N}$, $c > 0$ e $\eta_3 \in I$ tais que

$$\|\partial^\alpha \hat{f}(\epsilon, \cdot)\|_K \leq \frac{c}{\epsilon^N}, \quad \forall\, \epsilon \in I_{\eta_3}.$$

Seja $q \in \mathbb{N}$.

Como $(x_\epsilon)_{\epsilon\in I} \sim (y_\epsilon)_{\epsilon\in I}$ existe $\eta_4 \in I$ tal que

$$\|x_\epsilon - y_\epsilon\| \leq \epsilon^{N+q+1} \qquad \text{para todo } \epsilon \in I_{\eta_4}.$$

Seja $\eta_5 = \min\{\eta_2, \eta_3, \eta_4, \frac{1}{cn}\}$. Então fixado $\epsilon \in I_{\eta_5}$ existe $t \in]0,1[$ tal que

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\epsilon, x_\epsilon) - \hat{f}(\epsilon, y_\epsilon)| &= |\nabla \hat{f}\Big(\epsilon, x_\epsilon + t(y_\epsilon - x_\epsilon)\Big).(x_\epsilon - y_\epsilon)| \\ &\leq \|\nabla \hat{f}\Big(\epsilon, x_\epsilon + t(y_\epsilon - x_\epsilon)\Big)\|.\|(x_\epsilon - y_\epsilon)\| \\ &\leq n\frac{c}{\epsilon^N}\epsilon^{N+q+1} = cn\epsilon\epsilon^q < \epsilon^q. \end{aligned}$$

(3): Observemos que

$$\begin{aligned} \hat{f}(\epsilon, x_\epsilon) - \hat{g}(\epsilon, y_\epsilon) &= \Big(\hat{f}(\epsilon, x_\epsilon) - \hat{f}(\epsilon, y_\epsilon)\Big) + \Big(\hat{f}(\epsilon, y_\epsilon) - \hat{g}(\epsilon, y_\epsilon)\Big) \\ &= \Big(\hat{f}(\epsilon, x_\epsilon) - \hat{f}(\epsilon, y_\epsilon)\Big) + \Big((\hat{f} - \hat{g})(\epsilon, y_\epsilon)\Big) \end{aligned}.$$

Logo por (2) e usando que $\hat{f} - \hat{g}$ é nula e que existem $L \subset\subset \Omega$ e $\eta_6 \in I$ tais que $y_\epsilon \in L$, para todo $\epsilon \in I_{\eta_6}$, temos o resultado.

∎

Utilizando a Proposição acima faz sentido a seguinte definição:

Definição 1.10.4. *Sejam $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$. Definimos*

$$f_{\tilde{x}} := [\epsilon \in I \longmapsto \hat{f}(\epsilon, x_\epsilon)] \ \in \overline{\mathbb{K}},$$

sendo $\hat{f}$ um representante de f e $(x_\epsilon)_{\epsilon\in I}$ um representante de $\tilde{x}$.

Seja $\kappa : f \in \mathcal{G}(\Omega) \longmapsto \kappa f \in \overline{\mathbb{K}}^{\tilde{\Omega}_c}$, onde $\kappa f(\tilde{x}) := f_{\tilde{x}}$, para $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$. É fácil verificar que κ é linear. Veremos, no Teorema 1.10.5, que κ é injetora.

Munindo $\overline{\mathbb{K}}$ com a topologia definida por D. Scarpalezos (ver [17] e [16]) e $\overline{\mathbb{K}}^n$ com a topologia produto, J. Aragona, R. Fernandez e S. O. Juriaans (ver [9]) introduziram o conceito de diferenciabilidade e de derivadas parciais para funções definidas em abertos de $\overline{\mathbb{K}}^n$ e a valores em $\overline{\mathbb{K}}$, e provaram que

$$\kappa(\partial^\alpha f) = \partial^\alpha(\kappa f), \text{ sendo } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

A topologia definida por D. Scarpalezos será apresentada no capítulo 2.

Teorema 1.10.5. *Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega)$. Então $f = 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$ se, e somente se, $f_{\tilde{x}} = 0$ em $\overline{\mathbb{K}}$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$.*

Prova:

($\Longrightarrow$). Seja $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$ e tomemos $(x_\epsilon)_{\epsilon \in I}$ um representante de $\tilde{x}$. Como $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$ existem $K \subset\subset \Omega$ e $\eta \in I$ tais que $x_\epsilon \in K$ quando $\epsilon \in I_\eta$.

Uma vez que $\hat{f}$ é nula, dado $q \in \mathbb{N}$ existe $c > 0$ e existe $\eta_1 \in I$ tais que

$$\|\hat{f}(\epsilon, \cdot)\|_K \leq c.\epsilon^q, \quad \forall\, \epsilon \in I_{\eta_1}.$$

Seja $\eta_2 = \min\{\eta, \eta_1\}$. Então

$$|\hat{f}(\epsilon, x_\epsilon)| \leq c.\epsilon^q, \quad \forall\, \epsilon \in I_{\eta_2},$$

e assim $f_{\tilde{x}} = 0$ em $\overline{\mathbb{K}}$.

($\Longleftarrow$). Suponhamos $f \neq 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$ e seja $\hat{f}$ um representante de f.

Seja

$$A := \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \exists\, L \subset\subset \Omega,\ \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, \eta \in I,\ \exists\, \epsilon \in I_\eta \text{ com } \|\partial^\alpha \hat{f}(\epsilon, \cdot)\|_L > \epsilon^N\}.$$

Como $\hat{f}$ é não nula, $A \neq \emptyset$, e assim existe $\nu := \min\{|\alpha| : \alpha \in A\}$.

Seja $\alpha \in A$ tal que $|\alpha| = \nu$.

Como $\alpha \in A$ existem $K \subset\subset \Omega$, $q \in \mathbb{N}$, $\epsilon_k \to 0$ e $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ seqüência de elementos de K tais que

$$|\partial^\alpha \hat{f}(\epsilon_k, z_k)| > \epsilon_k^q \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Seja $(x_\epsilon)_{\epsilon \in I}$ com

$$x_\epsilon = \begin{cases} z_0, & \text{se } \epsilon \in]\epsilon_0, 1] \\ z_k, & \text{se } \epsilon \in]\epsilon_{k+1}, \epsilon_k], \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.11}$$

Então $(x_\epsilon)_{\epsilon\in I} \in \Omega_M$ e $\tilde{x} := [(x_\epsilon)_{\epsilon\in I}] \in \tilde{\Omega}_c$.

Como $|\partial^\alpha \hat{f}(\epsilon_k, x_{\epsilon_k})| \geq \epsilon_k^q$, para $k \in \mathbb{N}$, concluímos que $(\partial^\alpha f)_{\tilde{x}} \neq 0$ em $\overline{\mathbb{K}}$.

Se $\alpha = 0$ temos que $f_{\tilde{x}} = (\partial^\alpha f)_{\tilde{x}} \neq 0$ em $\overline{\mathbb{K}}$.

Suponhamos, então, $\nu = |\alpha| \neq 0$, e sem perda da generalidade, consideremos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\alpha_1 \neq 0$.

Sejam $\beta = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $\gamma = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Como $K \subset\subset \Omega$ existem $v_1, \ldots, v_s \in K$ e $r_1, \ldots, r_s \in\ ]0, +\infty[$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{r_i}(v_i) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{2r_i}(v_i) \subset \bigcup_{i=1}^{s} \overline{B_{2r_i}(v_i)} \subset \Omega.$$

Seja $L = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \overline{B_{2r_i}(v_i)} \subset\subset \Omega$ e consideremos $r = \min\{r_1, \ldots, r_s\}$.

Como $\hat{f}$ é moderada, encontramos $\eta_2 \in I$, $c > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|\partial^\gamma \hat{f}(\epsilon, \cdot)\|_L < c.\epsilon^{-N+1}, \quad \epsilon \in I_{\eta_2}.$$

Tomemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon_k < \frac{1}{c}$ e $\frac{1}{2}\epsilon_k^{N+q} < \min\{r, \eta_2\}$ para $k \geq k_0$.

Notemos que dado $(w_k^1, \ldots, w_k^n) \in K$, existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que

$$\|(w_k^1, \ldots, w_k^n) - v_i\| < r_i,$$

e assim,

$$\begin{aligned} \|(t, w_k^2, \ldots, w_k^n) - v_i\| &\leq \|(t, w_k^2, \ldots, w_k^n) - (w_k^1, \ldots, w_k^n)\| + \|(w_k^1, \ldots, w_k^n) - v_i\| \\ &\leq |t - w_k^1| + r_i, \end{aligned}$$

e portanto , se $|t - w_k^1| < r$ temos que

$$\|(t, w_k^2, \ldots, w_k^n) - v_i\| < r + r_i \leq 2r_i,$$

isto é, $(t, w_k^2, \ldots, w_k^n) \in L$.

Suponhamos $z_k = (z_k^1, z_k^2, \ldots, z_k^n)$, $k \in \mathbb{N}$, onde $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é como em (1.11), e notemos que, se $k \geq k_0$ e $|y^1 - z_k^1| < \frac{1}{2}\epsilon_k^{N+q}$, então $|y^1 - z_k^1| < r$ e

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \hat{f}(\epsilon_k, y^1, z_k^2, \ldots, z_k^n)| &= |\partial^\alpha \hat{f}(\epsilon_k, z_k^1, z_k^2, \ldots, z_k^n) + \int_{z_k^1}^{y^1} \partial^\gamma \hat{f}(\epsilon_k, t, z_k^2, \ldots, z_k^n) dt| \\ &\geq |\partial^\alpha \hat{f}(\epsilon_k, z_k^1, z_k^2, \ldots, z_k^n)| - |\int_{z_k^1}^{y^1} \partial^\gamma \hat{f}(\epsilon_k, t, z_k^2, \ldots, z_k^n) dt| \\ &> \epsilon_k^q - |y^1 - z_k^1|\epsilon^{-N} > \epsilon_k^q - \tfrac{1}{2}\epsilon_k^q = \tfrac{1}{2}\epsilon_k^q. \end{aligned}$$

Sejam $k \geq k_0$ e $\overline{z}_k := (z_k^1 + \frac{1}{2}\epsilon_k^{N+q}, z_k^2, \ldots, z_k^n) \in L$, pois $|z_k^1 + \frac{1}{2}\epsilon_k^{N+q} - z_k^1| = \frac{1}{2}\epsilon_k^{N+q} < r$ e $(z_k^1, \ldots, z_k^n) \in K$.

Então, pelo Teorema do valor médio para integral, temos

$$\begin{aligned}
|\partial^\beta \hat{f}(\epsilon_k, \overline{z}_k)| &= |\partial^\beta \hat{f}(\epsilon_k, z_k) + \int\limits_{z_k^1}^{z_k^1+\frac{1}{2}\epsilon_k^{N+q}} \partial^\alpha \hat{f}(\epsilon_k, t, z_k^2, \ldots, z_k^n)dt| \\
&\geq \left| \int\limits_{z_k^1}^{z_k^1+\frac{1}{2}\epsilon_k^{N+q}} \partial^\alpha \hat{f}(\epsilon_k, t, z_k^2, \ldots, z_k^n)dt \right| - |\partial^\beta \hat{f}(\epsilon_k, z_k)| \\
&\geq \tfrac{1}{2}\epsilon_k^{N+q}|\partial^\alpha \hat{f}(\epsilon_k, \overline{t}, z_k^2, \ldots, z_k^n)dt| - |\partial^\beta \hat{f}(\epsilon_k, z_k)| \\
&\geq \tfrac{1}{2}\epsilon_k^{N+q}\tfrac{1}{2}\epsilon_k^q - |\partial^\beta \hat{f}(\epsilon_k, z_k)| \\
&\geq \tfrac{1}{4}\epsilon_k^{N+2q} - |\partial^\beta \hat{f}(\epsilon_k, z_k)|,
\end{aligned}$$

para algum $\overline{t} \in [z_k^1, z_k^1 + \frac{1}{2}\epsilon_k^{N+q}]$.

Como $|\beta| = \nu - 1 < \nu$ temos que β não pertence a A e assim, tomando $L \subset\subset \Omega$ e $N + 2q + 1 \in \mathbb{N}$, concluímos que existe $\eta_3 \in]0, \min\{\eta_2, \frac{1}{8}\}[$ tal que

$$\|\partial^\beta \hat{f}(\epsilon, \cdot)\|_L \leq \epsilon^{N+2q+1}, \quad \forall\, \epsilon \in I_{\eta_3},$$

e , para $k \geq k_0$ e $\epsilon_k \in I_{\eta_3}$, temos

$$\|\partial^\beta \hat{f}(\epsilon_k, \cdot)\|_L \geq |\partial^\beta \hat{f}(\epsilon_k, \overline{z}_k)| \geq \frac{1}{4}\epsilon_k^{N+2q} - \epsilon_k^{N+2q}.\epsilon_k \geq \frac{1}{4}\epsilon_k^{N+2q} - \frac{1}{8}\epsilon_k^{N+2q} = \frac{1}{8}\epsilon_k^{N+2q} > \epsilon_k^{N+2q+1},$$

o que é absurdo.

Portanto, $f = 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$.

∎

Na próxima seção, mostraremos a teoria de integração para funções generalizadas.

1.11 Integração de funções generalizadas

Proposição 1.11.1. *Sejam X um conjunto Lebesgue mensurável, tal que $\overline{X} \subset\subset \Omega$, e $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$. Então a função*

$$\begin{aligned}
J_X(\widehat{f}) : I &\longrightarrow \mathbb{K} \\
J_X(\widehat{f})(\epsilon) &\longmapsto \int\limits_X \widehat{f}(\epsilon, x)dx
\end{aligned}$$

pertence a $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$.

Prova:

Como $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ para $\overline{X} \subset\subset \Omega$ e $\alpha = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$, existem $N \in \mathbb{N}$, $\eta \in I$ e $c > 0$, de modo que

$$|\widehat{f}(\epsilon, x)| \leq c.\epsilon^{-N},$$

para cada $x \in \overline{X}$ e $\epsilon \in I_\eta$.

Denotando por $\mu(X)$ a medida de Lebesgue do conjunto X, temos que

$$|J_X(\widehat{f})(\epsilon)| \leq \int_X |\widehat{f}(\epsilon, x)|dx \leq \mu(X)c.\epsilon^{-N},$$

para todo $\epsilon \in I_\eta$.

∎

A proposição acima nos mostra que existe uma aplicação $\mathbb{K}$-linear,

$$J_X : \widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega] \longmapsto J_X(\widehat{f}) \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K}),$$

onde $J_X(\mathcal{N}[\Omega]) \subset \mathcal{N}(\mathbb{K})$. De fato, se $\widehat{f} \in \mathcal{N}[\Omega]$, então para $\overline{X} \subset\subset \Omega$ e $\alpha = (0, \ldots, 0) \in \in \mathbb{N}^n$, podemos para todo $q \in \mathbb{N}$ achar $c > 0$ e $\eta \in I$ tais que $|\widehat{f}(\epsilon, x)| \leq c.\epsilon^q$, para cada $x \in \in \overline{X}$ e $\epsilon \in I_\eta$, e assim, segue que

$$|J_X(\widehat{f})(\epsilon)| \leq \int_X |\widehat{f}(\epsilon, x)|dx \leq \mu(X)c.\epsilon^q, \text{ para todo } \epsilon \in I_\eta.$$

Pelo teorema do homomorfismo, existe uma única aplicação $\mathbb{K}$-linear $\overline{J}_X$ tornando comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_M[\Omega] & \xrightarrow{J_X} & \mathcal{E}_M(\mathbb{K}) \\ j\downarrow & & j\downarrow \\ \mathcal{G}(\Omega) & \xrightarrow{\overline{J}_X} & \overline{\mathbb{K}}. \end{array}$$

Agora estamos em condições de dar a seguinte definição:

Definição 1.11.2. *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e X um conjunto Lebesgue mensurável tal que $\overline{X} \subset\subset \Omega$. Chama-se integral de f sobre X o elemento $\overline{J}_X(f) \in \overline{\mathbb{K}}$, $\overline{J}_X$ como no diagrama precedente. Se $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, então indicaremos a integral de f sobre X por*

$$\int_X f(x)dx \qquad ou \qquad \int_X f.$$

Se $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ é um representante qualquer de f, então temos

$$\int_X f = \overline{J}_X(f) = \overline{J}_X[j(\widehat{f})] = j[J_X(\widehat{f})] = j(\epsilon \in I \longmapsto \int_X \widehat{f}(\epsilon, x)dx \in \mathbb{K}).$$

Daremos a seguir as principais propriedades da integral de funções generalizadas.

Proposição 1.11.3. *Sejam μ a medida de Lebesgue do $\mathbb{R}^n$ e X, X_1, X_2 conjuntos Lebesgue mensuráveis. Para todos $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se $\overline{X} \subset\subset \Omega$, então*
$$\int_X (f + \alpha.g) = \int_X f + \alpha. \int_X g;$$
2. *Se $X_1 \subset X_2 \subset \overline{X}_2 \subset\subset \Omega$ e $\mu(X_1) = 0$, então*
$$\int_{X_2} f = \int_{X_2 \cap (X_1)^c} f;$$
3. *Se $\overline{X}_1 \subset\subset \Omega, \overline{X}_2 \subset\subset \Omega$ e $\mu(X_1 \cap X_2) = 0$, então*
$$\int_{X_1 \cup X_2} f = \int_{X_1} f + \int_{X_2} f;$$
4. *Se $\overline{X} \subset\subset \Omega$ e $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, então o valor da integral de f sobre X, $\int_X f \in \overline{\mathbb{K}}$, considerando f como elemento de $\mathcal{G}(\Omega)$, coincide com o valor clássico $\int_X f \in \mathbb{K}$. De modo mais preciso, considerando $J_{\mathbb{K}} : f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \longmapsto \int_X f(x)dx \in \mathbb{K}$, é comutativo o diagrama*
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\Omega) & \xrightarrow{i_{\mathscr{C}^\infty}} & \mathcal{G}(\Omega) \\ \downarrow J_{\mathbb{K}} & & \downarrow \overline{J}_X \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{i_{\mathbb{K}}} & \overline{\mathbb{K}}. \end{array}$$

Prova:

(1): Óbvia, uma vez que $\overline{J}_X$ é $\mathbb{K}$-linear.

(2): Seja $\widehat{f}$ um representante qualquer de $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, então para cada $\epsilon \in I$ temos

$$\int_{X_2} \widehat{f}(\epsilon, x)dx = \int_{X_2 \cap (X_1)^c} \widehat{f}(\epsilon, x)dx + \int_{X_1} \widehat{f}(\epsilon, x)dx = \int_{X_2 \cap (X_1)^c} \widehat{f}(\epsilon, x)dx$$

donde

$$\int_{X_2} f = j(\epsilon \longmapsto \int_{X_2} \widehat{f}(\epsilon, x)dx) = j(\int_{X_2 \cap (X_1)^c} \widehat{f}(\epsilon, x)dx = \int_{X_2 \cap (X_1)^c} f.$$

(3): Se $\widehat{f}$ é um representante qualquer de $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ segue, de $\mu(X_1 \cap X_2) = 0$, que

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \cup X_2} \widehat{f}(\epsilon, x)dx &= \int_{X_1} \widehat{f}(\epsilon, x)dx + \int_{X_2} \widehat{f}(\epsilon, x)dx - \int_{X_1 \cap X_2} \widehat{f}(\epsilon, x)dx \\ &= \int_{X_1} \widehat{f}(\epsilon, x)dx + \int_{X_2} \widehat{f}(\epsilon, x)dx, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \cup X_2} f &= j(\epsilon \longmapsto \int_{X_1 \cup X_2} \widehat{f}(\epsilon, x)dx) \\ &= j[(\epsilon \longmapsto \int_{X_1} \widehat{f}(\epsilon, x)dx) + (\epsilon \longmapsto \int_{X_2} \widehat{f}(\epsilon, x)dx)] \\ &= j(\epsilon \longmapsto \int_{X_1} \widehat{f}(\epsilon, x)dx) + j(\epsilon \longmapsto \int_{X_2} \widehat{f}(\epsilon, x)dx) \\ &= \int_{X_1} f + \int_{X_2} f. \end{aligned}$$

(4): Seja $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ uma função qualquer tal que $\widetilde{f}$ seja seu representante, como na seção 1.3. Então

$$\overline{J}_X(f) = j(\epsilon \in I \longmapsto \int_X \widetilde{f}(\epsilon, x)dx) = j(\epsilon \in I \longmapsto \int_X f(x)dx).$$

Por outro lado, segue da definição de $i_{\mathbb{K}}$ na Proposição 1.7.1 que

$$(j \circ i_{\mathbb{K}})(\int_X f(x)dx) = j[\widehat{\int_X f(x)dx}] = j(\epsilon \in I \longmapsto \int_X f(x)dx).$$

∎

O lema a seguir nos dá condições de definir a integração de funções generalizadas, com suporte compacto, sobre Ω.

Lema 1.11.4. *Se Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$, valem as seguintes afirmações:*

1. *Seja X um conjunto Lebesgue mensurável tal que $\overline{X} \subset\subset \Omega$. Se W é um aberto tal que $\overline{X} \subset W \subset \Omega$, então*

$$\int_X f = \int_X (f\,|_W),\ \forall\ f \in \mathcal{G}(\Omega).$$

Em particular,

$$\int_X f = 0, \ \forall\, f \in \mathcal{G}(\Omega) \text{ tal que } supp(f) \subset (\overline{X})^c;$$

2. *Suponhamos que $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ verifica a condição $supp(f) \subset\subset \Omega$ e que V é um aberto tal que $supp(f) \subset V$ e $\mu(\partial V) = 0$. Nestas condições temos:*
   (a) *Se $V \subset K \subset\subset \Omega$, então $\int_K f = \int_{\overline{V}} f = \int_V f$;*
   (b) *$V \subset K_i \subset\subset \Omega$, $i = 1, 2$, então $\int_{K_1} f = \int_{K_2} f$.*

Prova:

(1): Se $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ é um representante qualquer de f, então $\widehat{f}\,|_{I\times W}$ é um representante de $f\,|_W$ e, sendo $\overline{X} \subset\subset W \subset \Omega$, ambas integrais têm sentido e coincidem com

$$j(\epsilon \in I \longmapsto \int_X \widehat{f}(\epsilon, x)dx \in \mathbb{K}).$$

Em particular, se $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $supp(f) \subset (\overline{X})^c$, então existe W aberto de Ω com $\overline{X} \subset W$ e $supp(f) \cap W = \emptyset$.

Logo $f\,|_W = 0$ e

$$\int_X f = \int_X (f\,|_W) = \int_X 0 = 0.$$

(2a): Uma vez que

$$K = \overline{V} \cup (K \backslash V) = V \cup (K \backslash V) \text{ e } \mu(\overline{V} \cap (K \backslash V)) = \mu(\partial V) = 0 = \mu(\emptyset) = \mu(V \cap (K \backslash V)),$$

podemos escrever

$$\int_K f = \int_{\overline{V}} f + \int_{K\backslash V} f = \int_V f + \int_{K\backslash V} f \qquad (f \in \mathcal{G}(\Omega)). \tag{1.12}$$

Por outro lado, pondo $X := K \backslash V$, como $supp(f) \subset V$ resulta

$$X = \overline{X} \subset (\Omega \backslash supp(f)).$$

Segue que $\int_X f = \int_{K\backslash V} f = 0$ e $\int_K f = \int_{\overline{V}} f = \int_V f$ em (1.12).

(2b): Por (2*a*) temos $\int_{K_1} f = \int_{\overline{V}} f = \int_{K_2} f$.

∎

Definição 1.11.5. *Sejam* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$ *e* $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ *verificando a condição* $supp(f) \subset\subset \Omega$. *Chama-se integral de* f *sobre* Ω *ao número generalizado*

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f(x)dx := \int_K f \qquad \in \overline{\mathbb{K}},$$

onde K *satisfaz a condição* $supp(f) \subset K^\circ \subset K \subset\subset \Omega$.

Observemos que, se $K_1, K_2 \subset \Omega$ são tais que $supp(f) \subset K_i$, $i = 1, 2$, então pela condição (2b) do Lema 1.11.4, têm-se

$$\int_{K_1} f \quad = \quad \int_{K_2} f,$$

e assim podemos escolher qualquer K, com $K \subset \Omega$ e $supp(f) \subset K$, para calcular $\int_K f$.

A seguir apresentamos a fórmula de integração por partes para funções generalizadas.

Teorema 1.11.6. *Se* Ω *é um aberto do* $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$ *e* f *ou* g *tem suporte compacto, então*

$$\int_\Omega f(x)\partial^\alpha g(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \partial^\alpha f(x)g(x)dx.$$

Prova:

Seja $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Para usarmos indução em $|\alpha|$, é suficiente mostrarmos a igualdade

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dx. \tag{1.13}$$

Suponhamos, sem perda da generalidade, $supp(f) \subset\subset \Omega$ e notemos que

$$\left\{supp(f\frac{\partial g}{\partial x_i}) \cup supp(\frac{\partial f}{\partial x_i}g)\right\} \subset supp(f) \subset\subset \Omega.$$

Logo, se K é tal que $supp(f) \subset K^\circ \subset K \subset\subset \Omega$, então $supp(f\frac{\partial g}{\partial x_i}) \subset K^\circ$, $supp(\frac{\partial g}{\partial x_i}g) \subset$

$\subset K^\circ$, e assim pela definição de integral temos

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx = \int_K f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dx = \int_K \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dx. \tag{1.14}$$

Sejam $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ representantes de f, g, respectivamente, e W um aberto tal que $K \subset W \subset \overline{W} \subset\subset \Omega$. Consideremos também $\sigma \in \mathscr{D}(W)$ tal que $0 \leq \sigma \leq 1$ e $\sigma \equiv 1$ em K. Pela fórmula clássica de integração por partes, para cada $\epsilon \in I$, podemos escrever

$$\int_W \left[(\widetilde{\sigma}\widehat{f})\frac{\partial \widehat{g}}{\partial x_i}\right](\epsilon, x)dx = -\int_W \left[\frac{\partial(\widetilde{\sigma}\widehat{f})}{\partial x_i}\widehat{g}\right](\epsilon, x)dx, \tag{1.15}$$

onde $\widetilde{\sigma}$ é como dado na seção 1.3.

Segue que

$$\begin{aligned}\int_K \left[\hat{f}\frac{\partial \hat{g}}{\partial x_i}\right](\epsilon, x)dx + \int_K \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\hat{g}\right](\epsilon, x)dx &= \int_K \left[(\tilde{\sigma}\widehat{f})\frac{\partial \widehat{g}}{\partial x_i}\right](\epsilon, x)dx + \int_K \left[\frac{\partial(\tilde{\sigma}\hat{f})}{\partial x_i}\widehat{g}\right](\epsilon, x)dx \\ &= -\int_{W\backslash K} \left\{\left[(\widetilde{\sigma}\widehat{f})\frac{\partial \widehat{g}}{\partial x_i}\right](\epsilon, x) + \left[\widehat{g}\frac{\partial(\tilde{\sigma}\hat{f})}{\partial x_i}\right](\epsilon, x)\right\}dx.\end{aligned}$$

Como $supp(f) \subset K^\circ \subset [\Omega\backslash(\overline{W\backslash K})]$, resulta

$$supp\{(\sigma f)\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial(\sigma f)}{\partial x_i}\} \subset supp(f) \subset [\Omega\backslash(\overline{W\backslash K})].$$

Observando a condição (1) do Lema 1.11.4, temos

$$-\int_{W\backslash K} \left\{\left[(\widetilde{\sigma}\widehat{f})\frac{\partial \widehat{g}}{\partial x_i}\right](\epsilon, x) + \left[\widehat{g}\frac{\partial(\widetilde{\sigma}\widehat{f})}{\partial x_i}\right](\epsilon, x)\right\}dx = 0.$$

Portanto, de (1.14) segue (1.13), completanto a prova.

∎

1.12 A relação de associação

O estudo da relação de associação sobre $\mathcal{G}(\Omega)$ é de distinta importância uma vez que, ao introduzi-lo, J. F. Colombeau possibilitou a solução de muitos problemas envolvendo multiplicação de distribuições. Ao leitor interessado, indicamos ver [21], [20].

Definição 1.12.1. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ é* ***associado a zero****, e indicamos por $f \approx 0$, se existe um representante $\hat{f}$ de f tal que*

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_\Omega \hat{f}(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Se $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$, então dizemos que f é ***associado a*** *g, e o indicamos por $f \approx g$, se $f - g \approx 0$.*

Proposição 1.12.2. *Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega)$. Então $f \approx 0$ se, e somente se, para todo representante $\hat{f}$ de f tem-se*

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\Omega} \hat{f}(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Prova:

Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega)$.

Observemos que se $\lim\limits_{\epsilon \to 0+} \int\limits_{\Omega} \hat{f}(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0$ para todo representante $\hat{f}$ de f e para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, então é óbvio que $f \approx 0$.

Reciprocamente, se $f \approx 0$, então existe $\hat{f}_*$ representante de f tal que

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\Omega} \hat{f}_*(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{1.16}$$

Sendo assim, se $\hat{f}$ é outro representante de f e $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, segue-se da inclusão $\mathscr{C}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{G}(\Omega)$ que $(\hat{f}_* - \hat{f})\tilde{\varphi} \in \mathcal{N}[\Omega]$ e portanto, pela Proposição 1.11.1, temos que

$$\int_{\Omega} (\hat{f}_* - \hat{f})(\epsilon, x)\varphi(x)dx = J_\Omega\left((\hat{f}_* - \hat{f})\tilde{\varphi}\right) \quad \in \quad \mathcal{N}(\mathbb{K}),$$

donde segue pela Proposição 1.6.3 que

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\Omega} (\hat{f}_* - \hat{f})(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0.$$

Por outro lado, segue de (1.16) que

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\Omega} (\hat{f}_* - \hat{f})(\epsilon, x)\varphi(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\Omega} \hat{f}_*(\epsilon, x)\varphi(x)dx - \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\Omega} \hat{f}(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\Omega} \hat{f}(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0.$$

∎

Proposição 1.12.3. *Sejam $\lambda_* \in \mathcal{G}(\Omega)$ uma constante generalizada e $k, k_1 \in \mathbb{K}$. São válidas as afirmações seguintes:*

1. $\lambda_* \approx 0$ *se, e somente se, para todo representante* $\hat{\lambda}_*$ *de* λ_* *tem-se:*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \hat{\lambda}_*(\epsilon) = 0;$$

2. Se $\beta_* := [\epsilon \in I \longrightarrow k]$ *e* $\gamma_* := [\epsilon \in I \longrightarrow k_1]$ *são tais que* $\beta_* \approx \gamma_*$*, então* $k = k_1$*;*

3. Se $\beta_* := [\epsilon \in I \longrightarrow k]$*, então* $\lambda_* \approx \beta_*$ *se, e somente se, para todo representante* $\hat{\lambda}_*$ *de* λ_* *tem-se*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \hat{\lambda}_*(\epsilon) = k.$$

Prova:

(1): Observemos que $\lambda_* = i^*(\lambda)$, para $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$ e i^* como na Proposição 1.8.1. Assim, se $\lambda_* \in \mathcal{G}(\Omega)$ é uma constante generalizada e $\lambda_* \approx 0$, então, pela Proposição 1.12.2, temos para todo representante $\hat{\lambda}_*$ de λ_* que

$$0 = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\Omega \hat{\lambda}_*(\epsilon, x)\varphi(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\Omega i(\hat{\lambda})(\epsilon)\varphi(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \hat{\lambda}(\epsilon) \int_\Omega \varphi(x)dx,$$

onde $i : \mathcal{E}_M(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{E}_M[\Omega]$ é como na prova da Proposição 1.8.1.

Logo

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \hat{\lambda}(\epsilon) \int_\Omega \varphi(x)dx = 0, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \Longleftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0+} \widehat{\lambda}_*(\epsilon, x) = 0.$$

(2): Basta observar que

$$\beta_* \approx \gamma_* \Longleftrightarrow \beta_* - \gamma_* \approx 0 \Longleftrightarrow \lim_{\epsilon \longrightarrow 0}(k - k_1) = 0 \Longleftrightarrow k = k_1.$$

(3): Segue diretamente de (2).

∎

Da inclusão de $\overline{\mathbb{K}}$ em $\mathcal{G}(\Omega)$ e da afirmação (1) da Proposição 1.12.3 faz sentido a seguinte definição:

Definição 1.12.4. *Um elemento* λ *de* $\overline{\mathbb{K}}$ *é dito* ***associado a zero*** *e é indicado por* $\lambda \approx 0$, *se existe um representande* $\widehat{\lambda}$ *de* λ *tal que*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \widehat{\lambda}(\epsilon) = 0, \ \epsilon \in I. \tag{1.17}$$

Dados $\lambda, \lambda_1 \in \overline{\mathbb{K}}$*, se diz que* λ *é associado a* λ_1 *e denotado por* $\lambda \approx \lambda_1$*, se* $\lambda - \lambda_1 \approx 0$*.*

Se $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$, então todo representante $\hat{\lambda}$ de λ satisfaz o limite dado em (1.17).

No próximo teorema, estamos seguindo de perto [2](Theorem 6.3.1).

Teorema 1.12.5. *Se Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$, então valem as seguintes afirmações:*

1. $f, g \in \mathcal{G}(\Omega), f \approx 0, g \approx 0 \Longrightarrow f + g \approx 0$;
2. $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega), f \in \mathcal{G}(\Omega), f \approx 0 \Longrightarrow \psi f \approx 0$;
3. $f \in \mathcal{G}(\Omega), f \approx 0, \alpha \in \mathbb{N}^n \Longrightarrow \partial^\alpha f \approx 0$;
4. $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n), \frac{\partial f}{\partial x_1} \approx 0$ *em* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \exists \Phi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0$ *e* $f \approx \Phi$.

Prova:

(1). Sejam $\hat{f}$ e $\hat{g}$ representantes de f e g, respectivamente. Se $f \approx 0$ e $g \approx 0$, então

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_\Omega \hat{f}(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0, \quad \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\Omega \hat{g}(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0$$

e

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_\Omega \hat{f}(\epsilon, x)\varphi(x)dx + \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\Omega \hat{g}(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\Omega (\hat{f} + \hat{g})(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0.$$

Sendo $\hat{f} + \hat{g} = \widehat{f + g}$ um representante de $f + g$, concluímos que $f + g \approx 0$.

(2). Se $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, então $\tilde{\psi}\hat{f}$ é um representante de ψf, onde $\tilde{\psi}$ é como na seção 1.3, e $\hat{f}$ é um representante de f.

Observemos que $\psi\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Assim, se $f \approx 0$ temos pela Proposição 1.12.2 que

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_\Omega \hat{f}(\epsilon, x)(\psi\varphi)(x)dx = 0,$$

isto é

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_\Omega \hat{f}\tilde{\psi}(\epsilon, x)\varphi(x)dx = 0.$$

(3). Notemos que se $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, então $\partial^\alpha \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Logo, se $f \approx 0$ e $\hat{f}$ é um representante de f, então

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\Omega} \hat{f}(\epsilon,x)(\partial^{\alpha}\varphi)(x)dx = 0,$$

e segue da fórmula de integração por partes, que

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\Omega} (\partial^{\alpha}\hat{f})(\epsilon,x)\varphi(x)dx = 0.$$

(4). Sejam $\hat{f}$ e $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}$ representantes para $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente. Fixemos $\psi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(t)dt = 1 \tag{1.18}$$

e consideremos a seguinte notação:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \xi = (x_2, \ldots, x_n), \quad dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n \quad \text{e} \quad d\xi = dx_2 \ldots dx_n.$$

Definamos para cada $(\epsilon, x) \in I \times \mathbb{R}^n$:

$$\hat{\Phi}(\epsilon,x) = \hat{\Phi}(\epsilon,\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\epsilon,t,\xi)\psi_1(t)dt.$$

Uma vez que $\hat{f} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$, pela derivação sob o sinal da integral, temos $\hat{\Phi} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$ e segue que $\Phi = [\hat{\Phi}] \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0$.

Para completarmos a prova, mostremos que dado $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int \left[\hat{f}(\epsilon,x) - \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\epsilon,x)\right]\psi(x)dx = 0.$$

Por ([7] página 333), sabemos que ψ pode ser escrita de modo único como

$$\psi = \lambda\psi_1 + \frac{\partial \psi_0}{\partial x_1},$$

mais precisamente,

$$\psi(x) = \lambda(\xi)\psi_1(x_1) + \frac{\partial \psi_0}{\partial x_1}(x), \quad (x = (x_1, \xi)),$$

onde

$$\psi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \text{ e } \lambda(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t,\xi)dt, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Consequentemente

$$\int \hat{f}(\epsilon,x)\psi(x)dx = \int \hat{f}(\epsilon,x)\lambda(\xi)\psi_1(x_1)dx + \int \hat{f}(\epsilon,x)\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}(x)dx. \tag{1.19}$$

Por definição, temos $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1} - \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, e

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1} - \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}\right)(\epsilon,x)\psi_0(x)dx = 0.$$

Por outro lado, uma vez que $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \approx 0$ temos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\epsilon,x)\psi_0(x)dx = 0.$$

Dos dois limites anteriores, conclui-se que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \hat{f}(\epsilon,x)\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}(x)dx = 0. \tag{1.20}$$

De (1.18), segue que

$$\int \hat{f}(\epsilon,x)\lambda(\xi)\psi_1(x_1)dx = \int \widehat{\Phi}(\epsilon,\xi)\psi(x)dx,$$

e por (1.19), tem-se

$$\int \left(\hat{f}(\epsilon,x) - \widehat{\Phi}(\epsilon,\xi)\right)\psi(x)dx = \int \hat{f}(\epsilon,x)\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}(x)dx,$$

e assim, o resultado segue de (1.20).

∎

Capítulo 2

O espaço ultramétrico das funções generalizadas

Nesse capítulo, os resultados (sobre topologia) apresentados nas seções 2.1, 2.2 e 2.3 foram desenvolvidos por D. Scarpalezos [ver [17], [16]]. Na seção 2.4, mostramos que uma vez definidas ultramétricas para $\overline{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{G}(\Omega)$, é possível provar que eles são fractais, segundo a definição de Mandelbrot [ver [11],[18]].

2.1 Conceitos e propriedades básicas dos espaços ultramétricos

Nessa seção, abordamos as principais propriedades de espaços ultramétricos que serão usadas na seção 2.4 para provarmos que $\overline{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{G}(\Omega)$ são fractais.

Definição 2.1.1. *Seja (M,ρ) um espaço métrico. Se ρ satisfaz a desigualdade ultramétrica*

$$\rho(a,b) \leq \max\{\rho(a,c), \rho(c,b)\}, \ \forall \ a,b,c \in M,$$

*então ρ é chamada **ultramétrica** e M é dito **espaço ultramétrico**.*

Proposição 2.1.2. *Seja (M,ρ) um espaço ultramétrico. Se a,b,c são elementos distintos de M tais que $\rho(a,b) \geq \rho(a,c) \geq \rho(c,b)$, então $\rho(a,b) = \rho(a,c)$.*

Prova:

Por hipótese,

$$\rho(a,b) \geq \rho(a,c)$$

e pela desigualdade ultramétrica,

$$\rho(a,b) \leq \max\{\rho(a,c), \rho(c,b)\} = \rho(a,c).$$

Portanto, $\rho(a,b) = \rho(a,c)$.

∎

Corolário 2.1.3. *Em um espaço ultramétrico, todos os triângulos são isósceles, com base menor ou igual aos lados congruentes.*

Prova:

Sejam x, y, z as medidas dos lados de um triângulo em um espaço ultramétrico. Pela proposição precedente, x, y, z não podem ser simultaneamente distintos. Assim, supondo que a medida da base seja z, pela desigualdade ultramétrica não podemos ter $z >$ $> \max\{x, y\} = x = y$. Logo, infere-se que $z \leq x = y$.

∎

A propriedade "todo triângulo é isósceles"é característica dos espaços ultramétricos.

Se (M, ρ) é espaço ultramétrico, então $\forall\, a, b, c \in M$ e $r, s > 0$, valem as seguintes proposições:

Proposição 2.1.4. *Se $b \in B_r(a)$, então $B_r(a) = B_r(b)$.*

Prova:

Temos que $b \in B_r(a)$ se, e só se, $\rho(b,a) < r$.

Agora se $\rho(c,a) < r$ temos $\rho(c,b) \leq \max\{\rho(c,a), \rho(b,a)\} < r$ e segue que $B_r(a) \subset B_r(b)$.

Analogamente, como $a \in B_r(b)$, $B_r(b) \subset B_r(a)$.

∎

Proposição 2.1.5. *Se $b \in D_r(a)$, então $D_r(a) = D_r(b)$.*

Prova:

Basta trocar $<$ por $\leq$ na Proposição 2.1.4.

∎

Proposição 2.1.6. $B_r(a) = \overline{B_r(a)}$.

Prova:

É obvio que $B_r(a) \subset \overline{B_r(a)}$.

Para provarmos que $\overline{B_r(a)} \subset B_r(a)$, lembremos que $c \in \overline{B_r(a)}$ se, e somente se, $B_s(c) \cap B_r(a) \neq \emptyset, \quad \forall \quad s > 0$.

Tomemos $s < r$. Se $b \in B_s(c) \cap B_r(a)$ então $\rho(a,b) < r$ e $\rho(b,c) < s < r$.

Como $\rho(c,a) \leq \max\{\rho(b,a), \rho(b,c)\} < r$ temos $c \in B_r(a)$ e segue que $\overline{B_r(a)} \subset B_r(a)$.

∎

Proposição 2.1.7. *$B_r(a)$ é aberto e fechado na topologia induzida por ρ.*

Prova:

$B_r(a)$ e $\overline{B_r(a)}$ são, respectivamente, aberto e fechado em qualquer espaço métrico M.

Portanto, pela Proposição 2.1.6 segue o resultado.

∎

Proposição 2.1.8. *Se $b \in S_r(a)$, então $B_r(b) \subset S_r(a)$.*

Prova:

Se $c \in B_r(b)$, então $\rho(b,c) < r$.

Por hipótese, $\rho(b,a) = r$ e assim segue que $\rho(a,c) \leq \max\{\rho(b,c), \rho(b,a)\} = r$.

Afirmamos que $\rho(a,c) = r$. De fato, se $\rho(a,c) < r$ temos

$$r = \rho(b,a) \leq \max\{\rho(b,c), \rho(a,c)\} < r,$$

o que é absurdo.

Portanto, $B_r(b) \subset S_r(a)$.

∎

Proposição 2.1.9. *$S_r(a)$ é aberto e fechado na topologia induzida por ρ.*

Prova:

$S_r(a)$ é fechado pois $[S_r(a)]^c = B_r(a) \cup \big(D_r(a)\big)^c$ é aberto. $S_r(a)$ é aberto pela Proposição 2.1.8.

∎

Proposição 2.1.10. *$B_r(a) \cap B_s(b) \neq \emptyset$ se, e somente se, $B_r(a) \subset B_s(b)$ ou $B_r(a) \supset B_s(b)$.*

Prova:

Podemos supor $r \leq s$.

Se existe $c \in B_r(a) \cap B_s(b)$ temos, pela Proposição 2.1.4, que

$$B_r(a) = B_r(c) \quad \text{e} \quad B_s(b) = B_s(c).$$

Logo,

$$B_r(a) = B_r(c) \subset B_s(c) = B_s(b).$$

∎

Proposição 2.1.11. *$D_r(a) \cap D_s(b) \neq \emptyset$ se, e só se, $D_r(a) \subset D_s(b)$ ou $D_r(a) \supset D_s(b)$.*

Prova:

Análoga à Proposição 2.1.10, usando a Proposição 2.1.5.

∎

Proposição 2.1.12. *Se $0 < s < r$, então $\rho(b, c) = r$, $\forall\, b \in S_s(a)$ e $\forall\, c \in S_r(a)$.*

Prova:

Se $b \in S_s(a)$ e $c \in S_r(a)$, então $\rho(b, a) = s$ e $\rho(a, c) = r$. Logo,

$$\rho(b, c) \leq \max\{\rho(b, a), \rho(c, a)\} = r.$$

Afirmamos que $\rho(b, c) = r$. De fato, se $\rho(b, c) < r$ temos

$$r = \rho(c, a) \leq \max\{\rho(b, a), \rho(b, c)\} < r,$$

o que é absurdo.

∎

Proposição 2.1.13. *Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $B_r(a)$ convergente para $\xi \in M$. Então $\xi = a$ ou $\xi \neq a$, e neste caso, existe $0 < s < r$ tal que $\xi \in S_s(a)$ e*

$$\{m \in \mathbb{N} : x_m \notin S_s(a)\} \text{ é finito.}$$

Prova:

Como ξ é ponto aderente de $B_r(a)$, o qual é fechado, temos $\rho(\xi, a) < r$.

Se $\xi \neq a$, então $\rho(\xi, a) = s > 0$ e neste caso, como $\rho(\xi, x_m) \longrightarrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(\xi, x_m) < \rho(\xi, a)$ para $m \geq n_0$, e assim

(I) : $\quad \rho(\xi, a) = s \leq \max\{\rho(\xi, x_m), \rho(x_m, a)\} = \rho(x_m, a) \quad \forall \quad m \geq n_0.$

Por outro lado,

(II) : $\quad \rho(x_m, a) \leq \max\{\rho(x_m, \xi), \rho(\xi, a)\} = \rho(\xi, a) = s \quad \forall \quad m \geq n_0.$

Logo, segue de (I) e (II) que $\rho(x_m, a) = s \qquad \forall \quad m \geq n_0.$

∎

Proposição 2.1.14. *A topologia induzida por ρ é totalmente desconexa, isto é, a componente conexa de qualquer ponto $x \in M$ é o conjunto unitário $\{x\}$.*

Prova:

Óbvia, pois qualquer x possui um sistema fundamental de vizinhanças que são simultaneamente, abertas e fechadas.

∎

Definição 2.1.15. *Seja (M, ρ) um espaço ultramétrico. Dizemos que um subconjunto X de M é "clopen"se X é, simultaneamente, aberto e fechado na topologia induzida por ρ.*

No restante deste trabalho usaremos o termo "fechaberto"(sugerido em [6]) para nos referirmos a um conjunto que é, simultaneamente, aberto e fechado.

Outro resultado obtido em um espaço ultramétrico (M, ρ), diz respeito às seqüências de elementos de M:

Proposição 2.1.16. *Uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de um espaço ultramétrico (M, ρ) é uma seqüência de Cauchy em relação a ρ se, e só se, dado $\epsilon \geq 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Longrightarrow \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \epsilon.$$

Prova:

Suponhamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em M, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Longrightarrow \rho(x_m, x_n) \leq \epsilon.$$

Então é óbvio que, se $n \geq N$, então $n+1 \geq N$ e $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \epsilon$.

Reciprocamente, se

$$n \geq N \Longrightarrow \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \epsilon \quad \text{e} \quad m > n,$$

então $\rho(x_m, x_n) \leq \epsilon$. De fato, suponhamos $m = n + s$, para algum $s \in \mathbb{N}^*$. Temos que

$$m = n + s > n + s - 1 > n + s - 2 > \ldots > n + 1 > n \geq N,$$

o que por hipótese e pela desigualdade ultramétrica, implica em

$$\rho(x_m, x_n) \leq \max\{\rho(x_{n+s}, x_{n+s-1}), \rho(x_{n+s-1}, x_{n+s-2}), \ldots, \rho(x_{n+1}, x_n)\} = \epsilon.$$

∎

2.2 Uma ultramétrica para $\overline{\mathbb{K}}$

Nessa seção, apresentaremos os resultados necessários à construção de uma ultramétrica para $\overline{\mathbb{K}}$.

Dado $\widehat{\lambda} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ consideremos o conjunto

$$S_{\widehat{\lambda}} := \{a \in \mathbb{R} : |\widehat{\lambda}(\epsilon)| = o(\epsilon^a)\}.$$

É claro também que $S_{\widehat{\lambda}} \neq \emptyset$ pela definição de $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$.

Se $a \in S_{\widehat{\lambda}}, b \in \mathbb{R}$ e $b < a$ então $b \in S_{\widehat{\lambda}}$. De fato, se $b < a$ então $\epsilon^a < \epsilon^b$. Logo $0 \leq \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon)|}{\epsilon^b} \leq \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon)|}{\epsilon^a} \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad \epsilon \to 0^+$.

Com estas observações, vemos que $S_{\widehat{\lambda}}$ é um intervalo do tipo $(-\infty, \theta)$ ou $(-\infty, \theta]$, onde $\theta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Agora estamos em condições de dar a seguinte definição:

Definição 2.2.1. *Para $\widehat{\lambda} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ chama-se* ***valuação*** *de $\widehat{\lambda}$ ao elemento de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definido por:*

$$V(\widehat{\lambda}) := \sup \ S_{\widehat{\lambda}}.$$

Apresentamos a seguir, algumas propriedades da função

$$V : \widehat{\lambda} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K}) \longmapsto V(\widehat{\lambda}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Proposição 2.2.2. *Sejam $\widehat{\lambda}, \widehat{\mu} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{K}^*$. Então valem:*

1. $V(k\widehat{\lambda}) = V(\widehat{\lambda})$;
2. $V(\widehat{\lambda}\widehat{\mu}) \geq V(\widehat{\lambda}) + V(\widehat{\mu})$;
3. *Denotando por* $\widetilde{a} : \epsilon \in I \longmapsto \epsilon^a \in \mathbb{R}, \quad \forall \quad a \in \mathbb{R}$, *se tem* $V(\widetilde{a}\widehat{\lambda}) = a + V(\widehat{\lambda})$;
4. $V(\widehat{\lambda} + \widehat{\mu}) \geq \inf\{V(\widehat{\lambda}), V(\widehat{\mu})\}$;
5. $V(\widehat{\lambda}) = +\infty \Longleftrightarrow \widehat{\lambda} \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$;
6. *V é constante sobre cada classe de equivalência módulo $\mathcal{N}(\mathbb{K})$, isto é,*
$$V(\widehat{\lambda}) = V(\widehat{\lambda} + \widehat{\mu}), \qquad \forall \quad \widehat{\lambda} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K}), \qquad \forall \quad \widehat{\mu} \in \mathcal{N}(\mathbb{K});$$
7. $V(i_{\mathbb{K}}(a)) = +\infty$, *se* $a = 0$, *e* $V(i_{\mathbb{K}}(a)) = 0$, *se* $a \in \mathbb{K}^*$, *onde* $i_{\mathbb{K}}$ *é como na Proposição 1.7.1 .*

Prova:

(1): Basta observar que dado $k \neq 0$ tem-se

$$|\widehat{\lambda}(\epsilon)| = o(\epsilon^a) \Longleftrightarrow |k\widehat{\lambda}(\epsilon)| = k|\widehat{\lambda}(\epsilon)| = o(\epsilon^a).$$

(2): Se $a < V(\hat{\lambda})$ e $b < V(\hat{\mu})$, então $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon)|}{\epsilon^a} = 0$ e $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\mu}(\epsilon)|}{\epsilon^b} = 0$, e assim, $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon).\widehat{\mu}(\epsilon)|}{\epsilon^{a+b}} = 0$. Logo $a + b \in S_{\widehat{\lambda}\widehat{\mu}}$ e portanto, $V(\widehat{\lambda}\widehat{\mu}) \geq a + b$. Como $a < V(\widehat{\lambda})$ e $b < V(\widehat{\mu})$ são arbitrários, concluímos que $V(\widehat{\lambda}\widehat{\mu}) \geq V(\widehat{\lambda}) + V(\widehat{\mu})$.

(3): Notemos que $\widetilde{a} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K}), \quad \forall \quad a \in \mathbb{R}$ pois $\epsilon^a = o(\epsilon^b), \quad \forall \quad b < a$.

Assim, $b \in S_{\widetilde{a}\widehat{\lambda}} \Longleftrightarrow \lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widetilde{a}\widehat{\lambda}(\epsilon)|}{\epsilon^b} = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{\epsilon^a|\widehat{\lambda}(\epsilon)|}{\epsilon^b} = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon)|}{\epsilon^{b-a}} = 0 \Longleftrightarrow b - a \in S_{\widehat{\lambda}} \Longleftrightarrow b \in a + S_{\widehat{\lambda}}$.

Portanto, $S_{\widetilde{a}\widehat{\lambda}} = a + S_{\widehat{\lambda}} \Longrightarrow V(\widetilde{a}\widehat{\lambda}) = a + V(\widehat{\lambda})$.

(4): Suponhamos, sem perda da generalidade, que $V(\widehat{\lambda}) \geq V(\widehat{\mu})$.

Se $b < V(\widehat{\mu})$, então segue que $b < V(\widehat{\lambda})$ e assim,

$$0 \leq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon) + \widehat{\mu}(\epsilon)|}{\epsilon^b} \leq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon)|}{\epsilon^b} + \lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\mu}(\epsilon)|}{\epsilon^b} = 0.$$

Portanto $b \in S_{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}$ e consequentemente $b \leq V(\widehat{\lambda} + \widehat{\mu})$.

Dada a arbitrariedade de $b < V(\widehat{\mu})$, segue

$$V(\widehat{\lambda} + \widehat{\mu}) \geq V(\widehat{\mu}) = \inf\{V(\widehat{\lambda}), V(\widehat{\mu})\}.$$

(5): $\widehat{\lambda} \in \mathcal{N}(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow |\widehat{\lambda}(\epsilon)| = o(\epsilon^a),\ \forall a \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow S_{\widehat{\lambda}} = (-\infty, +\infty) \Longleftrightarrow V(\widehat{\lambda}) = +\infty$.

(6): Por (4), $V(\widehat{\lambda} + \widehat{\mu}) \geq \inf\{V(\widehat{\lambda}), V(\widehat{\mu})\}$ e como $V(\widehat{\mu}) = +\infty$ temos que $V(\widehat{\lambda} + \widehat{\mu}) \geq$ $\geq V(\widehat{\lambda})$.

Por outro lado, $S_{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}} \subset S_{\widehat{\lambda}}$ pois $a \in S_{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}$ implica em $\lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon)+\widehat{\mu}(\epsilon)|}{\epsilon^a} = 0$, e como $\lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\mu}(\epsilon)|}{\epsilon^a} = 0$, pois $\widehat{\mu} \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$, resulta que

$$0 \leq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon)|}{\epsilon^a} = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon) + \widehat{\mu}(\epsilon) - \widehat{\mu}(\epsilon)|}{\epsilon^a} \leq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon) - \widehat{\mu}(\epsilon)|}{\epsilon^a} + \lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\mu}(\epsilon)|}{\epsilon^a} \longrightarrow 0.$$

Portanto $a \in S_{\widehat{\lambda}}$, e assim, $S_{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}} \subset S_{\widehat{\lambda}}$. Logo $V(\widehat{\lambda} + \widehat{\mu}) \leq V(\widehat{\lambda})$.

(7): Basta observar que, se $a = 0$ então, para todo $b \in \mathbb{R}$ tem-se que $\lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|i_{\mathbb{K}}(a)|}{\epsilon^b} = 0$; se $a \neq 0$, então $\lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|i_{\mathbb{K}}(a)|}{\epsilon^b} = 0$ se, e somente se, $b < 0$.

∎

Para os próximos resultados precisaremos da seguinte definição:

Definição 2.2.3. *Seja M um conjunto qualquer. Uma função $f : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma pseudo-métrica (respectivamente, pseudo-ultramétrica) se, $\forall \quad x, y, w \in M, f$ satisfaz:*

1. $f(x, y) \geq 0$;
2. $f(x, y) = f(y, x)$;
3. $f(x, x) = 0$;
4. $f(x, w) \leq f(x, y) + f(y, w)$ *(respectivamente,* $f(x, w) \leq \max\{f(x, y), f(y, w)\}$*).*

Proposição 2.2.4. *A função $d : \mathcal{E}_M(\mathbb{K}) \times \mathcal{E}_M(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d : (\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = e^{-V(\widehat{\lambda}-\widehat{\mu})}$, sendo $d(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = 0 \Longleftrightarrow V(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = \infty$, é uma pseudo-ultramétrica sobre $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ e satisfaz*

$$d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = 0 \Longleftrightarrow \widehat{\lambda} - \widehat{\mu} \in \mathcal{N}(\mathbb{K}).$$

Prova:

Para todos $\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}$ e $\widehat{\omega}$ em $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$, temos:

(1): $d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) \geq 0$ pois $e^k \geq 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{R} \cup \{\underline{+}\infty\}$.

(2): $d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = d(\widehat{\mu}, \widehat{\lambda})$ pois $V(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}) = V[-1.(\widehat{\mu} - \widehat{\lambda})] = V(\widehat{\mu} - \widehat{\lambda})$ por (1) da Proposição 2.2.2.

(3): $\widehat{\lambda} = \widehat{\mu} \Longrightarrow d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = 0$ pois $V(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}) = V(\hat{0}) = +\infty (0 \in \mathcal{N}(\mathbb{K}))$.

(4): $d(\widehat{\lambda}, \widehat{\omega}) \leq \max\{d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}), d(\widehat{\mu}, \widehat{\omega})\}$. De fato, suponhamos, sem perda da generalidade, $d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = \max\{d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}), d(\widehat{\mu}, \widehat{\omega})\}$. Então $-V(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}) \geq -V(\widehat{\mu} - \widehat{\omega})$, e assim $V(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}) \leq$ $\leq V(\widehat{\mu} - \widehat{\omega})$.

Aplicando 2.2.2(2), temos

$$V(\widehat{\lambda} - \widehat{\omega}) = V[(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}) + (\widehat{\mu} - \widehat{\omega})] \geq \inf\{V(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}), V(\widehat{\mu} - \widehat{\omega})\} = V(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}),$$

isto é,

$$-V(\widehat{\lambda} - \widehat{\omega}) \leq -V(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}),$$

e assim

$$d(\widehat{\lambda}, \widehat{\omega}) \leq d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = \max\{d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}), d(\widehat{\mu}, \widehat{\omega})\}.$$

Para provar que $d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = 0$ se, e somente se $\widehat{\lambda} - \widehat{\mu} \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$, basta notar que

$$(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}) \in \mathcal{N}(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow V(\widehat{\lambda} - \widehat{\mu}) = +\infty \Longleftrightarrow d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = e^{-V(\widehat{\lambda}-\widehat{\mu})} = e^{-\infty} = 0, \tag{2.1}$$

sendo que a primeira equivalência decorre de 2.2.2(5).

∎

O lema a seguir é fundamental na prova da existência de uma ultramétrica sobre $\overline{\mathbb{K}}$:

Lema 2.2.5. *Sejam $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{K}}$ tais que $\hat{\lambda}$ e $\hat{\lambda}_*$ sejam representantes de λ e $\hat{\mu}$ e $\hat{\mu}_*$ sejam representantes de μ. Então $d(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = d(\hat{\lambda}_*, \hat{\mu}_*)$.*

Prova:

Sejam $v, v' \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$ tais que $\widehat{\lambda} = \lambda_* + v'$ e $\widehat{\mu} = \mu_* + v$. Logo, por (6) da Proposição 2.2.2, tem-se

$$d(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = e^{-V(\widehat{\lambda}-\widehat{\mu})} = e^{-V(\lambda_*+v'-\mu_*-v')} = e^{-(V(\lambda_*-\mu_*)+(v'-v))} = e^{-V(\lambda_*-\mu_*)} = d(\lambda_*, \mu_*).$$

∎

Definição 2.2.6. *Denotaremos por D a função definida em $\overline{\mathbb{K}} \times \overline{\mathbb{K}}$ por*

$$D(\lambda, \mu) = d(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = e^{-V(\hat{\lambda}-\hat{\mu})} \in \mathbb{R}_+,$$

sendo $\hat{\lambda}$ e $\hat{\mu}$ representantes de λ e μ, respectivamente.

Teorema 2.2.7. *A função D da definição precedente é uma ultramétrica sobre $\overline{\mathbb{K}}$.*

Prova:

Sejam $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{K}}$, então:

(1): $D(\lambda, \mu) \geq 0$ por 2.2.4(1).

(2): $D(\lambda, \mu) = D(\mu, \lambda)$ por 2.2.4(2).

(3): Usando a Proposição 2.2.2(5) temos

$$D(\lambda, \mu) = 0 \Longleftrightarrow V(\lambda - \mu) = +\infty \Longleftrightarrow \widehat{\lambda} - \widehat{\mu} \in \mathcal{N}(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \lambda = \mu,$$

sendo $\hat{\lambda}$ e $\hat{\mu}$ representantes de λ e μ, respectivamente.

(4): $D(\lambda, \omega) \leq \max\{D(\lambda, \mu), D(\mu, \omega)\}$ por 2.2.4(4).

∎

Definindo $||\lambda|| := D(\lambda, 0)$, $\forall\ \lambda \in \overline{\mathbb{K}}$, segue diretamente da definição de D e da proposiçao 2.2.2 o seguinte corolário:

Corolário 2.2.8. *Para $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{K}}$ e $a, b \in \mathbb{K}$ temos:*

1. $||\lambda + \mu|| \leq \max\{||\lambda||, ||\mu||\}$ *e* $||\lambda.\mu|| \leq ||\lambda||||\mu||$*;*
2. $||\lambda|| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$*;*
3. $||a\lambda|| = ||\lambda||$ *se* $a \neq 0$*;*
4. $||(j \circ i_{\mathbb{K}})(a)|| = 1$ *se* $a \neq 0$*;*

5. $\|(j \circ i_{\mathbb{K}})(a-b)\| = 1 - \delta_{a,b}$.

Definição 2.2.9. *A estrutura uniforme determinada por D (respectivamente, d) sobre $\overline{\mathbb{K}}$ (respectivamente, $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$) é chamada* **estrutura uniforme cortante sobre** $\overline{\mathbb{K}}$ *(respectivamente, $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$). A topologia uniforme determinada por essa estrutura sobre $\overline{\mathbb{K}}$ será denominada* **topologia cortante sobre** $\overline{\mathbb{K}}$ *e será denotada por $\mathscr{T}_c$.*

A seguir daremos alguns resultados sobre $(\overline{\mathbb{K}}, \mathscr{T}_c)$ que foram desenvolvidos por D. Scarpalezos [ver [17], [16]] e J. Aragona e O. S. Juriaans [ver [11]].

Teorema 2.2.10. *$(\overline{\mathbb{K}}, \mathscr{T}_c)$ é um anel topológico.*

Prova:

De fato, sabemos pelo desenvolvido anteriormente que $\overline{\mathbb{K}}$ é um anel quociente, portanto, basta provar que as aplicações de $\overline{\mathbb{K}} \times \overline{\mathbb{K}} \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ definidas por :

$$(\lambda, \mu) \longmapsto \lambda + \mu \quad \text{e} \quad (\lambda, \mu) \longmapsto \lambda.\mu$$

são contínuas. Como $(\overline{\mathbb{K}}, \mathscr{T}_c)$ é uma topologia ultramétrica, será suficiente verificar as implicações abaixo.

Sejam $(\lambda_n) \longrightarrow \lambda$ e $(\mu_n) \longrightarrow \mu$. Então:

$(\ I\ ): \quad \lambda_n + \mu_n \longrightarrow \lambda + \mu;$

$(II): \quad \lambda_n.\mu_n \longrightarrow \lambda.\mu.$

No que segue, se $\omega \in \overline{\mathbb{K}}$, $\widehat{\omega}$ denota um representante qualquer de ω.

Pela definição de D:

$$D(\lambda_n + \mu_n, \lambda + \mu) = e^{-V(\widehat{\lambda}_n + \widehat{\mu}_n - \widehat{\lambda} - \widehat{\mu})} = e^{-V[(\widehat{\lambda}_n - \widehat{\lambda}) + (\widehat{\mu}_n - \widehat{\mu})]} \tag{2.2}$$

Por (4) da Proposição 2.2.2 temos:

$$V[(\widehat{\lambda}_n - \widehat{\lambda}) + (\widehat{\mu}_n - \widehat{\mu})] \geq \inf\{V(\widehat{\lambda}_n - \widehat{\lambda}), V(\widehat{\mu}_n - \widehat{\mu})\},$$

e assim

$$-V[(\widehat{\lambda}_n - \widehat{\lambda}) + (\widehat{\mu}_n - \widehat{\mu})] \leq -\inf\{V(\widehat{\lambda}_n - \widehat{\lambda}), V(\widehat{\mu}_n - \widehat{\mu})\} = \sup\{-V(\widehat{\lambda}_n - \widehat{\lambda}), -V(\widehat{\mu}_n - \widehat{\mu})\}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} e^{-V[(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})+(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})]} &\leq e^{\sup\{-V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda}),-V(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})\}} = \\ &= \sup\{e^{-V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})}, e^{-V(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})}\} = \sup\{D(\lambda_n,\lambda), D(\mu_n,\mu)\}. \end{aligned}$$

Logo, por (2.2), temos

$$D(\lambda_n+\mu_n, \lambda+\mu) \leq \sup\{D(\lambda_n,\lambda), D(\mu_n,\mu)\},$$

donde segue (I).

Para (II), denotemos $t_n := \widehat{\lambda}_n(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})+\widehat{\mu}(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda}) = \widehat{\lambda}_n.\widehat{\mu}_n-\widehat{\lambda}.\widehat{\mu}$, para $n\in\mathbb{N}$. Então

$$D(\lambda_n.\mu_n, \lambda.\mu) = e^{-V(\widehat{\lambda}_n.\widehat{\mu}_n-\widehat{\lambda}.\widehat{\mu})} = e^{-V(t_n)}. \tag{2.3}$$

Por 2.2.2(4), temos

$$\begin{aligned} V(t_n) &= V[\widehat{\lambda}_n(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})+\widehat{\mu}(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})] \\ &\geq \inf\{V[\widehat{\lambda}_n(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})], V[\widehat{\mu}(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})]\} \\ &= -\sup\{-V[\widehat{\lambda}_n(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})], -V[\widehat{\mu}(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})]\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$-V(t_n) \leq \sup\{-V[\widehat{\lambda}_n(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})], -V[\widehat{\mu}(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})]\},$$

de onde segue

$$e^{-V(t_n)} \leq \sup\{e^{-V[\widehat{\lambda}_n(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})]}, e^{-V[\widehat{\mu}(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})]}\}. \tag{2.4}$$

Pela Proposição 2.2.2(2) e Proposição 2.2.2(4) :

$$\begin{cases} V[\widehat{\mu}(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})] \geq V(\widehat{\mu})+V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda}) \\ V[\widehat{\lambda}_n(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})] \geq V(\widehat{\lambda}_n)+V(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu}) \geq \inf\{V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda}), V(\widehat{\lambda})\}+V(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu}) \end{cases} \ddagger$$

Em conseqüência,

$$\begin{cases} -V[\widehat{\mu}(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})] \leq -V(\widehat{\mu})-V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda}) \\ -V[\widehat{\lambda}_n(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})] \leq \sup\{-V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda}), -V(\widehat{\lambda})\}-V(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu}) \end{cases}$$

Portanto, de (2.4) segue que

‡escrevendo $V(\widehat{\lambda}_n) = V(\widehat{\lambda}_n+\widehat{\lambda}-\widehat{\lambda})$ e aplicando o item 4 da Proposição 2.2.2, temos $V(\widehat{\lambda}_n+\widehat{\lambda}-\widehat{\lambda}) \geq \inf\{V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda}), V(\widehat{\lambda})\}$.

$$
\begin{aligned}
D(\lambda_n.\mu_n, \lambda.\mu) &= e^{-V(t_n)} \\
&\leq \sup\{e^{\sup\{-V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda}),-V(\widehat{\lambda})\}-V(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})}, e^{-V(\widehat{\mu})-V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})}\} \\
&= \sup\left\{ \sup\{e^{-V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})-V(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})}, e^{-V(\widehat{\lambda})-V(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})}\}, \quad e^{-V(\widehat{\mu})-V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})}\right\} \\
&= \sup\{e^{-V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})}.e^{-V(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})}, e^{-V(\widehat{\lambda})}.e^{-V(\widehat{\mu}_n-\widehat{\mu})}, e^{-V(\widehat{\mu})}.e^{-V(\widehat{\lambda}_n-\widehat{\lambda})}\} \\
&\leq \sup\{D(\lambda_n,\lambda).D(\mu_n,\mu), D(\lambda,0).D(\mu_n,\mu), D(\mu,0).D(\lambda_n,\lambda)\},
\end{aligned}
$$

donde segue (II).

∎

Teorema 2.2.11. *$(\overline{\mathbb{K}}, \mathscr{T}_c)$ é completo.*

Prova:

Primeiramente notemos que, se $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $\overline{\mathbb{K}}$ e $\widehat{\lambda}_m$ é um representante qualquer de λ_m, $m \in \mathbb{N}$, então dizer que $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\overline{\mathbb{K}}$, significa que

$$D(\lambda_m, \lambda_n) = e^{-V(\widehat{\lambda}_m-\widehat{\lambda}_n)} \longrightarrow 0, \quad \text{se } m,n \longrightarrow +\infty$$

ou equivalentemente,

$$V(\widehat{\lambda}_m - \widehat{\lambda}_n) \longrightarrow +\infty, \quad \text{se } m,n \longrightarrow +\infty$$

o que podemos expressar como:

$$\forall \;\; p \in \mathbb{N}, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \text{tal que, se } m,n \geq N, \text{ então } V(\widehat{\lambda}_m - \widehat{\lambda}_n) \geq p. \tag{2.5}$$

Pela Definição 2.2.1, temos $V(\widehat{\lambda}_m - \widehat{\lambda}_n) = \sup S_{\widehat{\lambda}_m-\widehat{\lambda}_n}$, e então podemos reescrever (2.5) como segue

$$\forall \;\; p \in \mathbb{N}, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \text{tal que, se } m,n \geq N, \text{ então } p \in S_{\widehat{\lambda}_m-\widehat{\lambda}_n}, \tag{2.6}$$

e da definição de $S_{\widehat{\lambda}_m-\widehat{\lambda}_n}$ resulta que (2.6) é equivalente a

$$\forall \;\; p \in \mathbb{N}, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \text{tal que, se } m,n \geq N, \text{ então } |\widehat{\lambda}_m(\epsilon) - \widehat{\lambda}_n(\epsilon)| = o(\epsilon^p), \tag{2.7}$$

isto é,

$$\forall \quad p \in \mathbb{N}, \quad \exists \; N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que, se } m, n \geq N \text{ então } \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{|\widehat{\lambda}_m(\epsilon) - \widehat{\lambda}_n(\epsilon)|}{\epsilon^p} = 0. \tag{2.8}$$

É imediato verificar que (2.8) é equivalente a

$$\forall \quad p \in \mathbb{N}, \quad \exists \; N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que para todos } m, n \geq N \quad \text{tem-se}$$

$$\exists \quad \epsilon_{mn} \text{ de modo que, se } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{mn}, \text{ então } |\widehat{\lambda}_m(\epsilon) - \widehat{\lambda}_n(\epsilon)| \leq \epsilon^p. \tag{2.9}$$

De fato, (2.8)$\Longrightarrow$(2.9). Inversamente, fixado $p \in \mathbb{N}$ qualquer, consideremos o $N \in \mathbb{N}$ associado a $p+1$ por (2.9), então se $m, n \geq N$ existe $\epsilon_{mn} > 0$ tal que

$$0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{mn} \Longrightarrow |\widehat{\lambda_m}(\epsilon) - \widehat{\lambda_n}(\epsilon)| \leq \epsilon^{p+1}.$$

Portanto,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{|\widehat{\lambda}_m(\epsilon) - \widehat{\lambda}_n(\epsilon)|}{\epsilon^p} \leq \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon = 0.$$

Agora, mostremos que $(\overline{\mathbb{K}}, \mathscr{T}_c)$ é completo.

Para isto consideremos $(\nu_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $\overline{\mathbb{K}}$. Assim, se $\widehat{\nu_m}$ é um representante de ν_m, $m \in \mathbb{N}$, por (2.9) temos :

$$(*) \quad \forall \, p \in \mathbb{N}, \quad \exists \; N \in \mathbb{N} \text{ tal que para todos } m, n \geq N \text{ tem-se}$$
$$\exists \; \epsilon_{mn} \in I \text{ de modo que, se } \epsilon \in I_{\epsilon_{mn}}, \text{ então } |\widehat{\nu_m}(\epsilon) - \widehat{\nu_n}(\epsilon)| \leq \epsilon^p.$$

Vamos construir, a seguir, uma seqüência $(\hat{\omega}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ e uma seqüência $(\epsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de números reais tais que $\epsilon_m \downarrow 0$ e

$$|\hat{\omega}_{m+1}(\epsilon) - \hat{\omega}_m(\epsilon)| \leq \epsilon^m, \quad \forall \, \epsilon \in I_{\epsilon_m}. \tag{2.10}$$

Por $(*)$ existe $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$, seqüência de números naturais, tal que dados $m, n \geq N_p$, existe $\epsilon_{mn} \in I$ de modo que,

$$\text{se } \epsilon \in I_{\epsilon_{mn}}, \text{ então } |\widehat{\nu_m}(\epsilon) - \widehat{\nu_n}(\epsilon)| \leq \epsilon^p.$$

Sejam $m_0 = N_0$ e $m_k = \max\{N_{k-1}, N_k\}$ para $k \in \mathbb{N}^*$. Então, para $k \in \mathbb{N}^*$, dados $m_k, m_{k-1} \geq N_{k-1}$ existe $\epsilon_{m_k m_{k-1}} \in I$ tal que

$$|\widehat{\nu_{m_k}}(\epsilon) - \widehat{\nu_{m_{k-1}}}(\epsilon)| \leq \epsilon^{k-1}, \text{ para todo } \epsilon \in I_{\epsilon_{m_k m_{k-1}}}.$$

Para $k \in \mathbb{N}$ sejam $\hat{\omega}_k = \hat{\nu}_{m_k}$ e $\epsilon_k = \frac{1}{2^k}\min\{\epsilon_{m_j m_{j-1}} : 1 \leq j \leq k+1\}$. Então $\epsilon_k \downarrow 0$ e

$$|\hat{\omega}_{k+1}(\epsilon) - \hat{\omega}_k(\epsilon)| = |\widehat{\nu_{m_{k+1}}}(\epsilon) - \widehat{\nu_{m_k}}(\epsilon)| \leq \epsilon^k, \text{ para todo } \epsilon \in I_{\epsilon_k} \subset I_{\epsilon_{m_{k+1}m_k}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, o que prova (2.10).

Definimos a seqüência $(\widehat{\sigma}_m)_{m\geq 1}$ de elementos de $\mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ por $\widehat{\sigma}_1(\epsilon) := \widehat{\omega}_1(\epsilon)$ para todo $\epsilon \in I$ e, para $m > 1$,

$$\widehat{\sigma}_m(\epsilon) := \begin{cases} (\widehat{\omega}_m - \widehat{\omega}_{m-1})(\epsilon), & \text{se } \epsilon \in I_{\epsilon_m} \\ 0, & \text{se } \quad \epsilon_m \leq \epsilon < 1. \end{cases}$$

Como $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente é claro que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \widehat{\sigma}_j\right)(\epsilon) = \widehat{\omega}_m(\epsilon), \quad \forall\, \epsilon \in I_{\epsilon_m}, \qquad \forall \quad m \geq 1. \tag{2.11}$$

Notemos que para cada $\alpha \in I$, como $(\epsilon_n)_n$ é estritamente decrescente para 0, existe $\nu(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon_{\nu(\alpha)} < \alpha$ e portanto, $\widehat{\sigma}_m(\alpha) = 0$ sempre que $m > \nu(\alpha)$ donde

$$\left(\sum_{j=1}^{\nu(\alpha)} \widehat{\sigma}_j\right)(\alpha) = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \widehat{\sigma}_j\right)(\alpha).$$

Portanto podemos definir a função $\hat{\omega} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$\widehat{\omega}(\epsilon) := \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \widehat{\sigma}_j\right)(\epsilon). \tag{2.12}$$

De (2.11) resulta

$$\widehat{\omega}(\epsilon) = \widehat{\omega}_m(\epsilon) + \left(\sum_{j>m} \widehat{\sigma}_j\right)(\epsilon), \quad \forall\, \epsilon \in I_{\epsilon_m}, \quad \forall \quad m \geq 1,$$

e portanto

$$|(\widehat{\omega} - \widehat{\omega}_m)(\epsilon)| \leq \sum_{j>m} |\widehat{\sigma}_j(\epsilon)|, \quad \forall\, \epsilon \in I_{\epsilon_m}, \qquad \forall \quad m \geq 1. \tag{2.13}$$

De (2.10), segue que

$$|\widehat{\sigma}_j(\epsilon)| \leq \epsilon^{j-1}, \quad \forall\, \epsilon \in I = I_{\epsilon_j} \cup [\epsilon_j, 1[, \quad \forall\, j > 1,$$

o que implica

$$\sum_{j>m} |\widehat{\sigma}_j(\epsilon)| \leq \sum_{j\geq m+1} \epsilon^{j-1} = \epsilon^m \sum_{k=0}^{+\infty} \epsilon^k = \epsilon^m.\frac{1}{1-\epsilon}, \quad \forall\, \epsilon \in I, m > 1.$$

Então, por (2.13), obtemos

$$|(\widehat{\omega} - \widehat{\omega}_m)(\epsilon)| \leq \frac{\epsilon^m}{1-\epsilon}, \quad \forall\, \epsilon \in I_{\epsilon_m}, \quad \forall \quad m \geq 1,$$

isto é,

$$\frac{|\widehat{\omega}(\epsilon) - \widehat{\omega}_m(\epsilon)|}{\epsilon^{m-1}} \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}, \quad \forall \quad \epsilon \in I_{\epsilon_m}, \quad \forall \geq 1, \tag{2.14}$$

e como $\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \longrightarrow 0$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ obtemos $\widehat{\omega} - \widehat{\omega}_m \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ se $m > 1$ donde $\widehat{\omega} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$.

Seja $\omega := [\widehat{\omega}] \in \overline{\mathbb{K}}$.

De (2.14) resulta que $V_{\widehat{\omega}-\widehat{\omega}_m} \geq m - 1$ e então $D(\omega, \omega_m) = e^{-V(\widehat{\omega}-\widehat{\omega}_m)} \leq e.e^{-m} \longrightarrow 0$, o que mostra que $\omega_m \longrightarrow \omega$ em $(\overline{\mathbb{K}}, \mathscr{T}_c)$.

∎

Teorema 2.2.12. $(\overline{\mathbb{K}}, \mathscr{T}_c)$ *não é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial topológico.*

Prova:

Mostraremos que a multiplicação usual

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \overline{\mathbb{K}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{K}} \\ (k, \lambda) &\longmapsto k.\lambda, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{K}$ é munido da topologia habitual, não é contínua.

Para isto, sejam $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathbb{K}$ tal que $k_n \longrightarrow 0$, $k_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $\overline{\mathbb{K}}$ tal que $\lambda_n = \lambda \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Temos que $\big((k_n, \lambda_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a $(0, \lambda)$ em $\mathbb{K} \times \overline{\mathbb{K}}$, mas $\big(k_n.\lambda_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ não tende a $0.\lambda = 0$ pois ,pelo Corolário 2.2.8(2) e pelo Corolário 2.2.8(3), temos que $D(k_n.\lambda_n, 0) = D(\lambda, 0) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

∎

Teorema 2.2.13. $(\overline{\mathbb{K}}, \mathscr{T}_c)$ *não é* ***separável*** *.*

Prova:

De fato, basta exibir um subconjunto M não enumerável de $\overline{\mathbb{K}}$ tal que $D(\lambda, \mu) = 1$ sempre que $\lambda, \mu \in M$ e $\lambda \neq \mu$. Assim, a família $\mathscr{A} = \{A \text{ aberto} : diam(A) < 1\}$ é uma cobertura para $\overline{\mathbb{K}}$ (pois $B_{\frac{1}{2}}(\lambda) \in \mathscr{A}$, para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$) que satisfaz $M \cap A$ unitário ou vazio, para todo $A \in \mathscr{A}$. Portanto qualquer reunião enumerável de elementos de $\mathscr{A}$ não cobre M (pois M não é enumerável), e assim não cobre $\overline{\mathbb{K}}$. Logo $\overline{\mathbb{K}}$ não é separável.

Vamos, a seguir, construir o conjunto M.

Consideremos $\phi : r \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi_r \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ onde $\varphi_r(\epsilon) = r, \quad \forall \quad \epsilon \in I$

Se $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, então

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\varphi_r(\epsilon)|}{\epsilon^a} = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{|r|}{\epsilon^a} = 0 \Longleftrightarrow a < 0,$$

e assim, $V(\varphi_r) = 0$. Logo $D(\varphi_r, 0) = 1$, para $r \in \mathbb{R}^*$.

Seja $M := Im\phi = \{\varphi_r : r \in \mathbb{R}^*\}$. Então M é obviamente não enumerável e

$$D(\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}) = D(\varphi_{r_1} - \varphi_{r_2}, 0) = D(\varphi_{r_1 - r_2}, 0) = 1,$$

para $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^*$, com $r_1 \neq r_2$.

∎

Teorema 2.2.14. $(\overline{\mathbb{K}}, \mathscr{T}_c)$ *não é* ***localmente compacto****.*

Prova:

Basta provar que $0 \in \overline{\mathbb{K}}$ não admite uma vizinhança compacta V.

Suponhamos, por absurdo, que 0 tenha uma vizinhança compacta V. Consideremos o sistema fundamental $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vizinhanças de 0 definido por

$$W_k := \{\lambda \in \overline{\mathbb{K}} : V(\widehat{\lambda}) \geq k\} = \overline{B}_{e^{-k}}(0), k \in \mathbb{N}.$$

Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $W := W_k \subset V$ e como W é fechado e contido no compacto V, resulta que W é compacto. Todavia, mostraremos que W não é **sequencialmente compacto**.

A idéia é construir uma seqüência $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ de elementos de W tal que $D(\lambda_m, \lambda_n) = c > 0$, onde c é uma constante, sempre que $m \neq n$, pois então qualquer subseqüência de $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ não é de Cauchy e portanto, não é convergente.

Seja ϕ como na prova do Teorema 2.2.13. Então, sabemos que, $V(\varphi_m) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$, onde $\varphi_m = \phi(m)$. Definamos a função $\hat{\lambda}_m : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$, por

$$\widehat{\lambda}_m(\epsilon) := \epsilon^k.\varphi_m(\epsilon).$$

É claro que $\widehat{\lambda}_m \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$, $\lambda_m := [\hat{\lambda}_m] \in W$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ pois

$$D(\lambda_m, 0) = e^{-V(\widehat{\lambda}_m)} = e^{-k-V(\varphi_m)} = e^{-k}, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}^*,$$

e temos que

$$D(\lambda_m, \lambda_n) = D(\lambda_m - \lambda_n, 0) = D(\lambda_{m-n}, 0) = e^{-k} \text{ para } m, n \in \mathbb{N}^* \text{ com } m \neq n.$$

∎

Na próxima seção apresentamos uma ultramétrica sobre $\mathcal{G}(\Omega)$.

2.3 Uma ultramétrica para $\mathcal{G}(\Omega)$

Os resultados dessa seção podem ser encontrados em [11], [17] e [16].

Seja $(\Omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma seqüência exaustiva de abertos para Ω.

Dados $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ e $m, p \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} S_{m,p}(\widehat{f}) := \{a \in \mathbb{R} :\ & \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq p, \text{ tem -se} \\ & \|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m} = o(\epsilon^a) \text{ quado } \epsilon \longrightarrow 0+\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Proposição 2.3.1. *$S_{m,p}(\widehat{f})$ tem a seguinte propriedade:*

$$a \in S_{m,p}(\widehat{f}) \quad e \quad b < a \Longrightarrow b \in S_{m,p}(\widehat{f}).$$

Prova:

Para $\epsilon \in I$ temos

$$a > b \Longrightarrow \epsilon^b > \epsilon^a \Longrightarrow \frac{1}{\epsilon^b} < \frac{1}{\epsilon^a}.$$

Logo, $\forall\ \ \alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq p$, se $a \in S_{m,p}$ podemos escrever

$$0 \leq \frac{\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^b} \leq \frac{\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^a} \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad \epsilon \to 0^+,$$

donde $b \in S_{m,p}(\widehat{f})$.

∎

Definição 2.3.2. *Sejam $m, p \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$v_{m,p}(\hat{f}) := \sup\ S_{m,p}(\widehat{f}) \in \mathbb{R} \cup +\infty. \tag{2.16}$$

Proposição 2.3.3. *Se $\widehat{\lambda} \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$, então $S_{m,p}(\widehat{\lambda}_*) = S_{\widehat{\lambda}}$, para todos $m, p \in \mathbb{N}$, onde $\widehat{\lambda}_*$ é como na prova da Proposição 1.8.1.*

Prova:

$$\begin{aligned} S_{m,p}(\widehat{\lambda}_*) &:= \{a \in \mathbb{R} :\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq p, \text{ tem-se } \|\partial^\alpha \widehat{\lambda}_*(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m} = o(\epsilon^a) \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0+\} \\ &= \{a \in \mathbb{R} :\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ tem-se } \|\partial^\alpha \widehat{\lambda}_*(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m} = o(\epsilon^a) \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0+\} \\ &= \{a \in \mathbb{R} : |\widehat{\lambda}(\epsilon)| = o(\epsilon^a) \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0+\} \\ &= S_{\widehat{\lambda}}. \end{aligned}$$

∎

No que segue, denotaremos $S_{m,p}(\widehat{\lambda}_*)$ por $S_{m,p}(\widehat{\lambda})$ e $v_{m,p}(\widehat{\lambda}_*)$ por $v_{m,p}(\widehat{\lambda})$.

Lema 2.3.4. *Se $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ então são equivalentes as condições seguintes:*

1. $\widehat{f} \in \mathcal{N}[\Omega]$;
2. $S_{m,p}(\widehat{f}) = \mathbb{R}, \quad \forall\ m, p \in \mathbb{N}$;
3. $v_{m,p}(\widehat{f}) = +\infty, \quad \forall\ m, p \in \mathbb{N}$.

Prova:

(1) $\Longleftrightarrow$(2):

$$\begin{aligned} \widehat{f} \in \mathcal{N}[\Omega] &\Longleftrightarrow \|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_K = o(\epsilon^\sigma), \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0+, \quad \forall\ K \subset\subset \Omega, \quad \forall\ \sigma \in \mathbb{R}, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n \\ &\Longleftrightarrow \|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m} = o(\epsilon^\sigma), \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0+, \quad \forall\ m, p \in \mathbb{N}, \quad |\alpha| \leq p, \quad \forall\ \sigma \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow S_{m,p} = \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}, \qquad \forall\ \ p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(3) $\Longleftrightarrow$ (2):

$$v_{m,p}(\widehat{f}) = +\infty \Longleftrightarrow \sup\ S_{m,p}(\widehat{f}) = +\infty \Longleftrightarrow S_{m,p}(\widehat{f}) = \mathbb{R}.$$

∎

Lema 2.3.5. *Se $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ e $\widehat{f} - \widehat{g} \in \mathcal{N}[\Omega]$ então quaisquer que sejam $m, p \in \mathbb{N}$, temos $v_{m,p}(\widehat{f}) = v_{m,p}(\widehat{g})$.*

Prova:

Fixados $m, p \in \mathbb{N}$ arbitrários, será suficiente verificar que $S_{m,p}(\widehat{f}) = S_{m,p}(\widehat{g})$.

Provaremos, a seguir que, $S_{m,p}(\widehat{f}) \subset S_{m,p}(\widehat{g})$.

Seja $a \in S_{m,p}(\widehat{f})$. Então $\forall \quad \alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq p$ tem-se

$$\epsilon^{-a} \|\partial^{\alpha} \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m} \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad \epsilon \longrightarrow 0+. \tag{2.17}$$

Como $\widehat{g} = \widehat{f} + (\widehat{g} - \widehat{f})$ resulta

$$\partial^{\alpha} \widehat{g}(\epsilon, \cdot) = \partial^{\alpha} \widehat{f}(\epsilon, \cdot) + \partial^{\alpha} (\widehat{g} - \widehat{f})(\epsilon, \cdot)$$

donde

$$\epsilon^{-a} \|\partial^{\alpha} \widehat{g}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m} \leq \epsilon^{-a} \|\partial^{\alpha} \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m} + \epsilon^{-a} \|\partial^{\alpha} (\widehat{g} - \widehat{f})(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m}. \tag{2.18}$$

Por hipótese, $\widehat{g} - \widehat{f} \in \mathcal{N}[\Omega]$ e assim, pelo Lema 2.3.4, $a \in S_{m,p}(\widehat{g} - \widehat{f})$. Logo, por (2.17) e (2.18), temos

$$\epsilon^{-a} \|\partial^{\alpha} \widehat{g}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0+,$$

e portanto, $a \in S_{m,p}(\widehat{g})$.

De modo análogo, mostra-se que $S_{m,p}(\widehat{g}) \subset S_{m,p}(\widehat{f})$.

∎

O Lema 2.3.5 dá sentido à seguinte definição:

Definição 2.3.6. *Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega)$. Para cada $m, p \in \mathbb{N}$ definimos*

$$V_{m,p}(f) := v_{m,p}(\widehat{f})$$

onde $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ é um representante qualquer de f.

Proposição 2.3.7. *Para cada $m, p \in \mathbb{N}$ a função*

$$V_{m,p} : f \in \mathcal{G}(\Omega) \longmapsto v_{m,p}(\widehat{f}) \in \mathbb{R} \cup +\infty,$$

onde $\hat{f}$ é um representante de f, tem as seguintes propriedades:

1. *Se $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$ e $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, então $V_{m,p}(\lambda.f) \geq V_{m,p}(\lambda) + V_{m,p}(f)$;*

2. *Se $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{K}^*$ e $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, então usando a notação da Proposição 2.2.2(3), tem-se*
$$V_{m,p}(k.[\widetilde{a}].f) = a + V_{m,p}(f);$$

3. *Se $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$, então $V_{m,p}(fg) \geq V_{m,p}(f) + V_{m,p}(g)$;*

4. *Se $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$, então $V_{m,p}(f+g) \geq \inf\{V_{m,p}(f), V_{m,p}(g)\}$;*

5. *Para $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ são equivalentes as seguintes condições :*

   (a) *$f \equiv 0$;*

   (b) *existe um representante $\widehat{f}$ de f tal que $v_{m,p}(\widehat{f}) = +\infty, \quad \forall \quad m, p \in \mathbb{N}$;*

   (c) *$v_{m,p}(\widehat{f}) = +\infty, \quad \forall \quad m, p \in \mathbb{N}$ e todo representante $\widehat{f}$ de f.*

6. *Se $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então $V_{m,p}(\partial^\alpha f) \geq V_{m,p+|\alpha|}(f), \quad \forall \quad m, p \in \mathbb{N}$.*

Prova:

(1): Sejam $\hat{\lambda}$ e $\hat{f}$ representantes para λ e f, respectivamente. Observemos que, se $a \in S_{m,p}(\widehat{\lambda})$ e $b \in S_{m,p}(\widehat{f})$, então

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon)|}{\epsilon^a} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\epsilon \longrightarrow 0+} \frac{\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^b} = 0, \quad \forall\ |\alpha| \leq p.$$

Como
$$\partial^\alpha [\widehat{\lambda}(\epsilon).\widehat{f}(\epsilon, x)] = \widehat{\lambda}(\epsilon).\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, x),$$
temos que
$$\|\partial^\alpha [\widehat{\lambda}(\epsilon).\widehat{f}(\epsilon, \cdot)]\|_{\Omega_m} = |\widehat{\lambda}(\epsilon)|.\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m},$$
e assim
$$\frac{\|\partial^\alpha [\widehat{\lambda}(\epsilon).\widehat{f}(\epsilon, \cdot)]\|_{\Omega_m}}{\epsilon^{a+b}} = \frac{|\widehat{\lambda}(\epsilon)|}{\epsilon^a}.\frac{\|\partial^\alpha \widehat{f}(\epsilon, \cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^b} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0.$$

Logo $a + b \in S_{m,p}(\widehat{\lambda}\widehat{f})$.

Portanto
$$v_{m,p}(\widehat{\lambda}\widehat{f}) \geq a + b \geq v_{m,p}(\widehat{\lambda}) + v_{m,p}(\widehat{f}),$$
o que implica
$$V_{m,p}(\lambda f) \geq V_{m,p}(\lambda) + V_{m,p}(f).$$

(2): Seja $\widehat{f}$ um representante de f.

Notemos que $\frac{k.\epsilon^a.\widehat{f}(\epsilon,\cdot)}{\epsilon^b} = k.\frac{\widehat{f}(\epsilon,\cdot)}{\epsilon^{b-a}}$. Assim,

$$b \in S_{m,p}(k[\widetilde{a}]\widehat{f}) \Longleftrightarrow b - a \in S_{m,p}(\widehat{f}) \Longleftrightarrow b \in a + S_{m,p}(\widehat{f}).$$

Portanto

$$S_{m,p}(k.[\widetilde{a}]\widehat{f}) = a + S_{m,p}(\widehat{f}),$$

e assim,

$$V_{m,p}(k.[\widetilde{a}]f) = a + V_{m,p}(f).$$

(3): Se $a < V_{m,p}(f)$ e $b < V_{m,p}(g)$, então

$$\begin{cases} \frac{\|\partial^\alpha f(\epsilon,\cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^a} \longrightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0, & \forall\ |\alpha| \leq p \\ \frac{\|\partial^\alpha g(\epsilon,\cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^b} \longrightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0, & \forall\ |\alpha| \leq p, \end{cases}$$

e assim, como

$$\frac{\partial^\alpha(fg)}{\epsilon^{a+b}} \overset{Leibniz}{=} \sum_{\alpha' \leq \alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \frac{\partial^{\alpha-\alpha'} f}{\epsilon^a} . \frac{\partial^{\alpha'} g}{\epsilon^b},$$

$|\alpha - \alpha'| \leq p$ e $|\alpha'| \leq p$ temos que

$$\frac{\|\partial^\alpha(\hat{f}\hat{g})(\epsilon,\cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^{a+b}} \longrightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0+.$$

Logo $a + b \in S_{m,p}(\hat{f}\hat{g})$ e portanto $V_{m,p}(fg) \geq a + b$. Como $a < V_{m,p}(f)$ e $b < V_{m,p}(g)$ são arbitrários, temos que $V_{m,p}(fg) \geq V_{m,p}(f) + V_{m,p}(g)$.

(4): Seja $a < \inf\{V_{m,p}(f), V_{m,p}(g)\}$.

Então

$$\begin{cases} \frac{\|\partial^\alpha \hat{f}(\epsilon,\cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^a} \longrightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0+, & \forall\ |\alpha| \leq p \\ \frac{\|\partial^\alpha \hat{g}(\epsilon,\cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^a} \longrightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0+, & \forall\ |\alpha| \leq p. \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{\|\partial^\alpha(f+g)(\epsilon,\cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^a} \longrightarrow 0, \quad \forall \quad |\alpha| \leq p,$$

e assim $a \in S_{m,p}(\hat{f} + \hat{g})$, donde se conclui que $a \leq V_{m,p}(f+g)\}$.

Dada a arbitrariedade de $a < \inf\{V_{m,p}(f), V_{m,p}(g)\}$ temos que

$$V_{m,p}(f+g) \geq \inf\{V_{m,p}(f), V_{m,p}(g)\}.$$

(5a)$\Longleftrightarrow$ (5b): segue de (1) $\Longleftrightarrow$(3) no Lema 2.3.4.

(5b)$\Longleftrightarrow$ (5c): segue do Lema 2.3.5.

(6): Se $a < V_{m,p+|\alpha|}(f)$, então $\frac{\|\partial^\beta \hat{f}(\epsilon,\cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^a} \longrightarrow 0+$, quando $\epsilon \longrightarrow 0+$, $\forall\ |\beta| \leq p + |\alpha|$.

Portanto,

$$\frac{\|\partial^{\beta'}(\partial^{\alpha}\widehat{f})(\epsilon,\cdot)\|_{\Omega_m}}{\epsilon^{a}} \longrightarrow 0+, \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0+, \quad \forall \quad |\beta'| \leq p,$$

pois $|\beta' + \alpha| \leq p + |\alpha|$.

Assim, $V_{m,p}(\partial^{\alpha} f) \geq a, \quad \forall\ a < V_{m,p+|\alpha|}(f)$.

Logo, $V_{m,p+|\alpha|}(f) \leq V_{m,p}(\partial^{\alpha} f)$.

∎

Definição 2.3.8. *Sejam $m, p \in \mathbb{N}$. Definimos a função $d_{m,p} : \mathcal{G}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}_+$ por*

$$d_{m,p}(f,g) := exp[-V_{m,p}(f-g)],$$

sendo $d_{m,p}(f,g) = 0 \Longleftrightarrow V_{m,p}(f-g) = \infty$.

Proposição 2.3.9. *A função $d_{m,p}$ da Definição 2.3.8 é uma pseudo-ultramétrica sobre $\mathcal{G}(\Omega)$.*

Prova:

Para todo $f, g, h \in \mathcal{G}(\Omega)$ temos:

(1): $d_{m,p}(f,g) := exp[-V_{m,p}(f-g)] \geq 0$;

(2): $d_{m,p}(f,g) = d_{m,p}(g,f)$ pois por (2) da Proposição 2.3.7, com $a = 0$ e $k = -1$ temos

$$V_{m,p}\Big((-1).[\widetilde{0}].f\Big) = V_{m,p}(-f) = 0 + V_{m,p}(f) = V_{m,p}(f);$$

(3): $f = g \Longrightarrow d_{m,p}(f,g) = 0$:

Notemos que, se $f = g$ então $f - g \equiv 0 \in \mathcal{N}[\Omega]$ e $V_{m,p}(f-g) = V_{m,p}(0) = +\infty$ (Proposição 2.3.7(5)) e $d_{m,p}(f,g) = exp[-V_{m,p}(0)] = exp(-\infty) = 0$;

(4): $d_{m,p}(f,h) \leq \max\{d_{m,p}(f,g), d_{m,p}(h,g)\}$:

Escrevendo $f - g = (f-h) + (h-g)$ resulta, em virtude de (4) da Proposição 2.3.7, que

$$V_{m,p}(f-g) \geq \inf\{V_{m,p}(f-h), V_{m,p}(h-g)\}$$

e segue que

$$-V_{m,p}(f-g) \leq \sup\{-V_{m,p}(f-h), -V_{m,p}(h-g)\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d_{m,p}(f,g) &= exp[-V_{m,p}(f-g)] \\ &\leq exp[\sup\{-V_{m,p}(f-h), -V_{m,p}(h-g)\}] \end{aligned}$$

$$\leq \sup\{exp[-V_{m,p}(f-g)], exp[-V_{m,p}(h-g)]\}$$
$$\leq \sup\{d_{m,p}(f,g), d_{m,p}(h,g)\} = \max\{d_{m,p}(f,g), d_{m,p}(h,g)\}$$

∎

Segue da Proposição 2.3.7(5) a seguinte observação:

Observação 2.3.10. *Se $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $f \neq g$, então*

$$d_{m,p}(f,g) \neq 0$$

para algum $(m,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $d_{m,p}$ como na Definição 2.3.8.

*A família $(d_{m,p})_{m,p \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ é dita **separante sobre** $\mathcal{G}(\Omega)$, por apresentar essa propriedade.*

Definição 2.3.11. *A estrutura uniforme métrica sobre $\mathcal{G}(\Omega)$ definida pela família enumerável $(d_{m,p})_{m,p \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ($d_{m,p}$ como na Definição 2.3.8) é chamada **estrutura uniforme cortante** de $\mathcal{G}(\Omega)$ e será denotada por $\mathcal{U}_\Omega$.*

Definição 2.3.12. *A topologia associada a $\mathcal{U}_\Omega$ é chamada **topologia cortante sobre** $\mathcal{G}(\Omega)$ e a denotaremos por $\mathscr{T}_\Omega$.*

Os próximos resultados tem como objetivo mostar que é possível construir uma ultramétrica sobre $\mathcal{G}(\Omega)$ que determina uma topologia equivalente a $\mathscr{T}_\Omega$.

Procederemos da seguinte maneira: primeiro mostraremos que existe um métrica D que determina um topologia $\mathscr{T}_\Omega^{'}$ equivalente a $\mathscr{T}_\Omega$, e em seguida, daremos uma ultramétrica D^* que determina uma topologia $\mathscr{T}_\Omega^*$ equivalente a $\mathscr{T}_\Omega^{'}$.

Lema 2.3.13. *Sejam $X \neq \emptyset$ um conjunto e d uma pseudo-ultramétrica sobre X, então:*

1. *kd é uma pseudo-ultramétrica sobre X, para todo $k \in \mathbb{R}_+^*$;*
2. *$d^{'} = \frac{d}{1+d}$ é uma pseudo-ultramétrica sobre X.*

Prova:

(1): Mostraremos apenas que kd satisfaz a desigualdade ultramétrica (pois os demais axiomas são óbvios).

Seja $k \in \mathbb{R}_*^+$. Como $x \longmapsto kx$ é estritamente crescente, temos

$$kd(a,b) \leq k \max\{d(a,c), d(c,b)\} = \max\{kd(a,c), kd(c,b)\}, \ \forall\ a,b,c \in X.$$

(2): Mostraremos que d' satisfaz a desigualdade ultramétrica, uma vez que os demais axiomas são de fácil verificação.

Se $a,b,c \in X$, então, por hipótese, temos $d(a,b) \leq \max\{d(a,c), d(c,b)\}$. Suponhamos, sem perda da generalidade, que $d(a,c) \geq d(c,b)$. Então $d(a,b) \leq d(a,c)$ e, como a função $f : x \in]-1, +\infty[\longrightarrow \frac{x}{1+x} \in \mathbb{R}$ é estritamente crescente, temos que

$$d'(a,b) = \frac{d(a,b)}{1+d(a,b)} \leq \frac{d(a,c)}{1+d(a,c)} = d'(a,c).$$

Logo, infere-se que $d'(a,b) \leq \max\{d'(a,c), d'(c,b)\}$.

∎

Introduziremos, agora, a seguinte notação que será usada na prova do próximo lema: se d é uma pseudo-métrica qualquer sobre $\mathcal{G}(\Omega)$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$, então

$$B_r(d) := \{f \in \mathcal{G}(\Omega) : d(f,0) < r\}.$$

$B_r(d)$ é a bola aberta de centro em 0 e raio r.

Lema 2.3.14. *Seja $d_m := d_{m,m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, onde $d_{m,m}$ é como na Definição 2.3.8 para $p = m$. A família $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ determina a topologia cortante $\mathscr{T}_\Omega$ sobre $\mathcal{G}(\Omega)$.*

Prova:

Denotemos por $\mathscr{T}_\Omega'$ a topologia determinada por $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Como $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma subfamília de $(d_{m,p})_{m,p\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, temos que $\mathscr{T}_\Omega$ é mais fina que $\mathscr{T}_\Omega'$, isto é, $\mathscr{T}_\Omega' \subset \mathscr{T}_\Omega$. Uma vez que cada uma das topologias admite um sistema fundamental de vizinhanças em torno de 0, formada por intersecções finitas de bolas, é suficiente mostrar que

$$B_r(d_\nu) \subset B_r(d_{m,p}) \quad \forall (m,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \text{ onde } \nu := \max\{m,p\}. \tag{2.19}$$

De fato, observemos que dada $h \in \mathcal{G}(\Omega)$ arbitrária, se $\nu \geq m$ e $\nu \geq p$, então

$$S_{\nu,\nu}(\hat{h}) \subset S_{m,p}(\hat{h}),$$

onde $\hat{h}$ é um representante qualquer de h e $S_{m,p}$ é como em (2.15). Logo, temos

$$V_{m,p}(h) \geq V_{\nu,\nu}(h),$$

e segue que $d_{m,p}(h,0) \leq d_\nu(h,0)$ o que implica (2.19).

É trivial notar que para toda $\mathscr{T}_\Omega$-vizinhança V de 0, existe uma $\mathscr{T}'_\Omega$-vizinhança W de 0 tal que $W \subset V$, isto é, $\mathscr{T}_\Omega \subset \mathscr{T}'_\Omega$, o que completa a prova.

∎

No que segue, $S_m := S_{m,m}$ e $V_m := V_{m,m}$, onde $S_{m,m}$ e $V_{m,m}$ são como em (2.15) e Definição 2.3.6, respectivamente. Sempre que nos referirmos a d_m será como no Lema 2.3.14.

Corolário 2.3.15. *Se $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, então $d_m(f,0) \leq d_{m+1}(f,0)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Prova:

Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ tal que $\hat{f}$ seja um de seus representantes. Observemos que, se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ é tal que $|\alpha| \leq m$, então $|\alpha| < m+1$. Assim, se $a \in S_{m+1}(\hat{f})$, então $a \in S_m(\hat{f})$. Logo, $S_{m+1} \subset S_m$ e $V_{m+1}(f) \leq V_m(f)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, o que implica

$$d_m(f,0) \leq d_{m+1}(f,0).$$

∎

Lema 2.3.16. *Seja $D_m := \frac{d_m}{1+d_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Então $\mathscr{T}_\Omega$ é determinada pela métrica*

$$D := \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{D_m}{2^m}.$$

Prova:

Notemos, primeiramente, que $0 \leq D_m(f,g) \leq 1$ para todos $f,g \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $m \in \mathbb{N}$, e que

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^m} = 2.$$

Portanto $\sum\limits_{m \in \mathbb{N}} \frac{D_m(f,g)}{2^m}$ é convergente para todos $f,g \in \mathcal{G}(\Omega)$ e assim, D está bem determinada e $D \geq 0$.

Sejam $f,g,h \in \mathcal{G}(\Omega)$. Provemos que D é uma métrica:

(1): $D(f,g) = 0$ se, e somente se, $f = g$:

Uma vez que $D(f,g) = D(f-g,0)$, é suficiente mostrar que

$$D(f,0) = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$$

Com efeito, se $f = 0$, então $d_m(f, 0) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ (Proposição 2.3.7(5)), o que implica $D_m(f, 0) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, $D(f, 0) = 0$.

Reciprocamente, se $D(f,0) = \sum\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{D_m(f,0)}{2^m} = 0$, então $D_m(f, 0) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ de onde segue $d_m(f, 0) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é separante, concluímos que $f = 0$;

(2): $D(f, g) = D(g, f)$:

Segue de (2) na prova Proposição 2.3.9;

(3): $D(f, g) \leq D(f, h) + D(h, g)$:

Por ser d_m uma pseudo-ultramétrica sobre $\mathcal{G}(\Omega)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, segue trivialmente que,

$$d_m(f,g) \leq d_m(f,h) + d_m(h,g), \quad \forall\, f, g, h \in \mathcal{G}(\Omega).$$

Assim, usando que a função $x \geq -1 \longmapsto \frac{x}{x+1}$ é estritamente crescente, temos

$$\begin{aligned} D_m(f,g) &= \tfrac{d_m(f,g)}{1+d_m(f,g)} \\ &\leq \tfrac{d_m(f,h)+d_m(h,g)}{1+d_m(f,h)+d_m(h,g)} \\ &\leq \tfrac{d_m(f,h)}{1+d_m(f,h)} + \tfrac{d_m(h,g)}{1+d_m(h,g)} \\ &= D_m(f,h) + D_m(h,g), \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} D(f,g) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \tfrac{D_m(f,g)}{2^m} \\ &\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \tfrac{D_m(f,h)+D_m(h,g)}{2^m} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \tfrac{D_m(f,h)}{2^m} + \sum_{m\in\mathbb{N}} \tfrac{D_m(h,g)}{2^m} \\ &= D(f,h) + D(h,g), \end{aligned}$$

o que completa a prova de que D é uma métrica.

Finalmente, provemos que D determina $\mathscr{T}_\Omega$.

Denotemos por $\mathscr{T}_\Omega'$ a topologia determinada por D e mostremos que $\mathscr{T}_\Omega = \mathscr{T}_\Omega'$.

Fixada a $\mathscr{T}_\Omega'$-vizinhança de 0

$$U := \left\{ f \in \mathcal{G}(\Omega) : D(f,0) < \frac{1}{2^k} \right\} = B_{\frac{1}{2^k}}(D),$$

mostraremos que a $\mathscr{T}_\Omega$-vizinhança de 0

$$V := \left\{ f \in \mathcal{G}(\Omega) : d_{k+1}(f,0) < \frac{1}{2^{k+2}} \right\} = B_{\frac{1}{2^{k+2}}}(d_{k+1})$$

está contida em U.

Pelo Corolário 2.3.15, se $f \in V$, então

$$d_0(f,0) \leq d_1(f,0) \leq \ldots \leq d_k(f,0) \leq d_{k+1}(f,0) < \frac{1}{2^{k+2}}$$

e segue que

$$\sum_{\nu=0}^{k+1} \frac{1}{2^\nu} \frac{d_\nu(f,0)}{1+d_\nu(f,0)} < \frac{1}{2^{k+2}} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{2.20}$$

Por outro lado, como $\frac{d_\nu(f,0)}{1+d_\nu(f,0)} < 1, \quad \forall\ \nu \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\sum_{\nu \geq k+2} \frac{1}{2^\nu} \frac{d_\nu(f,0)}{1+d_\nu(f,0)} \leq \sum_{\nu \geq k+2} \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{2^{k+1}},$$

que juntamente com (2.20) implica

$$D(f,0) = \sum_{\nu=0}^{k+1} \frac{1}{2^\nu} \frac{d_\nu(f,0)}{1+d_\nu(f,0)} + \sum_{\nu \geq k+2} \frac{1}{2^\nu} \frac{d_\nu(f,0)}{1+d_\nu(f,0)} < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k},$$

donde segue que $f \in U$. Logo, $V \subset U$ e $\mathscr{T}_\Omega \geq \mathscr{T}'_\Omega$.

Inversamente, consideremos a $\mathscr{T}_\Omega$-vizinhança de 0

$$W := \left\{ f \in \mathcal{G}(\Omega) : d_m(f,0) < \frac{1}{2^k} \right\} = B_{\frac{1}{2^k}}(d_m)$$

e mostremos que a $\mathscr{T}'_\Omega$-vizinhança de 0,

$$Z := \left\{ f \in \mathcal{G}(\Omega) : D(f,0) < \frac{1}{2^{m+k+1}} \right\},$$

está contida em W.

Se $f \in Z$, então

$$\frac{1}{2^m} . \frac{d_m(f,0)}{1+d_m(f,0)} \leq D(f,0) < \frac{1}{2^{m+k+1}}$$

e segue que

$$\frac{d_m(f,0)}{1+d_m(f,0)} \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Portanto $d_m(f,0) < \frac{1}{2^{k+1}-1} \leq \frac{1}{2^k}$, e assim, $f \in W$.

Logo $Z \subset W$ e $\mathscr{T}'_\Omega \geq \mathscr{T}_\Omega$.

∎

Lema 2.3.17. *Se $(\delta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de pseudo-ultramétricas sobre um conjunto X tal que $\sup_{m\in\mathbb{N}} \delta_m(x,y) < \infty$, para todo $x, y \in X$, então $\delta := \sup_{m\in\mathbb{N}} \delta_m$ é uma pseudo-ultramétrica sobre X. Além disso, se $(\delta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é separante, então δ é uma ultramétrica sobre X.*

Prova:

Verificaremos apenas que δ satisfaz a desigualdade ultramétrica, pois os demais axiomas são evidentes.

Fixados $a, b, c \in X$ arbitrários , como

$$\delta_\nu(a,c) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \delta_m(a,c) \quad \text{e} \quad \delta_\nu(c,b) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \delta_m(c,b) \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$

então

$$\max\{\delta_\nu(a,c), \delta_\nu(c,b)\} \leq \max\{\sup_{m\in\mathbb{N}} \delta_m(a,c), \sup_{m\in\mathbb{N}} \delta_m(c,b)\},$$

de onde segue

$$\sup_{\nu\in\mathbb{N}} \max\{\delta_\nu(a,c), \delta_\nu(c,b)\} \leq \max\{\sup_{m\in\mathbb{N}} \delta_m(a,c), \sup_{m\in\mathbb{N}} \delta_m(c,b)\}. \tag{2.21}$$

Como

$$\delta_\nu(a,b) \leq \max\{\delta_\nu(a,c), \delta_\nu(c,b)\} \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

de (2.21) resulta

$$\begin{aligned}
\delta(a,b) &= \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \delta_\nu(a,b) \\
&\leq \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \max\{\delta_\nu(a,c), \delta_\nu(c,b)\} \\
&\leq \max\{\sup_{m\in\mathbb{N}} \delta_m(a,c), \sup_{m\in\mathbb{N}} \delta_m(c,b) \\
&= \max\{\delta(a,c), \delta(c,b)\},
\end{aligned}$$

o que prova que δ é uma pseudo-ultramétrica.

Se assumirmos que $(\delta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é separante, então dados $x, y \in X$, com $x \neq y$ arbitrários, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_\nu(x,y) > 0$, donde $\delta(x,y) \geq \delta_\nu(x,y) > 0$, o que prova que, nestas condições, δ é uma ultramétrica.

∎

Teorema 2.3.18. *Dados $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$, seja $D^*(f,g) := \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{D_m(f,g)}{2^m}$ onde D_m é como no Lema 2.3.16. Então D^* é uma ultramétrica sobre $\mathcal{G}(\Omega)$ que determina $\mathscr{T}_\Omega$.*

Prova:

Para mostrarmos que D^* é uma ultramétrica sobre $\mathcal{G}(\Omega)$, notemos que, sendo d_m uma pseudo-ultramétrica, temos, pelo Lema 2.3.13, que $\frac{D_m}{2^m} = \frac{1}{2^m}\frac{d_m}{1+d_m}$ é uma pseudo-ultramétrica, para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disso, como $D_m(f,g) \leq 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$, e $f,g \in \mathcal{G}(\Omega)$, temos que $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{D_m(f,g)}{2^m} \leq 1$, para todo $f,g \in \mathcal{G}(\Omega)$. Assim, pelo Lema 2.3.17 temos que D^* é uma ultramétrica, pois sendo $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ separante, também o é, $(\frac{D_m}{2^m})_{m\in\mathbb{N}}$.

Em virtude do Lema 2.3.16, para completarmos a prova desse teorema será suficiente mostrarmos que D e D^* são topologicamente equivalentes, isto é, denotando por $\mathscr{T}_\Omega^*$ a topologia determinada por D^*, valem as seguintes condições:

1. $\forall\, r > 0,\ \exists\, s > 0 : B_s(D^*) \subset B_r(D)$;
2. $\forall\, r > 0,\ \exists\, s > 0 : B_s(D) \subset B_r(D^*)$.

Vejamos

(1): Fixado $r > 0$ seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{k^2+k+1}{2^k} < r$$

e definamos $s := \frac{1}{2^k}$. Então,

$$D^*(f,0) < s \iff \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{D_m(f,0)}{2^m} < s = \frac{1}{2^k},$$

e como

$$D_j(f,0) = \frac{d_j(f,0)}{1+d_j(f,0)} \leq 1, \quad \forall\, j \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$\begin{aligned} D(f,0) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{D_j(f,0)}{2^j} + \sum_{j\geq k+1} \frac{D_j(f,0)}{2^j} \\ &\leq \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^k} + \sum_{j\geq k+1} \frac{D_j(f,0)}{2^j} \\ &\leq \frac{k^2+k}{2^{k+1}} + \sum_{j\geq k+1} \frac{1}{2^j} \\ &\leq \frac{k^2+k}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{k^2+k+1}{2^k} < r. \end{aligned}$$

(2): É direta pois sendo $D^* \leq D$ basta tomar $s = r$.

∎

2.4 $\overline{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{G}(\Omega)$ são fractais

Mostraremos a seguir que $\overline{\mathbb{K}}$ é um fractal [ver [11]]. Procederemos usando as notações e definições dadas em [4]. Sugerimos ao leitor não familiarizado com a Dimensão de Hausdorff, que leia antes o apêndice A.

Definição 2.4.1. *Segundo Mandelbrot, um fractal é um espaço métrico M onde a* ***Dimensão de Hausdorff*** *$(dim(M))$ é estritamente maior que* ***a baixa dimensão indutiva*** *$(ind(M))$.*

Definição 2.4.2. *Um espaço métrico M é chamado* ***zero-dimensional*** *se, e somente se, sua base de abertos for formada por conjuntos fechabertos. Neste caso, a* ***baixa dimensão indutiva de*** *M é nula, isto é, $ind(M) = 0$.*

Segue diretamente da Proposição 2.1.7 que um espaço ultramétrico é zero-dimensional.

Para provarmos que $\overline{\mathbb{K}}$ é um fractal, precisamos mostrar que $dim(\overline{\mathbb{K}}) > 0$, e o faremos utilizando o Lema A.0.28.

Teorema 2.4.3. *$\overline{\mathbb{K}}$ é um fractal segundo a definição de Mandelbrot.*

Prova:

Segue do Teorema 2.2.7 que $\overline{\mathbb{K}}$ é um espaço ultramétrico, e portanto, $ind(\overline{\mathbb{K}}) = 0$. Mostremos que $\overline{\mathbb{K}}$ satisfaz as hipóteses do Lema A.0.28. Com efeito, da Proposição 2.1.9 segue que $S_1(0)$ é um boreliano de $\overline{\mathbb{K}}$. Sabemos que $\mathbb{K}^*$ é um subconjunto não-enumerável de $S_1(0)$ e que $||(j \circ i_{\mathbb{K}})(a-b)|| = 1 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{K}^*, a \neq b$ (Corolário 2.2.8(5)).

Portanto, $dim(\overline{\mathbb{K}}) = +\infty > ind(\overline{\mathbb{K}}) = 0$.

∎

A seguir, mostraremos que $\mathcal{G}(\Omega)$ é um fractal [ver [18]].

Lema 2.4.4. *$\mathcal{G}(\Omega)$, segundo a Definição 2.4.2, é zero-dimensional.*

Prova:

Segue diretamente do Teorema 2.3.18.

∎

Teorema 2.4.5. *$\mathcal{G}(\Omega)$ é um fractal segundo a definição de Mandelbrot.*

Prova:

Como $\overline{\mathbb{K}}$ é um fechado (portanto, um boreliano) de $\mathcal{G}(\Omega)$, temos pelo Teorema A.0.27 e pela prova do Teorema 2.4.3, que $dim(\mathcal{G}(\Omega)) \geq dim(\overline{\mathbb{K}}) = +\infty$.

Do Lema 2.4.4 segue o resultado.

$\blacksquare$

APÊNDICE A

Dimensão de Hausdorff

As definições, proposições e teoremas desse capítulo são dadas em [4] e permitem ao leitor entender como é definida a Dimensão de Hausdorff, necessária na prova de que $\mathbb{K}$ e $\mathcal{G}(\Omega)$ são fractais [vide seção 2.4].

Definição A.0.6. *Uma coleção $\mathscr{F}$ de subconjuntos de um conjunto X é chamada uma σ-álgebra sobre X, se e somente se:*

1. $\emptyset, X \in \mathscr{F}$;
2. *se* $A \in \mathscr{F}$ *então* $X \backslash A \in \mathscr{F}$;
3. *se* $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ *então* $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathscr{F}$.

Definição A.0.7. *Seja M um espaço métrico. Um subconjunto B de M será denominado um conjunto de **Borel**, ou **boreliano** se, e somente se, B pertence a uma σ-álgebra $\mathscr{F}$ sobre M gerada por conjuntos abertos.*

Definição A.0.8. *Uma função de conjunto é uma função cujo domínio é uma família de conjuntos.*

Definição A.0.9. *Seja X um conjunto. Uma **medida exterior** sobre X é uma função de conjunto $\overline{\mathcal{M}}$ definida sobre todos os subconjuntos de X, com valores em $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, satisfazendo :*

1. $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$;

2. se $A \subseteq B$, então $\overline{\mathcal{M}}(A) \leq \overline{\mathcal{M}}(B)$;

3. $\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(A_n)$, onde $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de subconjuntos de X.

Definição A.0.10. *Uma família $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X é dita uma cobertura de X se,*

$$X \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A.$$

Se a família $\mathscr{A}$ é enumerável, então $\mathscr{A}$ é dita cobertura enumerável.

Teorema A.0.11. *Sejam X um conjunto, $\mathscr{A}$ uma cobertura de X e $C : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função de conjunto qualquer tal que, dado $\epsilon > 0$, existe $A \in \mathscr{A}$ com $C(A) \leq \epsilon$. Então, existe uma única medida exterior $\overline{\mathcal{M}}$ sobre X tal que:*

(I) $\overline{\mathcal{M}}(A) \leq C(A)$, $\forall\ A \in \mathscr{A}$;

(II) se $\overline{\mathcal{N}}$ é qualquer medida exterior sobre X com

$$\overline{\mathcal{N}}(A) \leq C(A), \quad \forall\ A \in \mathscr{A},$$

então

$$\overline{\mathcal{N}}(B) \leq \overline{\mathcal{M}}(B), \quad \forall\ B \subseteq X.$$

Prova:

Para qualquer subconjunto B de X, definamos

$$\overline{\mathcal{M}}(B) := \inf \sum_{A\in\mathscr{D}} C(A),$$

onde o ínfimo é sobre todas as coberturas enumeráveis $\mathscr{D}$ de B por conjuntos de $\mathscr{A}$. Se não existir tal $\mathscr{D}$, teremos por convenção, $\inf \emptyset = \infty$.

Afirmamos que $\overline{\mathcal{M}}$ é uma medida exterior. Com efeito,

(1): $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$ pois dado $\epsilon > 0$, existe $A \in \mathscr{A}$ com $C(A) \leq \epsilon$ e como $\emptyset \subset A$ para todo $A \in \mathscr{A}$, temos $C(\emptyset) \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$;

(2): Se $B \subseteq C$, então qualquer cobertura de C é também cobertura de B, de modo que $\overline{\mathcal{M}}(B) \leq \overline{\mathcal{M}}(C)$;

(3): Sejam $B_1, B_2, B_3, \ldots$ subconjuntos de X. Devemos provar que

$$\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_n).$$

Se $\overline{\mathcal{M}}(B_n) = +\infty$ para algum n, então a desigualdade é clara. Deste modo, suponhamos $\overline{\mathcal{M}}(B_n) < +\infty$, para todo n. Seja $\epsilon > 0$ e, para cada n, escolhamos uma cobertura enumerável $\mathscr{D}_n$ de B_n por conjuntos de $\mathscr{A}$ com

$$\sum_{A\in\mathscr{D}_n} C(A) \leq \overline{\mathcal{M}}(B_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Deste modo, $\mathscr{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_n$ é uma cobertura enumerável de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Portanto

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &\leq \sum_{A\in\mathscr{D}} C(A) \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{A\in\mathscr{D}_n} C(A) \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_n) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Uma vez que ϵ é qualquer número positivo, temos

$$\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_n).$$

Isto completa a prova de que $\overline{\mathcal{M}}$ é uma medida exterior.

Provemos, agora, que $\overline{\mathcal{M}}$ satisfaz as afirmações (I) e (II) do teorema:

Para (I), notemos que para todo $A \in \mathscr{A}$ o conjunto unitário $\{A\}$ cobre A , e assim

$$\overline{\mathcal{M}}(A) \leq \sum_{B\in\{A\}} C(B) = C(A).$$

Para (II), suponhamos que $\overline{\mathcal{N}}$ é uma outra medida exterior sobre X com $\overline{\mathcal{N}}(A) \leq C(A)$ para todo $A \in \mathscr{A}$. Então para qualquer cobertura enumerável $\mathscr{D}$ de um conjunto B por elementos de $\mathscr{A}$ temos

$$\sum_{A\in\mathscr{D}} C(A) \geq \sum_{A\in\mathscr{D}} \overline{\mathcal{N}}(A) \geq \overline{\mathcal{N}}\left(\bigcup_{A\in\mathscr{D}} A\right) \geq \overline{\mathcal{N}}(B).$$

Portanto $\overline{\mathcal{M}}(B) \geq \overline{\mathcal{N}}(B)$.

Unicidade: se $\overline{\mathcal{M}}_1$ e $\overline{\mathcal{M}}_2$ são duas medidas exteriores que satisfazem as condições (I) e (II) do teorema, então:

$$\overline{\mathcal{M}}_1(B) \leq \overline{\mathcal{M}}_2(B) \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{M}}_2(B) \leq \overline{\mathcal{M}}_1(B), \quad \forall\ B \subseteq X.$$

Portanto $\overline{\mathcal{M}}_1 = \overline{\mathcal{M}}_2$.

∎

Dado um conjunto X, sejam $\mathscr{A}$ uma cobertura de X e $C : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função de conjunto tal que, dado $\epsilon > 0$, existe $A \in \mathscr{A}$ com $C(A) \leq \epsilon$. Quando nos referirmos a uma medida exterior $\overline{\mathcal{M}}$ gerada por $\mathscr{A}$ e C, estaremos nos referindo, conforme o Teorema A.0.11, a uma medida exterior $\overline{\mathcal{M}}$ dada pela expressão

$$\overline{\mathcal{M}}(B) := \inf \sum_{A \in \mathscr{D}} C(A),$$

onde $B \subseteq X$ e o ínfimo é sobre todas as coberturas enumeráveis $\mathscr{D}$ de B por conjuntos de $\mathscr{A}$.

Definição A.0.12. *Seja $\overline{\mathcal{M}}$ uma medida exterior sobre um conjunto X. Um conjunto $A \subseteq X$ é $\overline{\mathcal{M}}$-mensurável se,*

$$\overline{\mathcal{M}}(E) = \overline{\mathcal{M}}(E \cap A) + \overline{\mathcal{M}}(E \backslash A), \quad \forall\ E \subseteq X.$$

Teorema A.0.13. *Seja $\overline{\mathcal{M}}$ uma medida exterior sobre X. A coleção $\mathscr{F}$ de subconjuntos $\overline{\mathcal{M}}$-mensuráveis de X é uma σ-álgebra.*

Prova:

(1): $\emptyset \in \mathscr{F}$ pois para qualquer $E \subseteq X$, temos

$$\overline{\mathcal{M}}(E \cap \emptyset) + \overline{\mathcal{M}}(E \backslash \emptyset) = \overline{\mathcal{M}}(\emptyset) + \overline{\mathcal{M}}(E) = \overline{\mathcal{M}}(E);$$

(2): Notemos que um conjunto $A \in \mathscr{F}$ se, e somente se, $(X \backslash A) \in \mathscr{F}$;

(3): Suponhamos $A_j \in \mathscr{F}$, $j \in \mathbb{N}^*$. Seja $A_0 = \emptyset$. Provaremos, usando o Princípio de Indução , que se $E \subseteq X$, então

$$\overline{\mathcal{M}}(E) = \sum_{j=1}^{k} \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \backslash \bigcup_{j=1}^{k} A_j\right), \ \forall\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{A.1}$$

Se $k = 1$ temos, usando que $A_1 \in \mathscr{F}$, que

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}(E) &= \overline{\mathcal{M}}(E \cap A_1) + \overline{\mathcal{M}}(E \backslash A_1)\\ &= \overline{\mathcal{M}}\left((E \backslash \emptyset) \cap A_1\right) + \overline{\mathcal{M}}(E \backslash A_1)\\ &= \overline{\mathcal{M}}\left((E \backslash A_0) \cap A_1\right) + \overline{\mathcal{M}}(E \backslash A_1),\end{aligned}$$

e assim, (A.1) é verdadeira.

Suponhamos (A.1) verdadeira para $k = n \geq 1$. Então, usando que $A_{n+1} \in \mathscr{F}$, temos

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}(E) = & \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \backslash \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \backslash \bigcup_{j=0}^{n} A_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \backslash \bigcup_{j=0}^{n} A_j\right) \cap A_{n+1}\right) +\\ &+ \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \backslash \bigcup_{j=0}^{n} A_j\right) \backslash A_{n+1}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \backslash \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right),\end{aligned}$$

e assim, (A.1) é verdadeira para $k = n + 1$.

De (A.1) e usando que $\overline{\mathcal{M}}$ é uma medida exterior e que

$$\left(E \backslash \bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \supset \left(E \backslash \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right),$$

temos que

$$\overline{\mathcal{M}}(E) \geq \sum_{j=1}^{k} \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \backslash \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*,$$

e assim, fazendo $k \longrightarrow 0$, temos

$$\overline{\mathcal{M}}(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \backslash \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right).$$

Mas

$$E \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \left(\left(E \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right),$$

assim,

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}(E) &\leq \overline{\mathcal{M}}\left(E \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \backslash \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right)\\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \backslash \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right)\\ &\leq \overline{\mathcal{M}}(E).\end{aligned}$$

Portanto

$$\overline{\mathcal{M}}(E) = \overline{\mathcal{M}}\left(E \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \backslash \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} A_j\right), \quad \forall\, E \subseteq X,$$

e assim, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} A_j \in \mathscr{F}$.

∎

Definição A.0.14. *Seja $\overline{\mathcal{M}}$ uma medida exterior sobre um espaço métrico M. Dizemos que $\overline{\mathcal{M}}$ é uma **medida exterior métrica** se,*

$$\overline{\mathcal{M}}(A \cup B) = \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B),$$

sempre que $dist(A, B) > 0$.

Lema A.0.15. *Seja $\overline{\mathcal{M}}$ uma medida exterior métrica sobre um espaço métrico M. Sejam $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ tais que, se $B := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \subseteq M$, então $dist(B_j, B\backslash B_{j+1}) > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então*

$$\overline{\mathcal{M}}(B) = \lim_{j\longrightarrow+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_j).$$

Prova:

Uma vez que $\overline{\mathcal{M}}$ é uma medida exterior, então $(\overline{\mathcal{M}}(B_j))_{j\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente e

$$\overline{\mathcal{M}}(B) \geq \overline{\mathcal{M}}(B_j), \quad \forall\, j \in \mathbb{N},$$

de modo que

$$\overline{\mathcal{M}}(B) \geq \lim_{j\longrightarrow+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_j).$$

Se tivermos $\lim_{j\longrightarrow+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_j) = +\infty$, então a igualdade será verdadeira.

Suponhamos

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_j) < +\infty.$$

Sejam $C_0 := B_0$ e $C_j := B_j \backslash B_{j-1}$, para $j \geq 1$. Se $i \geq j+2$, então $C_j \subset B_j$ e

$$C_i \subseteq B \backslash B_{i-1} \subseteq B \backslash B_{j+1},$$

donde segue que $dist(C_i, C_j) > 0$.

Logo

$$\overline{\mathcal{M}}(B_{2m}) \geq \overline{\mathcal{M}}(B_{2m-1}) \geq \overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{k=1}^{m} C_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{m} \overline{\mathcal{M}}(C_{2k-1})$$

$$\overline{\mathcal{M}}(B_{2m}) \geq \overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{k=1}^{m} C_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{m} \overline{\mathcal{M}}(C_{2k}),$$

e assim

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathcal{M}}(C_j) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ k \text{ par}}} \overline{\mathcal{M}}(C_k) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ k \text{ ímpar}}} \overline{\mathcal{M}}(C_k) \\ &\leq 2\overline{\mathcal{M}}(B_s) \\ &\leq 2 \lim_{j \longrightarrow \infty} \overline{\mathcal{M}}(B_j) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

onde $s = m$ se m é par e $s = m+1$ se m é ímpar.

Logo a série $\sum_{j=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(C_j)$ é convergente.

Como, para todo $j \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}(B) &= \overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \overline{\mathcal{M}}\left(B_j \cup \bigcup_{k \geq j+1} C_k\right) \\ &\leq \overline{\mathcal{M}}(B_j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}(C_k) \\ &\leq \lim_{i \longrightarrow +\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_i) + \sum_{k=j+1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(C_k), \end{aligned}$$

e $\sum_{k=j+1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(C_k) \longrightarrow 0$ quando $j \longrightarrow +\infty$, segue que

$$\overline{\mathcal{M}}(B) \leq \lim_{i \longrightarrow +\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_i).$$

∎

Teorema A.0.16. *Se $\overline{\mathcal{M}}$ é uma medida exterior métrica sobre um espaço métrico (M, ρ), então todos os subconjuntos borelianos de M são $\overline{\mathcal{M}}$-mensuráveis.*

Prova:

Uma vez que a σ-álgebra de conjuntos borelianos é a $\sigma-$álgebra gerada por conjuntos fechados, e a coleção $\mathscr{F}$ de conjuntos mensuráveis é uma σ-álgebra, é suficiente mostrar que todo conjunto fechado F é mensurável.

Sejam B um conjunto qualquer e F um conjunto fechado, observemos que

$$B \subseteq [(B \cap F) \cup (B \backslash F)].$$

Logo,

$$\overline{\mathcal{M}}(B) \leq \overline{\mathcal{M}}[(B \cap F) \cup (B \backslash F)] \leq \overline{\mathcal{M}}(B \cap F) + \overline{\mathcal{M}}(B \backslash F).$$

Para concluir, bastar provar que

$$\overline{\mathcal{M}}(B) \geq \overline{\mathcal{M}}(B \cap F) + \overline{\mathcal{M}}(B \backslash F).$$

Sejam $j \in \mathbb{N}^*$ e $B_j := \{x \in B : dist(x, F) \geq 1/j\}$.

Vemos que $dist(B_j, F \cap B) \geq 1/j > 0$, e como $B_j \subset B$, temos

$$\overline{\mathcal{M}}(B) \geq \overline{\mathcal{M}}[B_j \cup (F \cap B)] = \overline{\mathcal{M}}(F \cap B) + \overline{\mathcal{M}}(B_j), \tag{A.2}$$

para todo $j \in \mathbb{N}^*$.

Provemos que $\lim_{j \longrightarrow +\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_j) = \overline{\mathcal{M}}(B \backslash F)$.

Notemos que sendo F fechado, F contém todo $x \in M$ tal que $dist(x, F) = 0$. Logo, $B \backslash F = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} B_j$. Afim de utilizarmos o Lema A.0.15, notemos que, se $x \in (B \backslash (F \cup B_{j+1}))$, então existe $z \in F$ com $\rho(x, z) < 1/(j+1)$, e portanto para $y \in B_j$, temos

$$\rho(x, y) \geq \rho(y, z) - \rho(x, z) > \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}.$$

Assim,

$$dist(B \backslash (F \cup B_{j+1}), B_j) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} > 0, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}^*$$

e consequentemente, pelo Lema A.0.15 temos que

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_j) = \overline{\mathcal{M}}(B \backslash F).$$

Substituindo esse resultado em (A.2), temos

$$\overline{\mathcal{M}}(B) \geq \overline{\mathcal{M}}(F \cap B) + \overline{\mathcal{M}}(B \backslash F),$$

que completa a prova.

∎

Proposição A.0.17. *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ duas coberturas para um conjunto X tais que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ e consideremos $C : \mathscr{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função de conjunto tal que, dado $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathscr{A}$ com $C(A) \leq \epsilon$. Se C e $\mathscr{A}$ geram uma medida exterior $\overline{\mathcal{M}}$ e C e $\mathscr{B}$ geram uma medida exterior $\overline{\mathcal{N}}$, então*

$$\overline{\mathcal{M}}(B) \geq \overline{\mathcal{N}}(B), \quad \forall\ B \subseteq X.$$

Prova:

Notemos que $\overline{\mathcal{M}}(B) = \inf \sum\limits_{A \in \mathscr{D}} C(A)$, onde o ínfimo é sobre todas a coberturas enumerávis $\mathscr{D}$ de B por conjuntos de $\mathscr{A}$.Analogamente, $\overline{\mathcal{N}}(B) = \inf \sum\limits_{A \in \mathscr{E}} C(A)$, onde o ínfimo é sobre todas as coberturas enumeráveis $\mathscr{E}$ de B por conjuntos de $\mathscr{B}$. Como $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, $\mathscr{D}$ também é uma cobertura enumerável de B por conjuntos de $\mathscr{B}$. Assim, o conjunto de todas as coberturas enumeráveis de B por conjuntos de $\mathscr{A}$ é subconjunto de todas as coberturas enumeráveis de B por conjuntos de $\mathscr{B}$. Portanto

$$\overline{\mathcal{M}}(B) = \inf \sum_{A \in \mathscr{D}} C(A) \geq \inf \sum_{A \in \mathscr{E}} C(A) = \overline{\mathcal{N}}(B).$$

∎

Teorema A.0.18. *Seja $\mathscr{A}$ uma família de subconjuntos de um espaço métrico M tal que, para cada $x \in M$ e $\epsilon > 0$, existe $A \in \mathscr{A}$ com $x \in A$ e $diam(A) \leq \epsilon$. Se*

$$\mathscr{A}_\epsilon := \{A \in \mathscr{A} : diam(A) \leq \epsilon\}$$

e $C : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ é uma função de conjunto tal que, dado $\epsilon > 0$, existe $A \in \mathscr{A}$ com $C(A) \leq \epsilon$. Então valem as afirmações:

(I) A medida exterior $\overline{\mathcal{M}}_\epsilon$ dada por

$$\overline{\mathcal{M}}_\epsilon(B) := \inf \sum_{A \in \mathscr{D}_\epsilon} C(A), \quad B \subseteq M,$$

onde o ínfimo é sobre todas as coberturas enumeráveis $\mathscr{D}_\epsilon$ de B por conjuntos de $\mathscr{A}_\epsilon$, é tal que $\overline{\mathcal{M}}_\epsilon(B)$ cresce quando ϵ decresce;

(II) A função $\overline{\mathcal{M}}$ definida por

$$\overline{\mathcal{M}}(B) := \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(B) = \sup_{\epsilon > 0} \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(B), \quad B \subseteq M,$$

é uma medida exterior métrica sobre M.

Prova:

(I) : Sejam $B \subset M$ e $\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$. Pelas hipóteses do teorema, temos $\mathscr{A}_{\epsilon_1} \supset \mathscr{A}_{\epsilon_2}$ e, segue da Proposição A.0.17, que $\overline{\mathcal{M}}_{\epsilon_2}(B) \geq \overline{\mathcal{M}}_{\epsilon_1}(B)$.

(II) : $\overline{\mathcal{M}}$ é uma medida exterior métrica pois:

(1): $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(\emptyset) = 0$ pois $\overline{\mathcal{M}}_\epsilon$ é uma medida exterior para todo $\epsilon > 0$;

(2): se $A \subseteq B$, então

$$\overline{\mathcal{M}}(A) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(A) \leq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(B) = \overline{\mathcal{M}}(B).$$

pois $\overline{\mathcal{M}}_\epsilon(A) \leq \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(B)$ para todo $\epsilon > 0$.

(3):

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \overline{\mathcal{M}}_\epsilon\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \\ &\leq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(A_n)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(A_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(A_n). \end{aligned}$$

Sejam $A, B \subset M$ com $dist(A, B) > 0$. Por (3): temos $\overline{\mathcal{M}}(A \cup B) \leq \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B)$. Por outro lado, se $0 < \epsilon \leq dist(A, B)$ e $\mathscr{D}$ é uma cobertura enumerável de $(A \cup B)$ por conjuntos de $\mathscr{A}_\epsilon$, então os conjuntos $D \in \mathscr{D}$ são tais que $diam(D) < dist(A, B)$. Segue que cada $D \in \mathscr{D}$ intercepta apenas um dos conjuntos A, B. Assim, $\mathscr{D}$ pode ser dividida em duas coleções disjuntas , $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$, onde $\mathscr{D}_1$ cobre A e $\mathscr{D}_2$ cobre B. Então, tem-se

$$\sum_{D \in \mathscr{D}} C(D) = \sum_{D \in \mathscr{D}_1} C(D) + \sum_{D \in \mathscr{D}_2} C(D) \geq \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(A) + \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(B),$$

e disto segue que, tomando-se o ínfimo sobre todas as coberturas enumeráveis de $(A \cup B)$ por conjuntos de $\mathscr{A}_\epsilon$, com $\epsilon < dist(A, B)$, temos

$$\overline{\mathcal{M}}_\epsilon(A \cup B) \geq \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(A) + \overline{\mathcal{M}}_\epsilon(B).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, concluímos que

$$\overline{\mathcal{M}}(A \cup B) \geq \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B).$$

∎

Definição A.0.19. *Seja M um espaço métrico. Uma cobertura $\mathscr{A}$ para M é dita uma $\epsilon-$cobertura, se $diam(A) \leq \epsilon$ para todo $A \in \mathscr{A}$.*

Para os próximos resultados, $\mathscr{A}_\epsilon$ denotará um $\epsilon-$cobertura.

O Teorema A.0.18 dá sentido à seguinte definição:

Definição A.0.20. *Dado $s > 0$, seja sobre um espaço métrico M a função de conjunto $C : M \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por $C(A) = (diam(A))^s$. Para $\epsilon > 0$ consideremos a medida exterior $\overline{H}^s_\epsilon$ dada por*

$$\overline{\mathcal{H}}^s_\epsilon(B) := \inf \sum_{A \in \mathscr{A}_\epsilon} \left(diam(A)\right)^s, \; B \subset M,$$

onde o ínfimo é sobre todas as ϵ-coberturas enumeráveis $\mathscr{A}_\epsilon$ de B.

*A **s-dimensional medida exterior de Hausdorff** é a medida exterior métrica $\overline{\mathcal{H}}^s$ sobre M dada por*

$$\overline{\mathcal{H}}^s(B) := \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}^s_\epsilon(B) = \sup_{\epsilon > 0} \overline{\mathcal{H}}^s_\epsilon(B).$$

Proposição A.0.21. *Se M é um espaço métrico, então os borelianos de M são $\overline{\mathcal{H}}^s$-mensuráveis.*

Prova:

O resultado segue obviamente do Teorema A.0.16.

∎

Definição A.0.22. *Seja X um conjunto e $\mathscr{F}$ uma $\sigma-$álgebra sobre X. Uma **medida** sobre $\mathscr{F}$ é uma função de conjunto $\mathcal{M} : \mathscr{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que*

1. $\mathcal{M}(\emptyset) = 0$;

2. Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de subconjuntos disjuntos de $\mathscr{F}$, então

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{M}(A_n).$$

Proposição A.0.23. *A restrição de uma medida exterior métrica $\overline{M}$ a conjuntos $\overline{M}$-mensuráveis é uma medida.*

Prova:

Seja $\mathscr{F}$ a coleção dos subconjuntos $\overline{M}$-mensuráveis de X, onde $\overline{M}$ é uma medida exterior métrica.

O resultado segue diretamente do Teorema A.0.13 e da igualdade

$$\overline{\mathcal{M}}(A \cup B) = \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B),$$

sempre que $dist(A, B) > 0$.

∎

Definição A.0.24. *A restrição de $\overline{\mathcal{H}}^s$ a conjuntos $\overline{\mathcal{H}}^s$−mensuráveis é chamanda* ***s-dimensional medida de Hausdorff*** *e é denotada por $\mathcal{H}^s$.*

Teorema A.0.25. *Seja B um subconjunto boreliano de um espaço métrico M e consideremos reais s e t tais que $0 < s < t$. Se $\mathcal{H}^s(B) < +\infty$, então $\mathcal{H}^t(B) = 0$.*

Prova:

Se $diam(A) \leq \epsilon$, então

$$\overline{\mathcal{H}}^t_\epsilon(A) \leq (diam(A))^t \leq (diam(A))^{t-s}(diam(A))^s \leq \epsilon^{t-s}(diam(A))^s.$$

Portanto pelo Teorema A.0.11,

$$\overline{\mathcal{H}}^t_\epsilon(B) \leq \epsilon^{t-s}\overline{\mathcal{H}}^s_\epsilon(B), \quad \forall\ B \subseteq M.$$

Assim, se B é um boreliano e $\mathcal{H}^s(B) < +\infty$, então

$$\mathcal{H}^t(B) \leq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon^{t-s}\mathcal{H}^s_\epsilon(B) = 0.\mathcal{H}^s(B) = 0.$$

∎

Notemos que, dado um conjunto boreliano B, há um único valor crítico $s_0 \in]0, +\infty]$ tal que

$$\mathcal{H}^s(B) = +\infty \quad \forall\ s < s_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^s(B) = 0 \quad \forall\ s > s_0.$$

Disto, segue a definição:

Definição A.0.26. *Seja B um conjunto boreliano. O valor $s_0 \in]0, +\infty]$ tal que*

$$\mathcal{H}^s(B) = +\infty \quad \forall\ s < s_0 \quad e \quad \mathcal{H}^s(B) = 0 \quad \forall\ s > s_0,$$

é chamado ***dimensão de Hausdorff*** *do conjunto B e é denotado por*

$$dim(B) = s_0.$$

Dizemos que $dim(B) = 0$ se $\mathcal{H}^s(B) = 0$ para todo $s > 0$.

Dizemos que $dim(B) = +\infty$ se $\mathcal{H}^s(B) = +\infty$ para todo $s > 0$.

Teorema A.0.27. *Sejam A, B conjuntos borelianos. Se $A \subset B$, então $dim(A) \leq dim(B)$.*

Prova:

Observemos, primeiramente, que se $dim(B) = +\infty$, o resultado segue trivialmente, portanto, consideremos $dim(B) < +\infty$. Como $A \subseteq B$ temos $\mathcal{H}^t(A) \leq \mathcal{H}^t(B)$ para todo $t > 0$. Pelo Teorema A.0.25, se $s > dim(B)$ então $\mathcal{H}^s(B) = 0$. Logo

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B) = 0 \Longrightarrow dim(A) \leq s.$$

Uma vez que a implicação é verdadeira para todo $s > dim(B)$, temos $dim(A) \leq dim(B)$.

∎

Lema A.0.28. *Sejam (M, d) um espaço ultramétrico e B um conjunto boreliano de M. Suponhamos que B contém um subconjunto S, não enumerável, tal que $d(x, y) = 1$ sempre que $x \neq y$ e $x, y \in S$. Então $dim(M) = +\infty$.*

Prova:

Uma vez que B e M são ambos borelianos, pelo Teorema A.0.27, basta provarmos que $dim(B) = +\infty$. Procederemos mostrando que, dado $\epsilon > 0$ não existe ϵ-cobertura enumerável para B. Para isto, fixemos $\epsilon \in]0, 1[$ e suponhamos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma tal cobertura de B. Uma vez que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cobre B deverá também cobrir S. Todavia sendo S não-enumerável, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que A_{n_0} tem infinitos pontos de S. Mostraremos que tal A_{n_0} não existe.

Seja $C := \{m \in \mathbb{N} : S \cap A_m \neq \emptyset\}$. Se $x_m \in S \cap A_m$ então

$$d(x_m, y) \leq \epsilon < 1 \text{ para todo } y \in A_m$$

e consequentemente $A_m \subset B_1(x_m)$ para todo $m \in C$. No entanto, se $u, v \in S \cap B_1(x_m)$, com $u \neq v$, seguirá da hipótese sobre S que

$$1 = d(u, v) \leq max\{d(u, x_m), d(v, x_m)\} < 1.$$

Assim, devemos ter $S \cap B_1(x_m) = \{x_m\}$ para todo $m \in C$, negando a existência de A_{n_0} pois $n_0 \in C$.

Portanto não existe ϵ-cobertura enumerável para B quando $0 < \epsilon < 1$.

Como $\mathcal{H}^s(B) := \lim\limits_{\epsilon \to 0} \inf \sum\limits_{A \in \mathscr{A}_\epsilon} (diam(A))^s$, onde o ínfimo é sobre todas as coberturas enumeráveis $\mathscr{A}_\epsilon$ de B e $\inf \emptyset := +\infty$, temos $dim(B) = +\infty$.

∎

Referências Bibliográficas

[1] J. Aragona. *Introdução à Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau.* IME-USP, São Paulo, 1989. Notas de aula da disciplina MAT829, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

[2] J. Aragona ; H. A. Biagioni. *Intrinsic definition of the Colombeau algebra of generalized functions.* Anal. Math., 17, 2, (1991) 75-132.

[3] A. Delcroix. *Remarks on the embedding of spaces of distributions into spaces of Colombeau generalized functions.* arXiv: math.FA/00403310v1, 18/03/2004. (http://front.math.ucdavis.edu/math.FA).

[4] G.A. Edgar. *Mesure, Topology and Fractal Geometry.* Springer-Velarg, New York, 1990. Undergraduate Texts in mathematics.

[5] R. Fernandez. *A equação de Hamilton-Jacobi no contexto das funções generalizadas.* Universidade de São Paulo, 1996. Tese de doutorado.

[6] F. Q. Gouvêa. *Primeiros passos P-ádicos.* IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 1989. Segunda Edição, Colóquio Brasileiro de Matemática.Capítulo 2.

[7] J. Horváth. *Topological vector spaces and distributions.* Addison Wesley, 1966.

[8] S. Hu. *Introduction to general topology.* Holden-Day, San Francisco, 1966. Holden-Day séries in Mathematics.

[9] J. Aragona ; R. Fernandez; S. O. Juriaans. *A Discontinuous Colombeau Differential Calculus.* Monatsh. Math. 144,13-29(2.005).

[10] J. Aragona ; R. Fernandez; S. O. Juriaans. *Natural topologies on Colombeau Algebras.* preprint, 2004.

[11] J. Aragona ; S. O. Juriaans. *Some structural properties of the topological ring of Colombeau generalized numbers.* Communications in Algebra, 29(a): 2212–2216, 2001.

[12] E. L. Lima. *Espaços Métricos.* IMPA, Rio de Janeiro, Terceira Edição, Projeto Euclides.

[13] F. C. P. Milies. *Anéis e Módulos.* L.P.M., São Paulo, 1972.

[14] M. Kunzinger; M. Oberguggenberger. *Characterization of Colombeau generalized functions by their point value.* Math. Nachr. 203, (1999). 147-157.

[15] O. R. B. Oliveira. *Espaços Ultramétricos.* IME-USP, São Paulo, Notas de aula.

[16] D. Scarpalezos. *Colombeau's generalized functions: topological structures micro local properties. A simplified point of view, CNRS-URA212.* Université Paris, 7, (1993).

[17] D. Scarpalezos. *Topologies dans les espaces de nouvelles fonctions generalisées de Colombeau.* $\overline{\mathbb{C}}$*-modules topologiques.* Université Paris, 7, (1993).

[18] J. Aragona ; S. O. Juriaans; O. R . B. Oliveira; D. Scarpalezos. *Algebraic theory of the topological algebra of Colombeau's generalized functions.* preprint, 2003.

[19] M. Grosser ; M. Kunzinger; M. Oberguggenberger; R. Steinbauer. *Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity.* Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands, 2001.

[20] J. Aragona ; F. Villareal. *Colombeaus's theory and shock waves in a problem of hydrodynamics.* J. Analyse Math., 61(1993). 113-144.

[21] F. Villarreal. *Sobre soluções na forma de onda de choque de certos sistemas de equações diferenciais parciais da hidrodinâmica.* Universidade de São Paulo, 1990. Tese de doutorado.

[22] S. Willard. *General topology.* Addison-Wesley Pub., Readings,Mass., 1970. Addison-Wesley series in Mathematics.