Preservação da propriedade de Lindelöf e de algumas de suas generalizações

Robson Aparecido Figueiredo

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Lúcia Renato Junqueira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro
da CAPES e do CNPq

São Paulo, março de 2015

Preservação da propriedade de Lindelöf e de algumas de suas generalizações

Esta é a versão original da tese elaborada pelo candidato Robson Aparecido Figueiredo, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Resumo

FIGUEIREDO, R. A. **Preservação da propriedade de Lindelöf e de algumas de suas generalizações**. 2015. 59 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Neste trabalho são estudadas a preservação de algumas propriedades sob duas operações: a de tomar um espaço e considerar o seu G_δ-refinamento e aquela de tomar um espaço X e um submodelo elementar M e considerar uma certa "versão M de X". Provamos que para espaços dispersos, algumas propriedades como a metacompacidade, a paralindeloficidade e a metalindeloficidade são preservadas por G_δ-refinamentos. Também na classe dos espaços dispersos, temos a preservação por submodelos elementares das propriedades de Lindelöf, paracompacidade e metacompacidade. Por fim, apresentamos algumas caracterizações para os D-espaços paracompactos.

Palavras-chave: G_δ-refinamentos, submodelos elementares, Lindelöf, D-espaços.

Abstract

FIGUEIREDO, R. A. **Preservation of Lindelöf property and some of its generalizations**. 2015. 59 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

In this work is studied the preservation of some properties by two operations: taking a space and considering its G_δ-refinement, and that of taking a space X and an elementary submodel M and considering a certain "M's version of X". We prove that for scattered spaces some properties like the metacompacity, paralindelofness and metalindelofness are preserved by G_δ-refinements. Also in the class of scattered spaces, we have the preservation by elementary submodels of the Lindelöf property, paracompacity and metacompacity. Finally, we present some characterizations for paracompact D-spaces.

Keywords: G_δ-refinements, elementary submodels, Lindelöf, D-spaces.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **3**

1.1 Teoria dos conjuntos 3
1.2 *Forcing* 4
1.3 Submodelos elementares 5
1.4 Topologia 7

2 G_δ-refinamentos **11**

2.1 Dispersos 11
2.2 Algumas generalizações de disperso 16

3 Preservação da propriedade de Lindelöf por submodelos elementares **21**

3.1 Definições e teoremas básicos 21
3.2 Dispersos 22
3.3 P-espaços 25
3.4 σ-produtos 26
3.5 Algumas funções cardinais 29
3.6 Outras coisas 32

4 Preservação de algumas propriedades gerais por submodelos elementares **35**

4.1 Preservação de algumas generalizações da propriedade de Lindelöf 35
4.2 Alguma preservação sob forcing 39

5 Algumas caracterizações de D-espaços paracompactos **43**

5.1 D-espaços paracompactos 43
5.2 Espaços D_δ-paracompactos 45

Referências bibliográficas **48**

Índice de símbolos **49**

Índice remissivo **51**

Introdução

Neste trabalho é estudada a preservação de algumas propriedades sob duas operações: a de tomar um espaço e considerar o seu G_δ-refinamento e aquela de tomar um espaço X e um submodelo elementar M e considerar "uma versão M de X".

O primeiro caso é estudado no capítulo 2. Em geral, o G_δ-refinamento de um espaço é muito diferente do espaço em si. Muitas propriedades tais como compacidade, lindelöficidade, paracompacidade são geralmente perdidas sob esta operação. Contudo, verificamos que, para espaços dispersos, algumas generalizações da propriedade de Lindelöf como paracompacidade e metalindelöficidade são preservadas por G_δ-refinamento. Neste contexto, consideramos também algumas classes mais gerais que a de dispersos como ω-dispersos e N-dispersos.

Nos capítulos 3 e 4 tratamos da preservação por submodelos elementares. O conceito de submodelo elementar veio da lógica e se tornou uma ferramenta de grande sucesso em teoria dos conjuntos e topologia. Em [2], Dow apresenta um grande número de exemplos de aplicações de submodelos elementares à topologia conjuntista e destaca três coisas que os submodelos elementares podem proporcionar aos topólogos conjuntistas:

(1) uma conveniente abreviação englobando todos os argumentos do tipo *closing-off*;

(2) uma poderosa ferramenta técnica que pode ser evitada, mas muitas vezes com um grande custo em clareza e elegância;

(3) uma poderosa ferramenta conceitual que proporciona um maior entendimento sobre a estrutura do universo conjuntista.

Consolidados como ferramenta, não tardou para que os submodelos elementares passassem a ser tratados também como objeto de estudo. Segundo [1], o primeiro estudo sistemático da técnica em si foi feito em [3]. Lá, dado um espaço topológico $\langle X, \tau\rangle$ em um submodelo elementar M, X_M é o espaço $X \cap M$ munido da topologia τ_M que tem como base a família $\{ U \cap M : U \in \tau \cap M \}$. Surgem, assim, duas questões naturais associadas com o estudo de X_M:

(1) Dados X e M, com X satisfazendo uma certa propriedade φ, X_M também satisfaz φ?

(2) Se X_M satisfaz φ, então X satisfaz φ? Em particular, $X_M = X$?

Sobre as duas perguntas acima, muito do que foi feito está relacionado à φ como sendo a compacidade. Aqui, trabalharemos com a preservação da propriedade de Lindelöf no capítulo 3 e de algumas de suas generalizações no capítulo seguinte. No capítulo 3, por exemplo, mostramos que, para espaços dispersos a lindeloficidade é preservada por submodelos elementares — a versão deste teorema para a compacidade foi provada em [4] — , enquanto que no capítulo 4 são apresentadas variações deste teorema para a paracompacidade e a metacompacidade. No capítulo 4, ainda é feito um pequeno paralelo entre o *forcing* e os submodelos elementares: a operação de tomar um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ no *ground-model* e considerar o espaço $\langle \check{X}, \tau^{\mathbb{P}} \rangle$ na extensão, com $\tau^{\mathbb{P}}$ sendo a topologia tendo $\check{\tau}$ como base, pode ser comparada à operação de tomar $\langle X, \tau \rangle$ em um submodelo elementar M e considerar X_M. Em ambos os casos as respectivas novas topologias são enriquecidas com novos abertos. Sendo assim, é interessante verificar se propriedades preservadas para uma operação também são para a outra.

Por fim, no quinto e último capítulo, apresentamos algumas caracterizações da propriedade de ser D-espaço e paracompacto. De acordo com Gruenhage, em [5], a noção de D-espaço parece ter sua origem em uma troca de cartas entre E.K. van Douwen e E. Michael em meados da década de 70, mas o primeiro artigo sobre D-espaços foi publicado em 1979 por Douwen e Pfeffer em [6]. É deste artigo o mais famoso — e ainda em aberto — problema relacionado à D-espaços: para espaços regulares, alguma das propriedades padrão de cobertura, tais como Lindelöf ou paracompacto, implica a propriedade D?

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, estabelecemos a notação que será utilizada ao longo deste trabalho, além de listar resultados preliminares e definições essenciais à compreensão do texto.

1.1 Teoria dos conjuntos

Ao longo de todo o texto, trabalharemos sob *ZFC*, isto é, a axiomática de Zermelo-Fraenkel mais o *Axioma da Escolha.*

Apenas com o interesse de facilitar a notação e a linguagem empregadas, denotaremos por **Ord** e **Card** a classe dos ordinais e cardinais, respectivamente. Desta forma, por exemplo, por $x \in \mathbf{Ord}$ entenda-se apenas "x é um ordinal".

Se X é um conjunto e κ é um cardinal, então

$$[X]^{\kappa} = \{\, Y \subseteq X : |Y| = \kappa \,\}, \quad [X]^{<\kappa} = \{\, Y \subseteq X : |Y| < \kappa \,\} \quad \text{e} \quad [X]^{\leq\kappa} = [X]^{\kappa} \cup [X]^{<\kappa}.$$

Dado um conjunto X,

$$\mathrm{Fn}(X,2) = \bigcup \left\{\, {}^{A}2 : A \in [X]^{<\aleph_0} \,\right\}.$$

A **cofinalidade** de um ordinal α, denotada por $\mathrm{cf}(\alpha)$, é o menor ordinal μ tal que existe $f \in {}^{\mu}\alpha$ tal que, para todo $\beta \in \alpha$, existe $\eta \in \mu$ tal que $f(\eta) \geq \beta$. Dizemos que α é regular se $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$.

Dados um conjunto X e um cardinal $\mu \leq |X|$, dizemos que $\mathscr{C} \subseteq [X]^{\mu}$ é **cofinal** em $[X]^{\mu}$ se, e somente se, para todo $x \in [X]^{\mu}$, existe $y \in \mathscr{C}$ tal que $x \subseteq y$.

Dados cardinais μ e κ, com $\mu \leq \kappa$, definimos $\mathrm{cf}\left([\kappa]^{\mu}, \subseteq\right)$ como sendo a menor cardinalidade de uma família cofinal em $[\kappa]^{\mu}$.

Dado um cardinal infinito κ,

$$\mathbf{Cov}_{\omega}(\kappa) = \mathrm{cf}\left([\kappa]^{\aleph_0}, \subseteq\right).$$

Para $\mathcal{A}$ e H conjuntos quaisquer,

$$(\mathcal{A})_H = \{\, A \in \mathcal{A} : A \cap H \neq \emptyset \,\}.$$

A *Hipótese do Continuum*, *CH*, é a afirmação de que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

1.2 *Forcing*

Aqui, seguimos [31].

Uma **pré-ordem** é uma relação binária transitiva e reflexiva. Uma **ordem de forcing** é uma tripla $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1} \rangle$, onde $\leq$ é um pré-ordem sobre $\mathbb{P}$ e $\mathbb{1}$ é o maior elemento de $\mathbb{P}$. Cometeremos o abuso de notação de representar $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1} \rangle$ apenas por $\mathbb{P}$ sempre que $\leq$ e $\mathbb{1}$ estiverem claro do contexto. Todo elemento de $\mathbb{P}$ é chamado de **condição**. Se $q \leq p$, então dizemos que q é **extensão** de p. Dizemos que duas condições p e q são **compatíveis** se elas possuem uma extensão em comum. Caso contrário, dizemos p e q são **incompatíveis** e escrevemos $p \perp q$. Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ é uma **anticadeia** se seus elementos são dois a dois incompatíveis. Uma anticadeia é dita **maximal** se ela não é subconjunto próprio de uma anticadeia. Um subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ é **denso** em $\mathbb{P}$ se, para toda condição p, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$. Um **filtro** em $\mathbb{P}$ é um subconjunto G de $\mathbb{P}$ tal que:

(1) $\mathbb{1} \in G$;

(2) $\forall p, q \in G \, \exists r \in G \, (r \leq p \wedge r \leq q)$;

(3) $\forall p \in G \, \forall q \in \mathbb{P} \, (p \leq q \to q \in G)$.

Um filtro G é $\mathbb{P}$**-genérico** sobre $\mathbf{M}$ se G intersecta todos os subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ que estão em $\mathbf{M}$.

τ é um $\mathbb{P}$**-nome** se τ é uma relação binária e

$$\forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau \, (\sigma \text{ é um } \mathbb{P}\text{-nome e } p \in \mathbb{P}).$$

Denotamos por $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ a classe de todos os $\mathbb{P}$-nomes.

Se $\mathbf{M}$ é um modelo transitivo de $ZF - P$ e $\mathbb{P} \in \mathbf{M}$, defina

$$\mathbf{M}^{\mathbb{P}} = \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \cap \mathbf{M} = \left\{ \tau \in \mathbf{M} : (\tau \text{ é um } \mathbb{P}\text{-nome})^{\mathbf{M}} \right\}.$$

Se τ é um $\mathbb{P}$-nome e $G \subseteq \mathbb{P}$, então, por recursão, defina:

$$\tau_G = \{ \sigma_G : \exists p \in G \, (\langle \sigma, p \rangle \in \tau) \}.$$

Se $\mathbf{M}$ é um modelo transitivo de $ZF - P$ e $\mathbb{P} \in \mathbf{M}$, defina:

$$\mathbf{M}[G] = \left\{ \tau_G : \tau \in \mathbf{M}^{\mathbb{P}} \right\}.$$

Para qualquer conjunto x, seja $\check{x} = \{ \langle \check{y}, \mathbb{1} \rangle : y \in x \}$.

Lema 1.2.1. *Suponha que* $\mathbf{M}$ *seja um modelo transitivo de* $ZF - P$*, com* $\mathbb{P} \in \mathbb{M}$*, e* G *um filtro sobre* $\mathbb{P}$*. Então:*

(1) *para todo* $x \in \mathbf{M}$*,* $\check{x} \in \mathbf{M}^{\mathbb{P}}$ *e* $(\check{x})_G = x$*;*

(2) $\Gamma = \{ \langle \check{p}, p \rangle : p \in \mathbb{P} \}$ *é um* $\mathbb{P}$*-nome,* $\Gamma_G = G$ *e* $\mathbf{M} \cup \{G\} \subseteq \mathbf{M}[G]$*.*

Seja $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula cujas variáveis livres estão entre $v_1, \ldots, v_n$. Sejam $\tau_1, \ldots, \tau_n$ $\mathbb{P}$-nomes. Dizemos que uma condição p força $\psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — e denotamos por $p \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — se vale $(\varphi((\tau_1)_G, \ldots, (\tau_n)_G))^{\mathbf{M}[G]}$ para todo genérico G tal que $p \in G$.

Proposição 1.2.2. *Nas condições da definição, são equivalentes:*

(1) $p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$;

(2) $\forall r \leq p\, (r \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n))$;

(3) $\{\, r \in \mathbb{P} : r \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \,\}$ *é denso abaixo de* p.

Teorema 1.2.3 (Princípio Maximal)**.** *Sejam* $\mathbb{P} \in \mathbf{M}$ *uma ordem de forcing,* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ $\mathbb{P}$*-nomes e uma fórmula* $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$*. Então,* $p \Vdash \exists x\, \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ *se, e somente se,* $p \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ *para algum* $\mathbb{P}$*-nome* π*.*

1.3 Submodelos elementares

Uma clara e extensiva exposição sobre submodelos elementares é dada em [7]. Muitos exemplos de aplicações podem ser encontrados em [2, 8, 9].

Se $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ é uma fórmula com variáveis livres entre $v_1, \ldots, v_n$ e M e N são classes, com $M \subseteq N$, então dizemos que φ **é absoluta entre** M **e** N — e escrevemos $M \prec_\varphi N$ — se, para $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq M$,

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{se, e somente se,} \quad N \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

Se Σ é uma coleção de fórmulas, então escrevemos

$$M \prec_\Sigma N$$

se $M \prec_\varphi N$ para toda fórmula $\varphi \in \Sigma$.

Dizemos que M é um **submodelo elementar** de N — e escrevemos $M \prec N$ — se $M \prec_\varphi N$ para todo fórmula φ.

Se φ é absoluta entre M e o universo $\mathbf{V}$, então dizemos simplesmente que φ é absoluta para M.

Critério de Tarski-Vaught. *Sejam* M *e* N *conjuntos tais que* $M \subseteq N$*. São equivalentes:*

(1) $M \prec N$;

(2) *para toda fórmula* $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$*, com variáveis livres entre* u*,* $v_1, \ldots, v_n$*, e toda sequência* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq M$*, se* $N \models \exists y \varphi[y, a_1, \ldots, a_n]$*, então existe* $a \in M$ *tal que* $N \models \varphi[y, a_1, \ldots, a_n]$*.*

Teorema de Löwenheim–Skolem. *Para cada conjunto* φ *e cada subconjunto infinito* $A \subseteq N$*, existe um conjunto* M *tal que* $A \subseteq M \prec N$ *e* $|M| = |A|$*.*

Princípio da Reflexão. *Seja Σ um conjunto finito de fórmulas. Então, para cada cardinal κ, existe um cardinal λ tal que $V_\lambda \prec_\Sigma \mathbf{V}$ e $[V_\lambda]^{<\kappa} \subseteq \mathbf{V}$ (e, portanto, $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \kappa$)*[*].

Corolário 1.3.1. *Sejam Σ uma coleção finita de fórmulas, κ um cardinal infinito e um conjunto x.*

(1) *Existe um conjunto $M \prec_\Sigma \mathbf{V}$, com $x \in M$ e $|M| = \kappa$.*

(2) *Se $\kappa > \omega$ é regular, então existe um conjunto $M \prec_\Sigma \mathbf{V}$, com $x \in M$, $|M| < \kappa$ e $M \cap \kappa \in \kappa$.*

(3) *Se $\kappa^\omega = \kappa$, então existe um conjunto $M \prec_\Sigma \mathbf{V}$ tal que $x \in M$, $|M| = \kappa$, $M \cap \kappa^+ \in \kappa^+$ e $[M]^\omega \subseteq M$.*

(4) *Se $\kappa > \omega$ é regular, então o conjunto*

$$S_x = \{\, M \cap \kappa : x \in M \prec_\Sigma \mathbf{V} \text{ e } M \cap \kappa \in \kappa \,\}$$

contém um subconjunto fechado e limitado de κ.

Um conjunto b é **definível a partir de parâmetros** $a_1, \ldots, a_n$ se, e somente se, existe uma fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ tal que

$$\forall x\, (\varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow x = b).$$

Dizemos que b é **definível** se, e somente se, não são necessários quaisquer parâmetros.

Lema 1.3.2. *Suponha $M \prec_{\{\exists x \varphi(x,\vec{y}), \varphi(x,\vec{y})\}} \mathbf{V}$. Se b é um conjunto tal que $\forall x\, (\varphi(x, \vec{a}) \leftrightarrow x = b)$, com $\vec{a} \in M$, então $b \in M$.*

Lema 1.3.3. *Suponha que $\forall \vec{x}\, \exists! y\, \varphi(\vec{x}, y)$*[†] *e que $M \prec_{\{\forall \vec{x}\, \exists y\, \varphi(\vec{x},y),\, \varphi(\vec{x},y)\}} \mathbf{V}$, então*

$$M \models \forall \vec{x}\, \exists! y\, \varphi(\vec{x}, y),$$

i.e., $\forall \vec{x} \in M\, \exists! y \in M\, (M \models \varphi(\vec{x}, y))$.

Lema 1.3.4. *Existe uma coleção finita de fórmulas Σ_0 tal que se $M \prec_{\Sigma_0} \mathbf{V}$, então:*

(1) *$[M]^{<\omega} \subseteq M$;*

(2) *$\omega + 1 \subseteq M$;*

(3) *se $g \in M$ é uma função e $x \in \mathrm{dom}(g) \cap M$, então $g(x) \in M$.*

Lema da Transitividade. *Existe uma coleção finita Σ_1 de fórmulas tal que se $M \prec_{\Sigma_1} \mathbf{V}$, então, para cada $A \in M$, se $|A| \subseteq M$, então $A \subseteq M$.*

Corolário 1.3.5. *Se $M \prec_{\Sigma_0 \cup \Sigma_1} \mathbf{V}$, então, para cada conjunto enumerável $A \in M$, segue que $A \subseteq M$.*

[*] Suponha, por absurdo, que $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$. Seja $x \subseteq \lambda$ cofinal em λ de cardinalidade $\mathrm{cf}(\lambda)$. Então, $x \in V_\lambda$ e, portanto, $\mathrm{rank}\left(\bigcup x\right) = \mathrm{rank}(x) < \lambda$. Assim, $\lambda = \bigcup x \in V_\lambda$, uma absurdo.

[†] $\exists! y\, \varphi(\vec{x}, y) \equiv \exists y\, (\varphi(\vec{x}, y) \wedge \forall z\, (\varphi(\vec{x}, z) \rightarrow z = y))$.

1.4 Topologia

Definição 1.4.1. Sejam $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma **base** para x se para todo aberto V tal que $x \in V$, existe $U \in B$ tal que $x \in U \subseteq V$.

Definição 1.4.2. O **peso** de um espaço topológico X é definido por

$$w(X) = \min \{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma base de abertos para } X \} + \aleph_0.$$

Definição 1.4.3. A **densidade** de um espaço topológico X é definida por

$$d(X) = \min \{ |D| : D \subseteq X \text{ é denso em } X \} + \aleph_0.$$

Dizemos que X é **separável** se, e somente se, $d(X) = \aleph_0$.

Definição 1.4.4. Um ponto x de um espaço X é um **ponto de acumulação completa** de um conjunto $A \subseteq X$ se $|A \cap U| = |A|$ para toda vizinhança aberta U de x.

Definição 1.4.5. Um subconjunto A de um espaço topológico X é **raro** em X se todo aberto não-vazio de X contém um aberto não-vazio disjunto de A.

Definição 1.4.6. Seja $x \in X$. O **tightness de** x em X é definido por

$$t(x, X) = \min \Big\{ \kappa \in \mathbf{Card} : \forall A \subseteq X \text{ tal que } x \in \mathrm{cl}(A),\ \exists B \in [A]^{\leq\kappa} \text{ tal que } x \in \mathrm{cl}(B) \Big\} + \aleph_0.$$

O **tightness de** X é definido por

$$t(X) = \sup \{ t(x, X) : x \in X \}.$$

Definição 1.4.7. Seja κ um ordinal. Uma κ-sequência transfinita $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ em X é uma **sequência livre** em X se

$$\mathrm{cl} \{ x_\beta : \beta < \alpha \} \cap \mathrm{cl} \{ x_\beta : \alpha \leq \beta < \kappa \} = \emptyset$$

para todo $\alpha < \kappa$.

Segue diretamente da definição, que uma sequência livre é um subespaço discreto de X.

Definição 1.4.8. A **freeness** de X é definida por

$$F(X) = \sup \{ \kappa \in \mathbf{Ord} : \text{ existe uma } \kappa\text{-sequência livre em } X \} + \aleph_0.$$

Definição 1.4.9. Um espaço X é **compacto** se toda cobertura aberta de X possui subcobertura finita.

Definição 1.4.10. Dizemos que um espaço X é de **Lindelöf**, ou tem a **propriedade de Lindelöf**, se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável.

A noção de um espaço de Lindelöf nos leva ao conceito de grau de Lindelöf:

Definição 1.4.11. O **grau de Lindelöf** de um espaço X — o qual denotaremos por $L(X)$ — é o menor cardinal κ tal que toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura de cardinalidade $\leq \kappa$.

Definição 1.4.12. Dizemos que um espaço X é de **linearmente Lindelöf**, ou tem a **propriedade linear de Lindelöf**, se toda cobertura aberta, linearmente ordenada pela inclusão de X, possui uma subcobertura enumerável.

Definição 1.4.13. Um espaço é **paracompacto** se toda cobertura aberta possui um refinamento aberto e localmente finito.

Definição 1.4.14. Um espaço é **paralindelöf** se toda cobertura aberta possui um refinamento aberto e localmente enumerável.

Definição 1.4.15. Um espaço topológico X é **metacompacto** se toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto e pontualmente finito.

Definição 1.4.16. Um espaço topológico X é **metalindelöf** se toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto e pontualmente enumerável.

Definição 1.4.17. Dado um espaço topológico X, dizemos que um subconjunto $A \subseteq X$ é G_δ se existe uma família enumerável de abertos $\{ U_n : n \in \omega \}$ tal que $A = \bigcap \{ U_n : n \in \omega \}$.

Definição 1.4.18. Dado um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$, o **G_δ-refinamento** de X é o espaço topológico $X_\delta = \langle X, \tau_\delta \rangle$, onde τ_δ é a topologia que tem como base os subconjuntos G_δ de X. A família τ_δ é dita ser a G_δ-topologia de $\langle X, \tau \rangle$.

Definição 1.4.19. Dizemos que um espaço X é um **P-espaço** se a intersecção enumerável de abertos é um aberto, ou seja, se $X = X_\delta$.

Lema 1.4.20 (Cameron [10])**.** *Seja $\langle X, \tau_1 \rangle$ um P-espaço de Lindelöf e de Hausdorff. Se $\tau_0 \subseteq \tau_1$ é uma P-topologia T_2 sobre X, então $\tau_0 = \tau_1$.*

Definição 1.4.21. Um espaço X é **disperso** se todo subespaço não-vazio de X tem um ponto isolado.

Definição 1.4.22. Um espaço X é **separado à direita** se existe uma boa ordem $<$ sobre X tal que $\{ y \in X : y < x \}$ é um aberto para todo $x \in X$.

Um espaço é disperso se, e somente se, ele é separado à direita.

Definição 1.4.23. Dado um espaço topológico X, para cada ordinal α, a **α-ésima derivada de** X, $X^{(\alpha)}$, é definida, recursivamente, como segue:

- $X^{(0)} = X$;

- $X^{(\alpha+1)}$ é o conjunto derivado de $X^{(\alpha)}$;
- $X^{(\alpha)} = \bigcap \left\{ X^{(\beta)} : \beta < \alpha \right\}$, se α é um ordinal limite.

Visto que $X^{(\alpha)} \supseteq X^{(\beta)}$ sempre que $\alpha < \beta$, existe um ordinal minimal α tal que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$. Tal ordinal, denotado por $\mathrm{ht}(X)$, é chamado de **altura de Cantor-Bendixson**.

Capítulo 2

G_δ-refinamentos

Neste capítulo estudamos a preservação de algumas generalizações da propriedade de Lindelöf por G_δ-refinamentos. Na primeira seção, este estudo é feito na classe dos espaços dispersos e na seção seguinte em algumas classes mais gerais.

2.1 Dispersos

É fácil ver que a compacidade não é preservada por G_δ-refinamentos. O exemplo a seguir mostra que até mesmo a paracompacidade é perdida após tal operação.

Exemplo 2.1.1. Um espaço compacto e T_2 X tal que X_δ não é normal. Em particular, X_δ não é paracompacto.

Considere o produto cartesiano $X = [0,1]^{\mathfrak{c}^+}$. Podemos supor que $X_\delta = (D(\mathfrak{c})^{\mathfrak{c}^+})_\delta$. Para cada $n \in \{0,1\}$, defina

$$A_n = \left\{ f \in X_\delta : \text{se } \alpha \neq n \text{ então } f^{-1}(\alpha) \text{ tem cardinalidade} \leq 1 \right\}.$$

Os conjuntos A_0 e A_1 são disjuntos. De fato, suponha, por absurdo, que existe $f \in A_0 \cap A_1$. Se $\beta \in \mathfrak{c}$ então $\beta \neq 0$ ou $\beta \neq 1$. Logo, existe no máximo um $\alpha \in \mathfrak{c}$ tal que $f(\alpha) = \beta$. Assim, f é uma função injetora de $\mathfrak{c}^+$ em $\mathfrak{c}$, um absurdo.

Para cada função parcial enumerável s de ω_1 em $\mathfrak{c}^+$, defina $[s] = \{ f \in X_\delta : s \subseteq f \}$.

Os subespaços A_0 e A_1 são fechados em X_δ. Fixe $n \in \{0,1\}$. Seja $h \in X \setminus A_n$. Então, existem $\alpha, \beta \in \mathfrak{c}$ distintos tais que $h(\alpha) = h(\beta) \neq n$. Considere o aberto básico $U = [h \restriction \{\alpha, \beta\}]$. É fácil ver que $h \in U \subseteq X \setminus A_n$. Portanto, A_n é fechado.

Os subconjuntos A_0 e A_1 não podem ser separados por abertos de X_δ. De fato, seja U um aberto contendo A_0. Vamos mostrar que $\mathrm{cl}(U) \cap A_1 \neq \emptyset$. Recursivamente, vamos definir uma sequência de funções $\{f_\delta\}_{\delta \in \omega_1} \subseteq A_0$, uma sequência estritamente crescente de ordinais $\{\gamma_\delta\}_{\delta \in \omega_1} \subseteq \omega_1$ e uma sequência crescente de injeções $\{s_\delta \colon \gamma_\delta \to \mathfrak{c}^+\}_{\delta \in \omega_1}$.

- Seja $f_0 \in A_0$ dada por $f_0(\alpha) = 0$, $\alpha \in \omega_1$, e escolha $\gamma_0 \in \omega_1$ e uma injeção $s_0 \colon \gamma_0 \to \mathfrak{c}^+$ tal que $[f_0 \restriction \mathrm{Im}(s_0)] \subseteq U$;

- Dada uma função injetora $s_\delta \colon \gamma_\delta \to \mathfrak{c}^+$, seja $f_{\delta+1} \in A_0$ dada por:

$$f_{\delta+1}(\alpha) = \begin{cases} \gamma, & \text{se } \alpha = s_\delta(\gamma) \text{ para algum } \gamma < \gamma_\delta; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Escolha $\gamma_{\delta+1} > \gamma_\delta$ em ω_1 e uma injeção $s_{\delta+1}\colon \gamma_{\delta+1} \to \mathfrak{c}^+$ que estende s_δ e tal que $[f_{\delta+1} \restriction \mathrm{Im}(s_{\delta+1})] \subseteq U$.

- Se $\delta \in \omega_1$ é limite e $\{s_\iota\colon \gamma_\iota \to \mathfrak{c}^+\}_{\iota\in\delta}$ é uma sequência crescente de injeções, tome

$$f_\delta(\alpha) = \begin{cases} \gamma, & \text{se } \alpha = \left(\bigcup_{\iota<\delta} s_\iota\right)(\gamma) \text{ para algum } \gamma < \sup_{\iota<\delta}\gamma_\iota; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, considere a sequência $\{g_\delta\}_{\delta\in\omega_1} \subseteq X$ dada por:

$$g_\delta(\alpha) = \begin{cases} f_\delta(\alpha), & \text{se } \alpha \in \mathrm{Im}(s_\delta); \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É fácil ver que, para cada $\delta \in \omega_1$, $g_\delta \in [g_\delta \restriction \mathrm{Im}(s_\delta)] = [f_\delta \restriction \mathrm{Im}(s_\delta)] \subseteq U$.

Por fim, seja $h \in X$ dada por

$$h(\alpha) = \begin{cases} \gamma, & \text{se } \alpha = \left(\bigcup_{\delta\in\omega_1} s_\delta\right)(\gamma) \text{ para algum } \gamma < \bigcup_{\delta\in\omega_1}\gamma_\delta; \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmamos que h é ponto de acumulação de U em A_1. De fato, seja V um aberto de X tal que $h \in V$. Então existe $S \subseteq \mathfrak{c}^+$ enumerável tal que $[h \restriction S] \subseteq V$. Seja $\eta \in \omega$ tal que $S \cap \bigcup\{\, S_\delta : \delta \in \omega_1 \,\} \subseteq S_\eta$. Então, $g_\eta \in [h \restriction S] \subseteq V$. Assim, $\mathrm{cl}(U) \cap A_1 \neq \emptyset$.

Observação 2.1.2. Assumindo *CH*, a G_δ-modificação do espaço $X = (\omega+1)^{\omega_1}$ é paracompacto e, portanto, normal. De fato, isto segue imediatamente do teorema 4.3 de [11] e do fato de que $w(X_\delta) = \aleph_1$.

Teorema 2.1.3 (Levy e Rice [12])**.** *Suponha que X é regular e disperso. Então, $L(X) \leq \kappa$ se, e somente se, $L(X_\delta) \leq \kappa$.*

Teorema 2.1.4 (Levy e Rice [12])**.** *Se X é regular, disperso e paracompacto, então X_δ é paracompacto.*

Teorema 2.1.5. *Se $\langle X, \tau\rangle$ é regular, disperso e paralindelöf, então X_δ é paracompacto.*

Demonstração. Pelo teorema 4.3 de [11], basta mostrarmos que X_δ é paralindelöf. Seja, então, $\mathscr{C}$ uma cobertura aberta de X_δ. Seja

$$O = \Big\{\, x \in X : x \in \mathrm{int}_\tau\Big(\bigcup \mathscr{C}'\Big) \text{ para algum refinamento parcial, aberto e localmente enumerável } \mathscr{C}' \text{ de } \mathscr{C} \text{ em } X_\delta \Big\},$$

Fato. $O = X$.

Prova do fato. Suponha que $O \neq X$. Como $\langle X, \tau\rangle$ é disperso e regular, existem $y \in X \setminus O$ e uma vizinhança aberta U de y tal que $(X \setminus O) \cap U = \{y\}$. Escolha $C_y \in \mathscr{C}$ tal que $y \in C_y$. Podemos supor $C_y = \bigcap\{\, U_n : n \in \omega \,\}$, onde, para cada $n < \omega$, $U_n \in \tau$ e $\mathrm{cl}_\tau(U_{n+1}) \subseteq U_n \subseteq \mathrm{cl}_\tau(U_n) \subseteq U$.

Fixe $n \in \omega$. Note que $F_n = \mathrm{cl}_\tau(U_n) \setminus U_{n+1} \subseteq O$. Logo, para cada $x \in F_n$ existe um refinamento parcial, aberto e localmente enumerável $\mathscr{C}_x$ de $\mathscr{C}$ em X_δ tal que $x \in V_x = \mathrm{int}_\tau\left(\bigcup \mathscr{C}_x\right)$. Como $\langle X, \tau \rangle$ é paralindelöf e F_n, $\mathcal{V}_n = \{\, V_x : x \in F_n \,\}$ possui um refinamento parcial, aberto e localmente enumerável $\mathcal{W}_n$ que cobre F_n. Para cada $W \in \mathcal{W}_n$, escolha $x_W \in F_n$ tal que $W \subseteq V_{x_W}$. Considere a família

$$\mathscr{D}_n = \{\, W \cap C : W \in \mathcal{W}_n \text{ e } C \in \mathscr{C}_{x_W} \,\}.$$

$\mathscr{D}_n$ é uma família aberta e localmente enumerável em X_δ que cobre F_n. De fato, seja $x \in X$. Como $\mathcal{W}_n$ é uma cobertura aberta e localmente enumerável de X, existe uma vizinhança aberta Z_x de x em X tal que $(\mathcal{W}_n)_{Z_x}$ é enumerável. Para cada $W \in (\mathcal{W}_n)_{Z_x}$, tome uma vizinhança aberta O_W de x em X_δ tal que $(\mathscr{C}_{x_W})_{O_W}$ é enumerável. Considere a seguinte vizinhança aberta de x em X_δ:

$$Z = Z_x \cap \bigcap \{\, O_W : W \in (\mathcal{W}_n)_{Z_x} \,\}.$$

Assim, para cada $W \in (\mathcal{W})_{Z_x}$, $(\mathscr{C}_{x_W})_Z$ é enumerável. Como

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}_n)_Z &= \{\, W \cap C : W \in \mathcal{W}_n,\, C \in \mathscr{C}_{x_W} \text{ e } W \cap C \cap Z \neq \emptyset \,\}\\ &\subseteq \left\{\, W \cap C : W \in (\mathcal{W}_n)_{Z_x} \text{ e } C \in (\mathscr{C}_{x_W})_Z \,\right\},\end{aligned}$$

segue que $(\mathscr{D}_n)_Z$ é enumerável.

Agora, seja:

$$\mathscr{C}' = \{C_y\} \cup \bigcup_{n<\omega} \mathscr{D}_n.$$

É fácil ver que $\mathscr{C}'$ é um refinamento parcial, aberto e localmente enumerável de $\mathscr{C}$ em X_δ tal que $y \in U_0 \subseteq \mathrm{int}_\tau\left(\bigcup \mathscr{C}'\right)$, contradizendo o fato de que $y \notin O$. ◀

Agora, visto que $O = X$, para cada $x \in X$, existe um refinamento parcial, aberto e localmente enumerável $\mathscr{C}_x$ de $\mathscr{C}$ em X_δ tal que $x \in V_x = \mathrm{int}_\tau\left(\bigcup \mathscr{C}_x\right)$. Como $\langle X, \tau \rangle$ é paralindelöf, a cobertura aberta $\mathcal{V} = \{\, V_x : x \in X \,\}$ possui um refinamento parcial, aberto e localmente enumerável $\mathcal{W}$. Para cada $W \in \mathcal{W}$, escolha $x_W \in X$ tal que $W \subseteq V_{x_W}$. Assim,

$$\{\, W \cap C : W \in \mathcal{W} \text{ e } C \in \mathscr{C}_{x_W} \,\}$$

é um refinamento parcial, aberto e localmente enumerável de $\mathscr{C}$ em X_δ. ∎

Teorema 2.1.6. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é regular, disperso e metalindelöf, então $X_\delta = \langle X, \tau_\delta \rangle$ é metalindelöf.*

Demonstração. Seja $\mathscr{C}$ uma cobertura aberta de X_δ. Seja

$$O = \Big\{\, x \in X : \mathscr{C} \text{ possui refinamento parcial, aberto e pontualmente enumerável } \mathscr{C}' \text{ em } X_\delta \text{ tal que } x \in \mathrm{int}_\tau\left(\bigcup \mathscr{C}'\right) \Big\}.$$

Suponha, por absurdo, que $O \neq X$. Como $\langle X, \tau \rangle$ é disperso, existem $y \in X \setminus O$ e $U \in \tau$ tais que $U \cap (X \setminus O) = \{y\}$. Escolha $C_y \in \mathscr{C}$ tal que $y \in C_y$. Podemos supor que $C_y = \bigcap \{ U_n : n \in \omega \}$, onde, para cada $n < \omega$, $U_n \in \tau$ e $\mathrm{cl}_\tau(U_{n+1}) \subseteq U_n \subseteq \mathrm{cl}_\tau(U_n) \subseteq U$.

Fixe $n \in \omega$. Note que

$$F_n = \mathrm{cl}_\tau(U_n) \setminus U_{n+1} \subseteq O.$$

Logo, para cada $x \in F_n$, existe um refinamento parcial, aberto e pontualmente enumerável $\mathscr{C}_x$ de $\mathscr{C}$ em X_δ tal que $x \in V_x = \mathrm{int}_\tau (\bigcup \mathscr{C}_x)$. Como $\langle X, \tau \rangle$ é metalindelöf, $\{X \setminus F_n\} \cup \{ V_x : x \in F_n \}$ possui um refinamento aberto e pontualmente enumerável $\mathcal{V}_n$. Seja $\mathcal{W}_n = \mathcal{V}_n \setminus \{V \in \mathcal{V}_n : V \subseteq X \setminus F_n\}$. Para cada $V \in \mathcal{W}_n$, escolha $x_V \in F_n$ tal que $V \subseteq V_{x_V}$. Considere a família

$$\mathscr{D}_n = \{ V \cap W : V \in \mathcal{W}_n \text{ e } W \in \mathscr{C}_{x_V} \}.$$

Assim,

$$\mathscr{C}' = \{C_y\} \cup \bigcup \{ \mathscr{D}_n : n < \omega \}$$

é um refinamento parcial, aberto e pontualmente enumerável de $\mathscr{C}$ em X_δ tal que $y \in U_0 \subseteq \mathrm{int}_\tau (\bigcup \mathscr{C}')$, contradizendo o fato de que $y \notin O$. Portanto, $O = X$.

Agora, visto que $O = X$, para cada $x \in X$, existe um refinamento parcial, aberto e pontualmente enumerável $\mathscr{C}_x$ de $\mathscr{C}$ em X_δ tal que $x \in V_x = \mathrm{int}_\tau (\bigcup \mathscr{C}_x)$. Como $\langle X, \tau \rangle$ é metalindelöf, $\{ V_x : x \in X \}$ possui um refinamento parcial, aberto e pontualmente enumerável $\mathcal{V}$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, escolha $x_V \in X$ tal que $V \subseteq V_{x_V}$. Assim,

$$\{ V \cap W : V \in \mathcal{V} \text{ e } W \in \mathscr{C}_{x_V} \}$$

é um refinamento aberto e pontualmente enumerável de $\mathscr{C}$ em X_δ. ∎

Parece-me que o próximo teorema responde a uma pergunta de Henriksen et al. em [13].

Teorema 2.1.7. *Se X é metacompacto, regular e disperso, X_δ é metacompacto.*

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução sobre a altura de Cantor-Bendixton δ.

Se X tem altura 1, então X é discreto; consequentemente, X_δ é discreto e, portanto, metacompacto.

Suponha, então, que o teorema valha para espaços de altura menor que δ e fixe um espaço metacompacto, disperso e regular $\langle X, \tau \rangle$ cuja altura é δ.

Primeiramente, consideremos o caso em que $\delta = \gamma + 1$, para algum ordinal γ, e $X^{(\gamma)}$ tem um único elemento x. Seja $\mathscr{C}$ uma cobertura aberta de X_δ e fixe $U \in \mathscr{C}$ tal que $x \in U$. Podemos supor que $U = \bigcap \{ U_n : n \in \omega \}$, onde, para cada $n \in \omega$, $\mathrm{cl}_\tau(U_{n+1}) \subseteq U_n \in \tau$. Como $X \setminus U_1$ é um subespaço fechado de X cuja altura é $< \delta$, segue da hipótese de indução que $\mathscr{C}$ possui um refinamento parcial, aberto e pontualmente finito $\mathscr{C}'$ em $X \setminus U_1$ que cobre $X \setminus U_1$. Do mesmo modo, para cada $n \in \omega$, existe um refinamento parcial, aberto e pontualmente finito $\mathscr{C}_n$ de $\mathscr{C}$ em

$F_n = \mathrm{cl}_\tau(U_n) \setminus U_{n+2}$ cobrindo F_n. Então,

$$\mathscr{R} = \{\, C \setminus \mathrm{cl}_\tau(U_1) : C \in \mathscr{C}' \,\} \cup \bigcup_{n \in \omega} \{\, C \cap (U_n \setminus \mathrm{cl}_\tau(U_{n+2})) : C \in \mathscr{C}_n \,\} \cup \{U\}.$$

é um refinamento parcial, aberto e pontualmente finito de $\mathscr{C}$. Portanto, X_δ é metacompacto.

Agora, vamos ao caso geral. Para cada $x \in X$, escolha uma vizinhança aberta U_x de x tal que $\mathrm{cl}_\tau(U_x) \subseteq X \setminus X^{(\eta)}$ e $\mathrm{cl}_\tau(U_x) \cap \left(X^{(\eta)} \setminus X^{(\eta+1)}\right) = \{x\}$, com $\eta = \min\left\{\, \iota < \delta : x \in X^{(\iota)} \setminus X^{(\iota+1)} \,\right\}$. Então, para cada $x \in X$, ou $\mathrm{ht}(\mathrm{cl}_\tau(U_x)) < \delta$ ou $\mathrm{ht}(\mathrm{cl}_\tau(U_x)) = \delta$, $\delta = \gamma + 1$ e $(\mathrm{cl}_\tau(U_x))^{(\gamma)} = \{x\}$. Segue então da hipótese de indução ou do parágrafo anterior que se $x \in X$, então $\mathrm{cl}_\tau(U_x)_\delta$ é um subespaço metacompacto de X_δ. Agora, a cobertura aberta de X

$$\mathcal{U} = \{\, U_x : x \in X \,\}$$

tem um refinamento aberto e pontualmente finito de $\mathcal{V}$ em X.

Agora, dada uma cobertura aberta $\mathscr{C}$ de X_δ, podemos escolher, para cada $V \in \mathcal{V}$, um refinamento parcial, aberto e pontualmente finito $\mathscr{C}_V$ de $\mathscr{C}$ em $\mathrm{cl}_\tau(V)_\delta$ que cobre $\mathrm{cl}_\tau(V)_\delta$. É fácil ver que a família

$$\{\, V \cap C : V \in \mathcal{V} \text{ e } C \in \mathscr{C}_V \,\}$$

é um refinamento aberto e pontualmente finito de $\mathscr{C}$ em X_δ. ∎

A demonstração do próximo teorema é devido à professora Ofélia T. Alas.

Teorema 2.1.8. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço regular, disperso e linearmente Lindelöf, então $X_\delta = \langle X, \tau_\delta \rangle$ é um espaço linearmente Lindelöf.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = \{\, U_\alpha : \alpha < \kappa \,\}$ uma cobertura aberta de X_δ de cardinalidade regular $\kappa > \aleph_0$. Defina

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathrm{int}_\tau \left(\bigcup \{\, U_\beta : \beta \leq \alpha \,\} \right) : \alpha < \kappa \right\}$$

e

$$O = \left\{ x \in X : \text{existe } \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \text{ tal que } |\mathcal{V}| < \kappa \text{ e } x \in \mathrm{int}_\tau \left(\bigcup \mathcal{V} \right) \right\}.$$

Fato. $X = O$.

Prova do fato. Suponhamos o contrário, isto é, $O \neq X$. Como $\langle X, \tau \rangle$ um espaço regular e disperso, existem $y \in X \setminus O$ e W vizinhança fechada de y em $\langle X, \tau \rangle$ tais que

$$W \cap (X \setminus O) = \{y\}.$$

Logo,

$$W \subseteq O \cup \{y\}.$$

Sejam $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U$ e $\{\Omega_n\}_{n\in\omega} \subseteq \tau$ tal que $U = \bigcap_{n\in\omega} \Omega_n$. Assim,

$$W \setminus \bigcap_{n\in\omega} \Omega_n = \bigcup_{n\in\omega} (W \setminus \Omega_n).$$

Cada $W \setminus \Omega_n$ é um fechado de $\langle X, \tau\rangle$ e, portanto, linearmente Lindelöf. Além disso, $W \setminus \Omega_n \subseteq O$; isto implica que $\mathcal{M}$ é uma cobertura de aberta de $W \setminus \Omega_n$ em $\langle X, \tau\rangle$ e, portanto, admite subcobertura $\mathcal{M}_n$ de cardinalidade $< \kappa$. Logo, $\{U\} \cup \bigcup \{\, \mathcal{M}_n : n \in \omega \,\}$ é uma subfamília de $\mathcal{U}$ de cardinalidade $< \kappa$ que cobre W. Como W é uma vizinhança de y, segue que $y \in O$, uma contradição. ◀

Como $X = O$, $\mathcal{M}$ é cobertura aberta de $\langle X, \tau\rangle$ e como $\langle X, \tau\rangle$ é linearmente Lindelöf admite subcobertura de cardinalidade $< \kappa$. Seja $\lambda < \kappa$ tal que

$$\bigcup_{\alpha<\lambda} \operatorname{int}_\tau \left(\bigcup_{\beta\leq\alpha} U_\beta \right) = X.$$

Logo,

$$\bigcup_{\alpha<\lambda} \left(\bigcup_{\beta\leq\alpha} U_\beta \right) = X \quad \text{e} \quad |\{\, U_\beta : \beta < \lambda \,\}| < \kappa.$$ ∎

2.2 Algumas generalizações de disperso

Definição 2.2.1. Um espaço X é **κ-disperso** se, para todo subconjunto fechado F de X, existe $p \in F$ tal que $\chi(p, F) < \kappa$.

Definição 2.2.2. Um espaço X é **fortemente κ-disperso** se, e somente se, para todo subconjunto não-vazio A de X, existem um ponto $x \in A$ e uma vizinhança aberta U_x de x tal que $|U_x \cap A| < \kappa$.

Todo espaço disperso é fortemente $\aleph_1$-disperso, mas a recíproca não é verdadeira: o conjunto dos racionais munido da topologia usual é fortemente $\aleph_1$-disperso mas não é disperso.

Definição 2.2.3 (Hdeib e Pareek [14])**.** Dado um espaço topológico $\langle X, \tau\rangle$, denotamos por τ_ω a topologia sobre X que tem como base:

$$\{\, U \setminus E : U \in \tau \text{ e } E \text{ é um subconjunto enumerável de } X \,\}.$$

É fácil ver que:

Lema 2.2.4 (Hdeib e Pareek [14])**.** *$\langle X, \tau\rangle$ é de Lindelöf se, e somente se, $\langle X, \tau_\omega\rangle$ é de Lindelöf.*

Lema 2.2.5 (Hdeib e Pareek [14])**.** *$\langle X, \tau\rangle$ é um espaço fortemente $\aleph_1$-disperso se, e somente se, $\langle X, \tau_\omega\rangle$ é disperso.*

Teorema 2.2.6 (Hdeib e Pareek [14, teorema 3.12])**.** *Se $\langle X, \tau\rangle$ é um espaço de Lindelöf, regular e fortemente $\aleph_1$-disperso, então $\langle X, \tau_\delta\rangle$ é um espaço de Lindelöf.*

Demonstração. Pelo lemas 2.2.4 e 2.2.5, $\langle X, \tau_\omega \rangle$ é um espaço de Lindelöf, regular e disperso. Logo, pelo teorema 2.1.3, $\langle X, (\tau_\omega)_\delta \rangle$ é um espaço de Lindelöf. Mas, $(\tau_\omega)_\delta = \tau_\delta$. ∎

Lema 2.2.7. *$\langle X, \tau \rangle$ é linearmente Lindelöf se, e somente se, $\langle X, \tau_\omega \rangle$ é linearmente Lindelöf.*

Teorema 2.2.8. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço linearmente Lindelöf, regular e fortemente $\aleph_1$-disperso, então $\langle X, \tau_\delta \rangle$ é um espaço linearmente Lindelöf.*

Demonstração. Pelos lemas 2.2.5 e 2.2.7, $\langle X, \tau_\omega \rangle$ é um espaço linearmente Lindelöf, regular e disperso. Logo, pelo teorema 2.1.8, $\langle X, (\tau_\omega)_\delta \rangle$ é um espaço linearmente Lindelöf. Mas, $(\tau_\omega)_\delta = \tau_\delta$. ∎

Definição 2.2.9. Um espaço X é **α-disperso** se, e somente se, o conjunto de todos os pontos isolados de X é denso.

Definição 2.2.10. Um espaço X é **N-disperso** se todo subconjunto raro de X é um subespaço disperso de X.

Teorema 2.2.11 (Rose [15])**.** *Um espaço X é disperso se, e somente se, X é α-disperso e N-disperso.*

Exemplo 2.2.12. Um espaço regular, de Lindelöf e α-disperso cujo G_δ-refinamento não é de Lindelöf.

Seja τ a topologia usual sobre $\mathbb{R}$. Seja ρ a topologia sobre $\mathbb{R}$ gerada por $\wp(\mathbb{Q}) \cup \tau$. Note que $\langle \mathbb{R}, \rho \rangle$ é α-diperso, regular e de Lindelöf, mas $\langle \mathbb{R}, \rho_\delta \rangle$ não é de Lindelöf, uma vez que é discreto.

Spadaro observou o seguinte:

Exemplo 2.2.13. Assumindo *CH*, existe um espaço de Lindelöf N-disperso cujo G_δ-refinamento não é de Lindelöf.

Seja $\mathcal{M}$ a família de todos os subconjuntos Lebesgue mensuráveis da reta real. Para cada $E \in \mathcal{M}$, defina

$$\Phi(E) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{m\left(E \cap \left]x-h, x+h\right[\right)}{2h} = 1 \right\}.$$

Então,

$$\tau_d = \{ E \in \mathcal{M} : E \subseteq \Phi(E) \}$$

é uma topologia sobre $\mathbb{R}$ mais forte que a usual, comumente chamada de *topologia da densidade*. Denote por $\mathbb{R}_d$ o espaço topológico $X = \langle \mathbb{R}, \tau_d \rangle$. Pelo corolário 4.3 de [16], X possui um subespaço hereditariamente Lindelöf, não-separável, regular e de Baire Y. Pelo teorema 2.7 de [16], todo subconjunto raro de Y é discreto (e fechado). Assim, Y é N-disperso. Por outro lado, o pseudocaráter de Y é enumerável, uma vez que Y é T_2 e hereditariamente Lindelöf. Então, Y_δ é discreto e não-enumerável e, portanto, não é de Lindelöf.

Definição 2.2.14. Um espaço é **σ-disperso** se ele é união de uma família enumerável de dispersos.

O conjunto dos racionais munido da topologia usual e a reta de Michael são exemplos de espaços σ-dispersos que não são dispersos.

Exemplo 2.2.15 (Barr et al. [17])**.** Assumindo *CH*, existe um espaço regular, de Lindelöf e σ-disperso cujo G_δ-refinamento não é de Lindelöf.

De fato, seja $\mathbb{R}_\nu$ o conjunto dos números reais munido da topologia cuja base é dada por:

$$\{\,\{x\} : x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,\} \cup \{\,]a,b[\setminus D : a < b \text{ e } D \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ é enumerável}\,\}.$$

Seja $\{\,\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \omega_1\,\}$ uma enumeração de todas as famílias enumeráveis que cobrem $\mathbb{Q}$ e são constituídas de abertos básicos. Note que cada $\bigcup\mathcal{B}_\alpha$ é um subespaço denso e G_δ da reta real.

Por indução transfinita, vamos construir uma sequência de irracionais $\langle\, t_\alpha : \alpha < \omega_1\,\rangle$. Seja t_0 um irracional qualquer. Suponha que tenhamos escolhidos t_β, para todo $\beta < \alpha$. Visto que, para cada $\beta < \alpha$, $\bigcup\mathcal{B}_\beta$ é um subespaço denso e G_δ de $\mathbb{R}$, e $\alpha < \omega_1$, segue que $\bigcap\{\,\bigcup\mathcal{B}_\beta : \beta < \alpha\,\}$ é um subespaço denso e G_δ de $\mathbb{R}$ e, portanto, não enumerável. Então, podemos escolher

$$t_\alpha \in \left(\bigcap_{\beta<\alpha}\bigcup\mathcal{B}_\beta\right) \setminus (\{\, t_\beta : \beta < \alpha\,\} \cup \mathbb{Q}).$$

Por fim, seja

$$X = \mathbb{Q} \cup \{\, t_\alpha : \alpha < \omega_1\,\}$$

munido da topologia herdada de $\mathbb{R}_\nu$.

X é um espaço de Lindelöf. De fato, seja $\mathcal{O}$ uma família de de abertos básicos de $\mathbb{R}_\nu$ que cobre X. Visto que $\mathcal{O}$ cobre $\mathbb{Q}$, $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{O}$ para algum α. Por construção, temos $t_\gamma \in \bigcup\mathcal{B}_\alpha$, para todo $\gamma > \alpha$. Portanto, $\mathcal{B}_\alpha$ juntamente com uma subfamília enumerável de $\mathcal{O}$ que cobre $\{\, t_\beta : \beta \leq \alpha\,\}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{O}$.

Como X_δ é um espaço discreto não-enumerável e, portanto, não pode ser de Lindelöf.

Na verdade, Barr et al. mostraram em [17] que X_δ não é nem mesmo um espaço de Alster.

Definição 2.2.16 (Henriksen et al. [13])**.** Um ponto x de um espaço topológico X é chamado de **P-ponto forte** se x tem uma vizinhança consistindo de P-pontos. O conjunto de todos os P-pontos fortes de X é denotado por $SP(X)$.

Note que $SP(X) = \operatorname{int}_X\{\, x \in X : x \text{ é um } P\text{-ponto}\,\}$.

Definição 2.2.17 (Henriksen et al. [13])**.** Recursivamente, defina:

(1) $S_0(X) = X$ e $S_1(X) = X \setminus SP(X)$;

(2) $S_{\alpha+1}(X) = S_1(S_\alpha(X))$, se α é um ordinal ≥ 1;

(3) $S_\lambda(X) = \bigcap\{\, S_\alpha(X) : \alpha < \lambda\,\}$, se λ é um ordinal limite.

Definição 2.2.18 (Henriksen et al. [13])**.** Um espaço X é **SP-disperso** se existe um ordinal δ tal que $S_\delta(X) = \emptyset$.

Teorema 2.2.19 (Henriksen et al. [13])**.** *Se X é um espaço de Lindelöf e SP-disperso, então X_δ é de Lindelöf.*

Teorema 2.2.20 (Henriksen et al. [13])**.** *Se X é um espaço paracompacto e SP-disperso, então X_δ é paracompacto.*

Problema 1 (Henriksen et al. [13])**.** Se X é metacompacto e SP-disperso, então X_δ é metacompacto?

Capítulo 3

Preservação da propriedade de Lindelöf por submodelos elementares

Em aplicações de submodelos elementares à topologia, geralmente consideramos um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ e um submodelo elementar conveniente M, com $\{X, \tau\} \subseteq M$, e então derivamos propriedades de X através de uma "versão M de X". O candidato mais natural a este papel seria o par $\langle X \cap M, \tau \cap M \rangle$. Porém, em muitos casos, $\tau \cap M$ não é uma topologia, haja vista que, em geral, uniões arbitrárias de elementos de $\tau \cap M$ não estão em M. Contudo, $\tau \cap M$ é uma base para uma topologia sobre X. Assim, continuando os estudos feitos em [3, 4, 21], trabalharemos com o espaço topológico $X_M = \langle X \cap M, \tau_M \rangle$, onde τ_M é a topologia gerada por $\{\, U \cap M : U \in \tau \cap M \,\}$. Podemos, então, definir a operação de tomar um espaço X e um submodelo elementar M, com $X \in M$, e considerar o espaço X_M. Nosso foco neste capítulo é estudar a propriedade de Lindelöf com relação a esta operação.

3.1 Definições e teoremas básicos

Definição 3.1.1. Dizemos que um submodelo elementar M é **enumeravelmente fechado** se $[M]^{\aleph_0} \subseteq M$.

Definição 3.1.2. Dado um cardinal κ, dizemos que um submodelo elementar M é ***κ-covering*** se, para todo subconjunto $X \in [M]^{\leq \kappa}$, existe $Y \in M$ de cardinalidade κ tal que $X \subseteq Y$.

Teorema 3.1.3 (Vide [18])**.** *Sejam κ um cardinal infinito e A um conjunto de cardinalidade $\leq \kappa$. Então, existe um submodelo elementar κ-covering M de cardinalidade $\leq \kappa^+$ tal que $A \subseteq M$.*

Lema 3.1.4 (Passos [19])**.** *Se κ é um cardinal infinito e M é um submodelo elementar κ^+-covering, com $|M| > \kappa$ e $\kappa \in M$, então M é κ-covering.*

Teorema 3.1.5 (Levi [20])**.** *Se M é um submodelo elementar κ-covering e $\kappa \cup \{\kappa\} \subseteq M$, então $\kappa^+ \subseteq M$.*

Teorema 3.1.6 (Junqueira [21])**.** *CH é equivalente a "todo submodelo elementar ω-covering é enumeravelmente fechado".*

Teorema 3.1.7 (Passos [19])**.** *Seja κ um cardinal. São equivalentes:*

(1) *Existe submodelo elementar ω-covering de cardinalidade κ;*

(2) $\mathbf{Cov}_\omega(\kappa) = \kappa$.

Dizemos que uma propriedade topológica Φ é **preservada por uma classe $\mathcal{M}$ de submodelos elementares**, se, para todo todo espaço topológico X satisfazendo Φ e todo submodelo elementar $M \in \mathcal{M}$, com $X \in M$, X_M também satisfaz Φ.

Teorema 3.1.8 (Junqueira e Tall [3])**.** *Se X é T_i, com $i \leq 3\frac{1}{2}$, então X_M também o é.*

Lema 3.1.9 (Tall [22])**.**

(1) *Se X_M é de Hausdorff, então X é de Hausdorff.*

(2) *Se X_M é regular, então X é regular.*

3.2 Dispersos

O próximo exemplo nos mostra que mesmo se X é um compacto e M é enumeravelmente fechado, X_M pode não ser nem mesmo de Lindelöf.

Exemplo 3.2.1 (Junqueira e Tall [3])**.** Seja $X = 2^\kappa$ munido da topologia usual, onde $\kappa^\omega = \kappa$. Fixe um submodelo elementar M tal que $[M]^\omega \subseteq M$, $|M| = \kappa$, $X \in M$, $\kappa \cup \{\kappa\} \subseteq M$ e existe um denso de X contido em M.

X_M é um subespaço de X. De fato, para cada função parcial p de κ em X, seja

$$[p] = \{\, f \in X : p \subseteq f \,\}.$$

Se p é parte finita de uma função $f \in X \cap M$, então $p \in M$; como $[p]$ é definível a partir de p, $X \in M$, temos que $[p] \in M$.

X_M não é compacto. De fato, como $|X \cap M| \leq \kappa < 2^\kappa = |X|$, temos que $X \cap M \subsetneq X$. Visto que M tem como subconjunto um subconjunto denso de X, $X \cap M$ é denso em X e, assim, não pode ser um subespaço fechado de X. Portanto, X_M não é um subespaço compacto de X.

X_M não é de Lindelöf. De fato, pelo teorema 4.2 de [3]*, X_M é enumeravelmente compacto. Assim, se X_M fosse de Lindelöf, X_M seria compacto, contradizendo o parágrafo anterior.

Teorema 3.2.2 (Junqueira e Tall [4])**.** *Se $\langle X, \tau\rangle$ um espaço compacto, T_2 e disperso, então X_M é compacto.*

Notação 1. Sejam $\langle X, \tau\rangle$ um espaço topológico e M um submodelo elementar. Para cada $x \in X \cap M$,

$$\Omega_x = \Omega_X(x) = \Omega_{X,M}(x) = \bigcap \{\, V \in \tau \cap M : x \in V \,\}.$$

$$\Omega = \Omega(X) = \Omega_M(X) = \{\, \Omega_x : x \in X \cap M \,\}.$$

A demonstração do lema abaixo é análoga àquela do teorema 3.2.2.

* Se X é enumeravelmente compacto e M é um submodelo enumeravelmente fechado, então X_M é enumeravelmente compacto.

Lema 3.2.3. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço de Lindelöf, T_2, disperso e zero-dimensional, então*

$$\Omega = \{ \Omega_x : x \in X \cap M \}$$

é uma partição de X.

Demonstração. Sejam x, $y \in X \cap M$, com $x \neq y$. Pelo Critério de Tarski-Vaught, existem vizinhanças abertas e disjuntas V_x, $V_y \in M$ de x e y, respectivamente. Daí, $\Omega_x \cap [y] = \emptyset$.

Resta então mostrar que $X = \bigcup \Omega$. Como X é disperso e 0-dimensional, existem um ordinal $\delta \in M$ e duas sequências $\langle x_\alpha : \alpha < \delta \rangle$, $\langle U_\alpha : \alpha < \delta \rangle \in M$ tais que $X = \{ x_\alpha : \alpha < \delta \}$ e cada U_α é uma vizinhança aberta-fechada de x_α, com $U_\alpha \cap \{x_\beta : \alpha < \beta < \delta\} = \emptyset$.

Fixe $\alpha < \delta$ arbitrariamente. Se $\alpha \in M$, então $x_\alpha \in M$ e, portanto, $x_\alpha \in \bigcup \{ \Omega_x : x \in X \cap M \}$. Suponha então que $\alpha \notin M$. Como $\bigcup \{ U_\gamma : \gamma < \delta \} = X$, que é de Lindelöf, existe $E \in M \cap [\delta]^{\leq \aleph_0}$ tal que $\bigcup \{ U_\gamma : \gamma \in E \} = X$. De $E \in M$ e $|E| \leq \aleph_0$ segue que $E \subseteq M$. Logo, existe $\gamma \in E \subseteq M$ tal que $x_\alpha \in U_\gamma$. Assim, pode-se definir

$$\beta = \min \{ \gamma \in \delta \cap M : x_\alpha \in U_\gamma \}.$$

A fim de mostrar que $x_\alpha \in \Omega_{x_\beta}$, seja $W \in \tau_{x_\beta} \cap M$. Como X é de Lindelöf e U_β um aberto-fechado, por elementaridade, existe $E \in M \cap [\beta]^{\leq \aleph_0}$ tal que $U_\beta \setminus W \subseteq \bigcup \{ U_\gamma : \gamma \in E \}$. Assim, $V = U_\beta \setminus \bigcup \{ U_\gamma : \gamma \in E \} \subseteq W$ e $E \subseteq \beta \cap M$. Como V é definível a partir de parâmetros em M, segue que $V \in M$. Pela definição de β, segue que $x_\alpha \notin U_\gamma$ para todo $\gamma \in \beta \cap M$. Logo, $x_\alpha \notin U_\gamma$ para todo $\gamma \in E$. Assim, $x_\alpha \in V \subseteq W$. Portanto, $x_\alpha \in [x_\beta]$. ∎

Lema 3.2.4. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço de Lindelöf, regular e fortemente $\aleph_1$-disperso, então*

$$\{ \Omega_x : x \in X \cap M \}$$

é uma partição de X.

Demonstração. Como τ_δ é definível a partir dos parâmetros τ, $\omega \in M$, segue que $\tau_\delta \in M$. Além disso, pelos teorema 2.2.6 e lema 2.2.5, X_δ é um P-espaço regular — e, portanto, 0-dimensional — , diperso e de Lindelöf. Logo, pelo lema 3.2.3, $\Omega(X_\delta)$ é uma partição de X. Por elementaridade, para cada $x \in X \cap M$, $\Omega_{X,M}(x) \subseteq \Omega_{X_\delta,M}(x)$. Daí, $\bigcup \Omega(X) \supseteq \bigcup \Omega(X_\delta) = X$. ∎

Segue imediatamente do lema 3.2.4 que:

Teorema 3.2.5. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço de Lindelöf, regular e fortemente $\aleph_1$-disperso, então X_M é de Lindelöf, para todo submodelo M tal que $\{X, \tau\} \subseteq M$.*

Em geral, sob as hipóteses do teorema acima, não é verdade que $X \cap M$ é de Lindelöf: considere o espaço $(\omega_2 + 1)_\delta$ e um submodelo elementar ω-*covering* M de cardinalidade $\aleph_1$. Sabemos que $(\omega_2 + 1)_\delta$ é um espaço de Lindelöf, regular e disperso. Agora, como M tem cardinalidade $\aleph_1$, $\sup(\omega_2 \cap M) < \omega_2$ e, portanto, o ponto ω_2 é isolado em $(\omega_2 + 1)_\delta$. Assim, se $(\omega_2 + 1)_\delta \cap M$ for um espaço de Lindelöf, então $(\omega_2)_\delta \cap M$ e, consequentemente, $((\omega_2)_\delta)_M$ será um espaço de Lindelöf; daí, como M é ω-*covering*, segue que $(\omega_2)_\delta$ será um espaço de Lindelöf.

Lema 3.2.6. *Sejam X um P-espaço regular, de Lindelöf e disperso e M um submodelo ω-covering. Então X_M é um subespaço de X se, e somente se, $X \cap M$ é fechado.*

Demonstração. Necessidade. Pelo teorema 3.2.5, X_M é um subespaço de Lindelöf de um P-espaço T_2 e, portanto, é fechado.

Suficiência. Pelos lema 3.3.1 e teorema 3.2.5, X_M é um P-espaço de Lindelöf cuja topologia está contida na topologia do subespaço $X \cap M$ que é fechado e, portanto, um P-espaço regular e de Lindelöf. Portanto, pelo lema 1.4.20, X_M é um subespaço de X. ∎

Teorema 3.2.7. *Seja $\langle X, \tau\rangle$ um espaço disperso e regular. São equivalentes:*

(a) *X é de Lindelöf.*

(b) *X_M é de Lindelöf, para todo submodelo elementar M, com $\{X, \tau\} \subseteq M$.*

(c) *X_M é de Lindelöf, para todo submodelo elementar M ω-covering, com $\{X, \tau\} \subseteq M$.*

(d) *X_M é de Lindelöf, para algum submodelo elementar M ω-covering, com $\{X, \tau\} \subseteq M$.*

Demonstração. Segue do teorema 3.2.5 que (a) implica (b). A implicação $(d) \to (a)$ segue do teorema 3.5.5. Por fim, as implicações $(b) \to (c)$ e $(c) \to (d)$ são imediatas. ∎

Pode-se perguntar se existe uma versão do teorema 3.2.5 para a propriedade linear de Lindelöf. Um caminho a se considerar, considerando que o G_δ-refinamento de um espaço regular, disperso e linearmente de Lindelöf é linearmente Lindelöf — vide teorema 2.1.8 — , seria mostrar que o seguinte problema tem solução positiva:

Problema 2. Se X é um P-espaço linearmente Lindelöf, regular e disperso então X_M é linearmente Lindelöf para todo submodelo ω-*covering* M?

Agora, suponha que a pergunta acima tenha resposta positiva. Então, dados um espaço X linearmente Lindelöf, regular e disperso e um submodelo ω-*covering* M de cardinalidade $< \aleph_\omega$, segue que X_M é linearmente Lindelöf e, portanto, de Lindelöf, uma vez que $|X \cap M| < \aleph_\omega$. Daí, pelo teorema 3.5.5, X é um espaço de Lindelöf. Sendo assim,

Corolário 3.2.8. *Se X é um espaço linearmente Lindelöf, regular e disperso, então X é de Lindelöf se, e somente se, X_M é linearmente Lindelöf para algum submodelo elementar ω-covering M de cardinalidade $< \aleph_\omega$.*

Problema 3. Existe um (P-) espaço linearmente Lindelöf, regular e disperso que não é de Lindelöf?

3.3 P-espaços

Lema 3.3.1. *Se M é um submodelo ω-covering tal que $\langle X, \tau \rangle \in M$, então*

$$(X_\delta)_M = (X_M)_\delta.$$

Em particular, se X é um P-espaço, então X_M é um P-espaço.

Demonstração. É suficiente mostrar que $(\tau_\delta)_M = (\tau_M)_\delta$. Sejam $U \in (\tau_\delta)_M$ e $x \in U$. Então, existe $V \in \tau_\delta \cap M$ tal que $x \in V \cap M \subseteq U$. Como $V \in \tau_\delta$, existe $\mathcal{V}$ tal que

$$\varphi(\omega, \tau, V, \mathcal{V}) \equiv \mathcal{V} \subseteq \tau \;\wedge\; \mathcal{V} \text{ é enumerável} \;\wedge\; V = \bigcap \mathcal{V}.$$

Visto que os parâmetros ω, τ e V estão em M, existe $\mathcal{V}$ em M tal que $\varphi(\omega, \tau, V, \mathcal{V})$. Mas, como $\mathcal{V}$ é enumerável, $\mathcal{V} \subseteq \tau \cap M$. Daí, $V \cap M = \bigcap \mathcal{V} \cap M \in (\tau_M)_\delta$. Portanto, $U \in (\tau_M)_\delta$.

Agora, sejam $U \in (\tau_M)_\delta$ e $x \in U$. Então, existe $\mathcal{U} \subseteq \tau \cap M$ enumerável tal que $x \in \bigcap \mathcal{U} \cap M \subseteq U$. Como M é ω-*covering*, existe $\mathcal{V} \in M$ enumerável tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Como x e τ estão em M, podemos supor que $\mathcal{V} \subseteq \tau_x$. Logo, $\bigcap \mathcal{V} \in M \cap \tau_\delta$ e $x \in \bigcap \mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathcal{U}$. Portanto, $U \in (\tau_\delta)_M$. ∎

Lema 3.3.2. *Se X_M é um P-espaço, então X é um P-espaço.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existam $x \in X$ e $\mathcal{V} \subseteq \tau_x$ tais que

$$\varphi(x, \mathcal{V}) \equiv \mathcal{V} \subseteq \tau_x \;\wedge\; \mathcal{V} \text{ é enumerável} \;\wedge\; \forall U \in \tau_x \left(U \setminus \bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset \right).$$

Pelo Critério de Tarski-Vaught, existem x, $\mathcal{V} \in M$ tais que $\varphi(x, \mathcal{V})$. Como $\mathcal{V} \in M$ é enumerável, $\mathcal{V} \subseteq M$. Resta, então, mostrar que $U \cap M \nsubseteq \bigcap \mathcal{V}$, para todo $U \in \tau_x \cap M$. Seja $U \in \tau_x \cap M$. Então, por hipótese, $V \models \exists y \in U \setminus \bigcap \mathcal{V}$. Como os parâmetros U, $\mathcal{V} \in M$, por elementaridade, existe $y \in (U \cap M) \setminus \bigcap \mathcal{V}$. ∎

A prova do próximo lema está inclusa na prova da proposição 3.4 de [2].

Lema 3.3.3. *Seja X é um P-espaço de Lindelöf e regular cujo tightness é $\aleph_1$ e todo subespaço de cardinalidade $\leq \aleph_1$ tem caráter $\leq \aleph_1$. Então, X_M é um subespaço de X, para todo submodelo elementar ω_1-covering M.*

Demonstração. A fim de mostrar que $\tau \cap M$ induz a topologia de subespaço sobre $X \cap M$, sejam $x \in X \cap M$ e U uma vizinhança aberta de x. Suponha, por absurdo, que $(V \cap M) \setminus U \neq \emptyset$ para todo $V \in \tau_x \cap M$. Usando o fato de que X é um P-espaço de Lindelöf e M é ω-*covering*, podemos escolher

$$z \in \bigcap \left\{ \operatorname{cl}((V \cap M) \setminus U) : V \in \tau_x \cap M \right\}.$$

Como $t(X) = \omega_1$, existe $D \subseteq (X \cap M) \setminus U$ de cardinalidade $\aleph_1$ tal que $z \in \operatorname{cl}(D)$. Visto que M é ω_1-*covering*, existe $E \in M$ de cardinalidade $\aleph_1$ tal que $D \subseteq E$. Então, $M \models$ "$\chi(E \cup \{x\}) \leq \omega_1$". Logo, existe uma vizinhança aberta $V_x \in M$ de x tal que $V_x \cap E \subseteq U$, o que implica que $V_x \cap D = \emptyset$.

Da regularidade de X segue que existe uma vizinhança aberta $W_x \in M$ de x tal que $\mathrm{cl}(W_x) \subseteq V_x$ e, portanto, $\mathrm{cl}(W_x) \cap \mathrm{cl}(D) = \emptyset$, contradizendo o fato de que $z \in \mathrm{cl}(W_x) \cap \mathrm{cl}(D)$. ∎

Exemplo 3.3.4. Juhász e Weiss mostraram em [23] que se existe uma árvore de Kurepa sem subárvores de Aronszajn, então existe um P-espaço de Lindelöf linearmente ordenado E cujos peso é $\aleph_1$ e cardinalidade é $> \aleph_1$. Agora, note que para qualquer submodelo elementar ω-*covering* M de cardinalidade $\aleph_1$, com $E \in M$, E_M não é de Lindelöf. De fato, como $w(E) = \aleph_1 \subseteq M$, E_M é um subespaço denso de E de cardinalidade $\aleph_1 < |E|$. Logo, E_M não é fechado e, portanto, não pode ser de Lindelöf.

Observação 3.3.5. Fazendo uso do colapso de Levy de um cardinal mensurável para $\aleph_2$ com condições enumeráveis, todo espaço de Lindelöf indestrutível cujo pseudocaráter é $\leq \aleph_1$ tem cardinalidade $\leq \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Portanto, visto que todo P-espaço de Lindelöf é indestrutível, segue que dado um P-espaço de Lindelöf X cujo pseudocaráter é $\leq \aleph_1$, $X_M = X$ para todo submodelo elementar ω-*covering*.

Problema 4. Existe, em *ZFC*, um P-espaço regular e de Lindelöf X e um submodelo elementar ω-*covering* M tal que X_M não é de Lindelöf?

Observação 3.3.6. Um espaço X é **fracamente Whyburn** se, e somente se, para todo subespaço não-fechado $A \subseteq X$, existe um subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\mathrm{cl}(B) \setminus B = \{x\}$ para algum $x \in \mathrm{cl}(A) \setminus A$. É bem conhecido o fato de que todo espaço disperso e regular é fracamente Whyburn. Mas, o exemplo anterior mais o fato de que todo P-espaço de Lindelöf e T_2 cujo pseudocaráter é $\leq \omega_1$ é fracamente Whyburn — vide corolário 2.8 de [24] — implicam que a hipótese de ser disperso não pode ser enfraquecida pela de ser fracamente Whyburn no teorema 3.2.5.

3.4 σ-produtos

Definição 3.4.1. Dadas uma família de espaços topológicos $\{ X_i : i \in I \}$ e um ponto $x^* \in X = \prod \{ X_i : i \in I \}$,

$$\sigma = \sigma(X, x^*) = \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i : \mathrm{supp}(x) \text{ é finito} \right\},$$

onde $\mathrm{supp}(x) = \{ i \in I : x(i) \neq x^*(i) \}$.

O **σ-produto de X em x^*** é o espaço $\langle \sigma, \tau \rangle$, onde τ é a topologia de subespaço induzida pelo produto de Tychonoff $\prod \{ X_i : i \in I \}$.

Lema 3.4.2. *Dados uma família de espaços topológicos $\{ X_i : i \in I \}$, $x^* \in X = \prod \{ X_i : i \in I \}$ e um submodelo elementar M,*

$$\sigma(X, x^*)_M \text{ é homeomorfo à } \sigma(X \restriction M, x^* \restriction (\kappa \cap M)),$$

onde $X \restriction M = \prod \{ (X_i)_M : i \in I \cap M \}$.

Demonstração. Considere a função $\pi \colon \sigma(X, x^*)_M \to \sigma(X \restriction M, x^*)$, onde $f \mapsto f \restriction M$.

π é sobrejetora. De fato, seja $g \in \sigma(X \upharpoonright M, x^*)$. Como o suporte de g é um subconjunto finito de M, segue que $\operatorname{supp}(g) \in M$. Visto que $\operatorname{Im}(g) \subseteq M$, pelo Critério de Tarski-Vaught, existe $f \in \sigma_M$ tal que $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(g)$ e $f \upharpoonright \operatorname{supp}(f) = g \upharpoonright \operatorname{supp}(g)$. Note que $\pi(f) = f \upharpoonright M = g$.

π é injetora. Sejam $f,\ f' \in \sigma_M$ tais que $f \neq f'$. Pelo Critério de Tarski-Vaught, existe $i \in I \cap M$ tal que $f(i) \neq f'(i)$. Logo, $f \upharpoonright M \neq f' \upharpoonright M$.

π é contínua. Seja V um aberto básico de $\sigma(X \upharpoonright M, x^*)$. Então, existem $F \in [I]^{<\aleph_0} \cap M$ e V_i aberto básico de $(X_i)_M$, $i \in F$, tais que

$$V = \prod_{i \in F} V_i \times \prod_{i \in M \setminus F} (X_i)_M.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}[V] &= \{ f \in \sigma \cap M : f \upharpoonright M \in V \} \\
&= \{ f \in \sigma \cap M : f(i) \in V_i,\ i \in F \} \\
&= \left(\prod_{i \in F} V_i \times \prod_{i \in I \setminus F} X_i \right) \cap \sigma \cap M.
\end{aligned}$$

Mas, isto é um aberto em σ_M, uma vez que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F} \subseteq M$ implica que $\prod_{\alpha \in F} V_\alpha \times X^{\kappa \setminus F} \in M$.

π^{-1} é contínua. Sejam V um aberto de σ_M e $f \in V \cap M$. Por elementaridade, existem $F \in [I]^{<\aleph_0} \cap M$ e, para cada $i \in F$, um aberto V_i de $(X_i)_M$, tais que

$$f \in \left(\prod_{i \in F} V_i \times \prod_{i \in I \setminus F} X_i \right) \cap \sigma \cap M \subseteq V.$$

Assim,

$$\pi^{-1}\left[\left(\prod_{i \in F} V_i \times \prod_{i \in M \setminus F} X_i \right) \cap \sigma(X \upharpoonright M, p) \right] = \left(\prod_{i \in F} V_i \times \prod_{i \in I \setminus F} X_i \right) \cap \sigma \cap M. \qquad \blacksquare$$

Lema 3.4.3 (Juhász et al. [25])**.** *Se $\{ X_i : i \in I \}$ é uma família de P-espaços de Lindelöf e $x^* \in X = \prod \{ X_i : i \in I \}$, então*

$$\sigma(X, x^*)_\delta \ \text{ é de Lindelöf.}$$

Lema 3.4.4. *Se $\{ X_i : i \in I \}$ é uma família de espaços de Lindelöf, dispersos e regulares, $x^* \in X = \prod \{ X_i : i \in I \}$ e M é um submodelo elementar ω-covering, então*

$$\left(\sigma(X, x^*)_\delta\right)_M \ \text{ é de Lindelöf.}$$

Demonstração. Em primeiro lugar, note que $\sigma(X, x^*)_\delta = \sigma(\prod_{i \in I} (X_i)_\delta, x^*)_\delta$. Agora, pelo teorema 2.1.3, cada $Z_i = (X_i)_\delta$ é um P-espaço, disperso e de Lindelöf. Assim, do lema 3.3.1 segue que cada $(Z_i)_M$ é um P-espaço de Lindelöf. Daí, pelos lemas 3.3.1 e 3.4.2,

$$(\sigma(X, x^*)_M)_\delta = \left(\sigma\left(\prod_{i\in I} Z_i, x^*\right)_\delta\right)_M = \left(\sigma\left(\prod_{i\in I} Z_i, x^*\right)_M\right)_\delta \simeq \sigma\left(\prod_{i\in I\cap M}(Z_i)_M, x^*\right)_\delta.$$

Do lema 3.4.3, segue o resultado. ∎

Em [25], Juhász et al. provam:

Teorema 3.4.5. *Sejam A um conjunto não enumerável e $p \notin A$. Considere o espaço $X = A \cup \{p\}$, onde cada ponto de A é isolado e subconjuntos coenumeráveis de X são abertos. Então,*

$$t(\sigma(X^\kappa, p)_\delta) = \aleph_1.$$

Problema 5 (Juhász et al. [25])**.** Se X é P-espaço de Lindelöf cujo tightness é $\aleph_1$, então, dados um cardinal κ e um ponto $x^* \in X^\kappa$,

$$t(\sigma(X^\kappa, p)_\delta) = \aleph_1\,?$$

Proposição 3.4.6. *Sejam X um espaço e $n \in \omega$ tal que X_M é um subespaço de X para todo submodelo elementar ω_n-covering de cardinalidade $\aleph_{n+1}$. Então, dados um cardinal λ e um ponto $x^* \in X^\lambda$,*

$$t\left(\sigma\left(X^\lambda, x^*\right)_\delta\right) \leq \aleph_{n+1}.$$

Demonstração. Note que $\sigma\left(X^\lambda, x^*\right)_\delta = \sigma\left(X_\delta^\lambda, x^*\right)_\delta$ e "X_M é um subespaço de X" implica "$(X_\delta)_M$ é um subespaço de X_δ", para todo submodelo elementar ω_n-*covering* M. Podemos, assim, supor que X é um P-espaço.

Seja $q \in \mathrm{cl}(Y)$, com $Y \subseteq \sigma\left(X^\lambda, x^*\right)_\delta$. Pelo teorema 3.1.3, existe um submodelo elementar ω_n-*covering* M de cardinalidade $\leq \aleph_{n+1}$ tal que q, $Y \in M$. Vamos mostrar que $q \in \mathrm{cl}(Y \cap M)$. Suponha que

$$q \in V = \prod_{\alpha\in E} V_\alpha \times X^{\lambda\setminus E},$$

onde $E \in [\lambda]^{\aleph_0}$ e cada V_α é um subconjunto aberto de X. Como X_M é um subespaço de X, para cada $\alpha \in E \cap M$, existe uma vizinhança aberta $U_\alpha \in M$ de q_α tal que $\emptyset \neq U_\alpha \cap M \subseteq V_\alpha$. Note que $U_\alpha \times X^{\lambda\setminus\{\alpha\}} \in M$ sempre que $\alpha \in E \cap M$. Como M é ω-*covering* e $E \cap M$ é enumerável, existe uma família enumerável $\mathcal{V} \in M$ de vizinhanças abertas de q tal que $U_\alpha \times X^{\lambda\setminus\{\alpha\}} \in \mathcal{V}$, para todo $\alpha \in E \cap M$. Por outro lado, de $q \in \mathrm{cl}(Y)$ segue, por elementaridade, que q está no fecho de $Y \cap M$ em $(\sigma_\delta)_M$. Assim, existe

$$y \in \left(\bigcap \mathcal{V}\right) \cap Y \cap M \subseteq \prod_{\alpha\in E\cap M} U_\alpha \times X^{\lambda\setminus(E\cap M)}.$$

Como $\mathrm{supp}(y)$, $\mathrm{supp}(q) \subseteq \lambda \cap M$, segue que se $\alpha \in E \setminus M$, então $y(\alpha) = x^*(\alpha) = q(\alpha) \in V_\alpha$. Por outro lado, se $\alpha \in \lambda \cap M$, então $y(\alpha) \in U_\alpha \cap M \subseteq V_\alpha$. Portanto, $y \in \prod_{\alpha\in E} V_\alpha \times X^{\lambda\setminus E}$. ∎

Note que $t(X) \leq \aleph_1$ é condição necessária para que X_M seja um subespaço de X para todo submodelo ω-*covering* M de tamanho $\aleph_1$.

Teorema 3.4.7 (Junqueira e Tall [3]). *Suponha que $Y \subseteq X$ testemunha que $t(x, X) \geq \kappa$. Suponha que M é um submodelo elementar tal que $x, Y, \cdots \in M$ e $|M| < \kappa$. Então, X_M não é um subespaço de X.*

Segue imediatamente dos lema 3.3.3 e proposição 3.4.6 o seguinte resultado parcial:

Lema 3.4.8. *Seja X um P-espaço de Lindelöf e regular cujo tightness é $\aleph_1$ e todo subespaço de cardinalidade $\leq \aleph_1$ tem caráter $\leq \aleph_1$. Então, dados um cardinal λ e um ponto $x^* \in X^\lambda$,*

$$t\left(\sigma\left(X^\lambda, x^*\right)_\delta\right) \leq \aleph_2 .$$

Lema 3.4.9. *Seja X um P-espaço L-reflecting e regular cujo tightness é $\aleph_1$. Então, dados um cardinal λ e um ponto $x^* \in X^\lambda$,*

$$t\left(\sigma\left(X^\lambda, x^*\right)_\delta\right) = \aleph_1 .$$

Spadaro nos indicou o seguinte exemplo:

Exemplo 3.4.10 (Bella et al. [26]). ($2^{\aleph_1} = \aleph_2$) Uma família não-enumerável $\mathcal{A} \subseteq [\omega_1]^{\aleph_1}$ é **almost disjoint** sobre ω_1 se quaisquer dois elementos distintos de $\mathcal{A}$ tem intersecção enumerável. Uma família almost disjoint $\mathcal{A}$ é **nowhere m.a.d.** sobre ω_1 se, para todo $X \in [\omega_1]^{\aleph_1}$, ou $X \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}$ para algum subconjunto enumerável $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ou existe $B \in [X]^{\aleph_1}$ almost disjoint de todos os elementos de $\mathcal{A}$.

Agora, definamos uma topologia sobre $X = \omega_1 \cup \mathcal{A}$ como segue. Cada ponto de ω_1 é isolado e uma vizinhança de $A \in \mathcal{A}$ é $\{A\} \cup A \setminus E$, onde $E \in [\omega_1]^{<\aleph_1}$. Note que $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ é um P-espaço regular e localmente Lindelöf. Seja $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ a lindelöficação de X por um ponto ∞. Note que as vizinhanças básicas de ∞ são da seguinte forma: $\{\infty\} \cup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{E}) \cup (\bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{E}) \setminus E)$, onde $\mathcal{E} \in [\mathcal{A}]^{<\aleph_1}$ e $E \in [\omega_1]^{<\aleph_1}$.

É fácil ver que $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ é um P-espaço regular e disperso.

O caráter de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ é $\aleph_2$, uma vez que o caráter do ponto ∞ é $\aleph_2$.

O tightness de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ é $\aleph_1$. De fato, dos lema 21 e teorema 27 de [26] segue que $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ é um espaço radial cujo caráter radial é $\aleph_1$.

Como ω_1 é denso em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, a densidade de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ é $\aleph_1$. Assim, se M é um submodelo elementar ω-*covering* de cardinalidade $\aleph_1$, então $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap M$ é subespaço próprio e denso de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$; consequentemente, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap M$ não pode ser fechado em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, e, portanto, não é de Lindelöf. Assim, $\mathcal{L}(\mathcal{A})_M$ não é um subespaço de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

3.5 Algumas funções cardinais

Teorema 3.5.1 (Junqueira e Tall [4]). *Suponha que X_M seja um espaço não-enumerável, compacto, T_2 e de caráter enumerável. Então, $X_M = X$.*

Teorema 3.5.2. *São equivalentes:*

(*a*) *CH;*

(*b*) $X_M = X$*, se* X *é um espaço de Lindelöf,* T_2 *e de caráter enumerável e* $\omega_1 \subseteq M$*;*

(*c*) $X_M = X$*, se* X_M *é um espaço de Lindelöf,* T_2 *e de caráter enumerável e* M *é* ω*-covering.*

Demonstração. (*a*) *implica* (*b*). Pelo Teorema de Arhangel'skii, todo espaço T_2, de Lindelöf e de caráter enumerável X tem cardinalidade $\leq 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Como $\{X, \tau\} \subseteq M$ e $X = w(X) \leq \aleph_1 \subseteq M$, segue do Lema da Transitividade que $X \subseteq M$ e $\tau \cap M$ é uma base para τ; portanto, $X_M = X$.

(*b*) *implica* (*c*). Pelo lema 3.1.9, X é T_2. Além disso, do teorema 3.5.5 segue que X é de Lindelöf e tem caráter enumerável. Logo, pelo item (*b*), $X_M = X$.

(*c*) *implica* (*a*). Suponha, por absurdo, que $\neg CH$. Se M é um submodelo elementar de cardinalidade $\aleph_1$, com $\mathbb{R} \in M$, então $\mathbb{R}_M$ é um subespaço $\mathbb{R}$ e, portanto, é de Lindelöf, T_2 e tem caráter enumerável; mas, $\mathbb{R}_M \neq \mathbb{R}$, contradizendo o item (*c*). ∎

Exemplo 3.5.3 ([27])**.** É consistente com *ZFC* a existência de um espaço compacto X de Hausdorff e de caráter enumerável e um submodelo ω-*covering* M tal que X_M não é de Lindelöf.

Exemplo 3.5.4 (Junqueira e Koszmider [28])**.** Sob *CH*, existe um espaço de Lindelöf X de caráter $\aleph_1$ tal que X_M não é de Lindelöf, para todo submodelo elementar enumeravelmente fechado M, com $X \in M$.

Demonstração. Seja $X = 2^{\omega_1}$ munido da topologica produto usual. Seja M um submodelo elementar enumeravelmente fechado.

X_M *é enumeravelmente compacto.* De fato, como X é compacto e M é enumeravelmente fechado o teorema 4.2 de [3] pode ser aplicado.

X_M *é subespaço de* X. De fato, visto que $\omega_1 \subseteq M$, se $\mathcal{B} \in M$ é uma base de abertos de X de tamanho $\aleph_1$, então $\mathcal{B} \subseteq M$.

X_M *é um subespaço próprio de* X, pois $|X_M| = \aleph_1 < 2^{\aleph_1} = |X|$.

X_M *é um subespaço denso de* X. De fato, se $D \in M$ é subconjunto denso de X de cardinalidade $\aleph_1$, como $\omega_1 \subseteq M$, segue que $D \subseteq M$.

Assim, X_M *não é compacto* e, portanto, não pode ser *de Lindelöf.* ∎

O teorema a seguir é uma simples generalização do teorema 3.5 de [21].

Teorema 3.5.5. *Sejam* X *é um espaço qualquer,* M *um submodelo elementar* κ*-covering para algum cardinal inifinito* κ *e* $f \in \{w, \psi, \chi, L, lL, d, t\}$*. Se* $f(X_M) \leq \kappa$*, então* $f(X) \leq \kappa$*.*

Demonstração. Se $w(X_M) = \kappa$, então X_M possui uma base $\mathcal{B} \subseteq \tau \cap M$ de cardinalidade κ. Como X é κ-*covering*, existe $\mathcal{B}' \in M$ de cardinalidade κ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Podemos supor que $\mathcal{B}' \subseteq \tau$, uma vez que $\tau \in M$. Visto que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, segue que $\mathcal{B}'$ é uma base de X_M. Logo, usando o fato de que $\mathcal{B}' \in M$, temos $M \models$ "$\mathcal{B}'$ é uma base de X", o que implica, por elementaridade, que $\mathcal{B}'$ é uma base de X. Portanto, $w(X) = \kappa$.

Os casos $f = \chi$ e $f = \psi$ são feitos no lema 2.5.1 de [20].

O caso $f = L$ é muito semelhante ao próximo.

Suponha $lL(X_M) = \kappa$ e $lL(X) > \kappa$. Então, pelo Critério de Tarski-Vaught, existe uma cobertura $\mathcal{U} \in \wp(\tau) \cap M$ de X, bem ordenada pela inclusão, tal que, para todo $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ de cardinalidade κ, existe $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{V}$. Como $\mathcal{U} \in M$, por elementaridade, $X \cap M \subseteq \bigcup(\mathcal{U} \cap M)$. Agora, seja $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \cap M$ de tamanho κ. Visto que M é κ-*covering*, existe $\mathcal{W} \in [M]^\kappa$ tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. Como $\mathcal{U} \in M$, podemos supor que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$. Por elementaridade, $x \in (X \cap M) \setminus \bigcup \mathcal{W}$.

Se $d(X_M) = \kappa$, então X_M possui um subconjunto denso D de cardinalidade κ. Como M é κ-*covering*, existe $E \in M$ de cardinalidade κ tal que $D \subseteq E$. Podemos supor que $E \subseteq X$. De $D \subseteq E \cap M$ segue que $E \cap M$ é denso em X_M e, portanto, $M \models$ "E é denso em X". Portanto, $d(X) \leq \kappa$.

Suponha que $t(X_M) = \kappa$ e $t(X) > \kappa$. Então, existem $A \subseteq X$ e $x \in \mathrm{cl}(A)$ tal que, para todo $B \subseteq A$, com $|B| \leq \kappa$, temos $x \notin \mathrm{cl}(B)$. Por elementaridade, podemos supor que $A \in M$ e $x \in M$. Novamente por elementaridade, $x \in \mathrm{cl}(A)$ implica que $x \in \mathrm{cl}_{\tau_M}(A \cap M)$. Visto que $t(X_M) = \kappa$, existe $B \subseteq A \cap M$ tal que $|B| \leq \kappa$ e $x \in \mathrm{cl}_{\tau_M}(B)$. Como M é κ-*covering*, existe $C \in M$ de tamanho $\leq \kappa$ tal que $B \subseteq C$. Seja $D = C \cap A$. Note que $D \in M$, $D \subseteq A$, $|D| \leq \kappa$ e $x \in \mathrm{cl}_{\tau_M}(D \cap M)$. Agora, suponha que $x \notin \mathrm{cl}(D)$. Então,

$$\text{existe } V \in \tau \text{ tal que } x \in V \text{ e } V \cap D = \emptyset.$$

Por elementaridade, isto implica que existe $V \in \tau_x \cap M$ tal que $V \cap D \cap M = \emptyset$, contradizendo o fato de que $x \in \mathrm{cl}_{\tau_M}(D \cap M)$. ∎

Lema 3.5.6. *Se $F(X_M) \leq \kappa$ e $\kappa^+ \subseteq M$, então $F(X) \leq \kappa$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $F(X) > \kappa$. Então, X possui uma sequência livre $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ de comprimento κ^+. Por elementaridade, podemos supor que $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle \in M$, o que implica, pelo Lema da Transitividade, que $\{ x_\alpha : \alpha < \kappa^+ \} \subseteq M$. Novamente por elementaridade, para todo $\alpha \in \kappa^+$, $\mathrm{cl}_{\tau_M}(\{ x_\gamma : \gamma < \alpha \}) \cap \mathrm{cl}_{\tau_M}(\{ x_\gamma : \alpha \leq \gamma < \kappa^+ \}) = \emptyset$. Logo, $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ é uma sequência livre de X_M, contradizendo a hipótese de que $F(X_M) \leq \kappa$. ∎

Teorema 3.5.7.

(1) *Existem X e M tais que $lL(X) < lL(X_M)$.*

(2) *Existem X e M tais que $lL(X) > lL(X_M)$.*

Demonstração. Idêntica àquela do teorema 4.1 de [3]. ∎

Lema 3.5.8 (Tall [29])**.** *Se X_M é compacto, $t(X_M) \leq \lambda$ e $\lambda^+ \subseteq M$, então $t(X) \leq \lambda$.*

Problema 6. Se X_M é um espaço de Lindelöf, $t(X_M) \leq \lambda$ e $\lambda^+ \subseteq M$, então $t(X) \leq \lambda$?

Lema 3.5.9 (Juhász et al. [25])**.** *Se X é um P-espaço de Lindelöf e $\mathbf{Cov}_\omega(F(X)) = F(X)$, então $t(X) = F(X)$.*

Lema 3.5.10. *Seja X um espaço com $\mathbf{Cov}_\omega(F(X)) = F(X)$. Suponha que X_M seja um P-espaço de Lindelöf e M é um submodelo elementar ω-covering tal que $t(X_M) \leq \kappa$ e $\kappa^+ \subseteq M$, então $t(X) \leq \kappa$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $t(X) > \kappa$. Visto que M é ω-*covering*, X é um P-espaço de Lindelöf. Logo, pelo lema 3.5.9, $F(X) = t(X) > \kappa$. Daí, pelo lema 3.5.6, $F(X_M) > \kappa$. Como X_M é um espaço de Lindelöf, $t(X_M) \geq F(X_M) > \kappa$, contradizendo a hipótese de que $t(X_M) \leq \kappa$. ∎

3.6 Outras coisas

Teorema 3.6.1. *Assuma CH. Se X é um espaço de Hausdorff, de Lindelöf e sequencial e M é ω-covering, então X_M é de Lindelöf.*

Demonstração. Pelo teorema 3.1.6, M é enumeravelmente fechado. Pelo corolário 2.7 de [3], X_M é de Lindelöf. ∎

Lema 3.6.2. *Se $\{\, \Omega_x : x \in X \cap M \,\}$ é uma partição de X, então a função $\pi \colon X \to X_M$, onde $\pi(x)$ é tal que $x \in \Omega_{\pi(x)}$, é contínua e sobrejetora.*

Demonstração. A sobrejetividade de π segue imediatamente do fato de que $\pi(x) = x$ para todo $X \cap M$. A fim de verificar a continuidade de π, fixe $F \in M$ tal que $x \in X \setminus F \in \tau_M$. Deve-se mostrar que $\pi^{-1}[F]$ é um fechado de X. Seja $x \in X \setminus \pi^{-1}[F]$. É fácil ver que $\pi(x) \notin F$. Usando o fato de que X é regular e que $\pi(x)$, $F \in M$, tem-se, pelo Critério de Tarski-Vaught, que existem U, $W \in \tau \cap M$ disjuntos tais que $\pi(x) \in U$ e $F \subseteq W$. Mas, $\pi^{-1}[F] \subseteq \bigcup\{\, \Omega_z : z \in F \,\} \subseteq W$. Portanto, $x \notin \pi^{-1}[F]$. ∎

Corolário 3.6.3. *Se $\langle X, \tau\rangle$ é um espaço de Lindelöf, T_2, disperso, então X_M é imagem contínua de X, para todo submodelo elementar M tal que $\{X, \tau\} \subseteq M$.*

Demonstração. Segue imediatamente dos lemas 3.6.2 e 3.2.4. ∎

Corolário 3.6.4. *Se $\langle X, \tau\rangle$ é um P-espaço regular, de Lindelöf e disperso, então X_M é imagem de X por uma função contínua e fechada, para todo submodelo elementar ω-covering M tal que $\{X, \tau\} \subseteq M$.*

Demonstração. Basta mostrar que a função π no teorema acima é fechada. Visto que M é ω-*covering*, segue do lema 3.3.1 que X_M é um P-espaço regular. Portanto, pela proposição 4.2(e) de [11]†, π é fechada. ∎

Corolário 3.6.5. *Se $\langle X, \tau\rangle$ é um espaço incontavelmente compacto, regular e disperso, então X_M é incontavelmente compacto, para todo submodelo M tal que $\{X, \tau\} \subseteq M$.*

Corolário 3.6.6. *Se X é de Lindelöf, regular e disperso e Y é compacto, então $(X \times Y)_M$ é de Lindelöf para todo submodelo elementar M tal que X, $Y \in M$ e $Y_M = Y$.*

† Toda função contínua de um espaço de Lindelöf e T_2 em um P-espaço T_2 é fechada.

Demonstração. Segue do fato de que $(X \times Y)_M = X_M \times Y_M$. ∎

Exemplo 3.6.7 (Junqueira [21])**.** Um espaço X que não é linearmente Lindelöf e um submodelo M tal que X_M é de Lindelöf, 0-dimensional e disperso.

Demonstração. Tome $X = \omega_2$ munido da topologia ordinal e M um submodelo elementar tal que $M \cap \omega_2$ é um ordinal $> \omega_1$ de cofinalidade enumerável. ∎

Lema 3.6.8. *Se X_M é de Lindelöf, com M um submodelo enumeravelmente fechado, então*

$$\Omega = \{ \Omega_x : x \in X \cap M \}.$$

é uma partição de X.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que Ω não cobre X. Então, existe $x_0 \in X$ tal que, para todo $x \in X \cap M$, $x_0 \notin \Omega_x$. Da definição de Ω_x segue que para todo $x \in X \cap M$, existe $V_x \in \tau \cap M$ tal que $x \in V_x$ e $x_0 \notin V_x$. Logo, $\{ V_x : x \in X \cap M \}$ é uma cobertura aberta de X_M. Como X_M é de Lindelöf, tal cobertura possui uma subcobertura enumerável $\mathcal{V}$. Visto que M é enumeravelmente fechado, $\mathcal{V} \in M$. Assim, $M \models$ "$\mathcal{V}$ é cobertura aberta de X". Portanto, por elementaridade, $\mathcal{V}$ cobre X, contradizendo o fato de que $x_0 \notin \bigcup \mathcal{V}$. ∎

Lema 3.6.9. *Se X é regular, M é um submodelo enumeravelmente fechado e X_M é de Lindelöf, então X_M é imagem contínua de X. Se X_M é também um P-espaço, então X_M é também imagem fechada de X.*

Demonstração. A primeira parte segue imediatamente dos lemas 3.6.2 e 3.6.8. Já a segunda, segue do fato de que toda função contínua de um espaço de Lindelöf T_2 para um P-espaço T_2 é fechada — vide proposição 4.2(e) de [11]. ∎

Teorema 3.6.10. *Seja $X \in M$, com M um submodelo enumeravelmente fechado e X_M um espaço de Lindelöf e regular. Se $\chi(X) \leq \kappa$ e $\kappa \subseteq M$, então $X_M = X$.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, seja $\mathcal{B}_x$ uma base para x de cardinalidade $\leq \kappa$. Então, para cada $x \in X \cap M$, podemos tomar $\mathcal{B}_x \in M$ e, visto que $\kappa \subseteq M$, $\mathcal{B}_x \subseteq M$. Portanto, $\{x\} = \bigcap \mathcal{B}_x = \bigcap (\tau_x \cap M) = \Omega_x$. Pelo lema 3.6.8, $X = X \cap M$. Portanto, $X = X_M$. ∎

Corolário 3.6.11. *Assuma que $0^\sharp$ não existe. Se M é um submodelo enumeravelmente fechado, $|M| > \kappa$, $\chi(X) \leq \kappa$ e X_M é um espaço de Lindelöf e regular, então $X_M = X$.*

Demonstração. Segundo o lema 7 de [30], a não-existência de $0^\sharp$ implica que se $|M| > \kappa$ então $\kappa \subseteq M$. ∎

Corolário 3.6.12. *Seja $X \in M$, com M um submodelo enumeravelmente fechado e X_M um espaço de Lindelöf e regular. Se X tem caráter enumerável, então $X_M = X$.*

Capítulo 4

Preservação de algumas propriedades gerais por submodelos elementares

Neste capítulo estendemos o estudo da preservação por submodelos elementares iniciado no capítulo anterior para algumas generalizações da propriedade de Lindelöf. Estudamos também o comportamento de tais propriedades com relação à preservação por *forcing*.

4.1 Preservação de algumas generalizações da propriedade de Lindelöf

Em geral, a paracompacidade não é preservada por submodelos elementares: em [3], Junqueira e Tall mostram que existe um submodelo elementar ω-*covering* M tal que $(2^{\omega_1})_M$ não é normal.

Teorema 4.1.1. *Se $\langle X, \tau \rangle$ um espaço paracompacto, regular e disperso, então X_M é paracompacto, para todo submodelo elementar M tal que $\{X, \tau\} \subseteq M$.*

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução sobre a altura de Cantor-Bendixton δ.

Se X tem altura 1, então X é discreto; consequentemente, X_M é discreto e, portanto, paracompacto. Suponha, então, que o teorema valha para espaços de altura menor que δ e fixe um espaço paracompacto, disperso e regular $\langle X, \tau \rangle$ cuja altura é δ e um submodelo elementar M tal que $\{X, \tau\} \subseteq M$. Note que, pelo Critério de Tarski-Vaught, δ e $\left\langle X^{(\eta)} : \eta < \delta \right\rangle$ são elementos de M.

Primeiramente, consideremos o caso em que $\delta = \gamma + 1$, para algum ordinal γ, e $X^{(\gamma)}$ tem um único elemento x. Note que $x \in M$. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura de X_M; sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathcal{U} \subseteq \tau \cap M$. Então, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Como $X \setminus U$ é um subespaço fechado de X e $\mathrm{ht}(X \setminus U) < \delta$, segue da hipótese de indução que $\mathcal{U}$ possui um refinamento parcial e localmente finito $\mathcal{V}$ em $(X \setminus U)_M = X_M \setminus U$ que cobre $X_M \setminus U$. Logo, $\mathcal{V} \cup \{U\}$ é um refinamento parcial e localmente finito de $\mathcal{U}$ que cobre X_M. Portanto, X_M é paracompacto.

Agora, vamos ao caso geral. Pelo Critério de Tarski-Vaught, existe $\langle U_x : x \in X \rangle \in M$, onde cada U_x é uma vizinhança aberta de x tal que $\mathrm{cl}_\tau(U_x) \subseteq X \setminus X^{(\eta)}$ e $\mathrm{cl}_\tau(U_x) \cap \left(X^{(\eta)} \setminus X^{(\eta+1)} \right) = \{x\}$, com $\eta = \min\left\{ \iota < \delta : x \in X^{(\iota)} \setminus X^{(\iota+1)} \right\}$. Então, para cada $x \in X$, ou $\mathrm{ht}(\mathrm{cl}_\tau(U_x)) < \delta$ ou $\mathrm{ht}(\mathrm{cl}_\tau(U_x)) = \delta$, $\delta = \gamma + 1$ e $(\mathrm{cl}_\tau(U_x))^{(\gamma)} = \{x\}$. Segue então da hipótese de indução ou do parágrafo anterior que se $x \in X \cap M$, então $\mathrm{cl}_\tau(U_x)_M$ é um subespaço paracompacto de X_M. Agora,

$$\mathcal{U} = \{ U_x : x \in X \}$$

é uma cobertura aberta de X que pertence a M. Pelo Critério de Tarski-Vaught, existe $\mathcal{V} \in M$, um refinamento aberto e localmente finito de $\mathcal{U}$. Considere a família

$$\mathcal{F} = \{ \mathrm{cl}_\tau(V)_M : V \in \mathcal{V} \cap M \}.$$

A família $\mathcal{F}$ cobre X_M, uma vez que $\mathcal{V} \in M$ e cobre X.

A família $\mathcal{F}$ é localmente finita em X_M. De fato, seja $x \in X_M$. Como $\mathcal{V}$ é localmente finita, por elementaridade

$$M \models \exists W \in \tau_x \, \exists \mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V} \, \left(\mathcal{V}' \text{ é finito} \wedge \forall V \in \mathcal{V} \, \left(V \notin \mathcal{V}' \to W \cap \mathrm{cl}_\tau(V) = \emptyset\right)\right),$$

isto é, existem $W \in \tau_x \cap M$ e uma família finita $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V} \cap M$ tal que, para todo $V \in \mathcal{V} \cap M$, se $V \notin \mathcal{V}'$, então $W \cap \mathrm{cl}_\tau(V) \cap M = \emptyset$.

Para cada $V \in \mathcal{V} \cap M$, $\mathrm{cl}_\tau(V)_M$ é paracompacto em X_M. De fato, seja $V \in \mathcal{V} \cap M$. Visto que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$, pelo Critério de Tarski-Vaught, existe $x \in X \cap M$ tal que $V \subseteq U_x$. Assim, $\mathrm{cl}_\tau(V)_M$ é um subespaço fechado do paracompacto $\mathrm{cl}_\tau(U_x)_M$ e, portanto, $\mathrm{cl}_\tau(V)_M$ é paracompacto. ∎

A demonstração do teorema acima difere daquela do teorema 3.2.5 no seguinte sentido: lá foi mostrado que qualquer subfamília de $\tau \cap M$ que cobre $X \cap M$ é uma cobertura de X e, portanto, se X é de Lindelöf, então X_M é de Lindelöf. Esse não é um caminho possível para o teorema 4.1.1, uma vez que neste caso nem sempre uma subfamília de $\tau \cap M$ que cobre $X \cap M$ é uma cobertura de X. Como um exemplo, considere um espaço discreto não-enumerável X e M um submodelo elementar tal que $X \nsubseteq M$.

A paracompacidade (metacompacidade) não é preservada *upwards* por submodelos elementares: seja δ um ordinal de cofinalidade não-enumerável; considere o espaço X como o conjunto δ munido da topologia da ordem e seja M um submodelo elementar tal que $M \cap \delta$ é um ordinal de cofinalidade enumerável. Neste caso, M não é ω-*covering*.

Note que este simples exemplo também nos mostra que a propriedade de ser enumeravelmente compacto e disperso não é preservada por submodelos elementares. Contudo,

Teorema 4.1.2 (Junqueira e Tall [3])**.** *A compacidade enumerável é preservada por submodelos elementares enumeravelmente fechados.*

O resultado acima não pode ser estendido para submodelos elementares ω-*covering*: se assumirmos $\neg CH$, então $[0,1]_M$ não é enumeravelmente compacto, para todo submodelo elementar ω-*covering* M de cardinalidade $\aleph_1$; isto porque $[0,1]_M$ é um subespaço próprio e denso de $[0,1]$.

Por outro lado, sob *CH*, a compacidade enumerável é preservada por submodelos elementares ω-*covering*, uma vez que, neste caso, todo submodelo elementar ω-*covering* é enumeravelmente fechado — vide teorema 3.1.6.

Problema 7. Existem um espaço enumeravelmente compacto e disperso X e um submodelo elementar ω-*covering* M, com $X \in M$, tais que X_M não é enumeravelmente compacto?

Cabe notar que a compacidade enumerável é preservada *upwards* — vide teorema 2.2 de [21].

Teorema 4.1.3. *Se $\langle X, \tau \rangle$ um espaço metacompacto, regular e disperso, então X_M é metacompacto, para todo submodelo elementar M tal que $\{X, \tau\} \subseteq M$.*

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução sobre a altura de Cantor-Bendixton δ.

Se X tem altura 1, então X é discreto; consequentemente, X_M é discreto e, portanto, metacompacto.

Suponha, então, que o teorema valha para espaços de altura menor que δ e fixe um espaço metacompacto, disperso e regular $\langle X, \tau \rangle$ cuja altura é δ e um submodelo elementar M tal que $\{X, \tau\} \subseteq M$. Note que, pelo Critério de Tarski-Vaught, δ e $\left\langle X^{(\eta)} : \eta < \delta \right\rangle$ são elementos de M.

Primeiramente, consideremos o caso em que $\delta = \gamma + 1$, para algum ordinal γ, e $X^{(\gamma)}$ tem um único elemento x. Note que $x \in M$. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X_M; sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathcal{U} \subseteq \tau \cap M$. Então, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Da regularidade de X e do fato de que $\{x, U\} \subseteq M$ segue, pelo Critério de Tarski-Vaught, que existe $V \in \tau \cap M$ tal que $x \in V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U$. Como $X \setminus V$ é um subespaço fechado de X, $\mathrm{ht}(X \setminus V) < \delta$ e $X \setminus V \in M$, segue da hipótese de indução que $\mathcal{U}$ possui um refinamento parcial, aberto e pontualmente finito $\mathcal{U}'$ em $(X \setminus V)_M = X_M \setminus V$ que cobre $X_M \setminus V$. Logo,

$$\{\, W \setminus \mathrm{cl}_\tau(V) : W \in \mathcal{U}' \,\} \cup \{U\}$$

é um refinamento parcial, aberto e pontualmente finito de $\mathcal{U}$ que cobre X_M. Portanto, X_M é metacompacto.

Agora, vamos ao caso geral. Pelo Critério de Tarski-Vaught, existe $\langle\, U_x : x \in X \,\rangle \in M$, onde cada U_x é uma vizinhança aberta de x tal que $\mathrm{cl}_\tau(U_x) \subseteq X \setminus X^{(\eta)}$ e $\mathrm{cl}_\tau(U_x) \cap \left(X^{(\eta)} \setminus X^{(\eta+1)}\right) = \{x\}$, com $\eta = \min\left\{\, \iota < \delta : x \in X^{(\iota)} \setminus X^{(\iota+1)} \,\right\}$. Então, para cada $x \in X$, ou $\mathrm{ht}(\mathrm{cl}_\tau(U_x)) < \delta$ ou $\mathrm{ht}(\mathrm{cl}_\tau(U_x)) = \delta$, $\delta = \gamma + 1$ e $(\mathrm{cl}_\tau(U_x))^{(\gamma)} = \{x\}$. Segue então da hipótese de indução ou do parágrafo anterior que se $x \in X \cap M$, então $\mathrm{cl}_\tau(U_x)_M$ é um subespaço metacompacto de X_M. Agora,

$$\mathcal{U} = \{\, U_x : x \in X \,\}$$

é uma cobertura aberta de X que pertence a M. Pelo Critério de Tarski-Vaught, existe $\mathcal{V} \in M$, um refinamento aberto e pontualmente finito de $\mathcal{U}$.

Agora, dada uma cobertura aberta $\mathscr{C}$ de X_M, podemos escolher, para cada $V \in \mathcal{V} \cap M$, um refinamento parcial, aberto e pontualmente finito $\mathscr{C}_V$ de $\mathscr{C}$ em $\mathrm{cl}_\tau(V)_M$ que cobre $\mathrm{cl}_\tau(V)_M$. É fácil ver que a família

$$\{\, V \cap C \cap M : V \in \mathcal{V} \cap M \text{ e } C \in \mathscr{C}_V \,\}$$

é um refinamento aberto e pontualmente finito de $\mathscr{C}$ em X_M. ∎

Lema 4.1.4. *X_M é disperso se, e somente se, X é disperso.*

Demonstração. Necessidade. Suponha, por absurdo, que X não seja disperso. Pelo Critério de Tarski-Vaught, existe $A \in M$, um subespaço de X que não possui pontos isolados. Como X_M

é disperso, $A \cap M$ possui um ponto isolado p. Por elementaridade, p é um ponto isolado de A, uma contradição.

Suficiência. Basta notar que se X é separado à direita, então X_M é separado à direita. ∎

Lema 4.1.5. *Dados um espaço $\langle X, \tau \rangle$ e um submodelo elementar M, com $\{X, \tau\} \subseteq M$,*

$$(X')_M = (X_M)'.$$

Demonstração. Como $(X^{(\gamma)})_M$ e $(X_M)^{(\gamma)}$ são ambos subespaços de X_M, resta mostrar que seus conjuntos adjacentes são iguais.

Seja $x \in (X')_M$ e suponha, por absurdo, que x é um ponto isolado de X_M. Então, existe $U \in \tau \cap M$ tal que $U \cap X \cap M = \{x\}$, ou seja,

$$M \models \text{“}x \text{ é um ponto isolado de } X\text{”}.$$

Por elementaridade, x é um ponto isolado de X, contradizendo o fato de que $x \in X'$.

Agora, seja $x \in (X_M)'$. Então,

$$\forall U \in \tau \cap M \ (x \in U \to \exists y \in (U \cap M) \setminus \{x\}),$$

isto é,

$$M \models \text{“}x \text{ é um ponto de acumulação de } X\text{”}.$$

Por elementaridade, segue que $x \in X'$ e, portanto, $x \in (X')_M$. ∎

Note que se X é um espaço de disperso e $\operatorname{ht}(X) \subseteq M$, então, pelo Critério de Tarski-Vaught, $\left\{ X^{(\gamma)} : \gamma < \operatorname{ht}(X) \right\} \subseteq M$.

Lema 4.1.6. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço disperso, então, para todo $\gamma < \delta = \operatorname{ht}(X)$,*

$$\left(X^{(\gamma)}\right)_M = (X_M)^{(\gamma)}$$

para todo submodelo elementar M tal que $\delta \cup \{X, \tau\} \subseteq M$. Neste caso, $\operatorname{ht}(X) = \operatorname{ht}(X_M)$.

Demonstração. Vamos proceder por indução sobre $\gamma < \operatorname{ht}(X)$. O resultado é imediato para $\gamma = 0$. Agora, se o lema vale para um certo γ, então

$$\left(X^{(\gamma+1)}\right)_M = \left(X^{(\gamma)'}\right)_M = \left(\left(X^{(\gamma)}\right)_M\right)' = (X_M)^{(\gamma)'} = (X_M)^{(\gamma+1)}.$$

Por fim, se γ é um ordinal limite e o resultado valha para todo $\eta < \gamma$, então

$$\left(X^{(\gamma)}\right)_M = \left(\bigcap_{\eta<\gamma} X^{(\eta)}\right)_M = \bigcap_{\eta<\gamma} \left(X^{(\eta)}\right)_M = \bigcap_{\eta<\gamma} (X_M)^{(\eta)} = (X_M)^{(\gamma)}.$$ ∎

4.2 Alguma preservação sob forcing

Considere, em $\mathbf{M}$, um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ e uma noção de forcing $\mathbb{P}$. Em geral, em uma extensão de forcing por $\mathbb{P}$, a família τ não é uma topologia sobre X, uma vez que na extensão podem surgir novas subfamílias infinitas de τ cuja união não pertencem a τ. Contudo, τ é sempre uma base para uma topologia sobre X. Ou seja,

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\exists x\, (x \text{ é topologia para } \check{X} \text{ gerada por } \check{\tau})\text{”}.$$

Do *Princípio Maximal* — vide teorema IV.7.1 de [31] —, segue que existe um $\mathbb{P}$-nome, aqui sempre denotado por $\tau^{\mathbb{P}}$, tal que

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\tau^{\mathbb{P}} \text{ é topologia para } \check{X} \text{ gerada por } \check{\tau}\text{”}.$$

Dada uma propriedade topológica Φ, dizemos que a noção de forcing $\mathbb{P}$ **preserva** Φ se, para cada espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ satisfazendo Φ,

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\langle \check{X}, \tau^{\mathbb{P}} \rangle \text{ satisfaz } \Phi\text{”}.$$

Conforme mencionado na introdução deste trabalho, nota-se uma certa analogia entre o *forcing* e os submodelos elementares: a operação de tomar um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ no *ground-model* e considerar o espaço $\langle \check{X}, \tau^{\mathbb{P}} \rangle$ na extensão, com $\tau^{\mathbb{P}}$ sendo a topologia tendo $\check{\tau}$ como base, pode ser comparada à operação de tomar $\langle X, \tau \rangle$ em um submodelo elementar M e considerar X_M.

Teorema 4.2.1. *Seja $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\mu, 2)$ com μ um ordinal infinito. Então, $\mathbb{P}$ preserva a propriedade de ser linearmente Lindelöf.*

Demonstração. Seja G um filtro $\mathbb{P}$-genérico. Em $\mathbf{M}[G]$, sejam κ uma cardinal regular não-enumerável e $A\colon \kappa \to X$ uma função injetora. Note que $\kappa \in \mathbf{M}$, uma vez que $\mathrm{o}(\mathbf{M}[G]) = \mathrm{o}(\mathbf{M})$. Então, existem $p \in G$ e $\dot{A} \in \mathbf{M}^{\mathbb{P}}$, com $A = \dot{A}_G$, tais que

$$p \Vdash \text{“}\check{\kappa} \text{ é um cardinal regular não-enumerável e } \dot{A} \text{ é uma função injetora de } \check{\kappa} \text{ em } \check{X}\text{”}.$$

Assim, se mostrarmos que o conjunto

$$\left\{\, q \leq p : q \Vdash \text{“}\mathrm{Im}(\dot{A}) \text{ tem ponto de acumulação completo”} \,\right\}$$

é denso abaixo de p, então, visto que $p \in G$, em $\mathbf{M}[G]$, $\mathrm{Im}(A)$ terá ponto de acumulação completo.

Seja $q \leq p$. Em $\mathbf{M}$, para cada $\alpha < \kappa$, existem $p_\alpha \leq q$ e $a_\alpha \in X$ tais que

$$p_\alpha \Vdash \dot{A}(\check{\alpha}) = \check{a_\alpha}.$$

Note que κ é um cardinal regular não-enumerável em $\mathbf{M}$, pois $(\mathbb{P} \text{ é c.c.c.})^{\mathbf{M}}$. Além disso, pelo lema do Δ-sistema existe $I \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{\, p_\alpha : \alpha \in I \,\}$ forma um Δ-sistema com uma raiz $r \leq q$.

FATO 1. *Se $s \leq r$ e $J \subseteq I$, então $C = \{ \alpha \in J : p_\alpha \perp s \}$ é finito.*

Prova do fato. Se $\alpha, \beta, \gamma \in J$ são distintos, então

$$\mathrm{dom}(p_\alpha) \cap \mathrm{dom}(p_\beta) \cap \mathrm{dom}(p_\gamma) \subseteq \mathrm{dom}(r).$$

De fato, se $x \in \mathrm{dom}(p_\alpha) \cap \mathrm{dom}(p_\beta) \cap \mathrm{dom}(p_\gamma)$ então existem distintos $i, j \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tais que $k = p_i(x) = p_j(x)$. Logo, $\langle x, k \rangle \in p_i \cap p_j = r$ e, então, $x \in \mathrm{dom}(r)$.

Assim, para cada $x \in \mathrm{dom}(s) \setminus \mathrm{dom}(r)$ o conjunto $A_x = \{ \alpha \in J : x \in \mathrm{dom}(p_\alpha) \}$ tem no máximo 2 elementos. Visto que $C \subseteq \bigcup \{ A_x : x \in \mathrm{dom}(s) \setminus \mathrm{dom}(r) \}$, C é finito. ◀

FATO 2. *O conjunto $\{ a_\alpha : \alpha \in I \}$ tem cardinalidade κ.*

Prova do fato. Suponha $\{ a_\alpha : \alpha \in I \}$ tem cardinalidade $< \kappa$. Então, existem $J \in [I]^\kappa$ e $a \in X$ tais que $a = a_\alpha$ para todo $\alpha \in J$. Agora, fixe $\alpha_0 \in J$ e seja $C = \{ \alpha \in J : p_{\alpha_0} \perp p_\alpha \}$. Do fato 1 segue que C é finito. Então, existe um elemento $\alpha_1 \in J \setminus (C \cup \{\alpha_0\})$. Logo, $p_{\alpha_1} \not\perp p_{\alpha_0}$, *i.e.*, existe $s \leq p_{\alpha_1}, p_{\alpha_0}$. Portanto, $\alpha_0 \neq \alpha_1$ e

$$s \Vdash \dot{A}(\check{\alpha_0}) = \check{a_{\alpha_0}} = \check{a_{\alpha_1}} = \dot{A}(\check{\alpha_1}),$$

contradizendo o fato de que $s \Vdash$ "$\dot{A}$ é uma injeção". ◀

Então, $\{ a_\alpha : \alpha \in I \}$ tem um ponto de acumulação completo $x \in X$. Vamos mostrar que

$$r \Vdash \text{“}\check{x} \text{ é um ponto de acumulação completo de } \mathrm{Im}(\dot{A})\text{”}.$$

Seja $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Temos que mostrar que

$$r \Vdash \text{“}\mathrm{Im}\, \dot{A} \cap \check{U} \text{ tem cardinalidade } \check{\kappa}\text{”}.$$

Suponha o contrário. Visto que $r \Vdash$ "κ é regular", existem $s \leq r$ e $\alpha_0 \in \kappa$ tais que

$$s \Vdash \dot{A}(\check{\beta}) \notin \check{U}$$

para todo $\beta \geq \alpha_0$. Pelo fato 1, $C = \{ \alpha \in I : p_\alpha \perp s \}$ é finito. Como $|U \cap \{ a_\alpha : \alpha \in I \}| = \kappa$, podemos escolher $\alpha_1 \in I \setminus (C \cup \alpha_0)$ tal que $a_{\alpha_1} \in U$. Assim, $p_{\alpha_1} \Vdash \dot{A}(\check{\alpha_1}) = \check{a_{\alpha_1}} \in \check{U}$. Note que $p_{\alpha_1} \not\perp s$, uma vez que $\alpha_1 \notin C$. Seja $t \leq p_{\alpha_1}, s$. Então, $t \Vdash \dot{A}(\check{\alpha_1}) \in \check{U}$ e $t \Vdash \dot{A}(\check{\alpha_1}) \notin \check{U}$, uma contradição. ∎

Teorema 4.2.2 (Prado et al. [32])**.** *A propriedade de Lindelöf é preservada por reais aleatórios.*

Problema 8. A propriedade de ser linearmente Lindelöf é preservada por reais aleatórios?

Lema 4.2.3. *Para espaços dispersos, a compacidade é preservada por qualquer noção de forcing.*

Lema 4.2.4 (Juhász e Weiss [33])**.** *Para espaços dispersos, o grau de Lindelöf não aumenta em qualquer extensão.*

Lema 4.2.5 (Juhász e Weiss [33]). *A propriedade de ser disperso é preservada por qualquer noção de forcing.*

Lema 4.2.6 (Juhász e Weiss [33]). *Para espaços dispersos, a altura de Cantor-Bendixson é preservada por qualquer noção de forcing.*

De forma análoga ao lema 4.2.4, podemos provar:

Teorema 4.2.7. *Para espaços dispersos e regulares, a paracompacidade é preservada por qualquer noção de forcing.*

Demonstração. Seja G um filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathbf{M}$. Vamos provar o resultado por indução sobre a altura de Cantor-Bendixson δ.

Espaços cuja altura é 1 são discretos e, portanto, paracompactos na extensão. Suponha, então, que o teorema valha para espaços de altura menor que δ e considere, em $\mathbf{M}$, um espaço paracompacto, disperso e regular $\langle X, \tau \rangle$ cuja altura é δ.

Primeiramente, consideremos o caso em que $\delta = \gamma + 1$, para algum ordinal γ, e $X^{(\gamma)}$ tem um único elemento x_0. Em $\mathbf{M}[G]$, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X; sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathcal{U} \subseteq \tau$. Então, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x_0 \in U$. Como $X \setminus U$ é um subespaço fechado de X de altura menor do que δ, segue da hipótese de indução que $\mathcal{U}$ possui um refinamento parcial e localmente finito $\mathcal{V}$ em $X \setminus U$ que cobre $X \setminus U$. Logo, $\mathcal{V} \cup \{U\}$ é um refinamento localmente finito de $\mathcal{U}$.

Agora, vamos ao caso geral. Em $\mathbf{M}$, para cada $x \in X$, escolha uma vizinhança aberta U_x de x tal que $y \notin \mathrm{cl}(U_x)$ sempre que ou $\mathrm{ht}(y, X) > \mathrm{ht}(x, X)$ ou $\mathrm{ht}(y, X) = \mathrm{ht}(x, X)$ e $x \neq y$. Então, ou $\mathrm{ht}(\mathrm{cl}(U_x)) < \delta$ ou $\mathrm{ht}(\mathrm{cl}(U_x)) = \delta$, $\delta = \gamma + 1$ e $\mathrm{cl}(U_x)^{(\gamma)} = \{x\}$. Assim, segue da hipótese de indução ou do parágrafo anterior que $\mathrm{cl}(U_x)$ é paracompacto em $\mathbf{M}[G]$. Agora, a cobertura aberta

$$\mathcal{U} = \{ U_x : x \in X \} \in \mathbf{M}$$

e, portanto, possui um refinamento aberto e localmente finito $\mathcal{V}$. Então, em $\mathbf{M}[G]$, $\{ \mathrm{cl}(V) : V \in \mathcal{V} \}$ é uma cobertura localmente finita de subespaços paracompactos de X. Portanto, X é paracompacto em $\mathbf{M}[G]$. ∎

Teorema 4.2.8. *Para espaços regulares e dispersos, a metacompacidade é preservada por qualquer noção de forcing.*

Demonstração. Seja G um filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathbf{M}$. Vamos provar o resultado por indução sobre a altura de Cantor-Bendixson δ.

Espaços cuja altura é 1 são discretos e, portanto, metacompactos na extensão. Suponha, então, que o teorema valha para espaços de altura menor que δ e considere, em $\mathbf{M}$, um espaço metacompacto, disperso e regular $\langle X, \tau \rangle$ cuja altura é δ.

Primeiramente, consideremos o caso em que $\delta = \gamma + 1$, para algum ordinal γ, e $X^{(\gamma)}$ tem um único elemento x_0. Em $\mathbf{M}[G]$, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X; sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathcal{U}$ é constituído de elementos de τ. Então, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Da regularidade de X segue que existe $W \in \tau$ tal que $x \in W \subseteq \mathrm{cl}(W) \subseteq U$. Como $X \setminus W$ é um subespaço fechado de X de altura menor do que δ, segue da hipótese de indução que $\mathcal{U}$ possui um refinamento parcial, aberto e pontualmente finito $\mathcal{V}$ em $X \setminus W$ tal que $\bigcup \mathcal{V} = X \setminus W$. Logo, $\{ V \setminus \mathrm{cl}(W) : V \in \mathcal{V} \} \cup \{U\}$ é um refinamento aberto e pontualmente finito de $\mathcal{U}$.

Vamos ao caso geral. Em $\mathbf{M}$, para cada $x \in X$, escolha uma vizinhança aberta U_x de x tal que $y \notin \mathrm{cl}(U_x)$ sempre que ou $\mathrm{ht}(y, X) > \mathrm{ht}(x, X)$ ou $\mathrm{ht}(y, X) = \mathrm{ht}(x, X)$ e $x \neq y$. Então, ou $\mathrm{ht}(\mathrm{cl}(U_x)) < \delta$ ou $\mathrm{ht}(\mathrm{cl}(U_x)) = \delta$, $\delta = \gamma + 1$ e $\mathrm{cl}(U_x)^{(\gamma)} = \{x\}$. Assim, segue da hipótese de indução ou do parágrafo anterior que $\mathrm{cl}(U_x)$ é metacompacto em $\mathbf{M}[G]$. Por outro lado, a cobertura aberta

$$\mathcal{U} = \{ U_x : x \in X \} \in \mathbf{M}$$

e, portanto, possui um refinamento aberto e pontualmente finito $\mathcal{V}$. Note que, em $\mathbf{M}[G]$, $\mathrm{cl}(V)$ é um subespaço metacompacto de X, para todo $V \in \mathcal{V}$.

Agora, em $\mathbf{M}[G]$, seja $\mathscr{C}$ uma cobertura aberta de X. Para cada $V \in \mathcal{V}$, escolha um refinamento parcial, aberto e pontualmente finito $\mathscr{C}_V$ de $\mathscr{C}$ em $\mathrm{cl}(V)$ que cobre $\mathrm{cl}(V)$. É fácil ver que a família

$$\{ V \cap C : V \in \mathcal{V} \text{ e } C \in \mathscr{C}_V \}$$

é um refinamento aberto e pontualmente finito de $\mathscr{C}$. Portanto, X é metacompacto em $\mathbf{M}[G]$. ∎

Capítulo 5

Algumas caracterizações de D-espaços paracompactos

A classe dos D-espaços foi introduzida por Douwen e Pfeffer em [6] e desde o seu surgimento, em 1979, o seguinte problema permanece em aberto: para espaços regulares, alguma das propriedades padrão de cobertura, tais como Lindelöf ou paracompacto, implica a propriedade D?

No entanto, muitos trabalhos interessantes vem sendo publicados ao longo dos últimos anos relacionando, por exemplo, a propriedade D à classes de espaços métricos generalizados, à C_p-teoria e a jogos topológicos.

Neste capítulo apresentamos algumas caracterizações para os D-espaços paracompactos.

5.1 D-espaços paracompactos

Notação. Dado um espaço topológico X,

$$\mathcal{K}(X) = \{\, Y \subseteq X : Y \text{ é um subespaço compacto de } X \,\}.$$

Quando X for claro do contexto, denotaremos tal família apenas por $\mathcal{K}$.

Teorema 5.1.1. *Seja X um espaço regular. São equivalentes:*

(1) *se $\{\, U_K : K \in \mathcal{K} \,\}$, com $K \subseteq U_K$é uma família de abertos, onde cada $K \subseteq U_K$, então existem $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ e uma família localmente finita de abertos $\{\, V_K : K \in \mathcal{K}_0 \,\}$ que cobre X e cada $K \subseteq V_K \subseteq U_K$.*

(2) *se $\{\, U_K : K \in \mathcal{K} \,\}$ é uma família de abertos, onde cada $K \subseteq U_K$, então existem $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ e uma família localmente finita $\{\, A_K : K \in \mathcal{K}_0 \,\} \subseteq \wp(X)$ que cobre X e cada $K \subseteq A_K \subseteq U_K$;*

(3) *se $\{\, U_K : K \in \mathcal{K} \,\}$ é uma família de abertos, onde cada $K \subseteq U_K$, então existem $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ e uma família localmente finita $\{\, F_K : K \in \mathcal{K}_0 \,\}$ de fechados que cobre X e cada $K \subseteq F_K \subseteq U_K$.*

Demonstração. É imediato que (1) implica (2).

(2) *implica* (3). Como X é regular, para cada $K \in \mathcal{K}$, existe uma vizinhança aberta V_K de K tal que $\mathrm{cl}(V_K) \subseteq U_K$. De (2) segue que existem $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ uma família localmente finita $\{\, A_K : K \in \mathcal{K}_0 \,\} \subseteq \wp(X)$ que cobre X e $K \subseteq A_K \subseteq V_K$ para todo $K \in \mathcal{K}_0$. Para cada $K \in \mathcal{K}_0$, tome $F_K = \mathrm{cl}(A_K)$. Então, $\{\, F_K : K \in \mathcal{K}_0 \,\}$ é uma família localmente finita de fechados que cobre X, onde cada $K \subseteq F_K \subseteq U_K$.

(3) *implica* (1). Seja $\{ U_K : K \in \mathcal{K} \}$ uma família de abertos, onde cada $K \subseteq U_K$. De (3) segue que existem $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ e uma cobertura fechada e localmente finita $\mathcal{A} = \{ A_K : K \in \mathcal{K}_0 \} \subseteq \wp(X)$ de X tal que $K \subseteq A_K \subseteq U_K$ para todo $K \in \mathcal{K}_0$. Para cada $K \in \mathcal{K}$, escolha uma vizinhança aberta B_K de K tal que a coleção $(\mathcal{A})_{B_K}$ é finita. Considere a família $\mathcal{B} = \{ B_K : K \in \mathcal{K} \}$. Novamente por (3), existem $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}$ e uma cobertura fechada e localmente finita $\mathscr{F} = \{ F_K : K \in \mathcal{K}_1 \}$ de X tal que cada $K \subseteq F_K \subseteq B_K$. Para cada $K \in \mathcal{K}_0$, seja

$$A'_K = X \setminus \bigcup \{ F \in \mathscr{F} : A_K \cap F = \emptyset \}.$$

Note que cada A'_K é um aberto contendo A_K. Além disso, para todo $F \in \mathscr{F}$, $F \cap A'_K \neq \emptyset$ se, e somente se, $F \cap A_K \neq \emptyset$. Para cada $K \in \mathcal{K}_0$, tome

$$V_K = A'_K \cap U_K.$$

A família $\mathcal{V} = \{ V_K : K \in \mathcal{K}_0 \}$ é localmente finita. De fato, fixe $x \in X$. Como $\mathscr{F}$ é uma família localmente finita, existe vizinhança aberta U_x de x tal que a família $(\mathscr{F})_{U_x}$ é finita e, visto que $\mathscr{F}$ cobre X, segue que $(\mathscr{F})_{U_x}$ cobre U_x. Agora, para cada $F \in \mathscr{F}$, $(\mathcal{V})_F$ é finito. Portanto, $(\mathcal{V})_{U_x}$ é finito. ∎

Definição 5.1.2. Seja X um espaço topológico. Uma função $\varphi\colon X \supseteq F \to \wp(X)$ é uma **atribuição de vizinhanças (abertas) para F em X** se, para cada $x \in X$, $\varphi(x)$ é uma vizinhança (aberta) de x. Se $F = X$, então dizemos apenas que φ é uma **atribuição de vizinhanças (abertas) para X**.

Definição 5.1.3. Seja X um espaço topológico. Uma função $\psi\colon F \subseteq X \to \wp(X)$ é um **refinamento** de uma atribuição de vizinhanças φ se $\psi[F]$ cobre X e, para cada $x \in F$, $x \in \psi(x) \subseteq \varphi(x)$.

Teorema 5.1.4. *Seja X um espaço regular. São equivalentes:*

(1) *X é satisfaz algum item — e, portanto todos — do teorema 5.1.1;*

(2) *toda atribuição de vizinhanças abertas para X possui um refinamento parcial, aberto e localmente finito;*

(3) *toda atribuição de vizinhanças abertas para X possui um refinamento parcial e localmente finito;*

(4) *toda atribuição de vizinhanças abertas para X possui um refinamento parcial, fechado e localmente finito.*

Demonstração. (1) *implica* (2). Seja $\{ U_x : x \in X \}$ uma atribuição de vizinhanças abertas para X. Para cada $K \in \mathcal{K}$, escolha um subconjunto finito $F_K \subseteq K$ tal que $K \subseteq \bigcup \{ U_x : x \in F_K \}$ e defina $U_K = \bigcup \{ U_x : x \in F_K \}$. Por (1), existem uma subfamília $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ e uma cobertura aberta localmente finita $\mathcal{V} = \{ V_K : K \in \mathcal{K}_0 \}$ de X tal que cada $K \subseteq V_K \subseteq U_K$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $V_K \neq V_{K'}$ sempre que $K \neq K'$. Seja $F = \bigcup\{\, F_K : K \in \mathcal{K}_0 \,\}$ e, para cada $x \in F$, tome

$$V_x = U_x \cap \bigcup\{\, V_K : K \in \mathcal{K}_0 \text{ e } x \in F_K \,\}.$$

A família $\mathcal{W} = \{\, V_x : x \in F \,\}$ é localmente finita. De fato, fixe $x_0 \in X$. Como $\mathcal{V}$ é localmente finita, existe uma vizinhança aberta W_{x_0} de x_0 tal que $\{\, V \in \mathcal{V} : V \cap W_{x_0} \neq \emptyset \,\}$ é finita. Então, a família $\mathcal{K}_1 = \{\, K \in \mathcal{K}_0 : V_K \in \mathcal{V} \text{ e } V_K \cap W_{x_0} \neq \emptyset \,\}$ é finita e, portanto, $F_0 = \bigcup\{\, F_K : K \in \mathcal{K}_1 \,\}$ é finito. Note que se $x \in F \setminus F_0$, então, para cada $K \in \mathcal{K}_0$ tal que $x \in F_K$, tem-se $K \notin \mathcal{K}_1$ e, portanto, $V_K \cap W_{x_0} = \emptyset$; isto implica que $V_x \cap W_{x_0} = \emptyset$. Logo, $\{\, W \in \mathcal{W} : W \cap W_{x_0} \neq \emptyset \,\}$ é um subconjunto de $\{\, V_x : x \in F_0 \,\}$ e, portanto, é finita.

A família $\mathcal{W}$ cobre X. De fato, seja $x \in X$. Como $\mathcal{V}$ cobre X, existe $K \in \mathcal{K}_0$ tal que $x \in V_K \subseteq U_K$. Logo, existe $z \in F_K$ tal que $x \in U_z$. Portanto, $x \in U_z \cap V_K \subseteq V_z$.

É imediato que (2) *implica* (3).

(3) *implica* (4). Seja $\{\, U_x : x \in X \,\}$ uma atribuição de vizinhanças abertas para X. Como X é regular, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança aberta V_x de x tal que $\operatorname{cl}(V_x) \subseteq U_x$. De (3) segue que existem $F \subseteq X$ e uma família localmente finita $\{\, A_x : x \in F \,\} \subseteq \wp(X)$ que cobre X e cada $x \in A_x \subseteq V_x$. Para cada $x \in X$, tome $F_x = \operatorname{cl}(A_x)$. Então, $\{\, F_x : x \in F \,\}$ é uma cobertura fechada e localmente finita de X tal que cada $x \in F_x \subseteq U_x$.

(4) *implica* (1). É imediato que (4) implica o item (3) do teorema 5.1.1. ∎

Definição 5.1.5. Dados um espaço X e uma atribuição φ para X, dizemos que um subconjunto $Y \subseteq X$ é um **núcleo** para φ se $X = \bigcup \varphi[Y]$.

Definição 5.1.6. Um espaço X é um **D-espaço** se toda atribuição de vizinhanças abertas para X, possui um núcleo fechado e discreto.

Teorema 5.1.7. *Um espaço regular X é paracompacto e tem a propriedade D se, e somente se, X satisfaz algum item do teorema 5.1.4.*

Demonstração. A suficiência é consequência imediata do teorema anterior.

A fim de provar a necessidade, seja φ uma atribuição de vizinhanças abertas para X. Como X é um D-espaço, φ possui um núcleo fechado e discreto D. Da paracompacidade de X segue que $\varphi[D]$ possui um refinamento aberto e localmente finito $\mathcal{U}$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, associe um $d_U \in D$ tal que $U \subseteq \varphi(d_U)$. Seja $F = \{\, d_U : U \in \mathcal{U} \,\}$. Defina a seguinte função $\psi\colon F \to \wp(X)$: para cada $z \in F$, seja

$$\psi(z) = \{z\} \cup \bigcup\{\, U \in \mathcal{U} : z = d_U \,\}.$$

$\operatorname{Im}\psi$ *cobre* X. De fato, dado $x \in X$, $x \in U$ para algum $U \in \mathcal{U}$ e, portanto, $x \in \psi(d_U)$.

$\operatorname{Im}\psi$ *é um refinamento parcial e localmente finito de* φ. De fato, dado $x \in X$, basta tomar uma vizinhança aberta V de x tal que $\{\, U \in \mathcal{U} : U \cap V \neq \emptyset \,\}$ é finito e $|V \cap D| \leq 1$. ∎

5.2 Espaços D_δ-paracompactos

Definição 5.2.1. Dizemos que um espaço X é **D_δ-paracompacto** se, para cada família $\{A_K\}_{K \in \mathcal{K}}$ de subconjuntos G_δ de X, com $K \subseteq U_K$, existem uma subfamília $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ e uma família localmente finita $\{B_K\}_{K\in\mathcal{F}}$ de subconjuntos G_δ de X que cobre X e, para cada $K \in \mathcal{F}$, $K \subseteq B_K \subseteq A_K$.

Lema 5.2.2. *Todo espaço D_δ-paracompacto é D-paracompacto.*

Lema 5.2.3. *Seja X um espaço perfeitamente normal. Então, X é D_δ-paracompacto se, e somente se, X é união localmente finita de compactos se, e somente se, X é paracompacto e localmente compacto.*

Do lema acima segue $\mathbb{Q}$ não é D_δ-paracompacto. Daí, a propriedade de **Alster não implica D_δ-paracompacidade** uma vez que $\mathbb{Q}$ é de Alster.

Definição 5.2.4 (Barr et al. [34])**.** Um ponto $p \in X$ satisfaz a **condição de refinamento aberto (CRA)** se, e somente se, toda cobertura de compactos por G_δ que é fechada sob uniões finitas contém uma vizinhança de p. Dizemos que o espaço X **satisfaz a CRA** se, e somente se, todo ponto de X satisfaz a CRA.

Definição 5.2.5. Um cobertura $\mathcal{U}$ de um espaço X por conjuntos G_δ é uma **cobertura de Alster** se todo subconjunto compacto está incluso em um elemento de $\mathcal{U}$. O conjunto de todas as coberturas Alster de X será denotada por $\mathscr{A}_X$.

Definição 5.2.6. Um espaço topológico X é um espaço de **Alster** se, para todo $\mathcal{U} \in \mathscr{A}_X$, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ enumerável tal que $X = \bigcup \mathcal{V}$.

Teorema 5.2.7 (Barr et al. [34])**.** *Um espaço de Lindelöf CRA-disperso é de Alster.*

É fácil ver que a D_δ-paracompacidade implica a CRA. Então,

Corolário 5.2.8. *Todo espaço de Lindelöf que é D_δ-paracompacto é de Alster.*

Referências bibliográficas

[1] F. D. Tall. “Some problems and techniques in set-theoretic topology”. *Set Theory Its Appl.* Ed. por L. Babinkostova, A. E. Caicedo, S. Geschke e M. Scheepers. Contemporary Mathematics, 2011, p. 183–209. (Ver p. 1).

[2] A. Dow. “An introduction to applications of elementary submodels”. *Topol. Proc.* 13 (1988), p. 17–72. (Ver p. 1, 5, 25).

[3] L. R. Junqueira e F. D. Tall. “The topology of elementary submodels”. *Topol. Appl.* 82 (1998), p. 239–266. (Ver p. 1, 21, 22, 29–32, 35, 36).

[4] L. R. Junqueira e F. D. Tall. “More reflections on compactness”. *Fundam. Math.* 176.2 (2003), p. 127–141. (Ver p. 1, 21, 22, 29).

[5] G. Gruenhage. “A survey of D-spaces”. *Contemp. Math.* Vol. 533. 2011, p. 13–28. (Ver p. 2).

[6] E. K. van Douwen e W. F. Pfeffer. “Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces”. *Pacific J. Math.* 81.2 (1979), p. 371–378. (Ver p. 2, 43).

[7] W. Just e M. Weese. *Discovering modern set theory. II.* American Mathematical Society, 1997 (ver p. 5).

[8] A. Dow. “More set-theory for topologists”. *Topol. Appl.* 64.3 (jul. de 1995), p. 243–300. (Ver p. 5).

[9] L. Soukup. “Elementary submodels in infinite combinatorics”. *Discrete Math.* (2011), p. 1–23. (Ver p. 5).

[10] D. E. Cameron. “Maximal and minimal topologies”. *Trans. Am. Math. Soc.* 160 (1971), p. 229–248. (Ver p. 8).

[11] A. K. Misra. “A topological view of P-spaces”. *Topol. Appl.* 2 (1972), p. 349–362. (Ver p. 12, 32, 33).

[12] R. Levy e M. D. Rice. “Normal P-spaces and the G_δ-topology”. *Colloq. Math.* 44 (1981), p. 227–240. (Ver p. 12).

[13] M. Henriksen, R. M. Raphael e G. R. Woods. “SP-scattered spaces; a new generalization of scattered spaces”. *Comment. Math. Univ. Carolinae* 48.3 (2007), p. 487–505. (Ver p. 14, 18, 19).

[14] H. Z. Hdeib e C. M. Pareek. “A generalization of scattered spaces”. *Topol. Proc.* 14 (1989), p. 59–74. (Ver p. 16).

[15] D. A. Rose. “α-scattered spaces”. *Int. J. Math. Math. Sci.* 21.1 (1998), p. 41–46. (Ver p. 17).

[16] F. D. Tall. “The density topology”. *Pacific J. Math.* 62.1 (1976), p. 275–284. (Ver p. 17).

[17] M. Barr, J. F. Kennison e R. Raphael. “On productively Lindelöf spaces”. *Sci. Math. Jpn.* 65.3 (2007), p. 319–332. (Ver p. 18).

[18] R. R. Dias. “Reflexão de funções cardinais e da metrizabilidade”. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, 2008 (ver p. 21).

[19] M. D. Passos. “Extensões de submodelos elementares por forcing”. Tese de doutorado. Universidade de São Paulo, 2007 (ver p. 21).

[20] A. M. E. Levi. “Reflexão de funções cardinais”. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2012 (ver p. 21, 30).

[21] L. R. Junqueira. “Upwards preservation by elementary submodels”. *Topol. Proc.* 25 (2000), p. 225–249. (Ver p. 21, 30, 33, 36).

[22] F. D. Tall. “If it looks and smells like the reals ...” *Fundam. Math.* 163.1 (2000), p. 1–11. (Ver p. 22).

[23] I. Juhász e W. Weiss. “On a problem of Sikorski”. *Fundam. Math.* 100.3 (1978), p. 223–227. (Ver p. 26).

[24] J. Pelant, M. G. Tkachenko, V. V. Tkachuk e R. G. Wilson. “Pseudocompact Whyburn spaces need not be Fréchet”. *Proc. Am. Math. Soc.* 131.10 (2002), p. 3257–3265. (Ver p. 26).

[25] I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy e W. Weiss. “Lindelöf P-spaces” (ver p. 27, 28, 31).

[26] A. Bella, C. Costantini e S. Spadaro. “P-spaces and the Whyburn property”. *Houst. J. Math.* 37.3 (2011), p. 995–1015. (Ver p. 29).

[27] A. Dow e K. P. Hart. “Reflecting Lindelöf and converging ω_1-sequences”. *Fundam. Math.* 224.3 (2014), p. 205–218. (Ver p. 30).

[28] L. R. Junqueira e P. Koszmider. “On families of Lindelöf and related subspaces of 2^{ω_1}”. *Fundam. Math.* 169 (2001), p. 205–231. (Ver p. 30).

[29] F. D. Tall. “Reflections on dyadic compacta”. *Topol. Appl.* 137.1-3 (fev. de 2004), p. 251–258. (Ver p. 31).

[30] K. Kunen. “The real line in elementary submodels of set theory”. *J. Symb. Log.* 65 (2000), p. 683–691. (Ver p. 33).

[31] K. Kunen. *Set Theory*. College Publications, 2013 (ver p. 4, 39).

[32] R. G. A. Prado, L. R. Junqueira e F. D. Tall. “Forcing and normality”. *Topol. Appl.* 84.1-3 (1998), p. 145–174. (Ver p. 40).

[33] I. Juhász e W. Weiss. “Omitting the cardinality of the continuum in scattered spaces”. *Topol. Appl.* 31 (1989), p. 19–27. (Ver p. 40, 41).

[34] M. Barr, J. F. Kennison e R. Raphael. “Searching for absolute $\mathcal{CR}$-epic spaces”. *Can. J. Math.* 59.3 (2007), p. 465–487. (Ver p. 46).

Índice de símbolos

$(\mathcal{A})_H$, 3

$\mathrm{cf}\left([\kappa]^\mu, \subseteq\right)$, 3
$\mathrm{cf}(\alpha)$, 3
CH, 3
$\mathbf{Cov}_\omega(\kappa)$, 3

$d(X)$, 7

$F(X)$, 7

$\mathrm{ht}(X)$, 9

$\mathcal{K}(X)$, 43

$L(X)$, 8

Ω_x, 22
$\Omega_X(x)$, 22
$\Omega_{X,M}(x)$, 22

$\perp$, 4

$SP(X)$, 18
supp, 26

$t(X)$, 7
$t(x, X)$, 7
τ_δ, 8
τ_M, 21
τ_ω, 16

$w(X)$, 7

$X^{(\alpha)}$, 8
X_M, 21

Índice remissivo

α-ésima derivada, 8

altura de Cantor-Bendixson, 9
anticadeia, 4
    maximal, 4
atribuição de vizinhanças, 44

κ-disperso, 16
cobertura de Alster, 46
cofinalidade, 3
compatíveis, 4
condição, 4

D-espaço, 45
definível, conjunto, 6
densidade, 7
disperso, 8

espaço
    α-disperso, 17
    de Alster, 46
    metacompacto, 8
    metalindelöf, 8
    N-disperso, 17
    paracompacto, 8
    paralindelöf, 8
    fracamente σ-disperso, 17
extensão, 4

filtro, 4
    $\mathbb{P}$-genérico, 4
fortemente κ-disperso, 16
freeness, 7

G_δ-refinamento, 8
G_δ-topologia, 8
grau
    de Lindelöf, 8

Hipótese do Continuum, 3

incompatíveis, 4

núcleo para uma atribuição, 45

ordem de forcing, 4

P-espaço, 8
P-ponto forte, 18
peso, 7
ponto de acumulação completa, 7
pré-ordem, 4

separado à direita, 8
sequência
    livre, 7
σ-produto, 26
SP-disperso, 18
submodelo elementar
    enumeravelmente fechado, 21
    κ-*covering*, 21
suporte
    de um ponto, 26

tightness
    de um espaço, 7
    de um ponto, 7