As álgebras de Lie simples de dimensão 7 sobre um corpo de característica 2 e suas subálgebras toroidais

Wilian Francisco de Araujo

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Grichkov

São Paulo, fevereiro de 2013

As álgebras de Lie simples de dimensão 7 sobre um corpo de característica 2 e suas subálgebras toroidais

Esta tese trata-se da versão original
do aluno (Wilian Francisco de Araujo).

As álgebras de Lie simples de dimensão 7 sobre um corpo de característica 2 e suas subálgebras toroidais

Esta tese contém as correções e alterações
sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa
realizada por Wilian Francisco de Araujo em 21/03/2014.
O original encontra-se disponível no Instituto de
Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Alexandre Grichkov (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Juan Carlos Gutierres Fernandez - IME-USP
- Prof. Dr. Pasha Zusmanovich - Universidade de Tallin, Estônia
- Prof. Dr. Plamen Koshlukov - UNICAMP-SP
- Profa. Dra. Maria de Lourdes Giuliani - UFABC

Agradecimentos

Seria difícil em poucas palavras dizer tudo o que gostaria. Mas agradeço primeiramente à Deus, por sua infinita misericórdia, fidelidade, por ter me dado fôlego de vida para estar neste momento tão especial em minha vida. A minha esposa Siméia Menegassi Alves (*in memorian*) que no primeiro ano do doutorado trabalhou para nos manter e para que eu pudesse estudar, e pelo apoio até 2012, ano em que Deus a levou para si.

À minha família, pelo apoio, incentivo, compreensão e paciência.

Aos amigos da UFT (Universidade Federal do Tocantins) e da UTFPR (Universidade Federal Tecnológica do Paraná), pelo apoio e compreensão.

Quero agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Alexandre Grichkov, pela excelente orientação, apoio e pela sábia maneira de passar seu conhecimento.

Quero agradecer também a Profª Dra. Marinês Guerreiro.

Aos professores e funcionários do Instituto de Matemática e Estatística da USP, pela ajuda, amizade e conhecimento que me proporcionaram.

Sou grato aos meus amigos de doutorado, pela força e amizade dadas nos momentos difíceis.

Resumo

Neste trabalho estudamos as Álgebras de Lie simples de dimensão 7 sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2, cujos principais objetivos são classificar as Álgebras de Lie simples de dimensão 7 sobre um corpo de característica 2 e descrever as subálgebras toroidais das Álgebras de Lie simples de dimensão 7. Conseguimos descrever as subálgebras toroidais da Álgebra de Witt-Zassenhaus, já para a Álgebra Hamiltoniana, conseguimos determinar algumas subálgebras toroidais.
Palavras-chave: Álgebra de Lie, Álgebra de Witt, caracteristica 2.

Abstract

In this work we study the simple Lie algebras of dimension 7 over an algebraically closed field of characteristic 2, whose main objectives are classify the simple Lie algebras of dimension 7 over a field of characteristic 2 and describe the toroidal subalgebras of simple Lie algebras of dimension 7. We could describe the toroidal subalgebras of Witt-Zassenhaus algebra, since for Hamiltonian algebra, we could determine some toroidal subalgebras.
Keywords: Lie Álgebra, Witt Algebra, characteristic 2.

Sumário

Lista de Símbolos

$W(1,3)$	Algebra de Witt-Zassenhaus
K	Álgebra de Kostrikin-Dzhumadil'daev
$Ann(t)$	Anulador de t
$T(L)$	Posto Toroidal
$TR(L)$	Posto toridal absoluto
[2]	2-aplicação
$\langle X \rangle$	subgrupo gerado por X.
$Aut(\mathfrak{g})$	grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$.
g'	subálgebra derivada de $\mathfrak{g}$.

Lista de Tabelas

Introdução

A classificação das álgebras de Lie simples sobre corpos de características $p > 3$ já foi resolvido. Em meados dos anos de 1990 H. Strade, R.block e R. L. Wilson classificaram as Álgebras de Lie simples sobre um corpo de característica $p > 7$. E no início dos anos 2000, H. Strade e A. Premet classificaram as álgebras de Lie sobre um corpo de característica $p > 3$, estando ainda em abertos para $p = 2$ e $p = 3$.

Estaremos trabalhando com álgebras de Lie simples de dimensão 7 sobre um corpo de característica 2. O objetivo principal é determinar as subálgebras toroidais destas álgebras e verificar quais são conjugadas por 2-automorfismo. Para isso, durante o texto denotaremos k um corpo de característica 2 contendo o corpo primo $\mathbb{F}_2$.

Iniciaremos o Capítulo 1 com algumas definições básicas, como Álgebra de Lie, álgebras simples, semi-simples e representações, além de enuciarmos alguns resultados importantes para esta tese, omitindo as demontrações.

No Capítulo 2 estudaremos a álgebra de Lie simples de dimensão 3 e suas representações, e ainda demonstraremos o Teorema da Classificação (2.5).

Nos Capítulos 3 e 4 analisaremos as álgebras de Witt-Zassenhaus e Hamiltoniana, iniciando com o estudo do anulador de um elemento no fecho destas álgebras, e depois determinaremos as subálgebras toroidais verificando se são conjugados por 2-automorfismo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estaremos listando algumas definições e resultados básicos que julgamos necessários para a leitura desta tese, por serem básicos omitiremos as demonstrações dos resultados, mas estas demonstrações podem ser encontradas em um dos seguintes livros, [3, 5, 7].

1.1 Álgebra de Lie

Iniciaremos esta seção relembrando as definições de álgebra de Lie, homomorfismo e isomorfismo de álgebras de Lie, derivações e subálgebras.

Definição 1.1. *Uma álgebra não associativa $\mathfrak{U}$ é chamada uma álgebra de Lie se sua multiplicação satisfaz as condições de Lie:*

(i) $x^2 = 0$.

(ii) $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$.

Além dessa definição, uma outra definição pode ser dada.

Definição 1.2. *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{U}$ munido de um produto (colchete ou comutador)*

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

com as seguintes propriedades:

(i) *É bilinear.*

(ii) *Anti-simétrico.*

(iii) *Satisfaz a identidade de Jacobi, ou seja, se $x, y, z \in \mathfrak{U}$,*

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$$

Definição 1.3. *Seja $\mathfrak{U}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de $\mathfrak{U}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{U}$ que é fechado pelo colchete, isto é, $[x, y] \in \mathfrak{g}$ se $x, y \in \mathfrak{g}$.*

Definição 1.4. *Uma transformação linear $f : \mathfrak{U} \to \mathcal{G}$, com $\mathfrak{U}$ e $\mathcal{G}$ álgebras de Lie, é um*

(i) *homomorfismo se $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$;*

(ii) *isomorfismo se é um homomorfismo bijetor;*

(iii) *automorfismo se é um isomorfismo e $\mathfrak{U} = \mathcal{G}$.*

Definição 1.5. *Um subespaço* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{U}$ *é um ideal se*

$$\forall y \in \mathfrak{h},\ x \in \mathfrak{U}, \quad [x, y] \in \mathfrak{h}$$

Definição 1.6. *Seja* $\mathfrak{U}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{U}$ *um ideal. Definamos no espaço vetorial quociente* $\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{h}}$ *o seguinte produto,*

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x, y]}$$

onde $\overline{x}$ *denota a classe* $x + \mathfrak{h}$

Teorema 1.7. *Seja* $f : \mathfrak{U} \to \mathcal{G}$ *um homomorfismo. Então*

$$\frac{\mathfrak{U}}{Ker f} \approx Im f$$

Lema 1.8. *(Lema de Schur) Seja* V *um espaço vetorial sobre* K *e* $\Gamma \subset gl(V)$ *um conjunto irredutível de transformações lineares de* V*. Seja* $L \in gl(V)$ *uma transformação Linear que comuta com todos os elementos de* Γ*. Suponha que* L *tem um auto-vetor em* V *associado ao auto-valor* $\lambda \in K$*. Então,* $L = \lambda id$*. Em particular, se* K *é algebricamente fechado e* $dim V < \infty$*, então o centralizador* $\mathfrak{z}(\Gamma)$ *de* Γ *em* $gl(V)$ *é o subespaço das transfomações escalares.*

1.2 Representações

Definição 1.9. *Seja* V *um espaço vetorial e* $\mathfrak{gl}(V)$ *a álgebra de Lie das transformações lineares de* V*. Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Uma representação de* $\mathfrak{g}$ *em* V *é um homomorfismo*

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

Um módulo sobre uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial V munido com uma operação de multiplicação $\mathfrak{g} \times V \to V$, denotada por $(X, v) \mapsto Xv$, que satisfaz, para $X, Y \in \mathfrak{g}, \quad u, v \in V$ e um escalar α, as seguintes propriedades:

1) $(X + Y)v = Xv + Yv$,

2) $X(u + v) = Xu + Xv$,

3) $\alpha Xv = X(\alpha v)$.

Definição 1.10. *Sendo* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie, considere a seguinte transformação linear*

$$ad(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

definida por

$$ad(x)(y) = [x, y].$$

A aplicação

$$ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

definida por

$$x \longmapsto ad(x)$$

define uma representação de $\mathfrak{g}$ *em* $\mathfrak{g}$ *chamada representação adjunta.*

Definição 1.11. *Uma aplicação linear* $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *é uma derivação da álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *se satisfaz a seguinte condição:*

$$D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

1.3 Séries de Composição

Para X e Y subconjuntos não vazios de uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $[X, Y]$ denota subespaços de $\mathfrak{g}$ gerados por todos os comutadores $[x, y]$ com $x \in X$ e $y \in Y$.

Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Definimos indutivamente

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}], \ldots,\ \mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}].$$

Esses subespaços são ideais de $\mathfrak{g}$. A cadeia de ideais $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \geq \mathfrak{g}^{(1)} \geq \mathfrak{g}^{(2)}$... é chamada *série derivada* de $\mathfrak{g}$ e suas componentes são as álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$.
Também são ideais os termos da série central descendente, definida, por indução como

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}], \ldots,\ \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k-1)}].$$

Vamos agora definir álgebras solúveis e álgebras nilpotentes.

Definição 1.12. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ é dita solúvel se existe um inteiro h tal que o termo $\mathfrak{L}^{(h)} = 0$.*

Definição 1.13. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ é dita nilpotente se existe um inteiro k tal que o termo $\mathfrak{L}^k = 0$.*

Definição 1.14. *Uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{L}$ é chamada subálgebra de Cartan, se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra nilpotente e é seu próprio normalizador em $\mathfrak{L}$.*

1.4 Álgebra Simples e Álgebra Semi-simples

Forneceremos a definição de álgebra simples e semi-simples, definição esta que será muito utilizada no nosso trabalho.

Definição 1.15. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie, um ideal $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ é solúvel se $\mathfrak{r}$ é solúvel como álgebra de Lie.*

Proposição 1.16. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie de dimensão finita. Então, existe em $\mathfrak{g}$ um único ideal solúvel $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$.*

Definição 1.17. *O ideal $\mathfrak{r}$ da proposição anterior é chamado de radical solúvel de $\mathfrak{g}$. Para o radical de $\mathfrak{g}$ será utilizado a notação $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.*

Definição 1.18. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$.*

Definição 1.19. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é simples se:*

(i) *os únicos ideais de $\mathfrak{g}$ são 0 e $\mathfrak{g}$;*

(ii) *$dim\, \mathfrak{g} \neq 1$.*

1.5 Álgebra Simples

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados apresentados em [4, 1], que serão necessários para esta tese.

Definição 1.20. *Uma álgebra de Lie L sobre um corpo K é uma 2-álgebra de Lie, se existe uma aplicação $\varphi : L \to L$, que chamamos de 2-aplicação, tal que,*

$$\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda^2 \varphi(y) + \lambda[x, y],$$

para todo $x, y \in L, \lambda \in K$ e $[x,\ \varphi(y)] = x(ady)^2$.

A notação usada para esta aplicação é a seguinte $\varphi(x) = x^{[2]}$.

Se k é um corpo de característica 2 e A é uma Álgebra de Lie sobre k, a Álgebra de Lie $Der_k(A)$ das derivações de A tem uma estrutura natural de 2-álgebra de Lie. Como vimos na Definição 1.20 temos que definir uma 2-aplicação em $Der_k(A)$. Seja $d \in Der_k(A)$, definimos a seguinte aplicação:

$$d^{[2]}(x) = d^2(x) = d(d(x)).$$

Para nossa próxima definição, do 2-fecho de uma álgebra L, que é a menor 2-subálgebra de $Der_k(L)$, contendo L, é nescessário definir o seguinte homomorfismo:
$hom : L \to Der_k(L)$, que $x \to ad(x)$, temos que $ker(hom) = 0$ se, e somente se, $Z(L) = 0$.

Definição 1.21. *Seja L uma álgebra de Lie tal que $Z(L) = 0$, também chamada álgebra de Lie sem centro. O 2-fecho de L em $Der_k(L)$, denotado por L_2, é a menor subálgebra de $Der_k(L)$ contendo L e fechada para a 2-aplicação.*

As próximas definições são os objetos que mais utilizaremos durante o nosso trabalho.

Definição 1.22. *Uma subálgebra L de uma 2-álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita toroidal se é uma subálgebra abeliana com base $\{t_1, \dots, t_n\}$ tal que, $t_i^{[2]} = t_i$, $i = 1, \dots n$.*

Definição 1.23. *O posto toroidal de L é a máxima dimensão $T(L)$da subálgebra toroidal de L. O posto toroidal absoluto $TR(L)$de uma álgebra de Lie sem centro L é $T(L_2)$, isto é, o posto toroidal do 2-fecho de L.*

Os primeiros resultados que classificam as álgebras sobre um corpo de característica 2 foram obtidos por S. Skryabin, A.Premet e A. Grichkov.

Teorema 1.24. *(S. Skryabin) Seja L uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 2. Então L tem posto toroidal absoluto maior ou igual a 2.*

Teorema 1.25. *(A.Premet e A. Grichkov) Seja L uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 2. Se o posto toroidal absoluto de L é 2, então L é clássica de dimensão 3, 8, 14 ou 26.*

Capítulo 2

As Álgebras de Lie Simples de Dimensão 7 sobre um Corpo de Característica 2

Neste capítulo são fornecidos alguns resultados e o Teorema da Classificação.

2.1 Álgebra de Lie Simples de dimensão três e suas representações

Seja $S = k\{e_i | [e_i, e_j] = e_k, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}\}$ a única álgebra de Lie simples de dimensão três e V um $S-$módulo irredutível não-trivial. Considere S como uma subálgebra de Lie de $End_k V$ e denote por $S(2)$ o 2-fecho de S em $End_k V$.

Sendo $T = k\{e_i^{[2^n]} | i = 1, 2, 3; n = 1, 2, \ldots\}$, utilizando o fato que $[e_i, e_j^{[2]}] = [[e_i,\ e_j],\ e_j] = [e_k,\ e_j] = e_i$, $i \neq j$ e aplicando a indução provamos que T é uma 2-subálgebra abeliana de $End_k V$. Notemos que $S(2) = S \oplus T$. Agora definamos a seguinte função:

$$\varphi : S(2) \to Der_k(S)$$

tal que

$$x \mapsto adx.$$

Com isso chegamos que φ é um homomorfismo e que $Ker(\varphi) = Ann_{S(2)}(S)$, logo

$$\frac{S(2)}{Ann_{S(2)}(S)} \approx P,$$

onde P é o 2-fecho de S em $Der_k(S)$. Sua tábua é dada a seguir:

	η	γ	e_1	e_2	e_3
η	η	0	0	e_2	e_3
γ	0	γ	e_1	0	e_3
e_1	0	e_1	η	e_3	e_2
e_2	e_2	0	e_3	γ	e_1
e_3	e_3	e_3	e_2	e_1	$\eta + \gamma$

Tabela 2.1: 2-*fecho de* S *em* $Der_k(S)$

Os elementos da diagonal são resultados da 2-aplicação nos elementos de suas linhas ou colunas correspondentes, isto é, os elementos da diagonal correspondem a $x^{[2]}$ para cada $x \in S(2)$.

Assim pelos Teoremas 1.24 e 1.25 temos que a dimensão de P é 5, e como $Z(S) = 0$ e $S(2) = S \oplus T$ temos que $Ann_{S(2)}(S) \subset T$. Temos que V é irredutível e T é uma 2-subálgebra abeliana, logo pelo Lema de Schur, (Lema 1.8), $dimAnn_{S(2)}(S) = 0$ ou $dimAnn_{S(2)}(S) = 1$, sendo assim, $dimT = 3$

ou $dimT = 2$. Então temos $T = kt_1 \oplus kt_2 \oplus T_0$, onde $[e_i, t_j] = \delta_{ij} e_i$, $i, j = 1, 2$; $[S, T_0] = 0$. Como V é irredutível então $dimT_0 \leq 1$.

Lema 2.1. *Na notação acima, se $T_0 = 0$, então V é adj. $S-$módulo.*

Prova. Como $T_0 = 0$, então $t_1 = e_2^{[2]} = t_1^{[2]}$, $t_2 = e_1^{[2]} = t_2^{[2]}$, $e_3^{[2]} = t_1 + t_2$. Temos $S = \sum_{\alpha \in T^*} \oplus S_\alpha$, $V = \sum_{\alpha \in T^*} \oplus V_\alpha$, $V_\alpha = k\{v \in V | vt_i = \alpha(t_i)v\}$. É claro que $\alpha(t_i) \in \mathbf{F}_2$, se $V_\alpha \neq 0$.

Vamos demonstrar que existe $0 \neq v_i \in V_\alpha$, $\alpha(t_i) = 0$, $\alpha(t_j) = 1, j \neq i$, para algum $i \in \{1, 2\}$ tal que $v_i e_i = 0$. Se $V_0 = 0$, então $ve_i \in V_0 = 0$, para $v \in V_\alpha$, $\alpha(t_i) = 0$, $\alpha(t_i) = 0$, $\alpha(t_j) = 1, j \neq i$. Seja $0 \neq v \in V_0$. Como $vS \neq 0$, então $v_i \neq 0$ para algum i e $v_i e_i^{[2]} = 0$.

Seja v_i como acima e $v_i e_j = v_k \neq 0$, $v_i e_k = v_j \neq 0$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Além disso,

$v_j e_k = v_i e_k^{[2]} = v_i$, $v_k e_j = v_i e_j^{[2]} = v_i$,

$v_j e_i = (v_i e_k) e_i = v_i (e_k e_i) = v_i e_j = v_k$, $v_k e_i = v_j$.

$v_j e_j = (v_i e_k) e_j = v_i e_i + v_k e_k = v_k e_k = v$.

Mas $ve_k = v_k e_k^{[2]} = 0$, $ve_j = v_j e_j^{[2]} = 0$, disso $vS = 0$.

Então $V = kv$ e $SV = 0$ ou $v = 0$ e $V = k\{v_1, v_2, v_3\} \simeq S$.

□

Vamos supor que $T_0 = kt_3$ e t_3 age sobre V como unidade: $vt_3 = v \in V$.

Então $e_1^{[2]} = t_2 + \mu_1 t_3$, $e_2^{[2]} = t_1 + \mu_2 t_3$, $e_3^{[2]} = t_2 + \mu_3 t_3$, onde $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$. O 2-fecho de S em $S \oplus V$ é denotado por S_μ.

Lema 2.2. *(i) Supondo que $\mu \neq 0$. Então existe uma base $\{a, b, c\}$ da subálgebra simples S tal que,*
$a^{[2]} = t_2$, $b^{[2]} = t_1$, $c^{[2]} = t_1 + t_2 + \mu t_3$.
(ii) Se $\mu = 0$ mas $\mu_i \neq 0$ para algum i então
existe uma base $\{a, b, c\}$ da subálgebra simples S tal que,
$a^{[2]} = t_2 + \delta t_3$, $b^{[2]} = t_1 + \delta t_3$, $c^{[2]} = t_1 + t_2$, $\delta^3 = 1$.

Prova. Seja

$a^{[2]} = t_2 + \mu_1 t_3$, $b^{[2]} = t_1 + \mu_2 t_3$, $c^{[2]} = t_1 + t_2 + \mu_3 t_3$.

Para $p_1 q_2 + p_2 q_1 = 1$ temos uma outra base de S :

$C = (1 + p_1 + p_2 + q_1 + q_2)a + (1 + p_1 + q_1)b + (1 + p_2 + q_2)c = v_1 a + v_2 b + v_3 c$,

$B = (1 + q_1 + q_2)a + (1 + q_1)b + (1 + q_2)c = l_1 a + l_2 b + l_3 c$,

$A = (1 + p_1 + p_2)a + (1 + p_1)b + (1 + p_2)c = r_1 a + r_2 b + r_3 c$.

É fácil verificar:

$[A, B] = C$, $[A, C] = B$, $[C, B] = A$,

$(r_1 l_2 + r_2 l_1) = v_3$, $(r_1 l_3 + r_3 l_1) = v_2$, $(r_3 l_2 + r_2 l_3) = v_1$.

Temos ainda que,

$A^{[2]} = r_1^2 (t_2 + \mu_1 t_3) + r_2^2 (t_1 + \mu_2 t_3) + r_3^2 (t_1 + t_2 + \mu_3 t_3) +$
$r_1 r_2 c + r_1 r_3 b + r_2 r_3 a$.

Sendo $x \in k$ tal que:

$(A^{[2]} + xt_3)^{[2]} = (A^{[2]} + xt_3)$,

Então

$x^2 + x = r_1^2 \mu_1 + r_2^2 \mu_2 + r_3^2 \mu_3 + (r_1^2 \mu_1 + r_2^2 \mu_2 + r_3^2 \mu_3)^2 +$
$(r_1 r_2)^2 \mu_3 + (r_1 r_3)^2 \mu_2 + (r_2 r_3)^2 \mu_1$.

Analogamente existe $y \in k$ tal que:

$(B^{[2]} + yt_3)^{[2]} = B^{[2]} + yt_3$, já que

$y^2 + y = l_1^2 \mu_1 + l_2^2 \mu_2 + l_3^2 \mu_3 + (l_1^2 \mu_1 + l_2^2 \mu_2 + l_3^2 \mu_3)^2 +$
$(l_1 l_2)^2 \mu_3 + (l_1 l_3)^2 \mu_2 + (l_2 l_3)^2 \mu_1$.

Fixando x, y de modo que satisfaça a relação acima e denotando

$\tilde{t_1} = B^{[2]} + yt_3$, $\tilde{t_2} = A^{[2]} + xt_3$.

Então

$A^{[2]} = \tilde{t}_2 + xt_3$,

$B^{[2]} = \tilde{t}_1 + yt_3$,

Agora é suficiente provar que existem $p_1, q_1, p_2, q_2 \in k$ tal que
$p_1q_2 + p_2q_1 = 1$,
$x = y = 0$.
Primeiro supondo que $q_1 = 0$, $q_2 = p_1^{-1}$.
As equações para x e y podem ser reescritas, se $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$:
$(1+p_1+p_2)^2\mu_1 + (1+p_1)^2\mu_2 + (1+p_2)^2\mu_3 + ((1+p_1+p_2)^2\mu_1 + (1+p_1)^2\mu_2 + (1+p_2)^2\mu_3)^2 +$
$((1+p_1+p_2)(1+p_1))^2\mu_3 + ((1+p_1+p_2)(1+p_2))^2\mu_2 + ((1+p_1)(1+p_2))^2\mu_1$ ou

$$(\mu_1+\mu_2)^2p_1^4 + (\mu_1+\mu_3)^2p_2^4 + \mu_3p_1^2 + \mu(p_1p_2)^2 + \mu_2p_2^2 + \mu^2 = 0. \tag{2.1}$$

Analogamente:
$(\mu_1+\mu_2)^2q_1^4 + (\mu_1+\mu_3)^2q_2^4 + \mu_3q_1^2 + \mu(q_1q_2)^2 +$
$\mu_2q_2^2 + \mu^2 = 0$.
Como $q_1 = 0$, $q_2 = p_1^{-1}$:
$(\mu_1+\mu_3)^2p_1^{-4} + \mu_2p_1^{-2} + \mu^2 = 0$ ou
$(\mu_1+\mu_3)^2 + \mu_2p_1^2 + \mu^2p_1^4 = 0$.
Supondo que $\mu \neq 0$, então estas equações sempre têm soluções $p_1 \neq 0$.

Com a substituição de p_1 em (2.1) obtemos alguma equação com respeito à p_2. Se $\mu_1 \neq \mu_3$ então essa equação tem solução p_2. Se $\mu_2 \neq \mu_1$ então podemos trocar b e c. Supondo que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Então temos um sistema

$$p_1^2 + p_2^2 + (p_1p_2)^2 + \mu = \mu p_1^4 + p_1^2 = 0. \tag{2.2}$$

Se $\mu \neq 1$, então este sistema tem uma solução $p_1 \neq 0, p_2$. Mas se $\mu = 1$, podemos substituir t_1 e t_2 por $t_1 + t_3$ e $t_2 + t_3$ correspondentemente e receber $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Finalmente, sendo $\mu = 0$, o sistema $x = y = 0$ não tem solução. Mas uma equação $x = 0$ tem uma solução e podemos supor que $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \mu_3 \neq 0$. Depois trocando a e c podemos supor que $\mu_3 = 0$, $\mu_2 = \mu_1 \neq 0$.

Neste caso vamos provar que um sistema $x^2 + x = y^2 + y = 1$ tem uma solução. Este sistema tem a forma:

$$\mu_1^2p_2^4 + \mu_1p_2^2 = \mu_1^2q_2^4 + \mu_1q_2^2 = 1,$$

já que $p_2 = q_2 = \frac{\delta^2}{\sqrt{\mu_1}}$.
□

Lema 2.3. *Seja $S \subseteq End_kV$ uma 3-dimensional álgebra de Lie simples com uma base $\{a, b, c\}$ como no Lema 2.2 (i).*
Então V tem uma base $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ tal que
$f_1a = 0$, $f_2b = f_3c = f_0$, $f_1b = f_3$, $f_1c = f_2$, $f_2a = f_3$, $f_2c = (1+\mu)f_1$, $f_3a = f_2$, $f_3b = f_1$, $f_0c = \mu f_3$, $f_0b = 0$, $f_0a = \mu f_1$.

Prova. Seja $V = \sum_{\alpha \in T^*} \oplus V_\alpha$. Se $V_0 = 0$ então V é adj. $S-$ módulo e $c^{[2]} = t_1 + t_2 -$ contradição.
Seja $f_0 \in V_0$, $f_3 = \mu^{-1}f_0c$, então $f_3c = f_0$. Assim $f_0a \neq 0$ ou $f_0b \neq 0$. Vamos supor que $0 \neq \mu f_1 = f_0a$, $f_1a = \mu^{-1}f_0a^{[2]} = 0$.
Se $f_2 = f_1c$, $f_2a = \xi f_3$, então $f_2c = f_1c^{[2]} = (1+\mu)f_1$, $f_3a = \xi^{-1}f_2a^{[2]} = \xi^{-1}f_2$.
Temos
$f_1b = f_1[a, c] = (f_1c)a = f_2a = \xi f_3$,
$f_2b = f_2[a, c] = (f_2a)c + (f_2c)a = \xi f_0$,
$f_3b = f_3[a, c] = (f_3a)c + (f_3c)a = (\xi^{-1}(1+\mu) + \mu)f_1$.
$f_1b^{[2]} = f_1 = (f_1b)b = \xi(\xi^{-1}(1+\mu) + \mu)f_1$,
assim $\xi(\xi^{-1}(1+\mu) + \mu) = 1 + \mu + \xi\mu = 1$ ou $\mu(1+\xi) = 0$ ou $\xi = 1$. □

Lema 2.4. *Seja $P = S \oplus T$, $T = k\{t_1, t_2, t_3\}$, $e_1^{[2]} = t_2 + \delta t_3$, $e_2^{[2]} = t_1 + \delta t_3$, $e_3^{[2]} = t_1 + t_2$.*
Seja V um $P-$módulo irredutível.
Então $V = k\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ e temos:
$f_0e_i = f_i$, $i = 1, 2$; $f_0e_3 = 0$; $f_1e_1 = \delta f_0$, $f_1e_2 = f_3$, $f_1e_3 = f_2$,

$f_2e_1 = f_3$, $f_2e_2 = \delta f_0$, $f_2e_3 = f_1$, $f_3e_1 = \delta^2 f_2$, $f_3e_2 = \delta^2 f_1$,
$f_3e_3 = 0$.

Prova. Temos três possibilidades:
I. Seja $f_0e_i = f_i \neq 0$, então $f_1e_1 = \delta f_0$, $f_2e_2 = \delta f_0$, $f_3e_3 = 0$,
seja $f_2e_1 = (f_0e_2)e_1 = f_1e_2 + e_3 = xf_3$, $f_1e_2 = (1+x)f_3$,
$f_3e_1 = yf_2 = (f_0e_3)e_1 = f_1e_3 + f_2$, $f_1e_3 = (1+y)f_2$,
$f_3e_2 = f_3[e_1, e_3] = (f_3e_1)e_3 + (f_3e_3)e_1 = yf_2e_3$,
$f_3e_2 = (f_0e_3)e_2 = f_2e_3 + f_1$, assim $y \neq 1$ e
$f_2e_3 = \frac{f_1}{1+y}$, $f_3e_2 = \frac{yf_1}{1+y}$,
$f_3e_2^{[2]} = \delta^2 f_3 = \frac{yf_1}{1+y}e_2 = \frac{xyf_3}{1+y}$,
desta forma
$x = \frac{\delta^2(1+y)+y}{y}$.
Analogamente
$f_3e_1^{[2]} = \delta^2 f_3 = xyf_3$,
assim
$x = \frac{\delta^2}{y} = \frac{\delta^2(1+y)+y}{y}$. Contradição.
II. $f_0e_1 = f_1$, $f_0e_2 = f_2$, $f_0e_3 = 0$,
$f_2e_1 = f_3$, $f_1e_2 = (f_0e_1)e_2 = f_2e_1 = f_3$, ,
$f_1e_3 = (f_0e_1)e_3 = f_0e_2 = f_2$,
$f_2e_3 = (f_0e_2)e_3 = f_0e_1 = f_1$,
$f_2e_1^{[2]} = \delta^2 f_2 = f_3e_1$.
Seja $f_3e_2 = xf_1$, então
$f_3e_2^{[2]} = \delta^2 f_3 = xf_1e_2 = xf_3$, assim $f_3e_2 = \delta^2 f_1$.
$f_3e_3 = (f_2e_1)e_3 = f_2e_2 + (f_2e_3)e_1 = 0$.
III. Se $f_0e_2 = 0$, então $[f_2, e_2^{[2]}] = [f_2, t_1 + \delta t_3] = \delta f_2 = 0$, contradição.
□

2.2 O Teorema da Classificação

Teorema 2.5. *Seja L uma álgebra de Lie simples de dimensão 7 e posto toroidal absoluto 3 sobre um corpo k de característica 2 algebricamente fechado. Então $L \cong H_2$ ou $L \cong W$.*
Além do mais, $L \simeq H_2$ se, e somente se, L contém uma 3-dimensional subálgebra simples.

Prova. Primeiro note que por [6],[2] qualquer Álgebra de Lie simples de dimensão 7 sobre k tem posto toroidal absoluto 3.

Seja $T = kt_1 \oplus kt_2 \oplus kt_3$, $t_i^{[2]} = t_i$, $i = 1, 2, 3$, um toro três dimensional de L e $L = \sum_{\alpha\in\Delta} L_\alpha$.

Denote $T_0 = \{\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2 + \xi_3 t_3 \neq 0 | \xi_i \in \mathbf{F}_2\}$. É claro que $|T_0| = 7$.

Se $a \in L_\alpha$, então $a^{[2^n]} = \xi_1 t_1 + \xi_2 t_2 + \xi_3 t_3 \in T$ para $n > 0$. Existe o subconjunto minimal $R(a) \subset T_0$ tal que $a^{[2^n]} \in k\{R\}$. Por exemplo, temos que $R(a) = \{t_1, t_2, t_3\}$ se, e somente se,o conjunto $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ é L. I. sobre $\mathbf{F}_2$.

Passo1 $|\Delta| = 7$ e $L \cap T = 0$, em particular, $dim L_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$.

Prova. Suponha que $|\Delta| < 7$ ou $L \cap T \neq 0$. Então existe $\alpha, \beta, \mathfrak{g} \in \Delta$ linearmente independente sobre $\mathbf{F}_2$ tal que $L_{\alpha+\beta} = 0$. Vamos provar que $R(a) = \{t_3\}$, $\{t_1 + t_2\}$ ou $\{t_1 + t_2 + t_3\}$ se $a \in L_\lambda$. Isso significa, que L tem posto toroidal absoluto 2, o que é uma contradição.

Se $\lambda = \alpha$, então $[b, a] \in [L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta} = 0$,$b \in L_\beta$. Consequentemente $[L_\lambda, a^{[2^n]}] = 0$, $\lambda = \alpha$ ou β, então $R(a) = \{t_3\}$ ou $R(a) = \emptyset$. Analogamente $R(a) = \{t_3\}$ ou $R(a) = \emptyset$ se $a \in L_\beta$.

Seja $a \in L_{\alpha+\mathfrak{g}}$, então $[L_{\beta+\mathfrak{g}}, a] \subseteq L_{\alpha+\beta} = 0$ e como acima podemos provar que $R(a) = \{t_1 + t_2 + t_3\}$ ou $R(a) = \emptyset$. Analogamente para $a \in L_{\beta+\mathfrak{g}}$. Finalmente, se $a \in L_{\alpha+\beta+\mathfrak{g}}$ então $[L_\mathfrak{g}, a] = 0$ e $R(a) = \{t_1 + t_2\}$ ou $R(a) = \emptyset$. □

Passo 2 $T \oplus L$ é uma 2−álgebra de Lie, e $a^{[2]} \in T$ para qualquer $a \in L_a$, $\alpha \in \Delta$.

Prova. Seja $\tilde{L}$ o $2-$fecho de L em $Der_k(L)$. Se $T \subseteq H$ é a subálgebra de Cartan de $\tilde{L}$ então, $H \cap L = 0$, como foi provado no passo 1. É claro que $a^{[2]} \in H$ para qualquer $a \in L_\alpha$, $\alpha \in \Delta$. Mas $[b, a^{[2]}] = [[b,a],a] \in L_\beta$ se $b \in L_\beta$, desta forma $a^{[a]}$ é elemento semi-simples de $Der_k(L)$ já que $dim_k L_\beta = 1$ para qualquer $\beta \in \Delta$ pelo passo 1. Mas todo elemento semi-simples de H está em T. □

Passo 3. Existe uma tripla $\epsilon, \eta, \epsilon+\eta \in \Delta$ tal que $S = < e_\epsilon,\, e_\eta,\, e_{\epsilon+\eta} >$ é uma subálgebra de Lie simples de L de dimensão 3.

Prova. Suponha que tal subálgebra não exista. Primeiro provaremos que para qualquer $\alpha \in \Delta$ e $a \in L_\alpha$ temos que $|R(a)| = 1$ ou 0. Isso significa que $a^{[4]} \in ka^{[4]}$.

Se não for verdade, então $a^{[2]} = t_2 + \xi t_3$ e $\xi \notin \mathbf{F}_2$. Desta forma $\alpha(t_1) = 1$, $\alpha(t_2) = \alpha(t_3) = 0$. Neste caso $[a^{[2]}, b] \neq 0$ para qualquer $b \in L_\tau$, $\tau \in (\Delta \setminus \{\alpha\})$. Já que $[L,L] = L$ então $a = [b,c]$ para algum $b \in L_\tau$, $c \in L_{\alpha+\tau}$. Mas neste caso $k\{a,b,c\}$ é uma subálgebra $3-$dimensional simples de L.

Seja $a \in L_a$, $a^{[2]} = t_2$, $b \in L_\beta$, $\beta(t_2) = 1$, $\alpha(t_2) = 0$, então $[a,b] = c \in L_{\alpha+\beta}$, $[a,c] = b$. Por isso $[b,c] = 0$. Fixado $f_0 \in L_{\mathfrak{g}}$, $f_1 \in L_{\alpha+\mathfrak{g}}$, $f_2 \in L_{\beta+\mathfrak{g}}$, $f_3 \in L_{\alpha+\beta+\mathfrak{g}}$ tal que $f_i^{[2]} \in T_0$. Então $[a, f_2] = f_3$, $[a, f_3] = f_2$, disso $[f_2, f_3] = 0$. Mas neste caso $[f_0, f_1] = \lambda a$, $\lambda \neq 0$, já que $a \in [L,L]$.

Temos, pois $[b,c] = 0$:

$[[b,f_2],f_1] = [[b,f_1],f_2] + [[f_1,f_2],b] = [[b,f_1],f_2] \in k[f_3,f_2] = 0$.

Como $[b,f_2] = \lambda_1 f_0$, então $[[b,f_2],f_1] = \lambda_1\lambda a = 0$ e $\lambda_1 = 0$, já que $\lambda \neq 0$.

Além disso:

$[[b,f_3],f_0] = [[b,f_0],f_3] + [[f_0,f_3],b] = [b,[f_0,f_3]] \in k[b,c] = 0$,

por isso $[b,f_3] = 0$ e $[a,f_1] = x_1 f_0 \neq 0$ (ou $f_0 \notin [L,L]$.)

Como

$[[b,a],f_3] = [[b,f_3],a] + [[a,f_3],b] = [[a,f_3],b] \in k[f_3,b] = 0$,

por isso $[c,f_3] = 0$. Analogamente, já que

$[[b,f_2],f_1] = [[b,f_1],f_2] + [[f_1,f_2],b] = [[b,f_1],f_2] \in k[f_3,f_2] = 0$,

obtemos $[c,f_2] = 0$.

Desta forma $[a,f_0] = xf_1 \neq 0$, (ou $f_1 \notin [L,L]$.)

Mas neste caso $\{a, f_1, f_0\}$ é uma subálgebra de L simples, o que é uma contradição.

Vamos fixar uma 3-dimensional subálgebra simples $S = k\{a,b,c\}$. □

Passo 4. Se $S = k\{e_1, e_2, e_3|_1, [e_1,e_2] = e_3, [e_1,e_3] = e_2, [e_2,e_3] = e_1, x^{[4]} = x^{[2]}, x = e_i, i = 1,2,3,\}$ então L é uma álgebra de Hamilton.

Prova. Seja $e_1^{[2]} = t_2$, $e_2^{[2]} = t_1$, $e_3^{[2]} = t_1 + t_2$, então $[f_0, e_i] = 0$, $[e_i, f_j] = f_k$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Com efeito, pelo Lema 2.4, $V = L_\gamma \oplus L_{\gamma+\alpha} \oplus L_{\gamma+\beta} \oplus L_{\gamma+\alpha+\beta}$ é extensão do adj. $S-$módulo e um dimensional módulo kf_0, desde que se kf_0 não é um submódulo de V então $f_0 \notin [L,L]$.

Seja $[e_1,f_1] = x^4 f_0$, $[e_2,f_2] = y^4 f_0$, $[e_3,f_3] = z^4 f_0$, $[f_0,f_1] = a^2 e_1$, $[f_0,f_2] = b^2 e_2$, $[f_0,f_3] = c^2 e_3$, $[f_1,f_2] = p^2 e_3$, $[f_1,f_3] = q^2 e_2$, $[f_2,f_3] = r^2 e_1$.

Então

$[[e_2,e_3],f_1] = x^4 f_0 = (y+z)^4 f_0$ ou $x+y+z = 0$.

$[[f_1,f_2],e_1] = p^2 e_2 = (x^2 b + q)^2 e_2$, ou $q = x^2 b + p$.

$[[f_1,f_2],e_2] = p^2 e_1 = (y^2 a + r)^2 e_2$, ou $r = ay^2 + p$.

$[[f_0,f_1],e_2] = a^2 e_3 = c^2 e_3$, ou $a = c$.

$[[f_0,f_1],e_3] = a^2 e_2 = b^2 e_3$, ou $a = b = c$.

Seja $h = e_1 + e_2 + e_3$, então $h^{[2]} = h$ e $P = Ann_L h = k\{f_0, h, f = f_1 + f_2 + f_3\}$ é uma subálgebra de Cartan de L de posto toroidal 1. Note que P não é uma 2-subálgebra de L. Já que $f_0^{[2]} = 0$ e $P_0 = k\{h,f\}$ é uma subálgebra abeliana tal que $P = kf_0 \oplus P_0$, então todo $P-2-$módulo irredutível é 2-dimensional se h age não trivialmente. Então $P-$módulo $W = L/P$ tem 2-dimensional submódulo irredutível W_0 e W/W_0 é um $P-$modulo irredutível.

Neste caso pelo Teorema 6.2 de Skryabin ([6]) L é uma álgebra de Halmilton. □

Lema 2.6. *Se existe $x \in L$ tal que $Ann_L x$ contém uma subálgebra simples 3-dimensional S tal que $Ann_{L\oplus T} S$ não é uma subálgebra nil. Então $L \simeq H_2$.*

Prova. Como $Ann_{L\oplus T}S$ não é uma subálgebra nil então existe $t_3^{[2]} = t_3 \in Ann_{L\oplus T}S$.

Então $S = k\{e_1, e_2, e_3\}$, $e_1^{[2]} = t_2 + \alpha_1 t_3$, $e_2^{[2]} = t_1 + \alpha_2 t_3$, $e_3^{[2]} = t_1 + t_2 + \alpha_3 t_3$, $t_i^{[2]} = t_i$, $i = 1, 2$, $[e_i, t_j] = \delta_{ij} e_i$, $i, j = 1, 2$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in k$. Já que $x, t_3 \in Ann_{L\oplus T}S$, então $[x, t_3] \in Ann_{L\oplus T}S$. Mas $Ann_{L\oplus T}t_3 = S$ disso $[x, t_3] = x$. Temos $[x, e_1^{[2]}] = [x, t_2 + \alpha_1 t_3] = [x, t_2] + \alpha_1 x = 0$, então $\alpha_1 \in \{0, 1\}$. Analogamente, $[x, t_1] = \alpha_2 x$, $[x, t_1 + t_2] = \alpha_3 x$ e $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$. Denote $\bar{t_1} = t_1 + \alpha_2 t_3$, $\bar{t_2} = t_2 + \alpha_1 t_3$, então $e_1^{[2]} = \bar{t_2}$, $e_2^{[2]} = \bar{t_1}$, $e_3^{[2]} = \bar{t_1} + \bar{t_2}$.

Então pelo Passo 4 $L \simeq H_2$. □

Seja $P = S \oplus T$, $T = k\{t_1, t_2, t_3\}$, $e_1^{[2]} = t_2 + \delta t_3$, $e_2^{[2]} = t_1 + \delta t_3$, $e_3^{[2]} = t_1 + t_2$.

Passo 5. Seja $P = S \oplus T$, $T = k\{t_1, t_2, t_3\}$, $e_1^{[2]} = t_2 + \delta t_3$, $e_2^{[2]} = t_1 + \delta t_3$, $e_3^{[2]} = t_1 + t_2$. Se $P \subset L$ então $L \simeq W_1$ ou H_2.

Prova. Seja $f_0^{[2]} = x^2 t_1 + y^2 t_2$, então $[f_0, f_1] = [e_1, f_0^{[2]}] = x^2 e_1$, $[f_0, f_2] = y^2 e_2$. Seja $[f_0, f_3] = z e_3$, então $[f_3, f_0^{[2]}] = (x+y)^2 f_3 = z[f_3, e_3] = 0$, então $x = y$.

$[f_1, f_2] = [[f_0, e_1], f_2] = x^2[e_2, e_1] + [f_0, f_3] = (x^2 + z)e_3$,

$[f_1, f_3] = [[f_0, e_1], f_3] = z[e_3, e_1] + \delta^2[f_0, f_2] = (\delta^2 x^2 + z)e_2$,

$[f_2, f_3] = [[f_0, e_2], f_3] = z[e_3, e_2] + \delta^2[f_0, f_1] = (\delta^2 x^2 + z)e_1$.

$f_1^{[2]} = \delta(t_1 + t_3) + (\delta^2 x^2 + z)t_2$, $f_2^{[2]} = \delta(t_2 + t_3) + (\delta^2 x^2 + z)t_1$, $f_3^{[2]} = (\delta^2 z^2 + \delta x^2)(t_1 + t_2)$, $f_0^{[2]} = x^2(t_1 + t_2)$.

Se $xz \neq 0$ então considere uma subálgebra $P = k\{e_3, v_1 = f_1 + xe_2, v_2 = f_2 + xe_1\}$. É fácil ver que $P \simeq S_0$.

Por isso $z = 0, x \neq 0$ or $x = 0, z \neq 0$.

No primeiro caso temos:

	e_1	e_2	e_3	f_0	f_1	f_2	f_3
e_1	$t_2 + \delta t_3$	e_3	e_2	f_1	δf_0	f_3	$\delta^2 f_2$
e_2	e_3	$t_1 + \delta t_3$	e_1	f_2	f_3	δf_0	$\delta^2 f_1$
e_3	e_2	e_1	$t_1 + t_2$	0	f_2	f_1	0
f_0	f_1	f_2	0	$t_1 + t_2$	e_1	e_2	0
f_1	δf_0	f_3	f_2	e_1	$\delta(t_1 + t_3) + \delta^2 t_2$	e_3	$\delta^2 e_2$
f_2	f_3	δf_0	f_1	e_2	e_3	$\delta(t_2 + t_3) + \delta^2 t_1$	$\delta^2 e_1$
f_3	$\delta^2 f_2$	$\delta^2 f_1$	0	0	$\delta^2 e_2$	$\delta^2 e_1$	$\delta(t_1 + t_2)$

Tabela 2.2: *Caso 1*

É W_1 (veja [1]).

No segundo caso temos uma subálgebra $k\{f_1, f_2, e_3\} \simeq S_0$ e pelo passo 4 é H_2. □

Passo 7. Se L contém uma subálgebra $S = k\{a, b, c\}$ simples com 2-fecho S_μ, $\mu \neq 0$, então para algum $x, y \in k$, L possui uma base $\{a, b, c, f_0, f_1, f_2, f_3\}$ com a tábua de multiplicação:

	a	b	c	f_0	f_1	f_2	f_3
a	t_2	c	b	μf_1	0	f_3	f_2
b	c	t_1	a	0	f_3	f_0	f_1
c	b	a	$t_1 + t_2 + \mu t_3$	μf_3	f_2	$(1+\mu)f_1$	f_0
f_0	μf_1	0	μf_3	$x\mu t_1$	xa	yb	xc
f_1	0	f_3	f_2	xa	$\frac{(x+y)t_2}{\mu}$	$\frac{(x+y)c}{\mu}$	$\frac{(x+y)b}{\mu}$
f_2	f_3	f_0	$(1+\mu)f_1$	yb	$\frac{(x+y)c}{\mu}$	$\frac{\mu y(t_2+t_3)+((1+\mu)x+y)t_1}{\mu}$	$\frac{((1+\mu)x+y)}{\mu}a$
f_3	f_2	f_1	f_0	xc	$\frac{(x+y)b}{\mu}$	$\frac{((1+\mu)x+y)}{\mu}a$	$\frac{((1+\mu)x+y)}{\mu}t_1 + \frac{(x+y)t_2}{\mu} + xt_3$

Tabela 2.3: *Caso 2*

Prova. Pelo Lema 2.3, $S-$módulo $V = L_\gamma \oplus L_{\gamma+\alpha} \oplus L_{\gamma+\beta} \oplus L_{\gamma+\alpha+\beta}$ tem uma base $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ tal que, $S = k\{a, b, c\}$ age sobre $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ de acordo com a tabela anterior.

Seja $f_0^{[2]} = \mu x t_1 + \mu z t_2$, então $[f_1, f_0] = \mu^{-1}[a, f_0^{[2]}] = xa$, $[f_3, f_0] = (x + z)c$. Seja $[f_0, f_2] = yb$, então $[f_2, f_0^{[2]}] = \mu z f_2 = 0$, assim, $z = 0$.

Temos ainda que

$[f_1, f_2] = \mu^{-1}[[f_0, a], f_2] = \mu^{-1}(y + x)c$,

$[f_1, f_3] = \mu^{-1}[[f_0, a], f_3] = \mu^{-1}(y + x)b$,

$[f_3, f_2] = \mu^{-1}[[f_0, c], f_2] = \mu^{-1}(y + (1 + \mu)x)a$. □

Passo Final. Seja $\xi^2 = x\mu$ e $v = \xi b + f_0$. Então $v^{[2]} = 0$ e $[L, v] \in Ann_L v$. disso $p_1 = [v, a] = \xi c + \mu f_1$, $p_2 = [v, c] = \xi a + \mu f_3$, $b, f_0 \in Ann_L v$.

Como $[p_1, p_2] = x\mu b + \mu(x+y)b + \mu\xi f_0 = \mu(yb + \xi f_0)$ e $[p_1, yb + \xi f_0] = (\mu x + y)p_2$, $[p_2, yb + \xi f_0] = (\mu x + y)p_1$. Se $\mu x \neq y$, então $L \simeq H_2$ pelo Lema 2.6, já que

$t^2 = t = \frac{(y+(1+\mu)x)t_1 + \mu x t_2 + y t_3 + \xi f_2}{\mu x + y} \in Ann_{L \oplus T} S$.

Suponha que $y = \mu x$. Sem perda da generalidade, $x = 1$. Como acima, seja $\psi^2 = (1 + \mu)/\mu$, $w = \psi a + f_1$, $w^{[2]} = 0$, disso $[L, w] \in Ann_L w$, e

$q_1 = [b, w] = \psi c + f_3$, $q_2 = [c, w] = \psi b + f_2$, $a, f_1 \in Ann_L w$.

Temos

$[q_1, q_2] = a + \psi\mu f_1 = q$, $[q, q_1] = \mu q_2$, $[q, q_2] = \mu q_1$, desta forma $k\{q, q_1, q_2\} \subset Ann_L w$ é uma subálgebra simples. Além do mais, $t^{[2]} = t = t_1 + \psi^2 t_2 + t_3 + \frac{\psi}{\mu} f_0 \in Ann_{L \oplus T} S$.

Consequentemente $L \simeq H_2$ pelo Lema 2.6.□

Capítulo 3

Álgebra de Witt-Zassenhaus

Nesta seção vamos falar sobre as álgebras de Lie simples de dimensão 7 e posto toroidal absoluto 3. Hoje se conhecem três tipos de 2-álgebras de Lie de dimensão 7 e posto toroidal absoluto 3, a saber, a álgebra de Witt-Zassenhaus $\overline{W(1,3)}$, a Hamiltoniana H e a família $L(\varepsilon)$, chamada álgebra de Kostrikin-Dzhumadil'daev, que depende de um parâmetro $\varepsilon \in k$. Como provamos no Capítulo 2 só existem duas álgebras de Lie simples de dimensão 7, W (Witt-Zassenhaus) e H (Hamiltoniana).

Definição 3.1. *Seja $\mathbb{F}_k$ e o corpo de 2^k elementos.*

$$W(1:k) = \langle e_\alpha : \alpha \in \mathbb{F}_k \rangle$$

torna-se uma álgebra de Lie estendendo por bilinearidade do seguinte colchete entre os elementos da base

$$[e_\alpha, e_\beta] = (\beta - \alpha) e_{\alpha+\beta}.$$

Aqui consideremos uma base para $W(1,k)$ o conjunto $\{y_i | -1 \leq i \leq 2^k - 2\}$, para um corpo de característica 2 a álgebra de Lie $W(1,k)$ não é simples, mas existe um ideal de codimensão 1 com base $\langle y_i | -1 \leq i \leq k-3 \rangle = \overline{W(1:k)}$ que é simples, chamaremos também tal álgebra de álgebra de Witt-Zassenhaus.

Dada a álgebra de Lie simples de Witt-Zassenhaus, que denotaremos por $W = W(1,3)$ com base $\{y_i | -1 \leq i \leq 5\}$, temos produto de Lie de W dado pela tábua a seguir,

$\cdot$	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_{-1}	0	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
y_0	y_{-1}	0	y_1	0	y_3	0	y_5
y_1	y_0	y_1	0	0	y_4	y_5	0
y_2	y_1	0	0	0	y_5	0	0
y_3	y_2	y_3	y_4	y_5	0	0	0
y_4	y_3	0	y_5	0	0	0	0
y_5	y_4	y_5	0	0	0	0	0

Tabela 3.1: *Álgebra de Witt-Zassenhaus*

Utilizando a tábua anterior conseguimos detectar que W é uma álgebra de Lie sem centro. Denotaremos o 2-fecho de W em $Der_k(W)$ por W_2 com base $\{\eta, k, k^{[2]}, y_i | -1 \leq i \leq 5\}$ onde o produto de Lie de W_2 é dado pela tábua a seguir,

.	η	k	$k^{[2]}$	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
η	0	y_4	y_2	y_5	0	0	0	0	0	0
k	y_4	$k^{[2]}$	0	0	0	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3
$k^{[2]}$	y_2	0	0	0	0	0	0	y_{-1}	y_0	y_1
y_{-1}	y_5	0	0	k	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
y_0	0	0	0	y_{-1}	y_0	y_1	0	y_3	0	y_5
y_1	0	y_{-1}	0	y_0	y_1	y_2	0	y_4	y_5	0
y_2	0	y_0	0	y_1	0	0	0	y_5	0	0
y_3	0	y_1	y_{-1}	y_2	y_3	y_4	y_5	η	0	0
y_4	0	y_2	y_0	y_3	0	y_5	0	0	0	0
y_5	0	y_3	y_1	y_4	y_5	0	0	0	0	0

Tabela 3.2: W_2

Os elementos da diagonal são resultados da 2-aplicação nos elementos de suas linhas ou colunas correspondentes, isto é, os elementos da diagonal correspondem a $x^{[2]}$ para cada $x \in W_2$. De modo análogo a álgebra W e utilizando a tábua anterior conseguimos detectar que W_2 é uma álgebra de Lie sem centro.

O conjunto de elementos idempotentes tem importantes propriedades e nos permite construir diferentes subálgebras e estudar suas relações. Nesse sentido Grichkov e Guerreiro provaram em [1] a seguinte proposição:

Proposição 3.2. *(Grichkov e Guerreiro) Para a 2-álgebra de Lie W_2, a variedade de elementos idempotentes é dada por $I(W) = \bigcup_{\delta=1}^{3} I_W^{\delta}$, na qual,*
$I_W^1 = \{a^4k^{[2]} + a^2k + b^2\eta + ay_{-1} + (1 + aa_1 + a^3b)y_0 + a_1y_1 + (a^3a_5 + a^2a_1b + ab + a_1^2)y_2 + a_3y_3 + (a^2b^2 + ba_1 + aa_5)y_4 + a_5y_5 : a \in K^*, b, a_1, a_3, a_5 \in K\}$
$I_W^2 = \{a^2\eta + y_0 + by_1 + b^2y_2 + ay_3 + aby_4 + cy_5 : a \in K^*, b, c \in K\}$
$I_W^3 = \{y_0 + ay_1 + a^2y_2 + by_5 : a, b \in K\}$.

3.1 Resultados

Considerando variedades de elementos idempotentes de W_2, estamos interessados em determinar uma base conveniente para o Toro $T(W_2)$. O próximo corolário relaciona os elementos do toro com as variedades de elementos idempotentes dadas pela Proposição 3.2.

Lema 3.3. *Se $T(W_2)$ é um toro e $dimT(W_2) = 3$, então $T(W_2) \cap I_w^1 \neq \emptyset$. Em particular, $T(W_2) = \{t_1, t_2, t_3;\ [t_i, t_j] = 0\}$ é conjugada com uma subálgebra toroidal T que contém $t = k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2$.*

Demonstração: Vamos provar que não existe base para T contendo apenas elementos de I_W^2 e I_W^3. De fato, é fácil verificar que para dois elementos idempotentes $t_i, t_j \in I_W^{\delta}$; $\delta = 2, 3$, tem-se $[t_i, tj] \neq 0$. Se $t_i \in I_W^2$ e $t_j \in I_W^3$, então $[t_i, tj] \neq 0$. Sendo assim, qualquer base de T tem um elemento de I_W^1, como em [1] Grichkov e Guerreiro provaram que todos os elementos de I_W^1 são conjugados com um único elemento $t = k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2$. Portanto se T é uma subálgebra toroidal, podendo supor que $t = k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2 \in T$ e $T \subset Ann(t) = \{x \in L |\ [x, t] = 0$. □

Concluímos do Lema (3.3) que $T = \langle t \rangle \oplus T_0$, tal que T_0 tem dimensão 2. É fácil ver que $T_0 \subset Ann(t)$.

Daqui até o fim deste capitulo teremos que $t = k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2$.

Lema 3.4. *Seja $Ann(t)$ em W. Então $dimAnn(t) = 3$.*

Demonstração: Seja $\alpha = dy_{-1} + d_0y_0 + d_1y_1 + d_2y_2 + d_3y_3 + d_4y_4 + d_5y_5 \in W$ e $t = K^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2$. Se $\alpha \in Ann(t)$ temos $[\alpha, t] = 0$, o que resulta no seguinte sistema linear:

$$(*) = \begin{cases} d_0 + d_1 + d_3 = & 0 \\ d + d_1 + d_2 + d_4 = & 0 \\ d + d_0 + d_2 + d_3 + d_5 = & 0 \\ d_3 + d_4 = & 0 \\ d_4 + d_5 = & 0 \\ d_3 + d_5 = & 0 \end{cases}$$

assim, encontramos $d_3 = d_5 = d_4$, $d_0 = d_1 + d_3$ e $d = d_0 + d_2$. Desta forma, obtemos uma base para $Ann(t)$ dada por:

$$\beta = \{y_{-1} + y_0 + y_1,\ y_{-1} + y_2,\ y_{-1} + y_0 + y_3 + y_4 + y_5\}.$$

□

Lema 3.5. *Seja $\widetilde{Ann(t)}$ em W_2. Então $dim\widetilde{Ann(t)} = 6$.*

Demonstração: Seja $\alpha = a\eta + bk + bk^{[2]} + dy_{-1} + d_0y_0 + d_1y_1 + d_2y_2 + d_3y_3 + d_4y_4 + d_5y_5 \in W$ e $t = k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2$. Se $\alpha \in \widetilde{Ann(t)}$, temos $[\alpha, t] = 0$, o que resulta no seguinte sistema linear,

$$(*) = \begin{cases} b + d_0 + d_1 + d_3 = & 0 \\ b + d + d_1 + d_2 + d_4 = & 0 \\ d + d_0 + d_2 + d_3 + d_5 = & 0 \\ a + d_3 + d_4 = & 0 \\ d_4 + d_5 = & 0 \\ a + d_3 + d_5 = & 0 \end{cases}$$

Assim, encontramos, $d_5 = d_4$, $a = d_3 + d_5$, $b = d_0 + d_1 + d_3$ e $d = d_0 + d_2 + d_3 + d_4$. Desta forma, obtemos que, uma base para $\widetilde{Ann(t)}$ é dada por:

$$\{k^{[2]}, k + y_{-1} + y_0, k + y_1, y_{-1} + y_2, \eta + k + y_{-1} + y_3, \eta + y_{-1} + y_4 + y_5\}.$$

□

Notemos que $t_1 = \eta + y_0 + y_3$ é um elemento de I_W^2 e $t_1 \in \widetilde{Ann(t)}$, pelo Lema 3.3 temos que não podemos ter dois elementos de I_W^2 e I_W^2 na base de $T(W)$. Desta forma, tomando $t_1 = \eta + y_0 + y_3$, $t_2 = k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2$, temos que encontrar outro elemento de I_W^1 que satisfaça as condições para uma base para a Subálgebra Toroidal.
Seja $x \in I_W^1$,

$$[t_1, x] = [t_1,\ a^4k^{[2]} + a^2k + b^2\eta + ay_{-1} + (1 + aa_1 + a^3b)y_0 + a_1y_1 +$$

$$(a^3a_5 + a^2a_1b + ab + a_1^2)y_2 + a_3y_3 + (a^2b^2 + ba_1 + aa_5)y_4 + a_5y_5] = 0,$$

se, e somente se, o seguinte sistema possui solução:

$$\begin{cases} a^4 = & a \\ a_1 = & a^2 \\ a^3b + a^3 + 1 + a_3 = & 0 \\ a_5 + a^3a_5 = & 0 \end{cases}$$

O que implica que, $a^3 = 1$ ou $a_5 = 0$.
Se $a^3 = 1$, então $x = ak^{[2]} + a^2k + b^2\eta + ay_{-1} + by_0 + a^2y_1 + (a_5 + a)y_2 + by_3 + (a^2b^2 + ba^2 + aa_5)y_4 + a_5y_5$,

agora fazendo $[t_2, x] = 0$ temos:

$$\begin{cases} a^2b^2 + ba^2 + aa_5 + a_5 = & 0 \\ a^2b^2 + ba^2 + aa_5 + b + b^2 = & 0 \\ b^2 + b + a_5 = & 0 \end{cases}$$

1. Se $b = 1$, então $a_5 = 0$ e teremos que $x = ak^{[2]} + a^2k + \eta + ay_{-1} + y_0 + a^2y_1 + ay_2 + y_3$.

2. Se $b = 0$, então $a_5 = 0$ e teremos que $x = ak^{[2]} + a^2k + ay_{-1} + a^2y_1 + ay_2$.

3. Se $b = \delta$, onde $\delta^3 = 1$, então $a_5 = 1$ e $a = \beta$, onde $\beta^3 = 1$, então teremos que $x = \beta k^{[2]} + \beta^2k + \delta^2\eta + \beta y_{-1} + \delta y_0 + \beta^2y_1 + (1+\beta)y_2 + \delta y_3 + (\beta^2\delta^2 + \delta\beta^2 + \beta)y_4 + y_5$.

4. Se b é qualquer, então $a = \delta$ onde $\delta^3 = 1$, portanto, teremos que $x = \delta k^{[2]} + \delta^2k + b^2\eta + \delta y_{-1} + by_0 + \delta^2y_1 + (b^2 + b + \delta)y_2 + by_3 + (\delta^2b^2 + \delta^2b + \delta b^2 + \delta b)y_4 + (b^2 + b)y_5$.

É fácil ver que o elemento do item 2 pertence a qualquer álgebra contendo t_1 e t_2, e o elemento do item 4 pertence a álgebra contendo t_1 e t_2 e o elemento do item 3, assim temos as subálgebras toroidais

$$T_1 = \{\eta + y_0 + y_3,\ k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2,\ a(k^{[2]} + y_{-1} + y_2) + a^2(k + y_1)\},$$

com $a \neq 1$.

$$T_2 = \{\eta + y_0 + y_3,\ k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2,\ \delta(k^{[2]} + y_{-1} + y_0 + y_3) + \delta^2(k + \eta + y_1 + y_2) + +y_4 + y_5\}$$

3.2 Subálgebras Toroidais

Vamos mostrar que temos duas subálgebras toroidais em W_2. São elas:

$$T_1 = \{\eta + y_0 + y_3,\ k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2,\ \delta(k^{[2]} + y_{-1} + y_2) + \delta^2(k + y_1)\},$$

$$T_2 = \{\eta + y_0 + y_3,\ k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2,\ \delta(k^{[2]} + y_{-1} + y_0 + y_3) + \delta^2(k + \eta + y_1 + y_2) + y_4 + y_5\}$$

Sejam $t_1 = \eta + y_0 + y_3$, $t_2 = k^{[2]} + k + y_{-1} + y_1 + y_2$, $t_3 = \delta^2(k + y_1) + \delta(k^{[2]} + y_{-1} + y_2)\}$, $t_4 = \delta^2(k + \eta + y_1 + y_2) + \delta(k^{[2]} + y_{-1} + y_0 + y_3) + y_4 + y_5\}$

.	t_1	t_2	t_3
η	0	$y_2 + y_2 + y_5$	$\delta^2(y_4) + \delta(y_2 + y_5)$
k	$y_1 + y_4$	$y_{-1} + y_0$	$\delta^2(y_{-1}) + \delta(y_0)$
$k^{[2]}$	$y_{-1} + y_2$	0	0
y_{-1}	$y_{-1} + y_2 + y_5$	$y_0 + y_1$	$\delta^2(y_0) + \delta(y_1)$
y_0	y_3	$y_{-1} + y_1$	$\delta^2(y_1) + \delta(y_{-1})$
y_1	$y_1 + y_4$	$y_{-1} + y_0$	$\delta^2(y_{-1}) + \delta(y_0)$
y_2	y_5	$y_0 + y_1$	$\delta^2(y_0) + \delta(y_1)$
y_3	y_3	$y_{-1} + y_1 + y_2 + y_4 + y_5$	$\delta^2(y_1 + y_4) + \delta(y_{-1} + y_2 + y_5)$
y_4	0	$y_0 + y_2 + y_3 + y_5$	$\delta^2(y_2 + y_5) + \delta(y_0 + y_3)$
y_5	y_5	$y_1 + y_3 + y_4$	$\delta^2(y_3) + \delta(y_1 + y_4)$

Tabela 3.3: A

.	t_1	t_2	t_4
η	0	$y_2+y_2+y_5$	$\delta^2(y_4)+\delta(y_2+y_5)$
k	y_1+y_4	$y_{-1}+y_0$	$\delta^2(y_{-1}+y_0+y_4)+\delta(y_1)+y_2+y_3$
$k^{[2]}$	$y_{-1}+y_2$	0	$\delta^2(y_2)+\delta(y_{-1})+y_0+y_1$
y_{-1}	$y_{-1}+y_2+y_5$	y_0+y_1	$\delta^2(y_0+y_1+y_5)+\delta(y_{-1}+y_2)+y_3+y_4$
y_0	y_3	$y_{-1}+y_1$	$\delta^2(y_1)+\delta(y_{-1}+y_3)+y_5$
y_1	y_1+y_4	$y_{-1}+y_0$	$\delta^2(y_{-1})+\delta(y_0+y_1+y_4)+y_5$
y_2	y_5	y_0+y_1	$\delta^2(y_0)+\delta(y_1+y_5)$
y_3	y_3	$y_{-1}+y_1+y_2+y_4+y_5$	$\delta^2(y_1+y_4+y_5)+\delta(y_{-1}+y_2+y_3)$
y_4	0	$y_0+y_2+y_3+y_5$	$\delta^2(y_2+y_5)+\delta(y_0+y_3)$
y_5	y_5	$y_1+y_3+y_4$	$\delta^2(y_3)+\delta(y_1+y_4+y_5)$

Tabela 3.4: B

Seja $x\in W$ um elemento qualquer, assim,

$$[x,t_1]=[dy_{-1}+d_0y_0+d_1y_1+d_2y_2+d_3y_3+d_4y_4+d_5y_5,t_1]=x$$

implica que $d_0=0$, $d_2=d$, $d_4=d_1$, logo uma base para L_0 é $\{y_{-1}+y_2,\ y_1+y_4,\ y_3,\ y_5\}$, de maneira análoga

$$[x,t_1]=[dy_{-1}+d_0y_0+d_1y_1+d_2y_2+d_3y_3+d_4y_4+d_5y_5,t_1]=0$$

implica que $d_3=d_0$, $d=0=d_1$, $d_5=d_2$, desta forma, uma base para L_1 é $\{y_0+y_3,\ y_2+y_5,\ y_4\}$, logo $W=L_0+L_1$. Temos que $[L_1,t_2]\subset L_1,[L_0,t_2]\subset L_0$, $[L_1,t_3]\subset L_1,[L_0,t_3]\subset L_0$ e $[L_1,t_4]\subset L_1,[L_0,t_4]\subset L_0$. Vamos encontrar uma base para W tal que para qualquer elemento z_i desta base $[z_i,\,t_j]=z_i$ ou $[z_i,\,t_j]=0$, para $i=1,...,7$ e $j=1,2,3,4$. Para isso tomemos $x\in L_0$, e fazemos $[x,\,t_2]=0$, isto é,

$$[d_0y_0+d_2y_2+d_0y_3+d_2y_5+d_4y_4,\,t_2]=0,$$

implica que, $d_2=d_0=d_4$. Denotemos por $L_{(0,0)}(t_2)=\{x\in L_0|\,[x,t_2]=0\}$, desta forma, uma base para $L_{(0,0)}(t_2)$ é $\{y_0+y_2+y_3+y_4+y_5\}$, de maneira análoga, $[x,\,t_2]=x$, isto é,

$$[d_0y_0+d_2y_2+d_0y_3+d_2y_5+d_4y_4,\,t_2]=x,$$

implica que, $d_0=d_2+d_4$. Agora denotemos por $L_{(0,1)}(t_2)=\{x\in L_0|\,[x,t_2]=x\}$, assim, uma base é $\{y_0+y_2+y_3+y_5,\,y_0+y_3+y_4\}$
Agora tomemos $x\in L_1$ e fazemos $[x,\,t_2]=0$, isto é,

$$[dy_{-1}+d_1y_1+dy_2+d_3y_3+d_1y_4+d_5y_5,\,t_2]=0,$$

implica que, $d_1=d_3=d_5$, e d é qualquer. Seja $L_{(1,0)}(t_2)=\{x\in L_1|\,[x,t_2]=0\}$, logo $\{y_{-1}+y_2,\ y_1+y_3+y_4+y_5\}$ é uma base para $L_{(1,0)}(t_2)$, de maneira análoga, $[x,\,t_2]=x$, isto é,

$$[dy_{-1}+d_1y_1+dy_2+d_3y_3+d_1y_4+d_5y_5,\,t_2]=x,$$

implica que, $d_3=d+d_1$, $d_5=d$. Seja $L_{(1,1)}(t_2)=\{x\in L_1|\,[x,t_2]=x$, sua base é $\{y_{-1}+y_2+y_3+y_5,\,y_1+y_3+y_4\}$.

Agora tomemos $x\in L_0$ e fazemos $[x,\,t_3]=0$, isto é,

$$[d_0y_0+d_2y_2+d_0y_3+d_2y_5+d_4y_4,\,t_3]=0,$$

implica que, $d_2=\delta^2d_4$ e $d_0=\delta d_4$. Seja $L_{(0,0)}(t_3)=\{x\in L_0|\,[x,t_3]=0$ sua base é $\{\delta^2(y_2+y_5)+$

$\delta(y_0+y_3)+y_4\}$, de maneira análoga, $[x,\, t_2]=x$, isto é,

$$[d_0y_0+d_2y_2+d_0y_3+d_2y_5+d_4y_4,\, t_2]=x,$$

implica que, $d_0=\delta^2d_2+\delta d_4$. Seja $L_{(0,1)}(t_3)=\{x\in L_0|\,[x,t_3]=x$, sua base é $\{\delta^2(y_0+y_3)+y_2+y_5,\, \delta(y_0+y_3)+y_4\}$.
Agora tomemos $x\in L_1$ e fazemos $[x,\, t_3]=0$, isto é,

$$[dy_{-1}+d_1y_1+dy_2+d_3y_3+d_1y_4+d_5y_5,\, t_3]=0,$$

implica que, $d_1=\delta^2d_3$ e $d_5=\delta d_3$, e d é qualquer. Seja $L_{(1,0)}(t_3)=\{x\in L_1|\,[x,t_3]=0$, sua base é $\{y_{-1}+y_2,\, \delta^2(y_1+y_4)+\delta y_5+y_3\}$, de maneira análoga, $[x,\, t_3]=x$, isto é,

$$[dy_{-1}+d_1y_1+dy_2+d_3y_3+d_1y_4+d_5y_5,\, t_3]=x,$$

implica que, $d_1=\delta^2d_3+\delta d_5$, $d_5=d$. Seja $L_{(1,1)}(t_3)=\{x\in L_1|\,[x,t_3]=x$, sua base é $\{\delta^2(y_1+y_4)+y_3,\, \delta(y_1+y_4)+y_{-1}+y_2+y_5\}$.

Agora tomemos $x\in L_0$ e fazemos $[x,\, t_4]=0$, isto é,

$$[d_0y_0+d_2y_2+d_0y_3+d_2y_5+d_4y_4,\, t_4]=0,$$

implica que, $d_0=\delta d_4$ e $d_2=\delta^2d_4$. Seja $L_{(0,0)}(t_4)=\{x\in L_0|\,[x,t_4]=0$, sua base é $\{\delta^2(y_2+y_5)+\delta(y_0+y_3)+y_4\}$, de maneira análoga, $[x,\, t_4]=x$, isto é,

$$[d_0y_0+d_2y_2+d_0y_3+d_2y_5+d_4y_4,\, t_4]=x,$$

implica que, $d_0=\delta^2d_2+\delta d_4$. Seja $L_{(0,1)}(t_4)=\{x\in L_0|\,[x,t_4]=x$ sua base é $\{\delta^2(y_0+y_3)+y_2+y_5,\, \delta(y_0+y_3)+y_4\}$.
Agora tomemos $x\in L_1$ e fazemos $[x,\, t_4]=0$, isto é,

$$[dy_{-1}+d_1y_1+dy_2+d_3y_3+d_1y_4+d_5y_5,\, t_3]=0,$$

implica que, $d=\delta d_1+d_5$ e $d_5=d_3$. Seja $L_{(1,0)}(t_4)=\{x\in L_1|\,[x,t_4]=0$, sua base é $\{\delta(y_{-1}+y_2)+y_1+y_4,\, y_{-1}+y_2+y_3+y_5\}$, de maneira análoga, $[x,\, t_4]=x$, isto é,

$$[dy_{-1}+d_1y_1+dy_2+d_3y_3+d_1y_4+d_5y_5,\, t_4]=x,$$

implica que, $d=\delta^2d_3+d_5$ e $d_1=d_5$. Seja $L_{(1,1)}(t_4)=\{x\in L_1|\,[x,t_4]=x$, sua base é $\{\delta^2(y_{-1}+y_2)+y_3,\, y_{-1}+y_1+y_2+y_4+y_5\}$. Vamos escrever uma base para L_0, $\{y_{-1}+y_2,\, y_1+y_4,\, y_3,\, y_5\}$.
$L_{(0,0)}(t_2)=[\{y_0+y_2+y_3+y_4+y_5\}]$
$L_{(0,0)}(t_3)=[\{\delta^2(y_2+y_5)+\delta(y_0+y_3)+y_4\}]$
$L_{(0,0)}(t_4)=[\{\delta^2(y_2+y_5)+\delta(y_0+y_3)+y_4\}]$
$L_{(0,1)}(t_2)=[\{y_0+y_2+y_3+y_5,\, y_0+y_3+y_4\}]$
$L_{(0,1)}(t_3)=[\{\delta^2(y_0+y_3)+y_2+y_5,\, \delta(y_0+y_3)+y_4\}]$
$L_{(0,1)}(t_4)=[\{\delta^2(y_0+y_3)+y_2+y_5,\, \delta(y_0+y_3)+y_4\}]$
$L_{(1,1)}(t_2)=[\{y_{-1}+y_2+y_3+y_5,\, y_1+y_3+y_4\}]$
$L_{(1,0)}(t_3)=[\{y_{-1}+y_2,\, \delta^2(y_1+y_4)+\delta y_5+y_3\}]$
$L_{(1,0)}(t_4)=[\{\delta(y_{-1}+y_2)+y_1+y_4,\, y_{-1}+y_2+y_3+y_5\}]$
$L_{(1,0)}(t_2)=[\{y_{-1}+y_2,\; y_1+y_3+y_4+y_5\}]$
$L_{(1,1)}(t_3)=[\{\delta^2(y_1+y_4)+y_3,\, \delta(y_1+y_4)+y_{-1}+y_2+y_5\}]$
$L_{(1,1)}(t_4)=[\{\delta^2(y_{-1}+y_2)+y_3,\, y_{-1}+y_1+y_2+y_4+y_5\}\}]$

Assim, uma nova base para W em relação a t_1,t_2,t_3 é $\{z_1=y_0+y_2+y_3+y_4+y_5,\;\, z_2=\delta^2(y_2+y_5)+\delta(y_0+y_3)+y_4,$

$z_3 = y_0 + y_2 + y_3 + y_5 + \delta^2(y_0 + y_3 + y_4),\ z_4 = y_{-1} + y_2,\ z_5 = \delta^2(y_{-1} + y_2 + y_5) + \delta y_3 + y_1 + y_4,$
$z_6 = \delta(y_{-1} + y_2 + y_5) + \delta^2 y_3 + y_1 + y_4,\ z_7 = y_{-1} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\}.$

$\cdot$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
z_1	0	0	0	z_7	δz_6	$\delta^2 z_5$	z_4
z_2	0	0	0	$\delta^2 z_5$	z_4	$\delta^2 z_7$	z_6
z_3	0	0	0	z_6	z_7	$\delta^2 z_4$	$\delta^2 z_5$
z_4	z_7	$\delta^2 z_5$	z_6	0	$\delta^2 z_2$	$\delta^2 z_3$	z_1
z_5	δz_6	z_4	z_7	$\delta^2 z_2$	0	z_1	z_3
z_6	$\delta^2 z_5$	$\delta^2 z_7$	$\delta^2 z_4$	$\delta^2 z_3$	z_1	0	δz_2
z_7	z_4	z_6	$\delta^2 z_5$	z_1	z_3	δz_2	0

Tabela 3.5: C

Assim, uma outra base para W em relação a t_1, t_2, t_4 é $\{v_1 = y_0 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5,\ v_2 = \delta^2(y_2 + y_5) + \delta(y_0 + y_3) + y_4,$
$v_3 = y_0 + y_2 + y_3 + y_5 + \delta^2(y_0 + y_3 + y_4),\ v_4 = y_{-1} + y_2 + \delta(y_1 + y_3 + y_4 + y_5),\ v_5 = \delta^2(y_{-1} + y_2 + y_3 + y_5),$
$v_6 = \delta(y_{-1} + y_1 + y_2 + y_4 + y_5),\ v_7 = y_{-1} + y_2 + \delta^2(y_1 + y_3 + y_4 + y_5)$

$\cdot$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	0	0	v_7	δv_6	$\delta^2 v_5$	v_4
v_2	0	0	0	$\delta^2 v_5$	v_4	$\delta^2 v_7$	v_6
v_3	0	0	0	v_6	v_7	$\delta^2 v_4$	$\delta^2 v_5$
v_4	v_7	$\delta^2 v_5$	v_6	0	$\delta^2 v_2$	$\delta^2 v_3$	v_1
v_5	δv_6	v_4	v_7	$\delta^2 v_2$	0	v_1	v_3
v_6	$\delta^2 v_5$	$\delta^2 v_7$	$\delta^2 v_4$	$\delta^2 v_3$	v_1	0	δv_2
v_7	v_4	v_6	$\delta^2 v_5$	v_1	v_3	δv_2	0

Tabela 3.6: D

Notemos que $\{t_1,\ t_2,\ t_3,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6,\ z_7\}$ formam uma base para W_2 e assim possui a seguinte tábua do produto de Lie.

$\cdot$	t_1	t_2	t_3	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
t_1	0	0	0	0	0	0	z_4	z_5	z_6	z_7
t_2	0	0	0	0	z_2	z_3	0	z_5	z_6	0
t_3	0	0	0	z_1	0	z_3	0	0	z_6	z_7
z_1	0	0	z_1	0	0	0	z_7	δz_6	$\delta^2 z_5$	z_4
z_2	0	z_2	0	0	0	0	$\delta^2 z_5$	z_4	$\delta^2 z_7$	z_6
z_3	0	z_3	z_3	0	0	0	z_6	z_7	$\delta^2 z_4$	$\delta^2 z_5$
z_4	z_4	0	0	z_7	z_5	z_6	0	$\delta^2 z_2$	$\delta^2 z_3$	z_1
z_5	z_5	z_5	0	δz_6	z_4	z_7	$\delta^2 z_2$	0	z_1	z_3
z_6	z_6	z_6	z_6	$\delta^2 z_5$	$\delta^2 z_7$	$\delta^2 z_4$	$\delta^2 z_3$	z_1	0	δz_2
z_7	z_7	0	z_7	z_4	z_6	$\delta^2 z_5$	z_1	z_3	δz_2	0

Tabela 3.7: E

O mesmo ocorre com $\{t_1,\ t_2,\ t_3,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6,\ v_7\}$ que também forma uma base para W_2 e assim possui a seguinte tábua do produto de Lie.

.	t_1	t_2	t_3	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
t_1	0	0	0	0	0	0	v_4	v_5	v_6	v_7
t_2	0	0	0	0	v_2	v_3	0	v_5	v_6	0
t_3	0	0	0	v_1	0	v_3	0	0	v_6	v_7
v_1	0	0	v_1	0	0	0	v_7	δv_6	$\delta^2 v_5$	v_4
v_2	0	v_2	0	0	0	0	$\delta^2 v_5$	v_4	$\delta^2 v_7$	v_6
v_3	0	v_3	v_3	0	0	0	v_6	v_7	$\delta^2 v_4$	$\delta^2 v_5$
v_4	v_4	0	0	v_7	v_5	v_6	0	$\delta^2 v_2$	$\delta^2 v_3$	v_1
v_5	v_5	v_5	0	δv_6	v_4	v_7	$\delta^2 v_2$	0	v_1	v_3
v_6	v_6	v_6	v_6	$\delta^2 v_5$	$\delta^2 v_7$	$\delta^2 v_4$	$\delta^2 v_3$	v_1	0	δv_2
v_7	v_7	0	v_7	v_4	v_6	$\delta^2 v_5$	v_1	v_3	δv_2	0

Tabela 3.8: F

Sendo assim, basta tomarmos o seguinte isomorfismo de álgebras de Lie:

$$\begin{aligned} \Phi : t_1 &\mapsto t_1 \\ t_2 &\mapsto t_2 \\ t_3 &\mapsto t_4 \\ z_1 &\mapsto v_1 \\ z_2 &\mapsto v_2 \\ z_3 &\mapsto v_3 \\ z_4 &\mapsto v_4 \\ z_5 &\mapsto v_5 \\ z_6 &\mapsto v_6 \\ z_7 &\mapsto v_7 \end{aligned}$$

Concluindo que T_1 e T_2 são conjugadas. Com isso demonstramos o seguinte Teorema.

Teorema 3.6. *A álgebra de Lie W_2 possui uma única subálgebra toroidal de dimensão 3, a menos de conjugação.*

Capítulo 4

Álgebra Hamiltoniana

Neste capítulo o objetivo é determinar as subálgebras toroidais da Álgebra Hamiltoniana. Em [1] temos determinadas as variedades de elementos idempotentes, partindo destas variedades calculamos algumas possíveis subálgebras toroidais.

4.1 O 2-Fecho da Álgebra Hamiltoniana

O 2-Fecho H_2 de H é dado pela seguinte tábua:

	t	m	n	V_0	V_1	E_1	E_0	F_1	F_0	G
t	t	0	0	V_0	V_1	0	0	F_1	F_0	0
m	0	0	E_0	0	0	0	0	V_1	V_0	E_1
n	0	E_0	0	0	F_1	G	0	0	0	0
V_0	V_0	0	0	0	0	V_1	0	0	E_0	F_1
V_1	V_1	0	F_1	0	m	V_0	V_1	E_0	E_1	F_0
E_1	0	0	G	V_1	V_0	t	E_1	F_0	F_1	0
E_0	0	0	0	0	V_1	E_1	E_0	F_1	0	G
F_1	F_1	V_1	0	0	E_0	F_0	F_1	n	G	0
F_0	F_0	V_0	0	E_0	E_1	F_1	0	G	n	0
G	0	E_1	0	F_1	F_0	0	G	0	0	0

Tabela 4.1: 2-*fecho da Álgebra Hamiltoniana*

Para 2-fecho H_2 da H-álgebra, a **variedade de elementos idempotentes** é dada por $\tau^1(H) = \bigcup_{\delta=I}^{VI} \hat{\tau}_H^{\delta}$, onde

$\tau_H^I = \{\alpha^2 t + \xi^{-2} m + \xi^2(b+\bar{\alpha}\bar{a})^2 n + a\xi^{-1} V_0 + \xi^{-1} V_1 + \alpha\bar{\alpha} E_1 + b E_0 + \xi(b+\bar{\alpha}(\alpha a+\bar{\alpha}))F_1 + \xi\bar{\alpha}(\alpha a + a + \alpha) F_0 + \xi^2\bar{\alpha}(b\alpha + \alpha a + a) G \,/\, \alpha, a, b \in k, \xi \in k^*\}$
$\tau_H^{II} = \{t + \xi^2(b^2+b+c)^2 n + \xi^{-1} V_0 + b E_0 + c\xi F_1 + \xi(b^2+b) F_0 + \xi^2 b c G \,/\, \xi, b, c \in k\}$
$\tau_H^{III} = \{t + \xi^{-1}c^2 n + E_0 + c\xi F_0 + \xi^2 d G \,/\, \xi, c, d \in k\}$
$\tau_H^{IV} = \{t + \xi^2(c_0+c_1)^2 n + \xi c_1 F_1 + c_0 \xi F_0 + \xi^2 c_0 c_1 G \,/\, \xi, c_0, c_1 \in k\}$
$\tau_H^{V} = \{\tau t + E_1 + E_0 + d G \,/\, \tau^2 + \tau + 1 = 0, d \in k\}$
$\tau_H^{VI} = \{E_0 + d G \,/\, d \in k\}$.
$\tau_H^{VII} = \{a^2 n + E_0 + aF_1 + (b + a^{-2}b^2)G \,/\, b \in k, a \in k^*\}$.

Lema 4.1. *Se T é uma subálgebra toroidal de H_2, então T contém um elemento da Variedade τ_H^I.*

Demonstração: Notemos que todos os elementos de τ_H^I contém m e os elementos das demais variedades não contém m. Sendo assim, se existisse uma subálgebra toroidal T que não contém um elemento de τ_H^I teráamos que $H_2 = T \oplus H$ e $T \oplus H$ não contém m, o que não pode acontecer. $\square$

4.2 Anulador de um Idempotente Geral

Nesta seção vamos estudar o $Ann(t_3)$, pois pelo Lema 4.1, se T é uma subálgebra toroidal de H_2, então ele contém um elemento de τ_H^I. Agora em [1], Grichkov e Guerreiro provaram que $\tau_H^I = \bigcup_{\lambda \in k} O\tau_H^I = \bigcup_{\lambda \in k} \{t + m + \lambda V_0 + V_1\}^{G_2}$.

Seja
$t_3 = t + m + \lambda V_0 + V_1 \in \tau_H^I$,
$t_2 = m + E_0 + V_1$,
$t_1 = n + E_0 + F_1$,
$e_1 = E_0 + V_1$,
$e_2 = (V_0 + \lambda E_0 + \lambda F_1 + F_0 + G)/\bar{\lambda}$, $\bar{x} = x + 1$,
$e_3 = (\lambda V_1 + \lambda E_0 + E_1 + \lambda F_1 + F_0 + G)/\bar{\lambda}$.

Lema 4.2. *$Ann_K t_3 = Span_k\{t_1, t_2, t_3, e_1, e_2, e_3\}$.*
$[e_i, e_j] = e_r$, $\{i, j, r\} = \{1, 2, 3\}$, $[e_i, t_j] = \delta_{ij} e_i, i, j = 1, 2$.
$e_1^{[2]} = t_2$, $e_2^{[2]} = t_1$, $e_3^{[2]} = t_1 + t_2 + \frac{t_3}{\lambda^2}$.

Demonstração: Primeiro vamos determinar o $Ann_{H_2}(t_3)$. Seja $\alpha \in H_2$, isto é,

$$\alpha = x_0 t + x_1 m + x_2 n + x_3 V_0 + x_4 V_1 + x_5 E_1 + x_6 E_0 + x_7 F_1 + x_8 F_0 + x_9 G.$$

Agora,

$$[t_3, \alpha] = x_3 V_0 + x_4 V_1 + x_7 F_1 + x_8 F_0 + x_2 E_0 + x_7 V_1 + x_8 V_0 + x_9 E_1 + \lambda x_0 V_0 + \lambda x_5 V_1 +$$

$$\lambda x_8 E_0 + \lambda x_9 F_1 + x_0 V_1 + x_2 F_1 + x_5 V_0 + x_6 V_1 + x_7 E_0 + x_8 E_1 + x_9 F_0,$$

assim,

$$[t_3, \alpha] = V_0(x_3 + x_8 + \lambda x_0 + x_5) + V_1(x_4 + x_7 + \lambda x_5 + x_0 + x_6) + E_1(x_9 + x_8) + E_0(x_2 + \lambda x_8 + x_7)$$

$$+ F_1(x_7 + \lambda x_9 + x_2) + F_0(x_8 + x_9),$$

fazendo $[t_3, \alpha] = 0$ teremos:

$$\begin{cases} x_5 &= x_3 + x_8 + \lambda x_0 \\ x_4 &= x_2 + \lambda x_3 + (\lambda^2 + 1)x_0 + x_6 \\ x_8 &= x_9 \\ x_7 &= x_2 + \lambda x_8 \end{cases}$$

Desta forma,

$$\alpha = x_0 t + x_1 m + x_2 n + x_3 V_0 + (x_2 + \lambda x_3 + (\lambda^2 + 1)x_0 + x_6)V_1 +$$

$$(x_3 + x_8 + \lambda x_0)E_1 + x_6 E_0 + (x_2 + \lambda x_8)F_1 + x_8 F_0 + x_8 G,$$

o que implica que α pode ser escrito da seguinte maneira,

$$\alpha = x_0(t + (\lambda^2 + 1)V_1 + \lambda E_1) + x_1 m + x_2(n + V_1 + F_1) + x_3(V_0 + \lambda V_1 + E_1) +$$

$$x_6(V_1 + E_0) + x_8(E_1 + \lambda F_1 + F_0 + G).$$

Sendo assim, uma base para o $Ann_{H_2}(t_3)$ é

$$\{w_1 = t + (\lambda^2 + 1)V_1 + \lambda E_1,\ w_2 = m,\ w_3 = n + V_1 + F_1,$$

$$w_4 = V_0 + \lambda V_1 + E_1,\ w_5 = V_1 + E_0,\ w_6 = E_1 + \lambda F_1 + F_0 + G\}.$$

Notemos que $t_1 = w_3 + w_5$, $t_2 = w_2 + w_5$, $t_3 = w_1 + w_2 + \lambda w_4$, $e_1 = w_5$, $e_2 = \frac{1}{\bar{\lambda}}(w_4 + \lambda w_5 + w_6)$ e $e_3 = \frac{1}{\bar{\lambda}}(\lambda w_5 + w_6)$, provando assim o lema.

□

4.3 Elementos Idempotentes

Nesta seção estaremos determinando a partir das variedades de idempotentes, possíveis elementos para determinar as subálgebras toroidais. Pelo Lema 4.1 se T é uma subálgebra toroidal, ela contém um elemento de τ_H^I. Com isso temos a seguinte proposição.

Proposição 4.3. *Se $x \in H_2$, $x^{[2]} = x$ e $[t_3,\ x] = 0$, então x é um dos seguintes elementos:*

I) $t_2^1 = n + E_0 + F_1$

II) $t_2^2 = m + V_1 + E_0$

III) $t_2^3 = \alpha^2 t + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 m + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})V_0 + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0$

IV) $t_2^4 = m + n + aV_0 + V_1 + aE_0 + \bar{a}F_1 + aF_0 + aG$

V) $t_2^5 = m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG$

VI) $t_2^6 = m + (b + \bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG$

VII) $t_2^7 = \alpha^2 t + m + n + V_0 + V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0 + (\alpha^2 + \bar{\alpha})F_1 + \bar{\alpha}F_0 + \bar{\alpha}G;\ \ \lambda = 1$

VIII) $t_2^8 = t + n + \xi^{-1}V_0 + F_1;$

IX) $t_2^9 = t + \xi^{-1}V_0 + E_0;$

X) $t_2^{10} = t + bV_0 + bE_0 + \bar{b}F_1 + \bar{b}F_0 + \bar{b}G;$

XI) $t_2^{11} = t + n + \xi^{-1}V_0 + (1 + c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G$

XII) $t_2^{12} = t + \lambda^2 n + E_0 + \lambda F_0 + \lambda G$

XIII) $t_2^{13} = t\bar{\lambda}^2 n + F_1 + \lambda F_0 + \lambda G$

XIV) $t_2^{14} = \bar{\lambda}t + E_1 + E_0$

Demonstração:

Seja

$t_3 = t + m + \lambda V_0 + V_1$, um elemento de τ_H^I.

$[t_3,\ \tau_H^I] = [t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \alpha^2\, t + \xi^{-2}\, m\ +\ \xi^2(b + \bar{\alpha}\bar{a})^2\, n\ +\ a\xi^{-1}\, V_0\ +\ \xi^{-1}\, V_1\ +\ \alpha\bar{\alpha}\, E_1\ +\ b\, E_0\ +\ \xi(b + \bar{\alpha}(\alpha\, a + \bar{\alpha}))F_1\ +\ \xi\bar{\alpha}(\alpha\, a + a + \alpha)\, F_0\ +\ \xi^2\bar{\alpha}(b\alpha + \alpha\, a + a)\, G] = 0$

Assim teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a\xi^{-1} + \lambda\alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \xi\bar{\alpha}(\alpha a + a + \alpha) & = 0 \\ \alpha^2 + \xi^{-1} + \xi(b + \bar{\alpha}\alpha a + \bar{\alpha}^2) + \lambda\alpha\bar{\alpha} + b & = 0 \\ \xi(b + \bar{\alpha}\alpha a + \bar{\alpha}^2) + \xi^2\bar{\alpha}(b\alpha + \alpha a + a) + \xi^2(b + \bar{\alpha}\bar{a})^2 & = 0 \\ \xi\bar{\alpha}(\alpha a + a + \alpha) + \xi^2\bar{\alpha}(b\alpha + \alpha a + a) & = 0 \\ \xi^2(b + \bar{\alpha}\bar{a}) + \xi\bar{\alpha}(\alpha a + a + \alpha) + \xi(b + \bar{\alpha}\alpha a + \bar{\alpha}^2) & = 0 \\ \xi^2\bar{\alpha}(b\alpha + \alpha a + a) + \xi\bar{\alpha}(\alpha a + a + \alpha) & = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo este sistema teremos:

1) Se $\alpha = 1$, o sistema se resume a:

$$\begin{cases} a\xi^{-1} + \lambda & = 0 \\ 1 + \xi^{-1} + \xi b + b & = 0 \\ \xi b + \xi^2 b^2 & = 0 \\ \xi^2 b + \xi b & = 0 \end{cases}$$

então de $\xi^2 b + \xi b = 0$ implica que,

i) $\xi = 1$, então $b + b^2 = 0$, o que implica que $b = 0$ ou $b = 1$.

a) Se $b = 0$, então $\lambda = a$ e teremos $t_2 = t + m + \lambda V_0 + V_1 = t_1$ o qual é um um elemento que não serve.

b) Se $b = 1$, então $\lambda = a$ e $t_2 = t + m + n + \lambda V_0 + V_1 + E_0 + F_1$, como $t_1 + t_2$ é um elemento idempotente, e anula t_1 então $t_2^1 = t_1 + t_2 = n + E_0 + F_1$

ii) Se $\xi \neq 1$, então $b = 0$, o que implica que $1 + \xi^{-1} = 0$, ou seja $\xi = 1$, o que é uma contradição.

2) Se $\alpha \neq 1$, então $\bar{\alpha} \neq 0$, da equação $\xi^2\bar{\alpha}(b\alpha + \alpha a + a) + \xi\bar{\alpha}(\alpha a + a + \alpha) = 0$ temos que $\xi(b\alpha + \alpha a + a) + (\alpha a + a + \alpha) = 0$ o que implica que $\xi = \dfrac{\alpha a + a + \alpha}{b\alpha + \alpha a + a}$. Agora de $\xi^2(b + \bar{\alpha}\bar{a}) + \xi\bar{\alpha}(\alpha a + a + \alpha) + \xi(b + \bar{\alpha}\alpha a + \bar{\alpha}^2) = 0$, chegamos que $\xi(b + \bar{\alpha}\bar{a}) + b + \bar{\alpha}\bar{a} = 0$, o que implica em $b + \bar{\alpha}\bar{a} = 0$ ou $\xi = 1$.

i) Se $b = \bar{\alpha}\bar{a}$:
A equação $\xi(b + \bar{\alpha}\alpha a + \bar{\alpha}^2) + \xi^2\bar{\alpha}(b\alpha + \alpha a + a) + \xi^2(b + \bar{\alpha}\bar{a})^2 = 0$ resulta que $\xi^{-1}(b + \bar{\alpha}\alpha a + \bar{\alpha}^2) + \bar{\alpha}(b\alpha + \alpha a + a) + (b + \bar{\alpha}\bar{a})^2 = 0$, desta forma, $\xi^{-1}(a + \alpha + \alpha a) + \bar{\alpha}(a + \alpha + \alpha a) = 0$.

a) Caso $a + \alpha + \alpha a = 0$ como $\alpha \neq 1$, então $a = \dfrac{\alpha}{\bar{\alpha}}$, logo:
Da equação $a\xi^{-1} + \lambda\alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \xi\bar{\alpha}(\alpha a + a + \alpha) = 0$ concluímos que

$$\alpha\bar{\alpha} + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\xi^{-1} + \lambda\alpha^2 = 0$$

a.i) Se $\alpha = 0$, então $a = 0$ e $\bar{\alpha} = 1$, logo $\xi^{-1} + \xi(1 + 1) + 1 = 0$ com isso $\xi = 1$ e $b = 1$ e teremos $t_2 = m + V_1 + E_0$.

a.ii) Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, então $\xi^{-1} = \lambda\alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2$ e teremos $t_2 = \alpha^2 t + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 m + \dfrac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})V_0 + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0$.

b) Caso $a + \alpha + \alpha a \neq 0$ e como $\alpha \neq 1$, então $\xi = \dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ e $\xi^{-1} = \bar{\alpha}$. Da equação $\xi^2(b + \bar{\alpha}\bar{a}) + \xi\bar{\alpha}(\alpha a + a + \alpha) + \xi(b + \bar{\alpha}\alpha a + \bar{\alpha}^2) = 0$, fazendo as devidas substituições e resolvendo a equação chegamos que $\alpha(b + \bar{\alpha}\bar{a}) = 0$, o que implica que $\alpha = 0$ ou $b = \bar{\alpha}\bar{a}$.
Se $\alpha = 0$, $\xi = 1$.
Substituindo na equação $\xi(b + \bar{\alpha}\alpha a + \bar{\alpha}^2) + \xi^2\bar{\alpha}(b\alpha + \alpha a + a) + \xi^2(b + \bar{\alpha}\bar{a})^2 = 0$, teremos $(b + a) + (b + a)^2 = 0$ ou $b = \bar{a}$.

b.i) Se $\alpha = 0$ e como $\xi = 1$ podemos ter $b = a$, e desta forma, todas as equações do sistemas são satisfeitas e assim teremos

$$t_2 = m + n + aV_0 + V_1 + aE_0 + \bar{a}F_1 + aF_0 + aG.$$

b.ii) Se $\alpha = 0$, $\xi = 1$ e $b = \bar{a}$, neste caso

$$t_2 = m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG.$$

ii) Se $b \neq \bar{\alpha}\bar{a}$, então $\xi = 1$ e $\alpha \neq 1$, desta maneira da equação $\alpha = 0$ ou $b = 1$.

a) Se $\alpha = 0$, $\xi = 1$, $b \neq \bar{a}$, todas as equações estão satisfeitas e assim,

$$t_2 = m + (b+\bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG.$$

b) Se $\alpha \neq 0, 1$, $\xi = 1$ e $b = 1$, temos da equação

$$\xi(b + \bar{\alpha}\alpha a + \bar{\alpha}^2) + \xi^2\bar{\alpha}(b\alpha + \alpha a + a) + \xi^2(b + \bar{\alpha}\bar{a})^2 = 0$$

que $\bar{a}\bar{\alpha} + \bar{a}^2\bar{\alpha}^2 = 0$, com isso, $\bar{a}\bar{\alpha} = 0$ ou $\bar{a}\bar{\alpha} = 1$.

b.i) Se $\bar{a}\bar{\alpha} = 0$, então $a = 1$ e pela equação $a\xi^{-1} + \lambda\alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \xi\bar{\alpha}(\alpha a + a + \alpha) = 0$, temos que $\lambda = a = 1$, logo

$$t_2 = \alpha^2 t + m + n + V_0 + V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0 + (\alpha^2 + \bar{\alpha})F_1 + \bar{\alpha}F_0 + \bar{\alpha}G.$$

e

$$t_1 = t + m + V_0 + V_1$$

b.ii) Se $\bar{a}\bar{\alpha} = 1 = b$, o que é uma contradição.

Desta forma, para $t_1 = t + m + \lambda V_0 + V_1$ teremos:

I) $t_2^1 = n + E_0 + F_1$

II) $t_2^2 = m + V_1 + E_0$

III) $t_2^3 = \alpha^2 t + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 m + \dfrac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})V_0 + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0$

IV) $t_2^4 = m + n + aV_0 + V_1 + aE_0 + \bar{a}F_1 + aF_0 + aG$

V) $t_2^5 = m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG$

VI) $t_2^6 = m + (b+\bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG$

VII) $t_2^7 = \alpha^2 t + m + n + V_0 + V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0 + (\alpha^2 + \bar{\alpha})F_1 + \bar{\alpha}F_0 + \bar{\alpha}G$; $\lambda = 1$

Agora vamos fazer $[t_3,\ \tau_H^{II}] = 0$.
$[t_3,\ \tau_K^{1,II}] = [t + m + \lambda V_0 + V_1,\ t + \xi^2(b^2+b+c)^2\, n + \xi^{-1}\, V_0 + b\, E_0 + c\xi\, F_1 + \xi(b^2+b)\, F_0 + \xi^2\, b\, c\, G] = 0$.
Calculando teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \xi^{-1} + \xi(b^2 + b) + \lambda & = 0 \\ c\xi + 1 + b & = 0 \\ \xi^2 bc + \xi(b^2 + b) & = 0 \\ \xi^2(b^2 + b + c)^2 + \xi(b^2 + b) + c\xi & = 0 \\ c\xi + \xi^2 bc + \xi^2(b^2 + b + c)^2 & = 0 \end{cases}.$$

Agora temos que resolver o sistema para obter os possíveis elementos t_2.

1) Se $b = 0$, temos que $\lambda = \xi^{-1}$, e de $\xi^2(b^2 + b + c)^2 + \xi(b^2 + b) + c\xi = 0$ que $c\xi^2 + c\xi = 0$, isto é, $c\xi = 0$ ou $c\xi = 1$.

a) Se $c\xi = 0$ de $c\xi + 1 + b = 0$ concluímos que $b = 1$, o que é um absurdo.

b) Se $c\xi = 1$, então todas as equações estão satisfeitas e

$$t_2 = t + n + \xi^{-1}V_0 + F_1.$$

2) Se $b = 1$ de $c\xi + 1 + b = 0$, temos que $c = 0$ ou $\xi = 0$.

a) Se $\xi = 0$, então de $\xi^{-1} + \xi(b^2 + b) + \lambda = 0$, temos que $\lambda = 0$ e assim,

$$t_2 = t + E_0$$

e

$$t_3 = t + m + V_1.$$

b) Se $c = 0$ e $\xi \neq 0$, então $\lambda = \xi_{-1}$ e

$$t_2 = t + \xi^{-1}V_0 + E_0.$$

3) Se $b \neq 0, 1$, assim $b = 1 + c\xi$ o que acarreta que $c\xi \neq 0, 1$ e desta forma da equação $\xi^2(b^2 + b + c)^2 + \xi(b^2 + b) + c\xi = 0$ temos $\xi(c^2\xi^2 + c\xi + c)^2 + c^2\xi^2 + c\xi + c = 0$, logo $c^2\xi^2 + c\xi + c = 0$ ou $\xi(c^2\xi^2 + c\xi + c) = 1$.

a) Se $c^2\xi^2 + c\xi + c = 0$, temos $c = 0$ ou $c\xi^2 + \xi + 1 = 0$.

i) Se $c = 0$ temos uma contradição.

ii) Se $c\xi^2 + \xi + 1 = 0$, então $\xi^{-1} = c\xi + 1 = b$, assim $\xi = b^{-1}$ e $c = \dfrac{\bar{b}}{b^{-1}}$, portanto,

$$t_2 = t + bV_0 + bE_0 + \bar{b}F_1 + \bar{b}F_0 + \bar{b}G.$$

b) $\xi(c^2\xi^2 + c\xi + c) = 1$, então $c^2\xi^2 + c\xi + c = \xi^{-1}$ e desta forma,

$$t_2 = t + n + \xi^{-1}V_0 + (1 + c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G$$

Assim para a variedade τ_H^{II} os possíveis t_2 são:

I) $t_2^8 = t + n + \xi^{-1}V_0 + F_1$;

II) $t_2^9 = t + \xi^{-1}V_0 + E_0$;

III) $t_2^{10} = t + bV_0 + bE_0 + \bar{b}F_1 + \bar{b}F_0 + \bar{b}G$;

IV) $t_2^{11} = t + n + \xi^{-1}V_0 + (1 + c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G$

Agora calculando $[t_3,\ \tau_H^{III}] = 0$.

$$[t_3,\ t\ +\ \xi^{-1}c^2\,n\ +\ E_0\ +\ c\,\xi\,F_0\ +\ \xi^2\,d\,G]$$

Calculando teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c\xi + \lambda & = 0 \\ \xi^{-1}d + c\xi & = 0 \\ \xi^{-1}c^2 + \lambda c\xi & = 0 \\ \lambda\xi^2 d + \xi^{-1}c^2 & = 0 \end{cases}.$$

E assim, $\lambda = c\xi$, $\xi^{-1}c^2 = \lambda^2$, $d = c\xi^2$, $\lambda^3 = c^3$ e $\xi^3 = 1$, portanto,

$$t_2^{12} = t + \lambda^2 n + E_0 + \lambda F_0 + \lambda G$$

Agora calculando $[t_3,\ \tau_H^{IV}] = 0$.

$$[t_3,\ t\ +\ \xi^2(c_0 + c_1)^2\,n\ +\ \xi\,c_1\,F_1\ +\ c_0\,\xi\,F_0\ +\ \xi^2\,c_0\,c_1\,G]$$

Calculando teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_0\xi + \lambda & = 0 \\ \xi c_1 + 1 & = 0 \\ \xi^2 c_0 c_1 + c_0\xi & = 0 \\ \xi^2(c_0+c_1)^2 + \lambda c_0\xi + \xi c_1 & = 0 \\ \xi c_1 + \lambda\xi^2 c_0 c_1 + \xi^2(c_0+c_1)^2 & = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos que $c_0\xi = \lambda$ e $c_1\xi = 1$, portanto,

$$t_2^{13} = t\bar{\lambda}^2 n + F_1 + \lambda F_0 + \lambda G$$

Agora calculando $[t_3,\ \tau_H^V] = 0$.

$$[t_3,\ \tau\, t\ +\ E_1\ +\ E_0 +\ d\, G]$$

Calculando teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \lambda\tau + 1 & = 0 \\ \lambda + \tau + 1 & = 0 \\ d & = 0 \\ \lambda d & = 0 \end{cases}.$$

Logo $d = 0$, $\tau = \bar{\lambda}$, assim, $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, portanto

$$t_2^{14} = \bar{\lambda} t + E_1 + E_0.$$

Agora

$$[t_3,\ \tau_H^{VI}] = [t + m + \lambda V_0 + V_1,\ E_0 + dG] = dE_1 + \lambda dF_1 + V_1 + dF_0 \neq 0.$$

Agora calculando $[t_3,\ \tau_H^{VII}] = 0$.

$$[t_3,\ a^2 n + E_0 + aF_1 + (b + a^{-2}b^2)G]$$

Calculando teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 1 & = 0 \\ b + a^{-1}b^2 & = 0 \\ a + \lambda(b + a^{-1}b^2) + a^2 & = 0 \\ a + a^2 & = 0 \end{cases}.$$

Logo $a = 1$ e $b = 0$ ou $b = 1$, independentemente do valor de b temos que

$$t_2^{15} = n + E_0 + F_1 = t_2^1.$$

□

O próximo teorema nos fornece uma propriedade das subálgebras toroidais.

Teorema 4.4. *Se T é uma subálgebra toroidal de H_2, então T é conjugada com subálgebra $T(i,j) = \{t_3, t_2^i, t_2^j\}, i \neq j \in \{1, ..., 14\}$.*

Demonstração: Seja T uma subálgebra toroidal de H_2, pela Proposição 4.1, T contém um elemento de τ_H^I. Agora pela Proposição 3.4 de [1] esse elemento é conjugado de $t + m + \lambda V_0 + V_1$, aplicando a Proposição 4.3, temos o resultado. □

Uma observação importante é a seguinte.

Observação 4.5. *$T(i,j)=\{t_3,t_2^i,t_2^j\}, i\neq j\in\{1,...,14\}$ é uma subálgebra toroidal se, e somente se, $[t_2^i,\ t_2^j]=0$ e $i\neq j$.*

4.3.1 Subálgebras Toroidais de H_2

Nesta seção vamos investigar as subálgebras $T(i,j)$ tentando descobrir quais destas são subálgebras toroidais de dimensão 3.

Teorema 4.6. *1) Se*

$$(i,j)\in A=\{(1,2),\ (1,6),\ (1,8),\ (1,9),\ (1,10),\ (1,11),\ (1,12),\ (1,13),\ (2,6),$$
$$(2,8),\ (2,13),\ (3,4),\ (4,5),\ (4,6),\ (4,9),\ (4,10),\ (4,11),\ (4,12),\ (4,13),\ (5,6),$$
$$(5,8),\ (5,10),\ (5,11),\ (5,12),\ (5,13),\ (6,8),\ (6,9),\ (6,10),\ (6,11),\ (6,12),$$
$$(6,13),\ (8,9),\ (8,12),\ (9,11),\ (9,13),\ (12,13),\ (13,14)\ |[t_2^i,\ t_2^j]=0\},$$

então $T(i,j)$ é uma subálgebra toroidal.

2) Se

$$(i,j)\in\{(1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,7),\ (1,14),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,7),\ (2,9),\ (2,10),\ (2,11),$$
$$(2,12),\ (2,14),\ (3,5),\ (3,7),\ (3,8),\ (3,9),\ (3,10),\ (4,7),\ (4,8),\ (4,14),\ (5,7),\ (5,9),\ (5,14),$$
$$(6,7),(6,14),\ (7,8),\ (7,9),\ (7,10),\ (7,12),\ (7,13),\ (7,14),\ (8,10),\ (8,11),\ (8,13),\ (8,14),$$
$$(9,10),\ (9,12),(9,14),\ (10,12),\ (10,13),\ (10,14),\ (11,12),\ (11,13),\ (11,14),\ (12,14)\},$$

então $T(i,j)$ não é subálgebra toroidal.

Demonstração: Temos que encontrar pares de idempotentes dentre estes tais que o conjunto $\{t_3,\ t_2^i,\ t_2^j\}$ com $i,j=1,\dots,14$ sejam L.I.
Vamos calcular $[t_2^1,\ t_2^j]$, tal que $j=2,\dots,14$.

$$[n+E_0+F_1,\ m+V_1+E_0]=E_0+F_1+V_1+V_1+E_0+F_1=0.$$

Logo temos

$$T(1,2)=T_1=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ n+E_0+F_1,\ m+V_1+E_0\rangle.$$

$$[n+E_0+F_1,\ \alpha^2t+\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2m+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_0+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0]=$$
$$\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2E_0+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})F_1+\alpha\bar{\alpha}G+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+\alpha^2F_1+\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2V_1+$$
$$\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})E_0+\alpha\bar{\alpha}F_0+F_1.$$

Como para t_2^3 ser idempotente $\alpha\neq 0,1$ então $[t_2^1,\ t_2^3]\neq 0$, e assim $T(1,3)$ não é subálgebra toroidal.
Agora vamos calcular $[t_2^1,\ t_2^4]$.

$$[n+E_0+F_1\ ,\ m+n+aV_0+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG]=E_0+F_1+V_1\neq 0.$$

Assim $T(1,4)$ não é subálgebra toroidal. Calculando

$$[t_2^1,\ t_2^5]=[n+E_0+F_1,\ \ m+aV_0+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG]=E_0+\bar{a}F_1+V_1\neq 0.$$

Desta forma, $T(1,5)$ não é subálgebra toroidal. Continuando, $[t_2^1,\ t_2^6]$ nos fornece,

$$[n+E_0+F_1,\ \ m+(b+\bar{a})^2n+aV_0+V_1+bE_0+\bar{b}F_1+aF_0+aG]=$$

$$E_0+F_1+V_1+\bar{b}F_1+aG+V_1+E_0+bF_1+aG=0.$$

Assim,

$$T(1,6)=T_2=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ n+E_0+F_1, m+(b+\bar{a})^2n+aV_0+V_1+bE_0+\bar{b}F_1+aF_0+aG\rangle.$$

$$t_2^1,\ \ t_2^7]=[n+E_0+F_1,\ \ \alpha^2t+m+n+V_0+V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0+(\alpha^2+\bar{\alpha})F_1+\bar{\alpha}F_0+\bar{\alpha}G]=$$

$$\alpha\bar{\alpha}G+\alpha\bar{\alpha}E_1+\bar{\alpha}F_1+\alpha\bar{\alpha}F_0\neq 0,$$

pois $\alpha\bar{\alpha}\neq 0$.
Sendo assim, $T(1,7)$ não é subálgebra toroidal.

$$[t_2^1,\ \ t_2^8]=[n+E_0+F_1,\ \ t+n+\lambda V_0+F_1]=F_1+F_1=0.$$

Desta forma,

$$T(1,8)=T_3=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ n+E_0+F_1,\ t+n+\lambda V_0+F_1\rangle.$$

$$[t_2^1,\ \ t_2^9]=[n+E_0+F_1,\ \ t+\lambda V_0+E_0]=F_1+F_1=0,$$

logo

$$T(1,9)=T_4=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ n+E_0+F_1,\ \ t+\xi^{-1}V_0+E_0\rangle.$$

$$[t_2^1,\ \ t_2^{10}]=[n+E_0+F_1,\ \ t+bV_0+bE_0+\bar{b}F_1+\bar{b}F_0+\bar{b}G]=\bar{b}F_1+\bar{b}G+F_1+bF_1+\bar{b}G=0,$$

logo

$$T(1,10)=T_5=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ n+E_0+F_1,\ \ t+bV_0+bE_0+\bar{b}F_1+\bar{b}F_0+\bar{b}G\rangle$$

$$[t_2^1,\ \ t_2^{11}]=[n+E_0+F_1,\ \ t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G]=$$

$$c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)G+F_1+(1+c\xi)F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)G=0,$$

portanto,

$$T(1,11)=T_6=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ n+E_0+F_1,\ \ t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G\rangle$$

$$[t_2^1,\ \ t_2^{12}]=[n+E_0+F_1,\ \ t+\lambda^2n+E_0+\lambda F_0+\lambda G]=\lambda G+F_1+F_1+\lambda G]=0.$$

Desta forma,

$$T(1,12)=T_7=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ n+E_0+F_1,\ \ t+\lambda^2n+E_0+\lambda F_0+\lambda G\rangle.$$

$$[t_2^1,\ \ t_2^{13}]=[n+E_0+F_1,\ \ t+\bar{\lambda^2}n+F_1+\lambda F_0+\lambda G]=\lambda G+F_1+F_1+\lambda G=0.$$

Desta maneira,

$$T(1,13)=T_8=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ n+E_0+F_1,\ \ t+\bar{\lambda^2}n+F_1+\lambda F_0+\lambda G\rangle.$$

$$[t_2^1,\ \ t_2^{14}]=[n+E_0+F_1,\ \ \bar{\lambda}t++E_0+E_1]=G+E_1+\bar{\lambda}F_1+F_0+F_1\neq 0.$$

Logo $T(1,14)$ não é subálgebra toroidal.

$$[t_2^2,\ \ t_2^3] = [m + V_1 + E_0,\ \ \alpha^2 t + \bar{\lambda}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 m + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha + \bar{\lambda})V_0 + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0] =$$

$$\alpha^2 V_1 + \alpha\bar{\alpha}V_0 + V_1 + \alpha(\lambda\alpha + \bar{\alpha})V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 \neq 0.$$

Desta maneira, $T(2,3)$ não é subálgebra toroidal.

$$[t_2^2,\ \ t_2^4] = [m + V_1 + E_0,\ \ m + n + aV_0 + aE_0 + \bar{a}F_1 + aF_0 + aG] =$$

$$E_0 + \bar{a}V_1 + aF_0 + aE_1 + F_1 + aV_1 + \bar{a}E_0 + aE_1 + aF_0 + \bar{a}F_1 + aG \neq 0$$

Temos assim que $T(2,4)$ não é subálgebra toroidal.

$$[t_2^2,\ \ t_2^5] = [m + V_1 + E_0,\ \ m + aV_0 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG] =$$

$$aV_1 + aV_0 + aE_1 + \bar{a}V_1 + aE_0 + aE_1 + aF_0 + aF_1 + aG \neq 0$$

Isso garante que $T(2,5)$ não é subálgebra toroidal.

$$[t_2^2,\ \ t_2^6] = [m + V_1 + E_0,\ \ m + (b + \bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG] =$$

$$(b + \bar{a})^2 E_0 + \bar{b}V_1 + aV_0 + aE_1 + (b + \bar{a})^2 F_1 + bV_1 + \bar{b}E_0 + aE_1 + aF_0 + V_1 + \bar{b}F_1 + aG = 0,$$

somente se $a = 0$

Desta forma,

$$T(2,6) = T_9 = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + V_1 + E_0,\ \ m + \bar{b}n + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1\rangle.$$

$$[t_2^2,\ \ t_2^7] = [m + V_1 + E_0,\ \ \alpha^2 t + m + n + V_0 + V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0 + (\alpha^2 + \bar{\alpha})F_1 + \bar{\alpha}F_0 + \bar{\alpha}G] =$$

$$E_0 + (\alpha^2 + \bar{\alpha})V_1 + \bar{\alpha}V_0 + \bar{\alpha}E_1 + \alpha^2 V_1 + F_1 + \alpha\bar{\alpha}V_0 + V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_0 + \bar{\alpha}E_1 + \bar{\alpha}F_0 + V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + (\alpha^2\bar{\alpha}F_1 + \bar{\alpha}G \neq 0.$$

Logo, $T(2,7)$ não é subálgebra toroidal.

$$[t_2^2,\ \ t_2^8] = [m + V_1 + E_0,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + F_1] = E_0 + V_1 + V_1 + F_1 + E_0 + F_1 = 0.$$

Sendo assim,

$$T(2,8) = T_{10} = \langle t + m + \xi^{-1}V_0 + V_1,\ \ m + V_1 + E_0,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + F_1\rangle.$$

$$[t_2^2,\ \ t_2^9] = [m + V_1 + E_0,\ \ t + \xi^{-1}V_0 + E_0] = V_1 + V_1 = 0.$$

Desta forma,

$$T(2,9) = T = \langle t + m + \xi^{-1}V_0 + V_1,\ \ m + V_1 + E_0,\ \ t + \xi^{-1}V_0 + E_0\rangle,$$

que claramente não é uma subálgebra de dimensão 3. Para t_2^{10}, temos que ter $b \neq 0, 1$ assim,

$$[t_2^2,\ \ t_2^{10}] = [m + V_1 + E_0,\ \ t + bV_0 + bE_0 + \bar{b}F_1 + \bar{b}F_0 + \bar{b}G] = .$$
$$\bar{b}V_1 + \bar{b}V_0 + \bar{b}E_1 + V_1 + bV_1 + \bar{b}E_0 + \bar{b}E_1 + \bar{b}F_0 + \bar{b}F_1 + \bar{b}G \neq 0$$

Logo, $T(2,10)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^2,\ t_2^{11}] = [m + V_1 + E_0,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + (1 + c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G] = .$

$E_0 + c\xi V_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)V_0 + V(c^2\xi^3 + c\xi^2)E_1 + V_1 + F_1 + (1 + c\xi)V_1 + c\xi E_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)E_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G \neq 0$ Desta maneira, $T(2,11)$ não é subálgebra toroidal.

$$[t_2^2,\ t_2^{12}] = [m + V_1 + E_0,\ \ t + \lambda^2 n + E_0 + \lambda F_0 + \lambda G] =$$

$$\lambda^2 E_0 + \lambda V_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 F_1 + V_1 + \lambda E_1 + \lambda F_0 + \lambda G,$$

logo $[t_2^2,\ t_2^{12}] = 0$ se $\lambda = 0$ e nesse caso teríamos

$$T(2,12) = T = \langle t + m + V_1,\ \ m + V_1 + E_0,\ \ t + E_0 \rangle,$$

que não é uma subálgebra de dimensão 3.

$$[t_2^2,\ t_2^{13}] = [m + V_1 + E_0,\ \ t\bar{\lambda}^2 n + F_1 + \lambda F_0 + \lambda G] =$$

$$\bar{\lambda}^2 E_0 + V_1 + \lambda V_0 + \lambda E_1 + V_1 + \bar{\lambda}^2 F_1 + E_0 + \lambda E_1 + \lambda F_0 + F_1 + \lambda G,$$

e teremos $[t_2^2,\ t_2^{13}] = 0$ quando $\lambda = 0$, desta maneira,

$$T(2,13) = T_{11} = \langle t + m + V_1,\ \ m + V_1 + E_0,\ \ t + n + F_1 \rangle.$$

$$[t_2^2,\ t_2^{13}] = [m + V_1 + E_0,\ \ \bar{\lambda} t + E_1 + E_0] = \lambda V_1 + V_0 + E_1 \neq 0$$

Portanto, $T(2,14)$ não é uma subálgebra toroidal. $[t_2^3,\ t_2^4] =$

$[\alpha^2 t + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 m + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})V_0 + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0,\ \ m + n + aV_0 + V_1 + aE_0 + \bar{a}F_1 + aF_0 + aG] =$

$$(\alpha^2 a + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 a + \alpha\bar{\alpha})V_0 + (\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})\bar{a} + \alpha\bar{\alpha}a + \alpha^2 + 1)V_1 +$$

$$(\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})a + \alpha\bar{\alpha}a)E_1 + (\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})\bar{a})E_0 +$$

$$(\alpha^2\bar{a} + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(a\lambda\alpha + \bar{\alpha})a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha}a + \bar{a})F_1 + (\alpha^2 a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})a + \alpha\bar{\alpha}\bar{a})F_0 + (\alpha\bar{\alpha} + a)G$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} \alpha^2 a + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 a + \alpha\bar{\alpha} & = 0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})\bar{a} + \alpha\bar{\alpha}a + \alpha^2 + 1 & = 0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})a + \alpha\bar{\alpha}a & = 0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha + \bar{\alpha})^2 + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})\bar{a} & = 0 \\ \alpha^2\bar{a} + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(a\lambda\alpha + \bar{\alpha})a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha}a + \bar{a} & = 0 \\ \alpha^2 a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha + \bar{\alpha})a + \alpha\bar{\alpha}\bar{a} & = 0 \\ \alpha\bar{\alpha} + a & = 0 \end{cases}$$

Temos que $\lambda = 1$ e assim
$T(3,4) = T_{12} = \langle t + m + V_0 + V_1,\ \ \alpha^2 t + \bar{\alpha}^2 m + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}V_0 + \bar{\alpha}V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0,\ \ m + n + \alpha\bar{\alpha}V_0 + V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_0 + (\alpha^2 + \bar{\alpha})F_1 + \alpha\bar{\alpha}F_0 + \alpha\bar{\alpha}G \rangle.$

$[t_2^3,\ t_2^5] =$

$$[\alpha^2 t+\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 m+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_0+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0,\ \ m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG]=$$

$$(\alpha^2 a+\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 a+\alpha\bar{\alpha})V_0+(\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2\bar{a}+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a+\alpha\bar{\alpha}a+\alpha^2+1)V_1+$$
$$(\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 a+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a+\alpha\bar{\alpha}a)E_1+(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})\bar{a})E_0+$$
$$(\alpha^2\bar{a}+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a+\alpha\bar{\alpha}a+\bar{a})F_1+(\alpha^2 a+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a+\alpha\bar{\alpha}\bar{a})F_0+aG$$

Sendo assim o sistema,

$$\begin{cases} \alpha^2 a+\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 a+\alpha\bar{\alpha} &= 0\\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2\bar{a}+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a+\alpha\bar{\alpha}a+\alpha^2+1 &= 0\\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 a+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a+\alpha\bar{\alpha}a &= 0\\ \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})\bar{a} &= 0\\ \alpha^2\bar{a}+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a+\alpha\bar{\alpha}a+\bar{a} &= 0\\ \alpha^2 a+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a+\alpha\bar{\alpha}\bar{a} &= 0\\ a &= 0 \end{cases}$$

Não tem solução. Portanto $T(3,5)$ não é subálgebra toroidal. $[t_2^3,\ t_2^7]=$

$$[\alpha^2 t+\bar{\alpha}^2 m+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}V_0+\bar{\alpha}V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0,\ \ \beta^2 t+m+n+V_0+V_1+\beta\bar{\beta}E_1+E_0+(\beta^2+\bar{\beta})F_1+\bar{\beta}F_0+\bar{\beta}G]=$$

$$(\alpha^2+\bar{\alpha}^2\bar{\beta}+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\beta^2+\bar{\alpha}\beta\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha})V_0+(\alpha^2+\bar{\alpha}^2\beta^2+\bar{\alpha}^2\bar{\beta}+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\beta\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta^2+\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}+1)V_1+$$
$$(\alpha^2\bar{\beta}+\bar{\alpha}\bar{\beta}+\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta})E_1+(\alpha^2+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta^2+\bar{\alpha}\bar{\beta})E_0+$$
$$(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\bar{\beta}+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\bar{\beta}+\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta^2+\bar{\alpha}\bar{\beta}+\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}+\beta^2+\bar{\beta})F_1+(\alpha^2\bar{\beta}+\bar{\alpha}\bar{\beta}+\alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}\beta^2+\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta})F_0+(\alpha\bar{\alpha}+\bar{\beta})G$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} \alpha^2+\bar{\alpha}^2\bar{\beta}+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\beta^2+\bar{\alpha}\beta\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha} &= 0\\ \alpha^2+\bar{\alpha}^2\beta^2+\bar{\alpha}^2\bar{\beta}+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\beta\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta^2+\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}+1 &= 0\\ \alpha^2\bar{\beta}+\bar{\alpha}\bar{\beta}+\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta} &= 0\\ \alpha^2+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta^2+\bar{\alpha}\bar{\beta} &= 0\\ \alpha^2\beta^2+\alpha^2\bar{\beta}+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\bar{\beta}+\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta^2+\bar{\alpha}\bar{\beta}+\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}+\beta^2+\bar{\beta} &= 0\\ \alpha^2\bar{\beta}+\bar{\alpha}\bar{\beta}+\alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}\beta^2+\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta} &= 0\\ \alpha\bar{\alpha}+\bar{\beta} &= 0 \end{cases}$$

concluímos que $\alpha=0$, o que não pode ocorrer. Logo $T(3,7)$ não é subálgebra toroidal. $[t_2^3,\ t_2^8]=$ $[\alpha^2 t+\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 m+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_0+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0,\ \ t+n+\lambda V_0+F_1]=$ $(\alpha^2\lambda+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}))V_0+(\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})+\alpha\bar{\alpha}\lambda)V_1+(\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}))E_0+(\alpha^2+$

$\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})+1)F_1$

$$\begin{cases} \alpha^2\lambda+\dfrac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}) & =0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})+\alpha\bar{\alpha}\lambda & =0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}) & =0 \\ \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})+1 & =0 \\ \alpha\bar{\alpha} & =0 \end{cases}$$

Assim $\alpha=0$ ou $\alpha=1$, o que não pode ocorrer. Desta forma, $T(3,8)$ não é subálgebra toroidal. $[t_2^3,\ t_2^9]=$

$$[\alpha^2t+\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2m+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_0+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0,\ \ t+\lambda V_0+E_0]=$$

$$(\alpha^2\lambda+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}))V_0+\alpha\bar{\alpha}V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1.$$

Logo, $\alpha=0$ ou $\alpha=1$, o que não pode ocorrer. Portanto, $T(3,9)$ não é subálgebra toroidal. $[t_2^3,\ t_2^{10}]=$

$$[\alpha^2t+\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2m+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_0+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0,\ \ t+bV_0+bE_0+\bar{b}F_1+\bar{b}F_0+\bar{b}G]=$$

$$(\alpha^2b+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})\bar{b}+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}))V_0+(\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2\bar{b}+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})b+\alpha\bar{\alpha}b)V_1+$$

$$\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2\bar{b}+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})\bar{b}+\alpha\bar{\alpha}b)E_1+(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})\bar{b}+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})\bar{b})E_0+(\alpha^2\bar{b}+\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})\bar{b}+\alpha\bar{\alpha}\bar{b}+\bar{b})F_1$$

$$+(\alpha^2\bar{b}+\bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})\bar{b}+\alpha\bar{\alpha}\bar{b})F_0+\bar{b}G.$$

Logo $b=1$, o que é um absurdo. Desta forma, $T(3,10)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^4,\ t_2^5]=$

$$[m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ m+bV_0+V_1+\bar{b}E_0+bF_1+bF_0+bG]=$$

$(a+b)V_0+(a+b)E_0+(a+b)F_1+(a+b)F_0$, para $[t_2^4,\ t_2^5]=0$ logo temos $a=b$, portanto,

$T(4,5)=T_{13}=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG\rangle$.

$[t_2^4,\ t_2^6]=$

$$[m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ m+(b+\bar{a}_1)^2n+a_1V_0+V_1+bE_0+\bar{b}F_1+a_1F_0+a_1G]=$$

$(a_1+a)V_0+(\bar{b}+b+a+\bar{a})V_1+((b+\bar{a}_1)^2+1+aa_1+\bar{b}+\bar{a}+aa_1)E_0+(1+aa_1+(b+\bar{a}_1)^2+a\bar{b}+\bar{a}b+aa_1)F_1+(a+a_1)F_0+(aa_1+\bar{a}a_1+a\bar{b}+ab)G$, para $[t_2^4,\ t_2^6]=0$ logo temos logo $a=a_1=b$ ou $a=a_1$ e $b=\bar{a}$.

$$\begin{cases} a_1+a & =0 \\ \bar{b}+b+a+\bar{a} & =0 \\ (b+\bar{a}_1)^2+1+aa_1+\bar{b}+\bar{a}+aa_1 & =0 \\ 1+aa_1+(b+\bar{a}_1)^2+a\bar{b}+\bar{a}b+aa_1 & =0 \\ a+a_1 & =0 \\ aa_1+\bar{a}a_1+a\bar{b}+ab & =0 \end{cases}$$

Resolvendo temos que $a_1=a=\bar{b}$ ou $a=a_1=b$.

$T(4,6)=T_{14}=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG\rangle$.
ou $T(4,6)=T_{15}=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG\rangle$.

$[t_2^4,\ t_2^7] = 0$

$[m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ \alpha^2 t+m+n+V_0+V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0+(\alpha^2+\bar{\alpha})F_1+\bar{\alpha}F_0+\bar{\alpha}G] =$
$((a+1)(\alpha+1))V_0 + ((a+1)(\alpha^2+\alpha)+\bar{\alpha})V_1 + a\alpha\bar{\alpha}E_1 + (\alpha^2+\alpha+a\bar{\alpha})E_0 + (\alpha^2+\bar{a}+a\alpha^2+a\alpha+a)F_1 + (\alpha^2+a\alpha+\bar{a})F_0 + (\alpha\bar{a}+\bar{\alpha}+a\alpha^2+a\alpha+a)G.$

$$\begin{cases} \alpha^2(a+1)(a+1) & = 0 \\ (a+1)(\alpha^2+\alpha)+\bar{\alpha} & = 0 \\ a\alpha\bar{\alpha} & = 0 \\ \alpha^2+\alpha+a\bar{\alpha} & = 0 \\ \alpha^2+\bar{a}+a\alpha^2+a\alpha+a & = 0 \\ \alpha^2+a\alpha+\bar{a} & = 0 \\ \alpha\bar{a}+\bar{\alpha}+a\alpha^2+a\alpha+a & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, se $a = 0$, então $\alpha = 1$. Se $a \neq 0$, então $\alpha = 0$ ou $\bar{\alpha} = 0$. Caso $\alpha = 0$, $a = 1$. Portanto o sistema não é satisfeito. Caso $\bar{\alpha} = 0$, $\alpha = 1$ e $a = 1$; mas para t_2^7 temos que ter $\alpha \neq 0, 1$; portanto, o sistema não tem solução para tais condições.
Logo, $T(4,7)$ não é subálgebra toroidal. $[t_2^4,\ t_2^8] = 0$

$$[m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ t+n+\xi^{-1}V_0+F_1] =$$

$(a)V_0 + (a\xi^{-1})E_0 + (a\xi^{-1})F_1 + (a)F_0 + (a)G.$

Assim $a = 0$.

$T(4,8) = T = \langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+n+V_1+F_1,\ \ t+n+\lambda V_0+F_1\rangle$, que não é uma subalgebra de dimensão 3.

$[t_2^4,\ t_2^9] = 0$

$$[m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ t+\xi^{-1}V_0+E_0] =$$

$(a)V_0 + (a\xi^{-1})E_0 + (a\xi^{-1})F_1 + (a)F_0 + (a)G$. Logo $a = 0$

$T(4,9) = T_{16} = \langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+n+V_1+F_1,\ \ t+\lambda V_0+E_0\rangle.$

$[t_2^4,\ t_2^{10}] = 0$

$$[m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ t+bV_0+bE_0+\bar{b}F_1+\bar{b}F_0+\bar{b}G] =$$

$(a+\bar{b}))V_0 + (a+\bar{b})E_0 + (\bar{a}+b)F_1 + (\bar{b}+a)F_0 + (\bar{b}+a)G$. Desta forma $a = \bar{b}$

$T(4,10) = T_{17} = \langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ t+\bar{a}V_0+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG\rangle.$

$[t_2^4,\ t_2^{11}] = 0$

$[m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G] =$
$(a+c^2\xi^3+c\xi^2)V_0 + (1+c\xi+ac^2\xi^3+ac\xi^2+a\xi^{-1})E_0 + (1+c\xi+ac^2\xi^3+ac\xi^2+a\xi^{-1})F_1 + (a+c^2\xi^3+c\xi^2)F_0 + (a+c^2\xi^3+c\xi^2)G.$

Logo $a = c^2\xi^3 + c\xi^2$

$T(4,11) = T_{18} = \langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+n+c^2\xi^3+c\xi^2 V_0+V_1+c^2\xi^3+c\xi^2 E_0+c^2\xi^3\bar{+}c\xi^2 F_1+c^2\xi^3+c\xi^2 F_0+c^2\xi^3+c\xi^2 G,\ \ t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G\rangle.$

$[t_2^4,\ t_2^{12}] = 0$

$$[m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ t+\lambda^2 n+E_0+\lambda F_0+\lambda G] =$$

$(\lambda+a)V_0+(\lambda^2+\lambda)E_0+(\lambda^2+\lambda)F_1+(\lambda+a)F_0+(a\lambda a+\lambda+a)G$. Logo $a=\lambda=0$. Assim, $T(4,12)=T_{19}=\langle t+m+V_1,\ \ m+n+V_1+F_1,\ \ t+E_0\rangle$.

$[t_2^4,\ \ t_2^{13}]=$

$$[m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ t+\bar{\lambda}^2n+F_1+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(\lambda+a)V_0+(\lambda+\lambda a)E_0+(\lambda^2+\lambda a)F_1+(\lambda+a)F_0+(\lambda+a)G$.

Portanto $a=\lambda$, onde $\lambda=0$ ou $\lambda=1$, assim, $T(4,13)=T=\langle t+m+V_1,\ \ m+n+V_1+F_1,\ \ t+n+F_1\rangle$, que claramente não é uma subálgebra de dimensão 3.
Ou
$T(4,13)=T_{20}=\langle t+m+V_0+V_1,\ \ m+n+V_0+V_1+E_0+F_0+G,\ \ t+F_1+F_0+G\rangle$.

$[t_2^4,\ \ t_2^{14}]=$

$$[m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ \bar{\lambda}t+E_1+E_0]=$$

$(\bar{\lambda}a+1)V_0+(\lambda+a)V_1+aE_1(a\lambda+\lambda+a)F_1+(a\bar{\lambda}+\bar{a})F_0+(a+1)G\neq 0$. Logo, $T(4,14)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^5,\ \ t_2^6]=0$

$$[m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG,\ \ m+(b+\bar{a_1})^2n+a_1V_0+V_1+bE_0+\bar{b}F_1+a_1F_0+a_1G]=$$

$(a_1+a)V_0+(\bar{b}+b+a+\bar{a})V_1+((b+\bar{a_1})^2+aa_1+\bar{b}+\bar{a}+aa_1)E_0+(1+aa_1+(b^2+a_1^2+a+b)F_1+(a+a_1)F_0+(a_1+a)G$, logo $a=a_1=b$ ou $a=a_1$ e $b=\bar{a}$.

$T(5,6)=T_{21}=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG,\ \ m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG\rangle$.
Ou
$T(5,6)=T_{22}=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG,\ \ m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG\rangle$.

$[t_2^5,\ \ t_2^7]=0$

$$[m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG,\ \ \alpha^2t+m+n+V_0+V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0+(\alpha^2+\bar{\alpha})F_1+\bar{\alpha}F_0+\bar{\alpha}G]=$$

$((a+1)(\alpha+1))V_0+(a\alpha^2+a\alpha+\bar{\alpha})V_1+\bar{a}\alpha\bar{\alpha}E_1+(\alpha^2+\alpha+a\bar{\alpha})E_0+(a\alpha^2+\bar{\alpha}+a\alpha+\alpha^2+1)F_1+(\alpha^2+a\alpha+\bar{a})F_0+(\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}+a\alpha^2+a\alpha+a)G$.

$$\begin{cases} \alpha^2(a+1)+(a+1) & =0\\ a\alpha^2+a\alpha+\bar{\alpha} & =0\\ \bar{a}\alpha\bar{\alpha} & =0\\ \alpha^2+\alpha+a\bar{\alpha} & =0\\ a\alpha^2+\bar{\alpha}+a\alpha+\alpha^2+1 & =0\\ \bar{\alpha}+a\alpha+a & =0\\ \bar{a}\bar{\alpha}+a\alpha^2+a & =0 \end{cases}$$

Portanto $\alpha=1$, o que não pode ocorrer para t_2^7. Logo $T(5,7)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^5,\ \ t_2^8]=0$

$$[m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG,\ \ t+n+\xi^{-1}V_0+F_1]=$$

$(a)V_0+(a\xi^{-1})E_0+(a\xi^{-1})F_1+(a)F_0+(a)G$.

Assim $a=0$, portanto,
$T(5,8)=T_{23}=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+V_1+E_0,\ \ t+n+\lambda V_0+F_1\rangle$.

$[t_2^5,\ \ t_2^9]=0$

$$[m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG,\ \ t + \xi^{-1}V_0 + E_0] =$$

$(a)V_0 + (a\xi^{-1})E_0 + (a\xi^{-1})F_1 + (a)F_0 + (a)G$. Logo $a = 0$, desta forma,
$T(5,9) = T = \langle t{+}m{+}\lambda V_0{+}V_1,\ \ m{+}V_1{+}E_0,\ \ t{+}\lambda V_0{+}E_0\rangle$, que não é uma subálgebra de dimensão 3.

$[t_2^5,\ \ t_2^{10}] = 0$

$$[m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG,\ \ t + bV_0 + bE_0 + \bar{b}F_1 + \bar{b}F_0 + \bar{b}G] =$$

$(a + \bar{b}))V_0 + (a + \bar{b})E_0 + (\bar{b} + a)F_1 + (\bar{b} + a)F_0 + (\bar{b} + a)G$. Desta forma $a = \bar{b}$, logo,

$T(5,10) = T_{24} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG,\ \ t + \bar{a}V_0 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG\rangle$.

$[t_2^5,\ \ t_2^{11}] = 0$

$$[m{+}aV_0{+}V_1{+}\bar{a}E_0{+}aF_1{+}aF_0{+}aG,\ \ t{+}n{+}\xi^{-1}V_0{+}(1{+}c\xi)E_0{+}c\xi F_1{+}(c^2\xi^3{+}c\xi^2)F_0{+}(c^2\xi^3{+}c\xi^2)G] =$$

$(a + c^2\xi^3 + c\xi^2)V_0 + (1 + c\xi + ac^2\xi^3 + ac\xi^2 + a\xi^{-1})E_0 + (1 + c\xi + ac^2\xi^3 + ac\xi^2 + a\xi^{-1})F_1 + (a + c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (a + c^2\xi^3 + c\xi^2)G$.

Logo $a = c^2\xi^3 + c\xi^2$, assim,
$T(5,11) = T_{25} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (c^2\xi^3 + c\xi^2)V_0 + V_1 + (c^2\xi^3 \bar{+} c\xi^2)E_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + (1 + c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G\rangle$.

$[t_2^5,\ \ t_2^{12}] = 0$

$$[m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG,\ \ t + \lambda^2 n + E_0 + \lambda F_0 + \lambda G] =$$

$(\lambda + a)V_0 + (\lambda^2 + \lambda a)E_0 + (\lambda^2 + \lambda a)F_1 + (\lambda + a)F_0 + (\lambda + a)G$. Logo $a = \lambda$, desta forma,
$T(5,12) = T_{26} = \langle t{+}m{+}\lambda V_0{+}V_1,\ \ m{+}\lambda V_0{+}V_1{+}\bar{\lambda}E_0{+}\lambda F_1{+}\lambda F_0{+}\lambda G,\ \ t{+}\lambda^2 n{+}E_0{+}\lambda F_0{+}\lambda G\rangle$.

$[t_2^5,\ \ t_2^{13}] = 0$

$$[m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG,\ \ t + \bar{\lambda}^2 n + F_1 + \lambda F_0 + \lambda G] =$$

$(\lambda + a)V_0 + (\bar{\lambda}^2 + 1 + \lambda a)E_0 + (\lambda^2 + 1 + \lambda a)F_1 + (\lambda + a)F_0 + (\lambda + a)G$.

Portanto $a = \lambda$ e assim,
$T(5,13) = T_{27} = \langle t{+}m{+}\lambda V_0{+}V_1,\ \ m{+}\lambda V_0{+}V_1{+}\bar{\lambda}E_0{+}\lambda F_1{+}\lambda F_0{+}\lambda G,\ \ t{+}\bar{\lambda}^2 n{+}F_1{+}\lambda F_0{+}\lambda G\rangle$.

$[t_2^5,\ \ t_2^{14}] =$

$$[m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG,\ \ \bar{\lambda}t + E_1 + E_0] =$$

$(\bar{\lambda}a + 1)V_0 + (\lambda + a)V_1 + E_1(a\bar{\lambda})F_1 + (a\lambda)F_0 + (a)G \neq 0$.
Logo $T(5,14)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^6,\ \ t_2^7] = 0$

$$[m{+}(b{+}\bar{a})^2 n{+}aV_0{+}V_1{+}bE_0{+}\bar{b}F_1{+}aF_0{+}aG,\ \ \alpha^2 t{+}m{+}n{+}V_0{+}V_1{+}\alpha\bar{\alpha}E_1{+}E_0{+}(\alpha^2{+}\bar{\alpha})F_1{+}\bar{\alpha}F_0{+}\bar{\alpha}G] =$$

$(\alpha^2(a + 1) + (a + 1))V_0 + (a\alpha(\bar{\alpha} + \bar{\alpha}))V_1 + b\alpha\bar{\alpha}E_1 + (b^2 + a^2 + a\alpha + \alpha^2 + \bar{\alpha} + \bar{b})E_0 + (b\alpha + \alpha + 1 + a\alpha^2)F_1 + (\alpha + \bar{b}\alpha\bar{\alpha} + a\alpha^2 + a)F_0 + (b^2\alpha\bar{\alpha} + \bar{a}^2\alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha} + a)G$.

Se $a = 1$, o sistema não é satisfeito. Se $\alpha = 1$, o sistema também não é satisfeito. Portanto, $T(6,7)$ não é subálgebra toroidal. $[t_2^6,\ \ t_2^8] = 0$

$$[m + (b + \bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + F_1] =$$

$(a)V_0 + (a\xi^{-1})E_0 + (a\xi^{-1})F_1 + (a)F_0 + (a)G$.

Assim $a = 0$, logo,
$T(6,8) = T_{28} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (\bar{b})^2 n + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1,\ \ t + n + \lambda V_0 + F_1\rangle$.

$[t_2^6,\ \ t_2^9] = 0$

$$[m + (b+\bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG,\ \ t + \xi^{-1}V_0 + E_0] =$$

$(a)V_0 + (a\xi^{-1})E_0 + (a\xi^{-1})F_1 + (a)F_0 + (a)G$. Logo $a = 0$, portanto,
$T(6,9) = T_{29} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (\bar{b})^2 n + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1,\ \ t + \lambda V_0 + E_0\rangle$.

$[t_2^6,\ \ t_2^{10}] = 0$

$$[m + (b+\bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG,\ \ t + b_1V_0 + b_1E_0 + \bar{b_1}F_1 + \bar{b_1}F_0 + \bar{b_1}G] =$$

$(a+\bar{b_1})V_0 + (a+\bar{b_1})E_0 + (\bar{b} + a + \bar{b_1} + b)F_1 + (\bar{b_1} + a)F_0 + (\bar{b_1} + a)G$. Desta forma $a = \bar{b_1}$, desta forma,
$T6,10 = T_{30} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (b+\bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG,\ \ t + \bar{a}V_0 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG\rangle$.

$[t_2^6,\ \ t_2^{11}] = 0$
$[m + (b+\bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + (1+c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G] = (a + c^2\xi^3 + c\xi^2)V_0 + (1 + c\xi + ac^2\xi^3 + ac\xi^2 + a\xi^{-1})E_0 + (1 + c\xi + ac^2\xi^3 + ac\xi^2 + a\xi^{-1})F_1 + (a + c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (a + c^2\xi^3 + c\xi^2)G$.

Logo $a = c^2\xi^3 + c\xi^2$, portanto,
$T(6,11) = T_{31} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (b + (c^2\xi^3 \bar{+} c\xi^2))^2 n + (c^2\xi^3 + c\xi^2)V_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + (1+c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G\rangle$.

$[t_2^6,\ \ t_2^{12}] = 0$

$$[m + (b+\bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG,\ \ t + \lambda^2 n + E_0 + \lambda F_0 + \lambda G] =$$

$(\lambda + a)V_0 + (\lambda^2 + \lambda a)E_0 + (\lambda^2 + \lambda a)F_1 + (\lambda + a)F_0 + (\lambda + a)G$. Logo $a = \lambda$, sendo assim,
$T6,12)T_{32} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (b + \bar{\lambda})^2 n + \lambda V_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + \lambda F_0 + \lambda G,\ \ t + \lambda^2 n + E_0 + \lambda F_0 + \lambda G\rangle$.

$[t_2^6,\ \ t_2^{13}] = 0$

$$[m + (b+\bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG,\ \ t + \bar{\lambda}^2 n + F_1 + \lambda F_0 + \lambda G] =$$

$(\lambda + a)V_0 + (\lambda + 1)V_1 + (\bar{\lambda}^2 + \lambda + \lambda a)E_0 + (\bar{\lambda}^2 + \lambda b + \lambda a + \bar{b})F_1 + (\lambda + a)F_0 + (\lambda + \lambda a)G$.

Portanto $a = \lambda = 1$, desta forma
$T(6,13) = T_{33} = \langle t + m + V_0 + V_1,\ \ m + (b)^2 n + V_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + F_0 + G,\ \ t + n + E_0 + F_0 + G\rangle$.

$[t_2^6,\ \ t_2^{14}] =$

$$[m + (b+\bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG,\ \ \bar{\lambda}t + E_1 + E_0] =$$

$(\bar{\lambda}a + 1)V_0 + (\bar{\lambda} + a + 1)V_1 + bE_1 + (a + \bar{b}\lambda)F_1 + (a\bar{\lambda} + \bar{b})F_0 + (b^2 + \bar{a}^2 + a)G \neq 0$.
Logo, $T(6,14)$ não é subálgebra toroidal.

Para t_2^7 temos que $\alpha \neq 0, 1$.
$[t_2^7,\ \ t_2^8] = 0$

$$[\alpha^2 t + m + n + V_0 + V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0 + (\alpha^2 + \bar{\alpha})F_1 + \bar{\alpha}F_0 + \bar{\alpha}G,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + F_1] =$$

$(\xi^{-1}\alpha^2+1)V_0+\xi^{-1}\alpha\bar{\alpha}V_1+(\bar{\alpha}\xi^{-1})E_0+(\bar{\alpha}\xi^{-1}+\bar{\alpha})F_1+(\bar{\alpha}^2)F_0+(\bar{\alpha}^2)G$.

Assim $\bar{\alpha}^2=0$, o que implica que $\alpha=1=\xi^{-1}$, mas $\alpha\neq 1$.

Portanto, $T(7,8)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^7,\ t_2^9]=0$

$$[\alpha^2t+m+n+V_0+V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0+(\alpha^2+\bar{\alpha})F_1+\bar{\alpha}F_0+\bar{\alpha}G,\ \ t+\xi^{-1}V_0+E_0]=$$

$(1+\xi^{-1}\alpha^2)V_0+\xi^{-1}\alpha\bar{\alpha}V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+(\xi^{-1}\bar{\alpha})E_0+(\xi^{-1}\bar{\alpha})F_1+(\bar{\alpha})F_0+(\bar{\alpha})G$. Logo $\bar{\alpha}=0$ e $\xi^{-1}=1$, mas $\alpha\neq 1$.

Desta forma, $T(7,9)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^7,\ t_2^{10}]=0$

$$[\alpha^2t+m+n+V_0+V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0+(\alpha^2+\bar{\alpha})F_1+\bar{\alpha}F_0+\bar{\alpha}G,\ \ t+bV_0+bE_0+\bar{b}F_1+\bar{b}F_0+\bar{b}G]=$$

$(1+b\alpha^2+\bar{b})V_0+b\alpha\bar{\alpha}V_1+b\alpha\bar{\alpha}+(b\bar{\alpha})E_0+(\bar{\alpha}+\bar{b}\alpha\bar{\alpha})F_1+(\bar{\alpha}+\bar{b}\alpha\bar{\alpha}+\bar{b}\alpha^2+\bar{b})F_0+(\bar{\alpha}+\bar{b}\alpha^2+\bar{b}\bar{\alpha}+\bar{b})G$.

Desta forma $\alpha=1$, o que não pode ocorrer.

Logo, $T(7,10)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^7,\ t_2^{12}]=0$

$$[\alpha^2t+m+n+V_0+V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0+(\alpha^2+\bar{\alpha})F_1+\bar{\alpha}F_0+\bar{\alpha}G,\ \ t+\lambda^2n+E_0+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(\lambda+1)V_0+\alpha\bar{\alpha}E_1+(\lambda^2+\lambda)E_0+(\lambda^2+\lambda+\lambda\alpha\bar{\alpha})F_1+(\bar{\alpha}+\lambda\alpha^2+\lambda)F_0+(\lambda^2\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}+\lambda\alpha^2+\lambda\bar{\alpha}+\lambda)G$.

Logo $\lambda=1$ e $\alpha=1$, o que não pode ocorrer.

Portanto, $T(7,12)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^7,\ t_2^{13}]=0$

$$[\alpha^2t+m+n+V_0+V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0+(\alpha^2+\bar{\alpha})F_1+\bar{\alpha}F_0+\bar{\alpha}G,\ \ t+\bar{\lambda}^2n+F_1+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(\lambda+1)V_0+(\bar{\lambda}^2+\bar{\lambda})E_0+(\bar{\lambda}^2+\bar{\lambda}+\lambda\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha})F_1+(\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}+\lambda\alpha^2+\lambda)F_0+(\bar{\lambda}\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}+\lambda\alpha^2+\lambda\bar{\alpha}+\lambda)G$.

Portanto $\lambda=1$ e $\alpha=1$, o que não pode ocorrer.

Logo, $T(7,13)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^7,\ t_2^{14}]=$

$$[\alpha^2t+m+n+V_0+V_1+\alpha\bar{\alpha}E_1+E_0+(\alpha^2+\bar{\alpha})F_1+\bar{\alpha}F_0+\bar{\alpha}G,\ \ \bar{\lambda}t+E_1+E_0]=$$

$(\lambda+1)V_0+(\lambda)V_1+(1+\alpha\bar{\alpha})E_1(\bar{\alpha})F_1+(\alpha^2+\bar{\alpha}+\lambda\bar{\alpha})F_0+(\alpha)G\neq 0$.

Desta maneira, $T(7,14)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^8,\ t_2^9]=0$

$$[t+n+\xi^{-1}V_0+F_1,\ \ t+\xi_1^{-1}V_0+E_0]=$$

$(\xi^{-1}+\xi_1^{-1})V_0$ Logo e $\xi^{-1}=\xi_1^{-1}$. Assim,

$T(8,9)=T_{34}=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ t+n+\lambda V_0+F_1,\ \ t+\lambda V_0+E_0\rangle$.

$[t_2^8,\ t_2^{10}]=0$

$$[t+n+\xi^{-1}V_0+F_1,\ \ t+bV_0+bE_0+\bar{b}F_1+\bar{b}F_0+\bar{b}G]=$$

$(b+\xi^{-1})V_0+(\xi^{-1}\bar{b})E_0+(\xi^{-1}\bar{b})F_1+(\bar{b})F_0+(\bar{b})G$. Desta forma $\xi^{-1}=b=1$, o que não pode ocorrer pois $b\neq 0,1$.

Portanto, $T(8,10)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^8,\ t_2^{11}]=0$

$$[t+n+\xi_1^{-1}V_0+F_1,\ \ t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G]=$$

$(\xi_1^{-1}+\xi^{-1})V_0+(\xi_1^{-1}(c\xi^3+c\xi^2))E_0+((c^2\xi^3+c\xi^2)\xi_1^{-1}))F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G$.

$$\begin{cases} (\xi_1^{-1} + \xi^{-1} & = 0 \\ \xi_1^{-1}(c\xi^3 + c\xi^2) & = 0 \\ (c^2\xi^3 + c\xi^2)\xi_1^{-1}) & = 0 \\ c^2\xi^3 + c\xi^2 & = 0 \\ c^2\xi^3 + c\xi^2 & = 0 \end{cases}$$

Assim, $\xi^2(c^2\xi + c) = 0$, desta forma, $\xi = 0$ ou $c\xi = 1$, que não fornece uma subálgebra.
Portanto, $T(8, 11)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^8,\ \ t_2^{12}] = 0$

$$[t + n + \xi^{-1}V_0 + F_1,\ \ t + \lambda^2 n + E_0 + \lambda F_0 + \lambda G] =$$

$(\xi^{-1})V_0 + (\lambda\xi^{-1})E_0 + (\lambda\xi^{-1})F_1 + (\lambda)F_0 + (\lambda)G$. Logo $\lambda = 0 = \xi^{-1}$.
$T(8, 12) = T_{35} = \langle t + m + V_1,\ \ t + n + F_1,\ \ t + E_0\rangle$.

$[t_2^8,\ \ t_2^{13}] = 0$

$$[t + n + \xi^{-1}V_0 + F_1,\ \ t + \bar{\lambda}^2 n + F_1 + \lambda F_0 + \lambda G] =$$

$(\xi^{-1})V_0 + (\lambda\xi^{-1})E_0 + (\lambda\xi^{-1})F_1 + (\lambda)F_0 + (\lambda)G$.

Portanto $\lambda = 0 = \xi^{-1}$.

$T(8, 13) = T = \langle t + m + V_1,\ \ \ t + n + F_1,\ \ \ t + n + F_1\rangle$, que claramente não é uma subálgebra de dimensão 3.

$[t_2^8,\ \ t_2^{14}] = 0$

$$[t + n + \xi^{-1}V_0 + F_1,\ \ \bar{\lambda}t + E_1 + E_0] =$$

$(\bar{\lambda}\xi^{-1})V_0 + (\xi^{-1})V_1(\lambda)F_1 + F_0 + G \neq 0$.
Logo, $T(8, 14)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^9,\ \ t_2^{10}] = 0$

$$[t + \xi^{-1}V_0 + E_0,\ \ t + bV_0 + bE_0 + \bar{b}F_1 + \bar{b}F_0 + \bar{b}G] =$$

$(b+\xi^{-1})V_0 + (\xi^{-1}\bar{b})E_0 + (\xi^{-1}\bar{b})F_1 + (\bar{b})F_0 + (\bar{b})G$. Desta forma $\xi^{-1} = b = 1$, o que não pode ocorrer pois $b \neq 1$.
Portanto, $T(9, 10)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^9,\ \ t_2^{11}] = 0$

$$[t + \xi^{-1}V_0 + E_0,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + (1 + c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G] =$$

$(\xi_1^{-1} + \xi_1^{-1})V_0 + (\xi_1^{-1}(c\xi^3 + c\xi^2))E_0 + ((c^2\xi^3 + c\xi^2)\xi_1^{-1}))F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G$.

$$\begin{cases} (\xi_1^{-1} + \xi_1^{-1} & = 0 \\ \xi_1^{-1}(c\xi^3 + c\xi^2) & = 0 \\ (c^2\xi^3 + c\xi^2)\xi_1^{-1}) & = 0 \\ c^2\xi^3 + c\xi^2 & = 0 \\ c^2\xi^3 + c\xi^2 & = 0 \end{cases}$$

Assim, $\xi_1 = \xi$ e $c^2\xi^3 + c\xi^2 = 0$, logo

$$T(9, 11) = T_{36} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ t + \lambda V_0 + E_0,\ \ t + n + \lambda V_0 + F_1\rangle.$$

$[t_2^9,\ \ t_2^{12}] = 0$

$$[t+\xi^{-1}V_0+E_0,\ \ t+\lambda^2n+E_0+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(\xi^{-1})V_0+(\lambda\xi^{-1})E_0+(\lambda\xi^{-1})F_1+(\lambda)F_0+(\lambda)G$. Logo $\lambda=0=\xi^{-1}$.

$T(9,12)=T=\langle t+m+V_1,\ \ t+E_0,\ \ t+E_0\rangle$ que claramente não é uma subálgebra de dimensão 3.

$[t_2^9,\ \ t_2^{13}]=0$

$$[t+\xi^{-1}V_0+E_0,\ \ t+\bar\lambda^2n+F_1+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(\xi^{-1})V_0+(\lambda\xi^{-1})E_0+(\lambda\xi^{-1})F_1+(\lambda)F_0+(\lambda)G$.

Portanto $\lambda=0=\xi^{-1}$.

$T(9,13)=T_{37}=\langle t+m+V_1,\ \ t+E_0,\ \ t+n+F_1\rangle$.

$[t_2^9,\ \ t_2^{14}]=0$

$$[t+\xi^{-1}V_0+E_0,\ \ \bar\lambda t+E_1+E_0]=$$

$(\bar\lambda\xi^{-1})V_0+(\xi^{-1})V_1(\lambda)E_1\neq 0$.

Desta forma, $T(9,14)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^{10},\ \ t_2^{12}]=0$

$$[t+bV_0+bE_0+\bar bF_1+\bar bF_0+\bar bG,\ \ t+\lambda^2n+E_0+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(b)V_0+(\lambda b)E_0+(\lambda b)F_1+(\lambda+\bar b)F_0+(\lambda+\bar b)G$. Logo $\lambda=0=\bar b=1$, o que não pode ocorrer, pois $b\neq 0$.

Portanto, $T(10,12)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^{10},\ \ t_2^{13}]=0$

$$[t+bV_0+bE_0+\bar bF_1+\bar bF_0+\bar bG,\ \ t+\bar\lambda^2n+F_1+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(b)V_0+(\lambda b)E_0+(\lambda b)F_1+(\lambda+\bar b)F_0+(\lambda+\bar b)G$.

Portanto $\lambda=\bar b=1$, o que não pode ocorrer, pois $b\neq 0$.

Logo, $T(10,13)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^{10},\ \ t_2^{14}]=0$

$$[t+bV_0+bE_0+\bar bF_1+\bar bF_0+\bar bG,\ \ \bar\lambda t+E_1+E_0]=$$

$(\bar\lambda b)V_0+(b)V_1(b)E_1+(\bar b\bar\lambda)F_1+(\bar b+\bar b\bar\lambda)F_0+\bar bG\neq 0$.

Portanto, $T(10,14)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^{11},\ \ t_2^{12}]=0$

$$[t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G,\ \ t+\lambda^2n+E_0+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(\xi^{-1})V_0+(\lambda\xi^{-1})E_0+(\lambda\xi^{-1})F_1+(\lambda+c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(\lambda+c^2\xi^3+c\xi^2)G$. Logo $\lambda=c^2\xi^3+c\xi^2$ e $\xi^{-1}=0$, o que não pode ocorrer.

Portanto, $T(11,12)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^{11},\ \ t_2^{13}]=0$

$$[t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G,\ \ t+\bar\lambda^2n+F_1+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(\xi^{-1})V_0+(\lambda\xi^{-1})E_0+(\lambda\xi^{-1})F_1+(\lambda+c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(\lambda+c^2\xi^3+c\xi^2)G$.

Portanto $\lambda=c^2\xi^3+c\xi^2$ e $\xi^{-1}=0$ o que não pode ocorrer.

Assim, $T(11,13)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^{11},\ \ t_2^{14}]=0$

$$[t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G,\ \ \bar\lambda t+E_1+E_0]=$$

$(\bar{\lambda}\xi^{-1})V_0+(\xi^{-1})V_1(1+c\xi)E_1+(c^2\xi^3+c\xi^2+\lambda c\xi)F_1+(\bar{\lambda}(c^2\xi^3+c\xi^2)+c\xi)F_0+(1+c^2\xi^3+c\xi^2)G\neq 0$.
Portanto, $T(11,14)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^{12},\ \ t_2^{13}]=0$

$$[t+\lambda^2 n+E_0+\lambda F_0+\lambda G,\ \ t+\bar{\lambda}^2 n+F_1+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$F_1+\lambda F_0+F_1+\lambda G+\lambda F_0+\lambda G=0$. Portanto,
$T(12,13)=T_{38}=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ t+\lambda^2 n+E_0+\lambda F_0+\lambda G,\ \ t+\bar{\lambda}^2 n+F_1+\lambda F_0+\lambda G\rangle$.

$[t_2^{12},\ \ t_2^{14}]=0$

$$[t+\lambda^2 n+E_0+\lambda F_0+\lambda G,\ \ \bar{\lambda}t+E_1+E_0]=$$

$\lambda^2 G+E_1+\bar{\lambda}\lambda F_0+\lambda F_1+\lambda G\neq 0$.
Portanto, $T(12,14)$ não é subálgebra toroidal.

$[t_2^{13},\ \ t_2^{14}]=0$

$$[t+\bar{\lambda}^2 n+F_1+\lambda F_0+\lambda G,\ \ \bar{\lambda}t+E_1+E_0]=$$

$\bar{\lambda}^2 G+\bar{\lambda}\lambda F_0+F_0+\lambda G$ Portanto $\lambda^2+\lambda+1=0$, assim λ é uma raiz cúbica da unidade, logo
$T(13,14)=T_{39}=\langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ t+\bar{\lambda}^2 n+F_1+\lambda F_0+\lambda G,\ \ \bar{\lambda}t+E_1+E_0\rangle$.
□

Observação 4.7. *No restante dos casos ainda não temos respostas, discutiremos isso na Seção 4.4.*

Lema 4.8. *Entre as subálgebras toroidais $T(i,j)$, as seguintes subalgebras são conjugadas:*

a) $T(1,2)=T_1\simeq T(1,8)=T_3\simeq T(1,9)=T_4\simeq T(2,8)=T_{10}\simeq T(4,9)=T_{16}$.

b) $T(1,12)=T_7\simeq T(1,13)=T_8$.

c) $T(4,12)=T_{19}\simeq T(8,12)=T_{35}\simeq T(9,13)=T_{37}$.

Demonstração: *a)* Temos que

$$T(1,2)=\langle t_3=t+m+\lambda V_0+V_1,\ t_2^1=n+E_0+F_1,\ t_2^2=m+V_1+E_0\rangle.$$

$$T(1,8)=T_3=\langle t_3=t+m+\lambda V_0+V_1,\ t_2^1=n+E_0+F_1,\ t_2^8=t+n+\lambda V_0+F_1\rangle.$$

$$T(1,10)=T_5=\langle t_3=t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ t_2^1=n+E_0+F_1,\ \ t_2^9=t+\lambda V_0+E_0\rangle$$

$$T(2,8)=T_{10}=\langle t_3=t+m+\xi^{-1}V_0+V_1,\ \ t_2^2=m+V_1+E_0,\ \ t_2^8=t+n+\xi^{-1}V_0+F_1\rangle.$$

$T(4,9)=T_{16}=\langle t_3=t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ t_2^4=m+n+V_1+F_1,\ \ t_2^9=t+\lambda V_0+E_0\rangle$. Notemos que

$$t_2^8=t_3+t_2^1+t_2^2,$$

$$t_2^9=t_3+t_2^2,$$

$$t_2^8 t+t_2^1+t_2^2,$$

$$t_2^4=t_2^1+t_2^2$$

e

$$t_2^9=t_3+t_2^2$$

com isso podemos escrever os elementos das bases de $T(1,8)$, $T(1,9)$, $T(2,8)$, $T(4,9)$ como combinação linear dos elementos da base de $T(1,2)$.

b) Agora

$$T(1,12)=\langle t_3=t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ t_2^1=n+E_0+F_1,\ \ t_2^{12}t+\lambda^2 n+E_0+\lambda F_0+\lambda G\rangle.$$

$$T(1,13) = T_8 = \langle t_3 = t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ t_2^1 = n + E_0 + F_1,\ \ t_2^{13} = t + \bar{\lambda}^2 n + F_1 + \lambda F_0 + \lambda G\rangle,$$

e

$$t_2^{13} = t_2^1 + t_2^{12}$$

c) Aqui temos $T(4,12) = \langle t_3 t + m + V_1,\ \ t_2^4 = m + n + V_1 + F_1,\ \ t_2^{12} = t + E_0\rangle$, $T(8,12) = \langle t_3 = t+m+V_1,\ \ t_2^8 = t+n+F_1,\ \ t_2^{12} = t+E_0\rangle$ e $T(9,13) = \langle t_3 = t+m+V_1,\ \ t_2^9 = t+E_0,\ \ t_2^{13} = t+n+F_1\rangle$. Notemos que

$$t_2^8 = t_3 + t_2^{12}$$

e

$$t_2^{13} = t_3 + t_2^{12}.$$

□

Observação 4.9. *Conseguimos determinar alguns casos que as subálgebras são conjugadas. Para os demais casos ainda estamos estudando.*

Proposição 4.10. *A álgebra de Lie H_2 possui as seguintes subálgebras toroidais de dimensão 3.*

Notemos que cada uma das subálgebras que encontramos não são simplesmente subálgebras, mas sim, famílias de subálgebra que dependem de 1, 2 ou 3 parâmetros.
As seguintes subálgebras são 3-dimensional toroidal em H_2 :

$$T_1 = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ n + E_0 + F_1,\ m + V_1 + E_0\rangle.$$

$$T_2 = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ n + E_0 + F_1, m + (b + \bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG\rangle.$$

$$T_3 = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ n + E_0 + F_1,\ \ t + bV_0 + bE_0 + \bar{b}F_1 + \bar{b}F_0 + \bar{b}G\rangle$$

$$T_4 = \langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ n+E_0+F_1,\ \ t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G\rangle$$

$$T_5 = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ n + E_0 + F_1,\ \ t + \lambda^2 n + E_0 + \lambda F_0 + \lambda G\rangle.$$

$$T_6 = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + V_1 + E_0,\ \ m + \bar{b}n + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1\rangle.$$

$$T_7 = \langle t + m + V_1,\ \ m + V_1 + E_0,\ \ t + n + F_1\rangle.$$

$T_8 = \langle t + m + V_0 + V_1,\ \ \alpha^2 t + \bar{\alpha}^2 m + \dfrac{\alpha}{\bar{\alpha}} V_0 + \bar{\alpha}V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0,\ \ m + n + \alpha\bar{\alpha}V_0 + V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_0 + (\alpha^2 + \bar{\alpha})F_1 + \alpha\bar{\alpha}F_0 + \alpha\bar{\alpha}G\rangle$.

$T_9 = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + n + aV_0 + V_1 + aE_0 + \bar{a}F_1 + aF_0 + aG,\ \ m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG\rangle$.

$T_{10} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + n + aV_0 + V_1 + aE_0 + \bar{a}F_1 + aF_0 + aG,\ \ m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG\rangle$.

$T_{11} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + n + aV_0 + V_1 + aE_0 + \bar{a}F_1 + aF_0 + aG,\ \ m + n + aV_0 + V_1 + aE_0 + \bar{a}F_1 + aF_0 + aG\rangle.$

$T_{12} = \langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+n+aV_0+V_1+aE_0+\bar{a}F_1+aF_0+aG,\ \ t+\bar{a}V_0+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG\rangle.$

$T_{13} = \langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ \mathcal{M}+\backslash+\rfloor^{\in}\xi^{\ni}+\rfloor\xi^{\in}\mathcal{V}_{\prime}+\mathcal{V}_{\infty}+\rfloor^{\in}\xi^{\ni}+\rfloor\xi^{\in}\mathcal{E}_{\prime}+\rfloor^{\in}\xi^{\ni}\bar{+}\rfloor\xi^{\in}\mathcal{F}_{\infty}+\rfloor^{\in}\xi^{\ni}+\rfloor\xi^{\in}\mathcal{F}_{\prime}+\rfloor^{\in}\xi^{\ni}+\rfloor\xi^{\in}\mathcal{G},\ \ \sqcup+\backslash+\xi^{-\infty}\mathcal{V}_{\prime}+(\infty+\rfloor\xi)\mathcal{E}_{\prime}+\rfloor\xi\mathcal{F}_{\infty}+(\rfloor^{\in}\xi^{\ni}+\rfloor\xi^{\in})\mathcal{F}_{\prime}+(\rfloor^{\in}\xi^{\ni}+\rfloor\xi^{\in})\mathcal{G}\rangle.$

$T_{14} = \langle t + m + V_1,\ \ m + n + V_1 + F_1,\ \ t + E_0\rangle.$

$T_{15} = \langle t + m + V_0 + V_1,\ \ m + n + V_0 + V_1 + E_0 + F_0 + G,\ \ t + F_1 + F_0 + G\rangle.$

$T_{16} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + aV_0 + V_1 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG,\ \ m + n + aV_0 + V_1 + aE_0 + \bar{a}F_1 + aF_0 + aG\rangle.$

$T_{17} = \langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG,\ \ m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG\rangle.$

$T_{18} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + V_1 + E_0,\ \ t + n + \lambda V_0 + F_1\rangle.$

$T_{19} = \langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+aV_0+V_1+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG,\ \ t+\bar{a}V_0+\bar{a}E_0+aF_1+aF_0+aG\rangle.$

$T_{20} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (c^2\xi^3 + c\xi^2)V_0 + V_1 + (c^2\xi^3 \bar{+} c\xi^2)E_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + (1 + c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G\rangle.$

$T_{21} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + \lambda V_0 + V_1 + \bar{\lambda}E_0 + \lambda F_1 + \lambda F_0 + \lambda G,\ \ t + \lambda^2 n + E_0 + \lambda F_0 + \lambda G\rangle.$

$T_{22} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + \lambda V_0 + V_1 + \bar{\lambda}E_0 + \lambda F_1 + \lambda F_0 + \lambda G,\ \ t + \bar{\lambda}^2 n + F_1 + \lambda F_0 + \lambda G\rangle.$

$T_{23} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (\bar{b})^2 n + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1,\ \ t + n + \lambda V_0 + F_1\rangle.$

$T_{24} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (\bar{b})^2 n + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1,\ \ t + \lambda V_0 + E_0\rangle.$

$T_{25} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (b + \bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG,\ \ t + \bar{a}V_0 + \bar{a}E_0 + aF_1 + aF_0 + aG\rangle.$

$T_{26} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ m + (b + (c^2\xi^3 \bar{+} c\xi^2))^2 n + (c^2\xi^3 + c\xi^2)V_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G,\ \ t + n + \xi^{-1}V_0 + (1 + c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G\rangle.$

$T_{27} = \langle t+m+\lambda V_0+V_1,\ \ m+(b+\bar{\lambda})^2 n+\lambda V_0+V_1+bE_0+\bar{b}F_1+\lambda F_0+\lambda G,\ \ t+\lambda^2 n+E_0+\lambda F_0+\lambda G\rangle.$

$T_{28} = \langle t + m + V_0 + V_1,\ \ m + (b)^2 n + V_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + F_0 + G,\ \ t + n + E_0 + F_0 + G\rangle.$

$T_{29} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ t + n + \lambda V_0 + F_1,\ \ t + \lambda V_0 + E_0\rangle.$

$T_{30} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ t + \lambda V_0 + E_0,\ \ t + n + \lambda V_0 + F_1\rangle.$

$T_{31} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ t + \lambda^2 n + E_0 + \lambda F_0 + \lambda G,\ \ t + \bar{\lambda}^2 n + F_1 + \lambda F_0 + \lambda G\rangle.$

$T_{32} = \langle t + m + \lambda V_0 + V_1,\ \ t + \bar{\lambda}^2 n + F_1 + \lambda F_0 + \lambda G,\ \ \bar{\lambda}t + E_1 + E_0\rangle.$

4.4 Observação

Nos casos a seguir, ainda não conseguimos concluir se temos uma subálgebra toroidais ou não, são eles:

1) $T(3,6)$
$[t_2^3,\ \ t_2^6] =$
$[\alpha^2 t + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 m + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_0 + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0,\ \ m + (b+\bar{a})^2 n + aV_0 + V_1 + bE_0 + \bar{b}F_1 + aF_0 + aG] =$

$$(\alpha^2 a + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 a + \alpha\bar{\alpha})V_0 + (\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2\bar{b} + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})b + \alpha\bar{\alpha}a + \alpha^2 + 1)V_1 +$$
$$(\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a + \alpha\bar{\alpha}b)E_1 + (\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2(b+\bar{a})^2 + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})\bar{b})E_0 +$$
$$(\alpha^2 b + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(a\lambda\alpha+\bar{\alpha})a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(b+\bar{a})^2 + \alpha\bar{\alpha}a + \bar{b})F_1 + (\alpha^2 a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a + \alpha\bar{\alpha}\bar{b})F_0 + (\alpha\bar{\alpha}(b+\bar{a})^2 + a)G$$

Assim temos o seguinte o sistema,

$$\begin{cases} \alpha^2 a + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 a + \alpha\bar{\alpha} &= 0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2\bar{b} + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})b + \alpha\bar{\alpha}a + \alpha^2 + 1 &= 0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a + \alpha\bar{\alpha}b &= 0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2(b+\bar{a})^2 + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})\bar{b} &= 0 \\ \alpha^2 b + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(a\lambda\alpha+\bar{\alpha})a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(b+\bar{a})^2 + \alpha\bar{\alpha}a + \bar{b} &= 0 \\ \alpha^2 a + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})a + \alpha\bar{\alpha}\bar{b} &= 0 \\ \alpha\bar{\alpha}(b+\bar{a})^2 + a &= 0 \end{cases}$$

2) $T(3,11)$
$[t_2^3,\ \ t_2^{11}] = 0$

$$[\alpha^2 t + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 m + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_0 + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})V_1 + \alpha\bar{\alpha}E_1 + E_0,$$
$$t + n + \xi^{-1}V_0 + (1+c\xi)E_0 + c\xi F_1 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)F_0 + (c^2\xi^3 + c\xi^2)G] =$$

$(\alpha^2\xi^{-1} + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}))V_0 +$ $(\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 c\xi + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(1+c\xi) + \alpha\bar{\alpha}\xi^{-1})V_1 +$ $(\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \alpha\bar{\alpha}(1+c\xi))E_1 +$ $(\bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3+c\xi^2) + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})c\xi)E_0 +$ $(\alpha^2 c\xi + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3+c\xi^2) + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha}(c^2\xi^3+c\xi^2) + c\xi)F_1 +$ $(\alpha^2(c^2\xi^3+c\xi^2) + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3+c\xi^2) + \alpha(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3+c\xi^2) + \alpha\bar{\alpha}c\xi)F_0 +$ $(\alpha\bar{\alpha} + c^2\xi^3 + c\xi^2)G$. Logo teremos o sistema

$$\begin{cases} \alpha^2\xi^{-1} + \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}) &= 0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 c\xi + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(1+c\xi) + \alpha\bar{\alpha}\xi^{-1} &= 0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \alpha\bar{\alpha}(1+c\xi) &= 0 \\ \bar{\alpha}^2(\lambda\alpha+\bar{\alpha})^2 + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})c\xi &= 0 \\ \alpha^2 c\xi + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \bar{\alpha}(\lambda\alpha+\bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha}(c^2\xi^3 + c\xi^2) + c\xi &= 0 \\ \alpha^2(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \alpha(\lambda\alpha+\bar{\alpha})(c^2\xi^3 + c\xi^2) + \alpha\bar{\alpha}c\xi &= 0 \\ \alpha\bar{\alpha} + c^2\xi^3 + c\xi^2 &= 0 \end{cases}$$

3) $T(3,12)$
$[t_2^3,\ \ t_2^{12}] = 0$

$$[\alpha^2 t+\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2 m+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)V_0+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)V_1+\alpha\bar\alpha E_1+E_0,\ \ t+\lambda^2 n+E_0+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\lambda+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha))V_0+$ $(\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\lambda^2+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda)E_0+$ $(\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda+\alpha\bar\alpha)E_1+$ $(\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda^2+\alpha\bar\alpha\lambda)F_1+$ $(\alpha^2\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda)F_0+$ $(\alpha\bar\alpha\lambda^2+\lambda)G$

$$\begin{cases}\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\lambda+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha) &=0\\ \bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\lambda^2+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda &=0\\ \bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda+\alpha\bar\alpha &=0\\ \frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda^2+\alpha\bar\alpha\lambda &=0\\ \alpha^2\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda &=0\\ \alpha\bar\alpha\lambda^2+\lambda &=0\end{cases}$$

4) $T(3,13)$
$[t_2^3,\ \ t_2^{13}]=0$

$$[\alpha^2 t+\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2 m+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)V_0+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)V_1+\alpha\bar\alpha E_1+E_0,\ \ t\bar\lambda^2 n+F_1+\lambda F_0+\lambda G]=$$

$(\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\lambda+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha))V_0+$ $(\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha))V_1$ $(\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\bar\lambda^2+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda+\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2)E_0+$ $(\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda)E_1+$ $(\alpha^2+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\bar\lambda^2+\alpha\bar\alpha\lambda+1)F_1+$ $(\alpha^2\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda+\alpha\bar\alpha)F_0+$ $(\alpha\bar\alpha\bar\lambda^2+\lambda)G$

$$\begin{cases}\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\lambda+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha) &=0\\ \bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha) &=0\\ \bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\bar\lambda^2+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda+\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2 &=0\\ \bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda &=0\\ \alpha^2+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\bar\lambda^2+\alpha\bar\alpha\lambda+1 &=0\\ \alpha^2\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\lambda+\alpha\bar\alpha &=0\\ \alpha\bar\alpha\bar\lambda^2+\lambda &=0\end{cases}$$

5) $T(3,14)$
$[t_2^3,\ \ t_2^{14}]=0$

$$[\alpha^2 t+\bar\alpha^2(\lambda\alpha+\bar\alpha)^2 m+\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)V_0+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)V_1+\alpha\bar\alpha E_1+E_0,\ \ \bar\lambda t+E_1+E_0]=$$

$$(\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)\bar\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha))V_0+(\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\bar\lambda+\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha))V_1+(\alpha\bar\alpha+1)E_1$$

$$\begin{cases}(\frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)\bar\lambda+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha) &=0\\ \frac{\alpha}{\bar\alpha}(\lambda\alpha+\bar\alpha)+\bar\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha)\bar\lambda+\alpha(\lambda\alpha+\bar\alpha) &=0\\ \alpha\bar\alpha+1 &=0\end{cases}$$

6) $T(7,11)$
$[t_2^7,\ \ t_2^{11}]=0$
$[\alpha^2 t+m+n+V_0+V_1+\alpha\bar\alpha E_1+E_0+(\alpha^2+\bar\alpha)F_1+\bar\alpha F_0+\bar\alpha G,\ \ t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G]=$
$(\xi^{-1}\alpha^2+1+c^2\xi^3+c\xi^2)V_0+\xi^{-1}\alpha\bar\alpha V_1+((1+c\xi)\alpha\bar\alpha)E_1+(1+c\xi+c^2\xi^3+c\xi^2+\xi^{-1}\bar\alpha)E_0+(1+\xi^{-1}\bar\alpha+c\xi\alpha+(c^2\xi^3+c\xi^2)\alpha\bar\alpha(c^2\xi^3+c\xi^2))F_1+(\bar\alpha+c\xi\alpha\bar\alpha+\bar\alpha^2(c^2\xi^3+c\xi^2))F_0+(\alpha\bar\alpha+\bar\alpha+(c^2\xi^3+$

$c\xi^2)(\alpha^2+\bar{\alpha})+(c^2\xi^3+c\xi^2))G.$

$$\begin{cases} \xi^{-1}\alpha^2+1+c^2\xi^3+c\xi^2 & =0 \\ \xi^{-1}\alpha\bar{\alpha} & =0 \\ (1+c\xi)\alpha\bar{\alpha} & =0 \\ 1+c\xi+c^2\xi^3+c\xi^2+\xi^{-1}\bar{\alpha} & =0 \\ 1+\xi^{-1}\bar{\alpha}+c\xi\alpha+(c^2\xi^3+c\xi^2)\alpha\bar{\alpha}(c^2\xi^3+c\xi^2) & =0 \\ \bar{\alpha}+c\xi\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2(c^2\xi^3+c\xi^2) & =0 \\ \alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}+(c^2\xi^3+c\xi^2)(\alpha^2+\bar{\alpha})+(c^2\xi^3+c\xi^2) & =0 \end{cases}$$

7) $T(10,11)$
$[t_2^{10},\ \ t_2^{11}]=0$

$[t+bV_0+bE_0+\bar{b}F_1+\bar{b}F_0+\bar{b}G,\ \ t+n+\xi^{-1}V_0+(1+c\xi)E_0+c\xi F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2)F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2)G]=$

$(b+\xi^{-1})V_0+(b(c\xi^3+c\xi^2)+\bar{b}\xi^{-1})E_0+((c^2\xi^3+c\xi^2)b+\bar{b}\xi^{-1}))F_1+(c^2\xi^3+c\xi^2+\bar{b})F_0+(c^2\xi^3+c\xi^2+\bar{b})G.$

$$\begin{cases} b+\xi^{-1} & =0 \\ b(c\xi^3+c\xi^2)+\bar{b}\xi^{-1} & =0 \\ (c^2\xi^3+c\xi^2)b+\bar{b}\xi^{-1} & =0 \\ c^2\xi^3+c\xi^2+\bar{b} & =0 \\ c^2\xi^3+c\xi^2+\bar{b} & =0 \end{cases}$$

Observação 4.11. *Os casos apresentados serão objetos de pesquisas futuras.*

Referências Bibliográficas

[1] GRICHKOV, A. N. E GUERREIRO, M. On simple lie algebras of dimension seven over fields of characteristic 2. *Journal of Mathematical Sciences*, 1 (2010), 93–107. 4, 11, 14, 21, 22, 27

[2] GRICHKOV, A.N., P. A. Simple lie algebras of absolute toral rank 2 in characteristic 2. *(to appear)*.. 9

[3] JACOBSON, N. *Lie Algebras*. Dover Books on Mathematics Series. Dover, 1979. 2

[4] JURMAN, G. A family of simple lie algebras in characteristic two. *J. Algebra*, 271 (2004), 454–581. 4

[5] MARTIN, L. *Álgebra de Lie*. UNICAMP, 2010. 2

[6] SKRYABIN, S. Toral rank one simple lie algebras of low characteristic. *J. Algebra*, 200 (1998), 650–700. 9, 10

[7] STRADE, H. *Modular Lie Algebras and their Representations*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis, 1988. 2

Índice Remissivo