Cópias de $c_0(\Gamma)$ em espaços $C(K, X)$

Vinícius Morelli Côrtes

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo, 18 de Fevereiro de 2014

Esta dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Vinícius Morelli Côrtes em 05/02/2014. O original encontra-se disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (orientador) - IME-USP
- Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira - IME-USP
- Prof. Dr. Raymundo Alencar - ITA

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pelo carinho constante e pelo incentivo, desde criança, ao estudo da matemática.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Elói Medina Galego, pelo apoio e orientação durante toda a elaboração deste trabalho.

Um agradecimento especial às professoras Roseli Fernandez e Zara Issa Abud e ao professor Severino Toscano do Rego Melo, por todo o apoio e incentivo durante a graduação.

Finalmente, agradeço à FAPESP pelo auxílio financeiro durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos a geometria das cópias e das cópias complementadas de $c_0(\Gamma)$ em espaços de Banach $C(K, X)$ em termos da cardinalidade do conjunto Γ, da densidade e do *caliber* do compacto K e da geometria de X e de seu dual X^*. Estudamos, em particular, os seguintes resultados:

(i) Se um dos espaços X e $C(K)$ contém uma cópia (respectivamente cópia complementada) de $c_0(\Gamma)$, então $C(K, X)$ contém uma cópia (respectivamente cópia complementada) de $c_0(\Gamma)$.

(ii) Se $C(K, X)$ contém uma cópia de c_0, então um dos espaços X e $C(K)$ contém uma cópia de c_0.

(iii) Se $|\Gamma| \geq \aleph_1$ e $C(K, X)$ contém uma cópia de $c_0(\Gamma)$, então $C(K)$ contém uma cópia de $c_0(\Gamma)$ ou X contém uma cópia de c_0.

(iv) Seja α um ordinal. Se X tem JN_α e $C(K)$ contém uma cópia de $c_0(\aleph_\alpha)$, então $C(K, X)$ contém uma cópia complementada de $c_0(\aleph_\alpha)$.

Estes resultados podem ser encontrados no recente artigo de Elói Medina Galego e James N. Hagler intitulado *Copies of* $c_0(\Gamma)$ *in* $C(K, X)$ *spaces*, publicado em 2012 ([11]).

Palavras-chave: espaços $c_0(\Gamma)$, espaços $C(K, X)$, propriedade de Josefson-Nissenzweig-α (JN_α).

Abstract

We study the geometry of copies and complemented copies of $c_0(\Gamma)$ in the classical Banach spaces $C(K, X)$ in terms of the cardinality of the set Γ, of the density and caliber of K and of the geometry of X and its dual space X^*. Here are three sample results we study:

(i) If X or $C(K)$ contains a copy (respectively complemented copy) of $c_0(\Gamma)$, then $C(K, X)$ contains a copy (respectively complemented copy) of $c_0(\Gamma)$.

(ii) If $C(K, X)$ contains a copy of c_0, then at least one of the spaces X and $C(K)$ contains a copy of c_0.

(iii) If $|\Gamma| \geq \aleph_1$ and $C(K, X)$ contains a copy of $c_0(\Gamma)$, then $C(K)$ contains a copy of $c_0(\Gamma)$ or X contains a copy of c_0.

(iv) Let α be an ordinal. If X has JN_α and $C(K)$ contains a copy of $c_0(\aleph_\alpha)$, then $C(K, X)$ contains a complemented copy of $c_0(\aleph_\alpha)$.

These results can be found on the recent work of Elói Medina Galego and James N. Hagler named *Copies of* $c_0(\Gamma)$ *in* $C(K, X)$ *spaces*, published in 2012 ([11]).

Keywords: $c_0(\Gamma)$ spaces, $C(K, X)$ spaces, Josefson-Nissenzweig-α (JN_α) property.

Conteúdo

Notações

$\mathbb{N}$	O conjunto dos números naturais, isto é, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{R}$	O corpo dos números reais.
B_X	A bola unitária fechada do espaço normado X, isto é, o conjunto $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.
$\mathcal{L}(X, Y)$	O espaço vetorial de todos os operadores lineares e contínuos $T \colon X \to Y$, onde X, Y são espaços normados, munido da norma $\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|$.
X^*	O dual topológico do espaço normado X.
$X^\sharp$	O dual algébrico do espaço vetorial X.
$X \sim Y$	Os espaços normados X e Y são isomorfos.

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em estudar a geometria dos espaços de Banach $C(K, X)$. Começamos lembrando que dados K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach, denotamos por $C(K, X)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas $g\colon K \to X$, munido da norma

$$\|g\|_\infty = \sup_{k\in K} \|g(k)\|, \forall g \in C(K, X).$$

Quando $X = \mathbb{R}$, escrevemos simplesmente $C(K)$. Lembramos também que dado um conjunto não-vazio Γ, denotamos por $c_0(\Gamma)$ o espaço de Banach de todas as funções $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \geq \varepsilon\}$ é finito, munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|, \forall f \in c_0(\Gamma).$$

Mais concretamente, o objetivo deste trabalho é estudar a relação entre cópias de $c_0(\Gamma)$ nos espaços X, $C(K)$ e $C(K, X)$ em termos da geometria de X, da cardinalidade de Γ e de propriedades de K. Primeiramente, estamos interessados em estudar o seguinte problema.

Problema A. *Se um dos espaços X e $C(K)$ contém uma cópia de $c_0(\Gamma)$, deve $C(K, X)$ conter uma cópia de $c_0(\Gamma)$?*

Veremos no Capítulo 2 que a resposta para o Problema A é afirmativa e que o mesmo vale para cópias complementadas de $c_0(\Gamma)$ (Teorema 2.1). Com isto, é natural considerarmos o problema recíproco.

Problema B. *Se $C(K, X)$ contém uma cópia de $c_0(\Gamma)$, deve um dos espaços X ou $C(K)$ conter uma cópia de $c_0(\Gamma)$?*

Este problema também tem resposta afirmativa quando $|\Gamma| = \aleph_0$ (Teorema 2.5). Para $|\Gamma| \geq \aleph_1$, o primeiro resultado do Capítulo 3, o Teorema 3.1, fornece uma resposta parcial para o Problema B. No entanto, mesmo no caso $|\Gamma| = \aleph_1$, hipóteses adicionais de teoria dos conjuntos são necessárias para obter uma resposta completa. Veremos, por exemplo, que a resposta é negativa se assumirmos a Hipótese do Contínuo (Proposição 3.2) e afirmativa se assumirmos o Axioma de Martin e a negação da Hipótese do Contínuo (Corolário 3.4). Além disso, a partir de hipóteses adicionais sobre o compacto K, podemos obter conclusões mais fortes (por exemplo, os Teoremas 3.3 e 3.6).

Outro problema que estudamos é o seguinte.

Problema C. *Que hipóteses sobre K e sobre X fornecem uma cópia complementada de $c_0(\Gamma)$ em $C(K, X)$?*

Veremos, por exemplo, que $C(K)$ contém uma cópia complementada de $c_0(\mathbb{N})$ se K é um espaço compacto metrizável infinito (Corolário 2.8) e que $C(K, X)$ contém uma cópia complementada de $c_0(\aleph_\alpha)$ se X tem JN_α (Definição 3.9) e se $C(K)$ contém uma cópia de $c_0(\aleph_\alpha)$, onde α é um ordinal (Corolário 3.12).

No Capítulo 1 apresentamos conceitos e resultados preliminares e fixamos a notação utilizada no decorrer do trabalho. Estudamos brevemente os conceitos de somabilidade em espaços de Banach, bases de Schauder, topologia fraca-estrela, cópias de espaços de Banach, produto tensorial de espaços de Banach e operadores compactos, além de alguns resultados de topologia geral e de teoria dos conjuntos. Também definimos os espaços $c_0(\Gamma)$ e $C(K, X)$ e apresentamos algumas de suas propriedades.

No Capítulo 2 iniciamos o estudo das cópias de $c_0(\Gamma)$ em espaços $C(K, X)$ pelo caso separável, isto é, o caso $|\Gamma| = \aleph_0$. Em particular, apresentamos soluções completas dos Problemas A e B, com respostas afirmativas em ambos os casos, e apresentamos algumas respostas para o Problema C.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo do caso não-separável ($|\Gamma| \geq \aleph_1$). Estudamos as relações entre hipóteses de teoria dos conjuntos e o Problema B, e apresentamos uma resposta parcial para o Problema C.

Finalmente, no Capítulo 4 estudamos algumas aplicações dos principais resultados vistos e apresentamos brevemente algumas questões em aberto relacionadas a cópias de $c_0(\tau)$ em espaços de Banach.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo apresentaremos conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho e fixaremos a notação utilizada. Todos os espaços vetoriais considerados estão definidos sobre $\mathbb{R}$. Se X é um espaço normado, vamos denotar por φ, ψ os elementos de X^*, e por x^{**} os elementos de X^{**}.

1.1 Somabilidade em espaços de Banach

Nesta seção vamos introduzir duas noções de somabilidade em espaços de Banach, que serão úteis no estudo dos espaços $c_0(\Gamma)$. Começamos lembrando que dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço de Banach X, dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é *somável* se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente em X. Equivalentemente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é somável se a sequência de suas somas parciais é de Cauchy. Dizemos também que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é *absolutamente somável* se a série de números reais $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente. Em um espaço de Banach, toda sequência absolutamente somável é somável.

Baseados nisto, vamos estender o conceito de somas de sequências e definir somas de famílias arbitrárias de elementos de um espaço de Banach.

Definição 1.1 ([25], pg. 204). Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto não-vazio e $(x_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de X. Dizemos que $(x_i)_{i\in I}$ é *desordenadamente somável* e *tem soma* $x \in X$ se para cada $\varepsilon > 0$ existe um conjunto finito e não-vazio $F_\varepsilon \subset I$ tal que, para todo conjunto finito F satisfazendo $F_\varepsilon \subset F \subset I$, tem-se $\|x - \sum_{i\in F} x_i\| < \varepsilon$.

Proposição 1.2. *Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto não-vazio e $(x_i)_{i\in I}$ uma família desordenadamente somável de elementos de X, com soma $x, y \in X$. Então $x = y$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Por hipótese, existem conjuntos $F_\varepsilon, G_\varepsilon \subset I$, finitos, não-vazios, satisfazendo

$$F \subset I, \text{finito}, F_\varepsilon \subset F \implies \left\| x - \sum_{i\in F} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$G \subset I, \text{finito}, G_\varepsilon \subset F \implies \left\| y - \sum_{i\in G} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $H = F_\varepsilon \cup G_\varepsilon$. Então temos que

$$\|x - y\| \leq \left\| x - \sum_{i\in H} x_i \right\| + \left\| y - \sum_{i\in H} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, obtemos $x = y$. ∎

Neste sentido, se $(x_i)_{i\in I}$ tem soma x, escrevemos $x = \sum_{i\in I} x_i$.

Proposição 1.3. *Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto não-vazio, $(x_i)_{i\in I}$ e $(y_i)_{i\in I}$ famílias desordenadamente somáveis em X e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $(x_i + \alpha y_i)_{i\in I}$ é desordenadamente somável e*

$$\sum_{i\in I}(x_i + \alpha y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \alpha \sum_{i\in I} y_i.$$

Demonstração. Se $\alpha = 0$, nada temos que fazer. Suponhamos então $\alpha \neq 0$. Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Por hipótese, existem conjuntos $F_\varepsilon, G_\varepsilon \subset I$, finitos, não-vazios, satisfazendo

$$F \subset I, \text{finito}, F_\varepsilon \subset F \implies \left\| \sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in F} x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$G \subset I, \text{finito}, G_\varepsilon \subset F \implies \left\| \sum_{i\in I} y_i - \sum_{j\in G} y_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}.$$

Seja $H_\varepsilon = F_\varepsilon \cup G_\varepsilon$. Dado $H \subset I$, finito, com $H_\varepsilon \subset H$, temos

$$\left\| \sum_{i\in I} x_i + \alpha \sum_{i\in I} y_i - \sum_{j\in H}(x_j + \alpha y_j) \right\| \leq \left\| \sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in H} x_j \right\| + |\alpha| \left\| \sum_{i\in I} y_i - \sum_{j\in H} y_j \right\| < \varepsilon,$$

como queríamos. ∎

Definição 1.4 ([25], pg. 204). Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto não-vazio e $(x_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de X. Dizemos que $(x_i)_{i\in I}$ satisfaz a *condição de Cauchy* se dado $\varepsilon > 0$ existe um conjunto finito $F_\varepsilon \subset I$ tal que, para todo conjunto finito e não-vazio $F \subset I$ com $F \cap F_\varepsilon = \varnothing$, tem-se $\|\sum_{i\in F} x_i\| < \varepsilon$.

Teorema 1.5 (Critério de Cauchy). *Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto não-vazio e $(x_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de X. Então $(x_i)_{i\in I}$ é desordenadamente somável se, e somente se, $(x_i)_{i\in I}$ satisfaz a condição de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Suponhamos que $(x_i)_{i\in I}$ seja uma família desordenadamente somável, com soma $x \in X$. Por hipótese, existe um conjunto finito $F_\varepsilon \subset I$ tal que, para todo conjunto finito F satisfazendo $F_\varepsilon \subset F \subset I$, temos

$$\left\| x - \sum_{i\in F} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixemos $\varnothing \neq F' \subset I$, finito, com $F' \cap F_\varepsilon = \varnothing$. É claro que $F' \cup F_\varepsilon$ é finito e contém F_ε. Logo,

$$\frac{\varepsilon}{2} > \left\| \sum_{i\in F'\cup F_\varepsilon} x_i - x \right\| \geq \left\| \sum_{i\in F'} x_i \right\| - \left\| x - \sum_{i\in F_\varepsilon} x_i \right\|,$$

donde

$$\left\| \sum_{i\in F'} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \left\| x - \sum_{i\in F_\varepsilon} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Reciprocamente, suponhamos que $(x_i)_{i\in I}$ satisfaça a condição de Cauchy. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_n = \left\{ i \in I : \|x_i\| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Afirmamos que cada I_n é finito. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $F_n \subset I$, finito, tal que

$$\varnothing \neq J \subset I, \text{finito}, J \cap F_n = \varnothing \implies \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\| < \frac{1}{n}.$$

Em particular, se $i \in I \setminus F_n$, então $\|x_i\| < \frac{1}{n}$, e portanto $i \notin I_n$. Logo, $I_n \subset F_n$.

Notemos que a sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, isto é,

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$$

Consideremos a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, onde

$$y_n = \sum_{i\in I_n} x_i.$$

Mostremos que esta sequência é de Cauchy.

Como $(x_i)_{i\in I}$ satisfaz a condição de Cauchy, existe $G_\varepsilon \subset I$, finito, tal que

$$\varnothing \neq G \subset I, \text{finito}, G \cap G_\varepsilon = \varnothing \implies \left\| \sum_{i\in G} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $G_\varepsilon = \varnothing$ ou se $x_i = 0$, para cada $i \in G_\varepsilon$, então $G_\varepsilon \cap I_n = \varnothing$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, seja

$$0 < \delta = \min\{\|x_i\| : i \in G_\varepsilon, x_i \neq 0\}.$$

Seja $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_1} < \delta$. Então

$$\{i \in G_\varepsilon : x_i \neq 0\} \subset I_{N_1},$$

e portanto

$$G_\varepsilon \cap (I_m \setminus I_n) = \varnothing, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq N_1.$$

Logo, dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geq n \geq N_1$, temos que

$$\|y_m - y_n\| = \left\| \sum_{i\in I_m} x_i - \sum_{j\in I_n} x_j \right\| = \left\| \sum_{i\in I_m \setminus I_n} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto prova que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Como X é completo, existe $y = \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n$. Mostremos que $(x_i)_{i\in I}$ é desordenadamente somável e tem soma y.

Como $y_n \longrightarrow y$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_2 \implies \left\| \sum_{i \in I_n} x_i - y \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Fixemos $H \subset I$, finito, tal que $I_N \subset H$. Notemos que $(H \setminus I_N) \cap G_\varepsilon$ ou é vazio, ou contém apenas o vetor nulo. Logo,

$$\left\| \sum_{i \in H} x_i - y \right\| \leq \left\| \sum_{i \in H \setminus I_N} x_i \right\| + \left\| \sum_{i \in I_N} x_i - y \right\| < \varepsilon,$$

como queríamos. ∎

Proposição 1.6. *Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto não-vazio e $(x_i)_{i \in I}$ uma família desordenadamente somável de elementos de X. Então o conjunto $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ é enumerável.*

Demonstração. Consideremos a sequência $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como na demonstração do Teorema 1.5. Pelo que vimos, cada I_n é finito; logo, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ é enumerável. O resultado segue da inclusão $\{i \in I : x_i \neq 0\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. ∎

Uma outra noção de soma de uma sequência é a seguinte.

Definição 1.7 ([25], pg. 204)**.** Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X. Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é *incondicionalmente somável* se para toda permutação $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente.

Teorema 1.8 ([25], pg. 204)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X. Então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é desordenadamente somável se, e somente se, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é incondicionalmente somável.*

Demonstração. Suponhamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja desordenadamente somável. Seja $\varepsilon > 0$ fixado e seja $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação qualquer. Por hipótese, existe um conjunto finito $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\varnothing \neq F \subset \mathbb{N}, \text{finito}, F \cap F_\varepsilon = \varnothing \implies \left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Seja $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F_\varepsilon \subset \{\sigma(n) : 1 \leq n \leq N_1\}.$$

Então temos que

$$m \geq n > N_1 \implies \left\| \sum_{j=n}^{m} x_{\sigma(j)} \right\| < \varepsilon,$$

isto é, a sequência das somas parciais $\left(\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é incondicionalmente somável.

Reciprocamente, suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não seja desordenadamente somável. Vamos construir uma permutação $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma'(n)}$ não é convergente.

Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \subset \mathbb{N}$ finito existe $\varnothing \neq B \subset \mathbb{N}$, finito, $A \cap B = \varnothing$, satisfazendo

$$\left\| \sum_{n\in B} x_n \right\| \geq \delta.$$

Vamos construir indutivamente uma sequência $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos e não-vazios de $\mathbb{N}$ tal que:

(i) $I_j \cap I_k = \varnothing$ se $j \neq k$;

(ii) $\left\|\sum_{n\in I_k} x_n\right\| \geq \delta, \forall k \in \mathbb{N}$.

Existe $I_1 \subset \mathbb{N}$, finito, não-vazio, tal que $1 \notin I_1$ e

$$\left\| \sum_{n\in I_1} x_n \right\| \geq \delta.$$

Suponhamos construídos $I_1, \ldots, I_j$ subconjuntos finitos e não-vazios de $\mathbb{N}$ satisfazendo as propriedades acima, para algum $j \in \mathbb{N}$. Então existe $I_{j+1} \subset \mathbb{N}$, finito, tal que

$$I_{j+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j} I_i \cup \{1\} \right) = \varnothing \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{n\in I_{j+1}} x_n \right\| \geq \delta.$$

É fácil ver que a sequência $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tem as propriedades desejadas. Observemos que

$$1 \in \mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, vamos escrever $I_k = \{a_1^k, \ldots, a_{l_k}^k\}$, onde $a_i^k < a_j^k$ se $i < j$, e $l_0 = 0$. Temos dois casos a considerar:

Primeiro caso: $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ é finito.

Escreva $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = \{m_1, \ldots, m_r\}$, onde $m_i \neq m_j$ se $i \neq j$. Vamos definir $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por

$$\sigma'(n) = \begin{cases} m_j & \text{se } n = j, 1 \leq j \leq r \\ a_j^k & \text{se } n = r + \sum_{i=0}^{k-1} l_i + j, 1 \leq j \leq l_k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Então σ' é bijetora por construção. Mostremos que a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma'(n)}$ não é de Cauchy.

Fixado $k \in \mathbb{N}$, tomemos

$$n = r + \sum_{i=0}^{k-1} l_i + 1, \quad m = r + \sum_{i=0}^{k} l_i.$$

É claro que $m > n \geq k$. Além disso,

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} x_{\sigma'(j)} \right\| = \left\| \sum_{j \in I_k} x_j \right\| \geq \delta.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma'(n)}$ não converge em X.

Segundo caso: $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ é infinito.

Escreva $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $m_i \neq m_j$ se $i \neq j$. Definimos $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por

$$\sigma'(n) = \begin{cases} m_k & \text{se } n = k + \sum_{i=0}^{k-1} l_i, k \in \mathbb{N} \\ a_j^k & \text{se } n = k + \sum_{i=0}^{k-1} l_i + j, 1 \leq j \leq l_k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Então σ' é bijetora por construção. Mostremos que a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma'(n)}$ não é de Cauchy.

Fixado $k \in \mathbb{N}$, tomemos

$$n = k + \sum_{i=0}^{k-1} l_i + 1, \quad m = k + \sum_{i=0}^{k} l_i.$$

É claro que $m > n \geq k$. Além disso,

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} x_{\sigma'(j)} \right\| = \left\| \sum_{j \in I_k} x_j \right\| \geq \delta.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma'(n)}$ não converge em X.

Concluímos, portanto, que em ambos os casos existe uma permutação $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma'(n)}$ não é convergente. Isto prova que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é incondicionalmente somável. ∎

Proposição 1.9. *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência incondicionalmente somável. Seja $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação qualquer. Então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Demonstração. Seja $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação qualquer e seja $y = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$. Pela Proposição 1.2, a demonstração estará completa se mostrarmos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem soma y (segundo a Definição 1.1).

Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Pelo Teorema 1.8, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é desordenadamente somável. Logo, existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}$, finito, não-vazio, tal que

$$\varnothing \neq F \subset \mathbb{N}, \text{finito}, F_\varepsilon \cap F = \varnothing \implies \left\| \sum_{i\in F} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $y = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_1 \implies \left\| \sum_{j=1}^{N_1} x_{\sigma(j)} - y \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\varepsilon \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(N_2)\}$. Definimos $N = \max\{N_1, N_2\}$ e

$$G_\varepsilon = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\}.$$

Dado $G \subset \mathbb{N}$, finito, $G_\varepsilon \subset G$, temos que

$$\left\| y - \sum_{i\in G} x_i \right\| \leq \left\| y - \sum_{j=1}^{N} x_{\sigma(j)} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{N} x_{\sigma(j)} - \sum_{i\in G} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{i\in G\setminus G_\varepsilon} x_i \right\| < \varepsilon,$$

onde a última desigualdade segue de $(G \setminus G_\varepsilon) \cap F_\varepsilon = \varnothing$. Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem soma (desordenada) y. ∎

Com este resultado, podemos escolher uma permutação conveniente dos índices de uma sequência incondicionalmente somável para computar sua soma. Esta noção de somabilidade é estritamente mais forte do que a noção usual de convergência de séries; existem sequências somáveis que não são incondicionalmente somáveis. Um exemplo simples é o seguinte.

Exemplo 1.10. Considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$. Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

Vamos reordenar os termos da forma

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, -\frac{1}{2(2n+1)}, -\frac{1}{4(n+1)}, \ldots\right),$$

e definir $s_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$. Para cada $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} s_{3n} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\ s_{3n+1} &= s_{3n} + \frac{1}{2n+1} \\ s_{3n+2} &= s_{3n} + \frac{1}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

Como

$$s_{3n} \longrightarrow \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{\ln(2)}{2},$$

temos que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \frac{\ln(2)}{2}$. Logo, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é incondicionalmente somável.

É possível mostrar que as noções de somabilidade absoluta e incondicional de sequências coincidem em dimensão finita. Notemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada no Exemplo 1.10 não é absolutamente somável. Em dimensão infinita, isto não ocorre; também é possível mostrar que todo espaço de Banach de dimensão infinita contém uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável. Um exemplo de tal sequência pode ser encontrado no Exemplo 1.60.

1.2 Bases de Schauder

A seguir, estudamos brevemente os conceitos de base de Schauder e de sequência básica em um espaço de Banach, que serão usados no Capítulo 2.

Definição 1.11 ([18], pg. 350, Definição 4.1.1). Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *base de Schauder* de X se para cada $x \in X$ existe uma única sequência de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Definição 1.12 ([18], pg. 350, Definição 4.1.2). Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência básica* se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder do espaço $\overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$[1].

Proposição 1.13 ([18], pg. 352, Definição 4.1.9). *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência básica em X. Então a família $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente.*

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que existam $k \in \mathbb{N}$ e $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{k} a_n x_n = 0.$$

Então o vetor nulo não possui representação única como soma de elementos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; uma contradição. Logo, $\{x_1, \dots, x_k\}$ é linearmente independente, para todo $k \in \mathbb{N}$, como queríamos. ■

Definição 1.14. Sejam X e Y espaços de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bases de Schauder de X e de Y, respectivamente. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são *equivalentes* se existe um isomorfismo $T \colon X \to Y$ de X sobre Y tal que $T(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.15. *Sejam X e Y espaços de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de Schauder de X e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Y. São equivalentes:*

[1] Dada uma família $(x_i)_{i\in I}$ em um espaço normado X, denotamos por $\operatorname{span}\{x_i : i \in I\}$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ gerado por $(x_i)_{i\in I}$, isto é, o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de $(x_i)_{i\in I}$ com coeficientes reais.

(i) Existe $T\colon X \to Y$, isomorfismo sobre sua imagem, tal que $T(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) Existem números reais $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que, para todo $m \in \mathbb{N}$ e para toda família de escalares $\{a_1, \ldots, a_m\}$, tem-se

$$\delta \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n y_n \right\| \leq M \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\|.$$

Além disso, se as condições (i) e (ii) são satisfeitas, então $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência básica em Y, equivalente a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demonstração. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Basta tomar $\delta = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ e $M = \|T\|$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Afirmamos que, dada uma sequência de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge. De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \geq n > 1$. Definimos $b_i = 0$, se $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, e $b_i = a_i$, se $i \in \{n, \ldots, m\}$. Por um lado, temos que

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} a_j x_j \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} b_i x_i \right\| \leq \frac{1}{\delta} \left\| \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \right\| = \frac{1}{\delta} \left\| \sum_{j=n}^{m} a_j y_j \right\|.$$

Por outro lado, obtemos

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} a_j y_j \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{m} b_i x_i \right\| = M \left\| \sum_{j=n}^{m} a_j x_j \right\|.$$

Logo, a sequência das somas parcias de $(a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X se, e somente se, a sequência das somas parcias de $(a_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em Y. Isto prova a afirmação.

Definimos o operador linear $T\colon X \to Y$ por

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n,$$

para todo $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$.

Mostremos que T é injetor. Se $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = 0$, então

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{m} a_n y_n = 0.$$

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$m \geq N_\varepsilon \implies \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n y_n \right\| < \delta\varepsilon,$$

donde

$$m \geq N_\varepsilon \implies \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\| < \varepsilon.$$

Então temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \lim_{m \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{m} a_n x_n = 0.$$

Logo, T é injetor.

Notemos também que

$$\begin{aligned} \left\| T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \\ &= \lim_{m \longrightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n y_n \right\| \\ &\leq M \lim_{m \longrightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\| \\ &= M \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|, \end{aligned}$$

para todo $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$. Logo, T é contínuo. Analogamente, concluímos que o operador linear $T^{-1} \colon \mathrm{Im}(T) \to X$ também é contínuo. Isto prova (i).

Finalmente, suponhamos que (i) e (ii) sejam verificadas. Todo elemento de $\mathrm{Im}(T) \subset Y$ pode ser escrito na forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$, onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de escalares, e a unicidade desta representação segue da bijetividade de T e do fato de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser base de Schauder de X. Logo, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é base de Schauder do espaço de Banach $\mathrm{Im}(T)$. É claro que $\mathrm{Im}(T) \subset \overline{\mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Por outro lado, como $y_n \in \mathrm{Im}(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Im}(T)$, e como $\mathrm{Im}(T)$ é fechado, concluímos $\overline{\mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \mathrm{Im}(T)$. A equivalência entre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ segue diretamente de (i). ∎

Definição 1.16 ([18], pg. 393, Definição 4.3.15). Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de Schauder de X. Uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de vetores não-nulos de X é dita uma *sequência de blocos* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma sequência estritamente crescente de números naturais

$$1 = p_1 < p_2 < \ldots < p_j < \ldots$$

e uma sequência de escalares $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que, para cada $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$u_j = \sum_{i=p_j}^{p_{j+1}-1} a_i x_i.$$

1.3 A topologia fraca-estrela

A fim de fixarmos a notação necessária para enunciar os Teoremas 1.19 e 1.20, lembramos alguns resultados sobre a topologia fraca-estrela do dual de um espaço de Banach.

Seja X um espaço normado e seja X^{**} seu bidual. A *aplicação canônica* de X em X^{**} é o operador linear contínuo $J_X\colon X \to X^{**}$ dado por $J_X(x) = \hat{x}$, onde

$$\begin{aligned} \hat{x} : X^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \varphi(x)\,. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\|J_X(x)\| = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\hat{x}(\varphi)| = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x)| = \|x\|,$$

para todo $x \in X$. Logo, J_X é uma isometria linear de X em X^{**}.

Definição 1.17 ([18], pg. 223, Definição 2.6.1)**.** Seja X um espaço normado. A *topologia fraca-estrela* é a topologia menos fina de X^* que torna contínuos todos os funcionais lineares $\hat{x} = J(x)$, para $x \in X$. Denotaremos esta topologia por w^*.

Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X^* e $\varphi_0 \in X^*$, escrevemos $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi_0$ se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ_0 na topologia w^*.

Proposição 1.18. *Sejam X um espaço de Banach, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X^* e $\varphi_0 \in X^*$. Então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi_0$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi_0(x)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Indicamos [18], pg. 224. ■

Teorema 1.19 (Teorema de Alaoglu). *Seja X um espaço de Banach. Então (B_{X^*}, w^*) é compacto.*

Demonstração. Indicamos [18], pg. 229. ■

Teorema 1.20. *Seja X um espaço de Banach. Então (B_{X^*}, w^*) é metrizável se, e somente se, X é separável.*

Demonstração. Indicamos [18], pg. 231. ■

1.4 Cópias de espaços de Banach

Nesta seção introduzimos as noções de cópias e cópias complementadas de espaços de Banach, que serão nosso objeto de estudo nos Capítulos 2 e 3. Também apresentamos propriedades úteis relacionadas a estes conceitos.

Definição 1.21. Sejam X, Y espaços de Banach. Dizemos que X *contém uma cópia de* Y, e denotamos $Y \hookrightarrow X$, se Y é isomorfo a algum subespaço de X.

Definição 1.22 ([18], pg. 295, Definição 3.2.2)**.** Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Dizemos que Y é *complementado* em X se Y é fechado e existe W subespaço fechado de X tal que $X = Y \oplus W$, isto é, se para todo $x \in X$ existem únicos $y \in Y$ e $w \in W$ tais que $x = y + w$.

Definição 1.23. Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X *contém uma cópia complementada de* Y, e denotamos $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$, se Y é isomorfo a algum subespaço complementado de X.

Definição 1.24 ([18], pg. 296, Definição 3.2.4)**.** Sejam X um espaço de Banach, Y um subespaço de X e $P\colon X \to Y$ um operador linear contínuo. Dizemos que P é uma *projeção de X sobre Y* se $\operatorname{Im}(P) = Y$ e $P \circ P = P$, ou equivalentemente, $\operatorname{Im}(P) = Y$ e $P(y) = y$, para todo $y \in Y$.

Proposição 1.25 ([18], pg. 299, Corolário 3.2.15)**.** *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Então Y é complementado em X se, e somente se, existe $P\colon X \to Y$ projeção sobre Y.*

Demonstração. Suponhamos que Y seja complementado em X. Para cada $x \in X$ existem únicos $y_x \in Y$ e $w_x \in W$ satisfazendo

$$x = y_x + w_x.$$

Definimos o operador linear

$$\begin{aligned} P\colon X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y_x\,. \end{aligned}$$

Notemos que $P(y) = y$, para todo $y \in Y$, e $P(w) = 0$, para todo $w \in W$. Em particular, $\mathrm{Im}(P) = Y$. Temos também que

$$P(P(x)) = P(y_x) = y_x = P(x),$$

para todo $x \in X$, isto é, $P \circ P = P$.

Basta mostrar, agora, que P é contínua. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $x_n \longrightarrow x \in X$ e $P(x_n) \longrightarrow y \in X$, e mostremos que $y = P(x)$. Vamos escrever, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = y_n + w_n,$$

onde $y_n \in Y$ e $w_n \in W$. Então $x_n \longrightarrow x$ e $y_n = P(x_n) \longrightarrow y$, e portanto

$$w_n = x_n - y_n \longrightarrow x - y.$$

Como Y e W são fechados, temos que $y \in Y$ e $x - y \in W$. Logo, $P(y) = y$ e

$$0 = P(x - y) = P(x) - P(y) = P(x) - y,$$

ou seja, $P(x) = y$. Portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado, temos que P é contínua. Isto prova que P é uma projeção de X sobre Y.

Reciprocamente, seja $P\colon X \to Y$ uma projeção sobre Y. Definimos $W = \mathrm{Ker}(P)$. É claro que W é um subespaço fechado de X. Notemos que $Y = \mathrm{Im}(P)$ também é fechado. De fato, se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em Y que converge para algum $y \in X$, então $y_n = P(y_n) \longrightarrow P(y)$, e portanto $y = P(y) \in Y$.

Notemos também que cada $x \in X$ pode ser escrito de forma única como

$$x = \underbrace{P(x)}_{\in Y} + \underbrace{(x - P(x))}_{\in \operatorname{Ker}(P)}.$$

Com efeito, sejam $y \in Y$ e $w \in W$ tais que $x = y + w$. Então $P(x) = P(y + w) = P(y) + P(w) = y$ e $w = x - y = x - P(x)$. Logo, Y é complementado em X. ∎

Proposição 1.26 ([18], pg. 300, Teorema 3.2.18 (b)). *Seja X um espaço de Banach. Então todo subespaço de X de dimensão finita é complementado em X.*

Demonstração. Seja Y um subespaço de dimensão finita de X e seja $\{y_1, \ldots, y_n\}$ uma base de Y. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, defina o funcional linear $f_j \colon Y \to \mathbb{K}$ por

$$f_j\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\right) = \lambda_j,$$

para todo $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in Y$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe $\widetilde{f_j} \in X^*$ extensão de f_j. Defina o operador linear

$$\begin{aligned} P\colon\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \textstyle\sum_{i=1}^{n} \widetilde{f_i}(x) y_i\,. \end{aligned}$$

É fácil ver que P é uma projeção de X sobre Y. ∎

Proposição 1.27. *Sejam X, Y, Z, W espaços de Banach. Então valem:*

(i) $X \hookrightarrow Y$ *e* $Y \hookrightarrow Z \implies X \hookrightarrow Z$;

(ii) $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ *e* $Y \overset{c}{\hookrightarrow} Z \implies X \overset{c}{\hookrightarrow} Z$;

(iii) Se $X \sim Y$, $Z \sim W$ *e* $X \hookrightarrow Z$, *então* $Y \hookrightarrow W$;

(iv) Se $X \sim Y$, $Z \sim W$ *e* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Z$, *então* $Y \overset{c}{\hookrightarrow} W$.

Demonstração. (i) Basta notarmos que se $T \colon X \to Y$ e $S \colon Y \to Z$ são isomorfismos sobre suas respectivas imagens, então $S \circ T \colon X \to Z$ também é isomorfismo sobre sua imagem.

(ii) Sejam X_0 um subespaço complementado de Y isomorfo a X e Y_0 um subespaço complementado de Z isomorfo a Y. Vamos construir um subespaço complementado Z_0 de Z isomorfo a X_0 (e portanto a X). Sejam $S\colon Y \to Y_0$ um isomorfismo e $P\colon Y \to X_0$, $Q\colon Z \to Y_0$ projeções sobre X_0 e Y_0, respectivamente. Seja $Z_0 = S(X_0) \subset Y_0 \subset Z$. É claro que $Z_0 \sim X_0 \sim X$. Definimos $R = S|_{X_0} \circ P \circ S^{-1} \circ Q\colon Z \to Z_0$. É claro que R é linear e contínua. Além disso, temos que

$$R(z) = (S \circ P \circ S^{-1} \circ Q) \underbrace{(z)}_{\in Y_0} = (S \circ P) \underbrace{(S^{-1}(z))}_{\in X_0} = S(S^{-1}(z)) = z,$$

para todo $z \in Z_0 = S(X_0)$. Logo, R é projeção sobre Z_0.

(iii) Sejam $T\colon X \to Y$ e $S\colon Z \to W$ isomorfismos. Seja $I\colon X \to Z$ isomorfismo sobre sua imagem. Então $S \circ I \circ T^{-1}\colon Y \to W$ é isomorfismo sobre sua imagem.

(iv) Como $X \sim Y$ e $Z \sim W$, temos que $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$ e $Z \overset{c}{\hookrightarrow} W$. Por hipótese, $X \overset{c}{\hookrightarrow} Z$. Segue de (ii), portanto, que $Y \overset{c}{\hookrightarrow} W$. ■

Proposição 1.28. *Sejam X, Y, Z, espaços de Banach. Sejam $T\colon X \to Y$ e $S\colon Y \to Z$ isomorfismos sobre suas respectivas imagens, e suponhamos que $(S \circ T)(X)$ seja complementado em Z. Então $T(X)$ é complementado em Y.*

Demonstração. Seja $P\colon Z \to (S \circ T)(X)$ uma projeção sobre $W = (S \circ T)(X)$. Consideremos o operador linear contínuo $Q = S^{-1}|_W \circ P \circ S\colon Y \to T(X)$. Notemos que

$$Q(y) = S^{-1}(P \underbrace{(S(y))}_{\in W}) = S^{-1}(S(y)) = y,$$

para todo $y \in T(X)$. Logo, $T(X)$ é complementado em Y. ■

1.5 Alguns resultados de topologia e teoria dos conjuntos

A seguir, vamos apresentar alguns resultados e definições de topologia e de teoria dos conjuntos que serão úteis no decorrer do trabalho. Vamos considerar espaços topológicos não-vazios. Como bibliografia básica para esta seção, indicamos [8] e [15].

Definição 1.29 ([8], pg. 25). Seja S um espaço topológico. Definimos a *densidade* de S como sendo a menor cardinalidade de um subconjunto denso de S, e denotamos $\mathrm{dens}(S)$. Se $\mathrm{dens}(S) \leq \aleph_0$, dizemos que S é *separável.*

Proposição 1.30 ([8], pg. 256, Corolário 4.1.16). *Seja K um espaço compacto metrizável. Então K admite uma base de abertos enumerável.*

Demonstração. Seja d uma métrica sobre K compatível com a topologia de K. Denotemos a bola aberta de centro $x \in K$ e raio $\varepsilon > 0$ em K por $B_d(x, \varepsilon)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$\mathcal{B}_n = \left\{ B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in K \right\}.$$

Cada $\mathcal{B}_n$ é um recobrimento aberto de K. Como K é compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $K_n \subset K$, finito, tal que

$$\bigcup_{x \in K_n} B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) = K.$$

Consideremos a família de abertos

$$\mathcal{B} = \left\{ B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in K_n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

É claro que $\mathcal{B}$ é enumerável. Mostremos que $\mathcal{B}$ é uma base de abertos de K.

Seja Ω um aberto não-vazio de K. Para cada $y \in \Omega$, existe $r_y > 0$ tal que $B_d(y, r_y) \subset \Omega$. Seja $m_y \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m_y} < \frac{r_y}{2}.$$

Como

$$\bigcup_{x \in K_{m_y}} B_d\left(x, \frac{1}{m_y}\right) = K,$$

existe $x_y \in K_{m_y}$ tal que $y \in B_d\left(x_y, \frac{1}{m_y}\right)$.

Dado $z \in B_d\left(x_y, \frac{1}{m_y}\right)$ qualquer, temos que

$$d(z, y) \leq d(z, x_y) + d(x_y, y) < \frac{1}{m_y} + \frac{1}{m_y} < r_y,$$

isto é, $z \in B_d(y, r_y) \subset \Omega$. Isto prova que

$$B_d\left(x_y, \frac{1}{m_y}\right) \subset \Omega, \forall y \in \Omega.$$

Logo,

$$\bigcup_{y \in \Omega} B_d\left(x_y, \frac{1}{m_y}\right) \subset \Omega,$$

como queríamos. ■

Corolário 1.31 ([8], pg. 25, Corolário 1.3.8). *Todo espaço compacto metrizável é separável.*

Demonstração. Seja K metrizável e compacto. Vamos construir um subconjunto denso e enumerável em K. Pela Proposição 1.30, existe $\mathcal{B}$ base de abertos de K, enumerável. Para cada $B \in \mathcal{B}$ não-vazio, fixe $x_B \in B$. Defina

$$D = \{x_B : B \in \mathcal{B}, B \neq \varnothing\} \subset K.$$

Claramente, D é enumerável. Mostremos que D é denso em K.

Seja Ω um aberto não-vazio. Como $\mathcal{B}$ é base de abertos, existe $B \in \mathcal{B}$ satisfazendo $B \subset \Omega$. Portanto,

$$x_B \in B \subset \Omega \implies D \cap \Omega \neq \varnothing.$$

Isto prova que D é denso. ■

Proposição 1.32. *Seja K um espaço compacto metrizável e seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em K que possui um único ponto de acumulação $x \in K$. Então $x_n \longrightarrow x$.*

Demonstração. Seja d uma métrica sobre K compatível com a topologia de K. Suponhamos, por absurdo, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não convirja para x. Então existem $\varepsilon > 0$ e $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo

$$d(x_{n_j}, x) > \varepsilon, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como (K, d) é métrico compacto, a sequência $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente.

O limite desta subsequência é x, por hipótese. Então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varepsilon < d(x_{n_{j_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2};$$

uma contradição. Portanto, $x_n \longrightarrow x$. ■

Proposição 1.33. *Seja S um espaço de Hausdorff, finito. Então a topologia sobre S é a topologia discreta (isto é, todo subconjunto de S é aberto).*

Demonstração. É suficiente provarmos que todos os unitários são abertos em S. Se S é unitário, nada temos que fazer. Caso contrário, fixemos $x \in S$ e vamos escrever $S = \{x\} \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$, onde $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Como S é de Hausdorff, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existem abertos U_j, V_j em S satisfazendo

$$x \in U_j, x_j \in V_j \text{ e } U_j \cap V_j = \varnothing.$$

Seja $U = \bigcap_{j=1}^{n} U_j$. Então U é aberto em S (como interseção finita de abertos) e $x \in U$. Além disso, $x_j \notin U$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, e portanto $U = \{x\}$. ■

Proposição 1.34 ([8], pg. 125, Teorema 3.1.13)**.** *Sejam K um espaço compacto e seja S um espaço de Hausdorff. Seja $f\colon K \to S$ uma função contínua e bijetora. Então f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Basta mostrarmos que f^{-1} é contínua, isto é, que a imagem de cada subconjunto fechado de K por f é fechada em S. Seja $F \subset K$ fechado. Então F é compacto, e pela continuidade de f, $f(F)$ é compacto em S. Como S é de Hausdorff, temos que $f(F)$ é fechado em S, como queríamos. ■

Proposição 1.35. *Seja K um espaço de Hausdorff compacto, infinito. Então existe uma família enumerável e infinita $\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ de abertos de K satisfazendo:*

(i) $\Omega_n \neq \varnothing, \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, *se* $i \neq j$.

Demonstração. Vamos construir a família $\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ indutivamente. Sejam $x, y \in K$, $x \neq y$. Por hipótese, existem abertos disjuntos U_x e U_y tais que $x \in U_x$ e $y \in U_y$. Temos três casos a considerar:

Primeiro caso: U_x é infinito.

Definimos $\Omega_1 = U_y$. Notemos que U_x é um aberto infinito que não intercepta Ω_1.

Segundo caso: U_x é finito e U_y é infinito.

Definimos $\Omega_1 = U_x$. Então Ω_1 é finito, e portanto fechado. Logo, $K \setminus \Omega_1$ é um aberto infinito que não intercepta Ω_1.

Terceiro caso: U_x e U_y são ambos finitos.

Definimos $\Omega_1 = U_x \cap U_y$. Então Ω_1 é finito, e portanto fechado. Logo, $K \setminus \Omega_1$ é um aberto infinito que não intercepta Ω_1.

Então temos construídos abertos disjuntos Ω_1, Ω tais que $\Omega_1 \neq \varnothing$ e Ω é infinito.

Suponhamos obtidos $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ abertos não-vazios e dois a dois disjuntos e um aberto Ω, infinito, tal que $\Omega \cap \Omega_j = \varnothing$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sejam $x', y' \in \Omega$, $x' \neq y'$. Então existem abertos disjuntos $U_{x'}, U_{y'} \subset \Omega$ tais que $x' \in U_{x'}$ e $y' \in U_{y'}$. Vamos definir Ω_{n+1} da seguinte maneira:

Se $U_{x'}$ é infinito, definimos $\Omega_{n+1} = U_{y'}$. Notemos que $U_{x'} \subset \Omega$ é um aberto infinito que não intercepta Ω_{n+1}.

Se $U_{x'}$ é finito e $U_{y'}$ é infinito, definimos $\Omega_{n+1} = U_{x'}$. Então Ω_{n+1} é finito e fechado, e portanto $\Omega \setminus \Omega_{n+1}$ é aberto e infinito.

Se ambos $U_{x'}$ e $U_{y'}$ são finitos, definimos $\Omega_{n+1} = U_{x'} \cup U_{y'}$. Então Ω_{n+1} é finito e fechado, e portanto $\Omega \setminus \Omega_{n+1}$ é aberto e infinito.

Desta forma, obtemos Ω_{n+1} aberto, não-vazio, e $\Omega' \subset \Omega$ aberto, infinito, tais que $\Omega_{n+1} \cap \Omega' = \varnothing$. Além disso, temos que $\Omega_{n+1} \cap \Omega_j \subset \Omega \cap \Omega_j = \varnothing$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, como queríamos. ∎

Definição 1.36 ([8], pgs. 38 e 40). Seja S um espaço topológico.

- Dizemos que S *verifica o axioma* T_3 se dados quaisquer $x \in S$ e $F \subset S$ fechado, com $x \notin F$, existem abertos disjuntos Ω_1, Ω_2 tais que $x \in \Omega_1$ e $F \subset \Omega_2$.

- Dizemos que S *verifica o axioma* T_4 se dados quaisquer subconjuntos fechados e disjuntos F e K existem abertos disjuntos Ω_1, Ω_2 tais que $F \subset \Omega_1$ e $K \subset \Omega_2$.

Proposição 1.37 ([8], pg. 40). *Seja S um espaço topológico. Então S verifica o axioma T_4 se, e somente se, dados quaisquer $F \subset S$ fechado e $\Omega \subset S$ aberto, com $F \subset \Omega$, existe $W \subset S$ aberto tal que*

$$F \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega.$$

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que S verifique o axioma T_4. Sejam $F \subset S$ fechado e $\Omega \subset S$ aberto, com $F \subset \Omega$. Seja $K = S \setminus F$. Então K é fechado e $F \cap K = \varnothing$. Por hipótese, existem Ω_1, Ω_2 abertos disjuntos tais que $F \subset \Omega_1$ e $K \subset \Omega_2$. Afirmamos que $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$. De fato, suponhamos por absurdo que $\overline{\Omega_1} \not\subset \Omega$. Então existe $x \in \overline{\Omega_1} \cap (S \setminus \Omega) = \overline{\Omega_1} \cap K \subset \overline{\Omega_1} \cap \Omega_2$, e portanto $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$; uma contradição.

Reciprocamente, sejam $F, K \subset S$ fechados disjuntos. Consideremos o aberto $\Omega = S \setminus K$. Notemos que $F \subset \Omega$, pois F e K são disjuntos. Logo, existe $\Omega_1 \subset S$ aberto satisfazendo

$$F \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega.$$

Seja $\Omega_2 = S \setminus \overline{\Omega_1}$. Então Ω_1 e Ω_2 são abertos disjuntos e

$$\overline{\Omega_1} \subset \Omega = S \setminus K \implies \Omega_2 = S \setminus \overline{\Omega_1} \supset K.$$

Isto prova que S verifica o axioma T_4. ∎

Proposição 1.38 ([8], pg. 125, Teorema 3.1.9). *Seja K um espaço de Hausdorff compacto. Então K verifica os axiomas T_3 e T_4.*

Demonstração. Mostremos inicialmente que K verifica o axioma T_3. Sejam $x \in K$ e $F \subset K$ fechado tais que $x \notin F$. Para cada $y \in F$, como $x \neq y$, existem abertos disjuntos U_y e V_y tais que $x \in U_y$ e $y \in V_y$. É claro que $\{V_y : y \in F\}$ é um recobrimento aberto de F. Como F é fechado e K é compacto, temos que F também é compacto, e portanto existe $F' \subset F$, finito, tal que

$$F \subset \bigcup_{y \in F'} V_y.$$

Consideremos os abertos $\Omega_1 = \bigcap_{y \in F'} U_y$ e $\Omega_2 = \bigcup_{y \in F'} V_y$. É claro que $x \in \Omega_1$ e $F \subset \Omega_2$. Afirmamos que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. De fato, suponhamos por absurdo que esta interseção seja não-vazia. Seja $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Então

$$z \in \left(\bigcap_{y \in F'} U_y \right) \cap \left(\bigcup_{y \in F'} V_y \right),$$

e portanto existe $y_0 \in F'$ tal que

$$z \in \left(\bigcap_{y \in F'} U_y \right) \cap V_{y_0},$$

donde $U_{y_0} \cap V_{y_0} \neq \varnothing$; um absurdo.

Isto prova que K verifica o axioma T_3. Mostremos agora que K verifica o axioma T_4. Sejam $F_1, F_2 \subset K$ fechados disjuntos. Para cada $w \in F_1$, temos que $w \notin F_2$. Pelo que vimos, K verifica o axioma T_3; portanto, para cada $w \in F_1$ existem abertos disjuntos A_w e B_w satisfazendo $w \in A_w$ e $F_2 \subset B_w$. O conjunto $\{A_w : w \in F_1\}$ é um recobrimento aberto de F_1, que é compacto em K; logo, existe $F_1' \subset F_1$, finito, tal que

$$F_1 \subset \bigcup_{w \in F_1'} A_w.$$

Notemos que $F_2 \subset \bigcap_{w \in F_1'} B_w$, e que os abertos $\bigcup_{w \in F_1'} A_w$ e $\bigcap_{w \in F_1'} B_w$ são disjuntos. Isto conclui a demonstração. ■

Teorema 1.39 (Lema de Urysohn, [8], pg. 41, Teorema 1.5.11)**.** *Seja S um espaço topológico. Então S verifica o axioma T_4 se, e somente se, dados quaisquer $F, K \subset S$ fechados disjuntos e não-vazios, existe uma função contínua $f\colon S \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$, se $x \in F$, e $f(y) = 1$, se $y \in K$.*

Demonstração. Vamos usar a caracterização dada pela Proposição 1.37. Suponhamos que S verifique o axioma T_4. Sejam $F, K \subset S$ fechados, disjuntos e não-vazios. Vamos escrever

$$[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots\},$$

onde $r_0 = 0$, $r_1 = 1$ e $r_m \neq r_n$ se $m \neq n$.

Consideremos o aberto $G_{r_1} = S \setminus K$. Como $F \subset G_{r_1}$, existe aberto G_{r_0} satisfazendo

$$F \subset G_{r_0} \subset \overline{G_{r_0}} \subset G_{r_1}.$$

Vamos construir uma família de abertos $(G_r)_{r\in\mathbb{Q}}$ verificando a seguinte propriedade:

- Se $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$, então $\overline{G_r} \subset G_s$.

Definimos $G_r = \varnothing$, se $r \in \mathbb{Q}$, $r < 0$, e $G_s = S$, se $s \in \mathbb{Q}$, $s > 1$. Suponhamos que já temos construídos $G_{r_0}, \ldots, G_{r_n}$ satisfazendo a condição 1., para algum $n \in \mathbb{N}$. Sejam

$$r_l = \max\{r_i : r_i < r_{n+1}, i = 0, \ldots, n\},$$
$$r_m = \min\{r_j : r_j > r_{n+1}, j = 0, \ldots, n\}.$$

Então $r_l < r_{n+1} < r_m$, e portanto $\overline{G_{r_l}} \subset G_{r_m}$. Logo, existe um aberto $G_{r_{n+1}}$ tal que

$$\overline{G_{r_l}} \subset G_{r_{n+1}} \subset \overline{G_{r_{n+1}}} \subset G_{r_m}.$$

Vamos definir $f\colon S \to [0,1]$ por $f(t) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in G_r\}$, para todo $t \in S$. (Notemos que $t \in G_{r_1}$ e $G_r = \varnothing$, se $r \in \mathbb{Q}$, $r < 0$, e portanto $0 \leq f(t) \leq 1$)

Se $x \in F \subset G_{r_0}$, então $f(x) = 0$. Além disso, se $y \in K$, então $y \in G_r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$, $r > 1$, e $y \notin G_s$, para todo $s \in \mathbb{Q}$, $s \leq 1$, e portanto $f(y) = 1$.

Só nos resta mostrar que f é contínua. Seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Vamos analisar as imagens inversas por f dos intervalos $(a, +\infty)$ e $(-\infty, a)$.

Seja $t \in f^{-1}((a, +\infty))$ e sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $f(t) > s > r > a$. Então $t \notin G_s$ e $\overline{G_r} \subset G_s$, e portanto $x \in S \setminus \overline{G_r}$. Logo,

$$f^{-1}((a, +\infty)) \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}, r>a} \left(S \setminus \overline{G_r}\right).$$

Por outro lado, seja $r \in \mathbb{Q}$, $r > a$. Se $z \notin \overline{G_r}$, então $z \notin G_r$. Logo, $f(z) \geq r > a$, ou seja,

$z \in f^{-1}((a, +\infty))$. Isto prova que

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}, r > a} (S \setminus \overline{G_r}) \subset f^{-1}((a, +\infty)),$$

e portanto $f^{-1}((a, +\infty))$ é aberto.

Consideremos agora $t \in f^{-1}((-\infty, a))$. Dado $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(t) < r < a$, temos que $t \in G_r$; logo,

$$f^{-1}((-\infty, a)) \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}, r < a} G_r.$$

Por outro lado, seja $r \in \mathbb{Q}$, $r < a$. Se $z \in G_r$, então $f(z) \leq r < a$, e portanto $z \in f^{-1}((-\infty, a))$. Logo,

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}, r < a} G_r \subset f^{-1}((-\infty, a)).$$

Isto prova que $f^{-1}((-\infty, a))$ também é aberto.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, temos que

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, +\infty)) \cap f^{-1}((-\infty, a))$$

é aberto, como interseção finita de abertos. Então a imagem inversa de qualquer aberto de $\mathbb{R}$ é aberto em S, e portanto f é contínua.

Reciprocamente, sejam $F, K \subset S$ fechados disjuntos e não-vazios e f como no enunciado. Então

$$F \subset f^{-1}([0, 1/2)) \text{ e } K \subset f^{-1}((1/2, 1]),$$

e estas imagens inversas são abertos disjuntos de S. ■

Teorema 1.40 (Partição da Unidade, [8], pg. 301, Teorema 5.1.9). *Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja $\{U_1, \ldots, U_n\}$ um recobrimento aberto de K. Então existem $f_1, \ldots, f_n \colon K \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que:*

(i) $0 \leq f_i(x) \leq 1$, para todo $x \in K$ e para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

(ii) $f_i(x) = 0$, para todo $x \in K \setminus U_i$ e para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

(iii) $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$, para todo $x \in K$.

Uma família $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *com estas propriedades é dita uma* partição da unidade subordinada ao recobrimento $\{U_1, \ldots, U_n\}$.

Demonstração. Pela Proposição 1.38, temos que K verifica o axioma T_4. Vamos construir indutivamente $D_0, \ldots, D_n \subset K$ fechados tais que

$$K = \bigcup_{i=0}^{n} \operatorname{int}(D_i),$$

onde $\operatorname{int}(A)$ denota o interior do conjunto $A \subset K$, e $D_i \subset U_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Seja $D_0 = \varnothing$. Suponhamos construídos $D_0, \ldots, D_m \subset K$ fechados tais que

$$K = \left(\bigcup_{i=0}^{m} \operatorname{int}(D_i)\right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{n} U_j\right),$$

para algum $m \in \{0, \ldots, n-2\}$. Definimos

$$C_{m+1} = K \setminus (\operatorname{int}(D_1) \cup \ldots \cup \operatorname{int}(D_m) \cup U_{m+2} \cup \ldots \cup U_n).$$

Então $C_{m+1} \subset U_{m+1}$. Além disso, C_{m+1} é fechado em K. Logo, existe Ω_{m+1} aberto satisfazendo

$$C_{m+1} \subset \Omega_{m+1} \subset \overline{\Omega_{m+1}} \subset U_{m+1}.$$

Seja $D_{m+1} = \overline{\Omega_{m+1}}$. Temos que D_{m+1} é fechado e

$$C_{m+1} \subset \Omega_{m+1} \subset \operatorname{int}(\overline{\Omega_{m+1}}) \subset D_{m+1} \subset U_{m+1}.$$

Notemos também que

$$\left(\bigcup_{i=0}^{m} \operatorname{int}(D_i)\right) \cup \left(\bigcup_{j=m+2}^{n} U_j\right) \cup D_{m+1} \supset \left(\bigcup_{i=0}^{m} \operatorname{int}(D_i)\right) \cup \left(\bigcup_{j=m+2}^{n} U_j\right) \cup C_{m+1} = K,$$

pela definição de C_{m+1}.

Assim temos construídos $D_0, \ldots, D_{n-1} \subset K$ fechados tais que

$$K = \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \operatorname{int}(D_i) \right) \cup U_n.$$

Definimos

$$C_n = K \setminus (\operatorname{int}(D_1) \cup \ldots \cup \operatorname{int}(D_{n-1})).$$

Então $C_n \subset U_n$ é fechado, e portanto existe Ω_n aberto tal qu

$$C_n \subset \Omega_n \subset \overline{\Omega_n} \subset U_n.$$

Seja $D_n = \overline{\Omega_n}$. Temos que D_n é fechado e

$$C_n \subset \Omega_n \subset \operatorname{int}(\overline{\Omega_n}) \subset D_n \subset U_n.$$

Além disso,

$$\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \operatorname{int}(D_i) \right) \cup D_n \supset \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \operatorname{int}(D_i) \right) \cup C_n = K,$$

pela definição de C_n.

Notemos que $\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int}(D_i) = K$, pois $D_0 = \varnothing$. Pelo Teorema 1.39, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $g_i \colon K \to [0,1]$ contínua tal que $g_i(x) = 1$, se $x \in D_i$, e $g_i(y) = 0$, se $y \in K \setminus U_i$. Como $\{D_1, \ldots, D_n\}$ é um recobrimento de K, temos que $g_1(x) + \ldots + g_n(x) > 0$, para todo $x \in K$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $f_i \colon K \to \mathbb{R}$ por

$$f_i(x) = \frac{g_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} g_j(x)},$$

para todo $x \in K$. Cada f_i é contínua, como quociente de funções contínuas. Além disso, temos:

(i) $0 \leq f_i(x) \leq 1$, para todo $x \in K$ e para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

(ii) $f_i(x) = 0$, para todo $x \in K \setminus U_i$ e para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

(iii) $\sum_{j=1}^{n} f_i(x) = 1$, para todo $x \in K$.

Isto conclui a demonstração. ∎

Proposição 1.41. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, D um subconjunto denso de K e $f, g\colon K \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então valem:*

(i) Se $f(d) = g(d)$, para todo $d \in D$, então $f = g$;

(ii) $\sup\{|f(k)| : k \in K\} = \sup\{|f(d)| : d \in D\}$.

Demonstração. (i) Suponhamos, por absurdo, que exista $k \in K$ tal que $f(k) \neq g(k)$. Tomando $\delta = |f(x) - g(x)| > 0$, temos

$$\left(f(k) - \frac{\delta}{2}, f(k) + \frac{\delta}{2}\right) \cap \left(g(k) - \frac{\delta}{2}, g(k) + \frac{\delta}{2}\right) = \varnothing.$$

Sejam $U = f^{-1}\left(\left(f(x) - \frac{\delta}{2}, f(x) + \frac{\delta}{2}\right)\right)$ e $V = f^{-1}\left(\left(g(x) - \frac{\delta}{2}, g(x) + \frac{\delta}{2}\right)\right)$. Então U e V são abertos em K, com $x \in U \cap V$. Pela densidade de D, existe $d \in D \cap U \cap V$. Logo,

$$f(d) = g(d) \in \left(f(k) - \frac{\delta}{2}, f(k) + \frac{\delta}{2}\right) \cap \left(g(k) - \frac{\delta}{2}, g(k) + \frac{\delta}{2}\right);$$

uma contradição. Logo, $f = g$.

(ii) Seja $M = \sup\{|f(k)| : k \in K\}$. É claro que M é um limitante superior de $\{|f(d)| : d \in D\}$. Fixemos $\varepsilon > 0$ e mostremos que $M - \varepsilon$ não é limitante superior deste conjunto. Por definição, existe $k_\varepsilon \in K$ com

$$M \geq |f(k_\varepsilon)| > M - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $W_\varepsilon = f^{-1}((f(k_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}, f(k_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}))$. Como W_ε é um aberto não-vazio de K e D é denso, existe $d_\varepsilon \in D \cap W_\varepsilon$. Então temos que

$$|f(d_\varepsilon)| \geq |f(k_\varepsilon)| - |f(k_\varepsilon) - f(d_\varepsilon)| > M - \varepsilon,$$

donde $M - \varepsilon$ não é limitante superior de $\{|f(d)| : d \in D\}$. Logo,

$$\sup\{|f(d)| : d \in D\} = M,$$

como queríamos. ∎

As definições a seguir terão papel fundamental no capítulo 3. Vamos também relembrar os enunciados da Hipótese do Contínuo e do Axioma de Martin. Observamos que nos enunciados da Hipótese do Contínuo, do Axioma de Martin e do Lema 1.45 estamos assumindo os axiomas usuais de teoria dos conjuntos e o Axioma da Escolha (ZFC).

Definição 1.42 ([4], pg. 35). Sejam $\tau > \aleph_0$ um cardinal e K um espaço de Hausdorff compacto. Dizemos que K satisfaz a *τ-chain condition* se toda família de abertos não-vazios e dois a dois disjuntos de K tem cardinalidade menor do que τ. Quando $\tau = \aleph_1$, diremos que K tem a *countable chain condition*, ou simplesmente K tem a ccc.

Hipótese do Contínuo (CH, [15], pg. 37). $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Axioma de Martin (MA, [23], pg. 15). Seja K um espaço de Hausdorff compacto que tem a ccc. Então K não pode ser escrito da forma

$$K = \bigcup_{i \leq \alpha} F_i,$$

onde $\alpha < 2^{\aleph_0}$ é um cardinal e cada F_i é *raro* (isto é, o interior de $\overline{F_i}$ é vazio).

Definição 1.43 ([4], pg. 21). Seja $\tau > \aleph_0$ um cardinal e seja S um espaço topológico. Dizemos que τ é um *caliber* de S se dada qualquer família $\{U_i : i \in \tau\}$ de subconjuntos abertos e não-vazios de S, existe um subconjunto Γ de τ tal que $|\Gamma| = \tau$ e $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \neq \varnothing$.

Definição 1.44 ([15], pg. 31). Seja τ um cardinal. A *cofinalidade* de τ é o menor cardinal μ tal que existe uma família de ordinais $\{\alpha_i : i < \mu\}$ com $\alpha_i < \tau$, para todo $i < \mu$, e $\sup\{\alpha_i : i < \mu\} = \tau$, e é denotada por $\mathrm{cf}(\tau)$.

Quando $\mathrm{cf}(\tau) = \tau$, dizemos que τ é *regular*. Caso contrário, dizemos que τ é *singular*.

Lema 1.45. *Assumindo MA, seja K um espaço de Hausdorff compacto que tem a ccc, e seja λ um cardinal regular, $\aleph_0 < \lambda < 2^{\aleph_0}$. Então λ é um* caliber *de K.*

Demonstração. Indicamos [23], página 16. ■

Por fim, enunciamos dois resultados simples sobre cardinalidade.

Lema 1.46. *Sejam I um conjunto não-vazio, λ um cardinal e $(A_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos satisfazendo $|A_i| \leq \lambda$, para todo $i \in I$. Então*

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq |I| \cdot \sup_{i\in I} |A_i|.$$

Demonstração. Seja $\mu = \sup_{i\in I} |A_i| \leq \lambda$. Para cada $i \in I$, seja $\phi_i \colon A_i \to \mu$ uma função injetora. Definimos

$$\begin{aligned} \phi : \ \textstyle\bigcup_{i\in I}(\{i\} \times A_i) &\longrightarrow I \times \mu \\ (i, a) &\longmapsto (i, \phi_i(a)) \,. \end{aligned}$$

Se $(i, \phi_i(a)) = (j, \phi_j(b))$, então $i = j$ e $\phi_i(a) = \phi_i(b)$, donde $a = b$ (pois ϕ_i é injetora). Logo, ϕ é injetora, e portanto

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \left|\bigcup_{i\in I}(\{i\} \times A_i)\right| \leq |I \times \mu| = |I| \cdot \mu,$$

como queríamos. ∎

Definição 1.47. Seja I um conjunto qualquer. O *conjunto das partes de I* é o conjunto $\wp(I)$ de todos os subconjuntos de I. O *conjunto das partes finitas de I* é o conjunto

$$\wp_f(I) = \{F \subset I : F \text{ é finito}\}.$$

Lema 1.48. *Seja I um conjunto infinito. Então $|\wp_f(I)| = |I|$.*

Demonstração. É fácil ver que a função $I \ni i \longmapsto \{i\} \in \wp_f(I)$ é injetora. Logo, $|I| \leq |\wp_f(I)|$.

Mostremos a desigualdade contrária. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\wp_n(I) = \{F \subset I : |F| = n\}$. Então

$$\wp_f(I) = \{\varnothing\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \wp_n(I).$$

Como $I^n \ni (i_1, \ldots, i_n) \longmapsto \{i_1, \ldots, i_n\} \in \wp_n(I)$ é sobrejetora, temos que $|\wp_n(I)| \leq |I^n| = |I|$. Portanto, pelo Lema 1.46, temos que

$$\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \wp_n(I)\right| \leq |\mathbb{N}| \cdot |I| = |I|,$$

como queríamos. ■

1.6 Os espaços $c_0(\Gamma)$

Nesta seção vamos estudar os espaços de Banach $c_0(\Gamma)$, onde Γ é um conjunto não-vazio. Indicamos [9] como bibliografia básica para esta seção.

Lembramos que dado Γ um conjunto não-vazio, denotamos por $c_0(\Gamma)$ o espaço vetorial das funções $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ tais que para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \geq \varepsilon\}$ é finito, munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|, \forall\, f \in c_0(\Gamma).$$

Quando conveniente, denotaremos uma função $f \in c_0(\Gamma)$ por $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, onde $f_\gamma = f(\gamma)$.

Proposição 1.49. *Seja Γ um conjunto finito, não-vazio, $|\Gamma| = n$. Então $c_0(\Gamma) \sim \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Vamos escrever $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, onde $\gamma_i \neq \gamma_j$ se $i \neq j$. Como Γ é finito, temos que $c_0(\Gamma)$ coincide com o espaço vetorial de todas as funções de Γ em $\mathbb{R}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $f_i\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ por $f_i(\gamma_i) = 1$ e $f_i(\gamma_j) = 0$, se $j \neq i$. Mostremos que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base de $c_0(\Gamma)$.

Seja $f \in c_0(\Gamma)$ fixada. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^n f(\gamma_i) f_i\right)(\gamma_j) = \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) f_i(\gamma_j) = f(\gamma_j).$$

Logo, $f = \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) f_i$. Isto prova que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ gera $c_0(\Gamma)$.

Para mostrarmos que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é linearmente independente, sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$. Dado $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos que

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i\right)(\gamma_j) = \alpha_j.$$

Portanto, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Isto conclui a demonstração. ■

Teorema 1.50. *Seja Γ um conjunto não-vazio. Então $(c_0(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(c_0(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$, onde $x_n = (x_n^i)_{i\in\Gamma}$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Então existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{i\in\Gamma} |x_n^i - x_m^i| = \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n \geq n_\varepsilon$. Logo, para cada $i \in \Gamma$, a sequência $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, e portanto converge para algum $x^i \in \mathbb{R}$. Seja $x = (x^i)_{i\in\Gamma}$. Mostremos que $x \in c_0(\Gamma)$ e que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$.

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$, para todos $m, n \geq N$. Temos, portanto, que

$$|x_n^i - x_m^i| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, i \in \Gamma, \forall\, m, n \geq N.$$

Fixando $n \geq N$ e $i \in \Gamma$ e fazendo $m \longrightarrow \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$|x_n^i - x^i| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, i \in \Gamma, \forall\, n \geq N. \tag{*}$$

Se $i \in \Gamma$ é tal que $|x^i| \geq \varepsilon$, então

$$\varepsilon \leq |x^i| \leq |x^i - x_N^i| + |x_N^i| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |x_N^i|,$$

donde $|x_N^i| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x_N \in c_0(\Gamma)$, temos que isto só vale para um número finito de índices, e portanto $\{i \in \Gamma : |x^i| \geq \varepsilon\}$ também é finito. Isto prova que $x \in c_0(\Gamma)$.

Além disso, a desigualdade (*) implica que $\|x - x_n\|_\infty < \varepsilon$, para todo $n \geq N$, isto é, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$. ∎

Definição 1.51. A *base canônica* do espaço $c_0(\Gamma)$ é a família $(e_i)_{i\in\Gamma}$, onde $e_i(i) = 1$ e $e_i(j) = 0$, se $i \neq j$.

É fácil ver que a família $(e_i)_{i\in\Gamma}$ é linearmente independente. Se Γ é finito, $|\Gamma| = n$, vimos que $c_0(\Gamma) \sim \mathbb{R}^n$, e a família $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ é base algébrica de $c_0(\Gamma)$. Se Γ é infinito, esta família não é base algébrica de $c_0(\Gamma)$; porém, vale o seguinte resultado.

Teorema 1.52. *Seja Γ um conjunto infinito e seja $x = (x_i)_{i\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$. Então $(x_i e_i)_{i\in\Gamma}$ é desordenadamente somável e tem soma x. Além disso, $c_0(\Gamma) = \overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in \Gamma\}}$.*

Demonstração. Fixemos $\varepsilon > 0$. Por hipótese, o conjunto $F_\varepsilon = \{i \in \Gamma : |x_i| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ é finito. Se F é um conjunto finito satisfazendo $F_\varepsilon \subset F \subset \Gamma$, então

$$\left\| x - \sum_{i \in F} x_i e_i \right\|_\infty = \sup_{j \in \Gamma \setminus F} |x_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Logo, $(x_i e_i)_{i \in \Gamma}$ é desordenadamente somável e tem soma x.

Seja $y = (y_i)_{i \in \Gamma} \in c_0(\Gamma)$ qualquer. Sabemos que $(y_i e_i)_{i \in \Gamma}$ tem soma y. Pela Proposição 1.6, existe um conjunto enumerável infinito $I \subset \Gamma$ tal que

$$\{i \in \Gamma : y_i \neq 0\} \subset I.$$

É claro que a família (enumerável) $(y_i e_i)_{i \in I}$ também é desordenadamente somável e tem soma y. Vamos escolher uma ordenação qualquer de I e escrever $I = \{i_1, \ldots, i_n, \ldots\}$, onde $i_k \neq i_l$ se $k \neq l$. Pela Proposição 1.9, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_{i_n} e_{i_n} = y,$$

isto é,

$$y = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} y_{i_k} e_{i_k}.$$

Logo, $y \in \overline{\operatorname{span}\{e_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in \Gamma\}}$. ■

Proposição 1.53. *Sejam $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ conjuntos não-vazios. Seja X o subespaço de $c_0(\Gamma_2)$ das funções $g \in c_0(\Gamma_2)$ tais que $g(\gamma) = 0$, para todo $\gamma \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$. Então $c_0(\Gamma_1)$ e X são linearmente isométricos.*

Demonstração. Definimos o operador linear

$$\begin{aligned} T:\ & c_0(\Gamma_1) \longrightarrow c_0(\Gamma_2) \\ & (x_i)_{i \in \Gamma_1} \longmapsto (y_j)_{j \in \Gamma_2}, \end{aligned}$$

onde $y_j = x_j$, se $j \in \Gamma_1$, e $y_j = 0$, se $j \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$. É fácil ver que $\operatorname{Im}(T) = X$. Notemos também que

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{j\in\Gamma_2} |y_j| = \sup_{i\in\Gamma_1} |y_i| = \sup_{i\in\Gamma_1} |x_i| = \|x\|_\infty,$$

para todo $x = (x_i)_{i\in\Gamma_1} \in c_0(\Gamma_1)$. Portanto, T é uma isometria linear de $c_0(\Gamma_1)$ sobre X. ■

Com este resultado, dados $\varnothing \neq \Gamma_1 \subset \Gamma_2$, podemos identificar $c_0(\Gamma_1)$ com o subespaço $\{(x_i)_{i\in\Gamma_2} : x_i = 0, \forall i \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1\}$ e considerar $c_0(\Gamma_1)$ como subespaço de $c_0(\Gamma_2)$.

Teorema 1.54. *Sejam Γ_1, Γ_2 conjuntos não-vazios. Então Γ_1 e Γ_2 têm a mesma cardinalidade se, e somente se, $c_0(\Gamma_1)$ e $c_0(\Gamma_2)$ são linearmente isométricos.*

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que $|\Gamma_1| = |\Gamma_2|$. Seja $\sigma\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ uma função bijetora e consideremos o operador linear

$$\begin{aligned} T : \ c_0(\Gamma_1) &\longrightarrow c_0(\Gamma_2) \\ (x_i)_{i\in\Gamma_1} &\longmapsto (y_j)_{i\in\Gamma_2}, \end{aligned}$$

onde $y_j = x_i$, para todo $j = \sigma(i) \in \Gamma_2$.

Dado $z = (z_j)_{j\in\Gamma_2}$, é fácil ver que $T\left((w_i)_{i\in\Gamma_1}\right) = z$, onde $w_i = z_j$, para todo $i = \sigma^{-1}(j) \in \Gamma_1$. Portanto, T é sobrejetora. Além disso, temos que

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{i\in\Gamma_1} |x_{\sigma(i)}| = \sup_{i\in\Gamma_1} |x_i| = \|x\|_\infty,$$

para todo $x = (x_i)_{i\in\Gamma_1} \in c_0(\Gamma_1)$. Logo, T é uma isometria linear de $c_0(\Gamma_1)$ sobre $c_0(\Gamma_2)$.

Reciprocamente, seja $S\colon c_0(\Gamma_1) \to c_0(\Gamma_2)$ uma isometria linear sobrejetora. Sejam $(e_i)_{i\in\Gamma_1}$ e $(f_j)_{j\in\Gamma_2}$ as bases canônicas de $c_0(\Gamma_1)$ e de $c_0(\Gamma_2)$, respectivamente. Se $c_0(\Gamma_1)$ e $c_0(\Gamma_2)$ têm dimensão finita, então Γ_1 e Γ_2 são ambos finitos (caso contrário, $(e_i)_{i\in\Gamma_1}$ e $(f_j)_{j\in\Gamma_2}$ são famílias infinitas e linearmente independentes). Pela Proposição 1.49, temos que Γ_1 e Γ_2 têm a mesma cardinalidade.

Suponhamos então que $c_0(\Gamma_1)$ e $c_0(\Gamma_2)$ têm dimensão infinita (e portanto Γ_1 e Γ_2 são ambos infinitos). Afirmamos que $c_0(\Gamma_2) = \overline{\operatorname{span}\{S(e_i) : i \in \Gamma_1\}}$. De fato, seja $y \in c_0(\Gamma_2)$ fixado. Como S é sobrejetora, existe $x \in c_0(\Gamma_1)$ tal que $S(x) = y$. Pelo Teorema 1.52, existe sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\operatorname{span}\{e_i : i \in \Gamma_1\}$ tal que $z_n \longrightarrow x$. Como S é linear, temos que $(S(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em $\mathrm{span}\{S(e_i) : i \in \Gamma_1\}$, e como S é contínua, temos que $S(z_n) \longrightarrow S(x) = y$. Isto prova a afirmação.

Dados $j, k \in \Gamma_2$, $j \neq k$, temos que $\|f_j - f_k\|_\infty = 1$. Logo, $\left(B\left(f_j, \frac{1}{2}\right)\right)_{j\in\Gamma_2}$ é uma família de abertos disjuntos e não-vazios de $c_0(\Gamma_2)$. Seja $D = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{S(e_i) : i \in \Gamma_1\}$, isto é, o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de $\{S(e_i) : i \in \Gamma_1\}$, com coeficientes racionais. Vamos mostrar que D é denso em $c_0(\Gamma_2)$ e que $|D| \leq |\Gamma_1|$.

Seja $x \in \mathrm{span}\{S(e_i) : i \in \Gamma_1\}$ fixado. Então existem $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ e $i_1, \ldots, i_n \in \Gamma_1$ tais que $x = c_1 S(e_{i_1}) + \ldots + c_n S(e_{i_n})$. Para cada $m \in \{1, \ldots, n\}$, seja $(q_r^m)_{r\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números racionais que converge para c_m. Então

$$q_r^1 S(e_{i_1}) + \ldots + q_r^n S(e_{i_n}) \longrightarrow c_1 S(e_{i_1}) + \ldots + c_n S(e_{i_n}) = x.$$

Logo, $x \in \overline{D}$.

Isto prova que $\mathrm{span}\{S(e_i) : i \in \Gamma_1\} \subset \overline{D}$, e portanto

$$c_0(\Gamma_2) = \overline{\mathrm{span}\{S(e_i) : i \in \Gamma_1\}} \subset \overline{D},$$

como queríamos.

Para cada $F \subset \Gamma_1$ finito, não-vazio, seja $D_F = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{S(e_i) : i \in F\}$, e seja $D_\varnothing = \varnothing$. Então

$$D = \bigcup_{F \in \wp_f(\Gamma_1)} D_F.$$

É fácil ver que $|D_F| = |\mathbb{Q}^n| = \aleph_0$, para todo $F \in \wp_f(\Gamma_1)$, $F \neq \varnothing$, com $|F| = n$. Portanto, pelo Lema 1.48, temos que

$$|D| \leq |\aleph_0| \cdot |\wp_f(\Gamma_1)| = |\Gamma_1|.$$

Como D é denso, temos que $D \cap B\left(f_j, \frac{1}{2}\right) \neq \varnothing$, para todo $j \in \Gamma_2$, e podemos escolher um elemento a_j pertencente a esta interseção. A função $\Gamma_2 \ni j \longmapsto a_j \in D$ é injetora, e portanto

$$|\Gamma_2| \leq |D| \leq |\Gamma_1|.$$

De forma análoga, obtemos $|\Gamma_1| \leq |\Gamma_2|$. ■

Pelo Teorema 1.54, é suficiente estudarmos os espaços $c_0(\tau)$, onde $\tau \neq \varnothing$ é um cardinal. Quando $\tau = \aleph_0$, escreveremos $c_0(\aleph_0) = c_0$.

Observação 1.55. *c_0 é o espaço vetorial das sequências escalares que convergem para zero. A base canônica $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de c_0 é uma base de Schauder de c_0. Em particular, c_0 é separável.*

Usando a mesma ideia da demonstração do Teorema 1.54, provamos o seguinte resultado.

Proposição 1.56. *Seja $\tau \geq \aleph_0$ um cardinal. Então* $\operatorname{dens}(c_0(\tau)) = \tau$.

Demonstração. Seja $(e_j)_{j\in\tau}$ a base canônica de $c_0(\tau)$ e seja D um subconjunto denso de $c_0(\tau)$ com $|D| = \operatorname{dens}(c_0(\tau))$. Temos que $\left(B\left(e_j, \frac{1}{2}\right)\right)_{j\in\tau}$ é uma família de abertos disjuntos e não-vazios de $c_0(\tau)$. Como D é denso, para cada $j \in \tau$ podemos escolher um elemento $a_j \in B\left(e_j, \frac{1}{2}\right) \cap D$. Concluímos que a função $\tau \ni j \longmapsto a_j \in D$ é injetora, e portanto $\tau \leq |D| = \operatorname{dens}(c_0(\tau))$.

Por outro lado, o subespaço $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{e_j : j \in \tau\}$ é denso em $c_0(\tau)$ e tem cardinalidade τ. Logo, $\operatorname{dens}(c_0(\tau)) \leq \tau$. ∎

Corolário 1.57. *Seja τ um cardinal não-nulo. Então $c_0(\tau)$ é separável se, e somente se, $\tau \leq \aleph_0$.*

Demonstração. Suponhamos que $c_0(\tau)$ seja separável. Se τ é finito, nada temos que fazer. Caso contrário, pela Proposição 1.56, temos que $\tau = \operatorname{dens}(c_0(\tau)) \leq \aleph_0$, e portanto $\tau = \aleph_0$.

Reciprocamente, se $\tau \leq \aleph_0$, então ou τ é finito (e portanto $c_0(\tau)$ tem dimensão finita), ou $c_0(\tau) = c_0$. Em ambos os casos, $c_0(\tau)$ é separável. ∎

O resultado a seguir é uma versão não-enumerável da Proposição 1.15 e será útil no Capítulo 3.

Proposição 1.58. *Sejam X um espaço de Banach e $\tau \geq \aleph_1$ um cardinal. São equivalentes:*

(i) $c_0(\tau) \hookrightarrow X$;

(ii) Existem números reais $\delta > 0$ e $M > 0$ e $(x_i)_{i\in\tau}$ uma família de elementos de X tais que, para todo subconjunto finito F de τ e para toda família de escalares $\{a_i : i \in F\}$, tem-se

$$\delta \max_{j\in F} |a_j| \leq \left\| \sum_{j\in F} a_j x_j \right\| \leq M \max_{j\in F} |a_j|.$$

Neste caso, diremos que $(x_i)_{i\in\tau}$ *é* equivalente *à base canônica de* c_0.

Demonstração. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Seja $T\colon c_0(\tau)\to X$ um isomorfismo sobre sua imagem. Definimos $x_i = T(e_i)$, para cada $i\in\tau$. Tomando $\delta = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ e $M = \|T\|$, temos o resultado.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Seja $(a_i)_{i\in\tau}$ uma família de escalares. Segue de (ii) que $(a_ie_i)_{i\in I}$ satisfaz o critério de Cauchy se, e somente se, $(a_ix_i)_{i\in I}$ o satisfaz. Logo, $(a_ie_i)_{i\in I}$ é desordenadamente somável se, e somente se, $(a_ix_i)_{i\in I}$ o é. Assim, podemos considerar a função $T\colon c_0(\tau)\to X$ dada por

$$T\left(\sum_{i\in\tau} a_ie_i\right) = \sum_{i\in\tau} a_ix_i,$$

para todo $\sum_{i\in\tau} a_ie_i \in c_0(\tau)$. Pela Proposição 1.3, T é linear.

Mostremos que T é injetora. Se $x = \sum_{i\in\tau} a_ie_i \in c_0(\tau)$ é tal que $T(x) = 0$, então $\sum_{i=1}^{\infty} a_ix_i = 0$. Por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset \tau$, finito, tal que

$$F\subset\tau, \text{finito}, F_\varepsilon\subset F \Longrightarrow \left\|\sum_{i\in F} a_ix_i\right\| < \delta\varepsilon,$$

e portanto

$$F\subset\tau, \text{finito}, F_\varepsilon\subset F \Longrightarrow \left\|\sum_{i\in F} a_ie_i\right\| = \max_{i\in F}|a_i| < \varepsilon.$$

Isto prova que $\sum_{i\in\tau} a_ie_i = 0$. Logo, T é injetora.

Fixemos $x = \sum_{i\in\tau} a_ie_i = (a_i)_{i\in\tau}\in c_0(\tau)$. Pela Proposição 1.6, existe $I\subset\tau$, com $|I| = \aleph_0$, tal que

$$\{i\in\tau : x_i\neq 0\}\subset I.$$

Então $T(x) = \sum_{i\in I} a_ix_i$. Escrevendo $I = \{i_1,\ldots,i_n,\ldots\}$, onde $i_j\neq i_k$ se $j\neq k$, temos, pela Proposição 1.9, que

$$T(x) = \lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{m} a_ix_i,$$

e portanto

$$\|T(x)\| = \lim_{m\longrightarrow\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_ix_i\right\| \leq \lim_{m\longrightarrow\infty} M\max_{1\leq i\leq m}|a_i| \leq M\sup_{i\in\tau}|a_i| = M\|x\|.$$

Como x foi escolhido arbitrariamente, temos que T é contínua e $\|T\|\leq M$.

Procedendo de forma análoga usando a primeira desigualdade de (ii), concluímos que $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to c_0(\tau)$ também é contínua. ■

Observação 1.59. *Sejam* $T\colon c_0(\tau) \to X$ *e* $(x_i)_{i\in\tau}$ *como na demonstração da Proposição 1.58. Então* $\mathrm{Im}(T)$ *é subespaço fechado de* X*, pois é isomorfo ao espaço de Banach* $c_0(\tau)$*. Como* $x_i = T(e_i)$*, para cada* $i \in \tau$*, temos*

$$\overline{\operatorname{span}\{x_i : i \in \tau\}} \subset \mathrm{Im}(T).$$

Por outro lado, pelo que vimos, cada elemento da imagem é limite de combinações lineares finitas de elementos de $\{x_i : i \in \tau\}$*. Portanto,*

$$\mathrm{Im}(T) \subset \overline{\operatorname{span}\{x_i : i \in \tau\}}.$$

Encerramos esta seção com o seguinte exemplo de uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável.

Exemplo 1.60. Considere a sequência $\left(\frac{1}{n}e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ em c_0. Como $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, temos, pelo Teorema 1.52, que $\left(\frac{1}{n}e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é incondicionalmente somável e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e_n = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por outro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{n}e_n\right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Logo, $\left(\frac{1}{n}e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ não é absolutamente somável.

1.7 Os espaços $C(K, X)$

Esta seção é dedicada ao estudo dos espaços de Banach $C(K, X)$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto e X é um espaço de Banach. Como bibliografia básica para esta seção, indicamos [9].

Lembramos que dados K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach, denotamos por $C(K, X)$ o espaço normado das funções $g\colon K \to X$ que são contínuas, munido da norma

$$\|g\|_\infty = \sup_{k\in K} \|g(k)\|, \forall g \in C(K, X).$$

Quando $X=\mathbb{R}$, escrevemos simplesmente $C(K)$.

Proposição 1.61. *Sejam X um espaço de Banach e K um espaço de Hausdorff compacto, finito, $|K|=n$. Consideremos o espaço de Banach X^n munido da norma*

$$\|(x_1,\dots,x_n)\| = \max_{1\le i\le n}\|x_i\|, \forall (x_1,\dots,x_n)\in X^n.$$

Então $(C(K,X),\|\cdot\|_\infty)$ e $(X^n,\|\cdot\|)$ são linearmente isométricos.

Demonstração. Pela Proposição 1.33, K está munido da topologia discreta. Logo, toda função $f\colon K\to X$ é contínua, ou seja, $C(K,X)$ coincide com o espaço vetorial de todas as funções $f\colon K\to X$. Vamos escrever $K=\{k_1,\dots,k_n\}$, onde $k_i\neq k_j$ se $i\neq j$. Definimos o operador linear $T\colon C(K,X)\to X^n$ por

$$T(f)=(f(k_1),\dots,f(k_n)), \forall f\in C(K,X).$$

É fácil ver que T é sobrejetora. Além disso, notemos que

$$\|T(f)\| = \|(f(k_1),\dots,f(k_n))\| = \max_{1\le i\le n}\|f(k_i)\| = \|f\|_\infty, \forall f\in C(K,X).$$

Portanto, T é uma isometria linear entre $C(K,X)$ e X^n. ∎

Teorema 1.62. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então $(C(K,X),\|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(C(K,X),\|\cdot\|_\infty)$. Fixemos $\varepsilon>0$. Seja $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que

$$m,n\ge n_\varepsilon \implies \sup_{k\in K}\|f_m(k)-f_n(k)\| = \|f_m-f_n\|_\infty<\varepsilon.$$

Logo, para cada $k\in K$ a sequência $(f_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X, e portanto converge para algum $f(k)\in X$. Definimos

$$\begin{aligned} f: K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ k &\longmapsto f(k)\,. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que f é contínua e que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

Seja $k_0 \in K$ fixado. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \implies \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo,

$$m, n \geq N \implies \|f_m(k) - f_n(k)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall k \in K.$$

Fixando $k \in K$ e $n \geq N$ e fazendo $m \longrightarrow +\infty$, obtemos

$$\|f(k) - f_n(k)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall k \in K, \forall n \geq N. \tag{**}$$

Como f_N é contínua em k_0, existe $V \subset K$ aberto tal que $k_0 \in V$ e

$$k \in V \implies \|f_N(k) - f_N(k_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Então para todo $k \in V$ temos

$$\|f(k) - f(k_0)\| \leq \|f(k) - f_N(k)\| + \|f_N(k) - f_N(k_0)\| + \|f_N(k_0) - f(k_0)\| < \varepsilon.$$

Isto prova que f é contínua em k_0. Como k_0 é arbitrário, temos que $f \in C(K, X)$.

Além disso, a desigualdade (**) implica que $\|f - f_n\| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$, isto é, $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. ∎

Teorema 1.63. *Sejam K e L espaços de Hausdorff compactos. Então os espaços de Banach $C(K \times L)$ e $C(K, C(L))$ são isomorfos.*

Demonstração. Vamos construir um isomorfismo entre $C(K \times L)$ e $C(K, C(L))$. Dada uma função $g \in C(K, C(L))$, vamos definir

$$\begin{aligned} T(g) : \ K \times L &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (k, l) &\longmapsto g(k)(l)\,. \end{aligned}$$

Afirmamos que $T(g)$ é contínua. De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $(k, l) \in K \times L$. Como g é contínua em k, temos que existe U vizinhança aberta de k em K tal que

$$s \in U \implies \|g(k) - g(s)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Além disso, como $g(k)$ é contínua em l, existe V vizinhança aberta de l em L satisfazendo

$$t \in V \implies |g(k)(l) - g(k)(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, se $(s,t) \in U \times V$, temos

$$\begin{aligned}
|T(g)(k,l) - T(g)(s,t)| &= |g(k)(l) - g(s)(t)| \\
&\leq |g(k)(l) - g(k)(t)| + |g(k)(t) - g(s)(t)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|g(k) - g(s)\|_\infty \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto prova que $T(g)$ é contínua em (k,l). Como (k,l) foi escolhido arbitrariamente, temos que $T(g)$ é contínua em $K \times L$.

Assim, fica definida a função

$$\begin{aligned}
T:\ C(K, C(L)) &\longrightarrow C(K \times L) \\
g &\longmapsto T(g)\,.
\end{aligned}$$

Mostremos que T é um isomorfismo.

T é linear: sejam $g, h \in C(K, C(L))$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dados $k \in K$ e $l \in L$, temos:

$$\begin{aligned}
T(g + \alpha h)(k,l) &= [(g + \alpha h)(k)](l) \\
&= (g(k) + \alpha h(k))(l) \\
&= g(k)(l) + \alpha h(k)(l) \\
&= T(g)(k,l) + \alpha T(h)(k,l).
\end{aligned}$$

Portanto, $T(g + \alpha h) = T(g) + \alpha T(h)$. Isto prova que T é linear.

T é contínua: dada $g \in C(K, C(L))$ e fixados $k \in K, l \in L$, notemos que

$$|g(k)(l)| \leq \sup_{t \in L} |g(k)(t)| = \|g(k)\|_\infty \leq \sup_{s \in K} \|g(s)\| = \|g\|_\infty.$$

Logo,

$$\|T(g)\|_\infty = \sup_{(k,l) \in K \times L} |g(k)(l)| \leq \|g\|_\infty.$$

Temos, portanto, que T é contínua e $\|T\| \leq 1$.

T é injetora: basta observarmos que

$$\begin{aligned} T(g) = 0 &\iff T(g)(k,l) = 0, \forall k \in K, \forall l \in L \\ &\iff g(k)(l) = 0, \forall k \in K, \forall l \in L \\ &\iff g(k) = 0, \forall k \in K \\ &\iff g = 0. \end{aligned}$$

T é sobrejetora: seja $f \in C(K \times L)$ fixada. Queremos determinar uma função $g \in C(K, C(L))$ tal que $T(g) = f$. Dado $k \in K$, vamos considerar, primeiramente, a função

$$\begin{aligned} f_k : L &\longrightarrow \mathbb{R} \\ l &\longmapsto f(k,l)\,. \end{aligned}$$

Mostremos que f_k é contínua. Para tanto, sejam $\varepsilon > 0$ e $l \in L$ fixados. Como f é contínua em (k,l), temos que existem abertos U' em K e V' em L tais que $k \in U'$, $l \in V'$ e

$$(s,t) \in U' \times V' \implies |f(k,l) - f(s,t)| < \varepsilon.$$

Em particular,

$$t \in V' \implies |f_k(l) - f_k(t)| = |f(k,l) - f(k,t)| < \varepsilon.$$

Isto prova que $f_k \in C(L)$, para cada $k \in K$.

Vamos definir, agora,

$$\begin{aligned} g:\ & K \longrightarrow C(L) \\ & k \longmapsto f_k\,. \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar, apenas, que g é contínua. Sejam $\varepsilon > 0$ e $k \in K$ fixados. Para cada $l \in L$ temos, da continuidade de f em (k,l), que existem abertos U_l em K e V_l em L tais que $k \in U_l$, $l \in V_l$ e

$$(s,t) \in U_l \times V_l \implies |f(k,l) - f(s,t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Notemos que $\{V_l : l \in L\}$ é um recobrimento aberto de L. Como L é compacto, temos que existem $l_1, \ldots, l_n \in L$ tais que

$$L = \bigcup_{i=1}^{n} V_{l_i}.$$

Seja $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{l_i}$. Notemos que U é um aberto em K que contém k. Dados $s \in U$ e $t \in L$, seja $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $t \in V_{l_j}$. Então temos que

$$|f(k,t) - f(s,t)| \leq |f(k,l_j) - f(k,t)| + |f(k,l_j) - f(s,t)| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Como t é arbitrário, concluímos que

$$\sup_{t \in L} |f(k,t) - f(s,t)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

donde

$$\|g(k) - g(s)\|_\infty = \|f_k - f_s\|_\infty < \varepsilon.$$

Isto prova que g é contínua.

Finalmente, notemos que

$$T(g)(k,l) = g(k)(l) = f_k(l) = f(k,l), \forall k \in K, \forall l \in L,$$

isto é, $T(g) = f$.

Como $C(K \times L)$ e $C(K, C(L))$ são espaços de Banach e T é um operador linear contínuo e bijetor, temos, pelo Teorema da Aplicação Aberta, que T é um isomorfismo, o que conclui a demonstração. ∎

Nosso próximo objetivo é provar o Teorema de Stone-Weierstrass. Este resultado foi provado por Stone em 1937 (e novamente em 1948, com uma demonstração mais simples) e é uma generalização do Teorema da Aproximação de Weierstrass; este último, provado em 1885, afirma que toda função $f \in C([a,b])$ pode ser aproximada uniformemente por polinômios. Como aplicação do Teorema de Stone-Weierstrass, veremos um resultado sobre a separabilidade de $C(K)$ (Teorema 1.72).

Primeiramente, vamos provar um caso particular do Teorema da Aproximação de Weierstrass e dois resultados auxiliares, e a partir deles vamos obter o caso geral.

Lema 1.64 (Aproximação da função módulo)**.** *Sejam $a < b$ números reais. Consideremos a função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, para todo $x \in [a,b]$. Então existe uma sequência de polinômios $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $Q_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ em $C([a,b])$.*

Demonstração. Construiremos, primeiramente, uma sequência de polinômios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para a função identidade em $C([0,1])$. Esta sequência será auxiliar no caso geral.

Definimos indutivamente os polinômios $P_0 \equiv 0$ e

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n(x)^2}{2},$$

para $n \geq 0$ e $x \in [0,1]$. Afirmamos que as seguintes propriedades valem para todo $x \in [0,1]$ e $n \geq 0$:

(i) $x - P_{n+1}(x) = (x - P_n(x))\left(1 - \frac{x+P_n(x)}{2}\right)$;

(ii) $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq x$;

(iii) $x - P_n(x) \leq x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$.

(i) Dado $n \geq 0$, notemos que

$$\begin{aligned} x - P_{n+1}(x) &= x - P_n(x) - \frac{x^2 - P_n(x)^2}{2} \\ &= x - P_n(x) - \frac{(x - P_n(x))(x + P_n(x))}{2} \\ &= (x - P_n(x))\left(1 - \frac{x + P_n(x)}{2}\right). \end{aligned}$$

(ii) Provaremos por indução em $n \geq 0$. Para $n = 0$,

$$0 = P_0(x) \leq \frac{x^2}{2} = P_1(x) \leq \frac{x}{2} \leq x, \forall x \in [0,1].$$

Suponhamos que

$$0 \leq P_n(x) \leq x, \forall x \in [0,1],$$

para algum $n \geq 0$. Então temos:

$$0 \leq x - P_n(x) \implies \frac{x + P_n(x)}{2} \leq \frac{2x}{2} = x \leq 1 \implies 1 - \frac{x + P_n(x)}{2} \geq 0.$$

Logo, os dois fatores do lado direito de (i) são maiores ou iguais a zero, e portanto $x \geq P_{n+1}(x)$. Além disso,

$$x \geq P_n(x) \geq 0 \implies x^2 \geq P_n(x)^2 \geq 0.$$

Pela definição de P_{n+1}, temos $P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$.

(iii) Novamente por indução em $n \geq 0$. É claro que (iii) vale para $n = 0$. Suponhamos que (iii) seja válida para algum $n \geq 0$. Segue de (ii) que

$$\frac{x + P_n(x)}{2} \geq \frac{x}{2} \implies 1 - \frac{x + P_n(x)}{2} \leq 1 - \frac{x}{2}$$

e de (i) que

$$x - P_{n+1}(x) = (x - P_n(x))\left(1 - \frac{x + P_n(x)}{2}\right) \leq (x - P_n(x))\left(1 - \frac{x}{2}\right) \leq x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n,$$

onde a última desigualdade segue da hipótese de indução.

Vamos provar que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a função identidade em $C([0,1])$. Consideremos, para cada $n \geq 0$, a função $g_n \colon [0,1] \to [0,+\infty)$ dada por $g_n(x) = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$, para $x \in [0,1]$. Para $n \geq 2$ e $x \in (0,1)$, temos

$$g_n'(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{(n+1)x}{2}\right),$$

e portanto

$$g_n'(x) = 0 \implies x = \frac{2}{n+1} \in (0,1).$$

Como $g_n(0) = 0$, $g_n(1) = \frac{1}{2^n} \leq \frac{2}{n+1}$ e $g_n(x) \leq x$, para todo $x \in [0,1]$, temos que

$$\sup_{x\in[0,1]} g_n(x) \leq \frac{2}{n+1},$$

para todo $n \geq 2$.

Por (iii) temos que

$$\sup_{x\in[0,1]} |x - P_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} (x - P_n(x)) \leq \sup_{x\in[0,1]} g_n(x) \leq \frac{2}{n+1},$$

para todo $n \geq 2$. Como $\frac{2}{n+1} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, temos que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a função identidade em $C([0,1])$.

Mostremos agora o caso geral. Sejam $a < b$ números reais fixados e seja $f(y) = |y|$ para todo $y \in [a,b]$. Seja $M = \|f\|_\infty > 0$. Definimos

$$f_0 = \frac{f}{M} \in C([a,b]).$$

Como $f_0([a,b]) \subset [0,1]$, temos que

$$\sup_{y\in[a,b]} |f_0(y) - P_n(f_0(y))| \longrightarrow 0,$$

ou seja, $(P_n \circ f_0) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f_0$ em $C([a,b])$. Logo,

$$M(P_n \circ f_0) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \text{ em } C([a,b]).$$

Resta-nos mostrar, apenas, que cada $M(P_n \circ f_0)$ é um polinômio. Fixemos $n \geq 1$. Por construção, P_n tem apenas termos de grau par e seu coeficiente independente é nulo. Vamos escrever

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{2j},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_k \neq 0$. Então

$$P_n(f_0(y)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_k \frac{|y|^{2j}}{M^{2j}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_k}{M^{2j}} y^{2j},$$

para todo $y \in [a,b]$. Isto prova que $(P_n \circ f_0)$ é um polinômio, e basta tomar $Q_n = M(P_n \circ f_0)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Observação 1.65. *Pela demonstração do Lema 1.64, dados números reais $a < b$, podemos aproximar a função módulo em $[a,b]$ por polinômios da forma $P(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{2j}$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_k \neq 0$.*

Lema 1.66. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e $f, g \in C(K)$. Então as funções $\max\{f,g\}$ e $\min\{f,g\}$, dadas por*

$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
$$\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

para todo $x \in K$, são contínuas. Além disso, valem as igualdades:

$$\max\{f,g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$
$$\min\{f,g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Demonstração. É suficiente provarmos que as igualdades acima são verdadeiras. Faremos a primeira igualdade; a segunda é análoga. Sejam $f, g \in C(K)$ e $x \in K$ fixados. Se $f(x) \geq g(x)$, temos:

$$\frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{f(x)-g(x)}{2} = f(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$

Caso contrário,

$$\frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{g(x)-f(x)}{2} = g(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$

Como x é arbitrário, temos a igualdade desejada. ■

Definição 1.67 ([14], pgs. 127 e 128)**.** Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja $\mathcal{A} \subset C(K)$.

- Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *sub-álgebra* de $C(K)$ se dados $f, g \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se que $f + g$, λg e fg também pertencem a $\mathcal{A}$.

- Dizemos que $\mathcal{A}$ *separa pontos de* K se dados $k_1, k_2 \in K$ com $k_1 \neq k_2$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(k_1) \neq f(k_2)$.

Lema 1.68 ([14], pg. 127, Proposição 1.1)**.** *Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja $\mathcal{A} \subset C(K)$ uma sub-álgebra de $C(K)$. Então $\overline{\mathcal{A}}$ também é uma sub-álgebra de $C(K)$.*

Demonstração. Sejam $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequências em $\mathcal{A}$ convergindo para f e para g respectivamente. Temos:

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \longrightarrow 0,$$
$$\|\lambda f_n - \lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Logo, $f + g, \lambda f \in \overline{\mathcal{A}}$. Além disso, notemos que

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_\infty &\leq \|f_n g_n - f_n g\|_\infty + \|f_n g - fg\|_\infty \\ &= \|f_n(g_n - g)\|_\infty + \|(f_n - f)g\|_\infty \\ &\leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \|g\|_\infty \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo, $fg \in \overline{\mathcal{A}}$. ■

Teorema 1.69 (Teorema de Stone-Weierstrass, [14], pg. 130, Teorema 1.4)**.** *Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja $\mathcal{A} \subset C(K)$ uma sub-álgebra fechada de $C(K)$. Se $\mathcal{A}$ separa pontos de K e se para todo $k \in K$ existe $f \in \mathcal{A}$ com $f(k) \neq 0$, então $\mathcal{A} = C(K)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} \subset C(K)$ como nas hipóteses. Notemos que se K é unitário, então $C(K)$ é isomorfo a $\mathbb{R}$. Em $\mathbb{R}$, as noções de sub-álgebra e de subespaço vetorial coincidem, e portanto sua única sub-álgebra não-trivial é $\mathbb{R}$. Logo, $\mathcal{A} = C(K)$.

Suponhamos então que K tenha pelo menos dois elementos distintos. Afirmamos:

(i) Dados $k_1, k_2 \in K$, $k_1 \neq k_2$, e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(k_1) = \lambda_1$ e $g(k_2) = \lambda_2$;

(ii) Se $g \in \mathcal{A}$, então $|g| \in \mathcal{A}$.

(i) Sejam $k_1, k_2 \in K$, $k_1 \neq k_2$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Por hipótese, existem $g_0, g_1, g_2 \in \mathcal{A}$ tais que $g_0(k_1) \neq g_0(k_2)$, $g_1(k_1) \neq 0$ e $g_2(k_2) \neq 0$. Sejam

$$u = g_0 g_2 - g_0(k_1) g_2, \; v = g_0 g_1 - g_0(k_2) g_1.$$

Então $u, v \in \mathcal{A}$, $u(k_1) = v(k_2) = 0$ e $u(k_2), v(k_1)$ são ambos não-nulos. Definimos

$$g = \frac{\lambda_1 v}{v(k_1)} + \frac{\lambda_2 u}{u(k_2)}.$$

É claro que $g \in \mathcal{A}$ e $g(k_j) = \lambda_j$, $j = 1, 2$.

(ii) Seja $g \in \mathcal{A}$ fixada. Seja $\delta > 0$ dado. Como g é contínua e K é compacto, existem números reais $a < b$ tais que $g(K) \subset [a, b]$. Pelo Lema 1.64, existe um polinômio de coeficientes reais P_δ tal que

$$\sup_{y \in [a,b]} |P_\delta(y) - |y|| < \delta.$$

Além disso, pela Observação 1.65, podemos tomar P_δ com termo independente nulo, isto é, P_δ é da forma

$$P_\delta = \sum_{l=1}^{N} \alpha_j y^j,$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, $\alpha_N \neq 0$.

Definimos $g_\delta = P_\delta \circ g \in C(K)$. Então

$$g_\delta = \sum_{l=1}^{N} \alpha_j g^j.$$

Portanto, $g_\delta \in \mathcal{A}$. Notemos também que

$$\| g_\delta - |g| \|_\infty = \sup_{x \in K} |P_\delta(g(x)) - |g(x)|| \leq \sup_{y \in [a,b]} |P_\delta(y) - |y|| < \delta.$$

Logo, $|g| \in \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

Como consequência de (ii) e do Lema 1.66, temos que

$$g, h \in \mathcal{A} \implies \max\{g, h\}, \min\{g, h\} \in \mathcal{A}.$$

Agora estamos em condições de provar que $\mathcal{A} = C(K)$. Seja $f \in C(K)$ e seja $\varepsilon > 0$ fixado. Mostremos que existe $\tilde{f} \in \mathcal{A}$ tal que $\|f - \tilde{f}\|_\infty < \varepsilon$.

Por (i), dados $s, t \in K$, $s \neq t$, existe $f_{s,t} \in \mathcal{A}$ tal que

$$f_{s,t}(s) = f(s) \quad \text{e} \quad f_{s,t}(t) = f(t).$$

Fixemos $s \in K$ e consideremos, para cada $t \in K \setminus \{s\}$, o conjunto

$$U_t = \left\{x \in K : f_{s,t}(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right\} = \left\{x \in K : f_{s,t}(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Então U_t é um subconjunto aberto de K, como imagem inversa de um aberto de $\mathbb{R}$ por uma função contínua. Além disso, é claro que $s, t \in U_t$, para todo $t \in K \setminus \{s\}$. Logo, $\{U_t : t \in K, t \neq s\}$ é um recobrimento aberto de K. Como K é compacto, exisem $t_1, \ldots, t_n \in K \setminus \{s\}$ tais que

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}.$$

Definimos

$$h_s = \min\{f_{s,t_1}, \ldots, f_{s,t_n}\}.$$

Por construção, $h_s \in \mathcal{A}$ e $h_s(s) = f(s)$. Além disso, seja $x \in K$ qualquer e tomemos $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in U_{t_i}$. Então temos que

$$h_s(x) \leq f_{s,t_i}(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para cada $s \in K$, consideremos agora o conjunto

$$V_s = \left\{x \in K : h_s(x) > f(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right\} = \left\{x \in K : h_s(x) - f(x) > -\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Cada V_s é aberto e contém $s \in K$, e portanto $\{V_s : s \in K\}$ é recobrimento aberto de K. Por compacidade, existem $s_1, \dots, s_m \in K$ tais que

$$K = \bigcup_{j=1}^{m} U_{s_j}.$$

Definimos

$$\tilde{f} = \max\{h_{s_1}, \dots, h_{s_m}\}.$$

Por construção, $\tilde{f} \in \mathcal{A}$. Dado $x \in K$, tomemos $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in V_{s_j}$. Por um lado, temos que

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < h_{s_j}(x) \leq \tilde{f}(x).$$

Por outro,

$$h_{s_j}(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \implies \tilde{f}(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, temos que

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $x \in K$ foi escolhido arbitrariamente, obtemos

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Isto prova que $\mathcal{A}$ é densa em $C(K)$. Como $\mathcal{A}$ é fechada, a demonstração está completa. ■

Um enunciado equivalente do Teorema de Stone-Weierstrass é o seguinte.

Corolário 1.70 (Teorema de Stone-Weierstrass, [14], pg. 130, Corolário 1.5)**.** *Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja $\mathcal{A} \subset C(K)$ uma sub-álgebra de $C(K)$. Se $\mathcal{A}$ separa pontos de K e se para todo $k \in K$ existe $f \in \mathcal{A}$ com $f(k) \neq 0$, então $\mathcal{A}$ é densa em $C(K)$.*

Demonstração. Notemos que $\overline{\mathcal{A}}$ verifica as hipóteses do Teorema 1.69, e portanto $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$. Logo, $\mathcal{A}$ é densa em $C(K)$. ■

Corolário 1.71 (Teorema da Aproximação de Weierstrass, [14], pg. 133, Teorema 2.1)**.** *Sejam $a < b$ números reais e $f \in C([a,b])$. Então existe uma sequência de polinômios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C([a,b])$ tal que $P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.*

Demonstração. Basta notar que a sub-álgebra das funções polinomiais definidas em $[a,b]$ satisfaz as hipóteses do Corolário 1.70, e portanto é densa em $C([a,b])$. ∎

Como aplicação de Teorema de Stone-Weierstrass, temos o resultado a seguir.

Teorema 1.72 ([14], pg. 139, Teorema 6.1 e Exercício 6.1). *Seja K um espaço de Hausdorff compacto. Então $C(K)$ é separável se, e somente se, K é metrizável.*

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que $C(K)$ seja separável. Então $B_{C(K)}$ é separável, como subespaço topológico de $C(K)$. Seja $D = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto denso de $B_{C(K)}$.

Vamos considerar $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ munido da topologia produto e definir

$$\begin{aligned} F:\ K &\longrightarrow [-1,1]^{\mathbb{N}} \\ x &\longmapsto (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\,. \end{aligned}$$

Afirmamos que F é contínua. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por p_n a n-ésima projeção canônica, isto é, $p_n((y_m)_{m\in\mathbb{N}}) = y_n$, para todo $(y_m)_{m\in\mathbb{N}} \in [-1,1]^{\mathbb{N}}$. Então $p_n \circ F = f_n$ é contínua, para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto F é contínua.

Afirmamos também que F é injetora. De fato, sejam $x, y \in K$, $x \neq y$. Pelo Teorema 1.39, existe $f \in C(K)$ tal que $f(x) = 1$, $f(y) = 0$ e $f(K) \subset [0,1]$. Então $f \in B_{C(K)}$, e portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_{n_0}\|_\infty < \frac{1}{4}$. Em particular, temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{1}{4} &\implies \frac{3}{4} < f_{n_0}(x), \\ |f(y) - f_{n_0}(y)| < \frac{1}{4} &\implies \frac{1}{4} > f_{n_0}(y). \end{aligned}$$

Logo, $f_{n_0}(x) \neq f_{n_0}(y)$, e portanto $F(x) \neq F(y)$.

Como F é injetora e contínua entre um espaço compacto e um espaço de Hausdorff, temos, pela Proposição 1.34, que F é um homeomorfismo sobre sua imagem. Como $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ é um espaço métrico, concluímos que $F(K)$ também o é, e portanto K é metrizável.

Reciprocamente, suponhamos que K seja metrizável. Se K é unitário, então $C(K) \sim \mathbb{R}$ é separável. Suponhamos, portanto, que K tenha pelo menos dois elementos distintos. Seja $d\colon K \times K \to [0,+\infty)$ uma métrica compatível com a topologia de K. Pela Proposição 1.30, existe $\mathcal{B} = \{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base de abertos enumerável de K. Podemos supor que $K \notin \mathcal{B}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n \colon K \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = d(x, K \setminus \Omega_n), \forall x \in K.$$

Notemos que cada f_n é contínua, pois

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |d(x, K \setminus \Omega_n) - d(y, K \setminus \Omega_n)| \leq d(x,y), \forall x, y \in K.$$

Notemos também que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ separa pontos de K. De fato, sejam $x, y \in K$, $x \neq y$. Como K é de Hausdorff, existem abertos disjuntos U, V em K tais que $x \in U$ e $y \in V$. Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \Omega_{n_1} \subset U$. Então $y \in K \setminus \Omega_{n_1}$, e portanto

$$f_{n_1}(x) > 0 = f_{n_1}(y).$$

Além disso, dado $x \in X$, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \Omega_{n_x} \neq K$, e portanto $f_{n_x}(x) > 0$.

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os produtos finitos de elementos de $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável, temos que $\wp_f(\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{N})$ também é enumerável. Como a função

$$\wp_f(\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{N}) \ni \{(f_{n_1}, m_1), \dots, (f_{n_t}, m_t)\} \longmapsto f_{n_1}^{m_1} \cdots f_{n_t}^{m_t} \in \mathcal{A}$$

é sobrejetora, temos que $\mathcal{A}$ é enumerável.

Seja agora $\mathcal{A}'$ o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}'$ é uma sub-álgebra de $C(K)$, que verificas as hipóteses do Teorema 1.70; logo, $\mathcal{A}'$ é densa em $C(K)$. Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de $\mathcal{A}$ com coeficientes racionais. Então $\mathcal{D}$ é enumerável. Vamos mostrar que $\mathcal{D}$ é denso em $C(K)$.

Sejam $g \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$ dados. Pela densidade de $\mathcal{A}'$, existe $g' \in \mathcal{A}'$ tal que $\|g - g'\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $g' \in \mathcal{A}'$, existem $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{A}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que $g' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j h_j$. Para cada

$j \in \{1, \ldots, m\}$, seja $q_j \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|\alpha_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{2m(\|h_j\|_\infty + 1)}.$$

Definimos $h = \sum_{j=1}^{m} q_j h_j \in \mathcal{D}$. Então

$$\begin{aligned}
\|g' - h\|_\infty &= \left\| \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - q_j) h_j \right\|_\infty \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j - q_j| \|h_j\|_\infty \\
&< \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon \|h_j\|_\infty}{2m(\|h_j\|_\infty + 1)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2m} \\
&= \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\|g - h\|_\infty \leq \|g - g'\|_\infty + \|g' - h\|_\infty < \varepsilon,$$

como queríamos. ■

Os próximos dois resultados garantem que $C(K, X)$ contém cópias complementadas tanto de X quanto de $C(K)$.

Proposição 1.73. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então*

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X).$$

Demonstração. Para cada $x \in X$, consideremos a função $f_x \in C(K, X)$ dada por

$$f_x(k) = x, \forall k \in K.$$

Definimos o operador linear

$$\begin{aligned}
T: \ X &\longrightarrow C(K, X) \\
x &\longmapsto f_x.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\|T(x)\|_\infty = \|f_x\|_\infty = \|x\|, \forall x \in X.$$

Logo, T é uma isometria linear. Isto prova que $X \hookrightarrow C(K,X)$.

Vamos construir uma projeção de $C(K,X)$ sobre $Y = \mathrm{Im}(T)$. Fixemos $k_0 \in K$ e definamos o operador linear

$$\begin{aligned} P:\ C(K,X) &\longrightarrow Y \\ g &\longmapsto f_{g(k_0)}\,. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\|P(g)\|_\infty = \|g(k_0)\| \leq \|g\|_\infty, \forall g \in C(K,X).$$

Logo, P é contínua. Além disso,

$$P^2(g) = P(f_{g(k_0)}) = f_{g(k_0)} = P(g), \forall g \in C(K,X).$$

Logo, P é projeção sobre Y, e como $Y \sim X$, temos que $X \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X)$. ■

Proposição 1.74. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então*

$$C(K) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X).$$

Demonstração. Fixemos $x_0 \in X$ com $\|x_0\| = 1$ e definamos o operador linear

$$\begin{aligned} T:\ C(K) &\longrightarrow C(K,X) \\ f &\longmapsto f(\cdot)x_0\,. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{k\in K} \|f(k)x_0\| = \sup_{k\in K} |f(k)|\|x_0\| = \|f\|_\infty, \forall f \in C(K).$$

Portanto, T é uma isometria linear sobre sua imagem e, em particular, é contínua. Isto prova que $C(K) \hookrightarrow C(K,X)$.

Seja $Y = \mathrm{Im}(T)$ e vamos definir uma projeção de $C(K,X)$ sobre Y. Pela Proposição 1.26, $\mathrm{span}\{x_0\}$ é complementado em X. Logo, existe $Q\colon X \to \mathrm{span}\{x_0\}$ projeção sobre $\mathrm{span}\{x_0\}$.

Definimos o operador linear

$$\begin{aligned} P\colon\ C(K,X) &\longrightarrow C(K,X) \\ g &\longmapsto Q\circ g\,. \end{aligned}$$

Fixemos $g \in C(K,X)$. Como $Q(g(k)) \in \operatorname{span}\{x_0\}$, para todo $k \in K$, podemos definir $\lambda_g\colon K \to \mathbb{R}$ por

$$Q(g(k)) = \lambda_g(k)x_0, \forall k \in K.$$

Afirmamos que λ_g é contínua. Com efeito, sejam $k_0 \in K$ e $\varepsilon > 0$ fixados. Da continuidade de $Q \circ g$, existe U vizinhança aberta de k_0 em K tal que

$$k \in U \implies |\lambda_g(k) - \lambda_g(k_0)| = \|\lambda_g(k)x_0 - \lambda_g(k_0)x_0\| = \|Q(g(k)) - Q(g(k_0))\| < \varepsilon.$$

Logo, λ_g é contínua em k_0. Como k_0 é arbitrário, temos que λ_g é contínua.

Da continuidade de Q, temos

$$\|Q(g(k))\| \leq \|Q\|\|g(k)\| \leq \|Q\|\|g\|_\infty, \forall k \in K, \forall g \in C(K,X),$$

e portanto

$$\|P(g)\|_\infty = \|Q \circ g\|_\infty \leq \|Q\|\|g\|_\infty, \forall g \in C(K,X).$$

Logo, P é contínua e $\|P\| \leq \|Q\|$. Notemos que, para cada $g \in C(K,X)$,

$$P(g) = \lambda_g(\cdot)x_0 \in Y,$$

e portanto $\operatorname{Im}(P) \subset Y$. Por outro lado, se $f \in C(K)$, temos que

$$P(f(\cdot)x_0)(k) = Q(f(k)x_0) = f(k)x_0, \forall k \in K,$$

isto é, $P(f(\cdot)x_0) = f(\cdot)x_0$. Logo, $Y \subset \operatorname{Im}(P)$ e

$$P(h) = h, \forall h \in Y.$$

Isto prova que P é uma projeção sobre $C(K)$. ■

1.8 Produto tensorial de espaços de Banach. Operadores compactos

Nesta seção vamos nos dedicar ao estudo do produto tensorial de espaços de Banach e dos operadores compactos entre espaços de Banach. Estes conceitos serão necessários, em particular, para enunciarmos os Teoremas 2.12 e 3.11.

Definição 1.75. Sejam X, Y, Z espaços vetoriais. Dizemos que uma função $A\colon X \times Y \to Z$ é *bilinear* se A é linear em cada variável, isto é, se

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 A(x_1, y) + \alpha_2 A(x_2, y) \text{ e}$$
$$A(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A(x, y_1) + \alpha_2 A(x, y_2),$$

para todos $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Denotamos por $B(X \times Y, Z)$ o espaço vetorial de todas as funções bilineares de $X \times Y$ em Z. Se $Z = \mathbb{R}$, escreveremos simplesmente $B(X \times Y)$.

Sejam $x \in X$ e $y \in Y$ fixados. Denotamos por $x \otimes y$ o funcional linear de $B(X \times Y)$ dado por

$$(x \otimes y)(A) = A(x, y),$$

para todo $A \in B(X \times Y)$.

Definição 1.76 ([25], pg. 1)**.** Sejam X e Y espaços vetoriais. Definimos o *produto tensorial* de X e Y como sendo o subespaço $X \otimes Y$ de $B(X \times Y)^\sharp$ gerado pela família $\{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}$.

Um elemento genérico de $X \otimes Y$ é da forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i,$$

onde $x_1, \ldots, x_n \in X$, $y_1, \ldots, y_n \in Y$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Em geral, um tensor u não tem representação única, mas dado $A \in B(X \times Y)$, o valor de u em A não depende da representação de u. Em particular, fixemos $\varphi \in X^\sharp$ e $\psi \in Y^\sharp$. Então a função $A_{\varphi,\psi} \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$A_{\varphi,\psi}(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \forall x \in X, \forall y \in Y,$$

é bilinear. Logo, o valor $u(A_{\varphi,\psi})$ é o mesmo para qualquer representação de u.

Apresentamos a seguir algumas propriedades do produto tensorial.

Proposição 1.77. *Sejam X e Y espaços vetoriais. Dados $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:*

(i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$;

(ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$;

(iii) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$;

(iv) $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$.

Demonstração. Indicamos [25], página 2. ■

Pela Proposição 1.77, todo tensor $u \in X \otimes Y$ admite uma representação da forma $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, onde $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $y_1, \ldots, y_n \in Y$.

Proposição 1.78. *Sejam X e Y espaços vetoriais e seja $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. São equivalentes:*

(i) $u = 0$;

(ii) $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$, *para todos* $\varphi \in X^\sharp$, $\psi \in Y^\sharp$;

(iii) $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i = 0$, *para todo* $\varphi \in X^\sharp$;

(iv) $\sum_{i=1}^n \psi(y_i)x_i = 0$, *para todo* $\psi \in Y^\sharp$.

Demonstração. Indicamos [25], página 3. ■

Definição 1.79 ([25], pg. 45). Sejam X e Y espaços de Banach. A *norma injetiva* em $X \otimes Y$ é dada por

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)\right| : \varphi \in B_{X^*}, \psi \in B_{Y^*}\right\} \\ &= \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i\right\| : \varphi \in B_{X^*}\right\} \\ &= \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i)x_i\right\| : \psi \in B_{Y^*}\right\},\end{aligned}$$

onde $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ é uma representação de $u \in X \otimes Y$.

Definição 1.80 ([25], pg. 46). Sejam X e Y espaços de Banach. O *produto tensorial injetivo* de X e Y é o completamento de $X \otimes Y$ munido da norma injetiva, e é denotado por $X \hat{\hat{\otimes}} Y$.

Para provar o próximo resultado, vamos precisar do seguinte lema.

Lema 1.81. *Sejam X, Y espaços de Banach, D um subespaço denso de X e E um subespaço denso de Y. Seja $T \colon D \to E$ uma isometria linear. Então existe uma única isometria linear $\tilde{T} \colon X \to Y$ que estende T, isto é, $\tilde{T}|_D = T$. Além disso, se T for sobrejetora, então $\tilde{T}$ também será sobrejetora.*

Demonstração. Comecemos provando a existência de tal extensão. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em D. Como

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\|, \forall m, n \in \mathbb{N},$$

temos que $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em E, e portanto converge em Y.

Sejam agora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em D que convergem para algum $x \in X$. Já sabemos que $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes em Y; afirmamos que estas sequências têm o mesmo limite. De fato, sejam

$$u = \lim_{n\longrightarrow\infty} T(x_n), v = \lim_{n\longrightarrow\infty} T(y_n).$$

Então

$$\|T(x_n) - T(y_n)\| = \|x_n - y_n\| \longrightarrow \|x - x\| = 0,$$

e portanto $\|T(x_n) - T(y_n)\| \longrightarrow 0$. Por outro lado, $\|T(x_n) - T(y_n)\| \longrightarrow \|u - v\|$. Logo, $u = v$.

Com isto, podemos considerar a função $\tilde{T}\colon X \to Y$ dada por

$$\tilde{T}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T(x_n),$$

onde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de D que converge para x. Vamos mostrar que $\tilde{T}$ é a função procurada.

$\tilde{T}$ é linear: segue da linearidade do limite.

$\tilde{T}$ é isometria: fixemos $x \in X$ e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em D que converge para x. Então temos que

$$\|\tilde{T}(x)\| = \left\|\lim_{n \longrightarrow \infty} T(x_n)\right\| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|T(x_n)\| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

$\tilde{T}$ estende T: seja $x \in D$ qualquer e consideremos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D, onde $x_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então temos que

$$\tilde{T}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T(x) = T(x),$$

como queríamos.

Mostremos agora a unicidade. Seja $S\colon X \to Y$ uma isometria linear que estende T. Dados $x \in X$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em D que converge para x, temos, da continuidade de S, que

$$S(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} S(x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \tilde{T}(x_n) = \tilde{T}(x).$$

Logo, $S = \tilde{T}$.

Finalmente, suponhamos que T seja sobrejetora e mostremos que $\tilde{T}$ também o é. Seja $z \in Y$ fixado. Pela densidade de E em Y, existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em E que converge para z. Como $\mathrm{Im}(T) = E$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in D$ tal que $T(x_n) = z_n$. Notemos que

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em Y e que

$$\|x_n - x_m\| = \|T(x_n) - T(x_m)\| = \|z_n - z_m\|, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X, e portanto converge para algum $x \in X$. Logo,

$$\tilde{T}(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} T(x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = z,$$

como queríamos. ∎

Corolário 1.82. *Sejam X e Y espaços de Banach. Então $X\hat{\hat{\otimes}}Y$ e $Y\hat{\hat{\otimes}}X$ são linearmente isométricos.*

Demonstração. É fácil ver que o operador $X \otimes Y \ni \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \longmapsto \sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i \in Y \otimes X$ é uma isometria linear sobre $Y \otimes X$. Como $X \otimes Y$ e $Y \otimes X$ são densos em $X\hat{\hat{\otimes}}Y$ e $Y\hat{\hat{\otimes}}X$, respectivamente, temos, pelo Lema 1.81, que existe $T\colon X\hat{\hat{\otimes}}Y \to Y\hat{\hat{\otimes}}X$ isometria linear sobrejetora, como queríamos. ∎

A isometria linear construída na demonstração do Corolário 1.82 é chamada de *transposição* de $X\hat{\hat{\otimes}}Y$ sobre $Y\hat{\hat{\otimes}}X$.

Definição 1.83 ([18], Definição 3.4.1, pg. 319)**.** Sejam X e Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é *compacto* se $\overline{T(B_X)}$ é compacto em Y.

Proposição 1.84 ([18], Proposição 3.4.2, pg. 319)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador compacto. Então T é contínuo.*

Demonstração. Por hipótese, $\overline{T(B_X)}$ é compacto em Y, e portanto $T(B_X)$ é limitado. Logo, existe $M > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq M, \forall x \in B_X.$$

Dado $x \in X$, $x \neq 0$, temos que

$$\|T(x)\| = \|x\| \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq M\|x\|.$$

Logo, T é contínuo. ∎

Proposição 1.85 ([18], Proposição 3.4.4, pg. 320). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador linear. São equivalentes:*

(i) T é compacto;

(ii) $\overline{T(F)}$ é compacto em Y, para todo $F \subset X$ limitado;

(iii) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X, então $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente em Y.

Demonstração. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Seja $F \subset X$ limitado. Então existe $r > 0$ tal que

$$F \subset B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\},$$

donde $\overline{T(F)} \subset \overline{T(B_r)}$. Como $\overline{T(B_X)}$ e $\overline{T(B_r)}$ são homeomorfos, temos que $\overline{T(B_r)}$ é compacto. Logo, $\overline{T(F)}$ é compacto, pois é um subconjunto fechado do compacto $\overline{T(B_X)}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X. Então $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto limitado de X, e portanto $\overline{T(F)}$ é compacto em Y. Logo, a sequência $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente em $\overline{T(F)}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\overline{T(B_X)}$. Mostremos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in B_X$ tal que

$$\|y_n - T(x_n)\| < \frac{1}{n}.$$

Por hipótese, existe uma subsequência $(T(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ de $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $T(x_{n_j}) \longrightarrow y_0 \in Y$. Afirmamos que $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge para y_0. De fato, fixemos $\varepsilon > 0$ e seja $J_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq J_1 \Longrightarrow \|T(x_{n_j}) - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja também $J_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_{J_2}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $J = \max\{J_1, J_2\}$, temos que

$$j \geq J \Longrightarrow \|y_{n_j} - y_0\| \leq \|y_{n_j} - T(x_{n_j})\| + \|T(x_{n_j}) - y_0\| < \frac{1}{n_j} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

como queríamos. ∎

Proposição 1.86 ([18], Proposições 3.4.8 e 3.4.10, pg. 321). *Sejam X, Y, Z espaços de Banach, $T_1, T_2 \colon X \to Y$ operadores lineares compactos, $S \colon Y \to Z$ e $R \colon Z \to X$ operadores lineares contínuos e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então os operadores $T_1 + T_2, \alpha T_1 \colon X \to Y$, $S \circ T_1 \colon X \to Z$ e $T_1 \circ R \colon Z \to X$ são compactos.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X. Por hipótese, existe uma subsequência $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(T_1(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente em Y. Então $(\alpha T_1(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ também é convergente em Y, e portanto αT_1 é compacto. Além disso, pela continuidade de S, temos que $(S(T_1(x_{n_j})))_{j\in\mathbb{N}}$ converge em Z. Logo, $S \circ T_1$ também é compacto.

Como T_2 é compacto, existe uma subsequência $(x_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $(T_2(x_{n_{j_k}}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge em Y. É claro que $(T_1(x_{n_{j_k}}))_{k\in\mathbb{N}}$ também converge em Y. Logo, $((T_1+T_2)(x_{n_{j_k}}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge em Y, donde $T_1 + T_2$ é compacto.

Seja, agora, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em Z. Por hipótese, $(R(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em X. Logo, existe uma subsequência $(R(z_{n_l}))_{l\in\mathbb{N}}$ de $(R(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(T_1(R(z_{n_l})))_{l\in\mathbb{N}}$ converge em Y. Portanto, $T_1 \circ R$ é compacto. ∎

Proposição 1.87 ([18], Proposição 3.4.8, pg. 321). *Sejam X e Y espaços de Banach e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores lineares compactos de X em Y tal que $T_n \longrightarrow T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Então T é compacto.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X. Vamos construir indutivamente uma família $\{(x_n^j)_{n\in\mathbb{N}} : j \in \mathbb{N}\}$ de subsequências de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em Y tais que $T_j(x_n^j) \longrightarrow y_j$ e $(x_n^{j+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(x_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como T_1 é compacto, existem $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y_1 \in Y$ tais que $T_1(x_n^1) \longrightarrow y_1$.

Suponhamos construídos $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_n^{j+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(x_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$, para todo $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, e $y_1, \ldots, y_k \in Y$ tais que

$$T_j(x_n^j) \longrightarrow y_j, \forall j \in \{1, \ldots, k\},$$

para algum $k \geq 1$. Como T_{k+1} é compacto, existem $(x_n^{k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y_{k+1} \in Y$ tais que $T_{k+1}(x_n^{k+1}) \longrightarrow y_{k+1}$.

Assim, temos construídas as famílias $\{(x_n^j)_{n\in\mathbb{N}} : j \in \mathbb{N}\}$ e $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ com as propriedades desejadas. Consideremos a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, onde $z_n = x_n^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vamos provar que $(T(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em Y. Fixemos $\varepsilon > 0$.

Afirmamos que $T_j(z_n) \longrightarrow y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. De fato, basta observarmos que $(z_m)_{m\geq j}$ é subsequência de $(x_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Afirmamos também que a sequência $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em Y. Com efeito, seja $M > 0$ tal que $\|z_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e tomemos $J_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j, k \geq J_1 \implies \|T_j - T_k\| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Fixemos $j, k \geq J_1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|y_j - y_k\| \leq \|y_j - T_j(z_n)\| + \|(T_j - T_k)(z_n)\| + \|T_k(z_n) - y_k\|.$$

Pelo que vimos, existe $N(j,k) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max\{\|y_j - T_j(z_{N(j,k)})\|, \|y_k - T_k(z_{N(j,k)})\|\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, $\|y_j - y_k\| < \varepsilon$. Como $j, k \geq J_1$ foram escolhidos arbitrariamente, temos que

$$j, k \geq J_1 \implies \|y_j - y_k\| < \varepsilon.$$

Isto prova a afirmação.

Portanto, existe $y \in Y$ tal que $y_j \longrightarrow y$. Seja, agora, $J_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq J_2 \implies \|y_j - y\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \|T_j - T\| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

e seja $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_1 \implies \|T_{J_2}(z_n) - y_{J_2}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Então temos que

$$n \geq N_1 \implies \|y - T(z_n)\| \leq \|y - y_{J_2}\| + \|y_{J_2} - T_{J_2}(z_n)\| + \|(T_j - T)(z_n)\| < \varepsilon,$$

como queríamos. ∎

Corolário 1.88 ([18], Proposição 3.4.9, pg. 322). *Sejam X e Y espaços de Banach. Então o conjunto de todos os operadores lineares compactos de X em Y é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Vamos denotar o espaço vetorial de todos os operadores lineares compactos de X em Y por $\mathcal{K}(X,Y)$.

Proposição 1.89 ([18], Proposição 3.4.3, pg. 320). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador linear contínuo tal que* $\mathrm{Im}(T)$ *tem dimensão finita. Então T é compacto.*

Demonstração. Podemos supor que $T \neq 0$. Seja $n = \dim(\mathrm{Im}(T))$ e seja $I\colon \mathrm{Im}(T) \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X. Então $(I(T(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}^n$. Como as bolas fechadas são compactas em $\mathbb{R}^n$, temos que existe $(I(T(x_{n_j})))_{j\in\mathbb{N}}$ uma subsequência convergente de $(I(T(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$. Como I é um isomorfismo, temos que $(T(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente em Y. Logo, T é compacto. ∎

Definição 1.90 ([18], Definição 3.1.3, pg. 284). Sejam X e Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador linear contínuo. O *operador adjunto* de T é o operador linear $T^*\colon Y^* \to X^*$ dado por $T^*(\psi)(x) = \psi(T(x))$, para todo $\psi \in Y^*$ e $x \in X$.

Proposição 1.91 ([18], Proposição 3.1.4, pg. 285). *Sejam X e Y espaços de Banach, $T, S\colon X \to Y$ operadores lineares contínuos e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então T^* é contínuo, com $\|T^*\| = \|T\|$. Além disso, tem-se $(T+S)^* = T^* + S^*$ e $(\alpha T)^* = \alpha T^*$.*

Demonstração. Observemos primeiramente que

$$(T+S)^*(\psi)(x) = \psi(T(x) + S(x)) = \psi(T(x)) + \psi(S(x)) = T^*(\psi)(x) + S^*(\psi)(x) \text{ e}$$
$$(\alpha T)^*(\psi)(x) = \psi(\alpha T(x)) = \alpha\psi(T(x)) = \alpha T^*(\psi)(x),$$

para todo $\psi \in Y^*$ e $x \in X$. Logo, $(T+S)^* = T^* + S^*$ e $(\alpha T)^* = \alpha T^*$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\sup\{\|T^*(\psi)\| : \psi \in B_{Y^*}\} &= \sup\{|T^*(\psi)(x)| : x \in B_X, \psi \in B_{Y^*}\} \\
&= \sup\{|\psi(T(x))| : x \in B_X, \psi \in B_{Y^*}\} \\
&= \sup\{\|T(x)\| : x \in B_X\} \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

Portanto, T^* é contínuo e $\|T^*\| = \|T\|$. ■

Proposição 1.92. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador linear contínuo. Sejam $J_X\colon X \to X^{**}$ e $J_Y\colon Y \to X^{**}$ as aplicações canônicas de X em X^{**} e de Y em Y^{**}, respectivamente. Então $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$.*

Demonstração. Basta notarmos que

$$T^{**}(J_X(x))(\psi) = J_X(x)(T^*(\psi)) = T^*(\psi)(x) = \psi(T(x)) = J_Y(T(x))(\psi),$$

para todo $x \in X$ e $\psi \in Y^*$. ■

Definição 1.93. Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e $\varnothing \neq S \subset C(K)$. Dizemos que S é *equicontínuo* se dados $x \in K$ e $\varepsilon > 0$, existe $U_{x,\varepsilon}$ vizinhança de x em K tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, para toda $f \in S$ e todo $y \in U_{x,\varepsilon}$.

Teorema 1.94 (Teorema de Arzelà-Ascoli). *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e $\varnothing \neq S \subset C(K)$. Então $\overline{S}$ é compacto se, e somente se, S é limitado e equicontínuo.*

Demonstração. Indicamos [18], página 323. ■

Teorema 1.95 (Teorema de Schauder, [18], Teorema 3.4.15, pg. 323). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador linear contínuo. Então T é compacto se, e somente se, T^* é compacto.*

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que T seja compacto. Sejam $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em Y^* e $F \subset Y^*$ um subconjunto limitado tal que $\psi_n \in F$, para todo

$n \in \mathbb{N}$. Seja $M_1 > 0$ tal que

$$\|\psi\| \leq M_1, \forall \psi \in F.$$

Por hipótese, $K = \overline{T(B_X)}$ é compacto em Y. Notemos que $\|y\| \leq \|T\|$, para todo $y \in K$. Definimos

$$S = \{\psi|_K : \psi \in F\} \subset C(K).$$

Notemos que

$$\|\psi|_K\|_\infty = \sup_{y \in K} |\psi(y)| \leq \|\psi\| \sup_{y \in K} \|y\| \leq M_1 \|T\|,$$

para todo $\psi \in F$. Logo, S é limitado. Além disso, seja $\varepsilon > 0$ fixado e tomemos $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M_1}$. Então temos que

$$\|y_1 - y_2\| < \delta \implies |\psi|_K(y_1) - \psi|_K(y_2)| = |\psi(y_1 - y_2)| \leq \|\psi\| \|y_1 - y_2\| < \varepsilon,$$

para todos $y_1, y_2 \in K$ e $\psi \in F$. Logo, S é equicontínuo.

Portanto, pelo Teorema 1.94, temos que $\overline{S}$ é compacto. Logo, existe subsequência $(\psi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(\psi_{n_j}|_K)_{j \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\overline{S}$. Em particular, $(\psi_{n_j}|_K)_{j \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como

$$\begin{aligned}
\|\psi_{n_j} \circ T - \psi_{n_k} \circ T\| &= \sup_{x \in B_X} |\psi_{n_j}(T(x)) - \psi_{n_k}(T(x))| \\
&\leq \sup_{y \in K} |\psi_{n_j}(y) - \psi_{n_k}(y)| \\
&= \|\psi_{n_j}|_K - \psi_{n_k}|_K\|_\infty,
\end{aligned}$$

para todos $j, k \in \mathbb{N}$, concluímos que $(\psi_{n_j} \circ T)_{j \in \mathbb{N}} = (T^*(\psi_{n_j}))_{j \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em X^*, e portanto é convergente. Logo, T^* é compacto.

Reciprocamente, suponhamos que T^* seja compacto. Sejam $J_X \colon X \to X^{**}$ e $J_Y \colon Y \to Y^{**}$ as aplicações canônicas de X em X^{**} e de Y em Y^{**}, respectivamente. Pelo que provamos, T^{**} é compacto. Pela Proposição 1.92, temos $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$, donde $T = J_Y^{-1} \circ T^{**} \circ J_X$. Logo, T é compacto, pela Proposição 1.86. ∎

Corolário 1.96. *Sejam X e Y espaços de Banach. Então a função*

$$\mathcal{K}(X,Y) \ni T \longmapsto T^* \in \mathcal{K}(Y^*,X^*)$$

é uma isometria linear.

Teorema 1.97. *Sejam X e Y espaços de Banach. Então*

$$X\hat{\hat{\otimes}}Y \hookrightarrow \mathcal{K}(X^*,Y) \;\; e \;\; X^*\hat{\hat{\otimes}}Y \hookrightarrow \mathcal{K}(X,Y).$$

Demonstração. Seja $u = \sum_{i=1}^{n} \in X \otimes Y$ fixado. Pela Proposição 1.78, podemos considerar o operador linear $L_u \colon X^* \to Y$ dado por

$$L_u(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i,$$

para todo $\varphi \in X^*$. Notemos que $\mathrm{Im}(L_u) \subset \mathrm{span}\{y_1, \dots, y_n\}$, para todo $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. Logo, cada L_u é compacto, pela Proposição 1.89.

Consideremos o operador linear $T \colon X \otimes Y \to \mathcal{K}(X^*,Y)$ dado por $T(u) = L_u$, para todo $u \in X \otimes Y$. Temos que

$$\|T(u)\| = \|L_u\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \|L_u(\varphi)\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i \right\| = \|u\|,$$

para todo $u \in X \otimes Y$. Logo, T é uma isometria linear. Pela Proposição 1.81, existe uma única isometria linear $\tilde{T} \colon X\hat{\hat{\otimes}}Y \to \mathcal{K}(X^*,Y)$ que estende T.

Seja, agora, $v = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes z_j \in X^* \otimes Y$ fixado. De forma análoga ao que fizemos, podemos considerar o operador linear $R_v \colon X \to Y$ dado por

$$R_v(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x)z_j,$$

para todo $x \in X$. Temos então que cada operador R_v é compacto, e definimos o operador linear $S\colon X^* \otimes Y \to \mathcal{K}(X,Y)$ por $S(v) = R_v$, para todo $v \in X^* \otimes Y$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\|S(v)\| &= \|R_v\| \\
&= \sup\{\|R_v(x)\| : x \in B_X\} \\
&= \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) z_j\right\| : x \in B_X\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\psi\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) z_j\right)\right| : x \in B_X, \psi \in B_{Y^*}\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) \psi(z_j)\right| : x \in B_X, \psi \in B_{Y^*}\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\left(\sum_{j=1}^{m} \psi(z_j)\varphi_j\right)(x)\right| : x \in B_X, \psi \in B_{Y^*}\right\} \\
&= \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{m} \psi(z_j)\varphi_j\right\| : \psi \in B_{Y^*}\right\} \\
&= \|v\|,
\end{aligned}$$

para todo $v = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes z_j \in X^* \otimes Y$. Logo, S é uma isometria linear. Pela Proposição 1.81, existe uma única isometria linear $\tilde{S}\colon X^* \hat{\hat{\otimes}} Y \to \mathcal{K}(X,Y)$ que estende S. ■

1.9 Alguns resultados de Haskell Rosenthal

Enunciamos aqui três resultados de H. Rosenthal que terão papel fundamental no Capítulo 3.

Teorema 1.98. *Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja $\tau > \aleph_0$. Então $C(K)$ não contém uma cópia de $c_0(\tau)$ se, e somente se, K satisfaz a τ-*chain condition.

Demonstração. Indicamos [21], página 230. ■

Teorema 1.99. *Seja $\tau > \aleph_0$ e seja K um espaço de Hausdorff compacto satisfazendo a* τ-chain condition. *Suponha que $\mathcal{F}$ seja uma família de subconjuntos abertos não-vazios de K com $|\mathcal{F}| = \tau$. Então existe uma sequência infinita $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos distintos de $\mathcal{F}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \varnothing$.*

Demonstração. Indicamos [21], página 227. ■

Teorema 1.100. *Seja X um espaço de Banach e seja $\tau \geq \aleph_0$. Suponha que exista um operador $T : c_0(\tau) \to X$ tal que* $\inf\{\|T(e_i)\| : i \in \tau\} > 0$. *Então existe um subconjunto Γ de τ com $|\Gamma| = \tau$ e tal que $T|_{c_0(\Gamma)}$ é um isomorfismo sobre sua imagem.*

Demonstração. Indicamos [22], página 30. ■

Capítulo 2

Cópias de c_0 em espaços $C(K, X)$

Vamos começar o estudo das cópias e cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em espaços $C(K, X)$, onde τ é um cardinal infinito. Nosso primeiro objetivo é estudar o Problema A enunciado na Introdução, isto é: se um dos espaços X e $C(K)$ contém uma cópia de $c_0(\tau)$, será que $C(K, X)$ também contém uma cópia de $c_0(\tau)$? Também estamos interessados no problema análogo para cópias complementadas de $c_0(\tau)$. As respostas para estes problemas são afirmativas, como veremos no resultado a seguir.

Teorema 2.1. *Sejam τ um cardinal infinito, K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então valem:*

(i) Se $c_0(\tau) \hookrightarrow C(K)$ ou $c_0(\tau) \hookrightarrow X$, então $c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X)$;

(ii) Se $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K)$ ou $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X$, então $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X)$;

Demonstração. Consequência direta das Proposições 1.27, 1.73 e 1.74. ∎

Consideremos agora o Problema B, isto é: se $C(K, X)$ contém uma cópia de $c_0(\tau)$, será que pelo menos um dos espaços X ou $C(K)$ também contém uma cópia de $c_0(\tau)$? Veremos a seguir que a resposta para este problema também é afirmativa quando $\tau = \aleph_0$. Porém, se τ é não-enumerável, precisaremos de hipóteses adicionais de teoria dos conjuntos para resolvê-lo completamente. Veremos, por exemplo, que a resposta é negativa se a CH for válida (Proposição 3.2) e afirmativa se assumirmos MA e a negação da CH (Corolário 3.4).

Faremos o estudo em duas etapas: neste Capítulo, estudaremos o caso $\tau = \aleph_0$, e no próximo, o caso $\tau \geq \aleph_1$.

Teorema 2.2 ([6], pg. 1045, Lema 1). *Seja K um espaço de Hausdorff compacto. São equivalentes:*

(i) $C(K)$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{R}$;

(ii) K é infinito;

(iii) $c_0 \hookrightarrow C(K)$.

Demonstração. Notemos que a implicação (i) $\Longrightarrow$ (ii) é consequência direta da Proposição 1.61, e que a implicação (iii) $\Longrightarrow$ (i) é evidente. Portanto, basta fazermos (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Pela Proposição 1.35, existe uma família enumerável de abertos não-vazios e dois a dois disjuntos de K, que denotaremos por $\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, fixemos $x_n \in \Omega_n$ e $f_n \colon K \to [0,1]$ contínua tal que $f_n(x_n) = 1$ e $f_n(y) = 0$, para todo $y \in K \setminus \Omega_n$ (Teorema 1.39).

Seja $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ qualquer, fixado. Afirmamos, primeiramente, que a sequência $(a_n f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ é somável em $\mathbb{R}$, para todo $t \in K$. De fato, dado $t \in K$, se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t \in \Omega_N$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t) = a_N f_N(t).$$

Caso contrário, temos que $f_n(t) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t) = 0.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t)$ é convergente para todo $t \in K$. Assim, fica definida a função $f_a \colon K \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t), \forall t \in K.$$

Afirmamos também que f_a é contínua. Com efeito, seja $t \in K$ qualquer e mostremos que f_a é contínua em t. Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t \in \Omega_N$, como f_a coincide com $a_N f_N$ em Ω_N e esta função é contínua em t, temos que f_a também o é.

Caso contrário, temos que $f_a(t) = 0$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $a_n \longrightarrow 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N_1 \implies |a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e portanto

$$\left|\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n f_n(k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \in K.$$

Como $\sum_{n=1}^{N_1} a_n f_n$ é contínua em t, existe $\Omega \subset K$ aberto tal que $t \in \Omega$ e

$$k \in \Omega \implies \left|\sum_{n=1}^{N_1} a_n f_n(k) - \sum_{n=1}^{N_1} a_n f_n(t)\right| = \left|\sum_{n=1}^{N_1} a_n f_n(k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$|f_a(k) - f_a(t)| = |f_a(k)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(k)\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N_1} a_n f_n(k)\right| + \left|\sum_{m=N_1+1}^{\infty} a_m f_m(k)\right| < \varepsilon,$$

para todo $k \in \Omega$. Portanto, f_a é contínua em t.

Definimos o operador linear

$$\begin{aligned} T: c_0 &\longrightarrow C(K) \\ a &\longmapsto f_a\,. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \|T(a)\|_\infty &= \|f_a\|_\infty \\ &= \sup\{|f_a(k)| : k \in K\} \\ &= \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(k)\right| : k \in K\right\} \\ &= \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \|a\|_\infty, \end{aligned}$$

para todo $a \in c_0$. Logo, T é uma isometria linear, donde $c_0 \hookrightarrow C(K)$. ■

Teorema 2.3 ([27], pg. 107, Teorema 1). *Sejam X, Y espaços de Banach. Então*

$$c_0 \hookrightarrow X \times Y \implies c_0 \hookrightarrow X \;\; ou \;\; c_0 \hookrightarrow Y.$$

Demonstração. Vamos considerar o espaço vetorial $X \times Y$ munido da norma

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}, \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Denotemos por $P_1\colon X \times Y \to X$ e $P_2\colon X \times Y \to Y$ as projeções usuais de $X \times Y$ sobre X e Y, respectivamente. Notemos que P_1, P_2 são operadores lineares contínuos, com $\|P_1\| = \|P_2\| = 1$.

Por hipótese, existe $T\colon c_0 \to X \times Y$ isomorfismo sobre sua imagem. Pela Proposição 1.15, existem números reais $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\delta \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i T(e_i) \right\| \leq M \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e para toda família de escalares $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Suponhamos que $c_0 \not\hookrightarrow X$. Então o operador $P_1 \circ T\colon c_0 \to X$ não é isomorfismo sobre sua imagem, isto é, para todo $r > 0$ existe $x_r \in c_0$ tal que $\|x_r\|_\infty = 1$ e $\|P_1(T(x_r))\| < r$. Consideremos a sequência de números reais $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde

$$m_k = \frac{\delta}{2^{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Então temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{k+1}} = \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\delta}{2}.$$

Vamos construir indutivamente uma sequência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em c_0, sequência de blocos de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, satisfazendo:

(i) $\frac{1}{2} \leq \|y_k\|_\infty \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\|P_1(T(y_k))\| < m_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Pelo que vimos, existe $x_1 = (x_1^n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ com $\|x_1\|_\infty = 1$ e $\|P_1(T(x_1))\| < \frac{m_1}{2}$. Como

$$x_1 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n} x_1^j e_j,$$

existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{N_1} x_1^j e_j - x_1 \right\|_\infty < \frac{m_1}{2\|T\|} \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{j=1}^{N_1} x_1^j e_j \right\|_\infty \geq 1/2.$$

Definimos $y_1 = \sum_{j=1}^{N_1} x_1^j e_j$. Notemos que

$$\begin{aligned} \|P_1(T(y_1))\| &= \|P_1(T(x_1)) - P_1(T(x_1 - y_1))\| \\ &\leq \|P_1(T(x_1))\| + \|P_1(T(x_1 - y_1))\| \\ &< \frac{m_1}{2} + \|T\|\|x_1 - y_1\|_\infty \\ &< m_1. \end{aligned}$$

Notemos ainda que $y_1 \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{N_1}\}$.

Suponhamos construídos $y_1, \ldots, y_k \in c_0$ e $N_0, N_1, \ldots, N_k$ números naturais satisfazendo:

- $0 = N_0 < N_1 < N_2 < \ldots < N_k$;
- $y_j \in \operatorname{span}\{e_{N_{j-1}+1}, \ldots, e_{N_j}\}$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$;
- $\|P_1(T(y_j))\| < m_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Seja $Z_k = \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \geq N_k + 1\}}$. Pelas Proposições 1.53 e 1.54, temos que $Z_k \sim c_0$ e, portanto, o operador linear $P_1 \circ T|_{Z_k}$ não é isomorfismo sobre sua imagem. Logo, existe $x_{k+1} = (x_{k+1}^j) \in Z_k$ satisfazendo $\|x_{k+1}\|_\infty = 1$ e $\|P_1(T(x_{k+1}))\| < \frac{m_{k+1}}{2}$. Escrevendo

$$x_{k+1} = \sum_{j=N_k+1}^{\infty} x_{k+1}^j e_j,$$

temos que existe $N_{k+1} > N_k$ tal que

$$\left\| \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} x_{k+1}^j e_j - x_{k+1} \right\|_\infty < \frac{m_{k+1}}{2\|T\|} \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} x_{k+1}^j e_j \right\|_\infty \geq 1/2.$$

Definimos $y_{k+1} = \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} x_{k+1}^j e_j$. Então temos que $\|P_1(T(y_{k+1}))\| < m_{k+1}$ e $y_{k+1} \in \operatorname{span}\{e_{N_k+1}, \ldots, e_{N_{k+1}}\}$.

Assim, obtemos a sequência $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sequência de blocos de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que satisfaz as propriedades (i) e (ii).

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \ldots, a_n$ escalares, temos

$$\begin{aligned}
\left\| P_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i T(y_i)\right)\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i P_1(T(y_i))\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \|P_1(T(y_i))\| \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} |a_i| \sum_{i=1}^{n} \|P_1(T(y_i))\| \\
&< \max_{1\leq i\leq n} |a_i| \sum_{i=1}^{n} m_i \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} |a_i| \sum_{i=1}^{\infty} m_i \\
&= \frac{\delta}{2} \max_{1\leq i\leq n} |a_i|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i T(y_i)\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} x_i^j T(e_j)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} a_i x_i^j T(e_j)\right\| \\
&\geq \delta \max_{1\leq i\leq n} \left\{ |a_i| \max_{N_{i-1}+1\leq j\leq N_i} |x_i^j| \right\} \\
&= \delta \max_{1\leq i\leq n} \{|a_i| \|y_i\|_\infty\} \\
&\geq \frac{\delta}{2} \max_{1\leq i\leq n} |a_i|.
\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que

$$\frac{\delta}{2} \max_{1\leq i\leq n} |a_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i P_2(T(y_i))\right\| \leq M \max_{1\leq i\leq n} |a_i|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e toda família de escalares $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Pela Proposição 1.15, existe $S\colon c_0 \to Y$ isomorfismo sobre sua imagem, isto é, $c_0 \hookrightarrow Y$. ∎

Corolário 2.4. *Sejam X um espaço de Banach e seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural qualquer. Então*

$$c_0 \hookrightarrow X \iff c_0 \hookrightarrow X^n.$$

Demonstração. Notemos que $X \hookrightarrow X^n$ (de fato, o operador $X \ni x \mapsto (x, \ldots, x) \in X^n$ é uma isometria linear). Logo,

$$c_0 \hookrightarrow X \implies c_0 \hookrightarrow X^n,$$

pela Proposição 1.27. Para a recíproca, basta proceder por indução, usando o Teorema 2.3. ∎

Teorema 2.5. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então*

$$c_0 \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0 \hookrightarrow C(K) \ \textit{ou} \ c_0 \hookrightarrow X.$$

Demonstração. Sejam K e X como nas hipóteses e suponhamos que $c_0 \hookrightarrow C(K, X)$. Se K é infinito, então $c_0 \hookrightarrow C(K)$, pelo Teorema 2.2. Se K é finito, então temos que $c_0 \hookrightarrow C(K, X) \sim X^n$ (pela Proposição 1.61), e portanto $c_0 \hookrightarrow X$, pelo Corolário 2.4. ∎

Decorre dos Teoremas 2.1 e 2.5, portanto, que

$$c_0 \hookrightarrow C(K, X) \iff c_0 \hookrightarrow C(K) \ \text{ou} \ c_0 \hookrightarrow X,$$

para todo espaço de Hausdorff compacto K e todo espaço de Banach X.

No que segue, vamos estudar as cópias complementadas de c_0 em espaços $C(K, X)$. Para provar o próximo resultado, vamos precisar do seguinte teorema.

Teorema 2.6 ([28], pg. 627). *Sejam X um espaço de Banach separável, Y um subespaço fechado de X e $T \colon Y \to c_0$ um operador linear contínuo. Então existe um operador linear contínuo $\tilde{T} \colon X \to c_0$, extensão de T, com $\|\tilde{T}\| \leq 2\|T\|$.*

Demonstração. Seja $\lambda = \|T\| \geq 0$ e consideremos o conjunto

$$B_{2\lambda} = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leq 2\lambda\}.$$

Pelo Teorema 1.19, temos que $(B_{2\lambda}, w^*)$ é compacto. Temos também, pelo Teorema 1.20, que $(B_{2\lambda}, w^*)$ é metrizável. Seja d uma métrica em $B_{2\lambda}$ compatível com w^*. No que segue, vamos considerar convergência de sequências em $(B_{2\lambda}, w^*)$, ou equivalentemente, em $(B_{2\lambda}, d)$.

Consideremos

$$Y^\perp = \{\varphi \in X^* : \varphi(y) = 0, \forall y \in Y\}.$$

Então $Y^\perp$ é um subespaço w^*-fechado de X^*. De fato, para cada $y \in Y$, o funcional linear $\hat{y}$ é contínuo em X^*, e portanto $\mathrm{Ker}(\hat{y})$ é w^*-fechado em X^*. Logo,

$$Y^\perp = \bigcap_{y \in Y} \mathrm{Ker}(\hat{y})$$

é w^*-fechado em X^*.

Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n \colon c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear contínuo dado por $\pi_n(a) = a_n$, onde $a = (a_m)_{m\in\mathbb{N}} \in c_0$. Dado $y \in Y$, escrevemos $T(y) = (\varphi_n(y))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, onde $\varphi_n = \pi_n \circ T \in Y^*$. Notemos que

$$\lambda = \|T\| = \sup_{y \in B_Y} \|(\varphi_n(y))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{y\in B_Y} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(y)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{y\in B_Y} |\varphi_n(y)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\tilde{\varphi}_n \in X^*$, extensão de φ_n, com $\|\tilde{\varphi}_n\| = \|\varphi_n\| \leq \lambda$. Logo, $(\tilde{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em B_λ.

Seja $L = B_\lambda \cap Y^\perp$. Afirmamos que todo ponto de acumulação de $\{\tilde{\varphi}_n : n \in \mathbb{N}\}$ pertence a L. De fato, seja $(\tilde{\varphi}_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(\tilde{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\tilde{\varphi}_{n_j} \xrightarrow{w^*} \varphi \in B_\lambda.$$

Então temos que

$$\varphi(x) = \lim_{j\longrightarrow\infty} \tilde{\varphi}_{n_j}(x), \forall x \in X.$$

Em particular, para cada $y \in Y$ temos

$$\varphi(y) = \lim_{j\longrightarrow\infty} \tilde{\varphi}_{n_j}(y) = \lim_{j\longrightarrow\infty} \varphi_{n_j}(y) = 0,$$

pois $(\varphi_{n_j}(y))_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$. Logo, $\varphi \in Y^{\perp}$. Isto prova a afirmação.

Afirmamos também que $d(\tilde{\varphi}_n, L) \longrightarrow 0$. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que isso não ocorra. Então existem $(\tilde{\varphi}_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(\tilde{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$d(\tilde{\varphi}_{n_j}, L) \geq \varepsilon, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como B_λ é compacto, pelo Teorema 1.19, temos que $(\tilde{\varphi}_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ admite um ponto de acumulação $\varphi \in L$. Logo, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varepsilon \leq d(\tilde{\varphi}_{n_{j_0}}, L) \leq d(\tilde{\varphi}_{n_{j_0}}, \varphi) < \frac{\varepsilon}{2};$$

uma contradição.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $d_n \colon L \to [0, +\infty)$ dada por $d_n(\varphi) = d(\tilde{\varphi}_n, \varphi)$, para todo $\varphi \in L$. Como L é compacto e cada d_n é contínua, temos que existe uma sequência $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em L tal que

$$d(\tilde{\varphi}_n, \psi_n) = \inf_{\varphi\in L} d(\tilde{\varphi}_n, \varphi) = d(\tilde{\varphi}_n, L), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos finalmente que $\tilde{\varphi}_n - \psi_n \xrightarrow{w^*} 0$. De fato, seja $(\tilde{\varphi}_{n_j} - \psi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(\tilde{\varphi}_n - \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como B_λ é compacto e métrico, podemos supor que existem $\varphi, \psi \in B_\lambda$ tais que $\tilde{\varphi}_{n_j} \xrightarrow{w^*} \varphi$ e $\psi_{n_j} \xrightarrow{w^*} \psi$. Dados $j, k \in \mathbb{N}$, temos

$$d(\tilde{\varphi}_{n_j}, \psi_{n_k}) \leq d(\tilde{\varphi}_{n_j}, \psi_{n_j}) + d(\psi_{n_j}, \psi_{n_k}) = d(\tilde{\varphi}_{n_j}, L) + d(\psi_{n_j}, \psi_{n_k}).$$

Fixando $j \in \mathbb{N}$ e fazendo $k \longrightarrow \infty$, obtemos

$$d(\tilde{\varphi}_{n_j}, \psi) \leq d(\tilde{\varphi}_{n_j}, L) + d(\psi_{n_j}, \psi),$$

e fazendo $j \longrightarrow \infty$, temos

$$d(\varphi, \psi) \leq 0,$$

donde $\varphi = \psi$. Logo, $\tilde{\varphi}_{n_j} - \psi_{n_j} \xrightarrow{w^*} \varphi - \psi = 0$.

Mostramos, portanto, que $(\tilde{\varphi}_n - \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência no compacto $(B_{2\lambda}, d)$ que tem um único ponto de acumulação (o zero). Logo, pela Proposição 1.32, $(\tilde{\varphi}_n - \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero.

Definimos o operador linear $\tilde{T}\colon X \to c_0$ por $\tilde{T}(x) = (\tilde{\varphi}_n(x) - \psi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, para todo $x \in X$. É fácil ver que $\tilde{T}$ estende T e que $\|\tilde{T}\| \leq 2\lambda = 2\|T\|$. ∎

Como consequência deste resultado, temos o teorema a seguir.

Corolário 2.7 (Teorema de Sobczyk). *Seja X um espaço de Banach separável. Então*

$$c_0 \hookrightarrow X \iff c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Além disso, se $T\colon Y \to c_0$ é um isomorfismo de um subespaço Y de X sobre c_0, então existe uma projeção $P\colon X \to Y$ sobre Y tal que $\|P\| \leq 2\|T^{-1}\|\|T\|$.

Demonstração. É suficiente mostrarmos que

$$c_0 \hookrightarrow X \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Seja $T\colon Y \to c_0$ um isomorfismo de um subespaço Y de X sobre c_0. Pelo Teorema 2.6, existe $\tilde{T}\colon X \to c_0$ extensão de T, com $\|\tilde{T}\| \leq 2\|T\|$. Afirmamos que $P = T^{-1} \circ \tilde{T}$ é uma projeção de X sobre Y. De fato,

$$P(y) = T^{-1}(\tilde{T}(y)) = T^{-1}(T(y)) = y, \forall y \in Y.$$

A igualdade acima prova que $Y \subset \operatorname{Im}(P)$. Por outro lado, $\operatorname{Im}(P) \subset \operatorname{Im}(T^{-1}) = Y$. Isto prova que P é uma projeção sobre Y, isto é, $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X$. Temos ainda que

$$\|P(x)\| \leq \|T^{-1}\|\|\tilde{T}(x)\| \leq \|T^{-1}\|\|\tilde{T}\|\|x\| \leq 2\|T^{-1}\|\|T\|\|x\|, \forall x \in X.$$

Portanto, $\|P\| \leq 2\|T^{-1}\|\|T\|$. ∎

Corolário 2.8. *Seja K um espaço compacto metrizável. São equivalentes:*

(i) $C(K)$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{R}$;

(ii) K *é infinito;*

(iii) $c_0 \hookrightarrow C(K)$;

(iv) $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K)$.

Demonstração. Consequência direta dos Teoremas 1.72 e 2.2 e do Corolário 2.7. ∎

Veremos a seguir que o Teorema de Sobczyk não pode ser estendido ao caso não-separável. Vamos precisar de um resultado auxiliar.

Lema 2.9. *Existe uma família* $(a_i)_{i\in 2^{\aleph_0}}$ *em* $\wp(\mathbb{N})$ *tal que:*

(i) a_i *é infinito, para todo* $i \in 2^{\aleph_0}$;

(ii) Dados $i, j \in 2^{\aleph_0}$, $i \neq j$, *tem-se que* $a_i \cap a_j$ *é finito.*

Demonstração. Seja $\sigma\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ uma bijeção. Vamos escrever $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x_i : i \in 2^{\aleph_0}\}$, onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Para cada $i \in 2^{\aleph_0}$, fixemos $(r_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números racionais que converge para x_i, e definimos

$$a_i = \sigma(\{r_n^i : n \in \mathbb{N}\}).$$

Como cada conjunto $\{r_n^i : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito e σ é uma bijeção, temos que cada a_i é infinito. Além disso, dados $i, j \in 2^{\aleph_0}$, $i \neq j$, temos que a interseção $\{r_n^i : n \in \mathbb{N}\} \cap \{r_n^j : n \in \mathbb{N}\}$ é finita, pois $(r_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(r_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para números irracionais distintos, donde $a_i \cap a_j$ também é finito. ∎

Exemplo 2.10 ([1], pg. 69, Proposição 3.26)**.** Seja ℓ_∞ o espaço vetorial de todas as sequências limitadas de números reais, munido da norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

para todo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$. Então $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach (Proposição 4.9) e c_0 é um subespaço fechado de ℓ_∞. Além disso, ℓ_∞ não é separável. De fato, para cada $A \in \wp(\mathbb{N})$, seja χ_A a função indicadora de A, isto é, $\chi_A \colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ é dada por

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in A \\ 0 & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus A \end{cases}$$

Então $\chi_A \in \ell_\infty$, para todo $A \in \wp(\mathbb{N})$. Além disso, dados $A, B \in \wp(\mathbb{N})$, $A \neq B$, temos

$$B\left(\chi_A, \frac{1}{2}\right) \cap B\left(\chi_B, \frac{1}{2}\right) = \varnothing$$

e, em particular, $\chi_A \neq \chi_B$. Logo,

$$|\{\chi_A : A \in \wp(\mathbb{N})\}| = |\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}.$$

Dado $D \subset \ell_\infty$ denso, para cada $A \in \wp(\mathbb{N})$ podemos fixar $d_A \in D \cap B\left(\chi_A, \frac{1}{2}\right)$. Então a função $\wp(\mathbb{N}) \ni A \longmapsto d_A \in D$ é injetora, e portanto $|D| \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Isto prova que ℓ_∞ não é separável.

Suponhamos, por absurdo, que c_0 seja complementado em ℓ_∞. Pela Proposição 1.25, existe X subespaço fechado de ℓ_∞ tal que $\ell_\infty = c_0 \oplus X$. Seja $P \colon \ell_\infty \to X$ uma projeção sobre X e seja $(a_i)_{i \in 2^{\aleph_0}}$ uma família em $\wp(\mathbb{N})$ como no enunciado do Lema 2.9.

Afirmamos que existem $\delta > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $I \subset 2^{\aleph_0}$, infinito, tais que

$$|P(\chi_{a_i})(k)| \geq \delta, \forall i \in I.$$

Com efeito, como cada a_i é infinito, temos que $\chi_{a_i} \notin c_0$, e portanto $P(\chi_{a_i}) \neq 0$. Consideremos, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$U(n,m) = \left\{ i \in 2^{\aleph_0} : |P(\chi_{a_i})(m)| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Então temos que

$$2^{\aleph_0} = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} U(n,m).$$

Se $|U(n,m)| \leq \aleph_0$, para todos $n, m \in \mathbb{N}$, teríamos

$$2^{\aleph_0} = \left| \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} U(n,m) \right| \leq \aleph_0;$$

uma contradição. Logo, existem $N, M \in \mathbb{N}$ tais que $|U(N,M)| \geq \aleph_1$. Basta definir $\delta = \frac{1}{N}$, $k = M$ e $I = U(N,M)$.

Seja $l \in \mathbb{N}$ tal que $l > \frac{\|P\|}{\delta}$. Seja $J \subset I$, infinito, tal que

$$P(\chi_{a_i})(k) \geq \delta, \forall i \in J,$$

ou

$$P(\chi_{a_i})(k) \leq -\delta, \forall i \in J.$$

Sejam $i_1, \ldots, i_l \in J$ distintos e seja $A = a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_l}$. Definimos $F_1 = \varnothing$ e

$$F_j = (a_{i_1} \cap a_{i_j}) \cup [(a_{i_2} \setminus a_{i_1}) \cap a_{i_j}] \cup \ldots \cup [(a_{i_{j-1}} \setminus (a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_{j-2}})) \cap a_{i_j}],$$

para todo $j \in \{2, \ldots, l\}$, onde $a_{i_0} = \varnothing$. Por hipótese, cada F_j é finito. Além disso, temos que

$$\chi_A = \sum_{j=1}^{l} (\chi_{a_{i_j}} - \chi_{F_j}).$$

Notemos que $\|\chi_A\|_\infty = 1$, donde $\|P(\chi_A)\|_\infty \leq \|P\|$. Por outro lado, notemos que $\sum_{j=1}^{l} \chi_{F_j} \in c_0$ e, portanto, $P(\sum_{j=1}^{l} \chi_{F_j}) = 0$. Logo,

$$\|P(\chi_A)\|_\infty = \left\| P\left(\sum_{j=1}^{l} \chi_{a_{i_j}} \right) \right\|_\infty \geq \left| \sum_{j=1}^{l} P(\chi_{a_{i_j}})(k) \right| = \sum_{j=1}^{l} |P(\chi_{a_{i_j}})(k)| \geq l\delta > \|P\|;$$

uma contradição. Isto prova que c_0 não é complementado em ℓ_∞.

Vamos encerrar este Capítulo com os Teoremas de Ryan ([24], pg. 239), E. Saab-P. Saab ([26], pg. 132, Teorema 1) e Cembranos-Freniche ([2], pg. 556, e [10], pg. 484, Corolário 2.5). O Teorema de Ryan é uma generalização do Teorema de Saab-Saab, que por sua vez é uma generalização do Teorema de Cembranos-Freniche. Para demonstrá-los, vamos precisar do seguinte resultado.

Teorema 2.11 (Teorema de Josefson-Nissenzweig). *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X^* tal que $\|\varphi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.*

Demonstração. Indicamos [16], página 166, e [19], página 271. Indicamos também [13], página 325. ∎

Teorema 2.12 (Teorema de Ryan, [24], pg. 239). *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Então*

$$c_0 \hookrightarrow X \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X\hat{\otimes}Y \ \text{ e } \ c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{K}(X^*,Y).$$

Demonstração. Suponhamos que $c_0 \hookrightarrow X$. Pela Proposição 1.15, existe $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência básica em X equivalente à base canônica de c_0. Sejam $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\delta \max_{1\le n\le m} |a_n| \le \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x'_n \right\| \le M \max_{1\le n\le m} |a_n|,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e toda família de escalares $\{a_1,\dots,a_m\}$. Definindo $x_n = \frac{x'_n}{\delta}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e $A = \frac{M}{\delta} > 0$, obtemos

$$\max_{1\le n\le m} |a_n| \le \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\| \le A \max_{1\le n\le m} |a_n|,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e toda família de escalares $\{a_1,\dots,a_m\}$.

Seja $Z = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Então Z é um subespaço fechado de X e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é base de Schauder de Z. Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, o funcional linear $\varphi'_n \colon Z \to \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi'_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = a_n,$$

para todo $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in Z$. Notemos que cada φ'_n é contínuo. De fato, dado $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in Z$, temos

$$|a_n| \le \max_{1\le j\le m} |a_j| \le \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \right\|,$$

para todo $m \geq n$, donde

$$|\varphi_n'(x)| = |a_n| \leq \lim_{m \longrightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right\| = \|x\|.$$

Logo, φ_n' é contínua e $\|\varphi_n'\| \leq 1$. É fácil ver que $\varphi_n'(x_n) = 1$ e $\varphi_n'(x_m) = 0$, se $m \neq n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi_n \in X^*$ extensão de φ_n' a X com $\|\varphi_n\| \leq 1$. Pelo Teorema 2.11, existe uma sequência $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em Y^* tal que $\psi_n \xrightarrow{w^*} 0$ e $\|\psi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $y_n \in Y$ tal que $\|y_n\| \leq 2$ e $\psi_n(y_n) = 1$.

Afirmamos que a sequência $(\varphi_n \otimes \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ satisfaz a condição (ii) da Proposição 1.15. De fato, sejam $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ fixados. Notemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{m} a_j (x_j \otimes y_j) \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{m} (a_j x_j) \otimes y_j \right\| \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{m} \varphi(a_j x_j) \psi(y_j) \right| : \varphi \in B_{X^*}, \psi \in B_{Y^*} \right\} \\
&\geq \left| \sum_{j=1}^{m} \varphi_n(a_j x_j) \psi_n(y_j) \right| \\
&= |a_n|,
\end{aligned}$$

para todo $n \in \{1, \ldots, m\}$. Logo, temos que

$$\max_{1 \leq n \leq m} |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n (x_n \otimes y_n) \right\|.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{m} a_j (x_j \otimes y_j) \right\| &= \sup_{\psi \in B_{Y^*}} \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j \psi(y_j) x_j \right\| \\
&\leq A \sup_{\psi \in B_{Y^*}} \left\{ \max_{1 \leq j \leq m} |a_j| |\psi(y_j)| \right\} \\
&\leq A \sup_{\psi \in B_{Y^*}} \left\{ \max_{1 \leq j \leq m} |a_j| \|\psi\| \|y_j\| \right\} \\
&\leq 2A \max_{1 \leq j \leq m} |a_j|.
\end{aligned}$$

Então temos que

$$\max_{1\leq n\leq m}|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n(x_n\otimes y_n)\right\| \leq 2A\max_{1\leq j\leq m}|a_j|.$$

Pela Proposição 1.15, existe $I\colon c_0 \to X\hat{\hat{\otimes}}Y$, isomorfismo sobre sua imagem, tal que $I(e_n) = x_n\otimes y_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Seja $\tilde{T}\colon X\hat{\hat{\otimes}}Y \to \mathcal{K}(X^*,Y)$ como na demonstração do Teorema 1.97. Definimos $W = \overline{\operatorname{span}\{\tilde{T}(x_n\otimes y_n) : n\in\mathbb{N}\}}$. Vamos construir uma projeção $P\colon \mathcal{K}(X^*,Y)\to W$ sobre W.

Seja $L\in\mathcal{K}(X^*,Y)$ fixado. Afirmamos que $\psi_n(L(\varphi_n)) \longrightarrow 0$ em $\mathbb{R}$. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que isto não ocorra. Então existem $\delta>0$ e $(\psi_{n_j}(L(\varphi_{n_j})))_{j\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(\psi_n(L(\varphi_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$|\psi_{n_j}(L(\varphi_{n_j}))| > \delta, \forall j\in\mathbb{N}.$$

Como L é um operador compacto e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $(L(\varphi_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente em Y. Seja $y_0\in Y$ tal que $L(\varphi_{n_j})\longrightarrow y_0$ e seja $J_1\in\mathbb{N}$ tal que

$$j\geq J_1 \implies \|L(\varphi_{n_j})-y_0\| < \frac{\delta}{2}.$$

Como $\psi_n \xrightarrow{w^*} 0$, existe $J_2\geq J_1$ tal que

$$j\geq J_2 \implies |\psi_{n_j}(y_0)| < \frac{\delta}{2}.$$

Então temos que

$$\begin{aligned}
\delta &< |\psi_{n_j}(L(\varphi_{n_j}))| \\
&= |\psi_{n_j}(L(\varphi_{n_j})-y_0)+\psi_{n_j}(y_0)| \\
&\leq |\psi_{n_j}(L(\varphi_{n_j})-y_0)|+|\psi_{n_j}(y_0)| \\
&\leq \|\psi_{n_j}\|\|L(\varphi_{n_j})-y_0\|+|\psi_{n_j}(y_0)| \\
&= \|L(\varphi_{n_j})-y_0\|+|\psi_{n_j}(y_0)| \\
&< \delta,
\end{aligned}$$

para todo $j \geq J_2$; uma contradição. Logo, $\psi_n(L(\varphi_n)) \longrightarrow 0$ em $\mathbb{R}$.

Afirmamos também que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(L(\varphi_n))\tilde{T}(x_n \otimes y_n)$ converge em W. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |\psi_n(L(\varphi_n))| < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Dados $m \geq n \geq N$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=n}^{m} \psi_j(L(\varphi_j))\tilde{T}(x_j \otimes y_j) \right\| &= \left\| \tilde{T}\left(\sum_{j=n}^{m} \psi_j(L(\varphi_j))(x_j \otimes y_j) \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=n}^{m} \psi_j(L(\varphi_j))(x_j \otimes y_j) \right\| \\
&\leq 2A \max_{n \leq j \leq m} |\psi_j(L(\varphi_j))| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto prova que a sequência das somas parciais de $(\psi_n(L(\varphi_n))\tilde{T}(x_n \otimes y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{K}(X^*, Y)$, e portanto é convergente, pois $\mathcal{K}(X^*, Y)$ é de Banach. Como W é fechado, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(L(\varphi_n))\tilde{T}(x_n \otimes y_n)$ converge em W.

Definimos o operador linear $P\colon \mathcal{K}(X^*, Y) \to W$ por

$$P(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(L(\varphi_n))\tilde{T}(x_n \otimes y_n),$$

para todo $L \in \mathcal{K}(X^*, Y)$. Mostremos que P é uma projeção sobre W. Notemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{m} \psi_n(L(\varphi_n))\tilde{T}(x_n \otimes y_n) \right\| &= \left\| \tilde{T}\left(\sum_{n=1}^{m} \psi_n(L(\varphi_n))(x_n \otimes y_n) \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{m} \psi_n(L(\varphi_n))(x_n \otimes y_n) \right\| \\
&\leq 2A \max_{1 \leq n \leq m} |\psi_n(L(\varphi_n))| \\
&\leq 2A\|L\|,
\end{aligned}$$

para todo $L \in \mathcal{K}(X^*,Y)$ e todo $m \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\|P(L)\| = \lim_{m \longrightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} \psi_n(L(\varphi_n))\tilde{T}(x_n \otimes y_n) \right\| \leq 2A\|L\|,$$

para todo $L \in \mathcal{K}(X^*,Y)$. Portanto, L é contínua.

Pela Proposição 1.15, $(\tilde{T}(x_n \otimes y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência básica em $\mathcal{K}(X^*,Y)$. Dado $L = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{T}(x_n \otimes y_n) \in W$, temos que

$$\begin{aligned}
P(L) &= P\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{T}(x_n \otimes y_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P(\tilde{T}(x_n \otimes y_n)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\tilde{T}(x_n \otimes y_n)(\varphi_m))\tilde{T}(x_m \otimes y_m) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\varphi_m(x_n)y_n)\tilde{T}(x_m \otimes y_m) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{T}(x_n \otimes y_n) \\
&= L,
\end{aligned}$$

pela definição de $\tilde{T}$. Logo, $\mathrm{Im}(P) = W$ e $P(L) = L$, para todo $L \in W$. Isto prova que P é uma projeção sobre W.

Mostremos, por fim, que $W = \tilde{T}(I(c_0))$. Como $\tilde{T}(I(e_n)) = \tilde{T}(x_n \otimes y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathrm{span}\{\tilde{T}(x_n \otimes y_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \tilde{T}(I(c_0)),$$

e como $\tilde{T}(I(c_0))$ é fechado em $\mathcal{K}(X^*,Y)$ (pois é isomorfo a c_0), obtemos $W \subset \tilde{T}(I(c_0))$. Por outro lado, seja $L \in \tilde{T}(I(c_0))$. Então existe $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in c_0$ tal que $\tilde{T}(I(x)) = L$, e portanto

$$L = \tilde{T}(I(x)) = \tilde{T}\left(I\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right)\right) = \tilde{T}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n \otimes y_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{T}(x_n \otimes y_n) \in W.$$

Concluímos, portanto, que $W = \tilde{T}(I(c_0))$ é subespaço complementado de $\mathcal{K}(X^*,Y)$, isomorfo a c_0. Pela Proposição 1.28, temos que $I(c_0)$ é subespaço complementado de $X\hat{\hat{\otimes}}Y$. Logo, $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X\hat{\hat{\otimes}}Y$ e $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{K}(X^*,Y)$, como queríamos. ∎

O Teorema de E. Saab-P. Saab é a implicação

$$c_0 \hookrightarrow X \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X\hat{\hat{\otimes}}Y,$$

onde X e Y são espaços de Banach como no enunciado do Teorema 2.12. A demonstração originial de E. Saab e P. Saab é uma demonstração de existência e faz uso da teoria de operadores incondicionalmente convergentes. A demonstração de Ryan, que apresentamos aqui, usa argumentos mais elementares e constrói explicitamente uma cópia de c_0 em $X\hat{\hat{\otimes}}Y$, além de construir também uma cópia de c_0 em $\mathcal{K}(X^*,Y)$.

Para demonstrar o Teorema de Cembranos-Freniche, vamos precisar também do resultado a seguir.

Teorema 2.13 ([5], pg. 224, Exemplo 6). *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Seja Y o subespaço de $C(K,X)$ gerado pela família de funções da forma $\sum_{i=1}^{n} f_i(\cdot)x_i$, onde $n \in \mathbb{N}$, $f_1,\dots,f_n \in C(K)$ e $x_1,\dots,x_n \in X$. Então valem:*

(i) $C(K,X) = \overline{Y}$;

(ii) $C(K,X)$ *e* $C(K)\hat{\hat{\otimes}}X$ *são linearmente isométricos.*

Demonstração. Fixemos $f \in C(K,X)$ e $\varepsilon > 0$. Vamos construir uma função $g \in Y$ tal que $\|g-f\|_\infty < \varepsilon$.

Como f é contínua e K é compacto, temos que $f(K)$ é compacto em X. Notemos que $\{B\left(f(k),\frac{\varepsilon}{2}\right) : k \in K\}$ é um recobrimento aberto de $f(K)$; logo, existem $k_1,\dots,k_m \in K$ tais que

$$f(K) = \bigcup_{j=1}^{m} B\left(f(k_j),\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Para cada $j \in \{1,\dots,m\}$, seja $U_j = \{k \in K : \|f(k)-f(k_j)\| < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Então $\{U_1,\dots,U_m\}$ é um recobrimento aberto de K. Seja $\{f_1,\dots,f_m\} \subset C(K)$ uma partição da unidade subordinada ao recobrimento $\{U_1,\dots,U_m\}$ (Teorema 1.40).

Definimos $g\colon K \to X$ por $g(k) = \sum_{j=1}^{m} f_j(k) f(k_j)$, para todo $k \in K$. É claro que $g \in Y$. Vamos mostrar que $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$. Fixemos $k \in K$ e consideremos $I_k = \{1 \le j \le m : k \in U_j\} \neq \varnothing$. Então $f_j(k) = 0$, para todo $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus I_k$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|g(k) - f(k)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{m} f_j(k) f(k_j) - f(k) \sum_{j=1}^{m} f_j(k) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{m} f_j(k)(f(k_j) - f(k)) \right\| \\
&\le \sum_{j=1}^{m} f_j(k) \|f(k_j) - f(k)\| \\
&= \sum_{j \in I_k} f_j(k) \|f(k_j) - f(k)\| \\
&< \sum_{j \in I_k} f_j(k) \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|g - f\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Isto prova (i).

Vamos agora provar (ii). Definimos o operador linear $J\colon C(K) \otimes X \to C(K,X)$ por

$$J\left(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i\right)(k) = \sum_{i=1}^{n} g_i(k) x_i,$$

para todo $\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i \in C(K) \otimes X$. É claro que Im$(J)$= Y. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\left\| J\left(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i\right) \right\|_\infty &= \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(k) x_i \right\| : k \in K \right\} \\
&= \sup\left\{ \left| \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(k) x_i\right) \right| : k \in K, \varphi \in B_{X^*} \right\} \\
&= \sup\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} g_i(k) \varphi(x_i) \right| : k \in K, \varphi \in B_{X^*} \right\} \\
&= \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) g_i \right\|_\infty : \varphi \in B_{X^*} \right\} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i \right\|,
\end{aligned}$$

para todo $\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i \in C(K) \otimes X$.

Provamos, portanto, que J é uma isometria linear entre dois subespaços densos de $C(K)\hat{\hat{\otimes}}X$ e de $C(K,X)$; pelo Lema 1.81, temos o resultado. ■

Corolário 2.14 (Teorema de Cembranos-Freniche, [2], pg. 556, e [10], pg. 484, Corolário 2.5). *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então*

$$c_0 \hookrightarrow C(K) \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X).$$

Demonstração. Pelos Teoremas 2.12 e 2.13, temos que $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K)\hat{\hat{\otimes}}X \sim C(K,X)$. Logo, $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X)$, pela Proposição 1.27. ■

Capítulo 3

Cópias de $c_0(\tau)$ em espaços $C(K, X)$

Nosso objetivo, neste Capítulo, é estudar os problemas propostos na Introdução no caso não-separável, isto é, quando τ é um cardinal não-enumerável. Já vimos que $C(K, X)$ contém uma cópia de $c_0(\tau)$ se X ou se $C(K)$ contém uma cópia de $c_0(\tau)$, e que o mesmo vale para cópias complementadas de $c_0(\tau)$ (Teorema 2.1). Portanto, vamos nos dedicar ao estudo do problema recíproco.

Os primeiros resultados deste Capítulo seguirão da seguinte ideia. Suponha que $(g_i)_{i\in\tau} \subseteq C(K, X)$ seja uma família equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ (Proposição 1.58). Queremos determinar um ponto $k_0 \in K$ tal que, para um subconjunto "grande" σ de τ, o conjunto $(g_i(k_0))_{i\in\sigma}$ seja equivalente à base canônica de $c_0(\sigma)$ em X. Assim, vamos obter uma cópia de $c_0(\sigma)$ em X. As principais ferramentas que vamos usar são os resultados de Haskell Rosenthal enunciados no Capítulo 1 (Teoremas 1.98, 1.99 e 1.100).

O primeiro resultado é uma versão não-separável do Teorema 2.5.

Teorema 3.1 ([11], pg. 3845, Teorema 3.1). *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e $\tau > \aleph_0$. Então*

$$c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow C(K) \ \textit{ou}\ c_0 \hookrightarrow X.$$

Demonstração. Suponhamos que $C(K, X)$ contenha uma cópia de $c_0(\tau)$. Seja $T \colon c_0(\tau) \to C(K, X)$ isomorfismo sobre sua imagem. Seja $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\|_\infty \geq \delta$ para todo $x \in c_0(\tau)$

com $\|x\|_\infty = 1$. Para cada $\gamma \in \tau$, seja

$$U_\gamma = \{k \in K : \|T(e_\gamma)(k)\| > \delta/2\}.$$

Suponhamos que $C(K)$ não contenha uma cópia de $c_0(\tau)$. Pelo Teorema 1.98, K deve satisfazer a τ-*chain condition*. Afirmamos que existe uma sequência infinita $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos distintos de τ satisfazendo $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{\gamma_n} \neq \varnothing$. De fato, temos dois casos a considerar:

Primeiro caso: $|\{U_\gamma : \gamma \in \tau\}| = \tau$.

Como K satisfaz a τ-*chain condition*, temos, pelo Teorema 1.99, que existe $(U_{\gamma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de elementos distinos de $\{U_\gamma : \gamma \in \tau\}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{\gamma_n} \neq \varnothing$.

Segundo caso: $|\{U_\gamma : \gamma \in \tau\}| < \tau$.

Seja $\tau' = |\{U_\gamma : \gamma \in \tau\}| < \tau$. Então podemos indexar esta família por τ' e escrever

$$\{U_\gamma : \gamma \in \tau\} = \{V_i : i \in \tau'\},$$

com $V_i \neq V_j$ se $i \neq j$. Definimos, para cada $i \in \tau'$, o conjunto

$$A_i = \{\gamma \in \tau : U_\gamma = V_i\}.$$

Então $\tau = \bigcup_{i\in\tau'} A_i$. Por absurdo, se $|A_i| < \aleph_0$, para todo $i \in \tau'$, então

$$\tau = \left|\bigcup_{i\in\tau'} A_i\right| \leq \tau' \cdot \sup_{i\in\tau'} |A_i| \leq \tau' \cdot \aleph_0 < \tau;$$

uma contradição. Logo, existe $i_0 \in \tau'$ satisfazendo $|A_{i_0}| \geq \aleph_0$. Tomemos $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos distintos de $|A_{i_0}|$. Então $U_{\gamma_n} = V_{i_0}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{\gamma_n} \neq \varnothing$.

Fixemos $k_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{\gamma_n}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T(e_{\gamma_n})(k_0)\| > \delta/2.$$

Seja $P_{k_0}\colon C(K,X) \to X$ o operador linear dado por $P_{k_0}(g) = g(k_0)$, para todo $g \in$

$C(K, X)$. Notemos que P_{k_0} é contínuo, pois

$$\|P_{k_0}(g)\| = \|g(k_0)\| \leq \sup_{k \in K} \|g(k)\| = \|g\|_\infty, \forall g \in C(K, X).$$

Definimos $I = \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $L = P_{k_0} \circ T|_{c_0(I)} : c_0(I) \to X$. Então temos que

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|L(e_{\gamma_n})\| \geq \delta/2.$$

Portanto, pelo Teorema 1.100, existe um subconjunto infinito J de I tal que $L|_{c_0(J)}$ é um isomorfismo sobre sua imagem, e como J é infinito e enumerável, temos que $c_0(J) \sim c_0$, como queríamos. ∎

Apenas sob as hipóteses do Teorema 3.1, nada mais podemos afirmar; mesmo no caso $\tau = \aleph_1$, não podemos trocar c_0 por $c_0(\aleph_1)$ no enunciado do Teorema 3.1. De fato, assumindo a CH, Laver e Galvin [12] independentemente construíram um espaço de Hausdorff compacto K satisfazendo a ccc e tal que o espaço topológico produto $K \times K$ não satisfaz a ccc. Com isto e com o Teorema 1.63, temos o seguinte.

Proposição 3.2 ([11], pg. 3846, Proposição 3.2). *Assumindo a CH, existe um espaço de Hausdorff compacto K_1 tal que*

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K_1 \times K_1) \sim C(K_1, C(K_1)) \ \textit{mas} \ c_0(\aleph_1) \not\hookrightarrow C(K_1).$$

Demonstração. Seja K_1 o espaço de Hausdorff compacto construído por Laver e Galvin [12]. Como K_1 satisfaz a ccc, temos, pelo Teorema 1.98, que $c_0(\aleph_1) \not\hookrightarrow C(K_1)$. Por outro lado, como $K_1 \times K_1$ não satisfaz a ccc, também temos que $c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K_1 \times K_1)$. Pelo Teorema 1.63 e pela Proposição 1.27, temos o resultado. ∎

Este resultado sugere que precisamos de mais hipóteses sobre K ou sobre X, ou de um outro modelo de teoria dos conjuntos, para obtermos conclusões mais fortes. O próximo resultado, o Teorema 3.3, tem este espírito.

Teorema 3.3 ([11], pg. 3846, Teorema 3.3). *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto,*

X um espaço de Banach e $\tau > \aleph_0$. Se τ é um caliber *de K, então*

$$c_0(\tau) \hookrightarrow C(K,X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X.$$

Demonstração. Suponhamos que $C(K,X)$ contenha uma cópia de $c_0(\tau)$ e que τ seja um *caliber* de K. Sejam T, $\delta > 0$ e $(U_i)_{i\in\tau}$ como na demonstração do Teorema 3.1. Como $(U_i)_{i\in\tau}$ é uma família de subconjuntos abertos e não-vazios de K e τ é um *caliber* de K, existe um subconjunto Γ de τ com $|\Gamma| = \tau$ satisfazendo $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \neq \varnothing$. Fixemos $k_1 \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$. Então, para todo $\gamma \in \Gamma$, temos

$$\|T(e_\gamma)(k_1)\| > \delta/2.$$

Seja $Q_{k_1}\colon C(K,X) \to X$ o operador linear contínuo dado por $Q_{k_1}(g) = g(k_1)$, para todo $g \in C(K,X)$. Consideremos o operador $R = Q_{k_1} \circ T|_{c_0(\Gamma)}\colon c_0(\Gamma) \to X$. Então temos que

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} \|R(e_\gamma)\| \geq \delta/2.$$

Logo, pelo Teorema 1.100, existe um subconjunto Γ_1 de Γ com $|\Gamma_1| = |\Gamma| = \tau$ tal que $R|_{c_0(\Gamma_1)}$ é um isomorfismo sobre sua imagem. Como $c_0(\Gamma_1) \sim c_0(\tau)$, temos o resultado. ∎

A Proposição 3.2 sugere nos perguntarmos se existe algum modelo de teoria dos conjuntos no qual podemos substituir c_0 por $c_0(\aleph_1)$ no enunciado do Teorema 3.1. Em tal modelo, se K_1 e K_2 são dois espaços de Hausdorff compactos que satisfazem a ccc, então o espaço topológico produto de K_1 e K_2 também deve satisfazer a ccc. Kunen, Rowbottom e Solovay ([23], página 17) provaram independentemente que ZFC tem esta propriedade quando assumimos MA e a negação da CH.

Corolário 3.4 ([11], pg. 3847, Corolário 3.4). *Suponhamos MA + ¬ CH. Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Então*

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K,X) \implies c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K) \ \ ou\ \ c_0(\aleph_1) \hookrightarrow X.$$

Demonstração. Se K não tem a ccc, então, pelo Teorema 1.98, $C(K)$ contém uma cópia de $c_0(\aleph_1)$. Suponhamos, portanto, que K tenha a ccc. Por hipótese, $\aleph_0 < \aleph_1 < 2^{\aleph_0}$; logo, pelo

Lema 1.45, $\aleph_1$ é um caliber de K, e pelo Teorema 3.3, X contém uma cópia de $c_0(\aleph_1)$. ■

O Teorema 3.3 sugere o seguinte problema.

Problema 3.5 ([11], pg. 3847, Problema 3.5). *Seja K um espaço de Hausdorff compacto. Caracterize os cardinais τ tais que, para todo espaço de Banach X, tem-se*

$$c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X.$$

O resultado a seguir fornece uma resposta parcial para este problema. Observamos que este teorema se aplica a qualquer espaço métrico compacto K, pelo Corolário 1.31.

Teorema 3.6 ([11], pg. 3847, Teorema 3.6). *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e $\tau > \aleph_0$. Se $\mathrm{cf}(\tau) > \mathrm{dens}(K)$, então*

$$c_0(\tau) \hookrightarrow C(K, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X.$$

Demonstração. Suponhamos que $C(K, X)$ contenha uma cópia de $c_0(\tau)$ e que $\mathrm{cf}(\tau) > \mathrm{dens}(K)$. Sejam T e $\delta > 0$ como na demonstração do Teorema 3.1. Seja D um subconjunto denso de K com $|D| = \mathrm{dens}(K)$. Para cada $d \in D$, seja

$$I_d = \{\gamma \in \tau : \|T(e_\gamma)(d)\| > \delta/2\}.$$

Afirmamos que $\cup_{d \in D} I_d = \tau$. De fato, seja $\gamma \in \tau$ fixado. Como $\|e_\gamma\|_\infty = 1$, temos que

$$\sup_{k \in K} \|T(e_\gamma)(k)\| = \|T(e_\gamma)\|_\infty \geq \delta.$$

Logo, existe $k_\gamma \in K$ tal que $\|T(e_\gamma)(k_\gamma)\| > \frac{3\delta}{4}$. Como $T(e_\gamma)$ é contínua, temos que

$$U = T(e_\gamma)^{-1}\left[B(T(e_\gamma)(k_\gamma), \delta/4)\right]$$

é um subconjunto aberto e não-vazio de K. Tomemos $d_\gamma \in D \cap U$. Então

$$\|T(e_\gamma)(d_\gamma)\| \geq \|T(e_\gamma)(k_\gamma)\| - \|T(e_\gamma)(k_\gamma) - T(e_\gamma)(d_\gamma)\| > \frac{3\delta}{4} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2},$$

e portanto $\gamma \in I_{d_\gamma}$.

Afirmamos ainda que existe $d_1 \in D$ tal que $|I_{d_1}| = \tau$. De fato, se $|I_d| < \tau$, para todo $d \in D$, como $\mathrm{cf}(\tau) > \mathrm{dens}(K)$, teríamos $\sup\{|I_d| : d \in D\} < \tau$. Logo,

$$\tau = \left|\bigcup_{d\in D} I_d\right| \leq |D| \cdot \sup_{d\in D} |I_d| < \tau;$$

uma contradição. Isto prova a afirmação.

Consideremos $P_{d_1}\colon C(K,X) \to X$ o operador linear contínuo dado por $P_{d_1}(g) = g(d_1)$, para todo $g \in C(K,X)$. Definimos $S = P_{d_1} \circ T|_{c_0(I_{d_1})} : c_0(I_{d_1}) \to X$. Então

$$\inf_{i\in I_{d_1}} \|S(e_i)\| > 0.$$

Pelo Teorema 1.100, existe $J \subset I_{d_1}$ com $|J| = \tau$ e tal que $S|_{c_0(J)}$ é um isomorfismo sobre sua imagem, como queríamos. ∎

No restante deste Capítulo, vamos nos dedicar ao estudo das cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em $C(K,X)$. Vimos que

$$c_0 \hookrightarrow C(K) \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X),$$

para todo espaço de Hausdorff compacto K e todo espaço de Banach de dimensão infinita X (Corolário 2.14). O próximo resultado mostra que este teorema não se estende de forma natural ao caso $c_0(\tau)$ não-separável. Vamos precisar do seguinte resultado auxiliar.

Lema 3.7. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach separável. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X. Então span$\{f(\cdot)x_n : n \in \mathbb{N}, f \in C(K)\}$ é denso em $C(K,X)$.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como no enunciado. Fixemos $g \in C(K,X)$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 2.13, existem $f_1, \ldots, f_m \in C(K)$ e $z_1, \ldots, z_m \in X$ tais que

$$\left\| g - \sum_{i=1}^{m} f_i(\cdot) z_i \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podemos supor $f_i \neq 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, seja $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|z_i - x_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{2m\|f_i\|_\infty}.$$

Então temos que

$$\|f_i(\cdot)z_i - f_i(\cdot)x_{n_i}\|_\infty = \sup_{k \in K} \|f_i(k)(z_i - x_{n_i})\| = \sup_{k \in K} |f_i(k)|\|z_i - x_{n_i}\| = \|z_i - x_{n_i}\|\|f_i\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2m},$$

donde

$$\begin{aligned}
\left\|g - \sum_{i=1}^m f_i(\cdot)x_{n_i}\right\|_\infty &\leq \left\|g - \sum_{i=1}^m f_i(\cdot)z_i\right\|_\infty + \left\|\sum_{i=1}^m f_i(\cdot)z_i - \sum_{i=1}^m f_i(\cdot)x_{n_i}\right\|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^m \|f_i(\cdot)x_{n_i} - f_i(\cdot)z_i\|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{2m} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

como queríamos. ∎

Proposição 3.8 ([11], pg. 3847, Proposição 4.2). *Existe um espaço de Hausdorff compacto K_2 tal que*

$$c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K_2) \quad mas \quad c_0(\aleph_1) \overset{c}{\not\hookrightarrow} C(K_2, X),$$

para todo espaço de Banach separável X.

Demonstração. Seja K_2 o espaço de Hausdorff compacto construído por Dow, Junnila e Pelant ([7], Exemplo 2.16). O espaço K_2 satisfaz as seguintes propriedades:

(i) O conjunto dos pontos isolados de K_2 é não-enumerável;

(ii) Todo operador linear contínuo $T\colon C(K_2) \to c_0(\aleph_1)$ tem imagem separável ([7], Teorema 1.6).

Seja $\mathcal{F} = \{\{k\} : k$ é ponto isolado de $K_2\}$. Então $\mathcal{F}$ é uma família de abertos de K_2 e, por (i), $|\mathcal{F}| \geq \aleph_1$. Logo, K_2 não satisfaz a ccc, e portanto, pelo Teorema 1.98, temos que $c_0(\aleph_1) \hookrightarrow C(K_2)$.

Sejam X um espaço de Banach separável e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X. Vamos mostrar que todo operador linear contínuo $S\colon C(K_2,X) \to c_0(\aleph_1)$ tem imagem separável.

Seja $S\colon C(K_2,X) \to c_0(\aleph_1)$ um operador linear contínuo. Se S é o operador nulo, nada temos que fazer; suponhamos, portanto, que $S \neq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $E_n = \{f(\cdot)x_n : f \in C(K)\}$ e $S_n = S|_{E_n}$. Notemos que $E_n \sim C(K_2)$ se $x_n \neq 0$. Logo, por (ii), cada S_n tem imagem separável. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $(y_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\operatorname{Im}(S_n)$ tal que $\{y_m^n : m \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\operatorname{Im}(S_n)$. Consideremos

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{y_m^n : m \in \mathbb{N}\}.$$

Então D é enumerável, como reunião enumerável de enumeráveis, e portanto $D' = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} D$ também é enumerável.

Mostremos que D' é denso em $\operatorname{Im}(S)$. Fixemos $g \in C(K,X)$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 3.7, existem $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$ e $h_{n_1},\ldots,h_{n_k} \in C(K)$ tais que

$$\left\| g - \sum_{i=1}^{k} h_{n_i}(\cdot)x_{n_i} \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\|S\|}.$$

Pelo que vimos, para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$, existe $y_{m_i}^{n_i} \in \operatorname{Im}(S_{n_i})$ tal que

$$\|S_{n_i}(h_{n_i}(\cdot)x_{n_i}) - y_{m_i}^{n_i}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| S(g) - \sum_{i=1}^{k} y_{m_i}^{n_i} \right\|_\infty &\leq \left\| S(g) - \sum_{i=1}^{k} S(h_{n_i}(\cdot)x_{n_i}) \right\|_\infty + \left\| \sum_{i=1}^{k} S(h_{n_i}(\cdot)x_{n_i}) - \sum_{i=1}^{k} y_{m_i}^{n_i} \right\|_\infty \\
&= \left\| S\left(g - \sum_{i=1}^{k} h_{n_i}(\cdot)x_{n_i} \right) \right\|_\infty + \left\| \sum_{i=1}^{k} S_{n_i}(h_{n_i}(\cdot)x_{n_i}) - \sum_{i=1}^{k} y_{m_i}^{n_i} \right\|_\infty \\
&\leq \|S\| \left\| g - \sum_{i=1}^{k} h_{n_i}(\cdot)x_{n_i} \right\|_\infty + \sum_{i=1}^{k} \|S_{n_i}(h_{n_i}(\cdot)x_{n_i}) - y_{m_i}^{n_i}\|_\infty \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

como queríamos.

Nestas condições, temos que $C(K, X)$ não contém cópia complementada de $c_0(\aleph_1)$. Com efeito, se existisse Y um subespaço complementado de $C(K, X)$, isomorfo a $c_0(\aleph_1)$, teríamos uma projeção $P\colon C(K, X) \to Y$ sobre Y e um isomorfismo $I\colon Y \to c_0(\aleph_1)$, e portanto o operador $I \circ P\colon C(K, X) \to c_0(\aleph_1)$ seria sobrejetor. Em particular, $\operatorname{Im}(I \circ P)$ não seria separável; uma contradição. ■

O próximo resultado é uma extensão do Teorema 2.12 ao caso não-separável. Para enunciá-lo, vamos precisar da definição a seguir.

Definição 3.9 ([11], pg. 3848, Definição 4.3). Sejam α um ordinal e X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a *propriedade de Josefson-Nissenzweig-α* (ou simplesmente X tem JN_α) se existe uma família $(\varphi_i)_{i\in\aleph_\alpha}$ em X^* tal que $\|\varphi_i\| = 1$, para todo $i \in \aleph_\alpha$, e $(\varphi_i(x))_{i\in\aleph_\alpha} \in c_0(\aleph_\alpha)$, para todo $x \in X$.

Observação 3.10. *Pelo Teorema 2.11, todo espaço de Banach de dimensão infinita tem JN_0.*

Teorema 3.11 ([11], pg. 3848, Teorema 4.5). *Sejam X e Y espaços de Banach e α um ordinal. Se Y tem JN_α, então*

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X \implies c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \ \text{ e } \ c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{K}(X^*, Y).$$

Demonstração. Pela Proposição 1.58, existem $(x'_i)_{i\in\aleph_\alpha}$ família em X e números reais $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\delta \max_{j\in F} |a_j| \leq \left\| \sum_{j\in F} a_j x'_j \right\| \leq M \max_{j\in F} |a_j|,$$

para todo $F \subset \aleph_\alpha$, finito, e toda família de escalares $\{a_j : j \in F\}$. Definindo $A = \frac{M}{\delta}$ e $x_i = \frac{x'_i}{\delta}$, para cada $i \in \aleph_\alpha$, obtemos

$$\max_{j\in F} |a_j| \leq \left\| \sum_{j\in F} a_j x_j \right\| \leq A \max_{j\in F} |a_j|,$$

para todo $F \subset \aleph_\alpha$, finito, e toda família de escalares $\{a_j : j \in F\}$.

Seja $I\colon c_0(\aleph_\alpha) \to X$ dado por

$$I\left(\sum_{i\in\aleph_\alpha} a_i e_i\right) = \sum_{i\in\aleph_\alpha} a_i x_i,$$

para todo $\sum_{i\in\aleph_\alpha} a_i e_i \in c_0(\aleph_\alpha)$. Pela demonstração da Proposição 1.58, I é isomorfismo sobre sua imagem. Seja $Z = \mathrm{Im}(I)$. Cada elemento de Z admite uma única representação da forma $\sum_{i\in\aleph_\alpha} a_i x_i$, pela Proposição 1.52 e pela bijetividade de I.

Definimos, para cada $j \in \aleph_\alpha$, o funcional linear $\varphi'_j : Z \to \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi'_j\left(\sum_{i\in\aleph_\alpha} a_i x_i\right) = a_j,$$

para todo $\sum_{i\in\aleph_\alpha} a_i x_i \in Z$. Notemos que cada φ'_j é contínuo. De fato, seja $z = \sum_{i\in\aleph_\alpha} a_i x_i \in Z$ fixado. Pela Proposição 1.6, existe $J \subset \aleph_\alpha$, com $|J| = \aleph_0$, tal que

$$\{i \in \aleph_\alpha : a_i \neq 0\} \subset J.$$

Vamos escrever $J = \{j_1, \dots, j_n, \dots\}$, onde $j_k \neq j_l$ se $k \neq l$. Pela Proposição 1.9, temos que

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} x_{j_k}.$$

Se $j \notin J$, então $\varphi'_j(z) = a_j = 0$. Caso contrário, existe um único $N \in \mathbb{N}$ tal que $j = j_N$. Para todo $n \geq N$, temos

$$|a_j| \leq \max_{1\leq k\leq n} |a_{j_k}| \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} a_{j_k} x_{j_k}\right\|,$$

e portanto

$$|\varphi'_j(z)| = |a_j| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} a_{j_k} x_{j_k}\right\| = \|z\|.$$

Como z foi escolhido arbitrariamente, concluímos que cada φ'_j é contínua, com $\|\varphi'_j\| \leq 1$. É fácil ver que $\varphi'_j(x_j) = 1$ e $\varphi'_j(x_i) = 0$, se $j \neq i$.

Como Z é subespaço fechado de X, temos, pelo Teorema de Hahn-Banach, que cada φ'_j admite extensão contínua $\varphi_j \in X^*$, com $\|\varphi_j\| \leq 1$.

Por hipótese, existe uma família $(\psi_i)_{i\in\aleph_\alpha}$ em Y^* tal que $\|\psi_i\| = 1$, para todo $i \in \aleph_\alpha$, e $(\psi_i(y))_{i\in\aleph_\alpha} \in c_0(\aleph_\alpha)$, para todo $y \in Y$. Para cada $i \in \aleph_\alpha$, seja $y_i \in Y$ com $\|y_i\| \leq 2$ e $\psi_i(y_i) = 1$.

Afirmamos que a família $(x_i \otimes y_i)_{i\in\aleph_\alpha}$ em $X\hat{\hat{\otimes}}Y$ é equivalente à base canônica de $c_0(\aleph_\alpha)$. Com efeito, seja $F \subset \aleph_\alpha$, finito, e seja $\{a_j : j \in F\}$ uma família de escalares. Então temos que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j\in F} a_j(x_j \otimes y_j)\right\| &= \sup\left\{\left|\sum_{j\in F} a_j\varphi(x_j)\psi(y_j)\right| : \varphi \in B_{X^*}, \psi \in B_{Y^*}\right\}\\ &\geq \left|\sum_{j\in F} a_j\varphi_i(x_j)\psi_i(y_j)\right|\\ &= |a_i|,\end{aligned}$$

para todo $i \in F$. Logo,

$$\max_{j\in F} |a_j| \leq \left\|\sum_{j\in F} a_j(x_j \otimes y_j)\right\|.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j\in F} a_j(x_j \otimes y_j)\right\| &= \sup_{\psi\in B_{Y^*}} \left\|\sum_{j\in F} a_j\psi(y_j)x_j\right\|\\ &\leq \sup_{\psi\in B_{Y^*}} \left\{A\max_{j\in F} |a_j||\psi(y_j)|\right\}\\ &\leq 2A\max_{j\in F}|a_j|.\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que

$$\max_{j\in F} |a_j| \leq \left\|\sum_{j\in F} a_j(x_j \otimes y_j)\right\| \leq 2A\max_{j\in F}|a_j|.$$

Pela demonstração da Proposição 1.58, o operador linear $S\colon c_0(\aleph_\alpha) \to X\hat{\hat{\otimes}}Y$ dado por

$$S\left(\sum_{i\in\aleph_\alpha} a_ie_i\right) = \sum_{i\in\aleph_\alpha} a_i(x_i \otimes y_i)$$

é um isomorfismo sobre sua imagem.

Seja $\tilde{T}\colon X\hat{\hat{\otimes}}Y \to \mathcal{K}(X^*, Y)$ como na demonstração do Teorema 1.97. Definimos $W =$

$\overline{\operatorname{span}\{\tilde{T}(x_i \otimes y_i) : i \in \aleph_\alpha\}}$. Vamos construir uma projeção $P\colon \mathcal{K}(X^*, Y) \to W$ sobre W e mostrar que W é isomorfo a $c_0(\aleph_\alpha)$.

Fixemos $L \in \mathcal{K}(X^*, Y)$. Afirmamos que $(\psi_i(L(\varphi_i)))_{i\in\aleph_\alpha} \in c_0(\aleph_\alpha)$. De fato, como L é compacto e $\{\varphi_i : i \in \aleph_\alpha\}$ é limitado em X^*, temos que $C = \overline{\{L(\varphi_i) : i \in \aleph_\alpha\}}$ é compacto em Y. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $\{B(c, \frac{\varepsilon}{2}) : c \in C\}$ é um recobrimento aberto de C. Por compacidade, existem $c_1, \ldots, c_m \in C$ tais que

$$C \subset \bigcup_{1\leq n\leq m} B\left(c_n, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Pela escolha da família $(\psi_i)_{i\in\aleph_\alpha}$, para cada $n \in \{1, \ldots, m\}$ o conjunto $F_n = \{i \in \aleph_\alpha : |\psi_i(c_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ é finito. Seja $F_\varepsilon = F_1 \cup \ldots \cup F_m$. Então F_ε é finito. Dado $c \in C$, seja $n \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|c - c_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Então

$$\begin{aligned}
|\psi_i(c)| &= |\psi_i(c - c_n) + \psi_i(c_n)| \\
&\leq |\psi_i(c - c_n)| + |\psi_i(c_n)| \\
&\leq \|\psi_i\|\|c - c_n\| + |\psi_i(c_n)| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $i \in \aleph_\alpha \setminus F_\varepsilon$.

Provamos, portanto, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset \aleph_\alpha$, finito, tal que $|\psi_i(c)| < \varepsilon$, para todo $i \in \aleph_\alpha \setminus F_\varepsilon$ e todo $c \in C$. Em particular, dados $\varepsilon > 0$ e F_ε como antes, temos que

$$|\psi_i(L(\varphi_i))| \geq \varepsilon \implies i \in F_\varepsilon,$$

isto é, $(\psi_i(L(\varphi_i)))_{i\in\aleph_\alpha} \in c_0(\aleph_\alpha)$, pois $L(\varphi_i) \in C$, para todo $i \in \aleph_\alpha$.

Afirmamos também que a família $(\psi_i(L(\varphi_i))\tilde{T}(x_i \otimes y_i))_{i\in\aleph_\alpha}$ é desordenadamente somável em W. Com efeito, como W é fechado, e portanto completo, basta mostrarmos que esta família satisfaz a condição de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, seja $G_\varepsilon \subset \aleph_\alpha$, finito, tal que

$$\left\{i \in \aleph_\alpha : |\psi_i(L(\varphi_i))| \geq \frac{\varepsilon}{2A}\right\} \subset G_\varepsilon.$$

Se F é um subconjunto finito de $\aleph_\alpha$ com $F \cap F_\varepsilon = \varnothing$, temos

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j\in F}\psi_j(L(\varphi_j))\tilde{T}(x_j\otimes y_j)\right\| &= \left\|\tilde{T}\left(\sum_{j\in F}\psi_j(L(\varphi_j))(x_j\otimes y_j)\right)\right\| \\ &= \left\|\sum_{j\in F}\psi_j(L(\varphi_j))(x_j\otimes y_j)\right\| \\ &\leq 2A\max_{j\in F}|\psi_i(L(\varphi_i))| \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

como queríamos.

Com isto, podemos considerar o operador linear $P\colon \mathcal{K}(X^*,Y)\to W$ dado por

$$P(L) = \sum_{i\in\aleph_\alpha}\psi_i(L(\varphi_i))\tilde{T}(x_i\otimes y_i),$$

para todo $L\in\mathcal{K}(X^*,Y)$.

Mostremos que P é contínua. Fixemos $L\in\mathcal{K}(X^*,Y)$. Pela Proposição 1.6, existe $H\subset\aleph_\alpha$, com $|H|=\aleph_0$, tal que

$$\{i\in\aleph_\alpha : \psi_i(L(\varphi_i))\neq 0\}\subset H.$$

Escrevendo $H=\{h_1,\ldots,h_n\}$, onde $h_k\neq h_l$ se $k\neq l$, temos, pela Proposição 1.9, que

$$P(L) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_{h_k}(L(\varphi_{h_k}))\tilde{T}(x_{h_k}\otimes y_{h_k}),$$

e portanto

$$\begin{aligned}\|P(L)\| &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\psi_{h_k}(L(\varphi_{h_k}))\tilde{T}(x_{h_k}\otimes y_{h_k})\right\| \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\psi_{h_k}(L(\varphi_{h_k}))(x_{h_k}\otimes y_{h_k})\right\| \\ &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} 2A|\psi_{h_k}(L(\varphi_{h_k}))| \\ &\leq 2A\lim_{n\longrightarrow\infty}\|\psi_{h_k}\|\|L\|\|\varphi_{h_k}\| \\ &\leq 2A\|L\|,\end{aligned}$$

pois $\sup_{i\in\aleph_\alpha}\|\varphi_i\|\leq 1$. Logo, P é contínua e $\|P\|\leq 2A$.

Mostremos também que $P(L)=L$, para todo $L\in W$. Temos que $\tilde{T}(x_i\otimes y_i)=(\tilde{T}\circ I)(e_i)$, para todo $i\in\aleph_\alpha$. Pela Observação 1.59, temos que $W=\operatorname{Im}(\tilde{T}\circ I)$. Em particular, W é isomorfo a $c_0(\aleph_\alpha)$. Pela bijetividade de $\tilde{T}\circ I$ e pela Proposição 1.52, temos que cada $L\in W$ admite uma única representação da forma

$$L=\sum_{i\in\aleph_\alpha}a_i\tilde{T}(x_i\otimes y_i).$$

Pela Proposição 1.6, existe $D\subset\aleph_\alpha$, com $|D|=\aleph_\alpha$, tal que

$$\{i\in\aleph_\alpha : a_i\neq 0\}\subset D.$$

Escrevendo $D=\{d_1,\ldots,d_n,\ldots\}$, onde $d_k\neq d_l$ se $k\neq l$, temos, pela Proposição 1.9, que

$$L=\sum_{k=1}^{\infty}a_{d_k}\tilde{T}(x_{d_k}\otimes y_{d_k}),$$

e portanto

$$\begin{aligned}
P(L)&=P\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{d_k}\tilde{T}(x_{d_k}\otimes y_{d_k})\right)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}a_{d_k}P(\tilde{T}(x_{d_k}\otimes y_{d_k}))\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}a_{d_k}\sum_{i\in\aleph_\alpha}\psi_i(\tilde{T}(x_{d_k}\otimes y_{d_k})(\varphi_i))\tilde{T}(x_i\otimes y_i)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}a_{d_k}\sum_{i\in\aleph_\alpha}\psi_i(\varphi_i(x_{d_k})y_{d_k})\tilde{T}(x_i\otimes y_i)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}a_{d_k}\tilde{T}(x_{d_k}\otimes y_{d_k})\\
&=L.
\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{Im}(P)=W$ e $P(L)=L$, para todo $L\in W$. Isto prova que P é projeção sobre W, e como $W\sim c_0(\aleph_\alpha)$, temos que $c_0(\aleph_\alpha)\overset{c}{\hookrightarrow}\mathcal{K}(X^*,Y)$. Além disso, como $W=\tilde{T}(I(c_0(\aleph_\alpha))$ é complementado em $\mathcal{K}(X^*,Y)$, temos, pela Proposição 1.28, que $I(c_0(\aleph_\alpha))$ é complementado em $X\hat{\hat{\otimes}}Y$, isto é, $c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} X\hat{\otimes}Y$. ∎

Como consequências do Teorema 3.11, temos os seguintes resultados.

Corolário 3.12 ([11], pg. 3849, Corolário 4.6). *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e α um ordinal. Se X tem JN_α, então*

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow C(K) \implies c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X).$$

Além disso, se $C(K)$ tem JN_α, então

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X \implies c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X).$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que X tenha JN_α e que $C(K)$ contenha uma cópia de $c_0(\aleph_\alpha)$. Pelos Teoremas 3.11 e 2.13, temos que $c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K)\hat{\hat{\otimes}}X \sim C(K, X)$. Logo, $c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X)$, pela Proposição 1.27.

Por outro lado, se $C(K)$ tem JN_α e X contém uma cópia de $c_0(\aleph_\alpha)$, temos, pelos Teoremas 3.11 e 2.13 e pelo Corolário 1.82, que

$$c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} X\hat{\hat{\otimes}}C(K) \sim C(K)\hat{\hat{\otimes}}X \sim C(K, X).$$

Pea Proposição 1.27, temos o resultado. ∎

Observação 3.13. *O Corolário 3.12 é uma generalização do Corolário 2.14 (caso $\alpha = 0$).*

Corolário 3.14 ([11], pg. 3850, Corolário 4.8). *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e α um ordinal. Se X tem JN_α e $c_0 \not\hookrightarrow X$, então*

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow C(K) \iff c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X).$$

Demonstração. A primeira implicação é consequência imediata do Corolário 3.12. Reciprocamente, se $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X)$, temos, pelo Teorema 3.1, que $c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow C(K)$, pois $c_0 \not\hookrightarrow X$. ∎

Capítulo 4

Considerações finais

Este último Capítulo é dedicado a algumas aplicações do Teorema 3.6 e do Corolário 3.12. Também vamos apresentar alguns problemas em aberto relacionados ao que estudamos. Começamos lembrando o conceito de compactificado de Stone-Čech de um espaço topológico.

Definição 4.1 ([8], pg. 39). Seja S um espaço topológico. Dizemos que S *verifica o axioma* $T_{3\frac{1}{2}}$ se dados quaisquer $x \in S$ e $F \subset S$ fechado, com $x \notin F$, existe uma função contínua $f\colon S \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f(s) = 1$, para todo $s \in F$.

Seja S um espaço de Hausdorff que verifica o axioma $T_{3\frac{1}{2}}$. Então existe um espaço de Hausdorff compacto βS satisfazendo:

- Existe um subespaço denso $\varphi(S)$ de βS que é homeomorfo a S;
- Toda função contínua $f\colon \varphi(S) \to K$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto, admite uma (única) extensão contínua a βS.

Além disso, tal espaço βS é único, a menos de homeomorfismo, e é chamado de *compactificado de Stone-Čech de* S ([8], pg. 169).

Vamos precisar dos seguintes resultados auxiliares para provar o próximo teorema.

Proposição 4.2. *Sejam X um espaço de Banach e $\beta \leq \alpha$ ordinais. Se X tem JN_α, então X tem JN_β.*

Demonstração. Por hipótese, existe uma família $(\varphi_i)_{i\in\aleph_\alpha}$ em X^* tal que $\|\varphi_i\| = 1$, para todo $i \in \aleph_\alpha$, e $(\varphi_i(x))_{i\in\aleph_\alpha} \in c_0(\aleph_\alpha)$, para todo $x \in X$. Tomemos $J \subset \aleph_\alpha$ com $|J| = \aleph_\beta$. É fácil ver que a família $(\varphi_j)_{j\in J}$ tem as propriedades desejadas. ∎

Proposição 4.3. *Sejam X e Y espaços de Banach e α um ordinal. Se Y tem JN_α e existe $T\colon X \to Y$ um operador linear contínuo sobrejetor, então X tem JN_α.*

Demonstração. Seja $(\psi_i)_{i\in\aleph_\alpha}$ uma família em Y^* com $\|\psi_i\| = 1$, para todo $i \in \aleph_\alpha$, e $(\psi_i(y))_{i\in\aleph_\alpha} \in c_0(\aleph_\alpha)$, para todo $y \in Y$. Para cada $i \in \aleph_\alpha$, seja $\varphi_i = T^*(\psi_i)$. Notemos que

$$(\varphi_i(x))_{i\in\aleph_\alpha} = (T^*(\psi_i)(x))_{i\in\aleph_\alpha} = (\psi_i(T(x)))_{i\in\aleph_\alpha} \in c_0(\aleph_\alpha),$$

para todo $x \in X$. Notemos também que

$$\|\varphi_i\| = \|T^*(\psi_i)\| = \sup_{x\in X} |\psi_i(T(x))| = \sup_{y\in Y} |\psi_i(y)| = \|\psi_i\| = 1,$$

para todo $i \in \aleph_\alpha$, pois T é sobrejetora. Isto conclui a demonstração. ∎

Seja α um ordinal. Denotamos por $\ell_2(\aleph_\alpha)$ o espaço de Banach das famílias de números reais $(x_i)_{i\in\aleph_\alpha}$ tais que $(x_i^2)_{i\in\aleph_\alpha}$ é desordenadamente somável em $\mathbb{R}$, munido da norma

$$\|(x_i)_{i\in\aleph_\alpha}\|_2 = \left(\sum_{i\in\aleph_\alpha} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall (x_i)_{i\in\aleph_\alpha} \in \ell_2(\aleph_\alpha).$$

É fácil ver que $\ell_2(\aleph_\alpha) \subset c_0(\aleph_\alpha)$.

Proposição 4.4. *Seja α um ordinal. Então $\ell_2(\aleph_\alpha)$ tem JN_α.*

Demonstração. Para cada $i \in \aleph_\alpha$, seja $\varphi_i\colon \ell_2(\aleph_\alpha) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_i(x) = x_i$, para todo $x = (x_j)_{j\in\aleph_\alpha} \in \ell_2(\aleph_\alpha)$. É fácil ver que cada φ_i é linear. Fixemos $i \in \aleph_\alpha$ e mostremos que φ_i é contínua.

Seja $x = (x_j)_{j\in\aleph_\alpha} \in \ell_2(\aleph_\alpha)$ fixado. Pela Proposição 1.6, existe $J = \{j_1, \ldots, j_n, \ldots\} \subset \aleph_\alpha$, com $j_k \neq j_l$ se $k \neq l$, tal que

$$\{j \in \aleph_\alpha : x_j \neq 0\} \subset J.$$

Pela Proposição 1.9, temos que

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{j_n}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se $i \notin J$, então $\varphi_i(x) = 0$. Caso contrário, existe um único $N \in \mathbb{N}$ tal que $i = j_N$. Para todo $m \geq N$, temos

$$|\varphi_i(x)| = |x_i| \leq \left(\sum_{n=1}^{m} x_{j_n}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

e portanto

$$|\varphi_i(x)| \leq \lim_{m \longrightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{m} x_{j_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2.$$

Isto prova que cada φ_i é contínua, com $\|\varphi_i\| \leq 1$.

Notemos que $\varphi(e_i) = 1$ e $\|e_i\|_2 = 1$, para todo $i \in \aleph_\alpha$. Logo, $\|\varphi_i\| = 1$, para todo $i \in \aleph_\alpha$.

Finalmente, notemos que $(\varphi_i(x))_{i \in \aleph_\alpha} = x \in c_0(\aleph_\alpha)$, para todo $x \in \ell_2(\aleph_\alpha)$, como queríamos. ■

No que segue, dado I um conjunto não-vazio, vamos considerar I munido da topologia discreta. Munido desta topologia, I é um espaço de Hausdorff que verifica o axioma $T_{3\frac{1}{2}}$.

Proposição 4.5. *Seja I um conjunto de cardinalidade $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$. Então existe $T\colon C(\beta I) \to \ell_2(2^{\mathfrak{m}})$ um operador linear contínuo sobrejetor.*

Demonstração. Indicamos [20], página 203. ■

Teorema 4.6 ([11], pg. 3851, Teorema 5.3)**.** *Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto satisfazendo $\aleph_0 \leq |I| < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\alpha \leq 2^{|I|}$, para algum ordinal α. Então*

$$c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X \iff c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta I, X).$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que X contenha uma cópia de $c_0(\aleph_\alpha)$. Seja γ um ordinal tal que $2^{|I|} = \aleph_\gamma$. Pela Proposição 4.5, temos que existe $T\colon C(\beta I) \to \ell_2(\aleph_\gamma)$ um operador linear contínuo sobrejetor, e portanto $C(\beta I)$ tem JN_γ, pelas Proposições 4.3 e 4.4. Como $\alpha \leq \gamma$, temos, pela Proposição 4.2, que $C(\beta I)$ tem JN_α. Logo, pelo Corolário 3.12, concluímos que

$$c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta I, X).$$

Reciprocamente, suponhamos que $C(\beta I, X)$ contenha uma cópia complementada de $c_0(\aleph_\alpha)$. Como I é homeomorfo a um subespaço denso de βI, temos que $\mathrm{dens}(\beta I) \leq |I| < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$. Portanto, pelo Teorema 3.6, temos que X contém uma cópia de $c_0(\aleph_\alpha)$. ■

Proposição 4.7. *Seja α um ordinal. Então* $\aleph_\alpha < \mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha})$.

Demonstração. Indicamos [15], página 54. ■

Corolário 4.8 ([11], pg. 3851, Corolário 5.4). *Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto de cardinalidade $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$. Então*

$$c_0(2^{\mathfrak{m}}) \hookrightarrow X \iff c_0(2^{\mathfrak{m}}) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta I, X).$$

Demonstração. Pela Proposição 4.7, temos $\mathfrak{m} < \mathrm{cf}(2^{m})$. O resultado segue do Teorema 4.6 para $\aleph_\alpha = 2^{\mathfrak{m}}$. ■

Vejamos agora alguns problemas em aberto relacionados ao que estudamos.

Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $\ell_\infty(\mathbb{N}, X)$ o espaço de Banach das sequências limitadas de elementos de X, munido da norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N}, X).$$

Denotamos por $c_0(\mathbb{N}, X)$ o subespaço (fechado) de $\ell_\infty(\mathbb{N}, X)$ das sequências de elementos de X que convergem para zero.

Sabe-se que

$$c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \implies c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X,$$

para todo espaço de Banach X ([17], pg. 55, Teorema Principal). Não se sabe, no entanto, se o mesmo vale para $c_0(\tau)$ com $|\tau| \geq \aleph_1$. Assim, podemos considerar o seguinte problema.

Problema. *Seja X um espaço de Banach. Caracterize os cardinais τ tais que:*

(i) $c_0(\tau) \hookrightarrow \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X$;

(ii) $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \implies c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

Consideremos agora os seguintes resultados.

Proposição 4.9. *Os espaços $\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m)$ e $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R}^m)$ são linearmente isométricos, onde $m \in \mathbb{N}$. Em particular, $\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ um homeomorfismo sobre sua imagem. Fixemos $f \in \ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m)$. Como f é limitada, temos que $\mathrm{Im}(f)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^m$, e portanto $\overline{\mathrm{Im}(f)}$ é um subespaço compacto de $\mathbb{R}^m$. Logo, a função $f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(\mathbb{N}) \to \overline{\mathrm{Im}(f)}$ admite uma única extensão contínua a $\beta\mathbb{N}$, que denotaremos por $T(f)$.

Assim, temos definida a função

$$\begin{aligned} T:\ \ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m) &\longrightarrow C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R}^m) \\ f &\longmapsto T(f)\,. \end{aligned}$$

Mostremos que T é uma isometria linear sobrejetora.

T é linear: sejam $f, g \in \ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ fixados. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} T(f+\alpha g)(\varphi(n)) &= (f+\alpha g)(n) \\ &= f(n) + \alpha g(n) \\ &= T(f)(\varphi(n)) + \alpha T(g)(\varphi(n)). \end{aligned}$$

Logo, $T(f+\alpha g)$ e $T(f) + \alpha T(g)$ coincidem em $\varphi(\mathbb{N})$, que é denso em $\beta\mathbb{N}$. Pela Proposição 1.41, concluímos que $T(f+\alpha g) = T(f) + \alpha T(g)$.

T é isometria: Notemos que

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{x \in \beta\mathbb{N}} \|T(f)(x)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T(f)(\varphi(n))\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f(n)\| = \|f\|_\infty,$$

para toda $f \in \ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m)$, onde a segunda igualdade segue da Proposição 1.41.

T é sobrejetora: seja $g \in C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R}^m)$ dada. Notemos que $g|_{\varphi(\mathbb{N})} \colon \varphi(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}^m$ é contínua e limitada. Definimos

$$f \colon g|_{\varphi(\mathbb{N})} \circ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Então f é limitada, isto é, $f \in \ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m)$. Além disso, como $T(f)$ e g coincidem em $\varphi(\mathbb{N})$, temos, pela Proposição 1.41, que $T(f) = g$, como queríamos. ∎

Proposição 4.10. *Seja $K_0 = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, munido da topologia induzida por $\mathbb{R}$, e seja X um espaço de Banach. Então $c_0(\mathbb{N}, X) \sim C(K_0, X)$. Em particular, $c_0(\mathbb{N}, X)$ é um* *espaço de Banach.*

Demonstração. Consideremos o operador linear $T\colon c_0(\mathbb{N}, X) \to C(K_0, X)$ dado por $T(x)(0) = x_1$ e $T(x)\left(\frac{1}{n}\right) = x_1 + x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N}, X)$. Notemos que

$$\|T(x)\|_\infty = \max\left\{\|x_1\|, \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_1 + x_{n+1}\|\right\} \leq 2\|x\|_\infty,$$

para todo $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N}, X)$, e portanto T é contínuo.

Notemos também que T é injetor. De fato, se $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N}, X)$ é tal que $T(x) = 0$, então temos que

$$\begin{aligned} 0 &= T(x)(0) = x_1 \\ 0 &= T(x)\left(\frac{1}{n}\right) = x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

isto é, $x = 0$.

Mostremos agora que T é sobrejetor. Seja $f \in C(K_0, X)$ fixada. Definimos $y_1 = f(0)$ e $y_{n+1} = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f é contínua, temos que $y_n \longrightarrow 0$, isto é, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N}, X)$. Além disso, é fácil ver que $T(y) = f$.

Finalmente, dada $f \in C(K_0, X)$, temos que

$$T^{-1}(f) = \left(f(0), f(1) - f(0), f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0), \ldots, f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0), \ldots,\right),$$

e portanto

$$\|T^{-1}(f)\|_\infty = \max\left\{\|f(0)\|, \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right\|\right\} \leq 2\|f\|_\infty.$$

Isto prova que T^{-1} também é contínuo, donde T é um isomorfismo de $c_0(\mathbb{N}, X)$ sobre $C(K_0, X)$. ∎

Proposição 4.11. *Sejam K e L espaços de Hausdorff compactos e sejam X e Y espaços de Banach. Então valem:*

(i) Se K e L são homeomorfos, então $C(K, X) \sim C(L, X)$;

(ii) Se X e Y são isomorfos, então $C(K, X) \sim C(K, Y)$.

Demonstração. (i) Por hipótese, existe $\varphi\colon L \to K$ um homeomorfismo. Definimos o operador linear

$$\begin{aligned} T_1 : \ C(K,X) &\longrightarrow C(L,X) \\ f &\longmapsto f \circ \varphi\,. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\|T_1(f)\|_\infty = \sup_{l\in L} \|f(\varphi(l))\| = \sup_{k\in K} \|f(k)\| = \|f\|_\infty,$$

para toda $f \in C(K,X)$, donde T_1 é uma isometria. Além disso, dada $g \in C(L,X)$, temos que $g \circ \varphi^{-1} \in C(K,X)$ e $T_1(g \circ \varphi^{-1}) = g$. Logo, T_1 é sobrejetor.

(ii) Seja $S\colon X \to Y$ um isomorfismo. Definimos o operador linear

$$\begin{aligned} T_2 : \ C(K,X) &\longrightarrow C(K,Y) \\ f &\longmapsto S \circ f\,. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\|T_2(f)\|_\infty = \sup_{k\in K} \|S(f(k))\| \le \|S\| \sup_{k\in K} \|f(k)\| = \|S\|\|f\|_\infty,$$

para toda $f \in C(K,X)$. Isto prova que T_2 é contínuo.

Dada $f \in C(K,X)$, temos que

$$\begin{aligned} T_2(f) = 0 &\iff S \circ f = 0 \\ &\iff S(f(k)) = 0, \forall k \in K \\ &\iff f(k) = 0, \forall k \in K \\ &\iff f = 0, \end{aligned}$$

pois S é isomorfismo. Logo, T_2 é injetora.

Finalmente, dada $g \in C(K,Y)$, temos que $S^{-1} \circ g \in C(K,X)$ e $T_2(S^{-1} \circ g) = g$. Logo, T_2 é um operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach. Portanto, pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que T_2 é um isomorfismo entre $C(K,X)$ e $C(K,Y)$. ■

Segue do Teorema 1.63 e das Proposições 4.9, 4.10 e 4.11 que

$$
\begin{aligned}
C(\beta\mathbb{N}, c_0) &\sim C(\beta\mathbb{N}, C(K_0)) \\
&\sim C(\beta\mathbb{N} \times K_0) \\
&\sim C(K_0 \times \beta\mathbb{N}) \\
&\sim C(K_0, C(\beta\mathbb{N})) \\
&\sim C(K_0, \ell_\infty) \\
&\sim c_0(\mathbb{N}, \ell_\infty),
\end{aligned}
$$

onde K_0 é como no enunciado da Proposição 4.10.

Cembranos e Mendoza ([3], pg. 462, Teorema 1) provaram que os espaços $\ell_\infty(\mathbb{N}, c_0)$ e $c_0(\mathbb{N}, \ell_\infty)$ *não* são isomorfos, e portanto, pelo que vimos, $\ell_\infty(\mathbb{N}, c_0) \not\sim C(\beta\mathbb{N}, c_0)$. Mais geralmente, o seguinte problema está em aberto.

Problema. *Existe um espaço de Banach X, de dimensão infinita, tal que*

$$\ell_\infty(\mathbb{N}, X) \sim C(\beta\mathbb{N}, X)?$$

Podemos ainda considerar problemas análogos aos que vimos para cópias de $c_0(\tau)$ em outros espaços de Banach, como $\mathcal{K}(X,Y)$ ou $X\hat{\hat{\otimes}}Y$, onde X e Y são espaços de Banach. Como $X\hat{\hat{\otimes}}Y$ contém uma cópia de Y e $\mathcal{K}(X,Y)$ contém uma cópia de $X^*\hat{\hat{\otimes}}Y$, temos que

$$c_0(\tau) \hookrightarrow Y \implies c_0(\tau) \hookrightarrow X\hat{\hat{\otimes}}Y \ \text{ e } \ c_0(\tau) \hookrightarrow \mathcal{K}(X,Y),$$

para quaisquer espaços de Banach X e Y e todo cardinal τ. Ainda nesta direção, os Teoremas 2.12 e 3.11 fornecem algumas condições suficientes para a existência de cópias complementadas de $c_0(\tau)$ nestes espaços.

Bibliografia

[1] C. Brech, *Aspectos combinatórios da geometria de espaços de Banach $C(K)$ com a propriedade de Grothendieck*, Master's thesis, Universidade de São Paulo, 2004.

[2] P. Cembranos, *$C(K, E)$ contains a complemented copy of c_0*, Proceedings of the American Mathematical Society **91** (1984), no. 4, 556–558.

[3] P. Cembranos and J. Mendoza, *The Banach spaces $\ell_\infty(c_0)$ and $c_0(\ell_\infty)$ are not isomorphic*, Journal of Mathematical Analysis and Apllications **367** (2010), no. 2, 461–463.

[4] W. W. Comfort and S. A. Negrepontis, *Chain conditions in topology*, Cambridge Tracts in Mathematics, 79, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982.

[5] J. Diestel and J. J. Uhl Jr., *Vector Measures*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1977.

[6] G. G. Ding, *On Almost Isometric Embedding from $C(\Omega)$ into $C_0(\Omega_0)$*, Acta. Math. Sinica, English Series **21** (2005), no. 5, 1045–1048.

[7] A. Dow, H. Junnila, and J. Pelant, *Chain conditions and weak topologies*, Topology and its Applications **156** (2009), 1327–1344.

[8] R. Engelking, *General Toplogy*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[9] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2010.

[10] F. J. Freniche, *Barrelledness of the space of vector valued and simple functions*, Mathematische Annalen **267** (1984), no. 4, 479–486.

[11] E. M. Galego and J. N. Hagler, *Copies of $c_0(\Gamma)$ in $C(K, X)$ spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 3843–3852.

[12] F. Galvin, *Chain conditions and products*, Fund. Math. **108** (1980), no. 1, 33–48.

[13] J. N. Hagler and W. B. Johnson, *Banach spaces whose dual balls are not weak* sequentially compact*, Israel J. Math. **28** (1977), 325–330.

[14] C. S. Honig, *Aplicações da Topologia à Análise*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2011.

[15] T. Jech, *Set Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[16] B. Josefson, *Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence*, Arkiv för Mathematatik **13** (1975), 79–89.

[17] D. Leung and F. Räbiger, *Complemented copies of c_0 in ℓ^∞-sums of Banach spaces*, Illionis J. Math. **34** (1990), no. 1, 52–58.

[18] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[19] A. Nissenzweig, *w^*-sequential convergence*, Israel Journal of Mathematics **22** (1975), 266–272.

[20] H. P. Rosenthal, *On quasi-complemented subspaces of Banach spaces, with an Appendix on compactness of operators from $L^p(\mu)$ to $L^r(\nu)$*, Journal of Functional Analysis **4** (1969), 176–214.

[21] ______, *On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ*, Acta. M. **124** (1970), 205–248.

[22] ______, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math. **37** (1970), 13–36.

[23] M. E. Rudin, *Lectures on set-theoretic topology*, American Mathematical Society, 1975.

[24] R. A. Ryan, *Complemented copies of c_0 in spaces of compact operators*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect A. *91* (1991), no. 2, 239–241.

[25] ______, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer-Verlag, London, 2002.

[26] E. Saab and P. Saab, *On complemented copies of c_0 in injective tensor products*, Contemporary Mathematics **52** (1986), 131–135.

[27] C. Samuel, *Sur la reproductibilite des espaces l_p*, Math. Scand. **45** (1979), 103–117.

[28] W. A. Veech, *Short proof of Sobczyk's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 627–628.