Teoria das Funções de Primeira Ordem

Rodrigo de Alvarenga Freire

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Daniel Victor Tausk

São Paulo, Março de 2014

Teoria das Funções de Primeira Ordem

Esta é a versão original da tese elaborada pelo candidato (Rodrigo de Alvarenga Freire), tal como submetida à Comissão Julgadora.

Agradecimentos

Agradeço à minha família e aos meus professores pela ajuda que recebi ao longo deste doutorado.

Resumo

Freire, R. A. **Teoria das Funções de Primeira Ordem**. 2014. 83 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Esta tese inicia o estudo das funções de primeira ordem, que são uma generalização das funções de verdade. Os conceitos de tabela de verdade e de sistema de funções de verdade, ambos introduzidos na lógica proposicional por Emil Post, são também generalizados e estudados no caso quantificacional. Os resultados gerais desse estudo ocupam os dois primeiros capítulos da tese, e constituem a "teoria geral" das funções de primeira ordem.

O tema central desta tese é a relação de definição entre noções expressas por fórmulas da lógica de primeira ordem. Enfatizamos que a lógica não se ocupa apenas da relação de consequência entre noções expressas por fórmulas, em que uma noção é *consequência* de outras. A lógica também se ocupa da relação de definição entre noções, em que uma noção é *definida* a partir de outras. O capítulo 2 lida com a relação de definição entre noções expressas por fórmulas da lógica de primeira ordem. Nesse capítulo, estudamos os sistemas de funções de primeira ordem, que são conjuntos de funções de primeira ordem fechados por definições. Nós vemos a lógica de primeira ordem como uma estrutura matemática cujo domínio é o sistema de todas as funções e primeira ordem, munida das operações básicas e da relação de consequência entre funções de primeira ordem. Em particular, os domínios de subestruturas da lógica de primeira ordem são os sistemas de funções de primeira ordem.

O capítulo 3 introduz outras operações e ideais de funções de primeira ordem. Além de alguns resultados sobre a influência dos argumentos de uma função de primeira ordem, provamos um resultado sobre definibilidade na subseção dedicada aos ideais finitamente gerados. Trata-se do teorema que fornece condições necessárias e suficientes para que uma função de primeira ordem pertença a um ideal finitamente gerado. No capítulo 4 aplicamos esse resultado ao problema de definibilidade de predicados em classes de estruturas, que é o problema com o qual o teorema de Beth lida, no caso particular das classes elementares.

O quarto capítulo da tese introduz a relativização de funções de primeira ordem a uma classe de estruturas. A relativização a uma classe de estruturas é uma operação fundamental para relacionar a teoria de funções de primeira ordem com a teoria de conjuntos e com a teoria de modelos, um assunto do qual apenas arranhamos a superfície. O aparato desenvolvido na tese nos permite definir o que é um veículo para a fundamentação da matemática clássica na teoria de conjuntos e, no quarto capítulo, provamos que a lógica de primeira ordem com uma variável de predicado binária não é um veículo minimal para a fundamentação da matemática clássica na teoria de conjuntos.

Palavras-chave: Funções Booleanas, Definibilidade.

Abstract

Freire, R. A. **Theory of First-Order Functions**. 2014. 83 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

This thesis begins the study of first-order functions, which are a generalization of truth-functions. The concepts of truth-table and systems (and clones) of truth-functions, both introduced in propositional logic by Emil Post, are also generalized and studied in the quantificational setting. The general facts about these concepts goes through chapters 1 and 2, and constitutes a "general theory" of first-order functions.

The central theme of this thesis is the relation of definition among notions expressed by formulas of first-order logic. We emphasize that logic is not only occupied with the consequence relation among notions expressed by formulas. Logic is also concerned with the relation of definition among notions, in which a notion is *defined* from other notions. Chapter 2 deals with the relation of definition among notions expressed by formulas of first-order logic. In this chapter, we study the systems of first-order functions, which are the sets of first-order functions closed under definitions. We understand first-order logic as a mathematical structure whose domain is the system of all first-order functions, endowed with the basic operations and with the consequence relation among first-order functions. In particular, the domains of the substructures of first-order logic are exactly the systems of first-order functions.

Chapter 3 introduces further operations and ideals of first-order functions. Besides some results on the influence of the arguments of a first-order function, a result about definability is proved in the subsection on finitely generated ideals. It is the theorem that provides necessary and sufficient conditions for a first-order function to be in a finitely generated ideal. In chapter 4, this result is applied to the problem of predicate definability in classes of structures, which is the problem dealt with in Beth's theorem, in the case of elementary classes.

The fourth chapter is concerned with relativization of first-order functions to a class of structures. Relativization to a class of structures is a fundamental operation which is used in order to relate the theory of first-order functions with set theory and first-order model theory, a subject of which we have barely scratched the surface. The apparatus developed in this thesis enables us to define what is a vehicle for the foundation of classical mathematics in the theory of sets, and, in chapter 4, we prove that first-order logic with one binary predicate variable is not a minimal vehicle for the foundation of classical mathematics in the theory of sets.

Keywords: Boolean Functions, Definability.

Sumário

Capítulo 1

Valores, Funções e Tabelas de Primeira Ordem

1.1 O Conceito de Função de Primeira Ordem

Funções de primeira ordem são o correlato quantificacional das funções de verdade. Para entender o conceito de função de primeira ordem, vamos examinar com mais cuidado como chegamos ao conceito de função de verdade na lógica proposicional. Nesta seção e nas duas seções seguintes vamos rever conceitos e resultados básicos, centrais em lógica de primeira ordem, a partir de uma perspectiva nova.

1.1.1 Valor Proposicional e Função de Verdade.

De início, partimos da *assinatura canônica proposicional*, denotada por σ, e constituída pelo conjunto de conectivos lógicos $\{\neg, \wedge, \vee\}$ e pela sequência infinita $\langle P_1, P_2, ...\rangle$ de variáveis proposicionais. Assumimos que os termos dessa sequência são dois a dois distintos. A ordem das variáveis proposicionais nessa sequência é chamada de ordem alfabética. A linguagem proposicional obtida a partir de σ, denotada por $L(\sigma)$, é constituída pelas sentenças formadas segundo regras de formação presentes na *sintaxe* da linguagem $L(\sigma)$. O papel da sintaxe é o de separar as expressões significativas do conjunto de todas as expressões que podemos formar a partir das variáveis e dos conectivos.

O que deveria ser uma *semântica* para $L(\sigma)$? Por semântica entendemos a correspôndencia entre as expressões significativas e as coisas que elas *expressam*. Para uma linguagem proposicional, as expressões significativas são as variáveis proposicionais e as sentenças compostas, formadas segundo as regras da sintaxe. O que expressam as variáveis proposicionais e as sentenças compostas de $L(\sigma)$?

A semântica usual para uma linguagem proposicional como $L(\sigma)$ é dada em termos de atribuições de valor de verdade para as variáveis proposicionais.

De acordo com a semântica usual *não* é o caso que uma sentença *expressa* o seu valor de verdade, pois não há uma atribuição de valor de verdade privilegiada. Ao contrário, todas as atribuições são admissíveis, e duas dessas funções discordam com relação ao valor de verdade de algumas sentenças de $L(\sigma)$. Além disso, não é plausível dizer que uma sentença expressa o seu valor de verdade: Nesse caso, quaisquer duas sentenças verdadeiras expressariam a mesma coisa, o que não é plausível.

Podemos compreender a semântica usual do seguinte modo: uma sentença φ de $L(\sigma)$ expressa as suas *condições de verdade*, ou seja, as combinações de valor de verdade para as variáveis proposicionais que ocorrem em φ tais que, para cada atribuição V, vale que $\widehat{V}(\varphi) = \mathbf{T}$ sse V atribui uma dessas combinações às variáveis proposicionais de φ. Dizemos de tais combinações de valor de verdade que elas são combinações *favoráveis* à φ. Por exemplo, a sentença $P_1 \wedge P_2$ expressa a combinação $\mathbf{T}$ para P_1 e $\mathbf{T}$ para P_2, ou simplesmente $\mathbf{TT}$, assumindo a ordem alfabética. Essa combinação é a única condição de verdade de $P_1 \wedge P_2$. Por outro lado, a sentença $P_1 \vee P_2$ expressa as combinações **TT**, **TF** e **FT**. Essas três combinações são as condições de verdade de $P_1 \vee P_2$.

Segundo o entendimento acima da semântica usual, uma sentença φ nas variáveis proposicionais P_1 e P_2 expressa a seleção de combinações de valores de verdade para P_1 e P_2 favoráveis a ela, ou seja, o subconjunto de $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}^2$ constituído pelas combinações de dois valores de verdade favoráveis à φ. A função que associa o valor $\mathbf{T}$ a cada combinação de dois valores de verdade favoráveis a φ é naturalmente identificada com a função característica do subconjunto de $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}^2$ constituído pelas combinações favoráveis à φ. Uma função desse tipo é uma *função de verdade* 2*-ária*. Mais geralmente, uma função de verdade m-ária é uma função de $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}^m$ em $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$. Portanto, podemos dizer que uma sentença φ da linguagem proposicional $L(\sigma)$, em m variáveis proposicionais, *expressa*, através da semântica usual, a função de verdade m-ária que atribui $\mathbf{T}$ para os elementos de $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}^m$ que são combinações de valores de verdade favoráveis a ela.

A combinação de valores de verdade para as variáveis P_1 e P_2 é o mínimo que devemos saber de uma atribuição de valor de verdade para determinar o valor de verdade de *qualquer* sentença φ cujas variáveis estão entre P_1 e P_2, e não apenas para uma sentença específica nessas variáveis. É necessário e suficiente conhecer os valores de verdade de P_1 e P_2 para determinar o valor de verdade de φ, para todas as sentenças φ nas variáveis P_1 e P_2. Essa informação mínima, a combinação de valores de verdade para duas variáveis, que é necessária e suficiente para determinar o valor de verdade de qualquer sentença nas variáveis P_1 e P_2 é chamada de *valor proposicional* para uma subsequência de $\langle P_1, P_2, ... \rangle$ constituída por duas variáveis proposicionais. Mais geralmente, um valor proposicional para uma subsequência de $\langle P_1, P_2, ... \rangle$ constituída por m variáveis proposicionais é uma sequência de m valores de verdade, ou seja, um elemento de $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}^m$.

É possível tornar precisa a afirmação do parágrafo acima que o valor proposicional para uma sequência de variáveis proposicionais em ordem alfabética é a informação mínima, necessária e suficiente para determinar o valor de verdade que uma sentença nessas variáveis proposicionais pode assumir do seguinte modo: Se s e t são sequências de m valores de verdade, definimos $s \approx t$ se para toda sentença φ nas variáveis proposicionais P_1,..., P_m, a sequência s é favorável à φ sse a sequência t é favorável à φ. A relação $s \approx t$ é a relação de igualdade entre sequências de m valores de verdade, e uma classe de equivalência por essa relação contém uma única sequência de m valores de verdade, que é um valor proposicional para uma subsequência de $\langle P_1, P_2, ... \rangle$ constituída de m variáveis proposicionais.

Portanto, a noção de valor proposicional para uma subsequência finita de $\langle P_1, P_2, ... \rangle$, constituída de m variáveis proposicionais, pode ser caracterizada, de modo equivalente, como classe de equivalência de sequências de m valores de verdade pela relação de equivalência $\approx$. Note que a definição de valor proposicional para uma subsequência finita de $\langle P_1, P_2, ... \rangle$, constituída de m variáveis proposicionais, depende apenas de m. Por isso, podemos falar em valor proposicional para um conjunto de m variáveis proposicionais ou, simplesmente, em valor proposicional m-ário. Uma função de verdade m-ária é uma função que atribui um valor de verdade para cada valor proposicional para um conjunto de m variáveis proposicionais.

1.1.2 Valor de Primeira Ordem e Função de Primeira Ordem.

Vimos que o conceito de função de verdade pode ser obtido a partir do conceito de valor proposicional. Passamos agora ao caso quantificacional. Consideramos a *assinatura canônica de primeira ordem*, denotada por Σ, constituída pelo conjunto de conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$, pelo quantificador existencial $\exists$, por uma sequência de variáveis individuais, $\langle x_1, x_2, ... \rangle$, e por uma sequência infinita $\left\langle P_1^0, P_2^0, ..., P_1^1, P_2^1, ..., P_1^2, P_2^2, ... \right\rangle$ de variáveis de predicado, em que P_1^0, P_2^0, e assim sucessivamente, são variáveis de predicado 0-árias, P_1^1, P_2^1, e assim sucessivamente, são variáveis de predicado 1-árias, e assim por diante. As variáveis de predicado 0-árias são identificadas com variáveis proposicionais. A linguagem de primeira ordem associada a Σ, denotada por $L(\Sigma)$, é constituída pelas expressões formadas segundo regras de formação. Essas expressões são chamadas fórmulas da linguagem $L(\Sigma)$. Subsequências finitas, não-vazias, da sequência de variáveis de predicado da assinatura canônica de primeira ordem serão denotadas por S, S', etc. Tais subsequências serão chamadas de *assinaturas*.

Usamos P, R, P', R', e R_i, para $i \in \omega$, como variáveis sintáticas para variáveis de predicado.

A semântica usual para uma linguagem de primeira ordem como $L(\Sigma)$ é baseada em *estruturas de primeira ordem*. Uma estrutura de primeira ordem $\mathcal{D}$ para Σ é constituída por um domínio de indivíduos D, e por uma sequência de predicados nesse domínio $\left\langle D_1^0, D_2^0, ..., D_1^1, D_2^1, ..., D_1^2, D_2^2, ...\right\rangle$, em que D_1^0 D_2^0,..., são predicados 0-ários, que podem ser identificados com valores de verdade, D_1^1, D_2^1,..., são predicados 1-ários, e assim sucessivamente. Os predicados D_j^i interpretam as variáveis de predicado correspondentes P_j^i. Uma tal estrutura $\mathcal{D}$, e uma sequência de indivíduos $\langle d_1, d_2, ...\rangle$, tal que os indivíduos d_i interpretam as variáveis individuais x_i, determinam, conforme a definição usual da relação de satisfação, uma única função que atribui **T** ou **F** para cada fórmula da linguagem $L(\Sigma)$, satisfazendo as condições usuais para os conectivos e para o quantificador existencial. Denotaremos por Λ a classe das estruturas $\mathcal{D}$ para Σ, e por $\prod(\Lambda, \omega)$ a classe dos pares $(\mathcal{D}, \langle d_1, d_2, ...\rangle)$, em que $\mathcal{D}$ está em Λ e $\langle d_1, d_2, ...\rangle$ é uma sequência de ω indivíduos na estrutura $\mathcal{D}$.

Cada fórmula φ em $L(\Sigma)$ contém um número finito de variáveis individuais e de variáveis de predicado. Para cada estrutura $\mathcal{D}$ para a assinatura canônica Σ, e cada sequência de indivíduos $\langle d_1, d_2, ...\rangle$, o valor de verdade de φ está determinado pelos indivíduos correspondentes às variáveis individuais livres de φ e pelos predicados que $\mathcal{D}$ atribui às variáveis de predicado que ocorrem em φ. Se S é a subsequência de $\left\langle P_1^0, P_2^0, ..., P_1^1, P_2^1, ..., P_1^2, P_2^2, ...\right\rangle$ constituída pelas variáveis de predicado que ocorrem em φ, e x_1,..., x_n são as variáveis individuais que ocorrem livres em φ, então o reduto $\mathcal{D}|_S$ de $\mathcal{D}$ e a sequência finita de indivíduos $\overline{d} = \langle d_1, ..., d_n\rangle$ são suficientes para determinar o valor de verdade atribuído à φ por $\mathcal{D}$ e $\langle d_1, d_2, ...\rangle$. Contudo, a informação completa contida no reduto $\mathcal{D}|_S$ e na sequência finita de indivíduos $\overline{d}$ está longe de ser uma condição necessária para determinar o valor de verdade de φ. Por exemplo, a informação contida na classe de isomorfismo de $(\mathcal{D}|_S, \overline{d})$ já seria suficiente para determinar o valor de verdade de qualquer fórmula nas mesmas variáveis que φ, e essa informação ainda não é uma condição necessária para essa determinação. Denotaremos por $\Lambda|_S$ a classe das estruturas $\mathcal{D}|_S$ para S, e, para cada $n \in \omega$, por $\prod(\Lambda|_S, n)$ a classe dos pares $(\mathcal{D}|_S, \overline{d})$, em que $\mathcal{D}|_S$ está em $\Lambda|_S$ e $\overline{d}$ é uma n-upla indivíduos na estrutura $\mathcal{D}|_S$.

Se φ é uma fórmula sem variáveis individuais livres e sem quantificadores, então φ pode conter apenas variáveis de predicado 0-árias e conectivos. Suponha que S, seja a sequência das m variáveis de predicado 0-árias, em ordem alfabética, que ocorrem em φ. Esse é o caso proposicional, e sabemos que é necessário e suficiente conhecer apenas os valores de verdade em $\mathcal{D}$ correspondentes às variáveis de predicado 0-árias em S para determinar se $\mathcal{D}$ satisfaz ou não qualquer fórmula nessas mesmas variáveis de predicado, que não contenha variáveis individuais nem quantificadores. Em outras palavras, a informação mínima, necessária e suficiente, que devemos conhecer de uma estrutura $\mathcal{D}$ para determinar o valor de verdade de qualquer formula sem variáveis individuais livres e sem quantificadores, cujas variáveis proposicionais estão em S, é o valor proposicional em $\mathcal{D}$ correpondente à sequência S.

Considere agora a seguinte caracterização da noção de valor proposicional para uma sequência de m variáveis de predicado 0-árias: Um valor proposicional para uma subsequência S de $\left\langle P_1^0, P_2^0, ...\right\rangle$ constituída por m variáveis de predicado 0-árias é uma classe de equivalência de estruturas para a assinatura S pela seguinte relação de equivalência: $\mathcal{A} \approx_0 \mathcal{B}$ sse para toda sentença sem quantificadores φ na assinatura S, $\mathcal{A} \models \varphi$ sse $\mathcal{B} \models \varphi$. Note que as sentenças φ não contém variáveis individuais, livres ou ligadas, pois, por hipótese, são fórmulas fechadas e não possuem quantificadores. Uma classe de equivalência pela relação $\approx_0$ é determinada por uma sequência de valores de verdade: Uma tal classe é constituída por todas as S-estruturas que contém a mesma sequência de valores de verdade. A generalização para primeira ordem dessa caracterização da noção de valor proposicional para uma sequência de m variáveis de predicado 0-árias é imediata, e está apresentada na definição 2 abaixo.

Sejam n e q números naturais. Seja S uma assinatura, ou seja, uma subsequência finita de variáveis de predicado da assinatura canônica de primeira ordem. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estruturas para S, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ n-uplas em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Dizemos que o par $(\mathcal{A}, \overline{a})$ é q-equivalente ao par $(\mathcal{B}, \overline{b})$ se para toda fórmula φ na assinatura S, cujas variáveis livres estão entre x_1,..., x_n, e com no máximo

q quantificações encaixadas,[1]

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}].$$

Denotamos a relação de q-equivalência por $\approx_q$. A classe de equivalência do par $(\mathcal{A}, \overline{a})$, pela relação $\approx_q$, é denotada por $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$.

1 Observação. Se a assinatura S é vazia, então, para cada par (n, q) de números naturais existe uma única classe de equivalência $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$.

Considere $\langle n_1, ..., n_k \rangle$ uma sequência estritamente crescente de números naturais, e $\langle m_1, ..., m_k \rangle$ uma sequência finita de números naturais. Seja S uma assinatura, contendo, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, m_i variáveis de predicado n_i-árias. Dizemos que S é uma assinatura de tipo $\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle$.

Do mesmo modo, dizemos que uma S-estrutura é uma estrutura de tipo $\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle$.

Note que a classe $\Lambda|_S$ depende apenas do tipo da assinatura S.

2 Definição. Um *valor de primeira ordem*, de posto q e tipo

$$\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle \to n,$$

é uma classe de equivalência $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$, em que $\mathcal{A}$ é uma estrutura de tipo $\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle$, e $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{A}$. Dizemos que $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ é o valor de primeira ordem de posto q do par $(\mathcal{A}, \overline{a})$.

Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura de tipo $\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle$, e $\overline{a}$ uma n-upla em $\mathcal{A}$. O valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ é um elemento do quociente $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$, em que S é uma assinatura de tipo apropriado, e $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ é a mínima informação sobre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ que é preciso possuir para determinar para toda fórmula φ, com variáveis de predicado em S, com variáveis livres entre x_1,..., x_n, e com no máximo q quantificações encaixadas, se $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$ ou não. A definição 2 de valor de primeira ordem considera estruturas adaptadas para uma assinatura finita apenas, e não estruturas para a assinatura Σ, do mesmo modo que a caracterização de valor proposicional em termos de classe de equivalência de sequências de valor de verdade considera apenas sequências finitas, que podem ser usadas para atribuir valor de verdade somente para uma sequência finita de variáveis proposicionais.

Uma fórmula φ determina uma assinatura S, que é a sequência dos predicados que ocorrem em φ em ordem alfabética. Se as variáveis livres de φ são x_1,..., x_n, dizemos que φ *se aplica* ao par $(\mathcal{A}, \overline{a})$ se $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$. Se q é o número máximo de quantificadores encaixados em φ, então os valores de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ tais que φ se aplica ao par $(\mathcal{A}, \overline{a})$ são as *condições de aplicabilidade* de φ.

Agora chegamos facilmente ao conceito de função de primeira ordem. Uma fórmula de primeira ordem expressa suas condições de aplicabilidade. A função característica da coleção das condições de aplicabilidade de φ é a função de primeira ordem *expressa* por φ:

3 Definição. Uma *função de valores de primeira ordem*, ou simplesmente *função de primeira ordem*, de posto q e tipo

$$\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle \to n$$

é uma função que atribui um valor de verdade, **T** ou **F**, para cada valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$, em que $\mathcal{A}$ é uma estrutura e $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{A}$.

[1] Na seção 2, a notação 12 apresenta a definição indutiva de posto quantificacional de uma fórmula.

4 Convenção. Será conveniente, para os nossos propósitos, adotar as seguintes convenções:

1. Se $k = 1$ e $n_1 = 0$, então cada valor de primeira ordem é naturalmente identificado com uma sequência de m_1 valores de verdade. Nesse caso, consideramos *apenas* funções de primeira ordem de posto qualquer e tipo
$$\left\langle \overbrace{0, ..., 0}^{m_1} \right\rangle \to 0.$$

2. Se $n_1 > 0$, então existe apenas um valor de primeira ordem de posto 0 e tipo
$$\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle \to 0.$$
Nesse caso, descartamos as duas funções (constantes) desse tipo. Em outras palavras, se $n_1 > 0$, então consideramos *apenas* funções de primeira ordem de posto q e tipo
$$\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle \to n,$$
em que $q + n > 0$.

Seja S uma assinatura qualquer de tipo $\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle$. Como $\prod(\Lambda|_S, n)$ não depende de S, mas apenas do seu tipo, uma função de primeira ordem de posto q e tipo
$$\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle \to n$$
é uma função de $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ em $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$.

5 Definição. Se $\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ é uma função de primeira ordem em que S é de tipo $\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle$, então dizemos que tipo $\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle \to n$ e o posto q de Q são os *parâmetros de classificação* dessa função.

Os parâmetros de classificação de uma função de primeira ordem desempenham um papel na teoria dessas funções que é similar ao papel do número e natureza dos argumentos e do grau na teoria das funções polinomiais. Por exemplo, uma função polinomial real de m argumentos reais e grau n, é classificada no universo das funções polinomiais de vários argumentos definidas em subanéis do corpo dos complexos pelos parâmetros m e n.

Como vimos nos três parágrafos que precedem imediatamente a definição 2, um valor de primeira ordem de posto 0 e tipo $\left\langle \overbrace{0, ..., 0}^{m} \right\rangle \to 0$ é identificado com uma sequência de m valores de verdade, ou seja, com um valor proposicional m-ário. Com essa identificação, uma função de primeira ordem de posto 0 e tipo $\left\langle \overbrace{0, ..., 0}^{m} \right\rangle \to 0$ é simplesmente uma função de verdade m-ária.

6 Notação. A notação $\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ significa que Q é uma função de primeira ordem de posto q e tipo
$$\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle \to n,$$

em que $\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle$ é o tipo da assinatura S.

Seja $\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$, em que $S = \langle R_1, ..., R_m \rangle$. Nesse caso, Q é uma função de m argumentos de predicado representados por R_1,...,R_m, e podemos escrever $\mathrm{Q}(R_1, ..., R_m)$ se quisermos explicitar isso. Contudo, e aqui surge uma diferença importante com o caso proposicional, a sequência de variáveis de predicado $\langle R_1, ..., R_m \rangle$, assume um valor *em bloco*. As variáveis não assumem, cada uma, um valor independentemente das demais. Ao contrário, os valores admissíveis para a sequência $\langle R_1, ..., R_m \rangle$ são os valores de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$, em que $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura e $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{A}$. Valores de primeira ordem são valores que uma sequência S assume em bloco: podemos escrever $\mathrm{Q}(S)$ em vez de $\mathrm{Q}(R_1, ..., R_m)$ para enfatizar que a sequência de variáveis $\langle R_1, ..., R_m \rangle$ assume um valor de primeira ordem em bloco.

A definição 2 de valor de primeira ordem está baseada em uma caracterização de valor proposicional, segundo a qual um valor proposicional para uma sequência finita de m variáveis proposicionais é uma classe de equivalência de sequências de m valores de verdade, pela seguinte relação de equivalência: $s \approx t$ sse, fixada uma sequência de m variáveis proposicionais $S = \langle R_1, ..., R_m \rangle$, para toda sentença φ na assinatura S, s é favorável à φ sse t é favorável à φ. Uma outra caracterização do valor proposicional é obtida pela fórmula característica: um valor proposicional para uma sequência de m variáveis proposicionais é uma sequência de valores de verdade favorável a uma sentença do tipo $\pm R_1 \wedge ... \wedge \pm R_m$, em que $\langle R_1, ..., R_m \rangle$ é uma sequência de variáveis proposicionais, e cada variável proposicional R_i é afirmada ou negada, o prefixo $+$ indica que a variável prefixada é afirmada e o prefixo $-$ indica que a variável prefixada é negada. Uma fórmula desse tipo é chamada de uma *descrição de estado* baseada em R_1,..., R_m.

Na seção seguinte, vamos mostrar que os valores de primeira ordem podem, também, ser obtidos através da generalização apropriada das fórmulas características para o contexto quantificacional, e que as relações de equivalência $\approx_q$ podem ser caracterizadas por meios puramente estruturais, que não utilizam fórmulas ou qualquer outro elemento linguístico. Em seguida, veremos que a lógica de primeira ordem é funcionalmente completa com relação às funções de primeira ordem, e que as funções de primeira ordem podem ser representadas por tabelas finitas e computáveis que generalizam as tabelas de verdade.

1.2 Teoremas de Fraïssé e Hintikka Revisitados

Nesta seção, consideraremos fixada uma assinatura S. A noção de valor de primeira ordem de posto q do par $(\mathcal{A}, \overline{a})$, em que $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura e $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{A}$, é a mínima informação sobre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ que é preciso possuir para determinar para qualquer fórmula φ na assinatura S, de posto quantificacional menor ou igual a q e com variáveis livres entre x_1,..., x_n, se $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$ ou não. O modo mais óbvio de tornar essa noção precisa é através do quociente da classe $\prod(\Lambda|_S, n)$ constituída pelos pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$, em que $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura e $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{A}$, pela relação de equivalência $\approx_q$ dada por: $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b})$ sse para qualquer fórmula φ na assinatura S, de posto quantificacional menor ou igual a q e com variáveis livres entre x_1,..., x_n,

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}].$$

1.2.1 Back-and-Forth.

No caso proposicional, em que os parâmetros q e n são iguais a zero, vimos que a relação $\approx_0$ admite uma caracterização em termos puramente estruturais: $(\mathcal{A}, \emptyset) \approx_0 (\mathcal{B}, \emptyset)$ sse as S-estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ contém a mesma sequência de valores de verdade para as variáveis de predicado 0-árias em S. Vamos mostrar que isso vale no caso geral. Para isso, é preciso introduzir as relações de q-isomorfia parcial.

7 Definição. Fixadas duas S-estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, dizemos que r é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$ se q é um número natural, $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são sequências finitas de indivíduos em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, de mesmo comprimento, r é uma relação binária, $dom(r)$ é um subconjunto finito do domínio de $\mathcal{A}$, $range(r)$ é um subconjunto finito do domínio de $\mathcal{B}$, os elementos da n-upla $\overline{a}$ estão no $dom(r)$, os elementos da n-upla $\overline{b}$ estão no $range(r)$, para cada a_i em $\overline{a}$ e cada b_i em $\overline{b}$, o par (a_i, b_i) está na relação r e

1. $q = 0$ e se P é uma variável de predicado k-ária em S, e $P^{\mathcal{A}}$ e $P^{\mathcal{B}}$ são os predicados correspondentes a P em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, e a'_1,..., $a'_k \in dom(r)$, b'_1,..., $b'_k \in range(r)$, e o par (a'_i, b'_i) está na relação r, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, então

   $$P^{\mathcal{A}}(a'_1, ..., a'_k) \text{ sse } P^{\mathcal{B}}(b'_1, ..., b'_k),$$

   ou

2. $q > 0$ e vale a condição de *back-and-forth*:

   (a) *(Forth)* Para todo a no domínio de $\mathcal{A}$ existe um b no domínio de $\mathcal{B}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que $\hat{r}$ é uma relação de $q-1$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a)$ e $(\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$.

   (b) *(Back)* Para todo b no domínio de $\mathcal{B}$ existe um a no domínio de $\mathcal{A}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que $\hat{r}$ é uma relação de $q-1$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a)$ e $(\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$.

8 Notação. Denotamos por $r : (\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b})$ a relação entre r, q, $\overline{a}$ e $\overline{b}$ definida por indução em q, com $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como parâmetros, na definição 7.

9 Observação. Suponha que r é uma relação de q-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, em que $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são n-uplas. É fácil provar, por indução em q, que se k é um número natural e $\nu : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., n\}$ é uma função, então r é também uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(k)}))$ e $(\mathcal{B}, (b_{\nu(1)}, ..., b_{\nu(k)}))$. Além disso, qualquer restrição de r que contenha os pares $(a_{\nu(j)}, b_{\nu(j)})$, para $j \in \{1, ..., k\}$, é também uma relação de q-isomorfia parcial entre

$$(\mathcal{A}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(k)})) \text{ e } (\mathcal{B}, (b_{\nu(1)}, ..., b_{\nu(k)}))).$$

Em particular, a relação $\{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\}$ é uma relação de q-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, e a relação vazia é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \emptyset)$ e $(\mathcal{B}, \emptyset)$.

10 Observação. É fácil verificar, por indução em q, que para cada $q \in \omega$, se r é uma relação de $q + 1$-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, então r é uma relação de q-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$. Portanto, se r é uma relação de q-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, e $p < q$, então r é uma relação de p-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

11 Definição. Dizemos que dois pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, em que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são S-estruturas, estão em uma relação de q-isomorfia parcial se exite r tal que $r : (\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b})$.

1.2.2 Teorema de Fraïssé.

Vamos apresentar em seguida a caracterização puramente estrutural da relação $\approx_q$, conhecida por Teorema de Fraïssé: Dois pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, em que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são S-estruturas, estão em uma relação de q-isomorfia parcial sse $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b})$. Antes de enunciar a primeira parte desse teorema, é conveniente estabelecer algumas notações.

12 Notação. O posto quantificacional de uma fórmula de primeira ordem φ, denotado por $rk(\varphi)$, é definido, por indução, como o número máximo de quantificações encaixadas em φ: Se φ é atômica então $rk(\varphi) = 0$; se φ é $\neg\phi$ então $rk(\varphi) = rk(\phi)$; se φ é $\phi \wedge \psi$ ou $\phi \vee \psi$ então $rk(\varphi) = \max(rk(\phi), rk(\psi))$; se φ é $\exists y\phi$ então $rk(\varphi) = rk(\phi) + 1$.

13 Notação. O conjunto de variáveis livres de uma fórmula de primeira ordem φ, denotado por $fv(\varphi)$, é definido, por indução, do modo óbvio: Se φ é atômica então φ é da forma $Py_1...y_k$ e $fv(\varphi) = \{y_1, ..., y_k\}$; se φ é $\neg\phi$ então $fv(\varphi) = fv(\phi)$; se φ é $\phi \wedge \psi$ ou $\phi \vee \psi$ então $fv(\varphi) = fv(\phi) \cup fv(\psi))$; se φ é $\exists y\phi$ então $fv(\varphi) = fv(\phi) \setminus \{y\}$.

14 Teorema. (Teorema de Fraïssé, primeira parte) *Se $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, em que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são S-estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são n-uplas, $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, estão em uma relação de q-isomorfia parcial, então para toda fórmula φ tal que $rk(\varphi) \leq q$ e $fv(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$,*

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}].$$

Demonstração. Suponha que $r : (\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b})$, em que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são S-estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são n-uplas. Vamos provar a tese do teorema por indução na complexidade das fórmulas.

Seja φ da forma $Px_{i_1}...x_{i_k}$, em que $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \{1, ..., n\}$. Como r é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, temos que r é também uma relação de 0-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$. Pelo fato que todos os pares (a_{i_1}, b_{i_1}),..., (a_{i_k}, b_{i_k}) estão em r e pela definição de relação de 0-isomorfia parcial,

$$P^{\mathcal{A}}(a_{i_1}, ..., a_{i_k}) \text{ sse } P^{\mathcal{B}}(b_{i_1}, ..., b_{i_k}).$$

Mas isso significa que $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$ sse $\mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}]$.

Se φ é $\neg\phi$, ou $\phi \wedge \psi$, ou $\phi \vee \psi$, a tese segue diretamente da hipótese de indução. Precisamos provar apenas o caso em que φ é $\exists x_{n+1}\phi$, tal que $rk(\varphi) \leq q$ e $fv(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$. Nesse caso, $rk(\varphi) > 0$, e concluímos que $q > 0$. Portanto, r é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, com $q > 0$.

Suponha que $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$. Por definição, para algum a em $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a]$. Como r satisfaz a condição de *forth*, existe b em $\mathcal{B}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que

$$\hat{r} : (\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a) \approx_{q-1} (\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b).$$

Por hipótese de indução, como $rk(\phi) < q$, temos que $\mathcal{B} \models \phi[\overline{b}\,\hat{}\,b]$. Por definição, $\mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}]$. Conversamente, se $\mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}]$, então, para algum b em $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \models \phi[\overline{b}\,\hat{}\,b]$. Como r satisfaz a condição de *back*, existe a em $\mathcal{A}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que

$$\hat{r} : (\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a) \approx_{q-1} (\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b).$$

Por hipótese de indução, como $rk(\phi) < q$, temos que $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a]$. Disso segue que $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$. $\square$

Vamos definir, por indução em q, uma família de conjuntos $(\Gamma^S(n,q))_{n\in\omega}$, e uma família auxiliar $(C_{q,n})_{n\in\omega}$:

Se $q = 0$, considere o conjunto finito

$$C_{0,n} = \{\phi_1, ..., \phi_m\}$$

de todas as fórmulas atômicas da forma $Px_{i_1}...x_{i_k}$, na assinatura S, cujas variáveis livres estão entre x_1,..., x_n. Seja $\Gamma^S(n,0)$ o conjunto de todas as descrições de estado baseadas no conjunto $C_{0,n}$, ou seja, $\Gamma^S(n,0)$ é o conjunto finito de todas as conjunções da forma

$$\phi_1^* \wedge ... \wedge \phi_m^*,$$

em que ϕ_i^* é ϕ_i ou $\neg\phi_i$, para cada $i \in \{1, ..., m\}$.

Se $q > 0$, então o conjunto $\Gamma^S(n,q)$ é obtido a partir do conjunto finito $\Gamma^S(n+1, q-1) = \{\varphi_1, ..., \varphi_l\}$ do seguinte modo: $\Gamma^S(n,q)$ é o conjunto de todas as descrições de estado baseadas no conjunto

$$C_{q,n} = \{\exists x_{n+1}\varphi_1, ..., \exists x_{n+1}\varphi_l\},$$

ou seja, $\Gamma^S(n,0)$ é o conjunto finito de todas as conjunções da forma

$$(\exists x_{n+1}\varphi_1)^* \wedge ... \wedge (\exists x_{n+1}\varphi_l)^*,$$

em que $(\exists x_{n+1}\varphi_i)^*$ é $\exists x_{n+1}\varphi_i$ ou $\neg\exists x_{n+1}\varphi_i$, para cada $i \in \{1, ..., l\}$.

As descrições de estado ψ em $\Gamma^S(n,q)$ generalizam as fórmulas características das linhas de uma tabela de verdade. Veremos agora que essas descrições de estado caracterizam os valores de primeira ordem, do mesmo modo que as fórmulas características das linhas de uma tabela de verdade caracterizam uma sequência finita de valores de verdade.

15 Observação. Os conjuntos na família $(\Gamma^S(n,q))_{n,q\in\omega}$ são finitos, e as cardinalidades desses conjuntos satisfazem a seguinte recursão:

$$|\Gamma^S(n, q+1)| = 2^{|\Gamma^S(n+1,q)|}.$$

As variáveis livres das fórmulas em $\Gamma^S(n,q)$ estão entre x_1,..., x_n, e o seu posto quantificacional é exatamente q. Nenhuma variável em uma fórmula em $\Gamma^S(n,q)$ ocorre tanto livre quanto ligada. A disjunção das fórmulas em $\Gamma^S(n,q)$ é uma tautologia, e duas a duas são incompatíveis. Portanto, dados n e q números naturais, para todo par $(\mathcal{A}, \overline{a})$, em que $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura e $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{A}$, existe uma única fórmula ψ em $\Gamma^S(n,q)$ tal que $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$.

16 Teorema. (Teorema de Fraïssé, segunda parte) *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas S-estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ duas n-uplas, $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$. Se para toda fórmula φ tal que $rk(\varphi) \leq q$ e $fv(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$,*

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}],$$

então $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$ estão em uma relação de q-isomorfia parcial.

Demonstração. Vamos mostrar, por indução em q, que dados q e n números naturais, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas S-estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ duas n-uplas, $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, se existe uma fórmula ψ em $\Gamma^S(n,q)$ tal que

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}],$$

então $r = \{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\}$ é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$. Como a disjunção das fórmulas em $\Gamma^S(n,q)$ é válida, e duas a duas são incompatíveis, a hipótese que existe uma fórmula ψ em $\Gamma^S(n,q)$ tal que

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}],$$

é equivalente à hipótese que para toda fórmula ψ em $\Gamma^S(n, q)$ vale que

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

$q = 0$: Suponha que existe uma fórmula ψ em $\Gamma^S(n, 0)$ tal que

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ } e \text{ } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]. \tag{1.1}$$

Como ψ está em $\Gamma^S(n, 0)$, cada uma das fórmulas atômicas nas variáveis x_1,..., x_n ocorre afirmada ou negada em ψ. Desse modo, a condição (1.1) implica que se P é uma variável de predicado k-ária em S, se $P^{\mathcal{A}}$ e $P^{\mathcal{B}}$ são os predicados correspondentes a P em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, se a'_1,..., $a'_k \in dom(r)$, b'_1,..., $b'_k \in range(r)$, e o par (a'_i, b'_i) está na relação r, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, então

$$P^{\mathcal{A}}(a'_1, ..., a'_k) \text{ sse } P^{\mathcal{B}}(b'_1, ..., b'_k).$$

De fato, suponha que o par (a'_i, b'_i) está na relação r, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, ou seja, que $\{(a'_1, b'_1), ..., (a'_k, b'_k)\} \subseteq \{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\}$. Seja

$$f : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., n\}$$

uma função tal que $(a'_i, b'_i) = (a_{f(i)}, b_{f(i)})$, para cada $i \in \{1, ..., k\}$. Agora,

$$P^{\mathcal{A}}(a'_1, ..., a'_k) \text{ } sse \text{ } P^{\mathcal{A}}(a_{f(1)}, ..., a_{f(k)}) \text{ } sse \text{ } \mathcal{A} \models Px_{f(1)}...x_{f(k)}[\overline{a}]. \tag{1.2}$$

Como $Px_{f(1)}...x_{f(k)}$ é uma fórmula atômica nas variáveis x_1,..., x_n, ela ocorre afirmada ou negada em ψ, e como $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ sse $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$, temos que

$$\mathcal{A} \models Px_{f(1)}...x_{f(k)}[\overline{a}] \text{ } sse \text{ } \mathcal{B} \models Px_{f(1)}...x_{f(k)}[\overline{b}]. \tag{1.3}$$

Além disso,

$$P^{\mathcal{B}}(b'_1, ..., b'_k) \text{ } sse \text{ } P^{\mathcal{B}}(b_{f(1)}, ..., b_{f(k)}) \text{ } sse \text{ } \mathcal{B} \models Px_{f(1)}...x_{f(k)}[\overline{b}]. \tag{1.4}$$

De (1.2), (1.3) e (1.4), segue que

$$P^{\mathcal{A}}(a'_1, ..., a'_k) \text{ sse } P^{\mathcal{B}}(b'_1, ..., b'_k).$$

$q > 0$: Suponha que existe uma fórmula ψ em $\Gamma^S(n, q)$ tal que

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ } e \text{ } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]. \tag{1.5}$$

Vamos provar que r satisfaz a condição de *back-and-forth*. Se a é um indivíduo em $\mathcal{A}$, então existe uma única fórmula ϕ em $\Gamma^S(n+1, q-1)$ tal que $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a]$. Portanto,

$$\mathcal{A} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{a}],$$

de onde concluímos que a fórmula $\exists x_{n+1}\phi$ ocorre afirmada em ψ. Como $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]$, segue que

$$\mathcal{B} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{b}],$$

e existe b em $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} \models \phi[\overline{b}\,\hat{}\,b]$. Por hipótese de indução, a relação

$$\hat{r} = \{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n), (a_{n+1}, b_{n+1})\}$$

é uma relação de $q-1$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a)$ e $(\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$, e r satisfaz a condição de *forth*.

Conversamente, se b é um indivíduo em $\mathcal{B}$, então existe uma única fórmula ϕ em $\Gamma^S(n+1, q-1)$ tal que $\mathcal{B} \models \phi[\overline{b}\,\hat{}\,b]$. Portanto,

$$\mathcal{B} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{b}],$$

de onde concluímos que a fórmula $\exists x_{n+1}\phi$ ocorre afirmada em ψ. Como $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$, segue que

$$\mathcal{A} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{a}],$$

e existe a em $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a]$. Por hipótese de indução, a relação

$$\hat{r} = \{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n), (a_{n+1}, b_{n+1})\}$$

é uma relação de $q-1$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a)$ e $(\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$, e r satisfaz a condição de *back*.

□

1.2.3 Relação de Ordem Entre Valores.

O Teorema de Fraïssé afirma que dois pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, em que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são duas S-estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são duas n-uplas, $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, são q-equivalentes, $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b})$, no sentido da seção 1.1, sse existe uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$. A partir dessa caracterização puramente estrutural da relação $\approx_q$, que não envolve fórmulas ou qualquer outro elemento linguístico, obtemos uma caracterização dos valores de primeira ordem que generaliza o fato que valores de primeira ordem de posto 0 e tipo $\left\langle \overbrace{0, ..., 0}^{m} \right\rangle \to 0$ são identificados com sequências de m valores de verdade. Além disso, segue da demonstração da segunda parte do Teorema de Fraïssé que um valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ é uma classe elementar, a saber, a classe dos modelos de uma descrição de estado $\psi \in \Gamma^S(n, q)$.

O Teorema de Fraïssé mostra que os valores de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ e $[(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$ são iguais sse $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$ estão em uma relação de q-isomorfia parcial. Além disso, o Teorema de Fraïssé sugere uma ordem parcial natural entre os valores de primeira ordem.

17 Definição. Fixadas duas S-estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, dizemos que r é uma relação de q-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$ se q é um número natural, $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são sequências finitas de indivíduos em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, de mesmo comprimento, r é uma relação binária, $dom(r)$ é um subconjunto finito do domínio de $\mathcal{A}$, $range(r)$ é um subconjunto finito do domínio de $\mathcal{B}$, os elementos da n-upla $\overline{a}$ estão no $dom(r)$, os elementos da n-upla $\overline{b}$ estão no $range(r)$, para cada a_i em $\overline{a}$ e cada b_i em $\overline{b}$, o par (a_i, b_i) está na relação r e

1. $q = 0$ e se P é uma variável de predicado k-ária em S, e $P^{\mathcal{A}}$ e $P^{\mathcal{B}}$ são os predicados correspondentes a P em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, e a'_1,..., $a'_k \in dom(r)$, b'_1,..., $b'_k \in range(r)$, e o par (a'_i, b'_i) está na relação r, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, então

$$P^{\mathcal{A}}(a'_1, ..., a'_k) \text{ implica } P^{\mathcal{B}}(b'_1, ..., b'_k),$$

ou

2. $q > 0$ e vale a condição de *forth*:

   (a) *(Forth)* Para todo a no domínio de $\mathcal{A}$ existe um b no domínio de $\mathcal{B}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que $\hat{r} : (\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a) \approx_{q-1} (\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$.

Podemos agora estipular que $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q \leq [(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$ sse existe uma relação de q-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$. Note que essa relação é transitiva e antissimétrica:

1. Das desigualdades $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q \leq [(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$ e $[(\mathcal{B}, \overline{b})]_q \leq [(\mathcal{C}, \overline{c})]_q$ segue que $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q \leq [(\mathcal{C}, \overline{c})]_q$.

2. Das desigualdades $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q \leq [(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$ e $[(\mathcal{B}, \overline{b})]_q \leq [(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ segue que $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q = [(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$.

18 Observação. Observe que, se $q > 0$, então $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q \leq [(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$ sse para todo indivíduo a em $\mathcal{A}$ existe um indivíduo b em $\mathcal{B}$ tal que

$$[(\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a)]_{q-1} = [(\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b)]_{q-1}.$$

Em outras palavras, se $q > 0$, então $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q \leq [(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$ sse o conjunto dos valores $[(\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a)]_{q-1}$ obtidos a partir de $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ está contido no conjunto dos valores $[(\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b)]_{q-1}$ obtidos a partir de $[(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$.

A relação de ordem $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q \leq [(\mathcal{B},\overline{b})]_q$, ou, de modo equivalente, a ocorrência de uma relação de q-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A},\overline{a})$ e $(\mathcal{B},\overline{b})$, pode ser caracterizada em termos de fórmulas. Para isso, retomamos os conjuntos de fórmulas $C_{q,n}$, introduzidos como conjuntos auxiliares na definição dos conjuntos $\Gamma^S(n,q)$: O conjunto $C_{0,n}$ é o conjunto de todas as fórmulas atômicas da forma $Px_{i_1}...x_{i_k}$ cujas variáveis livres estão entre x_1,..., x_n. O conjunto $C_{q+1,n}$ é o conjunto de fórmulas $\exists x_{n+1}\phi$, em que $\phi \in \Gamma^S(n+1,q-1)$.

19 Teorema. *Existe uma relação de q-homomorfia parcial entre* $(\mathcal{A},\overline{a})$ *e* $(\mathcal{B},\overline{b})$ *sse para cada fórmula* φ *em* $C_{q,n}$*,*

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \textit{ implica } \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}].$$

Demonstração. Vamos provar primeiro que se há uma relação de q-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A},\overline{a})$ e $(\mathcal{B},\overline{b})$ então para cada fórmula φ em $\bigcup_{p\leq q} C_{p,n}$,

$$\text{se } \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ então } \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}].$$

Seja r uma relação de q-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A},\overline{a})$ e $(\mathcal{B},\overline{b})$. Temos que r é sempre uma relação de 0-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A},\overline{a})$ e $(\mathcal{B},\overline{b})$. De fato, se $q=0$, então r é uma relação de 0-homomorfia parcial; se $q>0$, então existe uma extensão de r que é uma relação de $q-1$-isomorfia parcial, de onde segue que r é uma relação de $q-1$-isomorfia parcial, e, consequentemente, que r é uma relação de 0-isomorfia parcial. Agora podemos provar o resultado por indução na função ordinal dada pela definição dos conjuntos $C_{q,n}$.

Se φ é uma fórmula atômica em $\bigcup_{p\leq q} C_{p,n}$, então

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ implica } \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}],$$

pois r é uma relação de 0-homomorfia parcial.

Suponha que $q>0$ e φ é uma fórmula em $\bigcup_{p\leq q} C_{p,n}$ de posto menor ou igual a $q-1$. Pelo argumento do segundo parágrafo acima, r é uma relação de $q-1$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{A},\overline{a})$ e $(\mathcal{B},\overline{b})$, e, pela primeira parte do Teorema de Fraïssé,

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}],$$

Se φ é $\exists x_{n+1}\phi$ e pertence a $C_{q,n}$, então $rk(\varphi)=q$ e, consequentemente, $q>0$. Suponha que $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$. Nesse caso, existe a em $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a]$. Como $q>0$, existe um b em $\mathcal{B}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r, tal que

$$\hat{r} : (\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a) \approx_{q-1} (\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b).$$

Pela primeira parte do Teorema de Fraïssé, como $rk(\phi)=q-1$,

$$\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a] \text{ sse } \mathcal{B} \models \phi[\overline{b}\,\hat{}\,b].$$

Portanto, $\mathcal{B} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{b}]$.

Agora, vamos provar, por indução em q, que para todo n, se para cada fórmula φ em $C_{q,n}$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ implica } \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}],$$

então a relação $r = \{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\}$ é uma relação de q-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A},\overline{a})$ e $(\mathcal{B},\overline{b})$.

Se $q=0$, então a condição acima é satisfeita pelas fórmulas atômicas, o que implica que r é uma relação de q-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A},\overline{a})$ e $(\mathcal{B},\overline{b})$.

Suponha $q>0$. Se a é um indivíduo em $\mathcal{A}$, então existe uma única descrição de estado ϕ em $\Gamma^S(n+1,q-1)$ tal que $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a]$. Nesse caso,

$$\mathcal{A} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{a}].$$

A fórmula $\exists x_{n+1}\phi$ pertence ao conjunto $C_{q,n}$. Por hipótese,

$$\mathcal{B} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{b}],$$

e existe um indivíduo b em $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} \models \phi[\bar{b}\,\hat{}\,b]$. A partir da segunda parte do Teorema de Fraïssé, segue que

$$(\mathcal{A}, \bar{a}\,\hat{}\,a) \text{ e } (\mathcal{B}, \bar{b}\,\hat{}\,b) \text{ estão em uma relação } \hat{r} \text{ de } q-1\text{-isomorfia parcial.}$$

A relação $\hat{r}$ necessariamente contém o conjunto $\{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\}$, o que significa que $\hat{r}$ estende r. A relação r é, portanto, uma relação de q-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \bar{a})$ e $(\mathcal{B}, \bar{b})$.

□

20 Observação. Seja $\overline{\bigcup_{p\leq q} C_{p,n}}$ o menor conjunto de fórmulas contendo $\bigcup_{p\leq q} C_{p,n}$ e fechado por conjunções e disjunções. Note que o resultado acima pode ser reformulado do seguinte modo:

Existe uma relação de q-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \bar{a})$ e $(\mathcal{B}, \bar{b})$ sse para cada fórmula φ em $\overline{\bigcup_{p\leq q} C_{p,n}}$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \text{ implica } \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}].$$

1.2.4 Teorema da Forma Normal de Hintikka.

Os valores de primeira ordem da forma $[(\mathcal{A}, \bar{a})]_q$ correspondem, biunivocamente, às descrições de estado *satisfatíveis* em $\Gamma^S(n, q)$. A relação entre o valor de primeira ordem e a descrição de estado que o define generaliza a relação entre uma sequência de valores de verdade e a fórmula característica dessa sequência. O próximo resultado, o Teorema da Forma Normal de Hintikka, generaliza as formas normais disjuntivas da lógica proposicional para o contexto de primeira ordem.

21 Teorema. (Teorema da Forma Normal de Hintikka) *Se φ é uma fórmula tal que $rk(\varphi) \leq q$ e $fv(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, então φ é equivalente a uma disjunção*[2] *de fórmulas em $\Gamma^S(n, q)$. Há um procedimento efetivo para encontrar uma tal disjunção, e dizemos que ela é uma forma normal de Hintikka para φ em $\Gamma^S(n, q)$.*

Demonstração. Sob as condições do enunciado, se $\psi \in \Gamma(n, q)$ então

$$\models \forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \varphi) \text{ ou } \models \forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \neg\varphi),$$

e ambas ocorrem apenas no caso em que ψ é insatisfatível. De fato, suponha que não é o caso que $\models \forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \varphi)$ ou $\models \forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \neg\varphi)$. Portanto, existem estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, e n-uplas $\bar{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\bar{b}$ em $\mathcal{B}$, tais que

$$\mathcal{A} \models \neg(\psi \to \varphi)[\bar{a}] \text{ e } \mathcal{B} \models \neg(\psi \to \neg\varphi)[\bar{b}].$$

Portanto, $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$ e $\mathcal{A} \models \neg\varphi[\bar{a}]$, e $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]$ e $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$.

Como

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \text{ e } \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}],$$

segue do Teorema de Fraïssé, segunda parte, que

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \bar{b}).$$

Contudo, $\mathcal{A} \models \neg\varphi[\bar{a}]$, $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$ e φ é uma fórmula de posto quantificacional menor ou igual a q. Isso é impossível, pelo teorema de Fraïssé, primeira parte, e temos que

$$\models \forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \varphi) \text{ ou } \models \forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \neg\varphi).$$

Para encontrar uma forma normal de Hintikka, podemos aplicar o seguinte algoritmo: Para cada $\psi \in \Gamma^S(n, q)$,

$$\text{procure por uma prova de } \forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \varphi) \text{ } e \text{ por uma prova de } \forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \neg\varphi).$$

[2] Convencionamos que a disjunção vazia é permitida. Uma fórmula φ é equivalente a uma disjunção vazia sse φ é insatisfatível.

Pelo argumento acima, pelo menos uma delas deve ser encontrada, e quando uma delas for encontrada encerre a busca. Se a prova encontrada é uma prova de $\forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \varphi)$, então guarde essa ψ; se a prova encontrada é uma prova de $\forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \neg\varphi)$, então descarte ψ. Ao final, ficamos com um conjunto de ψ's (aquelas que não foram descartadas). Faça a disjunção desse conjunto, e denote essa disjunção por ϕ.

Agora, podemos provar que

$$\models \forall x_1 ... \forall x_n(\varphi \leftrightarrow \phi).$$

De fato, como cada fórmula disjunta[3] em ϕ implica φ, segue que ϕ implica φ. Por outro lado, suponha que existem uma estrutura $\mathcal{A}$ e uma n-upla $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$, tal que

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{A} \models \neg\phi[\overline{a}].$$

Como a disjunção das fórmulas em $\Gamma^S(n, q)$ é válida, existe uma $\psi \in \Gamma^S(n, q)$, que foi descartada no processo descrito acima, e tal que $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$. Contudo, como ψ foi descartada, uma prova de

$$\forall x_1 ... \forall x_n(\psi \to \neg\varphi)$$

foi encontrada, e essa fórmula é válida. Portanto, $\mathcal{A} \models \neg\varphi[\overline{a}]$, que é uma contradição.

$\square$

22 Observação. Se a satisfatibilidade das fórmulas $\psi \in \Gamma^S(n, q)$ fosse decidível, então a validade das fórmulas de posto quantificacional menor ou igual a q, com variáveis livres entre x_1,..., x_n, também seria decidível. De fato, como a disjunção de *todas* as fórmulas em $\Gamma^S(n, q)$ é válida, uma disjunção ϕ de *algumas* fórmulas em $\Gamma^S(n, q)$ é válida sse as demais fórmulas em $\Gamma^S(n, q)$, ou seja, aquelas que não ocorrem como fórmulas disjuntas em ϕ, são insatisfatíveis.

Na próxima seção veremos que o teorema da forma normal de Hintikka estabelece uma representação das funções de primeira ordem em tabelas finitas e computáveis, que generaliza a representação das funções de verdade em tabelas de verdade.

[3] Se ϕ é uma disjunção da forma $\phi_1 \vee ... \vee \phi_m$, para algum $m \in \omega$, dizemos que as fórmulas ϕ_i, para $i \in \{1, ..., m\}$, são fórmulas *disjuntas* em ϕ. De modo análogo, se ϕ é uma conjunção da forma $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_m$, para algum $m \in \omega$, dizemos que as fórmulas ϕ_i, $i \in \{1, ..., m\}$, são fórmulas *conjuntas* em ϕ.

1.3 A Completude Funcional da Lógica de Primeira Ordem

1.3.1 Relação de Expressão Entre Fórmulas e Funções.

A relação primária entre fórmulas e funções de primeira ordem é a relação de expressão:

23 Definição. Seja φ uma fórmula tal que $rk(\varphi) = q$ e $fv(\varphi) = \{x_1, ..., x_n\}$, e seja S a assinatura de φ. Seja $\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ uma função de primeira ordem. Dizemos que φ *expressa* Q se para todo par $(\mathcal{A}, \overline{a})$, em que $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura e $\overline{a}$ é uma n-upla de indivíduos em $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ sse } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}.$$

24 Observação. Cada fórmula φ, cujas variáveis livres são x_1,..., x_n, expressa uma única função de primeira ordem. Essa restrição das variáveis livres não é relevante: Suponha que ϕ é uma fórmula tal que $fv(\phi) = \{y_1, ..., y_n\}$, em que y_1,..., y_n estão em ordem alfabética. Tomando uma variante de ϕ se necessário, podemos supor que x_1,..., x_n não ocorrem quantificadas em ϕ. Seja φ a fórmula $\phi_{y_1 \ldots y_n}[x_1 \ldots x_n]$. As fórmulas ϕ e φ expressam a mesma noção. Portanto, a função de primeira ordem expressa por ϕ pode ser definida como a única função de primeira ordem expressa por φ. Poderíamos, desse modo, estender a relação de expressão para qualquer fórmula na assinatura canônica de primeira ordem.

Assim como a função de verdade expressa por uma fórmula proposicional é um objeto minimal que compreende exatamente as condições de verdade da fórmula, a função de primeira ordem Q expressa por uma fórmula de primeira ordem φ é um objeto minimal que compreende exatamente as condições de aplicabilidade da fórmula φ e tal que os parâmetros de classificação de Q casam perfeitamente com $rk(\varphi)$, $fv(\varphi)$, e a assinatura de φ.

É muito importante considerar uma relação secundária de expressão, a *expressão fraca*, em que a condição de pareamento perfeito entre os parâme-tros de classificação da função de primeira ordem e a assinatura, o conjunto de variáveis livres e o posto quantificacional da fórmula é enfraquecida. Na verdade, a relação de expressão fraca será mais útil do que a relação de expressão. Isso se deve ao fato que, no caso de uma assinatura proposicional S (todas as variáveis de predicado de S são 0-árias), não há uma fórmula que expressa uma função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$, para $n > 0$.

25 Definição. Sejam φ uma fórmula e $\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ uma função de primeira ordem. Dizemos que φ *expressa fracamente* a função de primeira ordem Q se $fv(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, a assinatura de φ está contida na assinatura S, e

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ sse } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}.$$

Se

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

é uma função de primeira ordem expressa por φ então φ expressa fracamente Q. Suponha que φ expressa fracamente Q e, além disso, que ψ é uma fórmula na assinatura S, com variáveis livres entre x_1,..., x_n. Nessas condições ψ expressa fracamente Q sse

$$\models \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Considere uma assinatura não-vazia S. Assuma que ou S é constituída de variáveis de predicado 0-árias apenas ou $n + q > 0$. Nessas condições, cada valor de primeira ordem em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ é definido por uma fórmula em $\Gamma^S(n, q)$. Portanto, uma função de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

que não é constante com imagem igual a $\{\mathbf{F}\}$, é expressa pela disjunção das fórmulas em $\Gamma^S(n,q)$ que definem os valores de primeira ordem em $\mathrm{Q}^{-1}(\{\mathbf{T}\})$.[4]

Nós já observamos que para cada fórmula φ tal que nenhuma variável individual além de x_1,..., x_n ocorre livre, para cada assinatura S contendo todas as variáveis de predicado que ocorrem em φ e para cada número $q \geq rk(\varphi)$, existe uma função de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

tal que Q é (fracamente) expressa por φ. Agora, apresentamos a conversa que, essencialmente, enuncia o conteúdo da convenção 4:

26 Proposição. Completude Funcional da Lógica de Primeira Ordem.
Toda função de primeira ordem é expressa por uma fórmula.

Demonstração. Seja Q uma função de primeira ordem,

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}.$$

De acordo com a convenção 4, vale que ou S é constituída por variáveis de predicado 0-árias apenas ou $n + q > 0$. Vamos provar separadamente os dois casos.

Caso 1):

Se S é constituída por variáveis de predicado 0-árias apenas, segue que $n = 0$, e a função de primeira ordem Q é naturalmente identificada com uma função de verdade. Nesse caso, $\Gamma^S(n, 0)$ é não vazio e cada valor de primeira ordem em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ é definido por uma fórmula de $\Gamma^S(n, 0)$.

Se Q é constante e com imagem igual a $\{\mathbf{F}\}$, então Q é expressa por uma fórmula da forma $\exists x_1 ... \exists x_q(\psi \wedge \neg\psi)$, para alguma $\psi \in \Gamma^S(n, 0)$.

Caso contrário, Q é expressa pela fórmula obtida a partir da disjunção não-vazia φ daquelas descrições de estado em $\Gamma^S(n, 0)$ que correspondem aos valores de primeira ordem em $\mathrm{Q}^{-1}(\{\mathbf{T}\})$ pela prefixação dos q quantificadores inócuos $\exists x_1$,..., $\exists x_q$.

Caso 2):

Se $n + q > 0$, então $\Gamma^S(n, q)$ é não vazio.

Se Q é constante e com imagem igual a $\{\mathbf{F}\}$, então Q é expressa then por uma fórmula da forma $\psi \wedge \neg\psi$, para alguma $\psi \in \Gamma^S(n, q)$.

Caso contrário, Q é expressa pela disjunção não-vazia φ daquelas descrições de estado em $\Gamma^S(n, q)$ que correspondem aos valores de primeira ordem em $\mathrm{Q}^{-1}(\{\mathbf{T}\})$.

□

1.3.2 Tabelas de Primeira Ordem.

As funções de primeira ordem podem ser representadas por tabelas finitas e computáveis, o que generaliza a representação das funções de verdade pelas tabelas de verdade.

27 Definição. Seja S uma assinatura finita, ou seja, uma subsequência finita da sequência de variáveis de predicado da assinatura canônica de primeira ordem. Uma tabela de primeira ordem de posto q para n variáveis individuais livres e variáveis de predicado em S é uma matriz com l linhas e 2 colunas, em que l é o número de descrições de estado em $\Gamma^S(n, q)$. [5] A primeira coluna

[4] Lembre-se da convenção 4, segundo a qual, para cada função de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

vale que ou S é constituída de variáveis de predicado 0-árias apenas ou $n + q > 0$.

[5] Note que, se m é o número de fórmulas atômicas da forma $Px_{i_1}...x_{i_k}$ na assinatura S cujas variáveis individuais estão entre x_1,..., x_{n+q}, então

$$l = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^m}}}}}$$

com $q + 1$ potências iteradas. No caso proposicional, $q = 0$ e o número de linhas da tabela de verdade é 2^m, como é bem conhecido.

da tabela é constituída pelas descrições de estado em $\Gamma^S(n, q)$. A segunda coluna da tabela é constituída por valores de verdade, **T** ou **F**.

28 Definição. Seja S uma assinatura finita. Dizemos que uma função de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

é *representada* por uma tabela de primeira ordem de posto q, para n variáveis individuais livres e variáveis de predicado em S se para cada valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$,

$\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}$ sse a linha correspondente a $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ na tabela tem valor **T** na segunda coluna.

Podemos representar graficamente uma tabela de primeira ordem do seguinte modo:

ψ_1	**T**
ψ_2	**F**
...	...
ψ_l	**T**

29 Observação. Dada uma função de primeira ordem Q, sempre há uma tabela de primeira ordem que representa Q. A condição sobre uma tabela de primeira ordem para que ela represente Q não impõe restrição alguma sobre as linhas correspondentes às descrições de estado insatisfatíveis.

30 Observação. As tabelas de verdade para m variáveis proposicionais podem ser obtidas a partir das tabelas de primeira ordem de posto 0, para 0 variáveis individuais e para uma assinatura S constituída por m variáveis de prdicado 0-árias. Uma tal tabela de primeira ordem é uma tabela de verdade em que a primeira coluna é constituída pelas fórmulas características das atribuições possíveis de valores de verdade para as m variáveis proposicionais.

1.3.3 Composição de Tabelas de Primeira Ordem.

Se Q é a função de primeira ordem expressa por φ, então o procedimento efetivo para encontrar uma forma normal de Hintikka para φ fornece um método para construir uma tabela de primeira ordem que representa Q. De fato, dada uma forma normal de Hintikka H para φ, com mesmo posto e mesmas variáveis de predicado e variáveis individuais livres que φ, podemos construir uma tabela de primeira ordem que representa Q do seguinte modo: Se ψ_i é a descrição de estado na i-ésima linha da primeira coluna da tabela, coloque **T** na i-ésima linha da segunda coluna sse ψ_i ocorre como uma fórmula disjunta em H. A forma normal de Hintikka é a generalização da formal normal disjuntiva, e a relação entre as formas normais de Hintikka e as tabelas de primeira ordem generaliza a relação entre as formas normais disjuntivas e as tabelas de verdade: Uma forma normal de Hintikka pode ser vista como uma fórmula característica de uma tabela de primeira ordem. Por isso, vamos analisar com mais cuidado o problema de calcular uma forma normal de Hintikka para uma fórmula de primeira ordem.

O procedimento efetivo para calcular uma forma normal de Hintikka para uma fórmula φ, apresentado na subseção 1.2.4, não é semelhante ao procedimento para calcular a tabela de verdade para uma fórmula proposicional. O cálculo efetivo de uma tabela de verdade para uma fórmula proposicional complexa φ é realizado em etapas. O cálculo do valor de verdade de φ, correspondente a um valor proposicional para as variáveis proposicionais que ocorrem em φ,[6] é realizado através de uma série de cálculos simples de valores de verdade para uma sequência de subfórmulas de φ, crescendo em complexidade das subfórmulas atômicas até φ. Há um número finito de regras simples

[6]Lembre-se que uma descrição de estado para um valor proposicional para uma sequência finita de variáveis proposicionais é uma conjunção em que cada fórmula conjunta é uma variável proposicional ou sua negação, e cada variável proposicional ocorre apenas uma vez na conjunção.

que são suficientes para determinar o valor de verdade da subfórmula correspondente em cada passo dessa série de cálculos. Essas regras fazem referência apenas às subfórmulas imediatas da fórmula cujo valor de verdade deve ser determinado, e não necessariamente ao valor proposicional para a sequência de variáveis proposicionais relevante. Portanto, o cálculo do valor de verdade para φ correspondente a um valor proposicional pode ser obtido a partir de uma *composição* de uma série de cálculos simples. Agora, vamos mostrar que um caráter composicional subsiste quando passamos ao caso geral das tabelas de primeira ordem.

Dizemos de uma fórmula ϕ que ela é *elementar* se ϕ é atômica ou da forma $\exists y\gamma$. Toda fórmula de primeira ordem é uma combinação booleana de um número finito de fórmulas elementares ou seja, se φ é uma fórmula de primeira ordem, então existe uma sentença sem quantificadores β, obtida a partir de variáveis de predicado 0-árias pela aplicação de conectivos, e tal que φ é obtida a partir de β pela substituição das variáveis de predicado 0-árias por fórmulas elementares. Para obter uma tal β basta identificar as ocorrências de conectivos em φ. Dizemos que φ é $\beta(\phi_1, ..., \phi_m)$, para alguma sentença sem quantificadores β, para explicitar, de modo abreviado, que φ é uma combinação booleana das fórmulas elementares ϕ_1,..., ϕ_m.

Seja φ uma fórmula de primeira ordem tal que $fv(\varphi) = \{x_1, ..., x_n\}$ e $rk(\varphi) = q$. Seja S a assinatura de φ. A fórmula φ é

$$\beta(\phi_1, ..., \phi_m),$$

para alguma sentença sem quantificadores β, e algumas fórmulas elementares ϕ_1,..., ϕ_m. Vamos construir indutivamente uma forma normal de Hintikka para φ.

Se $q = 0$, então as fórmulas ϕ_1,..., ϕ_m são atômicas cujas variáveis livres estão entre x_1,..., x_n. Seja ϕ uma fórmula atômica, na assinatura S, e com variáveis entre x_1,..., x_n. Como

$$\beta(\phi_1, ..., \phi_m) \leftrightarrow \beta(\phi_1, ..., \phi_m) \wedge (\phi \vee \neg\phi),$$

podemos substituir $\beta(\phi_1, ..., \phi_m)$ por $\beta(\phi_1, ..., \phi_m) \wedge (\phi \vee \neg\phi)$ no caso em que ϕ não ocorre entre ϕ_1,..., ϕ_m. Fazendo essas substituições se necessário, podemos supor que *todas* as fórmulas atômicas, na assinatura S, cujas variáveis livres estão entre x_1,..., x_n ocorrem entre ϕ_1,..., ϕ_m. Tomando a forma normal disjuntiva de β, denotada por $d.n.f.(\beta)$, temos

$$\beta(\phi_1, ..., \phi_m) \leftrightarrow d.n.f.(\beta)(\phi_1, ..., \phi_m).$$

É fácil checar que $d.n.f.(\beta)(\phi_1, ..., \phi_m)$ é uma disjunção de descrições de estado em $\Gamma^S(n, 0)$.

Se $q > 0$, então para algum $i \in \{1, ..., m\}$, a fórmula elementar ϕ_i é da forma $\exists y\gamma_i$. Acrescentando quantificadores inócuos se necessário, podemos supor que ϕ_1,..., ϕ_m possuem todas o mesmo posto quantificacional q. Portanto, para todo $i \in \{1, ..., m\}$, a fórmula ϕ_i é da forma $\exists y\gamma_i$. Tomando variantes se necessário, podemos supor que y é x_{n+1}, e $\exists y\gamma_i$ é $\exists x_{n+1}\gamma_i$. Desse modo,

$$\beta(\phi_1, ..., \phi_m) \leftrightarrow \beta(\exists x_{n+1}\gamma_1, ..., \exists x_{n+1}\gamma_m).$$

Assumimos que, para todo $i \in \{1, ..., m\}$, uma forma normal de Hintikka já foi construída para a fórmula γ_i, pois γ_i tem posto quantificacional igual a $q - 1$. Denotamos por $\psi_1^i \vee ... \vee \psi_{k_i}^i$ a forma normal de Hintikka já construída para γ_i, em que as fórmulas ψ_j^i são descrições de estado em $\Gamma^S(n + 1, q - 1)$. Temos que,

$$\beta(\exists x_{n+1}\gamma_1, ..., \exists x_{n+1}\gamma_m)$$

é equivalente a

$$\beta(\exists x_{n+1}(\psi_1^1 \vee ... \vee \psi_{k_1}^1), ..., \exists x_{n+1}(\psi_1^m \vee ... \vee \psi_{k_m}^m)).$$

Distribuindo o quantificador na disjunção, concluímos que

$$\beta(\exists x_{n+1}(\psi_1^1 \vee ... \vee \psi_{k_1}^1), ..., \exists x_{n+1}(\psi_1^m \vee ... \vee \psi_{k_m}^m))$$

é equivalente a

$$\beta(\exists x_{n+1}\psi_1^1 \vee ... \vee \exists x_{n+1}\psi_{k_1}^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_1^m \vee ... \vee \exists x_{n+1}\psi_{k_m}^m).$$

A fórmula $\beta(\exists x_{n+1}\psi_1^1 \vee ... \vee \exists x_{n+1}\psi_{k_1}^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_1^m \vee ... \vee \exists x_{n+1}\psi_{k_m}^m)$ é, por sua vez, uma combinação booleana das fórmulas $\exists x_{n+1}\psi_j^i$:

$$\beta(\exists x_{n+1}\psi_1^1 \vee ... \vee \exists x_{n+1}\psi_{k_1}^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_1^m \vee ... \vee \exists x_{n+1}\psi_{k_m}^m)$$

é

$$\alpha(\exists x_{n+1}\psi_1^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_{k_1}^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_1^m, ..., \exists x_{n+1}\psi_{k_m}^m).$$

Novamente, podemos supor que *todas* as descrições de estado no conjunto $\Gamma^S(n+1, q-1)$ ocorrem em

$$\alpha(\exists x_{n+1}\psi_1^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_{k_1}^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_1^m, ..., \exists x_{n+1}\psi_{k_m}^m).$$

Tomando a forma normal disjuntiva de α, denotada por $d.n.f.(\alpha)$, segue das equivalências acima que:

$$\beta(\phi_1, ..., \phi_m)$$

é equivalente a

$$d.n.f.(\alpha)(\exists x_{n+1}\psi_1^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_{k_1}^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_1^m, ..., \exists x_{n+1}\psi_{k_m}^m).$$

É fácil checar que

$$d.n.f.(\alpha)(\exists x_{n+1}\psi_1^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_{k_1}^1, ..., \exists x_{n+1}\psi_1^m, ..., \exists x_{n+1}\psi_{k_m}^m)$$

é uma disjunção de descrições de estado em $\Gamma^S(n, q)$.

Se φ expressa a função de primeira ordem Q, então a construção recursiva de uma disjunção de descrições de estado em $\Gamma^S(n, q)$ equivalente a φ apresentada acima fornece método composicional para calcular uma tabela de primeira ordem que representa Q.

Capítulo 2

Sistemas de Funções de Primeira Ordem

2.1 A Relação de Definição entre Noções da Lógica

Neste capítulo vamos caracterizar precisamente a relação de definição entre noções da lógica de primeira ordem em termos de operações com funções de primeira ordem. Em outras palavras, vamos definir os subsistemas conceituais da lógica de primeira ordem, ou seja, os subconjuntos de noções da lógica de primeira ordem fechados por definições. Essa definição fornece uma apreensão da lógica de primeira ordem como uma estrutura matemática, em que os elementos do domínio da estrutura são as funções de primeira ordem, as operações da estrutura são as operações básicas definidas na próxima seção, e a relação da estrutura é a relação de consequência entre funções de primeira ordem. Os vários sistemas de prova para a lógica de primeira ordem podem ser vistos como *apresentações* dessa estrutura: A introdução de um tal sistema é similar ao processo de introdução de coordenadas no espaço.

Nas apresentações da lógica de primeira ordem lidamos com fórmulas como objetos básicos. Contudo, a diferença entre $p \wedge q$ e $\neg(\neg p \vee \neg q)$ é uma diferença que subsiste apenas no plano das apresentações, e não no plano da lógica, e por isso procuramos uma estrutura independente de apresentações. A tentativa de tomar as classes de equivalência de fórmulas pela relação de equivalência material não resolve o problema: Rx_1x_2 e Rx_3x_4 dizem a mesma coisa do ponto de vista lógico, e não são materialmente equivalentes. Poderíamos tentar outra relação de equivalência, mas há um problema nas tentativas de estabelecer quais são os objetos básicos da lógica a partir de classe de equivalência de fórmulas: Em uma tal proposta, os objetos são obtidos a partir da escolha de uma apresentação da lógica por meio de fórmulas, que possui especificidades linguísticas de natureza não-lógica, o que vai na direção oposta do que queremos.

Conforme já adiantamos nos parágrafos acima, para definir a lógica de primeira ordem como uma estrutura independente das apresentações (em termos de sistemas de prova) vamos responder três perguntas básicas: (i) O que é o domínio dessa estrutura? (ii) Quais são as operações primitivas dessa estrutura? (iii) Quais são as relações primitivas dessa estrutura?

Uma resposta para essas questões deve satisfazer algumas condições. Assumimos que a lógica, de um modo geral, deve conter uma análise da matemática. Em matemática, podemos isolar dois componentes centrais: Teoremas e definições. Portanto, a lógica deve conter uma análise de ambos, e esses ingredientes devem estar presentes em uma estrutura independente de apresentações para a lógica de primeira ordem.

Para lidar com esse problema, é útil analisar um caso em que o mesmo está resolvido. A lógica proposicional pode ser vista como uma estrutura matemática de modo completamente satisfatório: O domínio da estrutura é constituído pelas funções de verdade. As funções de verdade são adequadas para o papel de indivíduos da estrutura porque são os objetos puramente lógicos expressos pelas fórmulas da lógica proposicionnal. Conforme vimos no capítulo 1, as funções de primeira ordem são o correlato de primeira ordem das funções de verdade, e, por isso, tomamos as funções de primeira ordem como os objetos adequados para constituir o domínio da estrutura.

Outro ingrediente da estrutura é o conjunto de relações primitivas. Para a lógica, isso não é problemático: A única relação primitiva é a relação de consequência entre funções de primeira ordem, que generaliza de modo óbvio a relação de consequência entre funções de verdade. Por exemplo, para as funções de primeira ordem Q_1,..., Q_k e Q cujo domínio é o conjunto $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$, definimos

$$\{\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_k\} \models \mathrm{Q}$$

sse para todo valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$,

$$\text{se } \mathrm{Q}_i([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}, \text{ para todo } i \in \{1, ..., k\}, \text{ então } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}.$$

Podemos definir a relação de consequência para funções de primeira ordem em geral, e não apenas entre aquelas que possuem o mesmo domínio. Para isso, basta utilizar as operações básicas definidas na próxima seção para substituir as funções Q_1,..., Q_k e Q por funções "equivalentes" definidas no mesmo domínio. É importante observar que a relação de consequência deve ser tomada como uma relação, e não como uma operação, pois em uma subestrutura devemos considerar a relação de consequência apenas entre noções que podemos expressar com os recursos da própria subestrutura.

Resta determinar as operações primitivas da estrutura: O problema de determiná-las equivale ao problema de estabelecer o que é uma subestrutura da estrutura. No caso proposicional, o domínio de uma subestrutura da estrutura constituída por todas as funções de verdade é um conjunto fechado por *definições*: Um conjunto U de funções de verdade é fechado por definições se contém qualquer função de verdade obtida a partir de funções de verdade em U por composições e π-operações[1]. De modo equivalente, o conjunto deve conter qualquer função de verdade expressa fracamente por uma fórmula na linguagem contendo conectivos correspondentes às funções de verdade do conjunto original e variáveis proposicionais. Para entender o que seria uma generalização disso para a lógica de primeira ordem, vamos analisar um exemplo:

As noções da lógica de primeira ordem são obtidas, umas a partir das outras por definição. Dizemos, por exemplo, que o quantificador universal $\forall$ é definido em termos do quantificador existencial e do conectivo de negação como $\neg\exists\neg$. Isso não significa que estamos convencionando abreviar $\neg\exists\neg$ como $\forall$. Não se trata de uma introdução um novo símbolo não-interpretado. Isso significa que é possível capturar a semântica do quantificador universal por meio de uma combinação de negações com o quantificador existencial. Podemos entender o significado dessa definição em termos de funções de primeira ordem de dois modos:

Primeiro, se $\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n+1)/_{\approx_{q-1}} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ é uma função de primeira ordem, podemos definir as funções

$$\exists\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

definida por:

$$\exists\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a)]_{q-1}) = \mathbf{T} \text{ para algum indivíduo } a \text{ em } \mathcal{A},$$

e

$$\forall\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

definida por:

$$\forall\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a)]_{q-1}) = \mathbf{T} \text{ para todo indivíduo } a \text{ em } \mathcal{A}.$$

É fácil checar que as definições acima não dependem da escolha do representante $(\mathcal{A}, \overline{a})$ em $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$, o que é um caso particular da proposição 32 na seção seguinte. Além disso, para qualquer função de primeira ordem Q' podemos definir a função $\neg\mathrm{Q}'$ do modo óbvio. A função $\forall\mathrm{Q}$ é igual a uma composição do tipo $\neg\exists\neg\mathrm{Q}$. Portanto, podemos entender que uma noção da lógica de primeira ordem, como uma quantificação universal, é definida em termos de outras noções sse a função de

[1] Composições e π-operações são definidas em geral, para todas as funções de primeira ordem, na seção seguinte.

primeira ordem correspondente está no conjunto das funções de primeira ordem obtidas a partir de outras funções de primeira ordem por certas operações.

Segundo, suponha que φ é uma fórmula tal que $rk(\varphi) = q - 1$ e $fv(\varphi) = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$, e seja S a assinatura de φ. Se Q é a função de primeira ordem expressa por φ, então $\neg\exists x_{n+1}\neg\varphi$ expressa a função de primeira ordem

$$\forall \mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}.$$

Nesse caso, podemos entender que uma noção da lógica de primeira ordem é definida em termos de outras noções sse a função de primeira ordem correspondente está no conjunto das funções de primeira ordem expressas fracamente por fórmulas que utilizam apenas certos recursos.

O teorema 52 na seção 2.4 mostra que uma formulação precisa (e intuitivamente correta) dos dois modos de compreender a relação de definição em termos de funções de primeira ordem são equivalentes. Esse teorema generaliza o resultado mencionado acima que, no contexto proposicional, são equivalentes as seguintes propriedades para um conjunto U de funções de verdade: (i) conter qualquer função de verdade obtida a partir de funções de verdade em U por composições e π-operações, e (ii) conter qualquer função de verdade expressa fracamente por uma fórmula na linguagem contendo conectivos correspondentes às funções de verdade em U e variáveis proposicionais.

2.2 Operações Básicas com Funções de Primeira Ordem

Apresentamos a seguir quatro operações básicas com funções de primeira ordem que serão utilizadas para caracterizar a relação de definição entre noções da lógica de primeira ordem.

2.2.1 Composições de Funções de Primeira Ordem.

Uma função de primeira ordem $\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ define um predicado n-ário O que atribui para cada estrutura $\mathcal{A} \in \Lambda|_S$, um conjunto de n-uplas $\mathrm{O}^{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{A}$ tal que

$$\mathrm{O}^{\mathcal{A}}(\overline{a}) \text{ sse } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T},$$

para toda n-upla de indivíduos de $\mathcal{A}$. Utilizamos a notação $\mathrm{O}^{\mathcal{A}}(\overline{a})$ em vez de $\overline{a} \in \mathrm{O}^{\mathcal{A}}$.

31 Notação. Sejam S uma assinatura, n_1, ..., n_m uma sequência não-decrescente de números naturais, e Q_1,..., Q_m funções de primeira ordem,

$$\mathrm{Q}_i : \prod(\Lambda|_S, n_i)/_{\approx_{q_i}} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Se $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura, então cada função Q_i define um predicado n_i-ário $\mathrm{O}_i^{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{A}$. Nessas condições, podemos definir uma nova estrutura cujo domínio coincide com o domínio de $\mathcal{A}$, e cujos predicados são $\mathrm{O}_1^{\mathcal{A}}$, ..., $\mathrm{O}_m^{\mathcal{A}}$. Denotaremos essa estrutura por $(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A})$.

32 Proposição. *Utilizando a notação 31, considere $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas estruturas, e sejam $\overline{a}$ uma n-upla em $\mathcal{A}$, e $\overline{b}$ uma n-upla em $\mathcal{B}$. Nessas condições, se*

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_{q+\max\{q_1,...,q_m\}} (\mathcal{B}, \overline{b}),$$

então

$$((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a}) \approx_q ((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b}),$$

para todo número natural q.

Demonstração. Vamos provar o seguinte fato por indução em q: Para todo $q \in \omega$, para todo $n \in \omega$ e para todas as n-uplas $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, se r é a relação $\{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\}$ e

$$r : (\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_{q+\max\{q_1,...,q_m\}} (\mathcal{B}, \overline{b})$$

então

$$r : ((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a}) \approx_q ((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b}).$$

$q = 0$: Nesse caso, precisamos provar que, para cada $i \in \{1, .., m\}$, se a'_1,..., $a'_{n_i} \in dom(r)$, b'_1,..., $b'_{n_i} \in range(r)$, e o par (a'_j, b'_j) está na relação r, para cada $j \in \{1, ..., n_i\}$, então

$$\mathrm{O}_i^{\mathcal{A}}(a'_1, ..., a'_{n_i}) \text{ sse } \mathrm{O}_i^{\mathcal{B}}(b'_1, ..., b'_{n_i}).$$

Como para todo $j \in \{1, ..., n_i\}$, (a'_j, b'_j) está na relação

$$\{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\},$$

existe uma função $\nu : \{1, ..., n_i\} \to \{1, ..., n\}$ tal que $(a'_j, b'_j) = (a_{\nu(j)}, b_{\nu(j)})$.

Nessas condições, $\mathrm{O}_i^{\mathcal{A}}(a'_1, ..., a'_{n_i})$ sse $\mathrm{O}_i^{\mathcal{A}}(a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n_i)})$. Por definição,

$$\mathrm{O}_i^{\mathcal{A}}(a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n_i)}) \text{ sse } \mathrm{Q}_i([(\mathcal{A}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n_i)}))]_{q_i}) = \mathbf{T}.$$

Pelas observações 9 e 10 do capítulo 1,

$$[(\mathcal{A}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n_i)}))]_{q_i} = [(\mathcal{B}, (b_{\nu(1)}, ..., b_{\nu(n_i)}))]_{q_i}.$$

Portanto,

$$\mathrm{Q}_i([(\mathcal{A},(a_{\nu(1)},...,a_{\nu(n_i)}))]_{q_i}) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathrm{Q}_i([(\mathcal{B},(b_{\nu(1)},...,b_{\nu(n_i)}))]_{q_i}) = \mathbf{T}.$$

Além disso,

$$\mathrm{Q}_i([(\mathcal{B},(b_{\nu(1)},...,b_{\nu(n_i)}))]_{q_i}) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathrm{O}_i^{\mathcal{B}}(b_{\nu(1)},...,b_{\nu(n_i)}),$$

e

$$\mathrm{O}_i^{\mathcal{B}}(b_{\nu(1)},...,b_{\nu(n_i)}) \text{ sse } \mathrm{O}_i^{\mathcal{B}}(b'_1,...,b'_{n_i}).$$

Das equivalências acima segue que

$$\mathrm{O}_i^{\mathcal{A}}(a'_1,...,a'_{n_i}) \text{ sse } \mathrm{O}_i^{\mathcal{B}}(b'_1,...,b'_{n_i}).$$

$q > 0$: Precisamos provar a condição de *Back-and-Forth*: Se a é um indivíduo em $\mathcal{A}$, então, por hipótese, existe b no domínio de $\mathcal{B}$, e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que

$$\hat{r} : (\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a) \approx_{q-1+\max\{q_1,...,q_m\}} (\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b).$$

Pela observação 9 do capítulo 1, podemos assumir que $\hat{r}$ é a relação binária $\{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n),(a,b)\}$. Por hipótese de indução,

$$\hat{r} : ((\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a}\,\hat{}\,a) \approx_{q-1} ((\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b\,\hat{}\,b}),$$

como queríamos.

Analogamente, se b é um indivíduo em $\mathcal{B}$, então existe a no domínio de $\mathcal{A}$, e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que

$$\hat{r} : ((\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a}\,\hat{}\,a) \approx_{q-1} ((\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b\,\hat{}\,b}).$$

Isso encerra a prova.

□

33 Observação. Utilizando a notação 31, a proposição 32 garante que dado um valor de primeira ordem $[(\mathcal{A},\overline{a})]_{q+\max\{q_1,...,q_m\}}$, o valor

$$[((\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}),\overline{a})]_q$$

está bem definido.

34 Definição. Sejam S e S' assinaturas, n um número natural,

$$n_1,..., n_m$$

uma sequência não decrescente de números naturais,

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_{S'}, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T},\mathbf{F}\}$$

e Q_1,..., Q_m funções de primeira ordem,

$$\mathrm{Q}_i : \prod(\Lambda|_S, n_i)/_{\approx_{q_i}} \to \{\mathbf{T},\mathbf{F}\},$$

para cada $i \in \{1,...,m\}$. Suponha que S' é de tipo $\langle n_1,...,n_m\rangle$. Nessas condições definimos a *composição* da função Q com as funções Q_1,..., Q_m como a função de primeira ordem

$$\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m) : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_{q+\max\{q_1,...,q_m\}}} \to \{\mathbf{T},\mathbf{F}\}$$

tal que

$$\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)([(\mathcal{A},\overline{a})]_{q+\max\{q_1,...,q_m\}}) = \mathrm{Q}([((\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}),\overline{a})]_q).$$

35 Exemplo. Sejam S a assinatura com m variáveis de predicado, R_1,..., R_m, em ordem alfabética, de aridades n_1,..., n_m, respectivamente, e $i \in \{1,...,m\}$. Dizemos que a função de primeira ordem

$$P_i^S : \prod(\Lambda|_S, n_i)/_{\approx_0} \to \{\mathbf{T},\mathbf{F}\},$$

expressa fracamente por $R_i x_1 ... x_{n_i}$ é a *projeção no i-ésimo argumento.* Em outras palavras, P_i^S é definida por:

$$P_i^S([(\mathcal{A}, (a_1, ..., a_{n_i}))]_0) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathcal{A} \models R_i x_1 ... x_{n_i}[(a_1, ..., a_{n_i})].$$

Se Q é uma função de primeira ordem,

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

e P_1^S,..., P_m^S são as projeções, então

$$\mathrm{Q}(P_1^S, ..., P_m^S) = \mathrm{Q}.$$

2.2.2 ν-Operações.

Seja $\nu : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$ uma função. Para cada n-upla $\overline{a}$ de indivíduos de uma estrutura $\mathcal{A}$, podemos definir a n'-upla

$$\nu^*(\overline{a}) = (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n')}).$$

Seja φ' uma fórmula tal que $fv(\varphi') \subseteq \{x_1, ..., x_{n'}\}$, e tal que x_1,..., x_n não ocorrem como variáveis ligadas em φ'. Nessas condições, dizemos que $\nu(\varphi')$ está definida e é a fórmula obtida a partir de φ' pela substituição de cada variável individual x_i que ocorre livre em φ', para $i \in \{1, ..., n'\}$, por $x_{\pi(i)}$.

36 Lema. *Se $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura, $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{A}$, e*

$$\nu : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$$

é uma função, e φ' é uma fórmula na assinatura S, tal que $\nu(\varphi')$ está definida, então

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \textit{ sse } \mathcal{A} \models \nu(\varphi')[\overline{a}].$$

Demonstração. Por indução na complexidade de φ'.

Se φ' é $Rx_{i_1} ... x_{i_k}$, em que $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \{1, ..., n'\}$, então a fórmula $\nu(\varphi')$ é $Rx_{\nu(i_1)} ... x_{\nu(i_k)}$. Se $R^{\mathcal{A}}$ é o predicado correspondente à variável de predicado R em $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } R^{\mathcal{A}}(a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n')}) \text{ sse } \mathcal{A} \models \nu(\varphi')[\overline{a}].$$

Se φ' é a negação $\neg\phi$, então $\nu(\phi)$ está definida e $\nu(\varphi')$ é $\neg\nu(\phi)$. Nesse caso,

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse não é o caso que } \mathcal{A} \models \phi[\nu^*(\overline{a})].$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse não é o caso que } \mathcal{A} \models \nu(\phi)[\overline{a}],$$

ou seja,

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A} \models \neg\nu(\phi)[\overline{a}].$$

Se φ' é a conjunção $\phi \wedge \psi$, então $\nu(\phi)$ e $\nu(\psi)$ estão definidas e $\nu(\varphi')$ é $\nu(\phi) \wedge \nu(\psi)$. Nesse caso,

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A} \models \phi[\nu^*(\overline{a})] \text{ e } \mathcal{A} \models \psi[\nu^*(\overline{a})].$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A} \models \nu(\phi)[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{A} \models \nu(\psi)[\overline{a}],$$

ou seja,

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A} \models \nu(\phi) \wedge \nu(\psi)[\overline{a}].$$

Analogamente para a disjunção.

Se φ' é $\exists y \phi$, podemos supor que y é $x_{n'+1}$. Por definição, $\nu(\varphi)$ é

$$\exists y \phi_{x_1 \ldots x_{n'}}[x_{\nu(1)} \ldots x_{\nu(n')}].$$

Seja $\hat{\nu} : \{1, ..., n', n'+1\} \to \{1, ..., n, n+1\}$, a extensão de ν tal que

$$\hat{\nu}(n'+1) = n+1.$$

Nessas condições, $\hat{\nu}(\phi)$ está definida e $\nu(\varphi')$ é uma variante de $\exists x_{n+1} \nu(\phi)$. Nesse caso,

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A} \models \phi[\nu^*(\overline{a})\hat{\ }a], \text{ para algum indivíduo } a \text{ em } \mathcal{A}.$$

Pela definição de $\hat{\nu}^*(\overline{a}\hat{\ }a)$, segue que $\nu^*(\overline{a})\hat{\ }a = \hat{\nu}^*(\overline{a}\hat{\ }a)$. Usando isso e a hipótese de indução, segue que

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A} \models \hat{\nu}(\phi)[\overline{a}\hat{\ }a], \text{ para algum indivíduo } a \text{ em } \mathcal{A},$$

ou seja,

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A} \models \exists x_{n+1} \hat{\nu}(\phi)[\overline{a}].$$

Como $\nu(\varphi')$ é uma variante de $\exists x_{n+1} \hat{\nu}(\phi)$, temos que

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A} \models \nu(\varphi')[\overline{a}].$$

□

37 Observação. A construção de $\nu^*(\overline{a})$ a partir de $\overline{a}$ e da função ν é tal que se $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b})$, então $(\mathcal{A}, \nu^*(\overline{a})) \approx_q (\mathcal{B}, \nu^*(\overline{b}))$. Isso segue do lema 36, pois para toda fórmula φ' na assinatura S, tal que $fv(\varphi') \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ e $rk(\varphi') \leq q$, existe uma variante[2] φ'' de φ', tal que $\nu(\varphi')$ está definida e

$$\mathcal{A} \models \varphi''[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A} \models \nu(\varphi'')[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{B} \models \nu(\varphi'')[\overline{b}] \text{ sse } \mathcal{B} \models \varphi''[\nu^*(\overline{b})].$$

Consideramos instrutivo apresentar outra prova do fato contido na observação 37, que não utiliza o lema 36, ou qualquer outro recurso a fórmulas:

Demonstração. Vamos provar, por indução em q, que

$$r : (\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b}) \text{ implica } r : (\mathcal{A}, \nu^*(\overline{a})) \approx_q (\mathcal{B}, \nu^*(\overline{b})),$$

para toda função $\nu : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$.

Se $q = 0$ e $r : (\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b})$, então basta observar que os pares $(a_{\nu(1)}, b_{\nu(1)})$,..., $(a_{\nu(n')}, b_{\nu(n')})$ estão em r.

Se $q > 0$, $r : (\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b})$ e a é um indivíduo em $\mathcal{A}$, então existe um indivíduo b em $\mathcal{B}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que

$$\hat{r} : (\mathcal{A}, \overline{a}\hat{\ }a) \approx_{q-1} (\mathcal{B}, \overline{b}\hat{\ }b).$$

Seja $\hat{\nu} : \{1, ..., n', n'+1\} \to \{1, ..., n, n+1\}$, a extensão de ν tal que $\hat{\nu}(n'+1) = n+1$. Por hipótese de indução, temos que

$$\hat{r} : (\mathcal{A}, (a_{\hat{\nu}(1)}, ..., a_{\hat{\nu}(n')}, a_{\hat{\nu}(n'+1)})) \approx_{q-1} (\mathcal{B}, (b_{\hat{\nu}(1)}, ..., b_{\hat{\nu}(n')}, b_{\hat{\nu}(n'+1)})),$$

que é o mesmo que

$$\hat{r} : (\mathcal{A}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n')}, a)) \approx_{q-1} (\mathcal{B}, (b_{\nu(1)}, ..., b_{\nu(n')}, b)).$$

Analogamente, se um indivíduo b em $\mathcal{B}$ existe um indivíduo a em $\mathcal{A}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que

$$\hat{r} : (\mathcal{A}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n')}, a)) \approx_{q-1} (\mathcal{B}, (b_{\nu(1)}, ..., b_{\nu(n')}, b)).$$

Disso segue que r, vista como uma relação entre $(\mathcal{A}, \nu^*(\overline{a}))$ e $(\mathcal{B}, \nu^*(\overline{b}))$, satisfaz a condição de *back-and-forth* no posto q, ou seja,

[2] Lembre-se que uma variante de φ' é uma fórmula obtida a partir de φ' por renomeamento de variáveis ligadas.

$$r : (\mathcal{A}, \nu^*(\overline{a})) \approx_q (\mathcal{B}, \nu^*(\overline{b})).$$

□

Seja $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ um valor de primeira ordem em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ e

$$\nu : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$$

uma função. Pela observação 37, o valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \nu^*(\overline{a}))]_q$ em $\prod(\Lambda|_S, n')/_{\approx_q}$ não depende da escolha de $(\mathcal{A}, \overline{a})$.

38 Definição. Seja $\nu : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$ uma função e Q uma função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_S, n')/_{\approx_q}$. Denotamos por $\nu_*(\mathrm{Q})$ a função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ por:

$$\nu_*(\mathrm{Q})([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \nu^*(\overline{a}))]_q).$$

2.2.3 π-operações.

Sejam S e S' assinaturas e $\pi : S' \to S$ uma função tal que $\pi(R')$ tem a mesma aridade que R', para qualquer R' em S'. Se $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura, então podemos definir uma S'-estrutura $\pi^*(\mathcal{A})$ cujo domínio é o domínio de $\mathcal{A}$ e que atritbui a cada variável de predicado R' em S' o mesmo que $\mathcal{A}$ atribui a $\pi(R')$. Se φ' é uma fórmula na assinatura S', então $\pi(\varphi')$ é a fórmula na assinatura S obtida a partir de φ' pela substituição de cada variável de predicado R' de S' que ocorre em φ' por $\pi(R')$.

39 Lema. *Se $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura, $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{A}$, $\pi : S' \to S$ uma função tal que $\pi(R')$ tem a mesma aridade que R', e φ' é uma fórmula na assinatura S' e tal que $fv(\varphi') \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, então*

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \textit{ sse } \mathcal{A} \models \pi(\varphi')[\overline{a}].$$

Demonstração. Por indução na complexidade de φ'.

Se φ' é $R'x_{i_1}...x_{i_k}$, em que $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \{1, ..., n\}$, então a fórmula $\pi(\varphi')$ é $\pi(R')x_{i_1}...x_{i_k}$. Se $\pi(R')^{\mathcal{A}}$ é o predicado correspondente à variável de predicado $\pi(R')$ em $\mathcal{A}$,

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse } \pi(R')^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) \text{ sse } \mathcal{A} \models \pi(\varphi')[\overline{a}].$$

Se φ' é a negação $\neg\phi$, então $\pi(\phi)$ está definida e $\pi(\varphi')$ é $\neg\pi(\phi)$. Nesse caso,

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse não é o caso que } \pi^*(\mathcal{A}) \models \phi[\overline{a}].$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse não é o caso que } \mathcal{A} \models \pi(\phi)[\overline{a}],$$

ou seja,

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \neg\pi(\phi)[\overline{a}].$$

Se φ' é a conjunção $\phi \wedge \psi$, então $\pi(\phi)$ e $\pi(\psi)$ estão definidas e $\pi(\varphi')$ é $\pi(\phi) \wedge \pi(\psi)$. Nesse caso,

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse } \pi^*(\mathcal{A}) \models \phi[\overline{a}] \text{ e } \pi^*(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}].$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \pi(\phi)[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{A} \models \pi(\psi)[\overline{a}],$$

ou seja,

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \pi(\phi) \wedge \pi(\psi)[\overline{a}].$$

Analogamente para a disjunção.

Se φ' é $\exists y\phi$, podemos supor que y é x_{n+1}. Nessas condições, $\pi(\phi)$ está definida e $\pi(\varphi')$ é $\exists x_{n+1}\pi(\phi)$. Nesse caso,

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse } \pi^*(\mathcal{A}) \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a], \text{ para algum indivíduo } a \text{ em } \mathcal{A}.$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \pi(\phi)[\overline{a}\,\hat{}\,a], \text{ para algum indivíduo } a \text{ em } \mathcal{A},$$

ou seja,

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \exists x_{n+1}\pi(\phi)[\overline{a}].$$

□

40 Observação. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são duas S-estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são n-uplas tais que $(\mathcal{A},\overline{a}) \approx_q (\mathcal{B},\overline{b})$, então $(\pi^*(\mathcal{A}),\overline{a}) \approx_q (\pi^*(\mathcal{B}),\overline{b})$. Isso segue do lema 39, pois para toda fórmula φ' na assinatura S', e tal que $fv(\varphi') \subseteq \{x_1,...,x_n\}$ e $rk(\varphi') \leq q$,

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi'[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \pi(\varphi')[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{B} \models \pi(\varphi')[\overline{b}] \text{ sse } \pi^*(\mathcal{B}) \models \varphi'[\overline{b}].$$

Portanto, se $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q$ é um valor de primeira ordem em $\prod(\Lambda|_S,n)/_{\approx_q}$, e $\pi : S' \to S$ uma função entre assinaturas tal que $\pi(R')$ tem a mesma aridade que R', então o valor de primeira ordem $[(\pi^*(\mathcal{A}),\overline{a})]_q$ em $\prod(\Lambda|_{S'},n)/_{\approx_q}$ não depende da escolha do representante $(\mathcal{A},\overline{a})$ em $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q$.[3]

41 Definição. Se S e S' são assinaturas e $\pi : S' \to S$ uma função tal que $\pi(R')$ tem a mesma aridade que R', para qualquer R' em S', e Q é uma função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_{S'},n)/_{\approx_q}$, então denotamos por $\pi_*(\mathrm{Q})$ a função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_S,n)/_{\approx_q}$ por:

$$\pi_*(\mathrm{Q})([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\pi^*(\mathcal{A}),\overline{a})]_q).$$

2.2.4 Subidas de Posto.

Se q e q' são números naturais tais que $q \geq q'$, então a observação 10 do capítulo 1 garante que qualquer relação de q-isomorfia parcial é também uma relação de q'-isomorfia parcial. Consequentemente, se $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q$ é um valor de primeira ordem em $\prod(\Lambda|_S,n)/_{\approx_q}$, então o valor de primeira ordem $[(\mathcal{A},\overline{a})]_{q'}$ não depende da escolha do representante $(\mathcal{A},\overline{a})$ em $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q$.

42 Definição. Se q é um número natural maior ou igual a q' e Q é uma função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_S,n)/_{\approx_{q'}}$, então denotamos por $\mathrm{Q}^q_{q'}$ a função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_S,n)/_{\approx_q}$ por:

$$\mathrm{Q}^q_{q'}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_{q'}).$$

Dizemos que a função de primeira ordem $\mathrm{Q}^q_{q'}$ é obtida a partir de Q por *subida de posto.*

43 Exemplo. Sejam φ uma fórmula e Q a função de primeira ordem expressa por φ. Se ϕ é uma fórmula obtida a partir de φ por operações prenexas e/ou pela prefixação de quantificações inócuas, então a função de primeira ordem expressa por ϕ é obtida a partir de Q por subida de posto.

[3] Assim como no caso das ν-operações, poderíamos apresentar outra prova do fato contido na observação 40 utilizando relações de q-isomorfia parcial. Omitimos essa prova para não sobrecarregar o texto.

2.2.5 Exemplo: Operações Básicas com Funções de Primeira Ordem Crescentes.

Vamos ilustrar com um exemplo como as operações básicas definidas acima podem preservar certas propriedades de funções de primeira ordem.

A partir da relação de ordem parcial $\leq$ entre valores de primeira ordem, definida na subseção 2.3 do capítulo 1, podemos definir o que é uma função de primeira ordem crescente:

44 Definição. Uma função de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

é dita *crescente* se a seguinte condição vale para todos os valores de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ e $[(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$, tais que $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q \leq [(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$:

$$\text{Se } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ então } \mathrm{Q}([(\mathcal{B}, \overline{b})]_q) = \mathbf{T}.$$

Por exemplo, a projeção no i-ésimo argumento de S, denotada por P_i^S, é, para todo i menor ou igual ao comprimento de S, uma função de primeira ordem crescente. Vamos provar que a propriedade de ser crescente é preservada por composições, subidas de posto, ν-operações e π-operações.

45 Lema. *Se* Q*,* Q_1*,...,* Q_m *são funções de primeira ordem crescentes definidas em* $\prod(\Lambda|_{S'}, n)/_{\approx_q}$*,* $\prod(\Lambda|_S, n_1)/_{\approx_{q_1}}$*,...,* $\prod(\Lambda|_S, n_m)/_{\approx_{q_m}}$*, respectivamente, e* $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$ *está definida, então essa composição é uma função de primeira ordem crescente.*

Demonstração. Basta provar que se

$$[(\mathcal{A}, \overline{a})]_{q+\max\{q_1,...,q_m\}} \leq [(\mathcal{B}, \overline{b})]_{q+\max\{q_1,...,q_m\}},$$

então

$$[((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_q \leq [((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b})]_q.$$

Para isso, vamos provar que se $r = \{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\}$ é uma relação de $q + \max\{q_1, ..., q_m\}$-homomorfia parcial entre $(\mathcal{A}, \overline{a})$ e $(\mathcal{B}, \overline{b})$, então r é uma relação de q-homomorfia parcial entre

$$((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a}) \text{ e } ((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b}).$$

Suponha $q + \max\{q_1, ..., q_m\} = 0$, e sejam R_i a i-ésima variável de predicado em S', e a'_1,..., $a'_{n_i} \in dom(r)$, b'_1,..., $b'_{n_i} \in range(r)$, tais que o par (a'_j, b'_j) está na relação r, para cada $j \in \{1, ..., n_i\}$. Como $\mathrm{O}_i^{\mathcal{A}}$ é a interpretação de R_i em $(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A})$, e analogamente para $\mathrm{O}_i^{\mathcal{B}}$, temos que provar que

$$\mathrm{O}_i^{\mathcal{A}}(a'_1, ..., a'_{n_i}) \text{ implica } \mathrm{O}_i^{\mathcal{B}}(b'_1, ..., b'_{n_i}).$$

Por hipótese,

$$[(\mathcal{A}, \overline{a})]_0 \leq [(\mathcal{B}, \overline{b})]_0.$$

Como para todo $j \in \{1, ..., n_i\}$, (a'_j, b'_j) está na relação

$$\{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\},$$

existe uma função $\nu : \{1, ..., n_i\} \to \{1, ..., n\}$ tal que $(a'_j, b'_j) = (a_{\nu(j)}, b_{\nu(j)})$.

Da hipótese, segue que:

$$[(\mathcal{A}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n_i)}))]_0 \leq [(\mathcal{B}, (b_{\nu(1)}, ..., b_{\nu(n_i)}))]_0.$$

Como a função de primeira ordem Q_i é crescente,

$$[(\mathcal{A}, (a'_1, ..., a'_{n_i}))]_0 = [(\mathcal{A}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n_i)}))]_0$$

e

$$[(\mathcal{B},(b_{\nu(1)},...,b_{\nu(n_i)}))]_0 = [(\mathcal{B},(b'_1,...,b'_{n_i}))]_0,$$

e $q_i = 0$,

$$\text{se } \mathrm{Q}_i([(\mathcal{A},(a'_1,...,a'_{n_i}))]_0) = \mathbf{T} \text{ então } \mathrm{Q}_i([(\mathcal{B},(b'_1,...,b'_{n_i}))]_0) = \mathbf{T}.$$

Pela definição dos predicados $\mathrm{O}_i^{\mathcal{A}}$ e $\mathrm{O}_i^{\mathcal{B}}$, segue que

$$\mathrm{O}_i^{\mathcal{A}}(a'_1,...,a'_{n_i}) \text{ implica } \mathrm{O}_i^{\mathcal{B}}(b'_1,...,b'_{n_i}).$$

Agora, vamos supor $q + \max\{q_1,...,q_m\} > 0$. Temos dois casos: Se $q = 0$, então o resultado segue da parte já demonstrada. Portanto, vamos supor também $q > 0$. Nessas condições, para cada indivíduo a em $\mathcal{A}$ existe um indivíduo b em $\mathcal{B}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que $\hat{r} : (\mathcal{A}, \overline{a}\,\hat{}\,a) \approx_{q-1+\max\{q_1,...,q_m\}} (\mathcal{B}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$. Podemos supor que $\hat{r}$ é a relação $\{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n),(a,b)\}$. Pela proposição 32,

$$\hat{r} : ((\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a}\,\hat{}\,a) \approx_{q-1} ((\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b}\,\hat{}\,b).$$

Desse modo, provamos que r é uma relação de q-homomorfia parcial entre $((\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})$ e $((\mathrm{Q}_1,...,\mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b})$.

□

Segue do lema 45 que composições de funções de primeira ordem crescentes são crescentes.

Seja $\nu : \{1,...,n'\} \to \{1,...,n\}$ uma função e Q uma função de primeira ordem crescente definida em $\prod(\Lambda|_S, n')/_{\approx_q}$. A função de primeira ordem $\nu_*(\mathrm{Q})$ é definida em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ por:

$$\nu_*(\mathrm{Q})([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A},\nu^*(\overline{a}))]_q).$$

Sejam $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q$, $[(\mathcal{B},\overline{b})]_q$ valores de primeira ordem tais que

$$[(\mathcal{A},\overline{a})]_q \leq [(\mathcal{B},\overline{b})]_q.$$

Assim como no caso da relação de q-isomorfia parcial[4], a partir da definição de relação de q-homomorfia parcial é fácil provar, por indução em q, que os valores de primeira ordem $[(\mathcal{A},\nu^*(\overline{a}))]_q$, $[(\mathcal{B},\nu^*(\overline{b}))]_q$ são tais que

$$[(\mathcal{A},\nu^*(\overline{a}))]_q \leq [(\mathcal{B},\nu^*(\overline{a}))]_q.$$

Se $\nu_*(\mathrm{Q})([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathbf{T}$, então $\mathrm{Q}([(\mathcal{A},\nu^*(\overline{a}))]_q) = \mathbf{T}$. Como Q é crescente e

$$[(\mathcal{A},\nu^*(\overline{a}))]_q \leq [(\mathcal{B},\nu^*(\overline{a}))]_q,$$

segue que $\mathrm{Q}([(\mathcal{B},\nu^*(\overline{b}))]_q) = \mathbf{T}$. Portanto,

$$\nu_*(\mathrm{Q})([(\mathcal{B},\overline{b})]_q) = \mathbf{T},$$

e $\nu_*(\mathrm{Q})$ é crescente.

Seja $\pi : S' \to S$ uma função tal que $\pi(R')$ tem a mesma aridade que R', para todo R' em S', e Q uma função de primeira ordem crescente definida em $\prod(\Lambda|_{S'}, n)/_{\approx_q}$. A função de primeira ordem $\pi_*(\mathrm{Q})$ é definida em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ por:

$$\pi_*(\mathrm{Q})([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\pi^*(\mathcal{A}),\overline{a})]_q).$$

Sejam $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q$, $[(\mathcal{B},\overline{b})]_q$ valores de primeira ordem tais que

$$[(\mathcal{A},\overline{a})]_q \leq [(\mathcal{B},\overline{b})]_q.$$

[4] Ver a observação 37.

Assim como no caso da relação de q-isomorfia parcial[5], a partir da definição de relação de q-homomorfia parcial é fácil provar, por indução em q, que os valores de primeira ordem $[(\pi^*(\mathcal{A}),\overline{a})]_q$, $[(\pi^*(\mathcal{B}),\overline{b})]_q$ são tais que

$$[(\pi^*(\mathcal{A}),\overline{a})]_q \leq [(\pi^*(\mathcal{B}),\overline{b})]_q.$$

Se $\pi_*(\mathrm{Q})([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathbf{T}$, então $\mathrm{Q}([(\pi^*(\mathcal{A}),\overline{a})]_q) = \mathbf{T}$. Como Q é crescente e

$$[(\pi^*(\mathcal{A}),\overline{a})]_q \leq [(\pi^*(\mathcal{B}),\overline{b})]_q,$$

segue que $\mathrm{Q}([(\pi^*(\mathcal{B}),\overline{b})]_q) = \mathbf{T}$. Portanto,

$$\pi_*(\mathrm{Q})([(\mathcal{B},\overline{b})]_q) = \mathbf{T},$$

e $\pi_*(\mathrm{Q})$ é crescente.

Sejam $\mathrm{Q} :: \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_{q'}} \to \{\mathbf{T},\mathbf{F}\}$ uma função de primeira ordem crescente, q um número natural maior ou igual a q', e $\mathrm{Q}^q_{q'}$ a função de primeira ordem obtida a partir de Q pela subida de posto apropriada. Sejam $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q$, $[(\mathcal{B},\overline{b})]_q$ valores de primeira ordem tais que

$$[(\mathcal{A},\overline{a})]_q \leq [(\mathcal{B},\overline{b})]_q.$$

Nessas condições, se

$$\mathrm{Q}^q_{q'}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathbf{T},$$

então $\mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_{q'}) = \mathbf{T}$. Como Q é crescente, $\mathrm{Q}([(\mathcal{B},\overline{b})]_{q'}) = \mathbf{T}$. Portanto,

$$\mathrm{Q}^q_{q'}([(\mathcal{B},\overline{b})]_q) = \mathbf{T},$$

e $\mathrm{Q}^q_{q'}$ é crescente. Isso mostra que subidas de posto de funções de primeira ordem crescentes são crescentes.

[5]Ver a observação 40.

2.3 Geração de Funções de Primeira Ordem

Para determinar o que é um subsistema conceitual da lógica de primeira ordem, precisamos determinar quais são as funções de primeira ordem que, intuitivamente, podem ser *definidas* a partir de um conjunto de funções de primeira ordem, e como caracterizá-las em termos da relação de expressão fraca entre fórmulas e funções de primeira ordem. Começamos com a definição do conjunto das funções de primeira ordem que podem ser construídas a partir das funções de primeira ordem em um conjunto $\mathbf{C}$ e das operações definidas na seção anterior:

46 Definição. Seja U um conjunto de funções de primeira ordem.

1. Dizemos que U é fechado por composição de funções de primeira ordem se dadas funções de primeira ordem Q, Q_1,..., Q_m são tais que (i) a função de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_{S'}, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

está em U, (ii) a função de primeira ordem $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$ está definida em

$$\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_{q+\max\{q_1,...,q_m\}}},$$

e (iii) a função Q_i está em U ou é uma projeção $P^S_{j(i)}$, conforme definida no exemplo 35, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, então a função de primeira ordem $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$ está em U.

2. Dizemos que U é fechado por ν-operações se dadas uma função de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n')/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\} \text{ em } U$$

e uma função $\nu : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$, a função de primeira ordem $\nu_*(\mathrm{Q})$ está em U.

3. Dizemos que U é fechado por π-operações se dadas uma função entre assinaturas $\pi : S' \to S$, tal que $\pi(R')$ tem a mesma aridade que R', para qualquer R' em S', e uma função de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_{S'}, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

então $\pi_*(\mathrm{Q}) \in U$ sse $\mathrm{Q} \in U$.

4. Dizemos que U é fechado por variações de posto se dadas uma função de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_{q'}} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

e um número natural q, com $q' \leq q$, então $\mathrm{Q}^q_{q'} \in U$ sse $\mathrm{Q} \in U$.

É agora claro como definir o conjunto de funções de primeira ordem gerado a partir de uma conjunto qualquer: Dado um conjunto de funções de primeira ordem $\mathbf{C}$, o conjunto *gerado* a partir de $\mathbf{C}$ é o menor conjunto de funções de primeira ordem que contém $\mathbf{C}$ e que é fechado por composição de funções de primeira ordem, ν-operações, π-operações e variações de posto. Denotamos o conjunto gerado a partir de $\mathbf{C}$ por $\langle \mathbf{C} \rangle$.

A seguir, vamos apresentar a definição de sistema de funções de primeira ordem, ou seja, de conjunto de funções de primeira ordem fechado por definições. Esses sistemas são os domínios de subestruturas da lógica de primeira ordem. Antes de defini-los, é importante observar que a assinatura canônica de primeira ordem, Σ, fixada no capítulo 1, não é, de modo algum, essencial em nada do que foi feito até agora. O único papel que ela desempenha é o de fonte de variáveis de predicado para a formação das assinaturas finitas S. Foi conveniente fixá-la até este momento, mas acreditamos que a lógica de primeira ordem não está comprometida com uma fonte de variáveis de predicado fixa. Por isso, a assinatura canônica Σ não terá um lugar privilegiado na definição de sistema, e a partir de agora, sempre que for conveniente, vamos variar a fonte de variáveis de predicado. Para os nossos propósitos, é suficiente considerar subsequências de Σ (finitas ou infinitas) como possíveis fontes de variáveis de predicado, mas isso também não é essencial.

47 Definição. Seja Σ_0 uma subsequência não-vazia da assinatura canô-nica de primeira ordem Σ. Seja Z um conjunto de funções de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

em que S é uma subsequência de Σ_0, e n e q são números naturais. Dizemos que Z é um *sistema de funções de primeira ordem em* Σ_0 se Z é fechado por composições, variações de posto, ν-operações, e pelas π-operações induzidas por funções $\pi : S' \to S''$ que preservam aridade e são tais que S' e S'' são subsequências de Σ_0. De modo abreviado, quando não há risco de ambiguidade, dizemos que Z é um *sistema*.

Utilizando a notação introduzida na seção anterior, Z é um sistema sse $Z = \langle Z \rangle$, lembrando que a operação de fechamento denotada por $\langle - \rangle$ é tomada em relação a uma assinatura, possivelmente infinita, Σ_0, em que as π-operações permitidas são apenas aquelas induzidas por funções $\pi : S' \to S''$ que preservam aridade e são tais que S' e S'' são subsequências de Σ_0. Para cada Σ_0, o conjunto de todos os sistemas de funções de primeira ordem em Σ_0 parcialmente ordenados pela inclusão entre conjuntos é um reticulado completo.

48 Exemplo. Lógica de Primeira Ordem em uma Assinatura Qualquer
Para cada Σ_0 temos o sistema de todas as funções de primeira ordem em Σ_0, ou seja, o conjunto de todas as funções de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

em que S é uma subsequência de Σ_0, e n e q são números naturais. Esse sistema é a lógica de primeira ordem na assinatura Σ_0. Se Σ_0 é a sequência $\left\langle P_1^0, P_2^0, P_3^0, ... \right\rangle$ de variáveis proposicionais, o sistema de todas as funções de primeira ordem em Σ_0 é identificado com o conjunto de todas as funções de verdade do seguinte modo: Um valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$, em que $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura e S é uma subsequência de Σ_0, é identificado com uma sequência de valores de verdade de maneira óbvia. Essa identificação dos valores de primeira ordem com valores proposicionais produz a identificação desejada. A estrutura do reticulado de todos os sistemas de funções de verdade foi descrita completamente por Post em [4].

49 Exemplo. Funções de Primeira Ordem Positivas
Uma função de primeira ordem $\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$, é *positiva* sse Q é preservada por imagem homomórfica, ou seja, sse para todo homomorfismo sobrejetor

$$h : \mathcal{A} \to \mathcal{B},$$

temos que

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{B}, \overline{b})]_q),$$

em que a n-upla $\overline{b}$ é $(h(a_1), ..., h(a_n))$. É fácil checar que, para qualquer Σ_0, o conjunto de todas as funções de primeira ordem positivas

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

em que S é uma subsequência de Σ_0, é um sistema.

Fixando uma sequência de variáveis de predicado Σ_0, considere as estruturas cujos domínios são sistemas em Σ_0, munidas das operações básicas e da restrição apropriada da relação de consequência. Essas estruturas são fragmentos da lógica de primeira ordem nas variáveis de predicado de Σ_0. No quarto capítulo veremos que há um fragmento próprio da lógica de primeira ordem em uma variável de predicado binária que é suficiente para a fundamentação da matemática clássica na teoria de conjuntos.

2.4 Caracterização dos Sistemas em Termos de Expressão Fraca

Há uma correspondência entre operações básicas com funções de primeira ordem, apresentadas na seção anterior e presentes na definição de conjunto gerado a partir de um conjunto de funções de primeira ordem, e operações sintáticas com fórmulas, no plano linguístico. Uma ν-operação corresponde, módulo renomeamento de variáveis individuais ligadas, a uma substituição de variáveis individuais livres; uma π-operação corresponde a uma substituição de variáveis de predicado; uma subida de posto corresponde a uma prefixação de quantificações inócuas. Agora precisamos estabelecer qual é a operação sintática correspondente à composição de funções de primeira ordem.

Vamos definir a composição de fórmulas de primeira ordem. Suponha que ψ, ψ_1,..., ψ_m são fórmulas de primeira ordem tais que (i) exatamente m variáveis de predicado ocorrem em ψ, e (ii) se R_1,..., R_m são as variáveis de predicado que ocorrem em ψ, em ordem alfabética, então a aridade de R_i é maior ou igual ao número de variáveis livres de ψ_i, e é denotada por n_i, para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Nesse caso dizemos que a composição $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ está definida, em que $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ é a fórmula obtida a partir de ψ por substituição de cada ocorrência de R_i da forma $R_i y_1 ... y_{n_i}$ por $\psi_i[y_1...y_{n_i}]$,[6] para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Note que, quando definida, a fórmula $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ satisfaz $fv(\psi(\psi_1, ..., \psi_m)) \subseteq fv(\psi)$. Além disso, temos o seguinte:

50 Lema. *Sejam ψ, ψ_1,..., ψ_m fórmulas tais que a composição*

$$\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$$

está definida. Suponha que $fv(\psi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, as funções Q_1,.., Q_m são definidas em $\prod(\Lambda|_S, n_1)/\approx_{q_1}$, ..., $\prod(\Lambda|_S, n_m)/\approx_{q_m}$, respectivamente, em que S é uma assinatura que estende as assinaturas das fórmulas ψ_i, e n_i é a aridade da i-ésima variável de predicado de ψ, para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Suponha além disso que Q_1,.., Q_m são expressas fracamente por ψ_1,..., ψ_m, respectivamente. Nessas condições, se $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura e $\overline{a}$ é uma n-upla, então

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}] \textit{ sse } \mathcal{A} \models \psi(\psi_1, ..., \psi_m)[\overline{a}].$$

Demonstração. Por indução na complexidade de ψ:

Suponha que ψ é atômica e da forma $R_1 x_{i_1} ... x_{i_{n_1}}$. Nesse caso, $m = 1$, $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ é $\psi_1[x_{i_1}...x_{i_{n_1}}]$ e

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}] \text{ sse } \mathrm{O}_1^{\mathcal{A}}(a_{i_1}...a_{i_{n_1}}).$$

Como ψ_1 expressa fracamente Q_1 e

$$\mathrm{O}_1^{\mathcal{A}}(a_{i_1}...a_{i_{n_1}}) \text{ sse } \mathrm{Q}_1([(\mathcal{A}, (a_{i_1}...a_{i_{n_1}}))]_{q_1}) = \mathbf{T},$$

segue que

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \psi_1[(a_{i_1}...a_{i_{n_1}})].$$

Do fato que $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ é $\psi_1[x_{i_1}...x_{i_{n_1}}]$, segue que

$$\mathcal{A} \models \psi(\psi_1, ..., \psi_m)[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \psi_1[(a_{i_1}...a_{i_{n_1}})],$$

o que prova o caso atômico.

Suponha que ψ é a negação $\neg\phi$. Nesse caso, $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ é

$$\neg\phi(\psi_1, ..., \psi_m)$$

e

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}] \text{ sse não é o caso que } (\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \phi[\overline{a}].$$

A hipótese de indução para ϕ implica

[6] Aqui estamos supondo que as variáveis y_1,..., y_{n_i} são livres para substituição em ψ_i, que y_j substitui a j-ésima variável livre de ψ_i, em ordem alfabética. No caso em que uma dessas variáveis não é livre, podemos tomar uma variante apropriada de ψ_i, renomeando variáveis ligadas, e definir a composição por meio dessa variante.

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \phi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \phi(\psi_1, ..., \psi_m)[\overline{a}].$$

Concluímos que

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \psi(\psi_1, ..., \psi_m)[\overline{a}].$$

Suponha que ψ é a conjunção $\phi \wedge \phi'$. Nesse caso,

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}]$$

sse

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \phi[\overline{a}] \text{ e } (\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \phi'[\overline{a}].$$

Sejam R_1,..., R_m as variáveis de predicado que ocorrem em ψ, em ordem alfabética, e sejam R_{i_1},..., R_{i_k} e R_{j_1},..., $R_{j_{k'}}$, para $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq m$ e $1 \leq j_1 < ... < j_{k'} \leq m$, as variáveis de predicado que ocorrem em ϕ e ϕ', respectivamente. Nessas condições, $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ é da forma

$$\phi(\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k}) \wedge \phi'(\psi_{j_1}, ..., \psi_{j_{k'}}).$$

Como $(\mathrm{Q}_{i_1}, ..., \mathrm{Q}_{i_k})(\mathcal{A})$ e $(\mathrm{Q}_{j_1}, ..., \mathrm{Q}_{j_{k'}})(\mathcal{A})$ são os redutos da estrutura $(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A})$ para as assinaturas $\langle R_{i_1}, ..., R_{i_k}\rangle$ e $\langle R_{j_1}, ..., R_{j_{k'}}\rangle$, respectivamente, então

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \phi[\overline{a}] \text{ sse } (\mathrm{Q}_{i_1}, ..., \mathrm{Q}_{i_k})(\mathcal{A}) \models \phi[\overline{a}],$$

e

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \phi'[\overline{a}] \text{ sse } (\mathrm{Q}_{j_1}, ..., \mathrm{Q}_{j_{k'}})(\mathcal{A}) \models \phi'[\overline{a}].$$

Das equivalências acima, utilizando a hipótese de indução para ϕ e ϕ', segue a equivalência entre

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}]$$

e

$$\mathcal{A} \models \phi(\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k})[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{A} \models \phi'(\psi_{j_1}, ..., \psi_{j_{k'}})[\overline{a}],$$

o que é o mesmo que

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \psi(\psi_1, ..., \psi_m)[\overline{a}].$$

O caso em que ψ é uma disjunção é provado de modo análogo.

Se ψ é $\exists y\phi$, então $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ é $\exists y\phi(\psi_1, ..., \psi_m)$. Podemos supor que y é x_{n+1}. Nesse caso,

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}] \text{ sse } (\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a],$$

para algum indivíduo a em $\mathcal{A}$. Por hipótese de indução,

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a] \text{ sse } \mathcal{A} \models \phi(\psi_1, ..., \psi_m)[\overline{a}\,\hat{}\,a],$$

para qualquer indivíduo a em $\mathcal{A}$.

Das equivalências acima temos

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}] \text{ sse } (\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \exists y\phi[\overline{a}].$$

Isso prova o caso existencial, e o lema está demonstrado. □

Para um conjunto **C** de funções de primeira ordem podemos construir um conjunto de fórmulas Δ na assinatura Σ, de modo que cada função em **C** é expressa por uma única fórmula em Δ, e, reciprocamente, cada fórmula em Δ expressa uma função em **C**. De fato, um conjunto Δ canônico com essa propriedade pode ser obtido do seguinte modo: Seja

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

uma função de primeira ordem em $\mathbf{C}$, e seja ψ_0 uma fórmula qualquer em $\Gamma^S(n,q)$. Se $\mathrm{Q}^{-1}(\{\mathbf{T}\}) = \emptyset$, então defina ψ_Q como $\psi_0 \wedge \neg\psi_0$. Agora assuma que $\mathrm{Q}^{-1}(\{\mathbf{T}\}) \neq \emptyset$. Sabemos que um valor de primeira ordem em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ é uma classe elementar, a saber, a classe dos modelos de alguma descrição de estado em $\Gamma^S(n,q)$. Defina ψ_Q como a disjunção das descrições de estado em $\Gamma^S(n,q)$ que axiomatizam os valores de primeira ordem em $\mathrm{Q}^{-1}(\{\mathbf{T}\})$. Em qualquer caso ψ_Q expressa Q. Fixamos

$$\Delta_\mathbf{C} = \{\psi_\mathrm{Q} : \mathrm{Q} \in \mathbf{C}\}.$$

O conjunto $\Delta_\mathbf{C}$ definido desse modo tem as propriedades requeridas.

51 Definição. Se Δ é um conjunto de fórmulas, denotamos por $\langle\Delta\rangle$ o menor conjunto X de fórmulas tal que:

1. $\Delta \subseteq X$.

2. Se ψ, ψ_1,..., ψ_m são fórmulas tais que (i) ψ está em X, (ii) a fórmula $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ está definida, e (iii) a fórmula ψ_i está em X ou é da forma $Rx_1...x_{n_i}$, em que R é uma variável de predicado e n_i é a aridade da i-ésima variável de predicado que ocorre em ψ, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, então $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ está em X.

3. Se ψ está em X e ψ' é obtida a partir de ψ por renomeamento de variáveis individuais livres ou ligadas, então ψ' está em X.

4. Se ψ está em X e ψ' é obtida a partir de ψ por renomeamento de variáveis de predicado, então ψ' está em X.

O conjunto de todas as fórmulas na assinatura Σ é da forma $\langle\Delta\rangle$, em que Δ pode ser tomado como o conjunto que contém (i) todas as fórmulas atômicas da forma $P_1^n x_1...x_n$, em que P_1^n é a primeira variável de predicado n-ária e x_1,..., x_n são as n primeiras variáveis individuais, para cada $n \in \omega$ (ii) todas as conjunções, disjunções e negações dessas fórmulas atômicas, e (iii) todas as instanciações da forma $\exists x_i P_1^n x_1...x_n$, para $i \in \omega$. Nesse sentido, a construção de $\langle\Delta\rangle$ a partir de Δ é uma generalização da definição de fórmula de primeira ordem na assinatura Σ para o caso em que os predicados primitivos são aqueles definidos por fórmulas de Δ e as operações lógicas, análogas a quantificação, conjunção, disjunção e negação, também são apenas aquelas definidas por fórmulas de Δ.

Portanto, podemos entender a construção de $\langle\Delta\rangle$ como a construção da linguagem cujos recursos primitivos, a partir dos quais todas as fórmulas são construídas, estão todos em Δ. Com essa leitura, a cláusula (1) da definição acima nos diz, sob a condição de fechamento por substituição de variáveis individuais, que as fórmulas "atômicas" correspondentes aos predicados definidos por fórmulas de Δ estão em $\langle\Delta\rangle$. Se entendemos que em uma composição $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$, a fórmula ψ desempenha o papel de um conectivo ou quantificador, então a cláusula (2) nos diz, sob a condição de fechamento por substituição de variáveis individuais, que o conjunto $\langle\Delta\rangle$ é fechado pela aplicação de operações lógicas definidas por fórmulas de Δ.

Com essa interpretação do conjunto de fórmulas $\langle\Delta\rangle$ como a linguagem obtida a partir de Δ, a caracterização contida no teorema 52 abaixo mostra que o conjunto $\langle\mathbf{C}\rangle$ de funções de primeira ordem é o conjunto das funções que podem ser definidas a partir de $\mathbf{C}$.

52 Teorema. *Seja* $\mathbf{C}$ *um conjunto de funções de primeira ordem. Para uma função de primeira ordem* $\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T},\mathbf{F}\}$, *são equivalentes:*

1. Q *está em* $\langle\mathbf{C}\rangle$.

2. Q *é expressa fracamente por uma fórmula em* $\langle\Delta_\mathbf{C}\rangle$.

Demonstração. Primeira parte: (1) $\Rightarrow$ (2).

Considere o conjunto U das funções de primeira ordem $\mathrm{Q} \in \langle \mathbf{C} \rangle$, tais que existe uma fórmula φ em $\langle \Delta_{\mathbf{C}} \rangle$ que expressa fracamente Q. Vamos provar que U satisfaz as condições da definição do conjunto gerado $\langle \mathbf{C} \rangle$.

Pela escolha de $\Delta_{\mathbf{C}}$, toda função de primeira ordem Q que pertence a $\mathbf{C}$ está em U. Resta provar que U satisfaz as cláusulas (1) a (4) da definição 46.

(1) Considere $m+1$ funções de primeira ordem Q, Q_1,..., Q_m definidas em $\prod(\Lambda|_{S'}, n)/_{\approx_q}$, $\prod(\Lambda|_S, n_1)/_{\approx_{q_1}}$,..., $\prod(\Lambda|_S, n_m)/_{\approx_{q_m}}$, tais que ($i$) Q está em em U, (ii) a função de primeira ordem $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$ está definida em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_{q+\max\{q_1,...,q_m\}}}$, e ($iii$) a função Q_i está em U ou é uma projeção $P^S_{j(i)}$, para cada $i \in \{1, ..., m\}$.

Nessas condições, existem fórmulas ψ, ψ_1,..., ψ_m que expressam fracamente Q, Q_1,..., Q_m, respectivamente, e são tais que ψ está em $\langle \Delta_{\mathbf{C}} \rangle$, e, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, se Q_i está em U então ψ_i está em $\langle \Delta_{\mathbf{C}} \rangle$, e se Q_i é uma projeção $P^S_{j(i)}$ então ψ_i é a fórmula atômica $R_{j(i)}x_1...x_{n_i}$, em que $R_{j(i)}$ é a $j(i)$-ésima variável de predicado em S. Se R'_{i_1},..., R'_{i_k} são as variáveis de predicado de S' que ocorrem em ψ, em ordem alfabética, então a fórmula $\psi(\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k})$ está definida[7], e pertence ao conjunto $\langle \Delta_{\mathbf{C}} \rangle$. Vamos provar que $\psi(\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k})$ expressa fracamente $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$.

Pela definição de composição,

$$\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{q+\max\{q_1,...,q_m\}}) = \mathrm{Q}([((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_q).$$

Como ψ expressa fracamente Q,

$$\mathrm{Q}([((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } (\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}].$$

Como as variáveis de predicado de S' que ocorrem em ψ são R'_{i_1},..., R'_{i_k}, e $(\mathrm{Q}_{i_1}, ..., \mathrm{Q}_{i_k})(\mathcal{A})$ é o reduto de $(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A})$ para a assinatura formada por R'_{i_1},..., R'_{i_k},

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}] \text{ sse } (\mathrm{Q}_{i_1}, ..., \mathrm{Q}_{i_k})(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}].$$

Pelo lema 50,

$$(\mathrm{Q}_{i_1}, ..., \mathrm{Q}_{i_k})(\mathcal{A}) \models \psi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \psi(\psi_{i_1}, ..., \psi_{i_k})[\overline{a}],$$

e o resultado está provado.

(2) Sejam Q uma função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_S, n')/_{\approx_q}$, tal que $\mathrm{Q} \in U$, e $\nu : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$ uma função. Por hipótese, existe uma fórmula $\varphi \in \langle \Delta_{\mathbf{C}} \rangle$ que expressa fracamente Q. Vamos provar que existe uma fórmula obtida a partir de φ por renomeamento de variáveis livres e ligadas que expressa fracamente $\nu_*(\mathrm{Q})$.

Sabemos que

$$\nu_*(\mathrm{Q})([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \nu * (\overline{a}))]_q).$$

Seja φ' uma variante de φ tal que as variáveis x_1,..., x_n não ocorrem ligadas em φ'. A fórmula φ' também expressa fracamente Q, e, além disso, a substituição de variáveis livres $\nu(\varphi')$ está definida e pertence a $\langle \Delta_{\mathbf{C}} \rangle$. Pelo lema 36, usando o fato que φ' expressa fracamente Q,

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \nu^*(\overline{a}))]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathcal{A} \models \nu(\varphi')[\overline{a}].$$

Como $fv(\varphi') \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, segue que $\nu(\varphi')$ expressa fracamente $\nu_*(\mathrm{Q})$.

(3) Sejam Q uma função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_{S'}, n)/_{\approx_q}$, tal que $\mathrm{Q} \in U$, e $\pi : S' \to S$ uma função que preserva aridade. Por hipótese, existe uma fórmula $\varphi' \in \langle \Delta_{\mathbf{C}} \rangle$ que expressa fracamente Q. Vamos provar que a fórmula $\pi(\varphi')$, obtida a partir de φ' por renomeamento de variáveis de predicado, expressa fracamente $\pi_*(\mathrm{Q})$.

Sabemos que

$$\pi_*(\mathrm{Q})([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\pi^*(\mathcal{A}), \overline{a})]_q).$$

A fórmula $\pi(\varphi')$ pertence a $\langle \Delta_{\mathbf{C}} \rangle$ e, pelo lema 39, usando o fato que φ' expressa fracamente Q,

[7] Lembre-se que podemos renomear as variáveis ligadas de ψ_1,..., ψ_m sem sair de $\langle \Delta_{\mathbf{C}} \rangle$.

$$Q([(\pi^*(\mathcal{A}),\overline{a})]_q)=\mathbf{T} \text{ sse } \mathcal{A}\models\pi(\varphi')[\overline{a}].$$

Como $\pi(\varphi')$ é uma fórmula na assinatura S', segue que $\pi(\varphi')$ expressa fracamente $\pi_*(Q)$.

(4) Sejam Q uma função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_S,n)/_{\approx_{q'}}$, e q um número natural maior ou igual a q'. Se φ é uma fórmula, então φ expressa fracamente Q sse φ expressa fracamente $Q^q_{q'}$. Concluímos que Q está em U sse $Q^q_{q'}$ está em U.

Portanto, toda função em $\langle\mathbf{C}\rangle$ é expressa fracamente por uma fórmula em $\langle\Delta_{\mathbf{C}}\rangle$.

Segunda parte: (2) $\Rightarrow$ (1).

Considere o conjunto X das fórmulas $\varphi\in\langle\Delta_{\mathbf{C}}\rangle$ que satisfazem a seguinte propriedade: Se Q é uma função de primeira ordem expressa fracamente por φ, então $Q\in\langle\mathbf{C}\rangle$. Vamos provar que X satisfaz as cláusulas de (1) a (4) da definição 51 relativas ao conjunto $\Delta_{\mathbf{C}}$.

(1) Vamos provar que X contém $\Delta_{\mathbf{C}}$. Seja φ uma fórmula em $\Delta_{\mathbf{C}}$. Precisamos provar que toda função de primeira ordem expressa fracamente por φ está em $\langle\mathbf{C}\rangle$.

Pela definição do conjunto $\Delta_{\mathbf{C}}$, φ é a fórmula $\psi_{Q'}$, para alguma função de primeira ordem Q' em $\mathbf{C}$,

$$Q':\prod(\Lambda|_{S'},n')/_{\approx_{q'}}\to\{\mathbf{T},\mathbf{F}\}.$$

Segue da definição de $\psi_{Q'}$ que a assinatura de φ é S' e que $fv(\varphi)\subseteq\{x_1,...,x_{n'}\}$. Se Q é uma função de primeira ordem expressa fracamente por φ, em que

$$Q:\prod(\Lambda|_S,n)/_{\approx_q}\to\{\mathbf{T},\mathbf{F}\},$$

então $\{x_1,...,x_n\}\supseteq fv(\varphi)\subseteq\{x_1,...,x_{n'}\}$. Em outros termos,

$$fv(\varphi)\subseteq\{x_1,...,x_{n'}\}\cap\{x_1,...,x_n\}=\{x_1,...,x_{n''}\},$$

Em que $n''=\min\{n,n'\}$. Sabemos, além disso, que $S'\subseteq S$. Como $\langle\mathbf{C}\rangle$ é fechado por variações de posto, podemos assumir que $q=q'$.

Sejam $\nu:\{1,...,n'\}\to\{1,...,n\}$ uma função tal que $\nu|_{\{x_1,...,x_{n''}\}}$ é a identidade e $\pi:S'\to S$ a função *inclusão* de S' em S, respectivamente. Por definição,

$$\pi_*(\nu_*(Q'))([(\mathcal{A},\overline{a})]_q)=Q'([(\pi^*(\mathcal{A}),\nu^*(\overline{a}))]_q)=Q'([(\mathcal{A}|_{S'},(a_1,...,a_{n''},a_{\nu(n''+1)},...,a_{\nu(n')}))]_q).$$

Como φ expressa fracamente tanto Q quanto Q',

$$Q'([(\mathcal{A}|_{S'},(a_1,...,a_{n''},a_{\nu(n''+1)},...,a_{\nu(n')}))]_q)=\mathbf{T} \text{ sse}$$

$$\mathcal{A}|_{S'}\models\varphi[a_1,...,a_{n''},a_{\nu(n''+1)},...,a_{\nu(n')}],$$

e

$$Q([(\mathcal{A},\overline{a})]_q)=\mathbf{T} \text{ sse } \mathcal{A}\models\varphi[a_1,...,a_{n''},a_{n''+1},...,a_n].$$

Contudo, do fato que a assinatura de φ é S' e $fv(\varphi)\subseteq\{x_1,...,x_{n''}\}$, segue que

$$\mathcal{A}|_{S'}\models\varphi[a_1,...,a_{n''},a_{\nu(n''+1)},...,a_{\nu(n')}] \text{ sse } \mathcal{A}\models\varphi[a_1,...,a_{n''},a_{n''+1},...,a_n].$$

Portanto, $Q=\pi_*(\nu_*(Q'))$ e, consequentemente, $Q\in\langle\mathbf{C}\rangle$. Concluímos que φ está em X, e X satisfaz a condição (1) da definição 51 relativa ao conjunto $\Delta_{\mathbf{C}}$.

(2) Agora, temos que provar que se ψ, ψ_1,..., ψ_m são fórmulas tais que (*i*) ψ está em X, (*ii*) $\psi(\psi_1,...,\psi_m)$ está definida, e (*iii*) a fórmula ψ_i está em X ou é da forma $Rx_1...x_{n_i}$, em que R é uma variável de predicado, e R tem aridade n_i, para cada $i\in\{1,...,m\}$, então $\psi(\psi_1,...,\psi_m)$ está em X. Assuma a hipótese. Vamos fixar Q', Q_1,..., Q_m funções de primeira ordem expressas fracamente por ψ, ψ_1,..., ψ_m, de modo que Q', Q_1,..., Q_m estão definidas em

$$\prod(\Lambda|_{S'},n')/_{\approx_{q'}},\ \prod(\Lambda|_{S''},n_1)/_{\approx_{q_1}},...,\ \prod(\Lambda|_{S''},n_m)/_{\approx_{q_m}},$$

respectivamente, em que S'' é a assinatura de $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$, o número q' é o posto de ψ e q_i é o posto de ψ_i, e, além disso, se ψ_i é $Rx_1...x_{n_i}$ e R é a $j(i)$-ésima variável de predicado em S'', então Q_i é a projeção $P^{S''}_{j(i)}$ correspondente, para cada $i \in \{1, ..., m\}$.

Considere Q uma função de primeira ordem expressa fracamente por $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$. Queremos mostrar que $\mathrm{Q} \in \langle \mathbf{C} \rangle$. Como $\langle \mathbf{C} \rangle$ é fechado por variações de posto, podemos supor que Q está definida em

$$\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_{q'+\max(q_1,...,q_m)}},$$

para algum número n. Além disso, sabemos que $S'' \subseteq S$.

Se x_{i_1},..., x_{i_k} são as variáveis livres de ψ (e de $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$), então $\max(i_1, ..., i_k) \leq n$ e $\max(i_1, ..., i_k) \leq n'$. Seja $\nu : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$ uma função tal que $\nu(i_1) = i_1$,..., $\nu(i_k) = i_k$ e seja $\pi : S'' \to S$ a inclusão.

Nessas condições,

$$\pi_*(\nu_*(\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)))([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{q'+\max(q_1,...,q_m)}) =$$

$$\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)([(\pi^*(\mathcal{A}), \nu^*(\overline{a}))]_{q'+\max(q_1,...,q_m)}) =$$

$$\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)([(\mathcal{A}|_{S''}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n')}))]_{q'+\max(q_1,...,q_m)}).$$

Pela definição de composição,

$$\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)([(\mathcal{A}|_{S''}, \nu^*(\overline{a}))]_{q'+\max(q_1,...,q_m)}) =$$

$$\mathrm{Q}'([(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}|_{S''}), \nu^*(\overline{a}))]_{q'+\max(q_1,...,q_m)}).$$

Como ψ expressa Q', temos que

$$\mathrm{Q}'([(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}|_{S''}), \nu^*(\overline{a}))]_{q'+\max(q_1,...,q_m)}) = \mathbf{T} \text{ sse}$$

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}|_{S''}) \models \psi[\nu^*(\overline{a})].$$

Pelo lema 50,

$$(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}|_{S''}) \models \psi[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A}|_{S''} \models \psi(\psi_1, ..., \psi_m)[\nu^*(\overline{a})].$$

Pela definição da função ν, lembrando que x_{i_1},..., x_{i_k} são as variáveis livres de ψ (e de $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$),

$$\mathcal{A}|_{S''} \models \psi(\psi_1, ..., \psi_m)[\nu^*(\overline{a})] \text{ sse } \mathcal{A} \models \psi(\psi_1, ..., \psi_m)[\overline{a}].$$

Por hipótese, $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)$ expressa fracamente Q, e disso segue que

$$\mathcal{A} \models \psi(\psi_1, ..., \psi_m)[\overline{a}] \text{ sse } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{q'+\max(q_1,...,q_m)}) = \mathbf{T}.$$

Das equivalências acima, concluímos que $\pi_*(\nu_*(\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m))) = \mathrm{Q}$, e $\mathrm{Q} \in \langle \mathbf{C} \rangle$, pois $\langle \mathbf{C} \rangle$ é fechado por composição de funções e primeira ordem, por ν-operações e por π-operações.

(3) Seja φ uma fórmula obtida a partir de uma fórmula ϕ de X por renomeamento de variáveis individuais livres ou ligadas. Há duas operações básicas de renomeamento de variáveis individuais: A operação de tomar uma variante e a operação de substituição de variáveis individuais livres. Qualquer renomeamento lícito de variáveis individuais pode ser obtido por uma composição dessas operações básicas. Basta, portanto, provar (i) se φ é uma variante de ϕ, então $\varphi \in X$, e (ii) se φ é $\phi_{x_{i_1}...x_{i_k}}[x_{j_1}...x_{j_k}]$ então $\varphi \in X$.

Se φ é uma variante de ϕ e Q é uma função de primeira ordem expressa fracamente por φ, então Q é expressa fracamente por ϕ. Como $\phi \in X$, segue que $\mathrm{Q} \in \langle \mathbf{C} \rangle$. Pela definição de X, temos que $\varphi \in X$.

Se φ é obtida a partir de ϕ por substituição de variáveis individuais livres, então φ é da forma $\phi_{x_{i_1}...x_{i_k}}[x_{j_1}...x_{j_k}]$. Podemos acrescentar substituições inócuas (do tipo x_i substitui x_i) se necessário, e, por isso, podemos supor que $fv(\phi) = \{x_{i_1}, ..., x_{i_k}\}$. Seja

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

uma função de primeira ordem fracamente expressa por φ. Como a assinatura de φ é igual à assinatura de ϕ, a assinatura de ϕ está contida em S e podemos fixar uma função de primeira ordem

$$\mathrm{Q}' : \prod(\Lambda|_S, n')/_{\approx_{q'}} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

fracamente expressa por ϕ e tal que q' é o posto quantificacional de ϕ. Sabemos que Q' está em $\langle \mathbf{C} \rangle$.

Como Q' é fracamente expressa por ϕ, o conjunto $\{i_1, ..., i_k\}$ está contido em $\{1, ..., n'\}$. Analogamente, o conjunto $\{j_1, ..., j_k\}$ está contido em $\{1, ..., n\}$. Seja

$$\nu : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$$

tal que $\nu(i_1) = j_1$,..., $\nu(i_k) = j_k$.

Como $\langle \mathbf{C} \rangle$ é fechado por variações de posto, podemos supor que $q = q'$. Nessas condições, temos que $\nu_*(\mathrm{Q}') = \mathrm{Q}$. De fato, pela definição das ν-operações,

$$\nu_*(\mathrm{Q}')([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}'([(\mathcal{A}, \nu^*(\overline{a}))]_q) = \mathrm{Q}'([(\mathcal{A}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n')}))]_q).$$

Além disso, pelo fato que ϕ expressa fracamente Q',

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, (a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n')}))]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathcal{A} \models \phi[a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n')}],$$

e pelo lema 36, e pelo fato que φ é $\nu(\phi)$,

$$\mathcal{A} \models \phi[a_{\nu(1)}, ..., a_{\nu(n')}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n].$$

Como Q é expressa fracamente por φ, segue que

$$\nu_*(\mathrm{Q}')([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathcal{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \text{ sse } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}.$$

Portanto, $\mathrm{Q} \in \langle \mathbf{C} \rangle$, pois Q é obtida a partir de uma função de primeira ordem em $\langle \mathbf{C} \rangle$ por uma ν-operação. Concluímos que $\varphi \in X$, e X é fechado por renomeamento de variáveis individuais.

(4) Suponha que ϕ está em X e φ é obtida a partir de ϕ por um renomeamento de variáveis $\pi : S' \to \tilde{S}$, em que $\tilde{S}$ e S' são as assinaturas de φ e ϕ, respectivamente. Isso significa que φ é $\pi(\phi)$. Fixe Q' uma função de primeira ordem expressa fracamente por ϕ e definida em $\prod(\Lambda|_{S'}, n')/_{\approx_{q'}}$. Se

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

é expressa fracamente por φ, então $\tilde{S} \subseteq S$ e podemos considerar que o contradomínio de π é S. Além disso, $fv(\phi) = fv(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$. Como $\langle \mathbf{C} \rangle$ é fechado por variações de posto, podemos supor que $q = q'$.

Seja $\nu : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$ tal que se $x_i \in fv(\phi)$ então $\nu(i) = i$. Por definição,

$$\pi_*(\nu_*(\mathrm{Q}'))([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}'([(\pi^*(\mathcal{A}), \nu^*(\overline{a}))]_q).$$

Como ϕ expressa fracamente Q',

$$\mathrm{Q}'([(\pi^*(\mathcal{A}), \nu^*(\overline{a}))]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } \pi^*(\mathcal{A}) \models \phi[\nu^*(\overline{a})].$$

Pelo lema 39, usando o fato que ν é a função identidade nos índices das variáveis livres de ϕ,

$$\pi_*(\nu_*(\mathrm{Q}'))([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}],$$

e

$$\pi_*(\nu_*(\mathrm{Q}')) = \mathrm{Q}.$$

Portanto, Q está em $\langle \mathbf{C} \rangle$ e φ está em X.

$\square$

53 Observação. A prova do teorema 52 mostra que o conjunto $\Delta_{\mathbf{C}}$ pode ser substituído por qualquer conjunto Δ de fórmulas com a seguinte propriedade: Para toda função de primeira ordem Q em $\mathbf{C}$ e definida em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$, existe uma fórmula φ em Δ cuja assinatura é S e que expressa fracamente Q.

Capítulo 3

Outras Operações e Ideais de Funções de Primeira Ordem

3.1 Outras Operações com Funções de Primeira Ordem

3.1.1 Eliminação de Argumentos Inessenciais.

54 Definição. Seja Q uma função de primeira ordem definida no conjunto $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$, e seja R uma variável de predicado em S. Dizemos que *R representa um argumento de predicado inessencial em* Q se, para todas as S-estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ diferem apenas com relação à interpretação de R, ou seja, se $\mathcal{A}|_{S'} = \mathcal{B}|_{S'}$, em que S' é a assinatura obtida a partir de S pela eliminação de R, então

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{B}, \overline{a})]_q).$$

Dizemos que R representa um argumento de predicado essencial em Q sse R não representa um argumento inessencial em Q.

55 Observação. Uma indução simples prova que para todas as S-estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ diferem apenas com relação à interpretação de variáveis de predicado que representam argumentos inessenciais em Q, ou seja, se $\mathcal{A}|_{S'} = \mathcal{B}|_{S'}$, em que S' é a assinatura obtida a partir de S pela eliminação de variáveis de predicado que representam argumentos inessenciais em Q, então

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{B}, \overline{a})]_q).$$

Seja S uma assinatura e R uma variável de predicado em S. Se uma função de primeira ordem Q definida em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ é expressa fracamente por uma fórmula que não contém nenhuma ocorrência da variável de predicado R, então R representa um argumento de predicado inessencial em Q. A proposição 56 mostra a conversa:

56 Proposição. *Seja* Q *uma função de primeira ordem que não é constante e definida no conjunto* $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$. *Nessas condições, existe uma fórmula* φ *que expressa fracamente* Q, *e tal que apenas variáveis de predicado que representam argumentos essenciais de* Q *ocorrem em* φ.

Demonstração. Como Q não é constante, existe pelo menos uma variável de predicado em S que representa um argumento essencial em Q. Seja S' a assinatura obtida a partir de S pela eliminação das variáveis de predicado que representam argumentos inessenciais. Seja $\pi : S' \to S$ a inclusão de assinaturas.

Existe uma única função de primeira ordem

$$\mathrm{Q}' : \prod(\Lambda|_{S'}, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

tal que

$$\mathrm{Q}'([(\pi^*(\mathcal{A}), \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q).$$

De fato, qualquer S'-estrutura é o reduto de alguma S-estrutura, ou seja, é da forma $\pi^*(\mathcal{A})$, para alguma S-estrutura $\mathcal{A}$. Se $\pi^*(\mathcal{A}) = \pi^*(\mathcal{B})$, então, como todas as variáveis que representam argumentos essenciais de Q estão em S', segue da observação 55 que

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{B}, \overline{a})]_q).$$

Portanto, a função Q' está bem definida pela igualdade do parágrafo anterior, e Q é $\pi_*(\mathrm{Q}')$.

Seja φ uma fórmula que expressa fracamente Q'. Como $\pi^*(\mathcal{A})$ é o reduto de $\mathcal{A}$ para S',

$$\pi^*(\mathcal{A}) \models \varphi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}],$$

e φ expressa fracamente Q.

□

Segue da prova da proposição 56 que se S contém pelo menos uma variável de predicado que representa um argumento essencial em Q, então existe uma função de primeira ordem Q' definida em $\prod(\Lambda|_{S'}, n)/_{\approx_q}$, tal que as variáveis de predicado em S' são aquelas de S que representam argumentos essenciais em Q e tal que Q é $\pi_*(\mathrm{Q}')$. Nesse caso, temos a seguinte definição:

57 Definição. Utilizando a notação da prova da proposição 56, dizemos que a função de primeira ordem Q' é obtida a partir de Q por *eliminação de argumentos inessenciais*. Denotamos Q' por $\pi^*(\mathrm{Q})$.

A seguir apresentamos uma caracterização das variáveis de predicado que representam argumentos inessenciais em uma função de primeira ordem em termos de *polaridade*: Dizemos que uma variável de predicado P ocorre negativamente em uma fórmula φ se P tem uma ocorrência no escopo de um número ímpar de negações. Analogamente, dizemos que P ocorre positivamente em φ se P tem uma ocorrência no escopo de um número par de negações. A definição indutiva de "P ocorre negativamente/positivamente em uma fórmula φ" é a seguinte:

58 Definição. A variável de predicado P ocorre positivamente em $Py_1...y_k$. Se P ocorre negativamente (positivamente) em ϕ, então P ocorre positivamente (negativamente) em $\neg\phi$. Se P ocorre negativamente (positivamente) em ϕ e em ψ, então P ocorre negativamente (positivamente) em $\phi \wedge \psi$ e em $\phi \vee \psi$. Se P ocorre negativamente (positivamente) em ϕ, então P ocorre negativamente (positivamente) em $\exists y\phi$.

59 Teorema. *Suponha que* Q *é uma função de primeira ordem que não é constante,*

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

e que P é uma variável de predicado k-ária. Se existem fórmulas φ e φ', que expressam fracamente Q*, e tais que P ocorre apenas negativamente em φ e apenas positivamente em φ', então a variável de predicado P representa um argumento inessencial em* Q*. Conversamente, se P é uma variável de predicado em S e P representa um argumento de predicado inessencial em* Q*, então existem fórmulas φ e φ', que expressam fracamente* Q*, e tais que P ocorre apenas negativamente em φ e apenas positivamente em φ'.*

Demonstração. Suponha que existem fórmulas φ e φ', que expressam fracamente Q, e tais que P ocorre apenas negativamente em φ e apenas positivamente em φ'. Como φ e φ' expressam a mesma função de primeira ordem, $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$, e, em particular, $\models \varphi \to \varphi'$. Pelo lema de Lyndon da interpolação ([5], páginas 130 e 131), existe uma fórmula ϕ sem ocorrências de P, e tal que

$$\models \varphi \to \phi \text{ e } \models \phi \to \varphi'$$

Portanto, $\models \varphi \leftrightarrow \phi$, e ϕ expressa fracamente Q. Concluímos que P representa um argumento de predicado inessencial em Q.

Conversamente, suponha que P representa um argumento de predicado inessencial em Q. Pela proposição 56, existe uma fórmula ϕ, que expressa fracamente Q, e tal que ϕ não possui ocorrências de P. Como ϕ é tautologicamente equivalente a

$$\phi \vee ((\exists y_1 ... \exists y_k P y_1 ... \, y_k) \wedge \phi) \text{ e a } \phi \vee ((\exists y_1 ... \exists y_k \neg P y_1 ... \, y_k) \wedge \phi),$$

segue que ambas as fórmulas expressam fracamente Q, e P occorre apenas positivamente na primeira e apenas negativamente na última.

□

3.1.2 Conjunção, Disjunção e Negação.

Vamos definir operações em funções de primeira ordem que correspondem aos conectivos proposicionais conjunção, disjunção e negação. Sejam Q e Q′ funções de primeira ordem, que vamos supor definidas em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$. No caso em que as funções de primeira ordem não estão definidas no mesmo domínio, podemos usar as operações básicas para obter funções de primeira ordem "equivalentes" e definidas no mesmo domínio.

- O *operador negação*, denotado por $\neg$, mapeia Q na função de primeira ordem $\neg$Q, definida por:

$$\neg \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{F}.$$

- O *operador conjunção*, denotado por $\wedge$, mapeia Q e Q′ na função de primeira ordem $\mathrm{Q} \wedge \mathrm{Q}'$, definida por:

$$\mathrm{Q} \wedge \mathrm{Q}'([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ e } \mathrm{Q}'([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}.$$

- O *operador disjunção*, denotado $\vee$, mapeia Q e Q′ na função de primeira ordem $\mathrm{Q} \vee \mathrm{Q}'$, definida por:

$$\mathrm{Q} \vee \mathrm{Q}'([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T} \text{ ou } \mathrm{Q}'([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}.$$

60 Observação. Se Q e Q′ são funções de primeira ordem definidas no mesmo domínio, e φ e φ' são fórmulas que expressam fracamente Q e Q′, respectivamente, então $\varphi \wedge \varphi'$ expressa fracamente $\mathrm{Q} \wedge \mathrm{Q}'$. As propriedades análogas valem para negação e disjunção.

61 Definição. Seja Q uma função de primeira ordem definida no conjunto $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$, e P e R as únicas variáveis de predicado em S que representam argumentos essenciais em Q. Dizemos que Q é $\wedge$-decomponível se existem um número natural $p \geq q$ e funções de primeira ordem Q_1 e Q_2, definidas em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_p}$, tais que P é a única variável de predicado que representa um argumento essencial em Q_1, R é a única variável de predicado que representa um argumento essencial em Q_2, e $\mathrm{Q}_q^p = \mathrm{Q}_1 \wedge \mathrm{Q}_2$. Nesse caso, dizemos que $\mathrm{Q}_1 \wedge \mathrm{Q}_2$ é uma $\wedge$-decomposição de Q.

Similarmente, dizemos que Q é $\vee$-decomponível se existem um número natural $p \geq q$ e funções de primeira ordem Q_1 e Q_2, definidas em

$$\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_p},$$

tais que P é a única variável de predicado que representa um argumento essencial em Q_1, R é a única variável de predicado que representa um argumento essencial em Q_2, e $\mathrm{Q}_q^p = \mathrm{Q}_1 \vee \mathrm{Q}_2$. Nesse caso, dizemos que $\mathrm{Q}_1 \vee \mathrm{Q}_2$ é uma $\vee$-decomposição de Q.

Seja $\mathrm{Q}_1 \wedge \mathrm{Q}_2$ uma $\wedge$-decomposição de Q. Sejam φ_1 e φ_2 fórmulas que expressam fracamente Q_1 e Q_2, respectivamente, e tais que P é a única variável de predicado que ocorre em φ_1 e R é a única variável de predicado que ocorre em φ_2. Nesse caso, a conjunção $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, denotada por φ, expressa fracamente Q e satifaz a seguinte condição:

$$\models (\varphi(P, R') \wedge \varphi(P', R)) \to \varphi(P, R),$$

em que $\varphi(P, R')$ é obtida a partir de $\varphi(P, R)$ pelo renomeamento da variável de predicado R, e similarmente para $\varphi(P', R)$, e P' e R' variáveis de predicado diferentes de P e R, mas com as mesmas aridades de P e R, respectivamente. Um resultado análogo vale para $\vee$-decomposições. O teorema abaixo estabelece a conversa:

62 Teorema. *Seja* Q *uma função de primeira ordem definida no conjunto* $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$*, e* P *e* R *as únicas variáveis de predicado em* S *que representam argumentos essenciais em* Q*. Sejam* P' *e* R' *variáveis de predicado diferentes de* P *e* R*, mas com as mesmas aridades de* P *e* R*, respectivamente. Seja* φ *uma fórmula que expressa fracamente* Q*, tal que as únicas variáveis de predicado que ocorrem em* φ *são* P *e* R*: Vamos indicar isso escrevendo* $\varphi(P, R)$*. Suponha que* $\varphi(P, R')$ *é obtida a partir de* $\varphi(P, R)$ *pelo renomeamento da variável de predicado* R*, e similarmente para* $\varphi(P', R)$*.*

1. *Se* $\models (\varphi(P, R') \wedge \varphi(P', R)) \to \varphi(P, R)$*, então* Q *é* $\wedge$*-decomponível.*
2. *Se* $\models \varphi(P, R) \to (\varphi(P, R') \vee \varphi(P', R))$*, então* Q *é* $\vee$*-decomponível.*

Demonstração. (1): Assuma que $\varphi(P, R)$ é uma fórmula que expressa fracamente Q e satisfaz

$$\models (\varphi(P, R') \wedge \varphi(P', R)) \to \varphi(P, R).$$

Podemos reescrever a hipótese como

$$\models \varphi(P, R') \to (\varphi(P', R) \to \varphi(P, R)).$$

Pelo lema de Craig da interpolação ([5], páginas 128 e 129), existe uma fórmula $\varphi_1(P)$ tal que $fv(\varphi_1) \subseteq fv(\varphi)$ e

$$\models \varphi(P, R') \to \varphi_1(P) \text{ e } \models \varphi_1(P) \to (\varphi(P', R) \to \varphi(P, R)).$$

Podemos reescrever a última implicação como segue:

$$\models \varphi(P', R) \to (\varphi_1(P) \to \varphi(P, R)).$$

Novamente, pelo lema de Craig da interpolação, existe uma fórmula $\varphi_2(R)$ tal que $fv(\varphi_2) \subseteq fv(\varphi)$ e

$$\models \varphi(P', R) \to \varphi_2(R) \text{ e } \models \varphi_2(R) \to (\varphi_1(P) \to \varphi(P, R)).$$

De $\models \varphi(P, R') \to \varphi_1(P)$ e $\models \varphi(P', R) \to \varphi_2(R)$, segue que

$$\models \varphi(P, R) \to \varphi_1(P) \text{ e } \models \varphi(P, R) \to \varphi_2(R),$$

e, portanto, que

$$\models \varphi(P, R) \to (\varphi_1(P) \wedge \varphi_2(R)).$$

De $\models \varphi_2(R) \to (\varphi_1(P) \to \varphi(P, R))$, segue que

$$\models (\varphi_1(P) \wedge \varphi_2(R)) \to \varphi(P, R).$$

Portanto, $\models \varphi(P, R) \leftrightarrow (\varphi_1(P) \wedge \varphi_2(R))$, e a fórmula $\varphi_1(P) \wedge \varphi_2(R)$ expressa fracamente Q. Considere Q_1 e Q_2 funções de primeira ordem definidas em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_p}$, para algum $p \geq q$, e expressas fracamente por φ_1 e φ_2, respectivamente.[1] Temos que

$$\mathrm{Q}_q^p = \mathrm{Q}_1 \wedge \mathrm{Q}_2,$$

e a primeira parte está provada.

(2): Assuma que $\varphi(P, R)$ é uma fórmula que expressa fracamente Q e satisfaz

$$\models \varphi(P, R) \to (\varphi(P, R') \vee \varphi(P', R)).$$

Tomando a contra-positiva da implicação acima, temos:

[1] Sempre existem tais funções de primeira ordem. Para ver isso, tome as funções de primeira ordem expressas por φ_1 e φ_2 e utilize as operações básicas para garantir que elas estejam definidas em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_p}$. Lembre-se que $fv(\varphi_1) \subseteq fv(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ e $fv(\varphi_2) \subseteq fv(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$.

$$\models (\neg\varphi(P, R') \wedge \neg\varphi(P', R)) \rightarrow \neg\varphi(P, R).$$

Agora, segue de (1) que existem fórmulas $\varphi_1(P)$ e $\varphi_2(R)$, tais que

$$\models \neg\varphi(P, R) \leftrightarrow (\varphi_1(P) \wedge \varphi_2(R)).$$

Portanto, $\models \varphi(P, R) \leftrightarrow (\neg\varphi_1(P) \vee \neg\varphi_2(R))$, e, para terminar a prova, basta considerar Q_1 e Q_2 funções de primeira ordem definidas em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_p}$, para algum $p \geq q$, e expressas fracamente por φ_1 e φ_2, respectivamente.

$\square$

3.1.3 Dualidade.

Sejam S uma assinatura e $\mathcal{A}$ uma S-estrutura. Podemos associar à estrutura $\mathcal{A}$ outra S-estrutura $\mathcal{A}^*$, como segue: A interpretação de cada variável de predicado R em $\mathcal{A}^*$ é o complemento conjuntista da interpretação de R em $\mathcal{A}$.

63 Definição. Seja Q uma função de primeira ordem. A função de primeira ordem *dual* Q^*, de Q, é a função de primeira ordem definida por

$$\mathrm{Q}^*([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \neg\mathrm{Q}([(\mathcal{A}^*, \overline{a})]_q).$$

64 Definição. Uma função de primeira ordem Q é dita *auto-dual* se é igual à sua função de primeira ordem dual Q^*.

65 Observação. Note que sempre vale que $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{**}$. Além disso, as seguintes relações são consequências imediatas das definições:

$$(\mathrm{Q}_1 \wedge \mathrm{Q}_2)^* = \mathrm{Q}_1^* \vee \mathrm{Q}_2^* \text{ e } (\mathrm{Q}_1 \vee \mathrm{Q}_2)^* = \mathrm{Q}_1^* \wedge \mathrm{Q}_2^*.$$

3.2 Ideais de Funções de Primeira Ordem

Uma das tarefas principais da teoria das funções de primeira ordem é a de formular e estudar condições pelas quais uma função de primeira ordem é definida em termos de outras funções de primeira ordem. No capítulo 2, nas seções 2 e 3, estabelecemos uma relação primária de *definição* entre funções de primeira ordem: Uma função de primeira ordem Q é definida em termos das funções de primeira ordem no conjunto **C** sse **Q** está no sistema gerado a partir de **C** pela aplicação das operações básicas. Nesta seção vamos estudar outra relação natural de definição entre funções de primeira ordem.

Nesta seção, convencionamos usar Q_1,..., Q_m para funções de primeira ordem definidas em $\prod(\Lambda|_S, n_1)/_{\approx_{q_1}}$,..., $\prod(\Lambda|_S, n_m)/_{\approx_{q_m}}$, para alguma assinatura S e alguma sequência não-decrescente de números $\langle n_1, ..., n_m\rangle$. Fazendo uma analogia com a operação de multiplicação, podemos pensar em uma função de primeira ordem da forma $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$ como "múltiplo" de $(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$. Com essa analogia, a definição 66 abaixo é bastante natural.

66 Definição. Um conjunto J de funções de primeira ordem fechado por variações de posto é um ideal se satisfaz a seguinte condição: Se as funções de primeira ordem Q_1,..., Q_m estão em J, e Q' é uma função de primeira ordem qualquer tal que a composição $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$ está definida, então $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$ está em J.

67 Exemplo. Sejam S uma assinatura e J o conjunto das funções de primeira ordem Q tais que $\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A}^*, \overline{a})]_q)$, em que $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura e $\mathcal{A}^*$ é a S-estrutura definida na subseção 3.1.3. O conjunto J é um ideal de funções de primeira ordem. Outros exemplos de ideais de funções de primeira ordem podem ser obtidos de modo similar, a partir de uma operação em S-estruturas que consiste em tomar complementos de *algumas* interpretações de variáveis de predicado (e manter as outras).

O fechamento por variações de posto é exigido na definição acima porque a estrutura composicional das funções de primeira ordem está fortemente ligada às variações de posto: Mesmo que Q', Q_1,..., Q_m não possam ter seus postos "abaixados", a função de primeira ordem $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$ pode, eventualmente, ser obtida a partir de outra por subida de posto. Por isso, variações de posto devem desempenhar um papel na análise da composição de funções de primeira ordem. Vamos ilustrar essa relação entre composições e variações de posto com o seguinte resultado preliminar:

68 Lema. *Considere* Q, Q_1,..., Q_m *funções de primeira ordem definidas nos conjuntos* $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$, $\prod(\Lambda|_S, n_1)/_{\approx_{q_1}}$,..., $\prod(\Lambda|_S, n_m)/_{\approx_{q_m}}$, *respectivamente, em que q é maior ou igual ao* $\max\{q_1, ..., q_m\}$. *Se existem uma função de primeira ordem Q'' e uma função $f : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., m\}$ tais que*

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}''(\mathrm{Q}_{f(1)}, ..., \mathrm{Q}_{f(k)}),$$

então existe uma função de primeira ordem Q' tal que

$$\mathrm{Q}_q^{q+\max\{q_1,...,q_m\}-\max\left\{q_{f(1)},...,q_{f(k)}\right\}} = \mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m).$$

Demonstração. Assuma a hipótese. Seja Q'' uma função de primeira ordem definida em

$$\prod(\Lambda|_{S''}, n)/_{\approx_{q-\max\left\{q_{f(1)},...,q_{f(k)}\right\}}}$$

tal que

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}''(\mathrm{Q}_{f(1)}, ..., \mathrm{Q}_{f(k)}).$$

Como $\mathrm{Q}''(\mathrm{Q}_{f(1)}, ..., \mathrm{Q}_{f(k)})$ está definida, $\left\langle n_{f(1)}, ..., n_{f(k)}\right\rangle$ é uma sequência não-decrescente e a assinatura $S'' = \langle R_1'', ..., R_k''\rangle$ é de tipo $\left\langle n_{f(1)}, ..., n_{f(k)}\right\rangle$. Sejam $S' = \langle R_1', ..., R_m'\rangle$ uma assinatura de tipo $\langle n_1, ..., n_m\rangle$, e $\pi : S'' \to S'$ definida por $\pi(R_i'') = R_{f(i)}'$, para cada $i \in \{1, ..., k\}$.

Sejam $q'' = q - \max\left\{q_{f(1)}, ..., q_{f(k)}\right\}$ e $\tilde{q} = q'' + \max\{q_1, ..., q_m\}$. Temos que:

$$\pi_*(\mathrm{Q}'')(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{\tilde{q}}) = \pi_*(\mathrm{Q}'')([((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{q''}).$$

Além disso, temos que

$$\pi_*(Q'')([((Q_1, ..., Q_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{q''}) = Q''([(\pi^*((Q_1, ..., Q_m)(\mathcal{A})), \overline{a})]_{q''}).$$

Como $\pi^*((Q_1, ..., Q_m)(\mathcal{A})) = (Q_{f(1)}, ..., Q_{f(k)})(\mathcal{A})$, segue que

$$\pi_*(Q'')(Q_1, ..., Q_m)([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{\tilde{q}}) = Q''([((Q_{f(1)}, ..., Q_{f(k)})(\mathcal{A}), \overline{a})]_{q''}).$$

Como $\tilde{q}$ é maior ou igual a q, e $Q = Q''(Q_{f(1)}, ..., Q_{f(k)})$, segue que

$$\pi_*(Q'')(Q_1, ..., Q_m)([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{\tilde{q}}) = Q([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q),$$

e

$$Q_q^{\tilde{q}} = \pi_*(Q'')(Q_1, ..., Q_m).$$

A função de primeira ordem $\pi_*(Q'')$ satisfaz a tese do lema.

□

O lema 68 não pode ser melhorado no sentido de eliminar a variação de posto, ou seja, não é possível, em geral, obter uma função Q' tal que Q é $Q'(Q_1, ..., Q_m)$: Por exemplo, considere $Q = Q_1 = P_1(Q_1)$, em que P_1 é a projeção apropriada. Se $q_1 < \max\{q_1, ..., q_m\}$ não é possível escrever Q_1 como uma composição da forma $Q'(Q_1, ..., Q_m)$. Nesse caso, Q_1 só pode ser obtida a partir de uma composição com Q_1,..., Q_m por um abaixamento de posto *posterior* à composição.

3.2.1 Ideais Finitamente Gerados.

Os três lemas a seguir são resultados básicos na direção de compreender o que são os ideais de funções de primeira ordem finitamente gerados. O primeiro deles estabelece a associatividade da composição de funções de primeira ordem, o que significa que a seguinte propriedade é válida:

$$Q''(Q_1''(Q_1, ..., Q_m), ..., Q_k''(Q_1, ..., Q_m)) = Q''(Q_1'', ..., Q_k'')(Q_1, ..., Q_m).$$

69 Lema. *Sejam* Q, Q_1,..., Q_m, Q_1',..., Q_k' *funções de primeira ordem. Suponha que existem funções de primeira ordem* Q'', Q_1'',..., Q_k'' *tais que*

$$Q = Q''(Q_1', ..., Q_k') \text{ e } Q_i' = Q_i''(Q_1, ..., Q_m),$$

para cada $i \in \{1, ..., k\}$*. Nessas condições, se* $Q' = Q''(Q_1'', ..., Q_k'')$*, então*

$$Q = Q'(Q_1, ..., Q_m).$$

Demonstração. Sejam q, q_1,..., q_m, q_1',..., q_k', q'', q_1'',..., q_k'' os postos de

$$Q,\ Q_1, ..., Q_m,\ Q_1', ..., Q_k',\ Q'',\ Q_1'', ..., Q_k'',$$

respectivamente. Sabemos que $q_i' = q_i'' + \max\{q_1, ..., q_m\}$, para cada $i \in \{1, ..., k\}$. Disso segue que

$$q'' = q - \max\{q_1', ..., q_k'\} = q - \max\{q_1'', ..., q_k''\} - \max\{q_1, ..., q_m\}.$$

Vamos calcular $Q'(Q_1, ..., Q_m)$ em um valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$:

$$Q'(Q_1, ..., Q_m)([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) =$$

$$Q''(Q_1'', ..., Q_k'')([((Q_1, ..., Q_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{q-\max\{q_1, ..., q_m\}}) =$$

$$Q''([((Q_1'', ..., Q_k'')((Q_1, ..., Q_m)(\mathcal{A})), \overline{a})]_{q''}).$$

Pela definição de composição de funções de primeira ordem, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, o predicado definido por Q_i'' na estrutura $(Q_1, ..., Q_m)(\mathcal{A})$ é o predicado definido por $Q_i''(Q_1, ..., Q_m)$ em $(\mathcal{A})$. Portanto, a estrutura

$$(\mathrm{Q}''_1, ..., \mathrm{Q}''_k)((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}))$$

é igual a

$$(\mathrm{Q}''_1(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m), ..., \mathrm{Q}''_k(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m))(\mathcal{A}) = (\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)(\mathcal{A}).$$

Das igualdades acima segue que

$$\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}''([((\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{q''}).$$

Por hipótese, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}''(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)$, o que implica

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m).$$

□

Já sabemos, pelo comentário abaixo do lema 68, que não é possível comutar, em geral, composições com variações de posto: Existe uma função de primeira ordem Q que pode ser obtida a partir de uma composição $\mathrm{Q}''(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$ por um abaixamento de posto e tal que é impossível obter Q como $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$, para alguma Q'. O próximo lema mostra uma situação importante em que podemos comutar composições e variações de posto.

70 Lema. *Sejam* Q, Q'_1,..., Q'_k *funções de primeira ordem, cujos postos são* q, q'_1,..., q'_k, *respectivamente, e* p_1,..., p_k *números naturais tais que* $q'_i \leq p_i$, *para cada* $i \in \{1, ..., k\}$. *Se a composição* $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)$ *está definida, então a composição* $\mathrm{Q}((\mathrm{Q}'_1)^{p_1}_{q'_1}, ..., (\mathrm{Q}'_k)^{p_k}_{q'_k})$ *está definida e é obtida a partir de* $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)$ *por subida de posto.*

Demonstração. Suponha que a composição $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)$ está definida. Claramente, a composição $\mathrm{Q}((\mathrm{Q}'_1)^{p_1}_{q'_1}, ..., (\mathrm{Q}'_k)^{p_k}_{q'_k})$ também está definida. Vamos calcular

$$\mathrm{Q}((\mathrm{Q}'_1)^{p_1}_{q'_1}, ..., (\mathrm{Q}'_k)^{p_k}_{q'_k})([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{q+\max\{p_1,...,p_k\}}).$$

Para cada $i \in \{1, ..., k\}$, as funções de primeira ordem Q'_i e $(\mathrm{Q}'_i)^{p_i}_{q'_i}$ definem os mesmos predicados na estrutura $\mathcal{A}$. Disso segue que

$$(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)(\mathcal{A}) = ((\mathrm{Q}'_1)^{p_1}_{q'_1}, ..., (\mathrm{Q}'_k)^{p_k}_{q'_k})(\mathcal{A}).$$

Portanto,

$$\mathrm{Q}((\mathrm{Q}'_1)^{p_1}_{q'_1}, ..., (\mathrm{Q}'_k)^{p_k}_{q'_k})([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{q+\max\{p_1,...,p_k\}}) =$$

$$\mathrm{Q}([(((\mathrm{Q}'_1)^{p_1}_{q'_1}, ..., (\mathrm{Q}'_k)^{p_k}_{q'_k})(\mathcal{A}), \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([((\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)(\mathcal{A}), \overline{a})]_q).$$

O resultado segue da igualdade acima, utilizando o fato que

$$\mathrm{Q}([((\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)(\mathcal{A}), \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{q+\max\{q'_1,...,q'_k\}}).$$

□

71 Lema. *Sejam* Q, Q_1,..., Q_m *funções de primeira ordem definidas nos conjuntos*

$$\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}, \prod(\Lambda|_S, n_1)/_{\approx_{q_1}}, ..., \prod(\Lambda|_S, n_m)/_{\approx_{q_m}},$$

respectivamente, em que $q \geq \max\{q_1, ..., q_m\}$ *e a sequência* $\langle n_1, ..., n_m\rangle$ *é não-decrescente. Existe uma função de primeira ordem,* Q', *de posto*

$$q' = q - \max\{q_1, ..., q_m\}$$

e tipo $\langle n_1, ..., n_m\rangle \to n$ *tal que* $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$ *sse para todos os valores de primeira ordem* $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ *e* $[(\mathcal{B}, \overline{b})]_q$, *em que* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *são* S*-estruturas, e* $\overline{a}$ *e* $\overline{b}$ *são* n*-uplas, se*

$$[((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{q-\max\{q_1,...,q_m\}} = [((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b})]_{q-\max\{q_1,...,q_m\}},$$

então

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{B},\overline{b})]_q).$$

Demonstração. A condição é claramente necessária. Vamos mostrar que é também suficiente. Suponha que

$$[((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{q-\max\{q_1,...,q_m\}} = [((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b})]_{q-\max\{q_1,...,q_m\}}$$

implica

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathrm{Q}([(\mathcal{B},\overline{b})]_q).$$

Definimos a função de primeira ordem Q' de posto $q' = q - \max\{q_1, ..., q_m\}$ e tipo $\langle n_1, ..., n_m\rangle \to n$ do seguinte modo:

1. Dado um valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}',\overline{a})]_{q'}$ de tipo $\langle n_1, ..., n_m\rangle$, se existe um valor de primeira ordem $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q$ em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ tal que

$$[(\mathcal{A}',\overline{a})]_{q'} = [((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{q'},$$

   então definimos

$$\mathrm{Q}'([(\mathcal{A}',\overline{a})]_{q'}) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q).$$

2. Caso contrário, definimos

$$\mathrm{Q}'([(\mathcal{A}',\overline{a})]_{q'}) = \mathbf{T}.$$

A condição do teorema garante que a primeira cláusula da definição não depende da escolha do valor $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q$ em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$. Agora, basta checar que $\mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathrm{Q}'(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)([(\mathcal{A},\overline{a})]_q)$, para todo $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q$ em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$. Isso segue da definição de Q', e o resultado está provado.

□

72 Teorema. *Seja J o ideal finitamente gerado pelas funções de primeira ordem Q_1,..., Q_m. Para uma função de primeira ordem Q, definida em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$, são equivalentes:*

1. $\mathrm{Q} \in J$

2. *Existe um número natural $p \geq q$ tal que $p \geq \max\{q_1, ..., q_m\}$ e para todos os valores de primeira ordem $[(\mathcal{A},\overline{a})]_p$ e $[(\mathcal{B},\overline{b})]_p$, em que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são S-estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são n-uplas, se*

$$[((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{p-\max\{q_1,...,q_m\}} = [((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b})]_{p-\max\{q_1,...,q_m\}},$$

então

$$\mathrm{Q}^p_q([(\mathcal{A},\overline{a})]_p) = \mathrm{Q}^p_q([(\mathcal{B},\overline{b})]_p).$$

Demonstração. Suponha que a condição (2) vale e seja p o menor número natural que satisfaz (2). Pelo lema 71, a função de primeira ordem Q^p_q pertence a J. Como J é fechado por variações de posto, $\mathrm{Q} \in J$.

Para a implicação conversa, vamos provar que o subconjunto I de J constituído pelas funções de primeira ordem Q que satisfazem (2) contém as funções de primeira ordem Q_1,..., Q_m, é fechado por variações de posto, e se as funções de primeira ordem Q'_1,..., Q'_k estão em I e Q' é uma função de primeira ordem qualquer tal que a composição $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)$ está definida, então $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)$ está em I. .

Claramente, I contém Q_1,..., Q_m.

Para provar que I é fechado por variações de posto, observe que se p é um número dado pela condição (2) e $p' \geq p$, então p' satisfaz a mesma propriedade. De fato, sejam $[(\mathcal{A},\overline{a})]_{p'}$ e $[(\mathcal{B},\overline{b})]_{p'}$ valores de primeira ordem. Como $p \leq p'$, se

$$[((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{p'-\max\{q_1,...,q_m\}} = [((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b})]_{p'-\max\{q_1,...,q_m\}},$$

então

$$[((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{p-\max\{q_1,...,q_m\}} = [((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b})]_{p-\max\{q_1,...,q_m\}}.$$

Por hipótese,

$$\mathrm{Q}_q^p([(\mathcal{A}, \overline{a})]_p) = \mathrm{Q}_q^p([(\mathcal{B}, \overline{b})]_p).$$

Como

$$\mathrm{Q}_q^{p'}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{p'}) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}_q^p([(\mathcal{A}, \overline{a})]_p),$$

e similarmente para $(\mathcal{B}, \overline{b})$, temos que

$$\mathrm{Q}_q^{p'}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{p'}) = \mathrm{Q}_q^{p'}([(\mathcal{B}, \overline{b})]_{p'}).$$

Agora, sejam $\mathrm{Q} \in I$ e Q' obtida a partir de Q por variação de posto. Se p é um número dado pela condição (2), podemos supor, pelo argumento acima, que p é, também, maior ou igual ao posto q' de Q'. Nessas condições, se

$$[((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{A}), \overline{a})]_{p-\max\{q_1,...,q_m\}} = [((\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)(\mathcal{B}), \overline{b})]_{p-\max\{q_1,...,q_m\}},$$

então

$$\mathrm{Q}_q^p([(\mathcal{A}, \overline{a})]_p) = \mathrm{Q}_q^p([(\mathcal{B}, \overline{b})]_p).$$

Como

$$\mathrm{Q}_q^p([(\mathcal{A}, \overline{a})]_p) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathrm{Q}'([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{q'}) = \mathrm{Q}'^p_{q'}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_p),$$

e similarmente para $(\mathcal{B}, \overline{b})$, temos que

$$\mathrm{Q}'^p_{q'}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_p) = \mathrm{Q}'^p_{q'}([(\mathcal{B}, \overline{b})]_p).$$

Resta provar que I é fechado pela composição de funções que estão em I com uma função qualquer. Sejam Q', Q'_1,..., Q'_k funções de primeira ordem, cujos postos são q', q'_1,..., q'_k, respectivamente. Suponha que Q'_1,..., Q'_k estão em I e que a composição $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)$ está definida. Sejam p_1,..., p_k números naturais dados pela condição (2) para Q'_1,..., Q'_k, respectivamente.

Pelo lema 70 a composição $\mathrm{Q}'((\mathrm{Q}'_1)^{p_1}_{q'_1}, ..., (\mathrm{Q}'_k)^{p_k}_{q'_k})$ está definida e é obtida a partir de $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)$ por subida de posto. Contudo, pelo lema 71, a função de primeira ordem $\mathrm{Q}'^{p_i}_{q_i}$ é da forma $\mathrm{Q}''_i(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m)$, para cada $i \in \{1, ..., k\}$. Do lema 69 segue que

$$\mathrm{Q}'((\mathrm{Q}'_1)^{p_1}_{q'_1}, ..., (\mathrm{Q}'_k)^{p_k}_{q'_k}) = \mathrm{Q}'(\mathrm{Q}''_1, ..., \mathrm{Q}''_k)(\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_m).$$

Portanto, utilizando novamente o lema 71, a função de primeira ordem $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)$ satisfaz a condição (2), em que o p apropriado é aquele correspondente à subida de posto $\mathrm{Q}'((\mathrm{Q}'_1)^{p_1}_{q'_1}, ..., (\mathrm{Q}'_k)^{p_k}_{q'_k})$ de $\mathrm{Q}'(\mathrm{Q}'_1, ..., \mathrm{Q}'_k)$.

□

Capítulo 4

Relativização a uma Classe de Estruturas

4.1 Valores e Funções Relativas a uma Classe de Estruturas

No capítulo 1, introduzimos as funções de primeira ordem como um objeto minimal que é expresso por uma fórmula na lógica de primeira ordem. Uma fórmula φ, cuja assinatura é S e tal que $rk(\varphi) = q$ e $fv(\varphi) = \{x_1, ..., x_n\}$, expressa as suas condições de aplicabilidade, ou seja, expressa os valores de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ tais que $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$. Nesse sentido, cada valor de primeira ordem em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ é uma condição de aplicabilidade *possível*. Em outras palavras, todas as S-estruturas fornecem condições de aplicabilidade legítimas. Agora, vamos investigar a situação em que nem todas as S-estruturas forneçam condições de aplicabilidade legítimas. Isso ocorre, por exemplo, se consideramos como legítimas apenas as condições de aplicabilidade da forma $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ em que $\mathcal{A}$ é um modelo de uma teoria.

A motivação para a investigação do presente capítulo é muito clara. Uma fórmula expressa coisas diferentes dependendo da teoria de *background*. Por exemplo, a sentença

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

expressa o axioma do par relativamente a uma teoria de conjuntos que contém os axiomas da extensionalidade e compreensão. Contudo, na lógica com igualdade, essa sentença não expressa o axioma do par, pois, nesse caso, ela sequer é equivalente à

$$\forall x \forall y \exists ! z \forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y).$$

Portanto, faz sentido considerar o que uma fórmula expressa *relativamente a um contexto*. A escolha de um contexto, ou de uma teoria de *background* não é nada mais que a escolha de uma classe $\mathbf{K}$ de Σ-estruturas contida na classe Λ de todas as Σ-estruturas. Assumindo um tal contexto, consideramos como legítimas apenas as condições de aplicabilidade da forma $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ em que $\mathcal{A}$ é uma S-estrutura em $\mathbf{K}|_S$.

Novamente, é importante notar que o papel desempenhado pela assinatura canônica Σ, não é de modo algum essencial na construção. A assinatura Σ é apenas uma fonte conveniente de variáveis de predicado, mas tudo pode ser feito para uma assinatura arbitrária. Em particular, qualquer subsequência Σ_0 de Σ pode substituir Σ no papel de fonte de variáveis de predicado. Vamos utilizar esse fato na seção 2 abaixo, em que a fonte de variáveis de predicado consistirá em uma assinatura que contém uma única variável de predicado binária, e também no apêndice.

Até o presente momento, utilizamos como teoria de *background* a lógica de primeira ordem sem igualdade. Conforme adiantamos acima, vamos considerar agora variações da teoria de *background*. Do ponto de vista da teoria das funções de primeira ordem, uma teoria de *background* corresponde à escolha de uma classe $\mathbf{K}$ de estruturas contida na classe Λ de todas as Σ-estruturas, e $\mathbf{K}$ não precisa ser uma classe elementar. Por exemplo, a lógica de primeira ordem com igualdade é a teoria de *background* que corresponde à classe $\mathbf{K}$ de Σ-estruturas tais que a variável de predicado P_1^2 é interpretada como a igualdade.

Para desenvolver uma teoria das funções de primeira ordem relativas a uma classe de estruturas, precisamos primeiro definir o que é um valor de primeira ordem relativo a uma classe de estruturas:

73 Definição. Seja $\mathbf{K}$ uma classe contida em Λ. Considere $\langle n_1, ..., n_k\rangle$ uma sequência estritamente crescente de números naturais, e $\langle m_1, ..., m_k\rangle$ uma sequência finita de números naturais. Seja S uma assinatura, contendo, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, m_i variáveis de predicado n_i-árias. Um *valor de primeira ordem*, de posto q e tipo

$$\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle \to n$$

relativo a $\mathbf{K}$ é uma classe de equivalência de pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$, em que $\mathcal{A}$ é uma estrutura em $\mathbf{K}|_S$, e $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{A}$, pela relação de equivalência $\approx_q$. Dizemos que $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q^{\mathbf{K}}$ é o valor de primeira ordem de posto q relativo a $\mathbf{K}$ do par $(\mathcal{A}, \overline{a})$.

Se denotarmos por $\prod(\mathbf{K}|_S, n)$ a classe de todos os pares $(\mathcal{A}, \overline{a})$, em que $\mathcal{A}$ é uma estrutura em $\mathbf{K}|_S$, então um valor de primeira ordem de posto q e tipo apropriado relativo a $\mathbf{K}$ é simplesmente um elemento de $\prod(\mathbf{K}|_S, n)/_{\approx_q}$.

74 Observação. Cada valor de primeira ordem contém no máximo um valor de primeira ordem relativo a $\mathbf{K}$. Em outras palavras, se $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ é um valor de primeira ordem então existe no máximo um valor de primeira ordem $[(\mathcal{B}, \overline{b})]_q^{\mathbf{K}}$, relativo a $\mathbf{K}$, tal que

$$[(\mathcal{B}, \overline{b})]_q^{\mathbf{K}} \subseteq [(\mathcal{A}, \overline{a})]_q.$$

Nesse caso, o valor de primeira ordem $[(\mathcal{B}, \overline{b})]_q^{\mathbf{K}}$ é constituído pelos pares $(\mathcal{C}, \overline{c})$ em $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$ tais que $\mathcal{C} \in \mathbf{K}|_S$. Portanto, podemos mergulhar naturalmente $\prod(\mathbf{K}|_S, n)/_{\approx_q}$ em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$.

Vamos fixar $\mathbf{K}$ uma classe contida em Λ. Sabemos que um valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$, tal que $\mathcal{A} \in \mathbf{K}|_S$ é definido por uma fórmula ψ em $\Gamma^S(n, q)$, no sentido que para qualquer par $(\mathcal{B}, \overline{b})$ em $\prod(\Lambda|_S, n)$,

$$(\mathcal{B}, \overline{b}) \in [(\mathcal{A}, \overline{a})]_q \text{ sse } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

O valor de primeira ordem $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q^{\mathbf{K}}$, contido em $[(\mathcal{A}, \overline{a})]_q$, é definido pela *mesma* fórmula ψ, no sentido que para qualquer par $(\mathcal{B}, \overline{b})$ em $\prod(\mathbf{K}|_S, n)$,

$$(\mathcal{B}, \overline{b}) \in [(\mathcal{A}, \overline{a})]_q^{\mathbf{K}} \text{ sse } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}].$$

Agora, a definição de função de primeira ordem relativa a uma classe de estruturas é óbvia. Se S uma assinatura de tipo $\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle$, então uma função de primeira ordem de posto q e tipo

$$\left\langle \overbrace{n_1, ..., n_1}^{m_1}, ..., \overbrace{n_k, ..., n_k}^{m_k} \right\rangle \to n$$

relativa a $\mathbf{K}$ é uma função de $\prod(\mathbf{K}|_S, n)/_{\approx_q}$ em $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$.

A relativização de funções de primeira ordem a uma classe $\mathbf{K}$ pode ser vista como uma operação sobre esses objetos: Pela observação 74, podemos mergulhar naturalmente $\prod(\mathbf{K}|_S, n)/_{\approx_q}$ em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$. Portanto, uma função de $\prod(\mathbf{K}|_S, n)/_{\approx_q}$ em $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ pode ser vista como a *restrição* de uma função de $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$ em $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$. Se Q é uma função de primeira ordem definida em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$, denotamos por $\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}}$ a função de primeira ordem relativa à $\mathbf{K}$ que é a composição de Q com o mergulho canônico de $\prod(\mathbf{K}|_S, n)/_{\approx_q}$ em $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$.

Se uma função de primeira ordem Q é expressa (fracamente) por uma fórmula φ, então $\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}}$ é expressa (fracamente) pela mesma fórmula φ, no seguinte sentido:

$$\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}}) = \mathbf{T} \text{ sse } \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}].$$

Isso segue do fato que

$$\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}}) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q).$$

Observamos ainda que duas fórmulas φ e φ' podem expressar (fracamente) funções de primeira ordem Q e Q$'$ distintas e tais que $\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}} = \mathrm{Q}'|_{\mathbf{K}}$.

Podemos definir operações básicas envolvendo funções de primeira ordem relativas a uma classe de estruturas. Em particular, podemos definir a subida de posto:

75 Definição. Seja Q uma função de primeira ordem definida no conjunto $\prod(\mathbf{K}|_S, n)/_{\approx_q}$. Se p é um número natural maior ou igual a q, então definimos a subida de posto Q_q^p do seguinte modo:

$$\mathrm{Q}_q^p([(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\mathbf{K}}) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}}).$$

76 Observação. Se Q é uma função de primeira ordem definida no conjunto $\prod(\Lambda|_S, n)/_{\approx_q}$, e $\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}}$ é a relativização de Q a uma classe $\mathbf{K}$, então

$$(\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}})_q^p = \mathrm{Q}_q^p|_{\mathbf{K}},$$

qualquer que seja $p \geq q$. De fato,

$$(\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}})_q^p([(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\mathbf{K}}) = (\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}})([(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}}) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q) = \mathrm{Q}_q^p([(\mathcal{A},\overline{a})]_p),$$

para qualquer S-estrutura $\mathcal{A}$ em $\mathbf{K}|_S$, e qualquer n-upla $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$.

Na próxima seção utilizamos as funções de primeira ordem relativas a uma clase de estruturas para apresentar um resultado importante sobre a fundamentação da matemática clássica na teoria de conjuntos.

4.2 Funções de Primeira Ordem e a Fundamentação da Matemática

Gostaríamos de definir o que, intuitivamente, é o mínimo de recursos que um sistema lógico deve possuir para servir de suporte para a fundamentação da matemática clássica na teoria de conjuntos. Sabemos que a lógica de primeira ordem com uma variável de predicado binária (e sem igualdade) é suficiente para tal propósito, e que a lógica de primeira ordem com variáveis de predicado de aridade no máximo um não é suficiente. Surge, portanto, a seguinte questão: Quais funções de primeira ordem devem estar presentes em um sistema de funções de primeira ordem para uma assinatura contendo uma variável de predicado binária para que esse sistema sirva de suporte para a fundamentação da matemática clássica na teoria de conjuntos?

Considere a redução da matemática para a teoria de conjuntos: Todos os objetos matemáticos podem ser representados por conjuntos e todas as noções matemáticas envolvendo esses objetos podem ser definidas em termos da relação de *pertencimento* apenas. Mais especificamente, é possível axiomatizar sobre a lógica de primeira ordem com uma variável de predicado binária, um fragmento padrão da teoria de conjuntos, ZFC, que é suficiente para desenvolver a matemática. Nesse sentido, dizemos que a lógica de primeira ordem com uma variável de predicado binária é um *veículo* para a fundamentação da matemática na teoria de conjuntos: Esse sistema é suficientemente expressivo para servir de base para a teoria de conjuntos enquanto fundamento da matemática. Contudo, será que esse sistema é *minimal* com relação a essa propriedade?

Para responder a essa questão é necessário definir precisamente o que entendemos por um veículo para a fundamentação da matemática. Em outras palavras, o que significa dizer que a lógica de primeira ordem com uma variável de predicado binária é suficientemente expressiva para servir de base para a teoria de conjuntos, enquanto fundamento da matemática? O que é necessário expressar para servir de base para a teoria de conjuntos, enquanto fundamento da matemática?

Uma fórmula da lógica de primeira ordem expressa uma função de primeira ordem. Dizer da lógica de primeira ordem com uma variável de predicado binária R (e sem igualdade) que ela é suficientemente expressiva para servir de base para ZFC pode significar apenas que as fórmulas de primeira ordem na assinatura $\langle R \rangle$ são suficientes para expressar todas as funções de primeira ordem indispensáveis para a teoria de conjuntos.[1] A questão relevante passa a ser: Quais são as funções de primeira ordem indispensáveis para a teoria de conjuntos?

A teoria de conjuntos, assim como a aritmética, é uma teoria *interpretada*: Há interpretações privilegiadas para essa teoria: As hierarquias de conjuntos V_κ, para k um cardinal fortemente inacessível. Nessas interpretações privilegiadas, os objetos são conjuntos e a relação binária é a relação de pertencimento entre conjuntos. A relação de pertencimento entre conjuntos não é uma relação binária qualquer que satisfaz uma lista especificada de axiomas de primeira ordem, do mesmo modo que a relação de igualdade não é qualquer relação binária que satisfaz os axiomas da igualdade. O papel fundacional da teoria de conjuntos depende da compreensão intuitiva dessas interpretações privilegiadas, de modo que os axiomas podem ser justificados como verdadeiros: Um fundamento da matemática é um fundamento da verdade matemática, e uma teoria em que sequer faz sentido dizer que os axiomas são verdadeiros não pode ser fundamento da verdade de nada.

A partir da análise do parágrafo acima, concluímos que é suficiente, para os propósitos de fundamentação da matemática, utilizar uma *constante* de predicado binária, que denota sempre o pertencimento, e não por uma *variável* de predicado binária. Não faz sentido dizer de um axioma contendo uma variável de predicado não-interpretada R que ele é verdadeiro ou falso. Para isso, é preciso interpretar a variável. A mesma situação ocorre com a chamada lógica de primeira ordem com igualdade: É suficiente, para certos propósitos, considerar apenas as estruturas em que o símbolo $=$ é interpretado como a igualdade, e não como uma relação congruência qualquer, o que é o mesmo que dizer que é suficiente considerar o símbolo $=$ como uma constante de predicado binária.

Se R é uma variável de predicado binária, as estruturas para a assinatura $\langle R \rangle$ em que R é interpretada como a relação de pertencimento são chamadas de $\in$-estruturas. Dos parágrafos anteriores,

[1] Nesta seção, o papel de fonte de variáveis de predicado é desempenhado pela assinatura $\langle R \rangle$.

segue que para os propósitos de fundamentação, é suficiente considerar apenas as $\in$-estruturas: As estruturas em que R é interpretada como uma relação binária diferente do pertencimento não desempenham um papel na redução conjuntista da matemática. Essa discussão preliminar motiva a seguinte definição de veículo para a fundamentação da matemática:

77 Definição. Sejam $\langle R \rangle$ uma assinatura contendo uma variável de predicado binária R, e Z um sistema de funções de primeira ordem em $\langle R \rangle$. Dizemos que Z é um veículo para a fundamentação da matemática se a restrição de Z para a classe $\mathbf{K}$ de todas as $\in$-estruturas contém todas as funções de primeira ordem relativas a $\mathbf{K}$ definidas em $\prod(\mathbf{K}, n)/_{\approx_q}$, para $n + q > 0$. Em outras palavras, Z é um veículo para a fundamentação da matemática se a restrição de Z para a classe $\mathbf{K}$ de todas as $\in$-estruturas contém todas as funções de primeira ordem relativas a $\mathbf{K}$.

A lógica de primeira ordem com uma variável de predicado binária R *não* é um veículo minimal para a fundamentação da matemática. Devido a sua importância, enunciamos esse fato como um teorema:

78 Teorema. *Existem subsistemas próprios do sistema de todas as funções de primeira ordem na assinatura $\langle R \rangle$ que são veículos para a fundamentação da matemática.*

Vamos apresentar dois subsistemas com essa propriedade nos próximos exemplos, o que constitui uma prova para o teorema acima.

79 Exemplo. Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura tal que

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 R x_1 x_2.$$

Seja $Z(\mathcal{A})$ o conjunto que, para todos os números naturais n e q tais que $n + q > 0$, contém as funções de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_{\langle R \rangle}, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

tais que $\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}$, para todas as n-uplas $\overline{a}$. Vamos mostrar que $Z(\mathcal{A})$ é fechado por composição: De fato, se Q e Q_1 são tais que a composição $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1)$ está definida, então

$$\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1)([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{q+q_1}) = \mathrm{Q}([(\mathrm{Q}_1(\mathcal{A}), \overline{a})]_q).$$

Como Q_1 está em $Z(\mathcal{A})$, e

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 R x_1 x_2,$$

a estrutura $\mathrm{Q}_1(\mathcal{A})$ é $\mathcal{A}$. Disso segue que

$$\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1)([(\mathcal{A}, \overline{a})]_{q+q_1}) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T},$$

pois Q está em $Z(\mathcal{A})$. Portanto, $Z(\mathcal{A})$ é fechado por composição. Que $Z(\mathcal{A})$ é fechado por ν-operações, π-operações e variações de posto é trivial. Além disso, a restrição de $Z(\mathcal{A})$ para a classe $\mathbf{K}$ de todas as $\in$-estruturas contém todas as funções de primeira ordem relativas a $\mathbf{K}$: De fato, $\mathcal{A}$ não é 1-equivalente a nenhuma $\in$-estrutura, e, para qualquer a_1 em $\mathcal{A}$, o par $(\mathcal{A}, a_1)$ não é 0-equivalente a nenhum par $(\mathcal{B}, b_1)$, em que $\mathcal{B}$ é uma $\in$-estrutura. Desse modo, qualquer função de primeira ordem relativa à $\mathbf{K}$

$$\mathrm{Q} : \prod(\mathbf{K}, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

tal que $n + q > 0$ pode ser estendida a uma função de primeira ordem

$$\hat{\mathrm{Q}} : \prod(\Lambda|_{\langle R \rangle}, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

tal que $\hat{\mathrm{Q}}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}$. Segue que $Z(\mathcal{A})$ é um veículo para a fundamentação da matemática.

80 Observação. Para compreender o exemplo acima em termos de fórmulas, considere o conjunto de todas as fórmulas na assinatura $\langle R \rangle$ da forma $(\forall x_1 \forall x_2 R x_1 x_2) \vee \varphi$. Esse conjunto de fórmulas é suficiente para expressar fracamente todas as funções de primeira ordem do sistema do exemplo acima. Convém notar que o sistema $Z(\mathcal{A})$ é fechado por conjunção e disjunção, não é fechado por negação e, obviamente, não é o sistema de todas as funções de primeira ordem. Além disso, $Z(\mathcal{A})$ contém a negação de qualquer função de primeira ordem que não está em $Z(\mathcal{A})$.

81 Exemplo. Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura tal que

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 R x_1 x_2,$$

e $\mathcal{A}^*$ a estrutura dual, ou seja, a estrutura que possui o mesmo domínio de $\mathcal{A}$ e tal que

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \neg R x_1 x_2.$$

Seja $Z(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ o conjunto que, para $n + q > 0$, contém as funções de primeira ordem

$$\mathrm{Q} : \prod(\Lambda|_{\langle R \rangle}, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

tais que

1. $\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}$ e $\mathrm{Q}([(\mathcal{A}^*, \overline{a})]_q) = \mathbf{F}$ para todas as n-uplas $\overline{a}$, ou
2. $\mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \overline{a})]_q) = \mathbf{F}$ e $\mathrm{Q}([(\mathcal{A}^*, \overline{a})]_q) = \mathbf{T}$ para todas as n-uplas $\overline{a}$.

Vamos mostrar que $Z(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ é fechado por composição: Sejam Q e Q_1 tais que a composição $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}_1)$ está definida. Se uma entre Q e Q_1 satisfaz a condição (1) e a outra satisfaz a condição (2), é fácil ver que a composta satisfaz a condição (2). De fato, se Q_1 satisfaz a condição (1), a estrutura $\mathrm{Q}_1(\mathcal{A})$ é $\mathcal{A}$, e $\mathrm{Q}_1(\mathcal{A}^*)$ é $\mathcal{A}^*$. Por outro lado, se Q_1 satisfaz a condição (2), a estrutura $\mathrm{Q}_1(\mathcal{A})$ é $\mathcal{A}^*$, e $\mathrm{Q}_1(\mathcal{A}^*)$ é $\mathcal{A}$. Pelo mesmo motivo, se tanto Q quanto Q_1 satisfazem a condição (1), então a composta satisfaz (1); se ambas satisfazem (2), então a composta satisfaz (1). Portanto, $Z(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ é fechado por composição. Que $Z(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ é fechado por ν-operações, π-operações e variações de posto é trivial. Além disso, a restrição de $Z(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ para a classe $\mathbf{K}$ de todas as $\in$-estruturas contém todas as funções de primeira ordem relativas a $\mathbf{K}$: De fato, $\mathcal{A}$ não é 1-equivalente a nenhuma $\in$-estrutura, e, para qualquer a_1 em $\mathcal{A}$, o par $(\mathcal{A}, a_1)$ não é 0-equivalente a nenhum par $(\mathcal{B}, b_1)$, em que $\mathcal{B}$ é uma $\in$-estrutura. Desse modo, qualquer função de primeira ordem relativa à $\mathbf{K}$

$$\mathrm{Q} : \prod(\mathbf{K}, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

tal que $n + q > 0$ pode ser estendida a uma função de primeira ordem

$$\hat{\mathrm{Q}} : \prod(\Lambda|_{\langle R \rangle}, n)/_{\approx_q} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

que satisfaz a condição (1) ou a condição (2). Segue que $Z(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ é um veículo para a fundamentação da matemática.

82 Observação. O sistema $Z(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ é fechado por negação, mas não é fechado por conjunção ou disjunção. Além disso, $Z(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ satisfaz a seguinte propriedade: Com relação à assinatura $\langle R \rangle$, o menor sistema de funções de primeira ordem que contém $Z(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ e é fechado por conjunção e disjunção é o sistema de todas as funções de primeira ordem. De fato, é fácil checar que um tal sistema contém todas as funções de primeira ordem que atribuem $\mathbf{T}$ a no máximo um valor de primeira ordem. Como todas as funções de primeira ordem podem ser obtidas como disjunções dessas, um tal sistema contém todas as funções de primeira ordem.

4.3 Definibilidade de Predicados

Conforme já está bastante claro, a relação de definição entre funções de primeira ordem é um tema central da teoria desses objetos. Nesta seção, estudamos a relação de definição entre funções de primeira ordem em uma situação particular de interesse: Definibilidade de predicados em classes de estruturas. O que será apresentado aqui constitui apenas os primeiros passos na direção de uma compreensão desse tópico de teoria de modelos segundo o ponto de vista da teoria das funções de primeira ordem.

83 Definição. Sejam S uma assinatura e $\mathbf{K}$ uma classe de Σ-estruturas. Suponha que S seja constituída pelas variáveis de predicado R_1,..., R_m, de aridades n_1,..., n_m, em ordem alfabética, e sejam $P_1^S|_{\mathbf{K}}$,..., $P_m^S|_{\mathbf{K}}$ as projeções correspondentes relativas à classe $\mathbf{K}$. Fixe $j \in \{1, ..., m\}$. Dizemos que $P_j^S|_{\mathbf{K}}$ é definível em termos de $P_1^S|_{\mathbf{K}}$,..., $P_{j-1}^S|_{\mathbf{K}}$, $P_{j+1}^S|_{\mathbf{K}}$,..., $P_m^S|_{\mathbf{K}}$ se existe uma função de primeira ordem Q_j, definida em

$$\prod(\Lambda|_{\langle R_1,...,R_{j-1},R_{j+1},...,R_m\rangle}, n_j)/_{\approx_q},$$

tal que

$$(P_j^S|_{\mathbf{K}})_0^q = \mathrm{Q}_j(P_1^S|_{\mathbf{K}}, ..., P_{j-1}^S|_{\mathbf{K}}, P_{j+1}^S|_{\mathbf{K}}, ..., P_m^S|_{\mathbf{K}}),$$

em que

$$\mathrm{Q}_j(P_1^S|_{\mathbf{K}}, ..., P_{j-1}^S|_{\mathbf{K}}, P_{j+1}^S|_{\mathbf{K}}, ..., P_m^S|_{\mathbf{K}}) = \mathrm{Q}_j(P_1^S, ..., P_{j-1}^S, P_{j+1}^S, ..., P_m^S)|_{\mathbf{K}},$$

84 Observação. Se $\mathcal{A}$ é uma estrutura em $\mathbf{K}$, então é importante notar que

$$(P_1^S, ..., P_{j-1}^S, P_{j+1}^S, ..., P_m^S)(\mathcal{A})$$

é o reduto de $\mathcal{A}$ para a assinatura $\langle R_1, ..., R_{j-1}, R_{j+1}, ..., R_m\rangle$.

85 Proposição. *Utilizando a notação estabelecida na definição 83, a função de primeira ordem $P_j^S|_{\boldsymbol{K}}$, relativa à $\boldsymbol{K}$, é definível em termos de*

$$P_1^S|_{\boldsymbol{K}},...,\ P_{j-1}^S|_{\boldsymbol{K}},\ P_{j+1}^S|_{\boldsymbol{K}},...,\ P_m^S|_{\boldsymbol{K}}$$

sse existe uma função de primeira ordem Q *no ideal finitamente gerado por* P_1^S,..., P_{j-1}^S, P_{j+1}^S,..., P_m^S *tal que*

$$(P_j^S|_{\boldsymbol{K}})_0^q = \mathrm{Q}|_{\boldsymbol{K}}.$$

Demonstração. Suponha que a função de primeira ordem $P_j^S|_{\mathbf{K}}$, relativa à $\mathbf{K}$, é definível em termos de

$$P_1^S|_{\mathbf{K}},...,\ P_{j-1}^S|_{\mathbf{K}},\ P_{j+1}^S|_{\mathbf{K}},...,\ P_m^S|_{\mathbf{K}}.$$

Nesse caso, como

$$\mathrm{Q}_j(P_1^S|_{\mathbf{K}}, ..., P_{j-1}^S|_{\mathbf{K}}, P_{j+1}^S|_{\mathbf{K}}, ..., P_m^S|_{\mathbf{K}}) = \mathrm{Q}_j(P_1^S, ..., P_{j-1}^S, P_{j+1}^S, ..., P_m^S)|_{\mathbf{K}},$$

segue que $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_j(P_1^S, ..., P_{j-1}^S, P_{j+1}^S, ..., P_m^S)$ satisfaz a condição da proposição.

Por outro lado, suponha que existe uma função de primeira ordem Q no ideal finitamente gerado por P_1^S,..., P_{j-1}^S, P_{j+1}^S,..., P_m^S tal que

$$(P_j^S|_{\mathbf{K}})_0^q = \mathrm{Q}|_{\mathbf{K}}.$$

Pelos lema 77 e teorema 78 do capítulo 3, existem um número natural p maior ou igual ao posto q de Q e uma função de primeira ordem Q' de posto p tal que

$$\mathrm{Q}_q^p = \mathrm{Q}'((P_1^S, ..., P_{j-1}^S, P_{j+1}^S, ..., P_m^S).$$

Como $(\mathrm{Q}_q^p)|_{\mathbf{K}} = (\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}})_q^p$, temos que

$$(P_j^S|_{\mathbf{K}})_0^p = \mathrm{Q}'|_{\mathbf{K}}.$$

Isso termina a prova.

□

O teorema abaixo mostra que a projeção correspondente à variável de predicado R_j, relativa à $\mathbf{K}$, é uma função de primeira ordem, de posto q, relativa à $\mathbf{K}$, das projeções correspondentes às outras variáveis de predicado de S, relativas à $\mathbf{K}$ sse o valor que ela atribui a $[(\mathcal{A},\overline{a})]_0^{\mathbf{K}}$ está determinado pelo valor de primeira ordem, de posto q, do par constituído pelo *reduto* de $\mathcal{A}$ para a assinatura $\langle R_1, ..., R_{j-1}, R_{j+1}, ..., R_m\rangle$ e pela n-upla $\overline{a}$.

86 Teorema. *Ainda utilizando a notação estabelecida na definição 83, a função de primeira ordem $P_j^S|_{\boldsymbol{K}}$, relativa à $\boldsymbol{K}$, é definível em termos de*

$$P_1^S|_{\boldsymbol{K}},\ldots,\ P_{j-1}^S|_{\boldsymbol{K}},\ P_{j+1}^S|_{\boldsymbol{K}},\ldots,\ P_m^S|_{\boldsymbol{K}}$$

sse existe um número natural q tal que para todas S-estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ em $\boldsymbol{K}$, e todas as n-uplas $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$,

$[((P_1^S, ..., P_{j-1}^S, P_{j+1}^S, ..., P_m^S)(\mathcal{A}), \overline{a})]_q = [((P_1^S, ..., P_{j-1}^S, P_{j+1}^S, ..., P_m^S)(\mathcal{B}), \overline{b})]_q$ *implica*

$$(P_j^S|_{\boldsymbol{K}})_0^q([(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\boldsymbol{K}}) = (P_j^S|_{\boldsymbol{K}})_0^q([(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\boldsymbol{K}}).$$

Demonstração. Se a função de primeira ordem $P_j^S|_{\mathbf{K}}$, relativa à $\mathbf{K}$, é definível em termos de

$$P_1^S|_{\mathbf{K}},\ldots,\ P_{j-1}^S|_{\mathbf{K}},\ P_{j+1}^S|_{\mathbf{K}},\ldots,\ P_m^S|_{\mathbf{K}},$$

então existe uma função de primeira ordem Q_j, definida em

$$\prod(\Lambda|_{\langle R_1,\ldots,R_{j-1},R_{j+1},\ldots,R_m\rangle}, n_j)/\approx_q,$$

tal que

$$(P_j^S|_{\mathbf{K}})_0^q = \mathrm{Q}_j(P_1^S|_{\mathbf{K}}, ..., P_{j-1}^S|_{\mathbf{K}}, P_{j+1}^S|_{\mathbf{K}}, ..., P_m^S|_{\mathbf{K}}).$$

Como

$$\mathrm{Q}_j(P_1^S|_{\mathbf{K}}, ..., P_{j-1}^S|_{\mathbf{K}}, P_{j+1}^S|_{\mathbf{K}}, ..., P_m^S|_{\mathbf{K}}) = \mathrm{Q}_j(P_1^S, ..., P_{j-1}^S, P_{j+1}^S, ..., P_m^S)|_{\mathbf{K}},$$

a validade da condição do teorema segue da definição de composição de uma função de primeira ordem com funções de primeira ordem relativas a $\mathbf{K}$.

Agora, assuma a condição do teorema. Seja Q a única função de primeira ordem que satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathrm{Q}|_{\mathbf{K}} = (P_j^S|_{\mathbf{K}})_0^q$ e
2. para todos os valores de primeira ordem $[(\mathcal{C},\overline{c})]_q$ que não contém nenhum par cuja estrutura esteja em $\mathbf{K}$,

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{C},\overline{c})]_q) = \mathbf{T}.$$

A função de primeira ordem Q assim definida satisfaz a condição do lema 77 do capítulo 3. Portanto, Q está no ideal finitamente gerado por $P_1^S,\ldots,\ P_{j-1}^S,\ P_{j+1}^S,\ldots,\ P_m^S$. Pela proposição 85, a função de primeira ordem $P_j^S|_{\mathbf{K}}$, relativa à $\mathbf{K}$, é definível em termos de

$$P_1^S|_{\mathbf{K}},\ldots,\ P_{j-1}^S|_{\mathbf{K}},\ P_{j+1}^S|_{\mathbf{K}},\ldots,\ P_m^S|_{\mathbf{K}}.$$

□

Apêndice A

Formas Normais de Hintikka para Fórmulas Abertas

O método usual de construção da tabela de verdade para uma fórmula φ sem quantificadores ou variáveis livres procede do seguinte modo: Calculamos, para cada linha da tabela, os valores de verdade para uma sequência de fórmulas φ_1,..., φ_a tal que (i) φ_a é φ, (ii) todas as fórmulas da sequência são subfórmulas de φ_a, e (iii) cada fórmula na sequência é atômica ou é obtida a partir de fórmulas anteriores pela aplicação de negação, conjunção ou disjunção. Em cada passo desse cálculo, utilizamos apenas as tabelas de verdade da negação, conjunção e disjunção e os valores de verdade das fórmulas relevantes. Por exemplo, se φ_j é $\neg\varphi_h$, para algum $h < j$, então o cálculo do valor de verdade de φ_j em uma linha da tabela utiliza apenas a tabela da negação e o valor de verdade de φ_h na mesma linha, já calculado em uma etapa anterior.

Considere agora φ uma fórmula de primeira ordem sem quantificadores, cuja assinatura é denotada por S, e assuma que φ_1,..., φ_a é uma *sequência de composição para* φ, ou seja, uma sequência de fórmulas tal que (i) φ_a é φ, (ii) todas as fórmulas da sequência são subfórmulas de φ_a, e (iii) cada fórmula na sequência é atômica ou é obtida a partir de fórmula anteriores pela aplicação de negação, conjunção ou disjunção. Assuma além disso que todas as fórmulas atômicas aparecem na sequência φ_1,..., φ_a antes da primeira fórmula complexa, e que a primeira fórmula complexa é φ_c. Assumimos ainda que todas as variáveis individuais que ocorrem em φ_a estão entre x_1,..., x_n. Nessas condições, pelo teorema da forma normal de Hintikka, cada uma das fórmulas na sequência φ_1,..., φ_a é equivalente a uma disjunção de fórmulas em $\Gamma^S(n,q) = \{\psi_1, ..., \psi_l\}$, para qualquer $q \in \omega$.

Nós vamos fornecer um método recursivo de construção de formas normais de Hintikka em $\Gamma^S(n,q)$ para a sequência de composição φ_1,..., φ_a, assumindo que todas as variáveis individuais que ocorrem em φ_a estão entre x_1,..., x_n, que generaliza a construção usual de tabelas de verdade para fórmulas livres de variáveis individuais. Em cada passo $j \in \{1, ..., a\}$, com exceção das etapas correspondentes às fórmulas atômicas, nós vamos acrescentar uma variável de predicado R_j, cuja aridade é igual ao número de variáveis livres em φ_j, obtendo desse modo uma nova assinatura S_j. Ainda, no mesmo passo j, vamos calcular descrições de estado na nova assinatura S_j, de posto 0 em n variáveis livres. Essas descrições de estado nas assinaturas expandidas serão chamadas, genericamente, de descrições de estado expandidas, e serão denotadas por ψ_{ij}, para $i \in \{1, ..., l\}$ e $j \in \{1, ..., a\}$.

As descrições de estado expandidas devem satisfazer a seguinte condição: Se, para cada $e \in \{c, ..., j\}$, as variáveis livres em φ_e são y_1^e,..., $y_{n_e}^e$, em que $\{y_1^e, ..., y_{n_e}^e\} \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, então

$$\models (R_c y_1^c ... \, y_{n_c}^c \leftrightarrow \varphi_c) \wedge ... \wedge (R_j y_1^j ... \, y_{n_j}^j \leftrightarrow \varphi_j) \rightarrow \psi_i \rightarrow \psi_{ij}, \tag{A.1}$$

em que ψ_i é uma descrição de estado em $\Gamma^S(n,q)$. Dizemos que a formula

$$R_e y_1^e ... \, y_{n_e}^e \leftrightarrow \varphi_e$$

é a *condição de compatibilidade* para a variável de predicado R_e, e, sempre que (A.1) valer, dizemos que ψ_i determina ψ_{ij} sob as condições de compatibilidade para as variáveis de predicado R_e, para cada $e \in \{c, ..., j\}$. Como duas descrições de estado na nova assinatura S_j, de posto 0 em n variáveis livres, são incompatíveis, se ψ_i determina, para cada j, duas descrições de estado expandidas, ψ_{ij} e ψ'_{ij}, então ψ_i é insatisfatível. O resultado dessa construção pode ser visualizado em uma figura:

	φ_1	...	φ_a
ψ_1	ψ_{11}	...	ψ_{1a}
ψ_2	ψ_{21}	...	ψ_{2a}
...	...	...	...
ψ_l	ψ_{l1}	...	ψ_{la}

As fórmulas ψ_{ij} são descrições de estado expandidas de posto 0 em n variáveis livres, o que significa que todas essas fórmulas são descrições de estado em $\Gamma^{S_j}(n, 0)$. É importante notar que cada fórmula φ_j da sequência de composição para φ corresponde a uma fórmula atômica na assinatura S_j: Ou a fórmula φ_j é, ela própria, atômica, ou φ_j corresponde à $R_j y_1^j ... y_{n_j}^j$ pela condição de compatibilidade respectiva. Dizemos que essa fórmula atômica está *ligada* à φ_j. Note que a fórmula atômica ligada a φ_j é, sob a respectiva condição compatibilidade, equivalente à φ_j, e ocorre, afirmada ou negada, em cada ψ_{ij}, para $i \in \{1, ..., l\}$. Vamos realizar em detalhes a construção dessas descrições de estado expandidas e mostrar como obter uma forma normal de Hintikka para cada φ_i, para $i \in \{1, ..., a\}$ a partir da tabela acima.

87 Lema. *Seja ξ uma fórmula tal que y não ocorre como variável livre em ξ, e considere uma fórmula ψ da forma:*

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_m(\xi) \wedge \theta_m),$$

em que cada uma das fórmulas $A(\xi)$ e $B_i(\xi)$, $i = 1, ..., m$, é equivalente a ξ, $\neg\xi$ ou $\xi \wedge \neg\xi$. Nesse caso, ψ é equivalente a uma fórmula da forma

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y\gamma_1 \wedge ... \wedge \neg\exists y\gamma_{m'},$$

em que o conjunto $\{\gamma_i : 1 \leq i \leq m'\}$ é um subconjunto de $\{\theta_i : 1 \leq i \leq m\}$ determinado por uma sequência de transformações sintáticas sobre

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_m(\xi) \wedge \theta_m).$$

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução em m. Se $m = 0$ o resultado é imediato. Suponha que $m > 0$, e assuma a seguinte hipótese de indução: Qualquer fórmula da forma

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_{m-1}(\xi) \wedge \theta_{m-1})$$

é equivalente a uma fórmula da forma

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y\gamma_1 \wedge ... \wedge \neg\exists y\gamma_{m'},$$

em que $\{\gamma_i : 1 \leq i \leq m'\}$ é um subconjunto de $\{\varphi_i : 1 \leq i \leq m-1\}$ determinado por uma sequência de transformações sintáticas sobre

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_{m-1}(\xi) \wedge \theta_{m-1}).$$

Seja ψ uma fórmula como no enunciado. Como y não ocorre livre em $B_m(\xi)$, realizando uma operação prenexa vemos que

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_m(\xi) \wedge \theta_m)$$

é equivalente a $A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg(B_m(\xi) \wedge \exists y\theta_m)$, que é tautologicamente equivalente a

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge (\neg B_m(\xi) \vee \neg\exists y\theta_m).$$

Disso segue que todas essas fórmulas são equivalentes a:

$$\begin{aligned}&(A(\xi) \wedge \neg B_m(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_{m-1}(\xi) \wedge \theta_{m-1}))\vee \\ &(A(\xi) \wedge (\phi \wedge \neg\exists y\theta_m) \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_{m-1}(\xi) \wedge \theta_{m-1})).\end{aligned} \tag{A.2}$$

Agora, temos dois casos: (i) se $A(\xi)$ e $B_m(\xi)$ são a mesma fórmula, então a disjunção acima é equivalente à segunda disjunta. (ii) Se $A(\xi)$ e $B_m(\xi)$ não são a mesma fórmula, então é fácil checar que (A.2) é equivalente à fórmula obtida a partir da primeira disjunta através da eliminação da conjunta $\neg B_m(\xi)$.

No segundo caso, como ψ é equivalente a

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_{m-1}(\xi) \wedge \theta_{m-1}),$$

segue, por hipótese de indução, que ψ é equivalente a

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y\gamma_1 \wedge ... \wedge \neg\exists y\gamma_{m'},$$

em que $\{\gamma_i : 1 \leq i \leq m'\}$ é um subconjunto de $\{\theta_i : 1 \leq i \leq m\}$ determinado por uma sequência de transformações sintáticas sobre

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_{m-1}(\xi) \wedge \theta_{m-1}).$$

No primeiro caso, ψ é equivalente a

$$A(\xi) \wedge (\phi \wedge \neg\exists y\theta_m) \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_{m-1}(\xi) \wedge \theta_{m-1}).$$

Pela hipótese de indução para essa fórmula, temos que ela é equivalente a:

$$A(\xi) \wedge (\phi \wedge \neg\exists y\theta_m) \wedge \neg\exists y\gamma_1 \wedge ... \wedge \neg\exists y\gamma_{m'},$$

em que $\{\gamma_i : 1 \leq i \leq m'\}$ é um subconjunto de $\{\theta_i : 1 \leq i \leq m-1\}$. Segue que ψ é equivalente a

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y\gamma_1 \wedge ... \wedge \neg\exists y\gamma_{m'} \wedge \neg\exists y\theta_m,$$

em que $\{\gamma_i : 1 \leq i \leq m'\}$ é um subconjunto de $\{\varphi_j : 1 \leq j \leq m-1\}$ determinado por uma sequência de transformações sintáticas sobre

$$A(\xi) \wedge (\phi \wedge \neg\exists y\theta_m) \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_{m-1}(\xi) \wedge \theta_{m-1}).$$

. Se estipularmos que $\gamma_{m'+1}$ é θ_m, segue que ψ é equivalente a

$$A(\xi) \wedge \phi \wedge \neg\exists y\gamma_1 \wedge ... \wedge \neg\exists y\gamma_{m'} \wedge \neg\exists y\gamma_{m'+1},$$

em que $\{\gamma_i : 1 \leq i \leq m'+1\}$ é um subconjunto de $\{\theta_i : 1 \leq i \leq m\}$, que é da forma requerida. □

88 Lema. *Se ψ é uma descrição de estado em $\Gamma^S(n,q)$ e ξ é uma subfórmula de ψ tal que todas as variáveis livres de ξ estão entre x_1,..., x_n, então existe uma sequência de operações sintáticas que transforma ψ em uma fórmula equivalente que possui uma das formas seguintes: $\xi \wedge \psi^*$, $\neg\xi \wedge \psi^*$ e $\xi \wedge \neg\xi \wedge \psi^*$, em que ξ não é subfórmula de ψ^*.*

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução em q.

$q = 0$: Nesse caso ψ é uma conjunção de fórmulas atômicas e negações de fórmulas atômicas, em que cada fórmula atômica ocorre apenas uma vez como subfórmula de ψ, afirmada ou negada. Segue que qualquer subfórmula de ψ ocorre apenas uma vez em ψ, e o resultado é trivial nesse caso.

$q > 0$: Como ψ é uma descrição de estado, ela pode ser escrita como

$$\exists y\phi_1 \wedge ... \wedge \exists y\phi_k \wedge \neg\exists y\theta_1 \wedge ... \wedge \neg\exists y\theta_m.$$

Se o posto quantificacional de ξ é igual ao de ψ, então o resultado é obtido como no caso em que $q = 0$. Caso contrário, ξ é uma subfórmula de alguma das descrições de estado ϕ_1,..., ϕ_k, θ_1,..., θ_k. Sem perda de generalidade, podemos assumir que ξ é uma subfórmula de todas as fórmulas ϕ_1,..., ϕ_k, θ_1,..., θ_k. Por hipótese de indução, ψ é equivalente a:

$$\exists y(A_1(\xi) \wedge \phi_1^*) \wedge ... \wedge \exists y(A_k(\xi) \wedge \phi_k^*) \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1^*) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_m(\xi) \wedge \theta_m^*),$$

em que $A_i(\xi) \wedge \phi_i^*$ é a fórmula obtida a partir da descrição de estado ϕ_i, que possui posto quantificacional $q-1$, por operações sintáticas, como no enunciado. O mesmo se aplica a $B_i(\xi) \wedge \theta_i^*$.

Agora, a fórmula acima é equivalente a:

$$A_1(\xi) \wedge ... \wedge A_k(\xi) \wedge \exists y\phi_1^* \wedge ... \wedge \exists y\phi_k^* \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1^*) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_m(\xi) \wedge \theta_m^*).$$

Entretanto, como cada $A_i(\xi)$ é equivalente a uma das fórmulas ξ, $\neg\xi$ e $\xi \wedge \neg\xi$, segue que $A_1(\xi) \wedge ... \wedge A_k(\xi)$ também é equivalente a uma das fórmulas ξ, $\neg\xi$ e $\xi \wedge \neg\xi$. Denote por $A(\xi)$ essa fórmula, determinada unicamente. Portanto, ψ é equivalente a:

$$A(\xi) \wedge \exists y\phi_1^* \wedge ... \wedge \exists y\phi_k^* \wedge \neg\exists y(B_1(\xi) \wedge \theta_1^*) \wedge ... \wedge \neg\exists y(B_m(\xi) \wedge \theta_m^*).$$

Agora, usando o lema 87, podemos eliminar as fórmulas B_i na fórmula acima, possivelmente apagando algumas θ_i^* no processo. Isso significa que a fórmula acima pode ser transformada em uma fórmula equivalente da forma seguinte:

$$A(\xi) \wedge \exists y\phi_1^* \wedge ... \wedge \exists y\phi_k^* \wedge \neg\exists y\gamma_1 \wedge ... \wedge \neg\exists y\gamma_{m'},$$

em que cada γ_i é uma θ_j^*, para algum j tal que $1 \leq j \leq m$. Isso encerra a prova.

□

A construção recursiva das descrições de estado expandidas ψ_{ij}, será apresentada a seguir. As descrições de estado ψ_1,..., ψ_l são elementos de $\Gamma^S(n,q)$, e as descrições de estado expandidas ψ_{ij} são elementos de $\Gamma^{S_j}(n,0)$. Uma forma normal de Hintikka para cada fórmula φ_j da sequência de composição para φ pode ser obtida a partir dessa construção do seguinte modo: Lembre-se que a fórmula atômica ligada à φ_j é a própria φ_j, se ela for atômica, ou $R_j y_1^j ... y_{n_j}^j$, se $j \geq c$. Para cada coluna j, forme a disjunção das descrições de estado ψ_i tais que a fórmula atômica ligada à φ_j ocorre afirmada em ψ_{ij}.

É fácil verificar que esse procedimento fornece uma forma normal de Hintikka para φ_j. De fato, se a fórmula atômica ligada à φ_j ocorre afirmada em ψ_{ij}, então, pela condição de compatibilidade

$$\models (R_c y_1^c ... y_{n_c}^c \leftrightarrow \varphi_c) \wedge ... \wedge (R_j y_1^j ... y_{n_j}^j \leftrightarrow \varphi_j) \rightarrow \psi_i \rightarrow \psi_{ij},$$

segue que $\models \psi_i \rightarrow \varphi_j$. Por outro lado, se a fórmula atômica ligada à φ_j ocorre negada em ψ_{ij}, então, novamente a condição de compatibilidade

$$\models (R_c y_1^c ... y_{n_c}^c \leftrightarrow \varphi_c) \wedge ... \wedge (R_j y_1^j ... y_{n_j}^j \leftrightarrow \varphi_j) \rightarrow \psi_i \rightarrow \psi_{ij},$$

implica que $\models \psi_i \rightarrow \neg\varphi_j$. Tomando a contrapositiva, $\models \varphi_j \rightarrow \neg\psi_i$. Disso segue que φ_j é equivalente à disjunção das descrições de estado ψ_i, para $i \in \{1, ..., l\}$, tais que a fórmula atômica ligada à φ_j ocorre afirmada em ψ_{ij}.

89 Construção. Descrições de Estado Expandidas

1. Partimos de uma assinatura, $S = S_0$. Em cada etapa, digamos j, definimos uma nova assinatura S_j que estende todas as assinaturas anteriores nessa sequência, possivelmente acrescentando um novo predicado. Lembre-se que todas as fórmulas atômicas na sequência de composição φ_1,..., φ_a aparecem antes da primeira fórmula complexa, e que todas as variáveis que ocorrem na sequência estão entre x_1,..., x_n. No caso em que φ_j é atômica, estipulamos que $S_j = S_0$. A descrição de estado expandida ψ_{ij} será sempre um elemento de $\Gamma^{S_j}(n,0)$.

2. Para cada fórmula atômica φ_j, e descrição de estado ψ_i, a descrição de estado expandida ψ_{ij} é obtida como segue: Uma fórmula atômica ξ, tal que $fv(\xi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, ocorre afirmada em ψ_{ij} sse, a aplicação do lema 88 ao par ψ_i e ξ fornece uma fórmula da forma $\xi \wedge \psi_i^*$.

3. A construção de ψ_{ij+1} em termos das descrições de estado anteriores procede do seguinte modo: Suponha que φ_{j+1} é obtida a partir de uma fórmula anterior φ_h, $h \leq j$, pela aplicação de uma negação, e que o número de variáveis livres em φ_h é n_h. Sejam y_1,..., y_{n_h} as variáveis livres de φ_h, e, consequentemente, de φ_{j+1}. Uma variável de predicado que corresponde à φ_h foi introduzida em S_h, e, consequentemente, em $S_j \supseteq S_h$. Agora, uma variável de predicado R correspondendo à φ_{j+1} deve ser introduzida em S_{j+1}. Defina ψ_{ij+1} como a única descrição de estado expandida em $\Gamma^{S_{j+1}}(n, 0)$ obtida a partir de ψ_{ij} de acordo com a seguinte regra: Uma fórmula atômica obtida pela aplicação de R a uma sequência de variáveis extraídas de $\{x_1, ..., x_n\}$ é afirmada em ψ_{ij+1} sse a fórmula atômica obtida pela aplicação da variável de predicado que corresponde à φ_h à mesma sequência de variáveis é negada em ψ_{ij}. Note que, sob a hipótese que $Ry_1... y_{n_h}$ e φ_{j+1} são equivalentes, ψ_{ij+1} é *equivalente* à ψ_{ij}.

4. Suponha que φ_{j+1} é obtida de fórmulas anteriores φ_h e φ_g, $g, h \leq j$, pela aplicação de uma conjunção: φ_{j+1} é $\varphi_h \wedge \varphi_g$. Denote por n_h o número de variáveis livres em φ_h, e analogamente para n_g. Denote as variáveis livres de φ_h por y_1,..., y_{n_h}, e aquelas de φ_g por z_1,..., z_{n_g}. Duas variáveis de predicado correspondendo ao par φ_h e φ_g, com aridades n_h e n_g, foram introduzidas em S_h e S_g, respectivamente. Portanto, φ_h e φ_g correspondem a fórmulas atômicas na assinatura S_j. Agora, uma variável de predicado que corresponde à φ_{j+1}, com aridade $n_h + n_g$, deve ser introduzida em S_{j+1}. Denote essa nova variável de predicado por R. Defina ψ_{ij+1} como a única descrição de estado expandida em $\Gamma^{S_{j+1}}(n, 0)$ obtida a partir de ψ_{ij} de acordo com a seguinte regra: Uma fórmula atômica obtida pela aplicação de R a uma sequência de variáveis s, de comprimento $n_h + n_g$, extraídas de $\{x_1, ..., x_n\}$ é afirmada em ψ_{ij+1} sse ambas as fórmulas atômicas obtidas pela aplicação da variável de predicado correspondente à φ_h às n_h primeiras variáveis em s, e pela aplicação da variável de predicado que corresponde à φ_g às n_g últimas variáveis em s são afirmadas em ψ_{ij}. As demais fórmulas atômicas na assinatura S_{j+1}, cujas variáveis livres estão entre x_1,..., x_n, são também fórmulas na asinatura S_j, nas mesmas variáveis. Cada uma dessas fórmulas atômicas é afirmada em ψ_{ij+1} sse é afirmada em ψ_{ij}. Vale a pena notar que, sob a hipótese que $Ry_1... y_{n_h}z_1... z_{n_g}$ e φ_{j+1} são equivalentes, ψ_{ij+1} é equivalente à ψ_{ij}.

   O caso em que φ_{j+1} é obtida a partir de φ_h e φ_g pela aplicação de uma disjunção é tratado de modo similar.

Apêndice B

Predicados Definidos por Funções de Primeira Ordem

Na definição de composição de funções de primeira ordem, utilizamos os predicados definidos por funções de primeira ordem. Como as funções de primeira ordem são expressas por fórmulas da lógica de primeira ordem, os predicados definidos por funções de primeira ordem são os predicados definíveis em primeira ordem. Essa caracterização dos predicados definidos por funções de primeira ordem como os predicados definidos por fórmulas independe da consideração das funções de primeira ordem, e foi demonstrada por Fraïssé. Apresentamos aqui a demonstração desse fato.

90 Definição. Se S é uma assinatura, dizemos que O é um predicado n-ário com argumentos de predicado em S (predicado n-ario, de modo abreviado) se O é uma função que atribui, para cada S-estrutura $\mathcal{A}$, um subconjunto do conjunto de n-uplas de indivíduos de $\mathcal{A}$. Denotamos por $\mathrm{O}^{\mathcal{A}}$ a imagem de $\mathcal{A}$ pela função O. Dizemos que O é definível em primeira ordem sse existe uma fórmula φ na assinatura S tal que (i) $fv(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, e (ii) para cada S-estrutura $\mathcal{A}$ e cada n-upla $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$,

$$\mathrm{O}^{\mathcal{A}}(\overline{a}) \text{ sse } \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}].$$

91 Definição. Um predicado n-ário O é preservado por q-equivalência sse para todas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, todas n-uplas $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$,

$$\text{Se } (\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b}) \text{ então } (\mathrm{O}^{\mathcal{A}}(\overline{a}) \text{ sse } \mathrm{O}^{\mathcal{B}}(\overline{b}))$$

A definição acima reformula a condição "o predicado O é definido por uma função de primeira ordem Q", sem falar em função de primeira ordem.

92 Teorema. (Fraïssé) *Um predicado n-ário* O *com argumentos de predicado em S é definível em primeira ordem sse existe um $q \in \omega$ tal que* O *é preservado por q-equivalência. Mais especificamente, se $q \in \omega$, então um predicado n-ário* O *é definido por uma fórmula φ com posto quantificacional q e variáveis livres entre x_1,..., x_n sse* O *é preservado por q-equivalência.*[1]

Demonstração. Vamos provar a segunda afirmação. Assuma que O é preservado por q-equivalência, para algum $q \in \omega$. No caso em que S é uma assinatura proposicional, é fácil ver que O é definido por uma fórmula proposicional nas variáveis de predicado 0-árias de S. Caso contrário, fixe um $q > 0$ tal que O é preservado por q-equivalência, e considere o conjunto

$$\Delta^q(\mathrm{O}) = \big\{\psi \in \Gamma^S(n, q) : \exists(\mathcal{C}, \overline{c}); (\mathcal{C} \models \psi[\overline{c}]) \wedge \mathrm{O}^{\mathcal{C}}(\overline{c})\big\}.$$

Se $\Delta^q(\mathrm{O}) = \emptyset$, então O é definido por qualquer fórmula contraditória da assinatura S, cujas variáveis livres estão contidas em $\{x_1, ..., x_n\}$. Caso contrário, o predicado n-ário O é definido pela disjunção de $\Delta^q(\mathrm{O})$, que é uma fórmula φ de posto quantificacional q e tal que $fv(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$. De fato, para cada estrutura $\mathcal{A}$ e cada n-upla $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$, então para alguma $\psi \in \Delta^q(\mathrm{O})$,

[1]Esse teorema está apresentado em [2], página 13. Fraïssé chama os predicados definidos por fórmulas de *Opérateurs Logiques* ([1], página 118).

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}].$$

Entretanto, como $\psi \in \Delta^q(\mathrm{O})$, existe um par $(\mathcal{C}, \overline{c})$ tal que

$$\mathcal{C} \models \psi[\overline{c}] \text{ e } \mathrm{O}^{\mathcal{C}}(\overline{c}).$$

Como $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$ e $\mathcal{C} \models \psi[\overline{c}]$, segue, pelo teorema de Fraïssé, que

$$(\mathcal{C}, \overline{c}) \approx_q (\mathcal{A}, \overline{a}).$$

Portanto, $\mathrm{O}^{\mathcal{A}}(\overline{a})$, pois O é preservado por q-equivalência e $\mathrm{O}^{\mathcal{C}}(\overline{c})$.

Agora, assuma que O é definido por uma fórmula φ de posto quantificacional q, para algum $q \in \omega$. Se $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{B}, \overline{b})$, então, como o posto quantificacional de φ é q,

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \text{ sse } \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}],$$

o que significa que $\mathrm{O}^{\mathcal{A}}(\overline{a})$ sse $\mathrm{O}^{\mathcal{B}}(\overline{b})$, e O é preservado por q-equivalência.

$\square$

Apêndice C

Espaços de Tipos

Esse apêndice é dedicado a uma apresentação dos espaços de tipos, para uma assinatura relacional finita, do ponto de vista da teoria das funções de primeira ordem. O conteúdo apresentado aqui é apenas uma adaptação direta do material correspondente na teoria de modelos. Ocorre que a teoria das funções de primeira ordem é perfeitamente adaptada a esse assunto, e um tratamento muito simples e natural de alguns tópicos básicos de teoria de modelos é apresentado aqui. Vamos fixar uma assinatura (finita) S de modo que as classes de estruturas consideradas são sempre classes de S-estruturas. Neste apêndice, a assinatura S é a assinatura que substitui Σ no papel de fonte de variáveis de predicado.

93 Definição. Seja $\mathbf{K}$ uma classe de S-estruturas, $\mathcal{A}$ uma estrutura em $\mathbf{K}$ e $\overline{a}$ uma n-upla em $\mathcal{A}$. O *n-tipo* de $(\mathcal{A},\overline{a})$, relativo a $\mathbf{K}$, é o conjunto $\left\{[(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\mathbf{K}} : p \in \omega\right\}$. O conjunto de todos os n-tipos relativos a $\mathbf{K}$ é denotado por $S_n(\mathbf{K})$, e o n-tipo de $(\mathcal{A},\overline{a})$, relativo a $\mathbf{K}$, é denotado por $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a})$.

94 Proposição. *Seja $\boldsymbol{K}$ uma classe de S-estruturas. Para todas as estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ em $\boldsymbol{K}$, e todas n-uplas $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, os n-tipos $tp^{\boldsymbol{K}}(\mathcal{A},\overline{a})$ e $tp^{\boldsymbol{K}}(\mathcal{B},\overline{b})$ são iguais sse para cada $q \in \omega$, $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\boldsymbol{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\boldsymbol{K}}$.*

Demonstração. Se a condição vale, então a igualdade dos n-tipos $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a})$ e $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{B},\overline{b})$ é óbvia.

Conversamente, assuma que $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a}) = tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{B},\overline{b})$. Para cada valor de primeira ordem $[(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}$ relativo a $\mathbf{K}$, como

$$[(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}} \in tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a}),$$

existe um $p \in \omega$, tal que $[(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}$.

Se $\mathcal{C}$ está em $\mathbf{K}$ e $(\mathcal{C},\overline{c}) \approx_q (\mathcal{A},\overline{a})$, então, como $(\mathcal{A},\overline{a}) \in [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}$, segue que

$$(\mathcal{C},\overline{c}) \in [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\mathbf{K}}.$$

Isso significa que $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}} \subseteq [(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\mathbf{K}}$.

Por outro lado, se $(\mathcal{C},\overline{c}) \in [(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\mathbf{K}}$, então $(\mathcal{C},\overline{c}) \in [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}$, e, consequentemente, $(\mathcal{C},\overline{c}) \approx_q (\mathcal{A},\overline{a})$. Isso significa que $[(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\mathbf{K}} \subseteq [(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}}$, e temos a igualdade

$$[(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}.$$

□

95 Corolário. *Seja $\boldsymbol{K}$ uma classe de S-estruturas. Para todas as estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ em $\boldsymbol{K}$, e todas as n-uplas $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, os n-tipos $tp^{\boldsymbol{K}}(\mathcal{A},\overline{a})$ e $tp^{\boldsymbol{K}}(\mathcal{B},\overline{b})$ são iguais sse $(\mathcal{A},\overline{a})$ e $(\mathcal{B},\overline{b})$ satisfazem as mesmas fórmulas na assinatura S em que nenhuma variável além de x_1,..., x_n ocorre livre.*

Demonstração. É uma consequência imediata da proposição 94: Os n-tipos $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a})$ e $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{B},\overline{b})$ são iguais sse $(\mathcal{A},\overline{a})$ e $(\mathcal{B},\overline{b})$ satisfazem a mesma descrição de estado em $\Gamma^S(n,q)$, para todo $q \in \omega$. Como qualquer fórmula em que nenhuma variável além de x_1,..., x_n ocorre livre é equivalente a uma disjunção de descrições de estado em $\Gamma^S(n,q)$, para algum $q \in \omega$, temos que a tese é válida. □

Dada uma classe de estruturas $\mathbf{K}$, nós já definimos a operação de subida de posto definida para qualquer função de primeira ordem relativa à $\mathbf{K}$. Em geral, não há uma operação inversa de "abaixamento" de posto. Contudo, existem classes de S-estruturas $\mathbf{K}$ tais que existe uma operação de abaixamento de posto para todas as funções de primeira ordem relativas a $\mathbf{K}$. Vamos considerar o caso especial em que uma dada função de primeira ordem Q, de posto q, relativa à $\mathbf{K}$, é obtida a partir de uma função de primeira ordem Q', de posto 0, relativa à $\mathbf{K}$ por subida de posto (de 0 a q). Nesse caso, dizemos que $\mathbf{K}$ admite eliminação de quantificadores:

96 Definição. Dizemos que uma classe de S-estruturas $\mathbf{K}$ *admite eliminação de quantificadores* se para cada função de primeira ordem Q, de posto q, relativa à $\mathbf{K}$, existe uma função de primeira ordem Q', de posto 0, relativa à $\mathbf{K}$, e tal que Q é obtida a partir de Q' por subida de posto.

97 Observação. Dizemos que uma S-estrutura $\mathcal{A}$ admite eliminação de quantificadores sse a classe $\mathbf{K} = \{\mathcal{A}\}$ admite eliminação de quantificadores.

A seguir apresentamos um resultado básico sobre eliminação de quantificadores.

98 Proposição. *Para uma classe de estruturas $\boldsymbol{K}$, são equivalentes:*

1. *$\boldsymbol{K}$ admite eliminação de quantificadores.*
2. *Para todas as estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ em $\boldsymbol{K}$, e todas as sequências finitas de mesmo comprimento $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, se $[(\mathcal{A},\overline{a})]_0^{\boldsymbol{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_0^{\boldsymbol{K}}$, então, para cada $p \in \omega$, $[(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\boldsymbol{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_p^{\boldsymbol{K}}$.*
3. *Para todas as estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ em $\boldsymbol{K}$, e todas as sequências finitas de mesmo comprimento $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, se $[(\mathcal{A},\overline{a})]_0^{\boldsymbol{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_0^{\boldsymbol{K}}$, então $tp^{\boldsymbol{K}}(\mathcal{A},\overline{a}) = tp^{\boldsymbol{K}}(\mathcal{B},\overline{b})$.*
4. *Se $\mathcal{A}$ é uma estrutura em em $\boldsymbol{K}$, e $\overline{a}$ é uma sequência finita em $\mathcal{A}$, então, para cada $p \in \omega$, $[(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\boldsymbol{K}} = [(\mathcal{A},\overline{a})]_0^{\boldsymbol{K}}$.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Assuma que $\mathbf{K}$ admite eliminação de quantificadores. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estruturas em $\mathbf{K}$, e sejam $\overline{a}$ uma n-upla em $\mathcal{A}$ e $\overline{b}$ uma n-upla em $\mathcal{B}$. Assuma que

$$[(\mathcal{A},\overline{a})]_0^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_0^{\mathbf{K}}.$$

Para cada $q \in \omega$, existe uma função de primeira ordem Q, relativa à $\mathbf{K}$, definida por:

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{C},\overline{c})]_q^{\mathbf{K}}) = \mathbf{T} \text{ sse } [(\mathcal{C},\overline{c})]_q = [(\mathcal{A},\overline{a})]_q.$$

Por hipótese, existe uma função de primeira ordem Q', de posto 0, relativa à $\mathbf{K}$, e tal que Q é obtida a partir de Q' por subida de posto. Como $[(\mathcal{A},\overline{a})]_0^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_0^{\mathbf{K}}$, segue que

$$\mathrm{Q}'([(\mathcal{A},\overline{a})]_0^{\mathbf{K}}) = \mathrm{Q}'([(\mathcal{B},\overline{b})]_0^{\mathbf{K}}).$$

Portanto, usando o fato que Q é obtida a partir de Q' por subida de posto,

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}}) = \mathrm{Q}([(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}).$$

Da definição de Q, segue que

$$[(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}.$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Essa implicação é um corolário imediato da proposição 94.

(2) $\Rightarrow$ (4): Sejam $\mathcal{A}$ uma estrutura em $\mathbf{K}$, e $\overline{a}$ uma sequência finita em $\mathcal{A}$. Para cada $p \in \omega$, $[(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\mathbf{K}} \subseteq [(\mathcal{A},\overline{a})]_0^{\mathbf{K}}$. Consequentemente, precisamos provar apenas a outra inclusão.

Se $\mathcal{B}$ é uma estrutura em $\mathbf{K}$, e $\overline{b}$ é uma sequência finita em $\mathcal{B}$, com o mesmo comprimento de $\overline{a}$, e tal que $(\mathcal{B},\overline{b}) \in [(\mathcal{A},\overline{a})]_0^{\mathbf{K}}$, então

$$[(\mathcal{A},\overline{a})]_0^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_0^{\mathbf{K}}.$$

Por hipótese, temos que

$$[(\mathcal{A},\overline{a})]_p^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_p^{\mathbf{K}},$$

e disso segue que $(\mathcal{B}, \bar{b}) \in [(\mathcal{A}, \bar{a})]_p^{\mathbf{K}}$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Para cada função de primeira ordem Q, de posto q, relativa à $\mathbf{K}$, defina uma função de primeira ordem Q', de posto 0, relativa à $\mathbf{K}$, como segue:

$$\mathrm{Q}'([(\mathcal{A}, \bar{a})]_0^{\mathbf{K}}) = \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \bar{a})]_q^{\mathbf{K}}).$$

Essa definição não depende da escolha do representante $(\mathcal{A}, \bar{a})$ em $[(\mathcal{A}, \bar{a})]_0^{\mathbf{K}}$: De fato estamos assumindo que $[(\mathcal{A}, \bar{a})]_0^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{A}, \bar{a})]_q^{\mathbf{K}}$. Obviamente, Q é obtida a partir de Q' por subida de posto.

□

99 Corolário. *Suponha que $\mathcal{A}$ seja uma S-estrutura e que S contenha uma variável de predicado binária que é interpretada em $\mathcal{A}$ como a igualdade. Se todo isomorfismo entre subestruturas finitas de $\mathcal{A}$ pode ser estendido a um automorfismo de $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ admite eliminação de quantificadores.*

Demonstração. Basta observar que se $[(\mathcal{A}, \bar{a})]_0^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{A}, \bar{b})]_0^{\mathbf{K}}$, então as subestruturas cujos domínios são constituídos pelos termos das sequências finitas $\bar{a}$ e $\bar{b}$, respectivamente, são isomorfas. Como esse isomorfismo pode ser estendido a um automorfismo de $\mathcal{A}$, $[(\mathcal{A}, \bar{a})]_q^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{A}, \bar{b})]_q^{\mathbf{K}}$, para qualquer número natural q. O resultado segue da proposição 98.

□

Vamos munir o conjunto $S_n(\mathbf{K})$ de todos os n-tipos relativos a uma classe $\mathbf{K}$ de uma topologia de modo que, no caso em que $\mathbf{K}$ é elementar, o espaço topológico resultante é um espaço de Stone. É interessante observar que o único uso de fórmulas neste apêndice está contido no teorema fundamental dos ultraprodutos, que será utilizado para provar a compacidade de $S_n(\mathbf{K})$.

Seja Q uma função de primeira ordem definida em $\prod(\mathbf{K}, n)/_{\approx_q}$. Definimos o conjunto $\langle \mathrm{Q} \rangle \subseteq S_n(\mathbf{K})$:

$$\langle \mathrm{Q} \rangle = \left\{ tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A}, \bar{a}) \in S_n(\mathbf{K}) : \mathrm{Q}([(\mathcal{A}, \bar{a})]_q^{\mathbf{K}}) = \mathbf{T} \right\}$$

Se Q e Q' são funções de primeira ordem, de posto q e q', respectivamente, então consideramos os conjuntos $\langle \neg\mathrm{Q} \rangle$, $\langle \mathrm{Q} \wedge \mathrm{Q}' \rangle$ e $\langle \mathrm{Q} \vee \mathrm{Q}' \rangle$. Lembre-se que $\neg\mathrm{Q}$, $\mathrm{Q} \wedge \mathrm{Q}'$ e $\mathrm{Q} \wedge \mathrm{Q}'$ são as funções de primeira ordem obtidas a partir de Q e Q' pela aplicação de negação, conjunção e disjunção.

É fácil ver que

$$\langle \neg\mathrm{Q} \rangle = S_n(\mathbf{K}) \setminus \langle \mathrm{Q} \rangle,\ \langle \mathrm{Q} \wedge \mathrm{Q}' \rangle = \langle \mathrm{Q} \rangle \cap \langle \mathrm{Q}' \rangle \text{ e } \langle \mathrm{Q} \vee \mathrm{Q}' \rangle = \langle \mathrm{Q} \rangle \cup \langle \mathrm{Q}' \rangle.$$

Portanto, a coleção de conjuntos da forma $\langle \mathrm{Q} \rangle$, é fechada por complementos, interseções finitas e uniões finitas. Do fechamento por interseções finitas e do fato que todo n-tipo em $S_n(\mathbf{K})$ está em algum $\langle \mathrm{Q} \rangle$, segue que essa coleção é *base* para uma topologia em $S_n(\mathbf{K})$. Do fechamento por complemento, segue que é uma base de *clopens*.

Para dois n-tipos $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A}, \bar{a})$ e $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{B}, \bar{b})$, existe um $q \in \omega$ tal que

$$[(\mathcal{A}, \bar{a})]_q^{\mathbf{K}} \neq [(\mathcal{B}, \bar{b})]_q^{\mathbf{K}}.$$

Considere a função de primeira ordem Q, de posto q, relativa à $\mathbf{K}$ definida do seguinte modo:

$$\text{Para cada } [(\mathcal{C}, \bar{c})]_q^{\mathbf{K}}, \text{ estipulamos que } \mathrm{Q}([(\mathcal{C}, \bar{c})]_q^{\mathbf{K}}) = \mathbf{T} \text{ sse } [(\mathcal{C}, \bar{c})]_q^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{A}, \bar{a})]_q^{\mathbf{K}}.$$

Portanto, $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A}, \bar{a}) \in \langle \mathrm{Q} \rangle$, e como $[(\mathcal{A}, \bar{a})]_q^{\mathbf{K}} \neq [(\mathcal{B}, \bar{b})]_q^{\mathbf{K}}$, temos que $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{B}, \bar{b}) \in \langle \neg\mathrm{Q} \rangle$. Segue que a topologia introduzida em $S_n(\mathbf{K})$ é *Hausdorff*. Como vamos provar agora, esse espaço é, na verdade, um espaço de Stone. A prova apresentada abaixo é uma adaptação direta da prova contida em [3], página 66.

100 Teorema. *Se $\mathbf{K}$ é uma classe elementar, o conjunto $S_n(\mathbf{K})$ munido com a topologia dada pela base formada pelos clopens $\langle \mathrm{Q} \rangle$ é compacto.*

Demonstração. Vamos mostrar que qualquer ultrafiltro U em $S_n(\mathbf{K})$ contém o filtro de vizinhanças de um ponto. Para cada n-tipo $\tau \in S_n(\mathbf{K})$, escolhemos um par $\mathcal{A}_\tau, \bar{a}_\tau$ tal que $\tau = tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A}_\tau, \bar{a}_\tau)$. Considere o ultraproduto

$$(\mathcal{A},\overline{a}) = \prod(\mathcal{A}_\tau,\overline{a}_\tau)/U.$$

Como $\mathbf{K}$ é fechado por ultraprodutos, e

$$\mathcal{A} = \prod \mathcal{A}_\tau/U,$$

segue que $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$. Seja υ o n-tipo $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a})$, e seja $\langle \mathrm{Q}\rangle$ uma vizinhança básica de υ. Por definição, $\mathrm{Q}([(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}}) = \mathbf{T}$, em que q é o posto de Q. Agora, pelo teorema fundamental dos ultraprodutos

$$\left\{\tau \in S_n(\mathbf{K}) : \mathrm{Q}([(\mathcal{A}_\tau,\overline{a}_\tau)]_q^{\mathbf{K}}) = \mathbf{T}\right\} \in U.$$[1]

Como o conjunto da esquerda é um subconjunto de $\langle \mathrm{Q}\rangle$, provamos que U contém a vizinhança $\langle \mathrm{Q}\rangle$ de υ. Como $\langle \mathrm{Q}\rangle$ é uma vizinhança básica de υ qualquer, concluímos que U contém todas as vizinhanças de υ, e o resultado está provado.

□

Destacamos o seguinte corolário do teorema da compacidade acima:

101 Corolário. *Os clopens do espaço $S_n(\mathbf{K})$ são exatamente os conjuntos $\langle \mathrm{Q}\rangle$, para Q uma função de primeira ordem relativa à $\mathbf{K}$.*

Demonstração. Se X é um clopen de $S_n(\mathbf{K})$, então, como X é aberto,

$$X = \bigcup\{\langle \mathrm{Q}\rangle : \langle \mathrm{Q}\rangle \subseteq X\}.$$

Como X é fechado e $S_n(\mathbf{K})$ é compacto, existem $\langle \mathrm{Q}_1\rangle$,..., $\langle \mathrm{Q}_l\rangle$, tais que

$$X = \langle \mathrm{Q}_1\rangle \cup ... \cup \langle \mathrm{Q}_l\rangle.$$

Portanto, $X = \langle \mathrm{Q}_1 \vee ... \vee \mathrm{Q}_l\rangle$.

□

102 Definição. Um n-tipo $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a})$ é dito *principal* se existe um número natural q tal que para toda estrutura $\mathcal{B}$ em $\mathbf{K}$, e toda n-upla $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, se $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}$, então $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a}) = tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{B},\overline{b})$.

Se $\mathbf{K}$ admite eliminação de quantificadores, então, pelo item (2) da proposição 98, todo n-tipo relativo à $\mathbf{K}$ é principal. Vamos mostrar que os n-tipos principais relativos à $\mathbf{K}$ são exatamente os pontos isolados do espaço $S_n(\mathbf{K})$.

103 Proposição. *Os pontos isolados do espaço $S_n(\mathbf{K})$ são exatamente os n-tipos principais relativos à $\mathbf{K}$.*

Demonstração. De fato, seja $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a})$ um n-tipo principal. Seja q tal que para toda estrutura $\mathcal{B}$ em $\mathbf{K}$, e toda n-upla $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, se $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}$, então $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a}) = tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{B},\overline{b})$.

A função de primeira ordem Q definida em $\prod(\mathbf{K}|_S, n)/_{\approx_q}$ e tal que

$$\mathrm{Q}([(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}) = \mathbf{T} \text{ sse } [(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}},$$

satisfaz $\langle \mathrm{Q}\rangle = \left\{tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a})\right\}$. Portanto $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a})$ é um ponto isolado.

Por outro lado, se $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a})$ é um ponto isolado, então existe uma função de primeira ordem Q definida em $\prod(\mathbf{K}|_S, n)/_{\approx_q}$ e tal que

$$\langle \mathrm{Q}\rangle = \left\{tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a})\right\}.$$

Para toda estrutura $\mathcal{B}$ em $\mathbf{K}$, e toda n-upla $\overline{b}$ em $\mathcal{B}$, se $[(\mathcal{A},\overline{a})]_q^{\mathbf{K}} = [(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}$, então $\mathrm{Q}([(\mathcal{B},\overline{b})]_q^{\mathbf{K}}) = \mathbf{T}$. Mas isso significa que $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{B},\overline{b}) \in \langle \mathrm{Q}\rangle$, e

$$tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{A},\overline{a}) = tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{B},\overline{b}).$$

□

[1]De fato, note que existe uma fórmula de primeira ordem φ que expressa fracamente Q em $\mathbf{K}$, e aplique o teorema fundamental dos ultraprodutos para φ.

Referências Bibliográficas

[1] Roland Fraïssé, *Cours de Logique Mathématique, Tome 1*, Gauthier-Villars, 1971, 67

[2] Roland Fraïssé, *Cours de Logique Mathématique, Tome 2*, Gauthier-Villars, 1972, 67

[3] Bruno Poizat, *Cours de Théorie des Modèles*, OFFLIB, 1985, 71

[4] Emil Post, *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*, Princeton, 1941, 34

[5] Raymond Smullyan, *First-Order Logic*, Dover, 1995, 44, 46