Álgebras de composição de cor

Daniel Felipe Castro Ovalle

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Ivan Chestakov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e CNPq

São Paulo, Junho 15 de 2016

Álgebras de composição de cor

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 26/04/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ivan Chestakov (orientadora) - IME-USP
- Prof^{a}. Dr^{a}. Lucia Satie Ikemoto Murakami - IME-USP
- Prof. Dr. Alberto Elduque - Universidad de Zaragoza
- Prof. Dr. Plamen Koshlukov - Unicamp
- Prof^{a}. Dr^{a}. Irina Sviridova -UNB

Agradecimentos

Ao professor Ivan Chestakov pela orientação, sua disposição, compreensão e profissionalismo foram decisivos para a realização desse trabalho.

Aos meus pais, Gloria e Fernando, pelo apoio e paciência. A todos os amigos do IME-USP pela colaboração e amizade.

A CNPq e CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

CASTRO OVALLE, D. F. **Álgebras de composição de cor**. 2016. xii+65f. Tese - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Este trabalho tem por objetivo definir as álgebras de composição de cor e classificá-las . Para isso utilizamos o processo de Cayley-Dickson e a construção da base "canônica" de uma álgebra Cayley cindida como referência.
Estabelecemos também uma relação entre as álgebras alternativas quadráticas de cor e as álgebras de composição de cor.

Palavras-chave: fator de comutação, graduações sobre álgebras, álgebra de composição de cor, álgebra alternativa de cor, álgebra quadrática de cor, processo de Cayley-Dickson.

Abstract

CASTRO OVALLE, D. F. **Color composition algebras**. 2016. x+61f. Tese - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.
This work aims to define the color composition algebras and classify them. For this we use the Cayley-Dickson process and the construction of the "canonical" base of a split Cayley algebra as a reference. We also established a relation between the color alternative quadratic algebras and the color composition algebras.

Keywords: commutation factor, gradings on algebras, color composition algebra, color alternative algebra, color quadratic algebra, Cayley-Dickson process.

Sumário

Introdução

Sabemos que, se $z = a_1 + a_2 i$ e $z' = b_1 + b_2 i$ são números complexos então $|zz'| = |z||z'|$, isto é,

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2,$$

o qual mostra que o produto de duas somas de dois quadrados é novamente uma soma de dois quadrados. Uma questão que surge é se esta fórmula pode ser generalizada para uma soma de n quadrados. Em outras palavras surgiu a ideia que vamos descrever a seguir. Para que valores de n a seguinte igualdade é obtida

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2,$$

onde todos os $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e cada c_i é uma combinação linear de $\{a_i b_j | 1 \leq i, j \leq n\}$.
Hamilton construiu um exemplo para $n = 4$ (quatérnios) e Graves e Cayley para $n = 8$ (octônios). As álgebras de quatérnios e octônios são frequentemente denotados por $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$, respectivamente. Em 1843 Hamilton notou que a existência de uma identidade para uma soma de n quadrados é equivalente à existência de uma álgebra de divisão de uma determinada forma com dimensão n sobre o corpo dos números reais. Em 1898, Hurwitz provou que as identidades de nosso interesse são apenas possíveis para $n = 1, 2, 4, 8$.

Depois surgiu o problema de Hurwitz, o qual consiste em encontrar as formas quadráticas não-degeneradas, no lugar de soma de quadrados, sobre um corpo arbitrário que permitem composição. Este problema foi resolvido em trabalhos de Dickson (1919), Albert (1942), Kaplansky (1953) e Jacobson (1958). Neste caso, o problema também é reduzido à descrição de uma determinada classe de álgebras, as assim chamadas "álgebras de composição".

O papel das álgebras de composição é difícil de estimar. As álgebras $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$ foram os primeiros exemplos de álgebras não-comutativas e não-associativas, respectivamente; na realidade, a teoria das álgebras foi iniciada com estas álgebras. As álgebras de composição estão na base da classificação das álgebras de Jordan simples e álgebras de Lie excepcionais simples ("quadrado mágico de Freudenthal"). Muitos objetos geométricos excepcionais, caso dos planos projetivos não-Desarguesianos, espaços simétricos excepcionais, estão relacionados com os octônios. Os octônios também estão relacionados com a geometria de Lorentz, álgebras de Clifford, periodicidade de Bott e existência de campos vetoriais suaves em esferas. As aplicações das álgebras de composição não estão limitadas pela Matemática; elas também são usadas em Física, por exemplo, na teoria das supercordas (ver [Bae01]).

Com o desenvolvimento da teoria das superálgebras, foi natural ver se a noção de álgebra de composição podia ser generalizada para o "super"-análogo. Em [She97], Shestakov classificou as superálgebras alternativas simples, e ocorreu que em característica 3 apareceram duas superálgebras, $B(1,2)$ e $B(4,2)$. Posteriormente, Elduque e Okubo [EO02] definiram e classificaram as superálgebras de composição com elemento identidade (superálgebras de Hurwitz). Eles provaram que as duas álgebras mencionadas são superálgebras de Hurwitz e que, se a característica é diferente de 2, estas duas superálgebras são as únicas superálgebras de Hurwitz não-triviais (com parte ímpar diferente de zero).

Uma generalização das superálgebras de Lie foi introduzida por Scheunert em [Sch79], sob o nome de (super)álgebras de Lie de cor, na qual a álgebra é graduada por um grupo abeliano e não apenas por $\mathbb{Z}_2$. Scheunert mostrou que o estudo de (super)álgebras de Lie de cor está intimamente relacionado com o estudo das graduações sobre superálgebras de Lie.

Graduações sobre álgebras de composição foram descritas em [Eld98] e [Eld09]. As graduações sobre álgebras de composição são úteis para encontrar graduações sobre álgebras de Lie excepcionais simples. Por outro lado, as graduações sobre superálgebras de composição foram descritas em [Ara15].

O objetivo principal de este trabalho é introduzir e classificar as álgebras de composição de cor. Veremos que, como no caso de álgebras de Lie de cor, as graduações sobre álgebras e superálgebras de Hurwitz são fundamentais no estudo das álgebras de composição de cor.

O processo de Cayley-Dickson é uma ferramenta importante na classificação das álgebras de composição. Mostraremos que este processo pode ser generalizado para as álgebras de composição de cor, e que tem um papel importante na classificação das álgebras de composição de cor. A construção da base "canônica" de uma álgebra de Cayley-Dickson cindida é importante para o estudo das graduações sobre essa álgebras, também usaremos como referência esta construção para a classificação das álgebras de composição de cor.

Há outras estruturas naturais, tais como álgebra alternativa de cor e álgebra quadrática de cor, as quais estão relacionadas com as álgebras de composição de cor. Em particular mostramos que toda álgebra de composição de cor é uma álgebra alternativa de cor e uma álgebra quadrática de cor e que, se a característica do corpo F é diferente de 2, toda álgebra alternativa quadrática de cor simples graduada sobre F, satisfazendo certas propriedades é uma álgebra de composição de cor sobre certo corpo.

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma. O Capítulo 1, contém a definição de um fator de comutação ϵ sobre um grupo abeliano Γ, e alguns resultados básicos concernentes a estruturas algébricas graduadas, álgebras de composição, superálgebras de Hurwitz e fatores de comutação sobre grupos abelianos finitamente gerados. No Capítulo, 2 introduzimos as álgebras de composição de cor (ou ϵ-álgebras de composição), estudamos algumas propriedades destas álgebras e mostramos uma generalização do processo de Cayley-Dickson. Também, veremos que em característica diferente de 2, toda álgebra de composição de cor é uma “coloração” de uma superálgebra de composição. No Capítulo 3, apresentamos a classificação das álgebras de composição de cor. Finalmente, no Capítulo 4 discutimos algumas relações entre álgebras de composição de cor, álgebras alternativa de cor e álgebras quadráticas de cor.

Os resultados principais da tese são os Teoremas 2.22, 3.10, 3.18, 3.20 e 4.11.
No Teorema 2.22, dado um fator de comutação arbitrário ϵ sobre um grupo abeliano Γ, estabelecemos uma correspondência entre ϵ-álgebras de composição e $\epsilon\rho$-álgebras de composição, onde ρ é um fator de comutação sobre Γ tal que $\rho(\gamma, \gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Em particular, mostramos no Corolário 2.23 que, se a característica do corpo é diferente de 2 então existe uma correspondência entre ϵ-álgebras de composição e superálgebras de Hurwitz. Portanto, o conhecimento das graduações das superálgebras de Hurwitz pode ser usado para obter a classificação das álgebras de composição de cor.
Nos Teoremas 3.10, 3.18 e 3.20, nós demos uma classificação completa das álgebras de composição de cor, a menos de equivalência. Algumas delas são as superálgebras de Hurwitz clássicas munidas de varias graduações. Mas aparecem também algumas álgebras completamente novas as quais são “colorações” das álgebras de composição, as quais são álgebras alternativas de cor, não-alternativas, tais álgebras são de dimensão 4 e 8. Também aparece uma álgebra de dimensão 4 sobre um corpo de característica 2 com uma $\mathbb{Z}_3$-graduação, a qual não é uma “coloração” de uma superálgebra de Hurwitz.
Observamos que os Teoremas 3.10, 3.18 e 3.20, generalizam tanto os resultados clássicos de Hurwitz, Kaplansky e Jacobson sobre a classificação de álgebras de composição quanto os resultados de Shestakov, Elduque e Okubo sobre a classificação de superálgebras de Hurwitz.
Nós provamos que toda álgebra de composição de cor é uma álgebra alternativa quadrática de cor simples. No Teorema 4.11 obtemos um resultado recíproco, isto é, que toda álgebra alternativa quadrática de cor simples graduada, satisfazendo certas propriedades é uma álgebra de composição de cor. O Teorema 4.11 generaliza o Teorema 2.4 do livro [ZSSS82], página 39, sobre álgebras alternativas quadráticas simples.

Capítulo 1

Considerações preliminares

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições e alguns resultados que serão utilizados no decorrer da tese. Não apresentamos as demonstrações de muitos resultados clássicos, mas em cada caso sugerimos a respetiva referência. Na seção 1.1, introduzimos notações sobre estruturas algébricas graduadas. Na seção 1.2, recordamos conceitos básicos das álgebras de composição. Na seção 1.3, mencionamos as superálgebras de Hurwitz. A seção 1.4, contém alguns resultados sobre fatores de comutação.

Ao longo de este trabalho F denotará um corpo arbitrário e Γ representará um grupo Abeliano. O grupo multiplicativo dos elementos não zero de F será denotado por $F^{\times}$. Todos os espaços vetoriais e álgebras serão assumidos tendo F como seu corpo de escalares.

1.1 Estruturas algébricas graduadas

Nesta seção apresentaremos algumas definições relativas a estruturas algébricas graduadas. (Ver [EK13], Capítulo 1.)

Espaços vetoriais graduados: Seja G um grupo (ou um semigrupo) e seja V um espaço vetorial sobre um corpo F. Uma *G-graduação* de V é qualquer decomposição de V em uma soma direta de subespaços de V indexados por G,

$$\Lambda : V = \bigoplus_{g \in G} V_g.$$

Aqui permitimos que alguns dos subespaços V_g sejam zero. O conjunto

$$Supp\Lambda = Supp_G V := \{g \in G \mid V_g \neq 0\},$$

será chamado de *suporte da graduação*. O suporte de uma G-graduação não é em geral um sub(semi)grupo de G. Uma graduação é não-trivial se o suporte consiste de mais de um elemento. O subespaço V_g será chamado de *componente homogênea* de grau g. Se $v \in V_g$, então diremos que v é homogêneo de grau g e escrevemos $\deg_\Lambda v = g$ ou somente $\deg v = g$ se a graduação é clara do contexto. Se uma graduação é fixa, então V será referido como um *espaço vetorial G-graduado*.
Qualquer elemento $v \in V$ pode ser escrito de forma única como $\sum_{g \in G} v_g$, onde $v_g \in V_g$ e todos menos uma quantidade finita dos v_g são zero. Vamos nos referir aos v_g como as *componentes homogêneas de v*.
Um subespaço U de V é dito um *subespaço G-graduado*, se $U = \bigoplus_{g \in G}(U \cap V_g)$. Equivalentemente, U é G-graduado se para todo elemento $u \in U$, todas suas componentes homogêneas (como um elemento de V) estão em U.

Existem duas formas naturais nas quais uma aplicação linear $f : V \to W$ respeita graduações sobre V e W.

Definição 1.1. *Sejam $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ um espaço vetorial G-graduado e $W = \bigoplus_{h\in H} W_h$ um espaço vetorial H-graduado. Uma aplicação linear $f : V \to W$ é dita graduada se para qualquer $g \in G$ existe um $h \in H$ tal que $f(V_g) \subseteq W_h$. Se $f(V_g) \neq 0$ então h é determinada de forma única.*

Definição 1.2. *Sejam $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ e $W = \bigoplus_{g\in G} W_g$ espaços vetoriais G-graduados. Uma aplicação linear $f : V \to W$ é dita um homomorfismo de espaços G-graduados se para todo $g \in G$, temos que $f(V_g) \subseteq W_g$. O conjunto de todas estas aplicações será denotado por $Hom^G(V, W)$. Se f for também bijetivo dizemos que f é um isomorfismo de espaços vetoriais G-graduadas e que V e W são dois espaços vetoriais G-graduados isomorfos.*

Álgebras graduadas: Seja G um (semi)grupo. Geralmente, utilizaremos a notação multiplicativa para G, mas para grupos Abelianos vamos mudar para a notação aditiva.
Seja A uma álgebra (não necessariamente associativa). Uma *graduação* sobre A por G, ou uma G-*graduação* sobre A é uma decomposição de A em uma soma direta de subespaços $\Lambda : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$, tal que $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ para todo $g, h \in G$. Se tal decomposição é fixa, vamos nos referir a A como uma álgebra G-graduada. Uma subálgebra B de A é dita subálgebra G-graduada de A, se ela é graduada como subespaço de A, $B = \bigoplus_{g\in G}(A_g \cap B)$. Se A tem unidade 1 segue-se que $1 \in A_0$.

Sejam $\Lambda : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ e $\Lambda' : A = \bigoplus_{h\in H} A_h$ graduações sobre A. Dizemos que Λ é um *refinamento* de Λ' se para cada $g \in G$ existe algum $h \in H$ tal que $A_g \subseteq A_h$. Uma graduação é dita *fina* se não admite um refinamento próprio.

Seja G um grupo. Dada uma graduação $\Lambda : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$, definimos o *grupo da graduação universal* como o grupo $U(\Lambda)$ gerado por $Supp\Lambda$ com as relações $g_1g_2 = g_3$ quando $0 \neq A_{g_1}A_{g_2} \subseteq A_{g_3}$ (é claro que Λ induz uma $U(\Lambda)$-graduação sobre A. Existe um homomorfismo natural $U(\Lambda) \to G$.
Dada uma G-graduação $\Lambda : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ e um homomorfismo de grupos $\alpha : G \to H$, a H-graduação $\Lambda' : A = \bigoplus_{g\in\alpha^{-1}(H)} A_g$ é chamada a graduação induzida de Λ pelo homomorfismo α. Λ é um refinamento de Λ'. Qualquer graduação por um grupo H é induzida de uma graduação (por grupo) fina por um homomorfismo do grupo da graduação universal da graduação fina em H.

Sejam $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ e $W = \bigoplus_{g\in G} W_g$ espaços vetoriais G-graduados. Uma *equivalência de espaços vetoriais graduados* $f : V \to W$ é um isomorfismo de espaços vetoriais tal que f e f^{-1} são aplicações graduadas (Definição 1.1).
Sejam $\Lambda : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ e $\Lambda' : B = \bigoplus_{h\in H} B_h$ duas graduações sobre álgebras, com suportes S e T, respectivamente.

Definição 1.3. *Dizemos que Λ e Λ' são equivalentes se existe uma equivalência de álgebras graduadas $\varphi : A \to B$, isto é, um isomorfismo de álgebras que é também uma equivalência de espaços vetoriais graduados. Além disso, vamos dizer que φ é uma equivalência de Λ e Λ'. Ele determina uma bijeção $\alpha : S \to T$ tal que $\varphi(A_s) = B_{\alpha(s)}$ para todo $s \in S$.*

Observe que a função $\alpha : S \to T$ fornece um isomorfismo entre os grupos das graduações universais correspondentes.

Definição 1.4. *Dizemos que duas álgebras G-graduadas, $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ e $B = \bigoplus_{g\in G} B_g$, são isomorfas se existe um isomorfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ tal que $\varphi(A_g) = B_g$ para todo $g \in G$. Também, dizemos que φ é um isomorfismo das G-graduações sobre A e B.*

Uma superálgebra é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Dada uma superálgebra, vamos escrever sua $\mathbb{Z}_2$-graduação com a seguinte notação $A = A_{(\bar{0})} \oplus A_{(\bar{1})}$, e esta será chamada a $\mathbb{Z}_2$-*graduação principal* (ou apenas a *graduação principal* a fim de distingui-la das outras possíveis $\mathbb{Z}_2$-graduações.)
Seja $\Lambda : A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma graduação sobre a superálgebra $A = A_{(\bar{0})} \oplus A_{(\bar{1})}$ considerada como álgebra. Dizemos que Λ é uma *graduação* sobre a superálgebra A (ou que Λ é compatível com a graduação principal) se $A_g = (A_g \cap A_{(\bar{0})}) \oplus (A_g \cap A_{(\bar{1})})$, para todo $g \in G$.

1.2 Álgebras de composição

Nesta seção mostraremos algumas propriedades das álgebras de composição. Também, apresentaremos as graduações sobre as álgebras de composição.

Seja V um espaço vetorial de dimensão não nula. Uma aplicação $f : V \times V \to F$ é dita uma *forma bilinear* se para quaisquer $x, x', y, y' \in V$ e $\mu \in F$

(1) $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$;

(2) $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$;

(3) $f(\mu x, y) = f(x, \mu y) = \mu f(x, y)$.

A forma bilinear f é dita *simétrica* se $f(x, y) = f(y, x)$ para todo $x, y \in V$, *anti-simétrica* se $f(x, y) = -f(y, x)$ para todo $x, y \in V$ e *alternada* se $f(x, x) = 0$ para todo $x \in V$. Uma forma bilinear simétrica ou anti-simétrica f é dita não-degenerada se, de $f(a, x) = 0$ para todo $x \in V$, segue-se que $a = 0$.

Uma aplicação $q : V \to F$ é dita uma forma *quadrática* se

(1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, para quaisquer $x \in V$ e $\lambda \in F$;

(2) a função $f(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ é uma forma bilinear sobre V.

Uma forma quadrática $q(x)$ é dita *estritamente não-degenerada* se a forma bilinear simétrica simétrica $f(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ associada a $q(x)$ é não-degenerada.

Uma álgebra A sobre um corpo F com elemento identidade 1 é dita uma *álgebra de composição* se existe uma forma quadrática estritamente não-degenerada (a norma) $q : A \to F$ tal que

$$q(xy) = q(x)q(y) \tag{1.1}$$

para todo $x, y \in A$.

Uma álgebra R é dita *alternativa* se $x^2y = x(xy)$ e $yx^2 = (yx)x$ para todo $x, y \in R$.

Lema 1.5. *([ZSSS82], página 25) Seja A uma álgebra de composição. Então A é alternativa e cada elemento de A satisfaz uma equação quadrática com coeficientes em F (isto é, a álgebra A é quadrática sobre F).*

Demonstração. Vamos identificar o corpo F com a subálgebra $F \cdot 1$ da álgebra A. Substituindo $y + w$ no lugar de y em (1.1), obtemos que $q(x)q(y + w) = q(xy + xw)$. Subtraindo a identidade (1.1) desta igualdade, e também a identidade obtida a partir de (1.1) através da substituição de y por w, obtemos

$$q(x)f(y, w) = f(xy, xw). \tag{1.2}$$

Realizando o mesmo procedimento com x, obtemos

$$f(xy, zw) + f(xw, zy) = f(x, z)f(y, w). \tag{1.3}$$

Agora, substituímos $z = 1$ e $y = xu$ em (1.3):

$$f(x(xu), w) + f(xw, xu) = f(x, 1)f(xu, w). \tag{1.4}$$

Dado que, por (1.2) $f(xw, xu) = q(x)f(w, u)$, então (1.4) pode ser reescrita na forma

$$f(x(xu) + q(x)u - f(x, 1)xu, w) = 0. \tag{1.5}$$

Como a forma $f(x, y)$ é não-degenerada e w é arbitrário, obtemos que

$$x(xu) + q(x)u - f(x, 1)xu = 0, \tag{1.6}$$

para todo $x, u \in A$. Agora colocando $u = 1$ em (1.6), obtemos

$$x^2 - f(x, 1)x + q(x) = 0, \tag{1.7}$$

o que prova que A é quadrática sobre F. Resta apenas provar que A é alternativa.
Multiplicando (1.7) à direita por u e comparando com (1.6), obtemos que $x^2u = x(xu)$. De modo análogo, vemos que $ux^2 = (ux)x$. Consequentemente a álgebra A é alternativa. □

Observação 1.6. *Seja A uma álgebra sobre um corpo F com elemento identidade 1 e seja f uma forma bilinear simétrica não-degenerada sobre A que satisfaz a identidade (1.3). Se $car(F) \neq 2$ então A é uma álgebra de composição com forma quadrática $q(a) = \frac{f(a,a)}{2}$, para todo $a \in A$.*

Um endomorfismo ρ de um espaço vetorial A é dito uma *involução* da álgebra A se $\rho(\rho(a)) = a$ e $\rho(ab) = \rho(b)\rho(a)$ para todo $a, b \in A$.

Lema 1.7. *Seja A uma álgebra de composição sobre um corpo F, com forma quadrática q e forma bilinear simétrica f. A função $a \to \overline{a} = f(1, a) - a$ é uma involução da álgebra A que deixa os elementos do corpo F fixos. Também, os elementos $t(a) = a + \overline{a}$ e $q(a) = a\overline{a}$ estão em F para todo $a \in A$. Além disso, a satisfaz a igualdade*

$$a^2 - t(a)a + q(a) = 0.$$

Demonstração. Ver [ZSSS82], página 26. □

Lema 1.8. *Seja A uma álgebra sobre um corpo F com elemento identidade 1 e com involução $x \to \overline{x}$, onde para cada $x \in A$ os elementos $x + \overline{x}$ e $x\overline{x}$ pertencem a F. Então, se a forma bilinear simétrica sobre A $f(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$, associada a $q(x) = x\overline{x}$, é não-degenerada, a álgebra A é simples ou isomorfa à soma direta $F \oplus F$ com involução $\overline{(a, b)} = (b, a)$.*

Demonstração. Ver [ZSSS82], página 27. □

Portanto, uma álgebra de composição sobre um corpo F é alternativa, quadrática e, simples ou isomorfa a $F \oplus F$.

As álgebras de composição podem ser obtidas pelo assim chamado processo de Cayley-Dickson, o qual descreveremos a continuação.

Processo de Cayley-Dickson: Seja A uma álgebra sobre um corpo F com elemento identidade 1 e com uma involução $a \to \overline{a}$, onde $a+\overline{a}, a\overline{a} \in F$ para todo $a \in A$. O *processo de Cayley-Dickson* consiste em construir a partir de A uma nova álgebra com involução a qual contém a A como subálgebra. Além disso, se a dimensão da álgebra A é igual a m, então a dimensão da nova álgebra será igual a $2m$. Fixamos $\psi \in F^{\times}$, e denotamos por $CD(A, \psi)$ à coleção de todos os pares ordenados (a_1, a_2), $a_i \in A$, com operações de soma componente a componente, multiplicação por escalar e a multiplicação

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \psi a_4\overline{a_2},\ \overline{a_1}a_4 + a_3a_2).$$

É fácil ver que, $CD(A, \psi)$ é uma álgebra sobre F. O elemento $(1, 0)$ é um elemento identidade da álgebra $CD(A, \psi)$ e $\overline{(a_1, a_2)} = (\overline{a_1}, -a_2)$ define uma involução em $CD(A, \psi)$. O conjunto $A' = \{(a, 0)|a \in A\}$ é uma subálgebra da álgebra $CD(A, \psi)$ a qual é isomorfa à álgebra A. Seja $v = (0, 1)$. Então $v^2 = \psi(1, 0)$, e $CD(A, \psi)$ é uma soma direta dos espaços vetoriais A' e vA'. Se identificarmos A' com A, os elementos da álgebra $CD(A, \psi)$ são representados na forma $x = a_1 + va_2$, onde os $a_i \in A$ estão unicamente determinados pelo elemento x, e a multiplicação em $CD(A, \psi)$ é dada por

$$(a_1 + va_2)(a_3 + va_4) = (a_1a_3 + \psi a_4\overline{a_2}) + v(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2). \tag{1.8}$$

A álgebra $CD(A, \psi)$ é associativa se, e somente se, A é associativa e comutativa. A álgebra $CD(A, \psi)$ é alternativa se, e somente se, A é associativa. Se A é uma álgebra de composição então, $CD(A, \psi)$ é uma álgebra de composição se, e somente se, A é associativa.

Para um elemento arbitrário $x = a_1 + va_2 \in CD(A, \psi)$, $\overline{x} = \overline{a_1} - va_2$.

Exemplo 1.9. *Temos os seguintes exemplos de álgebras de composição.*

I) *F é um corpo de característica $\neq 2$, e $q(x) = x^2$ para todo $x \in F$.*

II) *$K(\mu) = F \oplus Fv_1$, onde $v_1^2 = v_1 + \mu$ e $4\mu + 1 \neq 0$, o corpo F é arbitrário, a involução é $\overline{a + bv_1} = (a + b) - bv_1$, e a forma quadrática é $q(a) = a\overline{a}$. Se o polinômio $x^2 - x - \mu$ é irredutível em $F[x]$, então a álgebra $K(\mu)$ é um corpo (uma extensão quadrática separável de F). Quando o polinômio $x^2 - x - \mu$ é redutível em $F[x]$, temos que $K(\mu) = F \oplus F$.*

III) *$Q(\mu, \psi) = CD(K(\mu), \psi)$ com $\psi \neq 0$ é a álgebra de quatérnios generalizada. É fácil ver que a álgebra $Q(\mu, \psi)$ é associativa mas não comutativa.*

IV) *$C(\mu, \psi, \lambda) = CD(Q(\mu, \psi), \lambda)$ com $\lambda \neq 0$ é a álgebra Cayley-Dickson. É fácil verificar que a álgebra Cayley-Dickson $C(\mu, \psi, \lambda)$ é não-associativa.*

Teorema 1.10. *Seja A uma álgebra de composição sobre um corpo F. Então A é isomorfa a uma álgebra do tipo I-IV.*

Demonstração. Ver [ZSSS82], página 32. □

Álgebras de composição cindidas: Uma álgebra de composição A tem divisores de zero se, e somente se, $q(x) = 0$ para algum $0 \neq x \in A$. Quando isto ocorre, dizemos que A é uma álgebra de composição *cindida* e que x é um elemento *isotrópico*. Uma álgebra de composição A é cindida se, e somente se, A contem um elemento idempotente $e \neq 0, 1$ (Ver [ZSSS82], Lema 10, página 43). Observe que qualquer álgebra de composição A de dimensão ≥ 2 sobre um corpo F algebricamente fechado é cindida: Sejam $a \in A \setminus F$ e $\alpha \in F$ uma raiz da equação $x^2 - t(a)x + q(a) = 0$. Então, temos que $a^2 - \alpha^2 = t(a)(a - \alpha)$, logo $(a - \alpha)(a + \alpha - t(a) = 0$, isto é, existem divisores de zero em A. Portanto A é uma álgebra de composição cindida.
Por exemplo, $K(0)$, $Q(0, 1)$ e $C(0, 1, 1)$ são cindidas: $v_1 \in K(0)$ é um elemento idempotente diferente de 0 e 1.

A aplicação $K(0) = F \oplus Fv_1 \to F \oplus F$ que leva $\alpha + \beta v_1$ em $(\alpha + \beta, \alpha)$ fornece um isomorfismo entre $K(0)$ e $F \oplus F$. Em adição, a involução $\overline{(\alpha, \beta)} = (\beta, \alpha)$ na álgebra $F \oplus F$ corresponde à involução da álgebra $K(0)$.
Consideremos a álgebra $M_2(F)$ das matrizes 2×2 com coeficientes em F. É fácil ver que $M_2(F)$ é uma álgebra de composição com respeito à forma quadrática $q(x) = \det x$. A álgebra $Q(0, 1)$ é isomorfa à álgebra $M_2(F)$. Um isomorfismo é dado por

$$\alpha + \beta v_1 + \gamma v_2 + \delta v_1 v_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \gamma + \delta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

A álgebra $C(0, 1, 1)$ é isomorfa à álgebra $CD(M_2(F), 1)$ que é denotada por $C(F)$ e é denominada *álgebra de matrizes de Cayley-Dickson.*

Teorema 1.11. *Se A é uma álgebra de composição cindida sobre um corpo F então A é isomorfa a $F \oplus F$, $M_2(F)$ ou $C(F)$.*

Demonstração. Ver [ZSSS82], página 46. □

Definição 1.12. *Sejam A um espaço vetorial de dimensão não nula sobre F e f uma forma bilinear simétrica ou anti-simétrica sobre A. Se B é algum subespaço do espaço A, vamos denotar por $B^\perp$ o complemento ortogonal do subespaço B com respeito à forma $f(x, y)$, $B^\perp = \{a \in A \mid f(a, B) = 0\}$.*

Seja C uma álgebra de composição Cayley-Dickson cindida e seja $0 \neq a \in A$ tal que $q(a) = 0$. Neste caso, podemos tomar $b \in A$ tal que $f(a, \bar{b}) = 1$ (f é não-degenerada). Seja $e_1 := ab$. Temos que $q(e_1) = 0$ e $f(e_1, 1) = 1$, assim $e_1^2 = e_1$. Seja $e_2 := \overline{e_1} = 1 - e_1$, logo $q(e_2) = 0$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ e $f(e_1, e_2) = f(e_1, 1) = 1$. Então $K = Fe_1 \oplus Fe_2$ é uma subálgebra de composição de C.
Para qualquer $x \in K^\perp$, $xe_1 + \overline{xe_1} = f(xe_1, 1) = f(x, \overline{e_1}) = f(x, e_2) = 0$. Assim, $xe_1 = -\overline{e_1}\,\overline{x} = e_2 x$, e obtemos que $xe_1 = e_2 x$, $xe_2 = e_1 x$. Também, $x = 1x = e_1 x + e_2 x$, e $e_2(e_1 x) = (1 - e_1)(e_1 x) = ((1 - e_1)e_1)x = 0 = e_1(e_2 x)$. Portanto, $K^\perp = U \oplus V$, com

$$U = \{x \in C \mid e_1 x = x = xe_2, e_2 x = 0 = xe_1\} = (e_1 C)e_2,$$
$$V = \{x \in C \mid e_2 x = x = xe_1, e_1 x = 0 = xe_2\} = (e_2 C)e_1.$$

Para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$, $q(u) = q(e_1 u) = q(e_1)q(u) = 0$ e $q(v) = q(e_2 v) = q(e_2)q(v) = 0$, assim U e V são subespaços isotrópicos de C. Logo $f(U, U) = f(V, V) = 0$. Como f é não-degenerada, U e V estão pareados por f e $dim\ U = dim\ V = 3$. Para quaisquer $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$, por (1.3)

$$f(u_1 u_2, K) \subseteq f(u_1, K u_2) \subseteq f(U, U) = 0,$$
$$f(u_1 u_2, v) = f(u_1 u_2, e_2 v) = -f(u_1 v, e_2 u_2) + f(u_1, e_2) f(u_2, v) = 0.$$

Consequentemente U^2 é ortogonal a K e V, assim $U^2 \subseteq V$. Também $V^2 \subseteq U$. Aliás, por (1.3)

$$f(UV, U) \subseteq f(U^2, V) \subseteq f(V, V) = 0,$$
$$f(UV, V) \subseteq f(U, V^2) \subseteq f(U, U) = 0,$$

assim $UV + VU \subseteq K$. Além disso, $f(UV, e_1) \subseteq f(U, e_1 V) = 0$, logo $UV \subseteq Fe_1$ e $VU \subseteq Fe_2$. Mais exatamente, para $u \in U$ e $v \in V$, $f(uv, e_2) = -f(u, e_2 v) = -f(u, v)$, de modo que $uv = -f(u, v)e_1$, e $vu = -f(u, v)e_2$. Então, a decomposição $C = K \oplus U \oplus V$ é uma $\mathbb{Z}_3$-graduação sobre C.
Para elementos linearmente independentes $u_1, u_2 \in U$, podemos tomar $v \in V$ tal que $f(u_1, v) \neq 0$ e $f(u_2, v) = 0$. Então $(u_1 u_2)v = -(u_1 v)u_2 = f(u_1, v)u_2 \neq 0$, assim $U^2 \neq 0$. Além disso, a aplicação

trilinear

$$\begin{aligned} U \times U \times U &\to F \\ (x, y, z) &\mapsto f(xy, z), \end{aligned}$$

é alternada (para qualquer $x \in U$, $q(x) = f(x, 1) = 0$, assim $x^2 = 0$ e portanto $f(x^2, z) = 0$; adicionalmente $f(xy, y) = -f(x, y^2) = 0$).
Tomemos uma base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de U com $f(u_1u_2, u_3) = 1$ (isto é sempre possível porque $f(U^2, U) \neq 0$, já que f é não-degenerada). Então $\{v_1 = u_2u_3, v_2 = u_3u_1, v_3 = u_1u_1\}$ é a base dual em V relativa a f. Diremos que $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ é uma *base canônica* da álgebra de composição Cayley-Dickson cindida C, e sua tabela de multiplicação é:

$\cdot$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3
e_1	e_1	0	u_1	u_2	u_3	0	0	0
e_2	0	e_2	0	0	0	v_1	v_2	v_3
u_1	0	u_1	0	v_3	$-v_2$	$-e_1$	0	0
u_2	0	u_2	$-v_3$	0	v_1	0	$-e_1$	0
u_3	0	u_3	v_2	$-v_1$	0	0	0	$-e_1$
v_1	v_1	0	$-e_2$	0	0	0	u_3	$-u_2$
v_2	v_2	0	0	$-e_2$	0	$-u_3$	0	u_1
v_3	v_3	0	0	0	$-e_2$	u_2	$-u_1$	0

Graduações sobre as álgebras de composição: A seguinte proposição mostra que ao lidar com graduações sobre álgebras de composição, é suficiente nos restringir a graduações sobre grupos abelianos.

Proposição 1.13. *Seja C uma álgebra de composição sobre um corpo F. Se G é um semigrupo e $C = \bigoplus_{g \in G} C_g$ é uma G-graduação com suporte S onde G é gerado por S, então G é um grupo abeliano.*

Demonstração. Ver [EK13], Proposição 4.10. □

Todas as possíveis graduações por um grupo, a menos de equivalência, sobre álgebras de Cayley-Dickson foram classificadas em [Eld98]. A classificação é resumida no seguinte resultado:

Teorema 1.14. *Seja $C = \bigoplus_{g \in G} C_g$ uma G-graduação não-trivial de uma álgebra Cayley-Dickson, com norma q, sobre um corpo F, onde G é o grupo da graduação universal. Então temos um dos seguintes casos:*

(1) $G = \mathbb{Z}_2$:
$C_{\bar{0}}$ é uma álgebra de quatérnios Q e $C_{\bar{1}}$ é seu complemento ortogonal relativo à norma q ($f(C_{\bar{0}}, C_{\bar{1}}) = 0$). Portanto, $C = CD(Q, \alpha)$ para algum $0 \neq \alpha \in F$ e a $\mathbb{Z}_2$-graduação é dada pelo processo de Cayley-Dickson.

(2) $G = \mathbb{Z}_2^2$:
Existem uma subálgebra de composição de dimensão dois K de C e elementos $x, y \in C$ com $q(x) \neq 0 \neq q(y)$ e $f(K, x) = f(K \oplus Kx, y) = 0$ tal que

$$C_{(\bar{0},\bar{0})} = K, \quad C_{(\bar{1},\bar{0})} = Kx, \quad C_{(\bar{0},\bar{1})} = Ky, \quad C_{(\bar{1},\bar{1})} = K(xy).$$

Portanto, $C = CD(K, \psi, \lambda)$ com $\psi = -q(x)$ e $\lambda = -q(y)$ e a graduação é dada pelo iterado do processo de Cayley-Dickson.

(3) $G = \mathbb{Z}_2^3$ *(a característica do corpo F é diferente de 2):*
Existem elementos não-isotrópicos $x, y, z \in C$ tais que $f(1,x) = 0$, $f(F1 + Fx, y) = 0$, $f(F1 + Fx + Fy + F(xy), z) = 0$, e a graduação é determinada pelas condições:

$$C_{(\bar{0},\bar{0},\bar{0})} = F1, \quad C_{(\bar{1},\bar{0},\bar{0})} = Fx, \quad C_{(\bar{0},\bar{1},\bar{0})} = Fy, \quad C_{(\bar{0},\bar{0},\bar{1})} = Fz.$$

Aqui, $C = CD(F, \mu, \psi, \lambda)$ com $\mu = -q(x)$, $\psi = -q(y)$ e $\lambda = -q(z)$ e a graduação é dada pelo iterado do processo de Cayley-Dickson.

(4) $G = \mathbb{Z}_3$:
C é a álgebra de Cayley-Dickson cindida $C(F)$ com uma base canônica tal que:

$$C_{\bar{0}} = Fe_1 \oplus Fe_2, \quad C_{\bar{1}} = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3, \quad C_{\bar{2}} = Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fv_3.$$

(5) $G = \mathbb{Z}_4$:
C é a álgebra de Cayley-Dickson cindida $C(F)$ com uma base canônica tal que:

$$C_{\bar{0}} = Fe_1 \oplus Fe_2, \quad C_{\bar{1}} = Fu_1 \oplus Fu_2, \quad C_{\bar{2}} = Fu_3 \oplus Fv_3, \quad C_{\bar{3}} = Fv_1 \oplus Fv_2.$$

(6) $G = \mathbb{Z}$ *(3-graduação):*
C é a álgebra de Cayley-Dickson cindida $C(F)$ com uma base canônica tal que:

$$C_0 = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv_3 \quad C_1 = Fu_1 \oplus Fv_2, \quad C_{-1} = Fu_2 \oplus Fv_1.$$

(7) $G = \mathbb{Z}$ *(5-graduação):*
C é a álgebra de Cayley-Dickson cindida $C(F)$ com uma base canônica tal que:

$$C_0 = Fe_1 \oplus Fe_2 \quad C_1 = Fu_1 \oplus Fu_2, \quad C_2 = Fv_3 \quad C_{-1} = Fv_1 \oplus Fv_2, \quad C_{-2} = Fu_3.$$

(8) $G = \mathbb{Z}^2$:
C é a álgebra de Cayley-Dickson cindida $C(F)$ com uma base canônica tal que:

$$\begin{aligned} C_{(0,0)} = Fe_1 \oplus Fe_2 \quad C_{(1,0)} = Fu_1, \quad C_{(0,1)} = Fu_2, \quad C_{(1,1)} = Fv_3, \\ C_{(-1,0)} = Fv_1, \quad C_{(0,-1)} = Fv_2, \quad C_{(-1,-1)} = Fu_3. \end{aligned}$$

(9) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$:
C é a álgebra de Cayley-Dickson cindida $C(F)$ com uma base canônica tal que:

$$\begin{aligned} &C_{(0,0)} = Fe_1 \oplus Fe_2 \quad C_{(0,\bar{1})} = Fu_3 \oplus Fv_3, \\ &C_{(1,\bar{0})} = Fu_1, \quad C_{(1,\bar{1})} = Fv_2, \quad C_{(-1,\bar{0})} = Fv_1, \quad C_{(-1,\bar{1})} = Fu_2. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [Eld09], Teorema 2.9. □

Os argumentos usados em [Eld98] dão também as possíveis graduações das álgebras de composição de dimensão 4.

Corolário 1.15. *Seja $Q = \bigoplus_{g \in G} C_g$ uma graduação de grupo não-trivial de uma álgebra de quatérnios, com norma q, sobre um corpo F, onde G é o grupo da graduação universal. Então temos um dos seguintes casos:*

(1) $G = \mathbb{Z}_2$:
$Q_{\bar{0}}$ *é uma álgebra de composição de dimensão dois* K *e* $Q_{\bar{1}}$ *é seu complemento ortogonal relativo à norma* q *(*$f(Q_{\bar{0}}, Q_{\bar{1}}) = 0$*). Portanto,* $Q = CD(K, \psi)$ *para algum* $0 \neq \psi \in F$ *e a* $\mathbb{Z}_2$*-graduação é dada pelo processo de Cayley-Dickson.*

(2) $G = \mathbb{Z}_2^2$:
Existem elementos não-isotrópicos $x, y \in Q$ *tais que* $f(1, x) = 0,\ f(F1+Fx, y) = 0$*, e a graduação é determinada pelas condições:*

$$Q_{(\bar{0},\bar{0})} = F1, \quad Q_{(\bar{1},\bar{0})} = Fx, \quad C_{(\bar{0},\bar{1})} = Fy.$$

Portanto $C = CD(F, \mu, \psi)$ *com* $\mu = -q(x)$*,* $\psi = -q(y)$ *e a graduação é dada pelo iterado do processo de Cayley-Dickson.*

(3) $G = \mathbb{Z}$ *(3-graduação):*
Q *é, sob isomorfismo, á álgebra dos quatérnios cindida* $M_2(F)$ *e*

$$Q_0 = span\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}, \quad Q_1 = span\{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\}, \quad Q_{-1} = span\{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\}.$$

Demonstração. Ver [Eld09], Corolário 2.11. □

Seja K uma álgebra de composição de dimensão dois. A única graduação não-trivial sobre K ocorre se a característica do corpo é diferente de 2, e então $K = CD(F, \mu) = F1 \oplus Fu$, com $u^2 = \mu$, isto fornece uma $\mathbb{Z}_2$-graduação.

1.3 Superálgebras de Hurwitz

Comecemos com algumas definições. Sejam $q : V \to F$ uma forma quadrática e f a forma bilinear associada a q. Seja $V^\perp = \{x \in V \mid f(x, y) = 0\ \ para\ todo\ y \in V\}$. A forma quadrática q é dita *regular* (ou não-singular, ou não-degenerada) se $V^\perp = 0$ ou, $dim\ V^\perp = 1$ e $q(V^\perp) \neq 0$. O último caso ocorre apenas se $car\ F = 2$ e V tem dimensão impar. Se $car F \neq 2$, então a forma quadrática q é regular se, e somente se, sua forma bilinear simétrica f é não-degenerada ($V^\perp = 0$).
Agora seja C uma álgebra sobre F. Uma forma quadrática q sobre C é dita *multiplicativa* se $q(xy) = q(x)q(y)$ para todo $x, y \in C$.

Definição 1.16. *Uma álgebra* C *com elemento identidade sobre um corpo* F *dotada com uma forma quadrática multiplicativa regular (a norma)* $q : C \to F$ *é chamada de álgebra de Hurwitz.*

Seja C uma álgebra de Hurwitz sobre um corpo F então C é isomorfa a uma álgebra de composição sobre F ou a F ($car F = 2$), ver [EK13], Teorema 4.4.

Em [EO02], Elduque e Okubo definiram e classificaram as superálgebras de Hurwitz. Vejamos alguns dos resultados obtidos por eles. A continuação temos as definições de superforma quadrática e superálgebra de Hurwitz.

Definição 1.17. *Uma superforma quadrática em um espaço vetorial* $\mathbb{Z}_2$*-graduado (ou superespaço)* $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ *sobre um corpo* F *é um par* $q = (q_{\bar{0}}, f)$ *onde*

i) $q_{\bar{0}} : V_{\bar{0}} \to F$ *é uma forma quadrática usual.*

ii) $f : V \times V \to F$ *é uma forma bilinear super-simétrica par. Isto é,* $f|_{V_{\bar{0}} \times V_{\bar{0}}}$ *é simétrica,* $f|_{V_{\bar{1}} \times V_{\bar{1}}}$ *é alternada (*$f(x_{\bar{1}}, x_{\bar{1}}) = 0$ *para todo* $x_{\bar{1}} \in V_{\bar{1}}$*) e* $f(V_{\bar{0}}, V_{\bar{1}}) = f(V_{\bar{1}}, V_{\bar{0}}) = 0$.

iii) $f|_{V_{\bar{0}}\times V_{\bar{0}}}$ *é o polar de* $q_{\bar{0}}$. *Isto é,* $f(a_{\bar{0}}, b_{\bar{0}}) = q_{\bar{0}}(a_{\bar{0}} + b_{\bar{0}}) - q_{\bar{0}}(a_{\bar{0}}) - q_{\bar{0}}(b_{\bar{0}})$ *para quaisquer* $a_{\bar{0}}, b_{\bar{0}} \in V_{\bar{0}}$.

A superforma quadrática $q = (q_{\bar{0}}, f)$ é dita *regular* se $q_{\bar{0}}$ é regular e a forma alternada $f|_{V_{\bar{1}}\times V_{\bar{1}}}$ é não-degenerada.

Definição 1.18. *Uma superálgebra* $C = C_{\bar{0}} \oplus C_{\bar{1}}$ *sobre um corpo* F *com elemento identidade 1* $(1 \in C_{\bar{0}})$, *dotada com uma superforma quadrática regular* $q = (q_{\bar{0}}, f) : C \to F$ *(chamada a norma), é dita uma superálgebra de Hurwitz no caso que:*

$$q_{\bar{0}}(x_{\bar{0}}y_{\bar{0}}) = q_{\bar{0}}(x_{\bar{0}})q_{\bar{0}}(y_{\bar{0}}), \tag{1.9}$$

$$f(x_{\bar{0}}y, x_{\bar{0}}z) = q_{\bar{0}}(x_{\bar{0}})f(y, z) = f(yx_{\bar{0}}, zx_{\bar{0}}), \tag{1.10}$$

$$f(xy, zt) + (-1)^{|z||t|+|y||t|+|y||z|}f(xt, zy) = (-1)^{|y||z|}f(x, z)f(y, t), \tag{1.11}$$

para quaisquer $x_{\bar{0}}, y_{\bar{0}} \in C_{\bar{0}}$ *e elementos homogêneos* $x, y, z, t \in C$ *(Aqui* $|x|$ *significa a paridade do elemento homogêneo* x*).*

Observação 1.19. *([EO02]) Seja* C *uma superálgebra de Hurwitz de dimensão finita com* $C_{\bar{1}} \neq 0$, *então a forma bilinear supersimétrica* f *é não-degenerada.*

A seguir apresentamos alguns exemplos importantes de superálgebras de Hurwitz.

Exemplo 1.20. *(Superálgebra* $B(1,2)$, *[She97]). Sejam* F *um corpo de característica* 3 *e* V *um espaço vetorial sobre* F *de dimensão* 2 *com uma forma alternada não-degenerada* $(\cdot,\cdot)$. *Considere o superespaço* $B(1,2) = B(1,2)_{\bar{0}} \oplus B(1,2)_{\bar{1}}$ *com* $B(1,2)_{\bar{0}} = F \cdot 1$, $B(1,2)_{\bar{1}} = V$, *e multiplicação super-comutativa dada por* $1x = x1 = x$ *e* $uv = (u,v)1$ *para todo* $x \in B(1,2)$ *e* $u, v \in V$. $B(1,2)$ *é uma superálgebra de Hurwitz ([EO02]) com norma dada por* $q_{\bar{0}}(1) = 1$, $f(1, V) = 0$ *e* $f(u, v) = (u, v)$ *para todo* $u, v \in V$.

Exemplo 1.21. *(Superálgebra* $B(4,2)$, *[She97]). Sejam* F *um corpo de característica* 3 *e* $B(4,2) = B(4,2)_{\bar{0}} \oplus B(4,2)_{\bar{1}}$ *uma superálgebra sobre* F, *com* $B(4,2)_{\bar{0}} = M_2(F)$ *a álgebra das matrizes* 2×2 *sobre* F, $B(4,2)_{\bar{1}} = V = Fm_1 + Fm_2$ *o* $M_2(F)$*-bimódulo Cayley irredutível 2-dimensional, isto é,* $M_2(F)$ *age sobre* $B(4,2)_{\bar{1}}$ *da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} e_{ij} \cdot m_k &= \delta_{ik} m_j, \quad i.j, k \in \{1, 2\}, \\ m \cdot a &= \overline{a} \cdot m, \end{aligned}$$

onde $a \in B(1,2)_{\bar{0}}$, $m \in B(1,2)_{\bar{1}}$ *e* $a \to \overline{a}$ *é a involução simplética em* $M_2(F)$ $(a \mapsto \overline{a} := tr(a)1 - a$ *para todo* $a \in M_2(F))$. *A multiplicação ímpar sobre* $B(1,2)_{\bar{1}}$ *é definida por* $m_1^2 = -e_{12}$, $m_2^2 = e_{12}$, $m_1m_2 = -e_{22}$, *e* $m_2m_1 = e_{11}$. $B(4,2)$ *é uma superálgebra de Hurwitz ([EO02]) com norma dada por* $q_{\bar{0}}(a) = det(a)$ *para todo* $a \in M_2(F)$, $f(M_2(F), V) = 0 = f(V, M_2(F))$, $f(m_1, m_2) = -f(m_2, m_1) = 1$ *e* $f(m_i, m_i) = 0$.

Exemplo 1.22. *Sobre um corpo de característica* 2, *qualquer álgebra de Hurwitz* $\mathbb{Z}_2$*-graduada é obviamente uma superálgebra de Hurwitz. Mais precisamente, qualquer* $\mathbb{Z}_2$*-graduação de uma álgebra de Hurwitz é dada pelo processo de Cayley-Dickson (ver [Eld98] para as diferentes graduações sobre os Octônios). Isto é, se* $car(F) = 2$ *e* C *é uma álgebra de Hurwitz* $\mathbb{Z}_2$*-graduada com* $Supp_{\mathbb{Z}_2}C = \mathbb{Z}_2$ *então* $C = CD(D, \psi) = D \oplus Dv$, *com* D *é uma álgebra de composição de dimensão* 2 *ou* 4, $\psi \in F^\times$, $C_{\bar{0}} = D$ *e* $C_{\bar{1}} = Dv$.

Teorema 1.23. *([EO02]) Seja* C *uma superálgebra de Hurwitz sobre um corpo* F. *Então:*

i) $C_{\bar{1}} = 0$, *ou*

ii) a característica de F *é 3 e* C *é isomorfa a* $B(1,2)$ *ou a* $B(4,2)$, *ou* *iii) a característica de F é 2 e C é isomorfa à superálgebra $CD(D,\psi)$ para uma álgebra de composição D de dimensão 2 ou 4 e um escalar não-zero ψ.*

Graduações sobre superálgebras de Hurwitz: Todas as possíveis graduações por um grupo abeliano, a menos de equivalência, sobre superálgebras de Hurwitz foram classificadas em [Ara15].

Exemplo 1.24. *Graduações de $B(1,2)$.*
Sejam $B(1,2)_{(\bar{0})} = F$ e $B(1,2)_{(\bar{1})} = V$. Tomando uma base $\{u,v\}$ de elementos homogêneos em V. Podemos supor que $(u,v) = 1$. Então a seguinte é uma graduação de $B(1,2) : B(1,2) = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_n} B(1,2)_\gamma$, onde $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \cup \{0\}$,

$$B(1,2)_{\bar{0}} = F\cdot 1, \quad B(1,2)_{\bar{1}} = Fu, \quad B(1,2)_{-\bar{1}} = Fv. \tag{1.12}$$

É claro que todas as graduações deste tipo (isto é, usando diferentes bases de V) são equivalentes. Isto prova o seguinte:

Teorema 1.25. *([Ara15]) As graduações não-triviais sobre $B(1,2)$ são, a menos de equivalência, a $\mathbb{Z}$-graduação (1.12) (n=0) e a $\mathbb{Z}_2$-graduação principal.*

Exemplo 1.26. *Graduações de $B(4,2)$.*
Sejam $B(4,2)_{(\bar{0})} = M_2(F)$ e $B(4,2)_{(\bar{1})} = Fm_1 \oplus Fm_2$. Consideremos as seguintes graduações de $B(4,2)$:

i) $B(4,2) = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_n} B(4,2)_\gamma$, onde $n \in \mathbb{Z}_{\geq 5} \cup \{0\}$,

$$\begin{aligned} B(4,2)_{\bar{0}} = Fe_{11}\oplus Fe_{22}, \quad B(4,2)_{\bar{1}} &= Fm_1, \quad B(4,2)_{-\bar{1}} = Fm_2,\\ B(4,2)_{\bar{2}} &= Fe_{21}, \quad B(4,2)_{-\bar{2}} = Fe_{12}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

ii) $B(4,2) = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_4} B(4,2)_\gamma$,

$$B(4,2)_{\bar{0}} = Fe_{11}\oplus Fe_{22}, \quad B(4,2)_{\bar{1}} = Fm_1, \quad B(4,2)_{\bar{2}} = Fe_{12}\oplus Fe_{21}, \quad B(4,2)_{\bar{3}} = Fm_2. \tag{1.14}$$

iii) $B(4,2) = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_3} B(4,2)_\gamma$,

$$B(4,2)_{\bar{0}} = Fe_{11}\oplus Fe_{22}, \quad B(4,2)_{\bar{1}} = Fe_{12}\oplus Fm_1, \quad B(4,2)_{\bar{2}} = Fe_{12}\oplus Fm_2. \tag{1.15}$$

Teorema 1.27. *([Ara15]) As graduações não-triviais sobre $B(4,2)$ por seus grupos das graduações universais são, sob equivalência, as graduações (1.14), (1.15), a $\mathbb{Z}$-graduação (1.13) (n=0), e a $\mathbb{Z}_2$-graduação principal.*

1.4 Fatores de comutação

O conteúdo desta seção pode-se consultar em [Sch79]. A seguinte definição é bem conhecida da teoria de álgebras graduadas.

Definição 1.28. *Seja Γ um grupo abeliano. Um fator de comutação sobre Γ (com valores em $F^\times$) é uma aplicação,*

$$\epsilon : \Gamma\times\Gamma \to F^\times,$$

tal que,

$$\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\beta,\alpha) = 1, \tag{1.16}$$

$$\epsilon(\alpha,\beta+\gamma) = \epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\alpha,\gamma), \tag{1.17}$$

$$\epsilon(\alpha+\beta,\gamma)=\epsilon(\alpha,\gamma)\epsilon(\beta,\gamma), \tag{1.18}$$

para todo $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$.

De (1.16), (1.17) e (1.18) temos que: $\epsilon(\alpha,\alpha)=\pm 1$, $\epsilon(\alpha,0)=\epsilon(0,\alpha)=1$ e $\epsilon(\alpha,-\beta)=\epsilon(\beta,\alpha)=\epsilon(-\alpha,\beta)$ para todo $\alpha,\beta\in\Gamma$.

Exemplo 1.29. *(1) Seja Γ um grupo abeliano arbitrário. O fator de comutação trivial é definido por $\epsilon(\alpha,\beta)=1$ para todo $\alpha,\beta\in\Gamma$.*

(2) Seja $\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ o grupo aditivo de inteiros módulo 2 e seja ϵ definido por $\epsilon(\alpha,\beta)=(-1)^{\alpha\beta}$ para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_2$. É fácil ver que ϵ é um fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_2$.

1.4.1 Fatores de comutação sobre grupos abelianos finitamente gerados

Seja Γ um grupo abeliano finitamente gerado (isto é, um grupo abeliano o qual é gerado por um número finito de seus elementos). O teorema fundamental dos grupos abelianos finitamente gerados estabelece que Γ é isomorfo a um grupo da forma

$$\mathbb{Z}_{p_1^{t_1}}\oplus\mathbb{Z}_{p_2^{t_2}}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{p_l^{t_l}}\oplus\mathbb{Z}^n, \tag{1.19}$$

para alguns inteiros não negativos $l,n,t_1,t_2,\ldots,t_l$ e números primos, não necessariamente diferentes, $p_1,p_2,\ldots,p_l$. Assim podemos supor que

$$\Gamma=\Gamma_1\oplus\Gamma_2\oplus\ldots\oplus\Gamma_{l+n}, \tag{1.20}$$

onde $\Gamma_i=\mathbb{Z}_{m_i}$ com $m_i=p_i^{t_i}$ se $1\leq i\leq l$, e $m_i=0$ se $l+1\leq i\leq l+n$. Para cada i, $1\leq i\leq l+n$, escolhemos um gerador ξ_i do grupo Γ_i (uma escolha natural para ξ_i é a classe resíduo do 1 modulo $p_i^{t_i}$ se $1\leq i\leq l$, e 1 se $l+1\leq i\leq l+n$).

Agora seja ϵ um fator de comutação sobre Γ e sejam i,j inteiros tais que $1\leq i,j\leq l+n$. Definamos $\epsilon(\xi_i,\xi_j)=\lambda_{ij}$. Evidentemente, temos que

$$\lambda_{ij}\lambda_{ji}=1. \tag{1.21}$$

Além disso, a equação óbvia, $\epsilon(m_i\xi_i,\xi_j)=\epsilon(\xi_i,m_j\xi_j)=1$, implica que

$$\lambda_{ij}^{m_i}=\lambda_{ij}^{m_j}=1. \tag{1.22}$$

Seja m_{ij} o máximo divisor comum de m_i e m_j (lembremos que o máximo divisor comum de 0 e qualquer inteiro $m\geq 0$ é igual a m). Então a equação (1.22) é equivalente a

$$\lambda_{ij}^{m_{ij}}=1. \tag{1.23}$$

No caso especial $i=j$, as equações (1.21) e (1.23) implicam que

$$\lambda_{ii}=\begin{cases}1 & \text{se } m_i \text{ é ímpar,}\\ \pm 1 & \text{se } m_i \text{ é par.}\end{cases} \tag{1.24}$$

Finalmente, temos

$$\epsilon\left(\sum_i r_i\xi_i,\sum_j s_j\xi_j\right)=\prod_k \lambda_{kk}^{r_ks_k}\prod_{i<j}\lambda_{ij}^{(r_is_j-r_js_i)}, \tag{1.25}$$

para todo $r_i, s_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq l+n$.

Reciprocamente, seja λ_{ij}, $1 \leq r, s \leq l+n$, qualquer sistema de elementos de $F^\times$ tal que as equações (1.23) e (1.24) são satisfeitas. Então, a equação (1.25) define um fator de comutação ϵ sobre Γ. Assim, as equações (1.23), (1.24) e (1.25) caracterizam completamente os fatores de comutação sobre Γ.

Como passo seguinte gostaríamos de classificar os fatores de comutação a menos de equivalência, no sentido da seguinte definição.

Definição 1.30. *Seja Γ um grupo abeliano. Dois fatores de comutação ϵ e ϵ' sobre Γ são considerados equivalentes se existe um automorfismo h de Γ tal que $\epsilon'(\alpha,\beta) = \epsilon(h(\alpha), h(\beta))$ para todo $\alpha, \beta \in \Gamma$.*

Vamos restringir nossa atenção para alguns casos particulares. O primeiro caso é quando $\Gamma = \mathbb{Z}_p^n$, com $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e p um número primo. Neste caso $\mathbb{Z}_p$ é um corpo e $\mathbb{Z}_p^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_p$. Consequentemente, a teoria de espaços de dimensão finita é aplicável aqui.

Em primeiro lugar, concluímos da equação (1.23) que se sobre Γ existe um fator de comutação não-trivial, então F deve conter uma p-ésima raiz da unidade diferente de 1. Se $car(F) = p$ então 1 é a única p-ésima raiz da unidade. Portanto, se assumimos que sobre Γ existe um fator de comutação não-trivial então $car(F) \neq p$.

Escolhamos uma p-ésima raiz da unidade $E_p \in F$ diferente de 1. Então qualquer outra p-ésima raiz da unidade é uma potência de E_p. Observamos que para qualquer inteiro m a potência E_p^m só depende da classe do resíduo m modulo p. Assim, para qualquer $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ a expressão E_p^λ está bem definida.

Usando essas observações assim como os resultados anteriores, é fácil ver que os fatores de comutação sobre $\mathbb{Z}_p^n$ são apenas as aplicações da forma

$$\epsilon(\alpha,\beta) = E_p^{\psi(\alpha,\beta)}, \tag{1.26}$$

para todo $\alpha, \beta \in \Gamma$, onde ψ é uma forma bilinear no espaço vetorial $\mathbb{Z}_p^n$ sobre $\mathbb{Z}_p$ o qual é simétrica se $p = 2$, mas alternada se $p \geq 3$. Observe que ψ está determinada unicamente por ϵ.

Observação 1.31. *([Sch79])*

(1) Lembremos que uma forma bilinear ψ em um espaço vetorial V sobre um corpo F é chamada de alternada se $\psi(x,x) = 0$ para todo $x \in V$. Se $car(F) \neq 2$, uma forma bilinear é alternada se, e somente se, ela é anti-simétrica. No entanto, isto não é verdade se $car(F) = 2$.

(2) A diferença entre os casos $p = 2$ e $p \geq 3$ é facilmente observada da Equação (1.24). Se $p \geq 3$ esta equação implica que $\lambda_{rr} = 1$ para $1 \leq r \leq n$ e consequentemente não existem "termos diagonais" na equação (1.25). Por outro lado, para $p = 2$ podemos ter termos diagonais.

Resultados sobre as formas normais de formas bilineares alternadas ou simétricas sobre um espaço vetorial de dimensão finita agora produzem a seguinte proposição.

Proposição 1.32. *([Sch79]) Sejam p um número primo, $E_p \in F$ uma p-ésima raiz da unidade não-trivial e $n \geq 1$ um inteiro. Para qualquer elemento $\alpha \in \mathbb{Z}_p^n$ as coordenadas de α com respeito à base canônica de $\mathbb{Z}_p^n$ serão denotadas por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.*
Seja r um inteiro tal que $0 \leq 2r \leq n$. Definimos uma forma bilinear alternada ψ_r sobre $\mathbb{Z}_p^n$ por

$$\psi_r(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_{2i-1}\beta_{2i} - \alpha_{2i}\beta_{2i-1}), \tag{1.27}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p^n$. Seja s um inteiro tal que $1 \leq s \leq n$. Definimos uma forma bilinear simétrica ϕ_s sobre $\mathbb{Z}_p^n$ por

$$\phi_s(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \beta_i, \tag{1.28}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p^n$.

(a) Se $p = 2$, então qualquer fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_2^n$ é equivalente a $(-1)^\psi$ com ψ igual a uma das formas ψ_r ou ϕ_s.

(b) Se $p \geq 3$, então qualquer fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_p^n$ é equivalente a E_p^ψ com ψ igual a uma das formas ψ_r.

Agora vejamos outro caso particular, o qual também é importante para os nossos interesses.

Proposição 1.33. *Seja $\Gamma = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$, $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{0\}$, e seja ϵ um fator de comutação sobre Γ (com valores em $F^\times$) tal que $\epsilon(\alpha, \alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Então ϵ é um dos seguintes fatores de comutação:*

(1) Se $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ $(n = m = 0)$,

$$\epsilon((1,0),(0,1)) = \lambda, \qquad \epsilon((1,0),(1,0)) = \epsilon((0,1),(0,1)) = 1,$$

onde $\lambda \in F^\times$.

(2) Se $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m$ $(n = 0$ e $m \geq 2)$,

$$\epsilon((1,\bar{0}),(0,\bar{1})) = E_m, \qquad \epsilon((1,\bar{0}),(1,\bar{0})) = \epsilon((0,\bar{1}),(0,\bar{1})) = 1,$$

onde $E_n \in F^\times$ é uma m-ésima raiz da unidade. Se $car(F) = p$ e existe um número primo $q \neq p$ tal que q divide a n, então E_n pode ser escolhida diferente de 1.

(3) Se $\Gamma = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$, $n, m \geq 2$.

$$\epsilon((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})) = E_d, \qquad \epsilon((\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0})) = \epsilon((\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1})) = 1,$$

onde $d = mdc(n,m)$ e $E_d \in F^\times$ é uma d-ésima raiz da unidade. Se $car(F) = p$ e existe um número primo $q \neq p$ tal que q divide a d, então E_d pode ser escolhida diferente de 1.

Demonstração. Para provar esta proposição é suficiente ver os valores que tomam $\epsilon((\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0}))$, $\epsilon((\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1}))$ e $\epsilon((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}))$. $\epsilon((\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0})) = \epsilon((\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1})) = 1$, devido a que $\epsilon(\alpha.\alpha) = 1$, para todo $\alpha \in \Gamma$. Definamos $\epsilon((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})) = \lambda$. Como $\epsilon(n(\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})) = \epsilon((\bar{1},\bar{0}), m(\bar{0},\bar{1})) = 1$ então $\lambda^n = \lambda^m = 1$. Assim, $\lambda^d = 1$ onde $d = m.c.d(n,m)$. Logo λ é uma d-ésima raiz da unidade. Isso prova a proposição. $\square$

Capítulo 2

Álgebras de composição de cor

Neste capítulo introduziremos as álgebras de composição de cor e mostraremos algumas de suas propriedades. As construções e provas são análogas aos casos de superálgebras de composição e álgebras de composição ([ZSSS82], [EO02]). Começamos com a definição de ϵ-*forma quadrática.*

Definição 2.1. *Sejam Γ um grupo abeliano e ϵ um fator de comutação sobre Γ. Uma ϵ-forma quadrática em um espaço vetorial Γ-graduado $V = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$ sobre um corpo F é um par $q = (q_0, f)$ onde*

i) $q_0 : V_0 \to F$ *é uma forma quadrática usual.*

ii) $f : V \times V \to F$ *é uma forma bilinear ϵ-simétrica par. Isto é, $f|_{(\sum_{i\in\mathbb{Z}} V_{i\alpha})\times(\sum_{i\in\mathbb{Z}} V_{i\alpha})}$ é simétrica para todo $\alpha \in \Gamma$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = 1$, $f|_{(V_\alpha+V_{-\alpha})\times(V_\alpha+V_{-\alpha})}$ é anti-simétrica para todo $\alpha \in \Gamma$ com $\epsilon(\alpha,\alpha) = -1$, e $f(V_0, V_\alpha) = f(V_\alpha, V_0) = 0$ para todo $0 \neq \alpha \in \Gamma$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = -1$.*

iii) $f|_{V_0\times V_0}$ *é o polar de q_0. Isto é, $f(a_0, b_0) = q_0(a_0 + b_0) - q_0(a_0) - q_0(b_0)$ para quaisquer $a_0, b_0 \in V_0$.*

A ϵ-forma quadrática $q = (q_0, f)$ é dita *não-degenerada* se para todo $\alpha \in \Gamma$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = 1$ a forma simétrica $f|_{(\sum_{i\in\mathbb{Z}} V_{i\alpha})\times(\sum_{i\in\mathbb{Z}} V_{i\alpha})}$ é não-degenerada (dado $a \in \sum_{i\in\mathbb{Z}} V_{i\alpha}$, se $f(a,x) = 0$ para todo $x \in \sum_{i\in\mathbb{Z}} V_{i\alpha}$ então $a = 0$) e para todo $\alpha \in \Gamma$ que satisfaz $\epsilon(\alpha,\alpha) = -1$ a forma anti-simétrica $f|_{(V_\alpha+V_{-\alpha})\times(V_\alpha+V_{-\alpha})}$ é não-degenerada.

Definição 2.2. *Sejam Γ um grupo abeliano e ϵ um fator de comutação sobre Γ. Seja A uma álgebra Γ-graduada sobre um corpo F, $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, com elemento identidade ($1 \in A_0$), dotada com uma ϵ-forma quadrática não-degenerada $q = (q_0, f) : A \to F$ (chamada a norma). A é dita uma ϵ-álgebra de composição (também chamada de álgebra de composição de cor) no caso que:*

$$q_0(a_0b_0) = q_0(a_0)q_0(b_0), \tag{2.1}$$

$$f(a_0b_\beta, a_0c_\gamma) = q_0(a_0)f(b_\beta, c_\gamma) = f(b_\beta a_0, c_\gamma a_0), \tag{2.2}$$

$$f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma d_\delta) + \epsilon(\gamma,\delta)\epsilon(\beta,\delta)\epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha d_\delta, c_\gamma b_\beta) = \epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta), \tag{2.3}$$

para quaisquer $a_0, b_0 \in A_0$ e elementos homogêneos $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$, $c_\gamma \in A_\gamma, d_\delta \in A_\delta$.

Se A é uma ϵ-álgebra de composição com ϵ-forma quadrática $q = (q_0, f)$ então A_0 é uma álgebra de composição com forma quadrática q_0.
Seja $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ uma álgebra, $\mathbb{Z}_2$-graduada, sobre um corpo F e seja ϵ o fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_2$ definido por $\epsilon(\bar{1},\bar{1}) = -1$. É fácil ver que, A é uma superálgebra de Hurwitz se, e somente se, A é uma ϵ-álgebra de composição ou, $A = A_{\bar{0}} = F$ e $car(F) = 2$.

Lema 2.3. *Seja A uma ϵ-álgebra de composição com norma $q = (q_0, f)$. Então, para quaisquer elementos homogêneos $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta$:*

$$f(b_\beta, d_\delta) = \epsilon(\beta, \delta) f(d_\delta, b_\beta), \tag{2.4}$$

$$(1 + \epsilon(\beta, \beta)) f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma b_\beta) = \epsilon(\beta, \gamma) f(a_\alpha, c_\gamma) f(b_\beta, b_\beta), \tag{2.5}$$

$$f(a_\alpha, c_\gamma^2) + \epsilon(\gamma, \gamma) f(a_\alpha c_\gamma, c_\gamma) - f(a_\alpha, c_\gamma) f(1, c_\gamma) = 0, \tag{2.6}$$

$$f(a_\alpha, d_\delta) = f(a_\alpha, 1) f(1, d_\delta) - f(a_\alpha d_\delta, 1). \tag{2.7}$$

Demonstração. Como A_0 é uma álgebra de composição então $q_0(1) = 1$ e $f(1, 1) = 2$.
De (2.3) para $a_\alpha = c_\gamma = 1$ ($\alpha = \gamma = 0$) temos

$$f(b_\beta, d_\delta) + \epsilon(0, \delta)\epsilon(\beta, \delta)\epsilon(\beta, 0) f(d_\delta, b_\beta) = \epsilon(\beta, 0) f(1, 1) f(b_\beta, d_\delta).$$

Portanto,

$$f(b_\beta, d_\delta) = \epsilon(\beta, \delta) f(d_\delta, b_\beta).$$

De (2.3) para $d_\delta = b_\beta$ ($\delta = \beta$) obtemos

$$f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma b_\beta) + \epsilon(\gamma, \beta)\epsilon(\beta, \beta)\epsilon(\beta, \gamma) f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma b_\beta) = \epsilon(\beta, \gamma) f(a_\alpha, c_\gamma) f(b_\beta, b_\beta).$$

Portanto,

$$(1 + \epsilon(\beta, \beta)) f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma b_\beta) = \epsilon(\beta, \gamma) f(a_\alpha, c_\gamma) f(b_\beta, b_\beta).$$

De (2.3) com $b_\beta = 1$ ($\beta = 0$), $d_\delta = c_\gamma$ ($\delta = \gamma$) temos

$$f(a_\alpha, c_\gamma c_\gamma) + \epsilon(\gamma, \gamma)\epsilon(0, \gamma)\epsilon(0, \gamma) f(a_\alpha c_\gamma, c_\gamma) = \epsilon(0, \gamma) f(a_\alpha, c_\gamma) f(1, c_\gamma).$$

Portanto,

$$f(a_\alpha, c_\gamma^2) + \epsilon(\gamma, \gamma) f(a_\alpha c_\gamma, c_\gamma) - f(a_\alpha, c_\gamma) f(1, c_\gamma) = 0.$$

De (2.3) para $b_\beta = c_\gamma = 1$ ($\beta = \gamma = 0$) obtemos

$$f(a_\alpha, d_\delta) + \epsilon(0, \delta)\epsilon(0, \delta)\epsilon(0, 0) f(a_\alpha d_\delta, 1) = \epsilon(0, 0) f(a_\alpha, 1) f(1, d_\delta).$$

Portanto,

$$f(a_\alpha, d_\delta) = f(a_\alpha, 1) f(1, d_\delta) - f(a_\alpha d_\delta, 1).$$

□

Sejam Γ um grupo abeliano e $V = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$ um espaço vetorial Γ-graduado. Daqui em diante vamos dizer que uma forma bilinear f sobre V ϵ-simétrica se ela satisfaz a identidade (2.4).

Definição 2.4. *Sejam A uma álgebra Γ-graduada e ϵ um fator de comutação sobre Γ. Um endomorfismo ρ do espaço vetorial A é uma ϵ-involução da álgebra A se, $\rho(\rho(a)) = a$ e $\rho(a_\alpha b_\beta) = \epsilon(\alpha, \beta)\rho(b_\beta)\rho(a_\alpha)$ para quaisquer $a \in A$, $a_\alpha \in A_\alpha$ e $b_\beta \in A_\beta$.*

Observe que uma ϵ-involução não precisa ser um endomorfismo de espaços vetoriais Γ-graduados. Dada uma ϵ-álgebra de composição A, provaremos que a aplicação $A \to A : a \mapsto \overline{a} = f(a, 1)1 - a$ é uma ϵ-involução de A. Mas para isto, vamos precisar de alguns resultados prévios.

Lema 2.5. *Seja A uma ϵ-álgebra de composição, Γ-graduada, com ϵ-forma quadrática $q = (q_0, f)$ e seja $0 \neq \gamma \in \Gamma$. Então $f(c_\gamma, 1) = 0$ para todo $c_\gamma \in A_\gamma$. Assim, para todo $c_\gamma \in A_\gamma$ com $\gamma \neq 0$, $\overline{c_\gamma} = -c_\gamma$. Portanto, para todo $a_\alpha \in A_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$, $\overline{a_\alpha}$ é um elemento homogêneo de A ($\overline{a_\alpha} \in A_\alpha$). Além disso, $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$ e, $f|_{(A_\alpha + A_{-\alpha}) \times (A_\alpha + A_{-\alpha})}$ é não-degenerada para todo $\alpha \in \Gamma$.*

Demonstração. Seja $0 \neq \gamma \in \Gamma$. Se $\epsilon(\gamma,\gamma) = -1$ ou $car(F) = 2$ ($\epsilon(\gamma,\gamma) = 1 = -1$), por definição $f(A_0, A_\gamma) = 0$, então $f(c_\gamma, 1) = 0$ para todo $c_\gamma \in A_\gamma$. Além disso, como $q = (q_0, f)$ é não-degenerada por (2.5) temos que $f(c_\gamma, c_\gamma) = 0$, isto é, $f|_{(A_\gamma + A_{-\gamma})\times(A_\gamma + A_{-\gamma})}$ é alternada.
Por outro lado, se $\epsilon(\gamma,\gamma) = 1$ e $car(F) \neq 2$ por (2.6) e (2.5) temos que:

$$\begin{aligned}
0 &= f(a_\alpha, c_\gamma^2) + f(a_\alpha c_\gamma, 1 \cdot c_\gamma) - f(a_\alpha, c_\gamma) f(1, c_\gamma),\\
&= f(a_\alpha, c_\gamma^2) + \frac{\epsilon(\gamma,0)}{2} f(a_\alpha, 1) f(c_\gamma, c_\gamma) - f(a_\alpha, c_\gamma) f(1, c_\gamma),\\
&= f(a_\alpha, c_\gamma^2 + \frac{1}{2} f(c_\gamma, c_\gamma) 1 - f(1, c_\gamma) c_\gamma).
\end{aligned}$$

Então,

$$c_\gamma^2 - f(1, c_\gamma) c_\gamma + \frac{1}{2} f(c_\gamma, c_\gamma) 1 = 0, \tag{2.8}$$

já que $f|_{(\sum_{i\in\mathbb{Z}} A_{i\gamma})\times(\sum_{i\in\mathbb{Z}} A_{i\gamma})}$ é não-degenerada. Assim, se $\gamma \neq 0$ então $f(c_\gamma, 1) = 0$, e $f(c_\gamma, c_\gamma) = 0$ a menos que $2\gamma = 0$.
Portanto, se $\gamma \neq 0$ então $f(c_\gamma, 1) = 0$ para todo $c_\gamma \in A_\gamma$.
Além disso, como $f(c_\gamma, 1) = 0$ para todo $c_\gamma \in A_\gamma$ quando $\gamma \neq 0$, da identidade (2.7) obtemos que $f(a_\alpha, b_\beta) \neq 0$ implica que $\alpha + \beta = 0$. Assim, se $\alpha + \beta \neq 0$ então $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$. Aliás, como $q = (q_0, f)$ é não-degenerada, segue-se que $f|_{(A_\alpha + A_{-\alpha})\times(A_\alpha + A_{-\alpha})}$ é não-degenerada para todo $\alpha \in \Gamma$. $\square$

Três fatos para ter sempre presente e que vamos usar frequentemente são: $\overline{c_\gamma} \in A_\gamma$ para todo $c_\gamma \in A_\gamma$ ($f(1, c_\gamma) = 0$ se $\gamma \neq 0$) e todo $\gamma \in \Gamma$, $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$ e, $f|_{(A_\alpha + A_{-\alpha})\times(A_\alpha + A_{-\alpha})}$ é não-degenerada para todo $\alpha \in \Gamma$.

Observação 2.6. *Seja A uma ϵ-álgebra de composição de dimensão finita, então f é sempre não-degenerada. Isto ocorre porque $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$ e $f|_{(A_\alpha + A_{-\alpha})\times(A_\alpha + A_{-\alpha})}$ é não-degenerada para todo $\alpha \in \Gamma$.*

Observação 2.7. *Sejam Γ um grupo abeliano e ϵ o fator de comutação trivial sobre Γ, e seja $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ uma ϵ-álgebra de composição sobre um corpo F com norma $q = (q_0, f)$. Então f é uma forma bilinear simétrica não-degenerada. Portanto, se $car(F) \neq 2$ então A é uma álgebra de composição com forma quadrática $q(a) = \frac{f(a,a)}{2}$, para todo $a \in A$.*

A seguinte proposição mostra algumas identidades que satisfazem as ϵ-álgebras de composição.

Proposição 2.8. *Seja A uma ϵ-álgebra de composição (Γ-graduada) com norma $q = (q_0, f)$. Então para quaisquer elementos homogêneos $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$, $c_\gamma \in A_\gamma$ e $d_0 \in A_0$:*

i) $f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma) = \epsilon(\beta,\gamma) f(a_\alpha, c_\gamma \overline{b_\beta}) = \epsilon(\alpha,\beta) f(b_\beta, \overline{a_\alpha} c_\gamma)$,

ii) $f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma) = \epsilon(\beta,\gamma) f(\overline{a_\alpha} c_\gamma, b_\beta) = \epsilon(\alpha, \beta+\gamma)\epsilon(\beta,\gamma) f(c_\gamma \overline{b_\beta}, a_\alpha)$,

iii) $d_0 \overline{d_0} = \overline{d_0} d_0 = q_0(d_0) 1$,

iv) $a_\alpha \overline{b_\beta} + \epsilon(\alpha,\beta) b_\beta \overline{a_\alpha} = f(a_\alpha, b_\beta) 1 = \overline{a_\alpha} b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta) \overline{b_\beta} a_\alpha$,

v) $\overline{d_0}(d_0 c_\gamma) = q_0(d_0) c_\gamma = (c_\gamma d_0) \overline{d_0}$,

vi) $\overline{a_\alpha}(b_\beta c_\gamma) + \epsilon(\alpha,\beta) \overline{b_\beta}(a_\alpha c_\gamma) = f(a_\alpha, b_\beta) c_\gamma = (c_\gamma a_\alpha) \overline{b_\beta} + \epsilon(\alpha,\beta)(c_\gamma b_\beta) \overline{a_\alpha}$.

Demonstração. i) Por (2.3),

$$\begin{aligned} f(a_\alpha, c_\gamma\overline{b_\beta}) &= f(a_\alpha, c_\gamma(f(b_\beta,1)1 - b_\beta)) = f(a_\alpha, c_\gamma)f(1,b_\beta) - f(a_\alpha \cdot 1, c_\gamma b_\beta), \\ &= \epsilon(\gamma,\beta)f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma). \end{aligned}$$

Por (2.3) e (2.4),

$$\begin{aligned} f(b_\beta, \overline{a_\alpha}c_\gamma) &= f(b_\beta, (f(a_\alpha,1)1 - a_\alpha)c_\gamma) = f(1,a_\alpha)f(b_\beta,c_\gamma) - f(1\cdot b_\beta, a_\alpha c_\gamma), \\ &= f(1,a_\alpha)f(b_\beta,c_\gamma) - [\epsilon(\beta,\alpha)f(1,a_\alpha)f(b_\beta,c_\gamma) - \epsilon(\beta,\alpha)\epsilon(\alpha+\beta,\gamma)f(c_\gamma, a_\alpha b_\beta)], \\ &= (1-\epsilon(\beta,\alpha))f(1,a_\alpha)f(b_\beta,c_\gamma) + \epsilon(\beta,\alpha)f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma), \\ &= \epsilon(\beta,\alpha)f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma). \end{aligned}$$

A última igualdade é devido a que $(1-\epsilon(\beta,\alpha))f(1,a_\alpha) = 0$: se $\epsilon(\beta,\alpha) \neq 1$ então $\alpha \neq 0$, assim $f(1,a_\alpha) = 0$ para todo $a_\alpha \in A_\alpha$.

ii) Análogo a *i*).

iii) Por *i*) e (2.2),

$$f(c_\gamma, d_0\overline{d_0}) = f(c_\gamma d_0, 1\cdot d_0) = q_0(d_0)f(c_\gamma,1) = f(c_\gamma, q_0(d_0)1).$$

Como $f|_{A_0\times A_0}$ é não-degenerada obtemos que $d_0\overline{d_0} = q_0(d_0)1$.

Analogamente podemos mostrar que $\overline{d_0}d_0 = q_0(d_0)1$.

iv) Por *i*), (2.3) e (2.4),

$$\begin{aligned} f(c_\gamma, a_\alpha\overline{b_\beta}) &= \epsilon(\alpha,\beta)f(c_\gamma b_\beta, 1\cdot a_\alpha) = \epsilon(\alpha,\beta)[f(c_\gamma,1)f(b_\beta,a_\alpha) - \epsilon(\beta,\alpha)f(c_\gamma a_\alpha, b_\beta)], \\ &= f(c_\gamma,1)f(a_\alpha,b_\beta) - \epsilon(\alpha,\beta)f(c_\gamma, b_\beta\overline{a_\alpha}) = f(c_\gamma, f(a_\alpha,b_\beta)1 - \epsilon(\alpha,\beta)b_\beta\overline{a_\alpha}). \end{aligned}$$

Como $f|_{(A_\gamma+A_{-\gamma})\times(A_\gamma+A_{-\gamma})}$ é não-degenerada para todo $\gamma \in \Gamma$ e $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha+\beta \neq 0$, segue-se que $a_\alpha\overline{b_\beta} = f(a_\alpha,b_\beta)1 - \epsilon(\alpha,\beta)b_\beta\overline{a_\alpha}$.

Por outro lado de *ii*), (2.3) e (2.4),

$$\begin{aligned} f(\overline{a_\alpha}b_\beta, c_\gamma) &= \epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha c_\gamma, b_\beta\cdot 1) = f(a_\alpha,b_\beta)f(1,c_\gamma) - f(a_\alpha, b_\beta c_\gamma), \\ &= f(a_\alpha,b_\beta)f(1,c_\gamma) - \epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\alpha,\gamma)f(b_\beta c_\gamma, a_\alpha), \\ &= f(a_\alpha,b_\beta)f(1,c_\gamma) - \epsilon(\alpha,\beta)f(\overline{b_\beta}a_\alpha, c_\gamma), \\ &= f(f(a_\alpha,b_\beta)1 - \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}a_\alpha, c_\gamma). \end{aligned}$$

Como $f|_{(A_\gamma+A_{-\gamma})\times(A_\gamma+A_{-\gamma})}$ é não-degenerada para todo $\gamma \in \Gamma$ e $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha+\beta \neq 0$, obtemos que: $\overline{a_\alpha}b_\beta = f(a_\alpha,b_\beta)1 - \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}a_\alpha$.

v) Por *i*) e (2.2),

$$f(a_\alpha, \overline{d_0}(d_0c_\gamma)) = f(d_0a_\alpha, d_0c_\gamma) = q_0(d_0)f(a_\alpha,c_\gamma) = f(a_\alpha, q_0(d_0)c_\gamma).$$

Como $f|_{(A_\gamma+A_{-\gamma})\times(A_\gamma+A_{-\gamma})}$ é não-degenerada para todo $\gamma \in \Gamma$, temos que: $\overline{d_0}(d_0c_\gamma) = q_0(d_0)c_\gamma$.

Analogamente podemos mostrar que $(c_\gamma d_0)\overline{d_0} = q_0(d_0)c_\gamma$.

vi) Por ii), (2.3) e (2.4),

$$\begin{aligned} f(\overline{a_\alpha}(b_\beta c_\gamma), d_\delta) &= \epsilon(\beta+\gamma,\delta) f(a_\alpha d_\delta, b_\beta c_\gamma), \\ &= \epsilon(\beta+\gamma,\delta)[\epsilon(\delta,\beta) f(a_\alpha, b_\beta) f(d_\delta, c_\gamma) - \epsilon(\beta,\gamma)\epsilon(\delta,\beta+\gamma) f(a_\alpha c_\gamma, b_\beta d_\delta)], \\ &= f(a_\alpha, b_\beta) f(c_\gamma, d_\delta) - \epsilon(\beta,\gamma)[\epsilon(\alpha+\gamma,\beta+\delta) f(b_\beta d_\delta, a_\alpha c_\gamma)], \\ &= f(a_\alpha, b_\beta) f(c_\gamma, d_\delta) - \epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\alpha+\gamma,\delta)[\epsilon(\delta,\alpha+\gamma) f(\overline{b_\beta}(a_\alpha c_\gamma), d_\delta)], \\ &= f(f(a_\alpha, b_\beta) c_\gamma - \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}(a_\alpha c_\gamma), d_\delta). \end{aligned}$$

Como $f|_{(A_\delta + A_{-\delta})\times(A_\delta + A_{-\delta})}$ é não-degenerada para todo $\delta \in \Gamma$ e $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$, obtemos que $\overline{a_\alpha}(b_\beta c_\gamma) = f(a_\alpha, b_\beta) c_\gamma - \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}(a_\alpha c_\gamma)$.

Por outro lado de i) e (2.3),

$$\begin{aligned} f(d_\delta, (c_\gamma a_\alpha)\overline{b_\beta}) &= \epsilon(\alpha+\gamma,\beta) f(d_\delta b_\beta, c_\gamma a_\alpha), \\ &= \epsilon(\alpha+\gamma,\beta)[\epsilon(\beta,\gamma) f(d_\delta, c_\gamma) f(b_\beta, a_\alpha) - \epsilon(\gamma,\alpha)\epsilon(\beta,\alpha+\gamma) f(d_\delta a_\alpha, c_\gamma b_\beta)], \\ &= f(a_\alpha, b_\beta) f(d_\delta, c_\gamma) - \epsilon(\gamma,\alpha) f(d_\delta a_\alpha, c_\gamma b_\beta), \\ &= f(a_\alpha, b_\beta) f(d_\delta, c_\gamma) - \epsilon(\gamma,\alpha)\epsilon(\alpha,\gamma+\beta) f(d_\delta, (c_\gamma b_\beta)\overline{a_\alpha}), \\ &= f(d_\delta, f(a_\alpha, b_\beta) c_\gamma - \epsilon(\alpha,\beta)(c_\gamma b_\beta)\overline{a_\alpha}). \end{aligned}$$

Como $f|_{(A_\delta + A_{-\delta})\times(A_\delta + A_{-\delta})}$ é não-degenerada para todo $\delta \in \Gamma$ e $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$, segue-se que $(c_\gamma a_\alpha)\overline{b_\beta} = f(a_\alpha, b_\beta) c_\gamma - \epsilon(\alpha,\beta)(c_\gamma b_\beta)\overline{a_\alpha}$.

□

Daqui para frente vamos denotar a subálgebra $F \cdot 1$ de A por F.

Lema 2.9. *Seja A uma ϵ-álgebra de composição (Γ-graduada) com ϵ-forma quadrática $q = (q_0, f)$. A aplicação $a \mapsto \overline{a} = f(a,1) - a$ é uma ϵ-involução da álgebra A a qual deixa os elementos do corpo F fixos. Além disso, os elementos $a + \overline{a}$ e $a_\alpha\overline{b_\beta} + \epsilon(\alpha,\beta) b_\beta\overline{a_\alpha}$ pertencem a F para todo $a \in A$ e quaisquer elementos homogêneos $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$.*

Demonstração. Vamos verificar cada uma das propriedades de uma ϵ-involução

(a) $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$. Temos que $\overline{a+b} = f(a+b,1) - (a+b) = f(a,1) - a + f(b,1) - b = \overline{a} + \overline{b}$.

(b) Seja $r \in F$. Então $\overline{ra} = f(ra,1) - ra = r(f(a,1) - a) = r\overline{a}$.

(c) $\overline{\overline{a}} = a$. Temos que $\overline{\overline{a}} = f(\overline{a},1) - \overline{a} = f(f(a,1)-a,1) - f(a,1) + a = f(1,1)f(a,1) - 2f(a,1) + a = a$, já que $f(1,1) = 2$.

(d) $\overline{a_\alpha b_\beta} = \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}\,\overline{a_\alpha}$. Por Proposição 2.8 i) e iv),

$$\overline{a_\alpha b_\beta} = f(a_\alpha b_\beta, 1) - a_\alpha b_\beta = f(a_\alpha, \overline{b_\beta}) - a_\alpha\overline{\overline{b_\beta}} = \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}\,\overline{a_\alpha}.$$

Além disso, se $r \in F$ então $\overline{r} = f(r,1) - r = rf(1,1) - r = r$. Finalmente, $a + \overline{a} = f(a,1) \in F$, e por Proposição 2.8 iv) $a_\alpha\overline{b_\beta} + \epsilon(\alpha,\beta) b_\beta\overline{a_\alpha} = f(a_\alpha, b_\beta) \in F$. Isso prova o Lema. □

Como $\overline{a_\alpha} \in A_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$ a aplicação $a \mapsto \overline{a} = f(a,1) - a$ é um endomorfismo de álgebras Γ-graduadas.

Lema 2.10. *Seja A uma ϵ-álgebra de composição sobre um corpo F. Então A é uma álgebra simples ou $A = A_0 \cong F \oplus F$.*

Demonstração. Primeiro provemos que A é simples como álgebra com ϵ-involução. Seja I um ideal da álgebra A tal que $I \neq A$ e $\overline{I} = I$. Como $I \cap F = (0)$, temos que $\overline{a} + a = f(a, 1) = 0$ para qualquer $a \in I$. Provemos que $I = (0)$ por contradição, isto é, suponhamos que existe $0 \neq a \in I$, $a = a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \ldots + a_{\alpha_n}$, onde as $a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$ são as componentes homogêneas não nulas de a. Como $a \neq 0$, em particular $a_{\alpha_1} \neq 0$, logo existe $b_{-\alpha_1} \in A_{-\alpha_1}$ tal que $f(a_{\alpha_1}, b_{-\alpha_1}) \neq 0$ (já que $f|_{(A_\gamma + A_{-\gamma}) \times (A_\gamma + A_{-\gamma})}$ é não-degenerada para todo $\gamma \in \Gamma$ e $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$). Como $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$, então $f(a_{\alpha_j}, b_{-\alpha_1}) = 0$ para $j \in \{2, \ldots, n\}$. Por outro lado, $b = a\overline{b_{-\alpha_1}} \in I$, já que $a \in I$. Assim, pela Proposição 2.8 *iv*) temos que

$$
\begin{aligned}
f(a_{\alpha_1}, b_{-\alpha_1}) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{\alpha_i}, b_{-\alpha_1}) &= \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha_i}\overline{b_{-\alpha_1}} + \epsilon(\alpha_i, -\alpha_1) b_{-\alpha_1}\overline{a_{\alpha_i}}, \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha_i}\overline{b_{-\alpha_1}} + \overline{(a_{\alpha_i}\overline{b_{-\alpha_1}})} = b + \overline{b} \in I \cap F = (0).
\end{aligned}
$$

O qual é uma contradição, pois $f(a_{\alpha_1}, b_{-\alpha_1}) \neq 0$. Portanto $I = (0)$.
Agora seja T um ideal arbitrário da álgebra A tal que $T \neq (0)$ e $T \neq A$ ($T \neq \overline{T}$, pelo provado acima). Definamos $I = T + \overline{T}$. Então $\overline{I} = I$ e $I \neq (0)$, logo pelo provado acima $I = A$. Além disso, para $J = T \cap \overline{T}$ temos que $\overline{J} = J$ e $J \neq A$, assim $J = (0)$ outra vez pelo provado acima. Consequentemente, $A = T \oplus \overline{T}$. Resta provar que o ideal T é unidimensional sobre o corpo F. Sejam $a, b \in T$ com $a \neq 0$, $\lambda = a + \overline{a}$ e $\mu = b + \overline{b}$, assim que $\lambda, \mu \in F$ ($a + \overline{a} = f(1, a)$). Note-se que $\lambda \neq 0$, caso contrário, $\overline{a} = -a \in T \cap \overline{T} = (0)$. Além disso, como $\overline{T} \cdot T, T \cdot \overline{T} \subseteq T \cap \overline{T} = (0)$, temos que $\lambda b = (a + \overline{a})b = ab$ e $\mu a = a(b + \overline{b}) = ab$, logo $\lambda b = \mu a$ e $b = (\lambda^{-1}\mu)a$, isto prova que o ideal T é unidimensional e que $A \cong F \oplus F$. Como a única graduação por um grupo abeliano sobre a álgebra $F \oplus F$ é a trivial então $A = A_0 \cong F \oplus F$.
Assim, se a álgebra A não é simples, então ela é uma soma direta de duas copias de F. Isto prova o lema. □

Sejam A uma álgebra sobre um corpo arbitrário F e $a, b, c \in A$. Denotamos por $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ o *associador* dos elementos a, b, c.
Abaixo vamos definir o que é uma ϵ-álgebra alternativa (ou álgebra alternativa de cor) e vamos provar que todo ϵ-álgebra de composição é uma ϵ-álgebra alternativa.

Definição 2.11. *Sejam Γ um grupo abeliano, ϵ um fator de comutação sobre Γ e A uma álgebra Γ-graduada sobre um corpo F, $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, dizemos que A é uma ϵ-álgebra alternativa (ou álgebra alternativa de cor) se:*

$$(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) + \epsilon(\beta, \gamma)(a_\alpha, c_\gamma, b_\beta) = 0, \tag{2.9}$$

$$(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) + \epsilon(\alpha, \beta)(b_\beta, a_\alpha, c_\gamma) = 0, \tag{2.10}$$

$$(d_0, d_0, a_\alpha) = 0, \tag{2.11}$$

para quaisquer $d_0 \in A_0$ e elementos homogêneos $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$, $c_\gamma \in A_\gamma$.

De (2.9), (2.10) e (2.11), obtém-se as seguintes identidades: $(d_0, a_\alpha, d_0) = (a_\alpha, d_0, d_0) = 0$ e

$$(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) + \epsilon(\alpha, \beta + \gamma)\epsilon(\beta, \gamma)(c_\gamma, b_\beta, a_\alpha) = 0. \tag{2.12}$$

Proposição 2.12. *Seja A uma ϵ-álgebra de composição com norma $q = (q_0, f)$. Então, A é uma ϵ-álgebra alternativa.*

Demonstração. Provemos que $(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) + \epsilon(\beta,\gamma)(a_\alpha, c_\gamma, b_\beta) = 0$. Por Proposição 2.8 *iv*) e *vi*),

$$\begin{aligned}(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) &= (a_\alpha b_\beta)c_\gamma - a_\alpha(b_\beta c_\gamma) = (a_\alpha b_\beta)(f(1,c_\gamma) - \overline{c_\gamma}) - a_\alpha[b_\beta(f(1,c_\gamma) - \overline{c_\gamma})],\\ &= -(a_\alpha b_\beta)\overline{c_\gamma} + a_\alpha(b_\beta \overline{c_\gamma}) = \epsilon(\beta,\gamma)(a_\alpha c_\gamma)\overline{b_\beta} - f(b_\beta, c_\gamma)a_\alpha + a_\alpha[f(b_\beta,c_\gamma) - \epsilon(\beta,\gamma)c_\gamma\overline{b_\beta}],\\ &= \epsilon(\beta,\gamma)(a_\alpha c_\gamma)(f(1,b_\beta) - b_\beta) - \epsilon(\beta,\gamma)a_\alpha[c_\gamma(f(1,b_\beta) - b_\beta)],\\ &= -\epsilon(\beta,\gamma)[(a_\alpha c_\gamma)b_\beta - a_\alpha(c_\gamma b_\beta)] = -\epsilon(\beta,\gamma)(a_\alpha, c_\gamma, b_\beta).\end{aligned}$$

Mostremos que $(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) + \epsilon(\alpha,\beta)(b_\beta, a_\alpha, c_\gamma) = 0$. Por Proposição 2.8 *iv*) e *vi*),

$$\begin{aligned}(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) &= (a_\alpha b_\beta)c_\gamma - a_\alpha(b_\beta c_\gamma) = [(f(1,a_\alpha) - \overline{a_\alpha})b_\beta]c_\gamma - (f(1,a_\alpha) - \overline{a_\alpha})(b_\beta c_\gamma),\\ &= -(\overline{a_\alpha}b_\beta)c_\gamma + \overline{a_\alpha}(b_\beta c_\gamma) = -[f(a_\alpha,b_\beta) - \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}a_\alpha]c_\gamma + f(a_\alpha,b_\beta)c_\gamma - \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}(a_\alpha c_\gamma),\\ &= \epsilon(\alpha,\beta)[(f(1,b_\beta) - b_\beta)a_\alpha]c_\gamma - \epsilon(\alpha,\beta)(f(1,b_\beta) - b_\beta)(a_\alpha c_\gamma),\\ &= \epsilon(\alpha,\beta)[-(b_\beta a_\alpha)c_\gamma + b_\beta(a_\alpha c_\gamma)] = -\epsilon(\alpha,\beta)(b_\beta, a_\alpha, c_\gamma).\end{aligned}$$

Provemos que $(d_0, d_0, a_\alpha) = 0$. Por Proposição 2.8 *iii*) e *v*),

$$\begin{aligned}(d_0, d_0, a_\alpha) &= (d_0 d_0)a_\alpha - d_0(d_0 a_\alpha) = [(f(1,d_0) - \overline{d_0})d_0]a_\alpha - (f(1,d_0) - \overline{d_0})(d_0 a_\alpha),\\ &= -(\overline{d_0}d_0)a_\alpha + \overline{d_0}(d_0 a_\alpha) = -q_0(d_0)a_\alpha + q_0(d_0)a_\alpha = 0.\end{aligned}$$

□

2.1 Uma generalização do processo de Cayley-Dickson

Sejam Γ um grupo abeliano finitamente gerado, ϵ um fator de comutação sobre Γ e A uma álgebra Γ-graduada, $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, sobre um corpo F com elemento identidade 1. Seja $a \to \overline{a}$ uma ϵ-involução da álgebra A tal que $c_0 + \overline{c_0}, c_0\overline{c_0} \in F$, $\overline{a_\alpha} = -a_\alpha$ se $\alpha \neq 0$, e $a_\alpha\overline{b_\beta} + \epsilon(\alpha,\beta)b_\beta\overline{a_\alpha} \in F$ ($a_\alpha\overline{b_\beta} + \epsilon(\alpha,\beta)b_\beta\overline{a_\alpha} = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$) para todo $c_0 \in A_0$ e quaisquer elementos homogêneos $a_\alpha, b_\beta \in A$. O *processo de Cayley-Dickson generalizado* consiste em construir uma nova álgebra $\Gamma \times \mathbb{Z}_2$-graduada com $\tilde{\epsilon}$-involução (onde $\tilde{\epsilon}$ é um fator de comutação sobre $\Gamma \times \mathbb{Z}_2$) que contém a A como subálgebra $\Gamma \times \mathbb{Z}_2$-graduada. Em adição, se a dimensão da álgebra A é igual a m então a dimensão da nova álgebra será $2m$.
Pelo teorema fundamental dos grupos abelianos finitamente gerados podemos supor que

$$\Gamma = \mathbb{Z}_{2^{s_1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{s_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{2^{s_l}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{t_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{t_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{t_m}} \oplus \mathbb{Z}^n, \tag{2.13}$$

para alguns inteiros não negativos $l, m, n, s_1, s_2, \ldots, s_l, t_1, t_2, \ldots, t_m$ e números primos diferentes de 2, não necessariamente diferentes, $p_1, p_2, \ldots, p_l$.
Assim

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \ldots \oplus \Gamma_{l+m+n}, \tag{2.14}$$

onde $\Gamma_i = \mathbb{Z}_{2^{s_i}}$ se $1 \leq i \leq l$, $\Gamma_{l+i} = \mathbb{Z}_{p_i^{t_i}}$ se $1 \leq i \leq m$, e $\Gamma_{l+m+i} = \mathbb{Z}$ se $1 \leq i \leq n$, Para cada i, $1 \leq i \leq l+m+n$, escolhemos um gerador ξ_i do grupo Γ_i (uma escolha natural para ξ_i é, a classe resíduo do 1 modulo $2_i^{s_i}$ se $1 \leq i \leq l$, a classe resíduo do 1 modulo $p_{i-l}^{t_{i-l}}$ se $l+1 \leq i \leq l+m$ e 1 se $l+m+1 \leq i \leq l+m+n$).

Agora seja ϵ um fator de comutação sobre Γ e sejam i, j inteiros tais que $1 \leq i, j \leq l+m+n$. Definamos os seguintes fatores de comutação $\tilde{\epsilon}$ sobre $\Gamma \times \mathbb{Z}_2$: $\tilde{\epsilon}((\xi_i, \bar{0}), (\xi_j, \bar{0})) = \epsilon(\xi_i, \xi_j)$, $\tilde{\epsilon}((0, \bar{1}), (0, \bar{1})) = 1$

e

$$\tilde{\epsilon}((\xi_i,\bar{0}),(0,\bar{1})) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad l+1 \le i \le l+m \\ \pm 1, & \text{se} \quad 1 \le i \le l \ \text{ ou } \ l+m+1 \le i \le l+m+n. \end{cases}$$

Note que vamos ter 2^{l+n} fatores de comutação do tipo $\tilde{\epsilon}$ definidos sobre $\Gamma \times \mathbb{Z}_2$.
Fixando $\mu \in F^{\times}$ e $\tilde{\epsilon}$, denotamos por $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ à coleção de todos os pares ordenados (a,b), onde $a,b \in A$, com operações de soma e multiplicação por escalar componente a componente, e a multiplicação sobre os pares ordenados de elementos homogêneos dada por

$$(a_\alpha,b_\beta)(c_\gamma,d_\delta) = (a_\alpha c_\gamma + \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\mu d_\delta \overline{b_\beta}\ ,\ \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))\overline{a_\alpha} d_\delta + \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{0}))c_\gamma b_\beta).$$

É fácil ver que $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é uma álgebra sobre F. O elemento $(1,0)$ é um elemento identidade da álgebra $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$. O conjunto $A' = \{(a,0) | a \in A\}$ é uma subálgebra $\Gamma \times \mathbb{Z}_2$-graduada da álgebra $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ a qual é isomorfa à álgebra A. Seja $v = (0,1)$, então $v^2 = \mu(1,0)$ e $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é a soma direta dos espaços vetoriais A' e vA'. Identificando A' com A, os elementos da álgebra $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ são representados na forma $x = a + vb$, onde $a,b \in A$ estão determinados de forma única pelo elemento x, e a multiplicação em $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é dada por:

$$(a_\alpha + vb_\beta)(c_\gamma + vd_\delta) = (a_\alpha c_\gamma + \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\mu d_\delta \overline{b_\beta}) + v(\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))\overline{a_\alpha} d_\delta + \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{0}))c_\gamma b_\beta).$$

$CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ tem uma $\Gamma \times \mathbb{Z}_2$-graduação, dada por:

$$CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon}) := \tilde{A} = \bigoplus_{(\gamma,\bar{l}) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_2} \tilde{A}_{(\gamma,\bar{l})},$$

onde $\tilde{A}_{(\gamma,\bar{0})} = A_\gamma$ e $\widetilde{A}_{(\gamma,\bar{1})} = vA_\gamma$. Como $v \in \widetilde{A}_{(0,\bar{1})}$, de acordo com nossa notação $v := v_{(0,\bar{1})}$, mas para abreviar será usado apenas v.
Para um elemento arbitrário $x = a + vb \in CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$, definimos $\overline{x} = \overline{a} - vb$.

Seja $f : A \times A \to F$ a aplicação bilinear sobre A, definida nas componentes homogêneas de A por $f(a_\alpha,b_\beta) = a_\alpha \overline{b_\beta} + \epsilon(\alpha,\beta) b_\beta \overline{a_\alpha}$, $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$, e seja $q_0(c_0) = c_0\overline{c_0}$, $c_0 \in A_0$. Assim $q = (q_0, f)$ é uma ϵ-forma quadrática sobre A. Sejam $\tilde{f}(x_{(\gamma,\bar{i})}, y_{(\delta,\bar{j})}) = x_{(\gamma,\bar{i})}\overline{y_{(\delta,\bar{j})}} + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{i}),(\delta,\bar{j})) y_{(\delta,\bar{j})}\overline{x_{(\gamma,\bar{i})}}$ e $\tilde{q}_0(z_{(0,\bar{0})}) = z_{(0,\bar{0})}\overline{z_{(0,\bar{0})}}$, para todo $z_{(0,\bar{0})} \in \tilde{A}_0$ e quaisquer elementos homogêneos $x_{(\gamma,\bar{i})}, y_{(\delta,\bar{j})} \in \tilde{A}$. Estendendo por linearidade obtemos uma aplicação bilinear $\tilde{f} : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A}$.

Lema 2.13. *A aplicação $x \to \overline{x}$ é uma $\tilde{\epsilon}$-involução da álgebra $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$. Em adição, $x + \overline{x} \in F$ para todo $x \in CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ e $\tilde{f}(x_{(\gamma,\bar{i})}, y_{(\delta,\bar{j})}) = x_{(\gamma,\bar{i})}\overline{y_{(\delta,\bar{j})}} + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{i}),(\delta,\bar{j})) y_{(\delta,\bar{j})}\overline{x_{(\gamma,\bar{i})}} \in F$ para todo $x_{(\gamma,\bar{i})}, y_{(\delta,\bar{j})} \in CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ homogêneos. Se a ϵ-forma quadrática $q = (q_0,f)$ é não-degenerada sobre A, então a $\tilde{\epsilon}$-forma quadrática $\tilde{q} = (\tilde{q}_0,\tilde{f})$ é não-degenerada sobre $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$. Além disso, $\overline{x} = \tilde{f}(x,1) - x$ para todo $x \in CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$.*

Demonstração. É claro que a aplicação $x \to \overline{x}$ é linear e que $\overline{\overline{x}} = x$ para todo $x \in CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$. Mostremos que $\overline{x_{(\gamma,\bar{i})} y_{(\delta,\bar{j})}} = \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{i}),(\delta,\bar{j}))\overline{y_{(\delta,\bar{j})}} \cdot \overline{x_{(\gamma,\bar{i})}}$, com o qual ficará demonstrado que $x \to \overline{x}$ é uma $\tilde{\epsilon}$-involução da álgebra $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$.
Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma$ e d_δ elementos homogêneos em A. Então temos que

$$\overline{a_\alpha b_\beta} = \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}\,\overline{a_\alpha} = \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\beta,\bar{0}))\overline{b_\beta}\,\overline{a_\alpha}.$$

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\overline{(vd_\delta)}\overline{a_\alpha} &= -\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))(vd_\delta)\overline{a_\alpha} = -\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))v(\epsilon(\delta,\alpha)\overline{a_\alpha}d_\delta)\\ &= -\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))v(\overline{a_\alpha}d_\delta) = \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))\overline{v(\overline{a_\alpha}d_\delta)}\\ &= \overline{a_\alpha(vd_\delta)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))\overline{c_\gamma}\overline{(vb_\beta)} &= -\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))\overline{c_\gamma}(vb_\beta) = -\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))\tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))v(c_\gamma b_\beta),\\ &= -\epsilon(\beta,\gamma)v(c_\gamma b_\beta) = \epsilon(\beta,\gamma)\overline{v(c_\gamma b_\beta)} = \overline{(vb_\beta)c_\gamma}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))\overline{(vd_\delta)}\ \overline{(vb_\beta)} &= \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))(vd_\delta)(vb_\beta) = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\delta,\bar{0}),(\beta,\bar{1}))\mu b_\beta\overline{d_\delta},\\ &= \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\mu[\epsilon(\delta,\beta)b_\beta\overline{d_\delta}] = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\mu\overline{d_\delta\overline{b_\beta}},\\ &= \overline{(vb_\beta)(vd_\delta)}.\end{aligned}$$

Além disso, para $x = a + vb$ temos que $x + \overline{x} = a + \overline{a} \in F$.
Agora vejamos como é o comportamento de $\tilde{f}$ nas diferentes componentes homogêneas:

$$\tilde{f}(a_\alpha, c_\gamma) = a_\alpha\overline{c_\gamma} + \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\gamma,\bar{0}))c_\gamma\overline{a_\alpha} = a_\alpha\overline{c_\gamma} + \epsilon(\alpha,\gamma)c_\gamma\overline{a_\alpha} = f(a_\alpha,c_\gamma).$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(a_\alpha, vd_\delta) &= a_\alpha\overline{(vd_\delta)} + \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))(vd_\delta)\overline{a_\alpha},\\ &= -a_\alpha(vd_\delta) + \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\epsilon(\delta,\alpha)v(\overline{a_\alpha}d_\delta),\\ &= -\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))v(\overline{a_\alpha}d_\delta) + \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))v(\overline{a_\alpha}d_\delta) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(vb_\beta, c_\gamma) &= (vb_\beta)\overline{c_\gamma} + \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))c_\gamma\overline{(vb_\beta)},\\ &= \epsilon(\beta,\gamma)v(\overline{c_\gamma}b_\beta) - \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))c_\gamma(vb_\beta),\\ &= \epsilon(\beta,\gamma)v(\overline{c_\gamma}b_\beta) - \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))\tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))v(\overline{c_\gamma}b_\beta),\\ &= \epsilon(\beta,\gamma)v(\overline{c_\gamma}b_\beta) - \epsilon(\beta,\gamma)v(\overline{c_\gamma}b_\beta) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(vb_\beta, vd_\delta) &= (vb_\beta)\overline{(vd_\delta)} + \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))(vd_\delta)\overline{(vb_\beta)},\\ &= -(vb_\beta)(vd_\delta) - \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))(vd_\delta)(vb_\beta),\\ &= -\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\mu d_\delta\overline{b_\beta} - \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\delta,\bar{0}),(\beta,\bar{1}))\mu b_\beta\overline{d_\delta},\\ &= -\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu(b_\beta\overline{d_\delta} + \epsilon(\beta,\delta)d_\delta\overline{b_\beta}),\\ &= -\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(b_\beta,d_\delta).\end{aligned}$$

Em resumo, a aplicação bilinear $\tilde{f} : \tilde{A} \times \tilde{A} \longrightarrow F$ fica definida assim:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(a_{(\alpha,\bar{0})}, c_{(\gamma,\bar{0})}) &= f(a_\alpha, c_\gamma),\\ \tilde{f}(a_{(\alpha,\bar{0})}, d_{(\delta,\bar{1})}) &= \tilde{f}(c_{(\gamma,\bar{1})}, b_{(\beta,\bar{0})}) = 0,\\ \tilde{f}(b_{(\beta,\bar{1})}, d_{(\delta,\bar{1})}) &= -\,\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(b_\beta,d_\delta),\end{aligned}$$

onde $a_{(\alpha,\bar{0})} := a_\alpha$, $b_{(\beta,\bar{1})} := vb_\beta$, $c_{(\gamma,\bar{0})} := c_\gamma$ e $d_{(\delta,\bar{1})} := vd_\delta$.
Portanto, $\tilde{f}(x_{(\gamma,\bar{i})}, y_{(\delta,\bar{j})}) \in F$ e $\tilde{q} = (\tilde{q_0}, \tilde{f})$ é uma $\tilde{\epsilon}$-forma quadrática sobre $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$. Além disso, se a ϵ-forma quadrática $q = (q_0, f)$ é não-degenerada então a $\tilde{\epsilon}$-forma quadrática $\tilde{q} = (\tilde{q_0}, \tilde{f})$ é não-degenerada. Também $\tilde{f}(x,1) = x + \overline{x}$. □

Agora, seja A uma ϵ-álgebra de composição com norma $q = (q_0, f)$. Pelo Lema 2.9 existe uma ϵ-involução sobre A, $a \to \overline{a}$, tal que, $a_0 + \overline{a_0}, a_0\overline{a_0} \in F$, $\overline{a_\alpha} = -a_\alpha$ se $\alpha \neq 0$ e $a_\alpha\overline{b_\beta} + \epsilon(\alpha,\beta)\overline{a_\alpha}b_\beta \in F$ ($a_\alpha\overline{b_\beta}+\epsilon(\alpha,\beta)\overline{a_\alpha}b_\beta = 0$ se $\alpha+\beta \neq 0$) para todo $a_\alpha, b_\beta \in A$. Isso significa que podemos aplicar o processo de Cayley-Dickson generalizado a A. Abaixo encontraremos condições sob as quais a álgebra obtida $CDG(A, \mu, \tilde{\epsilon})$ com norma $\tilde{q} = (q_0, \tilde{f})$ é uma $\tilde{\epsilon}$-álgebra de composição. Para isto, primeiro provaremos algumas identidades.

Lema 2.14. *Seja A é uma ϵ-álgebra de composição (Γ-graduada). Então, para quaisquer elementos homogêneos $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$, $c_\gamma \in A_\gamma$ e $d_\delta \in A_\delta$.*

i) $f(\overline{a_\alpha}, \overline{c_\gamma}) = f(a_\alpha, c_\gamma)$,

ii) $f(b_\beta\overline{a_\alpha}, d_\delta\overline{c_\gamma}) = \epsilon(\beta,\alpha)\epsilon(\delta,\gamma)f(a_\alpha\overline{b_\beta}, c_\gamma\overline{d_\delta})$,

iii) $\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\gamma,\delta)f(b_\beta\overline{a_\alpha}, d_\delta\overline{c_\gamma}) + \epsilon(\alpha+\beta+\gamma,\delta)f(d_\delta\overline{a_\alpha}, b_\beta\overline{c_\gamma}) = \epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta)$,

iv) $\epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta) = \epsilon(\alpha,\beta+\delta)\epsilon(\gamma,\delta)f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta)$.

Demonstração. i) Pela Proposição 2.8 ítens i) e ii),

$$f(\overline{a_\alpha}, \overline{c_\gamma}) = f(\overline{a_\alpha}, 1\cdot\overline{c_\gamma}) = f(\overline{\overline{a_\alpha}}c_\gamma, 1) = f(a_\alpha\cdot 1, c_\gamma) = f(a_\alpha, c_\gamma).$$

ii) Pela Proposição 2.8 ítens iv), i) e ii),

$$\begin{aligned} f(b_\beta\overline{a_\alpha}, d_\delta\overline{c_\gamma}) &= f(f(b_\beta, a_\alpha) - \epsilon(\beta,\alpha)a_\alpha\overline{b_\beta}, f(d_\delta, c_\gamma) - \epsilon(\delta,\gamma)c_\gamma\overline{d_\delta}), \\ &= 2f(b_\beta, a_\alpha)f(d_\delta, c_\gamma) - \epsilon(\delta,\gamma)f(b_\beta, a_\alpha)f(1, c_\gamma\overline{d_\delta}) \\ &\quad - \epsilon(\beta,\alpha)f(d_\delta, c_\gamma)f(a_\alpha\overline{b_\beta}, 1) + \epsilon(\beta,\alpha)\epsilon(\delta,\gamma)f(a_\alpha\overline{b_\beta}, c_\gamma\overline{d_\delta}), \\ &= 2f(b_\beta, a_\alpha)f(d_\delta, c_\gamma) - \epsilon(\delta,\gamma)f(b_\beta, a_\alpha)[\epsilon(\gamma,\delta)f(d_\delta, c_\gamma)] \\ &\quad - \epsilon(\beta,\alpha)f(d_\delta, c_\gamma)[\epsilon(\alpha,\beta)f(b_\beta, a_\alpha)] + \epsilon(\beta,\alpha)\epsilon(\delta,\gamma)f(a_\alpha\overline{b_\beta}, c_\gamma\overline{d_\delta}), \\ &= \epsilon(\beta,\alpha)\epsilon(\delta,\gamma)f(a_\alpha\overline{b_\beta}, c_\gamma\overline{d_\delta}). \end{aligned}$$

iii) Pelos itens i) e ii), e por (2.3),

$$\begin{aligned} \epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta) &= \epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha, c_\gamma)f(\overline{b_\beta}, \overline{d_\delta}), \\ &= f(a_\alpha\overline{b_\beta}, c_\gamma\overline{d_\delta}) + \epsilon(\beta+\gamma,\delta)\epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha\overline{d_\delta}, c_\gamma\overline{b_\beta}), \\ &= \epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\gamma,\delta)f(b_\beta\overline{a_\alpha}, d_\delta\overline{c_\gamma}) + \epsilon(\alpha+\beta+\gamma,\delta)f(d_\delta\overline{a_\alpha}, b_\beta\overline{c_\gamma}). \end{aligned}$$

iv) Mostremos que

$$[\epsilon(\beta,\gamma) - \epsilon(\alpha,\beta+\delta)\epsilon(\gamma,\delta)]f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta) = 0.$$

Se $f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta) \neq 0$ então $\alpha+\gamma = 0$ e $\beta+\delta = 0$, logo para este caso temos que:

$$\epsilon(\beta,\gamma) - \epsilon(\alpha,\beta+\delta)\epsilon(\gamma,\delta) = \epsilon(\beta,\gamma) - \epsilon(\alpha,0)\epsilon(\gamma,-\beta) = \epsilon(\beta,\gamma) - \epsilon(\beta,\gamma) = 0.$$

Portanto é obtida a igualdade.

□

Lema 2.15. *Se A é uma ϵ-álgebra de composição (Γ-graduada), então $CDG(A, \mu, \tilde{\epsilon})$ é uma $\tilde{\epsilon}$-álgebra de composição ($\Gamma \times \mathbb{Z}_2$-graduada) se, e somente se, A é associativa.*

Demonstração. A prova será feita por casos.

i) Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta \in A$ homogêneos. Provemos que

$$\begin{aligned}&\tilde{f}(a_\alpha(vb_\beta), c_\gamma(vd_\delta)) + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma+\delta,\bar{1}))\tilde{f}(a_\alpha(vd_\delta), c_\gamma(vb_\beta))\\ &\quad = \ \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))\tilde{f}(a_\alpha, c_\gamma)\tilde{f}(vb_\beta, vd_\delta).\end{aligned}$$

Por (2.3) e o lema 2.14 *i*) obtém-se:

$$\begin{aligned}&\tilde{f}(a_\alpha(vb_\beta), c_\gamma(vd_\delta)) + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma+,\bar{1}))\tilde{f}(a_\alpha(vd_\delta), c_\gamma(vb_\beta))\\
&\quad = \tilde{\epsilon}((\alpha+\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))\tilde{f}(v(\overline{a_\alpha}b_\beta), v(\overline{c_\gamma}d_\delta))\\
&\qquad + \epsilon(\gamma,\delta)\epsilon(\beta,\gamma)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))[\tilde{\epsilon}((\alpha+\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))\tilde{f}(v(\overline{a_\alpha}d_\delta), v(\overline{c_\gamma}b_\beta))],\\
&\quad = \tilde{\epsilon}((\alpha+\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))[-\tilde{\epsilon}((\alpha+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(\overline{a_\alpha}b_\beta, \overline{c_\gamma}d_\delta)]\\
&\qquad + \epsilon(\gamma,\delta)\epsilon(\beta,\gamma)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\alpha+\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))[-\tilde{\epsilon}((\alpha+\delta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(\overline{a_\alpha}d_\delta, \overline{c_\gamma}b_\beta)],\\
&\quad = \ -\tilde{\epsilon}((\gamma+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu[f(\overline{a_\alpha}b_\beta, \overline{c_\gamma}d_\delta) + \epsilon(\gamma,\delta)\epsilon(\beta,\gamma+\delta)f(\overline{a_\alpha}d_\delta, \overline{c_\gamma}b_\beta)],\\
&\quad = \ -\tilde{\epsilon}((\gamma+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu\epsilon(\beta,\gamma)f(\overline{a_\alpha}, \overline{c_\gamma})f(b_\beta, d_\delta),\\
&\quad = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))f(a_\alpha, c_\gamma)[-\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(b_\beta, d_\delta)],\\
&\quad = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))\tilde{f}(a_\alpha, c_\gamma)\tilde{f}(vb_\beta, vd_\delta).\end{aligned}$$

ii) Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta \in A$ homogêneos. Mostremos que

$$\begin{aligned}&\tilde{f}(a_\alpha(vb_\beta), (vc_\gamma)d_\delta) + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\delta,\bar{0}))\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma+\delta,\bar{1}))\tilde{f}(a_\alpha d_\delta, (vc_\gamma)(vb_\beta))\\ &\quad = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{1}))\tilde{f}(a_\alpha, vc_\gamma)\tilde{f}(vb_\beta, d_\delta) = 0,\end{aligned}$$

se, e somente se, A é associativa.

Pela Proposição 2.8 i) e ii),

$$\begin{aligned}&\tilde{f}(a_\alpha(vb_\beta), (vc_\gamma)d_\delta) + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\delta,\bar{0}))\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma+\delta,\bar{1}))\tilde{f}(a_\alpha d_\delta, (vc_\gamma)(vb_\beta))\\
&\quad = \tilde{f}(\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))v(\overline{a_\alpha}b_\beta), \epsilon(\gamma,\delta)v(d_\delta c_\gamma))\\
&\qquad + \epsilon(\gamma+\beta,\delta)\epsilon(\beta,\gamma)\tilde{\epsilon}((\beta+\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))f(a_\alpha d_\delta, \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{0}),(\beta,\bar{1}))\mu b_\beta\overline{c_\gamma}),\\
&\quad = \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))\epsilon(\gamma,\delta)[-\tilde{\epsilon}((\alpha+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1})\mu f(\overline{a_\alpha}b_\beta, d_\delta c_\gamma)]\\
&\qquad + \epsilon(\gamma+\beta,\delta)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(a_\alpha d_\delta, b_\beta\overline{c_\gamma}),\\
&\quad = \epsilon(\gamma,\delta)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu[\epsilon(\beta,\delta)f(a_\alpha d_\delta, b_\beta\overline{c_\gamma}) - f(\overline{a_\alpha}b_\beta, d_\delta c_\gamma)],\\
&\quad = \epsilon(\gamma,\delta)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu[\epsilon(\beta,\delta)\epsilon(\beta,\gamma)f((a_\alpha d_\delta)c_\gamma, b_\beta) - \epsilon(\beta,\delta+\gamma)f(a_\alpha(d_\delta c_\gamma), b_\beta)],\\
&\quad = \epsilon(\gamma,\delta)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\epsilon(\beta,\delta+\gamma)\mu f((a_\alpha d_\delta)c_\gamma - a_\alpha(d_\delta c_\gamma), b_\beta).\end{aligned}$$

A último termo é 0 se, e somente se, $(a_\alpha d_\delta)c_\gamma - a_\alpha(d_\delta c_\gamma) = 0$ (pois $f|_{(A_\beta+A_{-\beta})\times(A_\beta+A_{-\beta})}$ é não-degenerada para todo $\beta \in \Gamma$).

iii) Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta \in A$ homogêneos. Vejamos que

$$\begin{aligned}&\tilde{f}(a_\alpha b_\beta, (vc_\gamma)(vd_\delta)) + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma+\delta,\bar{0}))\tilde{f}(a_\alpha(vd_\delta), (vc_\gamma)b_\beta)\\ &\quad = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\tilde{f}(a_\alpha, vc_\gamma)\tilde{f}(b_\beta, vd_\delta) = 0,\end{aligned}$$

se, e somente se, A é associativa.
A prova é análoga ao item ii).

iv) Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta \in A$ homogêneos. Provemos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}((va_\alpha)b_\beta, c_\gamma(vd_\delta)) + \tilde{\epsilon}((\beta+\gamma,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\epsilon(\beta,\gamma)\tilde{f}((va_\alpha)(vd_\delta), c_\gamma b_\beta)\\ = \epsilon(\beta,\gamma)\tilde{f}(va_\alpha, c_\gamma)\tilde{f}(b_\beta, vd_\delta) = 0,\end{aligned}$$

se, e somente se, A é associativa.
A prova é análoga ao item ii).

v) Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta \in A$ homogêneos. Vejamos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}((va_\alpha)(vb_\beta), c_\gamma d_\delta) + \epsilon(\gamma,\delta)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\delta,\bar{0}))\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))\tilde{f}((va_\alpha)d_\delta, c_\gamma(vb_\beta))\\ = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{0}))\tilde{f}(va_\alpha, c_\gamma)\tilde{f}(vb_\beta, d_\delta) = 0,\end{aligned}$$

se, e somente se, A é associativa.
A prova é análoga ao item ii).

vi) Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta \in A$ homogêneos. Mostremos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}((va_\alpha)b_\beta, (vc_\gamma)d_\delta) + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\delta,\bar{0}))\epsilon(\beta,\delta)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\tilde{f}((va_\alpha)d_\delta, (vc_\gamma)b_\beta)\\ = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\tilde{f}(va_\alpha, vc_\gamma)f(b_\beta, d_\delta).\end{aligned}$$

Por (2.4), (2.3) e o Lema 2.14 *iv*) obtemos

$$\begin{aligned}&\tilde{f}((va_\alpha)b_\beta, (vc_\gamma)d_\delta) + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\delta,\bar{0}))\epsilon(\beta,\delta)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\tilde{f}((va_\alpha)d_\delta, (vc_\gamma)b_\beta)\\
&\quad= \tilde{f}(\epsilon(\alpha,\beta)v(b_\beta a_\alpha), \epsilon(\gamma,\delta)v(d_\delta c_\gamma))\\
&\qquad+ \epsilon(\beta+\gamma,\delta)\epsilon(\beta,\gamma)\tilde{\epsilon}((\beta+\delta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\tilde{f}(\epsilon(\alpha,\delta)v(d_\delta a_\alpha), \epsilon(\gamma,\beta)v(b_\beta c_\gamma)),\\
&\quad= \epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\gamma,\delta)[-\tilde{\epsilon}((\alpha+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(b_\beta a_\alpha, d_\delta c_\gamma)]\\
&\qquad+ \epsilon(\alpha+\beta+\gamma,\delta)\tilde{\epsilon}((\beta+\delta,\bar{0}),(0,\bar{1}))[-\tilde{\epsilon}((\alpha+\delta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(d_\delta a_\alpha, b_\beta c_\gamma)],\\
&\quad= -\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\gamma,\delta)\tilde{\epsilon}((\alpha+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(b_\beta a_\alpha, d_\delta c_\gamma)\\
&\qquad- \epsilon(\alpha+\beta+\gamma,\delta)\tilde{\epsilon}((\alpha+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu[\epsilon(\alpha+\delta,\beta+\gamma)f(b_\beta c_\gamma, d_\delta a_\alpha)],\\
&\quad= -\tilde{\epsilon}((\alpha+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\gamma,\delta)\mu[f(b_\beta a_\alpha, d_\delta c_\gamma) + \epsilon(\delta,\gamma)\epsilon(\alpha,\gamma+\delta)f(b_\beta c_\gamma, d_\delta a_\alpha)],\\
&\quad= -\tilde{\epsilon}((\alpha+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\gamma,\delta)\mu[\epsilon(\alpha,\delta)f(b_\beta, d_\delta)f(a_\alpha, c_\gamma)],\\
&\quad= -\tilde{\epsilon}((\alpha+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\gamma,\delta)\mu[\epsilon(\beta,\alpha+\gamma)\epsilon(\delta,\gamma)f(b_\beta, d_\delta)f(a_\alpha, c_\gamma)],\\
&\quad= \epsilon(\beta,\gamma)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))[-\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(a_\alpha, c_\gamma)]f(b_\beta, d_\delta),\\
&\quad= \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\tilde{f}(va_\alpha, vc_\gamma)f(b_\beta, d_\delta).\end{aligned}$$

vii) Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta \in A$ homogêneos. Provemos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}((va_\alpha)(vb_\beta), (vc_\gamma)(vd_\delta)) + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma+\delta,\bar{0}))\tilde{f}((va_\alpha)(vd_\delta), (vc_\gamma)(vb_\beta))\\ = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{1}))\tilde{f}(va_\alpha, vc_\gamma)\tilde{f}(vb_\beta, vd_\delta).\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.14 *iii)* obtemos

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}((va_\alpha)(vb_\beta),(vc_\gamma)(vd_\delta))+\tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\delta,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma+\delta,\bar{0}))\tilde{f}((va_\alpha)(vd_\delta),(vc_\gamma)(vb_\beta))\\
&\quad=\tilde{f}(\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\beta,\bar{1}))\mu b_\beta\overline{a_\alpha},\tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\mu d_\delta\overline{c_\gamma})\\
&\quad\quad+\epsilon(\gamma+\beta,\delta)\epsilon(\beta,\gamma)\tilde{f}(\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\mu d_\delta\overline{a_\alpha},\tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{0}),(\beta,\bar{1}))\mu b_\beta\overline{c_\gamma}),\\
&\quad=\tilde{\epsilon}((\alpha+\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu^2[\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\gamma,\delta)f(b_\beta\overline{a_\alpha},d_\delta\overline{c_\gamma})+\epsilon(\alpha+\beta+\gamma,\delta)f(d_\delta\overline{a_\alpha},b_\beta\overline{c_\gamma})],\\
&\quad=\tilde{\epsilon}((\alpha+\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu^2\epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha,c_\gamma)f(b_\beta,d_\delta),\\
&\quad=\epsilon(\beta,\gamma)\tilde{\epsilon}((\beta+\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))[-\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(a_\alpha,c_\gamma)][-\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu f(b_\beta,d_\delta)],\\
&\quad=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{1}))\tilde{f}(va_\alpha,vc_\gamma)\tilde{f}(vb_\beta,vd_\delta).
\end{aligned}$$

viii) Sejam $a_0, b_\beta, d_\delta \in A$ homogêneos. Mostremos que

$$\tilde{f}(a_0(vb_\beta),a_0(vd_\delta))=q_0(a_0)\tilde{f}(vb_\beta,vd_\delta).$$

Por (2.2),

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(a_0(vb_\beta),a_0(vd_\delta))&=\tilde{f}(v(\overline{a_0}b_\beta),v(\overline{a_0}d_\delta))=-\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0})(0,\bar{1}))\mu f(\overline{a_0}b_\beta,\overline{a_0}d_\delta),\\
&=q_0(\overline{a_0})[-\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0})(0,\bar{1}))\mu f(b_\beta,d_\delta)]=q_0(a_0)\tilde{f}(vb_\beta,vd_\delta).
\end{aligned}$$

ix) Sejam $a_0, b_\beta, d_\delta \in A$ homogêneos. Vejamos que

$$\tilde{f}((vb_\beta)a_0,(vd_\delta)a_0)=q_0(a_0)\tilde{f}(vb_\beta,vd_\delta).$$

Por (2.2),

$$\begin{aligned}
\tilde{f}((vb_\beta)a_0,(vd_\delta)a_0)&=\tilde{f}(v(a_0b_\beta),v(a_0d_\delta))=-\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0})(0,\bar{1}))\mu f(a_0b_\beta,a_0d_\delta),\\
&=q_0(a_0)[-\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0})(0,\bar{1}))\mu f(b_\beta,d_\delta)]=q_0(a_0)\tilde{f}(vb_\beta,vd_\delta).
\end{aligned}$$

Os outros casos são fáceis de verificar. Portanto, $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é uma $\tilde{\epsilon}$-álgebra de composição se, e somente se, A é associativa. □

Exemplo 2.16. *Os seguintes são exemplos de ϵ-álgebras de composição.*
Para os primeiros 4 exemplos vamos supor que F é um corpo de característica diferente de 2.

I. $\Gamma=\mathbb{Z}_1$ *o grupo trivial,* $A=A_0=F$ *e* $q_0(a)=a^2$ *para todo* $a\in F$. *A é uma álgebra de composição.*

II. $\tilde{K}(\mu)=CDG(F,\mu,\epsilon)=F+Fe_1$, *onde* $e_1^2=\mu$, $\mu\in F^\times$ *e ϵ é o fator de comutação trivial sobre* $\mathbb{Z}_2$. *$\tilde{K}(\mu)$ é uma álgebra de composição.* $\tilde{K}(\mu)=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_2}\tilde{K}(\mu)_\gamma$, *onde* $\tilde{K}(\mu)_{\bar{0}}=F$, $\tilde{K}(\mu)_{\bar{1}}=Fe_1$. *A forma bilinear* $f:\tilde{K}(\mu)\times\tilde{K}(\mu)\to F$ *é definida da seguinte maneira:* $f(1,1)=2$, $f(1,e_1)=f(e_1,1)=0$ *e* $f(e_1,e_1)=-2\mu$. *A álgebra $\tilde{K}(\mu)$ é associativa e comutativa.*

III. $Q^{(l)}(\mu,\psi)=CDG(\tilde{K}(\mu),\psi,\epsilon_l)$ *com* $\psi\neq 0$, $l\in\{1,-1\}$ *e ϵ_l o fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_2^2$ definido por:* $\epsilon_l((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}))=l$, $\epsilon_l((\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0}))=\epsilon_l((\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1}))=1$.
$Q^{(l)}(\mu,\psi)=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_2^2}Q^{(l)}(\mu,\psi)_\gamma$, *onde*

$$\begin{aligned}
Q^{(l)}(\mu,\psi)_{(\bar{0},\bar{0})}&=F, &\quad Q^{(l)}(\mu,\psi)_{(\bar{1},\bar{0})}&=Fe_1,\\
Q^{(l)}(\mu,\psi)_{(\bar{0},\bar{1})}&=Fe_2, &\quad Q^{(l)}(\mu,\psi)_{(\bar{1},\bar{1})}&=Fe_3.
\end{aligned}$$

($v_{(\bar{0},\bar{1})}=e_2$ *e* $v_{(\bar{0},\bar{1})}e_1=e_3$). *A multiplicação em $Q^{(l)}(\mu,\psi)$ é dada pela seguinte tabela:*

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	μ	$-le_3$	$-l\mu e_2$
e_2	e_2	e_3	ψ	ψe_1
e_3	e_3	μe_2	$-l\psi e_1$	$-l\mu\psi$

A forma bilinear $f : Q^{(l)}(\mu,\psi) \times Q^{(l)}(\mu,\psi) \to F$ *esta definida da seguinte maneira:* $f(1,1) = 2$, $f(e_1,e_1) = -2\mu$, $f(e_2,e_2) = -2\psi$, $f(e_3,e_3) = 2l\mu\psi$, *e para* $i,j = 1,2,3$, $f(1,e_j) = 0$ *e* $f(e_i,e_j) = 0$ *se* $i \neq j$.
$Q^{(1)}(\mu,\psi)$ *é uma álgebra de Quatérnios, e* $Q^{(-1)}(\mu,\psi) \cong {}^{F[x,y]}/_{\langle x^2-\mu,\ y^2-\psi\rangle}$.
$Q^{(l)}(\mu,\psi) = CDG(K(\mu),\psi,\epsilon_l)$ *é associativa mas não* ϵ_l*-comutativa.*

IV. $C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda) = CDG(Q^{(l)}(\mu,\psi),\lambda,\tilde{\epsilon}_{l,j})$ *com* $\lambda \neq 0$, $j = (j_1,j_2)$, $j_1,j_2 \in \{1,-1\}$ *e* $\tilde{\epsilon}_{l,j}$ *o fator de comutação sobre* $\mathbb{Z}_2^3$ *definido por:*
$\tilde{\epsilon}_{l,j}((\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{0})) = l$, $\tilde{\epsilon}_{l,j}((\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1})) = j_1$, $\tilde{\epsilon}_{l,j}((\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1})) = j_2$ *e* $\tilde{\epsilon}_{l,j}(\alpha,\alpha) = 1$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{Z}_2^3$.
$C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda) = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_2^3} C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda)_\gamma$, *onde*

$$C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{0},\bar{0},\bar{0})} = F, \quad C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{1},\bar{0},\bar{0})} = Fe_1, \quad C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{0},\bar{1},\bar{0})} = Fe_2,$$
$$C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{1},\bar{1},\bar{0})} = Fe_3, \quad C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{0},\bar{0},\bar{1})} = Fe_4, \quad C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{1},\bar{0},\bar{1})} = Fe_5,$$
$$C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{0},\bar{1},\bar{1})} = Fe_6, \quad C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{1},\bar{1},\bar{1})} = Fe_7.$$

($v_{(\bar{0},\bar{0},\bar{1})} = e_4$, $v_{(\bar{0},\bar{0},\bar{1})}e_1 = e_5$, $v_{(\bar{0},\bar{0},\bar{1})}e_2 = e_6$, $v_{(\bar{0},\bar{0},\bar{1})}e_3 = e_7$). *A multiplicação em* $C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda)$ *é dada pela seguinte tabela:*

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	μ	$-le_3$	$-l\mu e_2$	$-j_1e_5$	$-j_1\mu e_4$	lj_1e_7	$lj_1\mu e_6$
e_2	e_2	e_3	ψ	ψe_1	$-j_2e_6$	$-j_2e_7$	$-j_2\psi e_4$	$-j_2\psi e_5$
e_3	e_3	μe_2	$-l\psi e_1$	$-l\mu\psi$	$-j_1j_2e_7$	$-j_1j_2\mu e_6$	$lj_1j_2\psi e_5$	$lj_1j_2\mu\psi e_4$
e_4	e_4	e_5	e_6	e_7	λ	λe_1	λe_2	λe_3
e_5	e_5	μe_4	le_7	$l\mu e_6$	$-j_1\lambda e_1$	$-j_1\mu\lambda$	$-lj_1\lambda e_3$	$-lj_1\mu\lambda e_2$
e_6	e_6	$-e_7$	ψe_4	$-\psi e_5$	$-j_2\lambda e_2$	$j_2\lambda e_3$	$-j_2\psi\lambda$	$j_2\psi\lambda e_1$
e_7	e_7	$-\mu e_6$	$l\psi e_5$	$-l\mu\psi e_4$	$-j_1j_2\lambda e_3$	$j_1j_2\mu\lambda e_2$	$-lj_1j_2\psi\lambda e_1$	$lj_1j_2\mu\psi\lambda$

A forma bilinear $f : C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda) \times C^{(l,j)}(\mu,\psi,\lambda) \to F$ *é definida da seguinte forma:* $f(1,1) = 2$, $f(e_1,e_1) = -2\mu$, $f(e_2,e_2) = -2\psi$, $f(e_3,e_3) = 2l\mu\psi$, $f(e_4,e_4) = -2\lambda$, $f(e_5,e_5) = 2j_1\mu\lambda$, $f(e_6,e_6) = 2j_2\psi\lambda$, $f(e_7,e_7) = -2lj_1j_2\mu\psi\lambda$, *e para* $1 \leq i,j \leq 7$, $f(1,e_j) = 0$ *e* $f(e_r,e_s) = 0$ *se* $r \neq s$.
$C^{(1,(1,1))}(\mu,\psi,\lambda)$ *é uma álgebra Cayley-Dickson. Se* $j = (j_1,j_2) \in \{(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$, $C^{(1,j)}(\mu,\psi,\lambda)$ *é não-alternativa, por exemplo:* $(e_1+e_4, e_1+e_4, e_2) = 2(1-j_1)e_7$ *ou* $(e_2+e_4, e_2+e_4, e_1) = 2(1-j_2)e_7$ *é diferente de zero.* $C^{(-1,j)}(\mu,\psi,\lambda)$ *é não-alternativa, por exemplo:* $(e_1+e_2, e_1+e_2, e_4) = -4j_1j_2e_7 \neq 0$.

Nos seguintes exemplos vamos considerar o corpo F *de característica arbitraria.*

V. $\Gamma = \mathbb{Z}_1$, *o grupo trivial, e* $A = A_0 = K(\mu) = F + Fv_1$, *onde* $v_1^2 = v_1 + \mu$ *e* $4\mu+1 \neq 0$, *a involução é* $\overline{r+sv_1} = (r+s) - sv_1$, *e a forma quadrática é* $q_0(a) = a\bar{a}$. *Se o polinômio* $x^2 - x - \mu$ *é irredutível* *em $F[x]$ então a álgebra $K(\mu)$ é um corpo (uma extensão quadrática separável do corpo F), no outro caso $K(\mu) = F \oplus F$.*

VI. *$\tilde{Q}(\mu,\psi) = CDG(K(\mu),\psi,\epsilon) = K(\mu) + K(\mu)v_2$ com $\psi \neq 0$, $v_2^2 = \psi$, e ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_2$. $\tilde{Q}(\mu,\psi)$ é uma álgebra de quatérnios generalizado. $\tilde{Q}(\mu,\psi) = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_2} \tilde{Q}(\mu,\psi)_\gamma$, onde $\tilde{Q}(\mu,\psi)_{\bar{0}} = K(\mu)$ e $\tilde{Q}(\mu,\psi)_{\bar{1}} = K(\mu)v_2$. A forma bilinear $f : \tilde{Q}(\mu,\psi) \times \tilde{Q}(\mu,\psi) \to F$ é definida da seguinte maneira: $f(1,1) = 2$, $f(v_1,1) = 1$, $f(v_1,v_1) = -2\mu$, $f(v_2,v_2) = -2\psi$, $f(v_2,u_2) = -\psi$, $f(u_2,u_2) = 2\mu\psi$ e $f(\tilde{Q}(\mu,\psi)_{\bar{0}},\tilde{Q}(\mu,\psi)_{\bar{1}}) = 0$. É fácil ver $\tilde{Q}(\mu,\psi)$ é associativa mas não comutativa.*

VII. *$C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda) = CDG(\tilde{Q}(\mu,\psi),\lambda,\tilde{\epsilon}_l)$ com $\lambda \neq 0$, $l \in \{1,-1\}$ e $\tilde{\epsilon}_l$ o fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_2^2$ definido por: $\tilde{\epsilon}_l((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})) = l$, e $\tilde{\epsilon}_l(\alpha,\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_2^2$.*
$C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda) = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda)_\gamma$, onde

$$C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{0},\bar{0})} = F + Fv_1, \quad C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{1},\bar{0})} = Fv_2 + Fu_2,$$
$$C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{0},\bar{1})} = Fv_3 + Fu_3, \quad C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda)_{(\bar{1},\bar{1})} = Fv_4 + Fu_4.$$

($v_{(\bar{0},\bar{1})} = v_3$, $v_{(\bar{0},\bar{1})}v_1 = u_3$, $v_{(\bar{0},\bar{1})}v_2 = v_4$ e $v_{(\bar{0},\bar{1})}u_2 = u_4$). A multiplicação de $C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda)$ é dada pela seguinte tabela:

$\cdot$	1	v_1	v_2	u_2	v_3	u_3	v_4	u_4
1	1	v_1	v_2	u_2	v_3	u_3	v_4	u_4
v_1	v_1	$v_1+\mu$	v_2-u_2	$-\mu v_2$	v_3-u_3	$-\mu v_3$	u_4	$u_4+\mu v_4$
v_2	v_2	u_2	ψ	ψv_1	$-lv_4$	$-lu_4$	$-l\psi v_3$	$-l\psi u_3$
u_2	u_2	$u_2+\mu v_2$	$\psi(1-v_1)$	$-\mu\psi$	$-lu_4$	$-l(u_4+\mu v_4)$	$l\psi(u_3-v_3)$	$l\mu\psi v_3$
v_3	v_3	u_3	v_4	u_4	λ	λv_1	λv_2	λu_2
u_3	u_3	$u_3+\mu v_3$	u_4	$u_4+\mu v_4$	$\lambda(1-v_1)$	$-\mu\lambda$	$\lambda(v_2-u_2)$	$-\mu\lambda v_2$
v_4	v_4	v_4-u_4	ψv_3	$\psi(v_3-u_3)$	$-l\lambda v_2$	$l\lambda(u_2-v_2)$	$-l\psi\lambda$	$l\psi\lambda(v_1-1)$
u_4	u_4	$-\mu v_4$	ψu_3	$-\mu\psi v_3$	$-l\lambda u_2$	$l\mu\lambda v_2$	$-l\psi\lambda v_1$	$l\mu\psi\lambda$

A forma bilinear $f : C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda) \times C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda) \to F$ é definida da seguinte maneira: $f(1,1) = 2$, $f(1,v_1) = 1$, $f(v_1,v_1) = -2\mu$, $f(v_2,v_2) = -2\psi$, $f(v_2,u_2) = -\psi$, $f(u_2,u_2) = 2\mu\psi$, $f(v_3,v_3) = -2\lambda$, $f(v_3,u_3) = -\lambda$, $f(u_3,u_3) = 2\mu\lambda$, $f(v_4,v_4) = 2l\psi\lambda$, $f(v_4,u_4) = l\psi\lambda$, $f(u_4,u_4) = -2l\mu\psi\lambda$, e $f(C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda)_\alpha, C^{(l)}(\mu,\psi,\lambda)_\beta) = 0$ se $\alpha \neq \beta$. $C^{(1)}(\mu,\psi,\lambda)$ é uma álgebra Cayley-Dickson. Se a característica de F é diferente de 2, $C^{(-1)}(\mu,\psi,\lambda)$ é uma álgebra não-alternativa: Por exemplo: $(v_2+v_3, v_2+v_3, v_1) = 2v_4 - 4u_4 \neq 0$.

VIII. *$\Gamma = \mathbb{Z}_1$, o grupo trivial, e $A = A_0 = Q(\mu,\psi) = CD(K(\mu),\psi)$, com $\psi \neq 0$ é uma álgebra dos quatérnios generalizado.*

IX. *$\tilde{C}(\mu,\psi,\lambda) = CDG(Q(\mu,\psi),\lambda,\epsilon) = Q(\mu,\psi) + Q(\mu,\psi)v_3$, com $\lambda \neq 0$, $v_3^2 = \lambda$ e ϵ o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_2$. $\tilde{C}(\mu,\psi,\lambda)$ é uma álgebra Cayley-Dickson. $\tilde{C}(\mu,\psi,\lambda) = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_2} \tilde{C}(\mu,\psi,\lambda)_\gamma$, onde $\tilde{C}(\mu,\psi,\lambda)_{\bar{0}} = Q(\mu,\psi)$ e $\tilde{C}(\mu,\psi,\lambda)_{\bar{1}} = Q(\mu,\psi)v_3$. É fácil ver $\tilde{C}(\mu,\psi,\lambda)$ é não-associativa.*

X. *$A = A_0 = C(\mu,\psi,\lambda) = CD(Q(\mu,\psi),\lambda)$ com $\lambda \neq 0$ é uma álgebra Cayley-Dickson.*

XI. *$Q'(0,1) = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_n} Q'(0,1)_\gamma$ é a álgebra dos quatérnios generalizada cindida com $\mathbb{Z}_n$-graduação dada por $Q'(0,1)_{\bar{0}} = Fe_1 \oplus Fe_2$, $Q'(0,1)_{\bar{1}} = Fu_1$, $Q'(0,1)_{-\bar{1}} = Fv_1$, com $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \cup \{0\}$. Seja ϵ o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_n$, é claro que $Q'(0,1)$ é uma ϵ-álgebra de composição.*
A tabela de multiplicação de $Q'(0,1)$ é a seguinte:

$\cdot$	e_1	e_2	u_1	v_1
e_1	e_1	0	u_1	0
e_2	0	e_2	0	v_1
u_1	0	u_1	0	$-e_1$
v_1	v_1	0	$-e_2$	0

A forma bilinear $f : Q'(0,1) \times Q'(0,1) \to F$ esta definida da seguinte maneira: $f(1,1) = 2$, $f(e_i, 1) = 1$, $f(e_i, e_i) = 0$, $f(u_1, v_1) = 1$, $f(e_i, u_1) = f(e_i, v_1) = 0$ e $f(u_1, u_1) = f(v_1, v_1) = 0$, $i \in \{0, 1\}$.
$Q'(0,1)$ é associativa mas não comutativa.

XII. $D^{(l)}(0,1,-1) = CDG(Q'(0,1), -1, \epsilon_l)$ com $l \in \{1, -1\}$ se n é par ou $l = 1$ se n é impar, e ϵ_l o fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ definido por: $\epsilon_l((\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0})) = \epsilon_l((\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1})) = 1$, $\epsilon_l((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})) = l$.
$D^{(l)}(0,1,-1) = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2} D^{(l)}(0,1,-1)_\gamma$, onde

$$D^{(l)}(0,1,-1)_{(\bar{0},\bar{0})} = Fe_1 + Fe_2, \quad D^{(l)}(0,1,-1)_{(\bar{1},\bar{0})} = Fu_1,$$
$$D^{(l)}(0,1,-1)_{(-\bar{1},\bar{0})} = Fv_1, \quad D^{(l)}(0,1,-1)_{(\bar{0},\bar{1})} = Fu_2 + Fv_2,$$
$$D^{(l)}(0,1,-1)_{(\bar{1},\bar{1})} = Fv_3, \quad D^{(l)}(0,1,-1)_{(-\bar{1},\bar{1})} = Fu_3.$$

($u_2 = -v_{(\bar{0},\bar{1})}e_2$, $v_2 = -v_{(\bar{0},\bar{1})}e_1$, $u_3 = v_{(\bar{0},\bar{1})}v_1$ e $v_3 = v_{(\bar{0},\bar{1})}u_1$). A multiplicação de $D^{(l)}(0,1,-1)$ é dada pela seguinte tabela:

$\cdot$	e_1	e_2	u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3
e_1	e_1	0	u_1	0	u_2	0	u_3	0
e_2	0	e_2	0	v_1	0	v_2	0	v_3
u_1	0	u_1	0	$-e_1$	lv_3	0	$-lv_2$	0
v_1	v_1	0	$-e_2$	0	0	lu_3	0	$-lu_2$
u_2	0	u_2	$-v_3$	0	0	$-e_1$	v_1	0
v_2	v_2	0	0	$-u_3$	$-e_2$	0	0	u_1
u_3	0	u_3	v_2	0	$-lv_1$	0	0	$-le_1$
v_3	v_3	0	0	u_2	0	$-lu_1$	$-le_2$	0

A forma bilinear $f : D^{(l)}(0,1,-1) \times D^{(l)}(0,1,-1) \to F$ é definida da seguinte maneira: $f(e_1, e_2) = 1$, $f(e_i, e_i) = 0$, $f(u_1, v_1) = f(u_2, v_2) = 1$, $f(u_3, v_3) = l$, $f(u_j, u_j) = 0$, $f(v_j, v_j) = 0$.
$D^{(1)}(0,1,-1)$ é uma álgebra Cayley-Dickson cindida. Se a característica de F é diferente de 2, $D^{(-1)}(0,1,-1)$ é uma álgebra não-alternativa: Por exemplo: $(u_2 + u_3, u_2 + u_3, v_2) = l(1-l)u_3 = -2u_3 \neq 0$.

Proposição 2.17. *Sejam Γ um grupo abeliano, ϵ um fator de comutação sobre Γ e A uma álgebra Γ-graduada, $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, sobre um corpo F, com elemento identidade 1. Seja $a \to \overline{a}$ uma ϵ-involução sobre A tal que, $a_0 + \overline{a_0}, a_0\overline{a_0} \in F$, $\overline{a_\alpha} = -a_\alpha$ se $\alpha \neq 0$, e $a_\alpha\overline{b_\beta} + \epsilon(\alpha,\beta)b_\beta\overline{a_\alpha} \in F$ ($a_\alpha\overline{b_\beta} + \epsilon(\alpha,\beta)b_\beta\overline{a_\alpha} = 0$, se $\alpha + \beta \neq 0$) para todo $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$. Também, seja $CDG(A, \mu, \tilde{\epsilon})$ a álgebra obtida de A por meio do processo de Cayley-Dickson generalizado. Então temos que*

a) A álgebra $CDG(A, \mu, \tilde{\epsilon})$ é associativa se, e somente se, A é associativa e ϵ-comutativa.

b) A álgebra $CDG(A, \mu, \tilde{\epsilon})$ é $\tilde{\epsilon}$-alternativa se, e somente se, a álgebra A é associativa.

Demonstração. Primeiro vejamos que $a_\alpha\overline{b_\beta}+\epsilon(\alpha,\beta)b_\beta\overline{a_\alpha}=\overline{a_\alpha}b_\beta+\epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}a_\alpha$, para quaisquer $a_\alpha\in A_\alpha$, $b_\beta\in A_\beta$.
Se $\alpha\neq 0$ e $\beta\neq 0$ então

$$a_\alpha\overline{b_\beta}+\epsilon(\alpha,\beta)b_\beta\overline{a_\alpha}-\overline{a_\alpha}b_\beta-\epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}a_\alpha=-a_\alpha b_\beta-\epsilon(\alpha,\beta)b_\beta a_\alpha+a_\alpha b_\beta+\epsilon(\alpha,\beta)b_\beta a_\alpha=0.$$

Se $\alpha=0$ e $\beta\neq 0$ então

$$\begin{aligned}a_0\overline{b_\beta}+\epsilon(0,\beta)b_\beta\overline{a_0}-\overline{a_0}b_\beta-\epsilon(0,\beta)\overline{b_\beta}a_0&=-a_0b_\beta+b_\beta\overline{a_0}-\overline{a_0}b_\beta+b_\beta a_0,\\&=-(a_0+\overline{a_0})b_\beta+b_\beta(\overline{a_0}+a_0)=0,\end{aligned}$$

a última igualdade é devido a que $a_0+\overline{a_0}\in F$.
Se $\alpha=0$ e $\beta=0$ então, $a_0+\overline{a_0}=l_1\in F$ e $b_0+\overline{b_0}=l_2\in F$. Assim

$$a_0\overline{b_0}+\epsilon(0,0)b_0\overline{a_0}-\overline{a_0}b_0-\epsilon(0,0)\overline{b_0}a_0=a_0(l_2-b_0)+b_0(l_1-a_0)-(l_1-a_0)b_0-(l_2-b_0)a_0=0.$$

a) $\Rightarrow$) Se a álgebra $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é associativa, como A é uma subálgebra de $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ então A é associativa.
Mostremos que a álgebra A é ϵ-comutativa se $(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é associativa: Como

$$\begin{aligned}(v,\overline{b_\beta},vd_\delta)&=(v\overline{b_\beta})(vd_\delta)-v[\overline{b_\beta}(vd_\delta)],\\&=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\mu d_\delta b_\beta-v[\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))v(b_\beta d_\delta)],\\&=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\delta,\bar{1}))\mu d_\delta b_\beta-\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu b_\beta d_\delta,\\&=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu[\epsilon(\beta,\delta)d_\delta b_\beta-b_\beta d_\delta].\end{aligned}$$

Se $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é associativa então $(v,\overline{b_\beta},vd_\delta)=0$, logo $b_\beta d_\delta=\epsilon(\beta,\delta)d_\delta b_\beta$, isto é A é ϵ-comutativa.
$\Leftarrow$) Agora suponhamos que A é associativa e ϵ-comutativa, e provemos que $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é associativa.
A prova será feita por casos:

i) Sejam $a_\alpha,b_\beta,c_\gamma\in A$ homogêneos.

$$\begin{aligned}[(va_\alpha)(vb_\beta)](vc_\gamma)&=\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\beta,\bar{1}))\mu(b_\beta\overline{a_\alpha})(vc_\gamma)=\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(\beta,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\alpha+\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu v[\overline{(b_\beta\overline{a_\alpha})}c_\gamma],\\&=\epsilon(\alpha,\beta)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu v[\epsilon(\beta,\alpha)(a_\alpha\overline{b_\beta})c_\gamma]=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu v[(a_\alpha\overline{b_\beta})c_\gamma].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(va_\alpha)[(vb_\beta)(vc_\gamma)]&=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\mu(va_\alpha)(c_\gamma\overline{b_\beta})=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\mu v[\epsilon(\alpha,\beta+\gamma)(c_\gamma\overline{b_\beta})a_\alpha],\\&=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\mu v[a_\alpha(c_\gamma\overline{b_\beta})]=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\mu v[a_\alpha(\epsilon(\gamma,\beta)\overline{b_\beta}c_\gamma)],\\&=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu v[(a_\alpha\overline{b_\beta})c_\gamma].\end{aligned}$$

Assim, $(va_\alpha,vb_\beta,vc_\gamma)=[(va_\alpha)(vb_\beta)](vc_\gamma)-(va_\alpha)[(vb_\beta)(vc_\gamma)]=0.$

ii) Sejam $a_\alpha,b_\beta,c_\gamma\in A$ homogêneos.

$$\begin{aligned}[a_\alpha(vb_\beta)](vc_\gamma)&=\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))[v(\overline{a_\alpha}b_\beta)](vc_\gamma)=\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\alpha+\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\mu c_\gamma\overline{(\overline{a_\alpha}b_\beta)},\\&=\epsilon(\alpha,\gamma)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\mu c_\gamma[\epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}a_\alpha]=\epsilon(\alpha,\beta+\gamma)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\mu c_\gamma(\overline{b_\beta}a_\alpha).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_\alpha[(vb_\beta)(vc_\gamma)]&=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\mu a_\alpha(c_\gamma\overline{b_\beta})=\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\epsilon(\alpha,\beta+\gamma)\mu(c_\gamma\overline{b_\beta})a_\alpha,\\&=\epsilon(\alpha,\beta+\gamma)\tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(\gamma,\bar{1}))\mu c_\gamma(\overline{b_\beta}a_\alpha).\end{aligned}$$

Assim, $(a_\alpha, vb_\beta, vc_\gamma) = [a_\alpha(vb_\beta)](vc_\gamma) - a_\alpha[(vb_\beta)(vc_\gamma)] = 0$.
Analogamente, pode-se mostrar que $(va_\alpha, b_\beta, vc_\gamma) = (va_\alpha, vb_\beta, c_\gamma) = 0$.

iii) Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma \in A$ homogêneos.

$$\begin{aligned}[a_\alpha(vb_\beta)]c_\gamma &= \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))[v(\overline{a_\alpha}b_\beta)]c_\gamma = \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))v[\epsilon(\alpha+\beta,\gamma)c_\gamma(\overline{a_\alpha}b_\beta)],\\ &= \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))v[(\overline{a_\alpha}b_\beta)c_\gamma],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_\alpha[(vb_\beta)c_\gamma] &= a_\alpha[\epsilon(\beta,\gamma)v(c_\gamma b_\beta)] = a_\alpha[v(b_\beta c_\gamma)],\\ &= \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))v[\overline{a_\alpha}(b_\beta c_\gamma)] = \tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))v[(\overline{a_\alpha}b_\beta)c_\gamma],\end{aligned}$$

Assim, $(a_\alpha, vb_\beta, c_\gamma) = [a_\alpha(vb_\beta)]c_\gamma - a_\alpha[(vb_\beta)c_\gamma] = 0$.
Analogamente, pode-se mostrar que $(va_\alpha, b_\beta, c_\gamma) = (a_\alpha, b_\beta, vc_\gamma) = 0$. Portanto, já temos provado que $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é associativa, se A é associativa e ϵ-comutativa.

b) $\Rightarrow$) Suponhamos que $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é $\tilde{\epsilon}$-alternativa, vejamos que A é associativa.
Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma \in A$ homogêneos. Então por (2.10)

$$\begin{aligned}0 &= (vc_\gamma, a_\alpha, b_\beta) + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\alpha,\bar{0}))(a_\alpha, vc_\gamma, b_\beta),\\ &= [(vc_\gamma)a_\alpha]b_\beta - (vc_\gamma)(a_\alpha b_\beta) + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\alpha,\bar{0}))[a_\alpha(vc_\gamma)]b_\beta - \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\alpha,\bar{0}))a_\alpha[(vc_\gamma)b_\beta],\\ &= \epsilon(\gamma,\alpha)[v(a_\alpha c_\gamma)]b_\beta - \epsilon(\gamma,\alpha+\beta)v[(a_\alpha b_\beta)c_\gamma] + \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\alpha,\bar{0}))\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))[v(\overline{a_\alpha}c_\gamma)]b_\beta\\ &\quad - \tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{1}),(\alpha,\bar{0}))\epsilon(\gamma,\beta)a_\alpha[v(b_\beta c_\gamma)],\\ &= \epsilon(\gamma,\alpha)\epsilon(\alpha+\gamma,\beta)v[b_\beta(a_\alpha c_\gamma)] - \epsilon(\gamma,\alpha+\beta)v[(a_\alpha b_\beta)c_\gamma] + \epsilon(\gamma,\alpha)\epsilon(\alpha+\gamma,\beta)v[b_\beta(\overline{a_\alpha}c_\gamma)]\\ &\quad - \tilde{\epsilon}((0,\bar{1}),(\alpha,\bar{0}))\epsilon(\gamma,\alpha+\beta)\tilde{\epsilon}((\alpha,\bar{0}),(0,\bar{1}))v[\overline{a_\alpha}(b_\beta c_\gamma)],\\ &= \epsilon(\gamma,\alpha+\beta)v[\epsilon(\alpha,\beta)b_\beta[a_\alpha c_\gamma + \overline{a_\alpha}c_\gamma] - (a_\alpha b_\beta)c_\gamma - \overline{a_\alpha}(b_\beta c_\gamma)].\end{aligned}$$

Assim,

$$\epsilon(\alpha,\beta)b_\beta[(a_\alpha + \overline{a_\alpha})c_\gamma] - (a_\alpha b_\beta)c_\gamma - \overline{a_\alpha}(b_\beta c_\gamma) = 0. \tag{2.15}$$

Se $\alpha \neq 0$ então $\overline{a_\alpha} = -a_\alpha$. Portanto, de (2.15) temos que $(a_\alpha b_\beta)c_\gamma - a_\alpha(b_\beta c_\gamma) = 0$.
Se $\alpha = 0$. Como $a_0 + \overline{a_0} \in F$ então de (2.15) temos que

$$\begin{aligned}0 &= b_\beta[(a_0 + \overline{a_0})c_\gamma] - (a_0 b_\beta)c_\gamma - \overline{a_0}(b_\beta c_\gamma),\\ &= (a_0 + \overline{a_0})(b_\beta c_\gamma) - (a_0 b_\beta)c_\gamma - \overline{a_0}(b_\beta c_\gamma),\\ &= a_0(b_\beta c_\gamma) - (a_0 b_\beta)c_\gamma.\end{aligned}$$

Portanto A é associativa.

$\Leftarrow$) Suponhamos que A é associativa, mostremos que $CDG(A,\mu,\tilde{\epsilon})$ é uma álgebra $\tilde{\epsilon}$-alternativa. Vamos provar apenas um caso, os outros casos se provam de maneira análoga. Vejamos que

$$(va_\alpha, vb_\beta, vc_\gamma) + \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{1}))(va_\alpha, vc_\gamma, vb_\beta) = 0.$$

Como

$$(va_\alpha, vb_\beta, vc_\gamma) = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu v[(a_\alpha\overline{b_\beta})c_\gamma - \epsilon(\alpha,\beta+\gamma)\epsilon(\beta,\gamma)(c_\gamma\overline{b_\beta})a_\alpha],$$

então pela associatividade de A temos que

$$
\begin{aligned}
&(va_\alpha, vb_\beta, vc_\gamma) + \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{1}))(va_\alpha, vc_\gamma, vb_\beta)\\
&\quad = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu v[(a_\alpha\overline{b_\beta})c_\gamma - \epsilon(\alpha,\beta+\gamma)\epsilon(\beta,\gamma)(c_\gamma\overline{b_\beta})a_\alpha]\\
&\qquad + \epsilon((\beta,\bar{1}),(\gamma,\bar{1}))\tilde{\epsilon}((\gamma,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu v[(a_\alpha\overline{c_\gamma})b_\beta - \epsilon(\alpha,\beta+\gamma)\epsilon(\gamma,\beta)(b_\beta\overline{c_\gamma})a_\alpha],\\
&\quad = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu v[(a_\alpha\overline{b_\beta})c_\gamma - \epsilon(\alpha,\beta+\gamma)\epsilon(\beta,\gamma)(c_\gamma\overline{b_\beta})a_\alpha + \epsilon(\beta,\gamma)(a_\alpha\overline{c_\gamma})b_\beta - \epsilon(\alpha,\beta+\gamma)(b_\beta\overline{c_\gamma})a_\alpha],\\
&\quad = \tilde{\epsilon}((\beta,\bar{0}),(0,\bar{1}))\mu v\{a_\alpha[\overline{b_\beta}c_\gamma + \epsilon(\beta,\gamma)\overline{c_\gamma}b_\beta] - \epsilon(\alpha,\beta+\gamma)[b_\beta\overline{c_\gamma} + \epsilon(\beta,\gamma)c_\gamma\overline{b_\beta}]a_\alpha\} = 0.
\end{aligned}
$$

O último termo é igual a 0 porque: Se $\beta+\gamma \neq 0$ então $\overline{b_\beta}c_\gamma + \epsilon(\beta,\gamma)\overline{c_\gamma}b_\beta = b_\beta\overline{c_\gamma} + \epsilon(\beta,\gamma)c_\gamma\overline{b_\beta} = 0$. Se $\beta+\gamma = 0$ então $\overline{b_\beta}c_\gamma + \epsilon(\beta,\gamma)\overline{c_\gamma}b_\beta = b_\beta\overline{c_\gamma} + \epsilon(\beta,\gamma)c_\gamma\overline{b_\beta} \in F$ e $\epsilon(\alpha,\beta+\gamma) = \epsilon(\alpha,0) = 1$. □

2.2 Mudança do fator de comutação

Em [Sch79], Scheunert estabeleceu una relação entre ϵ-álgebras de Lie correspondentes a diferentes fatores de comutação sobre um mesmo grupo abeliano. Nesta seção vamos ver que esta mesma relação tem-se para ϵ-álgebras de composição.

Seja Γ um grupo abeliano. Dada qualquer função $\sigma : \Gamma\times\Gamma \to F^\times$, definimos uma função $\rho : \Gamma\times\Gamma \to F^\times$ por

$$\rho(\alpha,\beta) = \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha)^{-1}, \tag{2.16}$$

para todo $\alpha,\beta \in \Gamma$.
É fácil ver que ρ é um fator de comutação se, e somente se,

$$\sigma(\alpha,\beta+\gamma)\sigma(\alpha,\beta)^{-1}\sigma(\alpha,\gamma)^{-1} = \sigma(\beta+\gamma,\alpha)\sigma(\beta,\alpha)^{-1}\sigma(\gamma,\alpha)^{-1}, \tag{2.17}$$

para todo $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$.

Definição 2.18. *Seja Γ um grupo abeliano. Uma função $\sigma : \Gamma\times\Gamma \to F^\times$ satisfazendo a condição*

$$\sigma(\alpha,\beta+\gamma)\sigma(\beta,\gamma) = \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\alpha+\beta,\gamma), \tag{2.18}$$

para todo $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$, é dita um 2-cociclo sobre Γ.

Observe que um 2-cociclo σ satisfaz $\sigma(0,\alpha) = \sigma(\alpha,0) = \sigma(0,0)$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Vamos supor a condição de normalização $\sigma(0,0) = 1$, a qual é necessária em nosso caso.

Para todo 2-cociclo σ sobre Γ, a função ρ definida por (2.16) é um fator de comutação sobre Γ, isto é, σ satisfaz a equação (2.17):

$$
\begin{aligned}
\sigma(\alpha,\beta+\gamma)\sigma(\alpha,\beta)^{-1}\sigma(\alpha,\gamma)^{-1} &= [\sigma(\alpha+\beta,\gamma)\sigma(\beta,\gamma)^{-1}]\sigma(\alpha,\gamma)^{-1} = [\sigma(\beta+\alpha,\gamma)\sigma(\alpha,\gamma)^{-1}]\sigma(\beta,\gamma)^{-1},\\
&= [\sigma(\beta,\alpha+\gamma)\sigma(\beta,\alpha)^{-1}]\sigma(\beta,\gamma)^{-1} = [\sigma(\beta,\gamma+\alpha)\sigma(\beta,\gamma)^{-1}]\sigma(\beta,\alpha)^{-1},\\
&= \sigma(\beta+\gamma,\alpha)\sigma(\gamma,\alpha)^{-1}\sigma(\beta,\alpha)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Dizemos que ρ é o *fator de comutação associado com σ*. Note que $\rho(\alpha,\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$.

Lema 2.19. *([Sch79], Lema 2) Sejam Γ um grupo abeliano finitamente gerado e ϵ um fator de comutação sobre Γ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Então existe uma função, $\sigma : \Gamma\times\Gamma \to F^\times$, tal* *que*

$$\begin{aligned}\epsilon(\alpha,\beta) &= \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha)^{-1},\\ \sigma(\alpha,\beta+\gamma) &= \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\alpha,\gamma),\\ \sigma(\alpha+\beta,\gamma) &= \sigma(\alpha,\gamma)\sigma(\beta,\gamma),\end{aligned}$$

para todo $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$. *Em particular* σ *é um* 2*-coclico sobre* Γ, *e* ϵ *é o fator de comutação associado a* σ.

Demonstração. Sejam $\xi_1,\ldots,\xi_n$ geradores do grupo Γ. Definimos

$$\sigma\left(\sum_{r=1}^{n} p_r\xi_r, \sum_{s=1}^{n} q_s\xi_s\right) = \prod_{r<s}\epsilon(\xi_r,\xi_s)^{p_r q_s}, \tag{2.19}$$

para todo $p_r, q_r\in\mathbb{Z}$, $1\leq r\leq n$. Então, σ satisfaz os requisitos desejados. □

Note que o 2-cociclo σ sobre Γ da demostração acima satisfaz a condição de normalização $\sigma(0,0)=1$. Seja ϵ um fator de comutação sobre Γ. Definimos

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{\alpha\in\Gamma\mid\epsilon(\alpha,\alpha)=1\},\\ \Gamma_1 &= \{\alpha\in\Gamma\mid\epsilon(\alpha,\alpha)\neq 1\}.\end{aligned}$$

Então, Γ_0 é um subgrupo de Γ e temos que, $\Gamma_0=\Gamma$ ($\Gamma_1=\varnothing$) ou Γ_0 é um subgrupo de índice 2 em Γ, e $\Gamma_0,\ \Gamma_1$ são as duas classes de resíduos modulo Γ_0. Definimos a função, $\epsilon_0:\Gamma\times\Gamma\to F^\times$, da seguinte maneira

$$\epsilon_0(\alpha,\beta) = \begin{cases} -1 & se \qquad \alpha,\beta\in\Gamma_1,\\ \\ 1 & e.o.c.\end{cases}$$

É fácil verificar que ϵ_0 é um fator de comutação sobre Γ, logo $\rho=\epsilon_0\epsilon$ também é um fator de comutação sobre Γ. Note que $\rho(\alpha,\alpha)=1$ para todo $\alpha\in\Gamma$.

Teorema 2.20. *Seja* Γ *um grupo abeliano. Então para qualquer fator de comutação* ϵ *sobre* Γ *existe um* 2*-cociclo* σ *sobre* Γ *tal que se definimos* $\rho(\alpha,\beta)=\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha)^{-1}$ *então* $\epsilon\rho=\epsilon_0$.

Demonstração. Ver Teorema 2.3, [BM99]. □

Corolário 2.21. *Seja* Γ *um grupo abeliano. Então para qualquer fator de comutação* ϵ *sobre* Γ *existe um* 2*-cociclo* σ *sobre* Γ *com* $\sigma(0,0)=1$ *tal que se definimos* $\rho(\alpha,\beta)=\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha)^{-1}$ *então* $\epsilon\rho=\epsilon_0$.

Demonstração. Seja ϵ um fator de comutação sobre Γ. Pelo Teorema 2.20 existe um 2-cociclo σ' sobre Γ tal que se definimos $\rho(\alpha,\beta)=\sigma'(\alpha,\beta)\sigma'(\beta,\alpha)^{-1}$ então $\epsilon\rho=\epsilon_0$. Definamos $\sigma(\alpha,\beta)=\sigma'(\alpha,\beta)\sigma'(0,0)^{-1}$ para todo $\alpha,\beta\in\Gamma$. É fácil ver que σ é um 2-cociclo sobre Γ que satisfaz a condição de normalização $\sigma(0,0)=1$ e que $\rho(\alpha,\beta)=\sigma'(\alpha,\beta)\sigma'(\beta,\alpha)^{-1}=\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha)^{-1}$. Isto prova o Corolário. □

Sejam Γ um grupo abeliano e A uma álgebra Γ-graduada. Dada qualquer função $\sigma:\Gamma\times\Gamma\to F^\times$, definimos sobre o espaço vetorial Γ-graduado A uma nova multiplicação $\cdot_\sigma$, definida nos elementos homogêneos de A por

$$a_\alpha\cdot_\sigma b_\beta = \sigma(\alpha,\beta)a_\alpha b_\beta, \tag{2.20}$$

para todo $a_\alpha\in A_\alpha$, $b_\beta\in A_\beta$, $\alpha,\beta\in\Gamma$.
O espaço vetorial Γ-graduado A, dotado com a multiplicação $\cdot_\sigma$, é uma álgebra Γ-graduada que denotaremos por A^σ.

Teorema 2.22. *Sejam Γ um grupo abeliano, ϵ um fator de comutação sobre Γ e, $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, uma ϵ-álgebra de composição com norma $q = (q_0, f)$. Sejam σ um 2-cociclo sobre Γ tal que $\sigma(0,0) = 1$, e ρ o fator de comutação associado com σ. Então, a álgebra Γ-graduada A^σ é uma $\epsilon\rho$-álgebra de composição com norma $q^\sigma = (q_0, f^\sigma)$, onde $f^\sigma(a_\alpha, b_\beta) = \sigma(\alpha,\beta)f(a_\alpha, b_\beta)$, para todo $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$, $\alpha, \beta \in \Gamma$.*

Demonstração. Sejam $a_\alpha, b_\beta \in A^\sigma$ elementos homogêneos. Por (2.4), temos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} f^\sigma(a_\alpha, b_\beta) &= \sigma(\alpha,\beta)f(a_\alpha, b_\beta) = \sigma(\alpha,\beta)\epsilon(\alpha,\beta)f(b_\beta, a_\alpha), \\ &= \sigma(\alpha,\beta)\epsilon(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha)^{-1}f^\sigma(b_\beta, a_\alpha) = \epsilon(\alpha,\beta)\rho(\alpha,\beta)f^\sigma(b_\beta, a_\alpha). \end{aligned}$$

Como $\rho(\alpha,\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$ e f é uma forma ϵ-simétrica par então f^σ é uma forma bilinear $\epsilon\rho$-simétrica par. Também, $q^\sigma = (q_0, f^\sigma)$ é não-degenerada já que $q = (q_0, f)$ é não-degenerada.
Por outro lado, como $\sigma(0,\alpha) = \sigma(\alpha, 0) = \sigma(0,0) = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$ então as identidades (2.1) e (2.2) se verificam facilmente sobre A^σ. Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta \in A^\sigma$ homogêneos, provemos que

$$f^\sigma(a_\alpha \cdot_\sigma b_\beta, c_\gamma \cdot_\sigma d_\delta) + (\epsilon\rho)(\beta, \gamma+\delta)(\epsilon\rho)(\gamma,\delta)f^\sigma(a_\alpha \cdot_\sigma d_\delta, c_\gamma \cdot_\sigma b_\beta) = (\epsilon\rho)(\beta,\gamma)f^\sigma(a_\alpha, c_\gamma)f^\sigma(b_\beta, d_\delta).$$

Isto é equivalente a provar que

$$\begin{aligned} &\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\gamma,\delta)\sigma(\alpha+\beta,\gamma+\delta)f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma d_\delta) + (\epsilon\rho)(\beta,\gamma+\delta)(\epsilon\rho)(\gamma,\delta)\sigma(\alpha,\delta)\sigma(\gamma,\beta)\sigma(\alpha+\delta,\beta+\gamma)f(a_\alpha d_\delta, c_\gamma b_\beta) \\ &\quad = (\epsilon\rho)(\beta,\gamma)\sigma(\alpha,\gamma)\sigma(\beta,\delta)f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta). \end{aligned}$$

Primeiro mostremos que

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\gamma,\delta)\sigma(\alpha+\beta,\delta+\gamma) &= \rho(\beta,\gamma+\delta)\rho(\gamma,\delta)\sigma(\alpha,\delta)\sigma(\gamma,\beta)\sigma(\alpha+\delta,\beta+\gamma), \\ &= \rho(\gamma,\delta)\sigma(\alpha,\beta+\delta)\sigma(\beta,\delta)\sigma(\alpha+\beta+\delta,\gamma). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por (2.16) e (2.18),

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\gamma,\delta)\sigma(\alpha+\beta,\delta+\gamma) &= \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\gamma,\delta)\sigma(\alpha+\beta,\delta)\sigma(\alpha+\beta+\delta,\gamma)\sigma(\delta,\gamma)^{-1}, \\ &= [\sigma(\gamma,\delta)\sigma(\delta,\gamma)^{-1}][\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\alpha+\beta,\delta)]\sigma(\alpha+\beta+\delta,\gamma), \\ &= \rho(\gamma,\delta)\sigma(\alpha,\beta+\delta)\sigma(\beta,\delta)\sigma(\alpha+\beta+\delta,\gamma). \end{aligned}$$

Por (2.16) e (2.18),

$$\begin{aligned} &\rho(\beta,\gamma+\delta)\rho(\gamma,\delta)\sigma(\alpha,\delta)\sigma(\gamma,\beta)\sigma(\alpha+\delta,\beta+\gamma) \\ &\quad = \rho(\gamma,\delta)\rho(\beta,\gamma+\delta)\sigma(\alpha,\delta)\sigma(\gamma,\beta)[\sigma(\alpha+\delta,\beta)\sigma(\alpha+\delta+\beta,\gamma)\sigma(\beta,\gamma)^{-1}], \\ &\quad = \rho(\gamma,\delta)\rho(\beta,\gamma+\delta)[\sigma(\alpha,\delta)\sigma(\alpha+\delta,\beta)][\sigma(\gamma,\beta)\sigma(\beta,\gamma)^{-1}]\sigma(\alpha+\beta+\delta,\gamma), \\ &\quad = \rho(\gamma,\delta)\rho(\beta,\gamma)\rho(\beta,\delta)[\sigma(\alpha,\delta+\beta)\sigma(\delta,\beta)]\rho(\gamma,\beta)\sigma(\alpha+\beta+\delta,\gamma), \\ &\quad = \rho(\gamma,\delta)[\rho(\beta,\gamma)\rho(\gamma,\beta)][\sigma(\beta,\delta)\sigma(\delta,\beta)^{-1}]\sigma(\alpha,\delta+\beta)\sigma(\delta,\beta)\sigma(\alpha+\beta+\delta,\gamma), \\ &\quad = \rho(\gamma,\delta)\sigma(\alpha,\beta+\delta)\sigma(\beta,\delta)\sigma(\alpha+\beta+\delta,\gamma). \end{aligned}$$

Como $f(A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}) = 0$ se $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, só precisamos analisar dois casos: O primeiro caso é quando $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$ e, $\alpha+\gamma \neq 0$ ou $\beta+\delta \neq 0$. O segundo caso é quando $\alpha+\gamma = 0$ e $\beta+\delta = 0$.

i) Suponhamos que $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$ e, $\alpha+\gamma \neq 0$ ou $\beta+\delta \neq 0$. Assim $f^\sigma(a_\alpha, c_\gamma)f^\sigma(b_\beta, d_\delta) = 0$. Portanto, por (2.21) e A ser um ϵ-álgebra de composição fica provado este caso.

ii) Suponhamos que $\alpha+\gamma = 0$ e $\beta+\delta = 0$ ($\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$). Por (2.21) e A ser uma ϵ-álgebra de composição é suficiente mostrar que

$$\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\gamma,\delta)\sigma(\alpha+\beta,\delta+\gamma)=\rho(\beta,\gamma)\sigma(\alpha,\gamma)\sigma(\beta,\delta).$$

Por (2.21) e como $\sigma(\alpha,0)=\sigma(0,0)=1$, temos que

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\gamma,\delta)\sigma(\alpha+\beta,\gamma+\delta) &= \sigma(\alpha,\beta)\sigma(-\alpha,-\beta)\sigma(\alpha+\beta,-\alpha-\beta),\\ &= \rho(-\alpha,-\beta)\sigma(\alpha,0)\sigma(\beta,-\beta)\sigma(\alpha,-\alpha),\\ &= \rho(\alpha,\beta)\sigma(\beta,-\beta)\sigma(\alpha,-\alpha).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\rho(\beta,\gamma)\sigma(\alpha,\gamma)\sigma(\beta,\delta)=\rho(\beta,-\alpha)\sigma(\alpha,-\alpha)\sigma(\beta,-\beta)=\rho(\alpha,\beta)\sigma(\alpha,-\alpha)\sigma(\beta,-\beta).$$

Logo, fica provado este caso.
Portanto A^σ é uma $\epsilon\rho$-álgebra de composição. □

Corolário 2.23. *("descoloração") Sejam Γ um grupo abeliano, ϵ um fator de comutação sobre Γ e, $A=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$, uma ϵ-álgebra de composição sobre um corpo F, com norma $q=(q_0,f)$. Então existe um 2-cociclo σ sobre Γ com $\sigma(0,0)=1$ tal que, a álgebra Γ-graduada A^σ é uma ϵ_0-álgebra de composição com norma $q^\sigma=(q_0,f^\sigma)$, onde $f^\sigma(a_\alpha,b_\beta)=\sigma(\alpha,\beta)f(a_\alpha,b_\beta)$, para todo $a_\alpha\in A_\alpha$, $b_\beta\in A_\beta$, $\alpha,\beta\in\Gamma$. Em particular, se $car(F)\neq 2$ então A^σ é uma superálgebra de Hurwitz.*

Demonstração. Por Corolário 2.21, existe um 2-cociclo σ sobre Γ com $\sigma(0,0)=1$ tal que, se ρ é o fator de comutação associado com σ então $\epsilon\rho=\epsilon_0$. Assim, pelo Teorema 2.22, a álgebra Γ-graduada A^σ é uma ϵ_0-álgebra de composição com norma $q^\sigma=(q_0,f^\sigma)$.
Por outro lado, A^σ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação dada por $(A^\sigma)_{\bar 0}=A^{(0)}$ e $(A^\sigma)_{\bar 1}=A^{(1)}$. Assim, se $car(F)\neq 2$ então podemos definir sobre A^σ uma superforma quadrática $\tilde q=(\tilde q_{\bar 0},\tilde f)$, dada por $\tilde q_{\bar 0}(a)=\frac{f^\sigma(a,a)}{2}$ para todo $a\in(A^\sigma)_{\bar 0}$, e $\tilde f=f^\sigma$. É fácil ver que a superforma quadrática $\tilde q=(\tilde q_{\bar 0},\tilde f)$ é regular e que A^σ é uma superálgebra de Hurwitz com superforma quadrática $\tilde q=(\tilde q_{\bar 0},\tilde f)$. □

A correspondência acima entre as ϵ-álgebras de composição e as $\epsilon\rho$-álgebras de composição tem boas propriedades functoriais. Por exemplo: A correspondência é bijetiva, a transformação inversa é dada por $1/\sigma$ no lugar de σ. Um subespaço graduado de A é uma subálgebra graduada (respectivamente, um ideal graduado) de A se, e somente se, ele é uma subálgebra graduada (respectivamente, um ideal graduado) de A^σ.
Além disso, por Corolário 2.23, $A\to A^\sigma$ é uma bijeção entre as ϵ_0-álgebras de composição e as ϵ-álgebras de composição. Se $car(F)\neq 2$ então uma ϵ_0-álgebra de composição é uma superálgebra de Hurwitz, Γ-graduada. Em particular, se ϵ é uma fator de comutação tal que $\epsilon(\alpha,\alpha)=1$ para todo $\alpha\in\Gamma$ e $car(F)\neq 2$, então ϵ_0 é o fator de comutação trivial sobre Γ e as ϵ_0-álgebras de composição são exatamente as álgebras de composição Γ-graduadas. Portanto, se $car(F)\neq 2$ toda ϵ-álgebra de composição é uma "coloração" de uma superálgebra de Hurwitz.

Em vista do Corolário 2.23 e do conhecimento das graduações sobre as álgebras de composição e sobre as superálgebras de Hurwitz, para a classificação das ϵ-álgebras de composição ainda precisamos analisar o que acorre se a característica do corpo é 2.

O mesmo resultado se obtém para álgebras alternativas de cor.

Proposição 2.24. *Sejam Γ um grupo abeliano, ϵ um fator de comutação sobre Γ e, $A=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$, uma ϵ-álgebra alternativa. Sejam σ um 2-cociclo sobre Γ e ρ o fator de comutação associado com σ.*

Então a álgebra Γ-graduada A^σ é uma $\epsilon\rho$-álgebra alternativa.

Demonstração. Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma \in A^\sigma$, denotamos por $(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma)_\sigma$ o associador em A^σ dos elementos $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma$. Por (2.18),

$$\begin{aligned}
&(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma)_\sigma + (\epsilon\rho)(\alpha,\beta)(b_\beta, a_\alpha, c_\gamma)_\sigma \\
&\qquad = (a_\alpha \cdot_\sigma b_\beta) \cdot_\sigma c_\gamma - a_\alpha \cdot_\sigma (b_\beta \cdot_\sigma c_\gamma) + (\epsilon\rho)(\alpha,\beta)[(b_\beta \cdot_\sigma a_\alpha) \cdot_\sigma c_\gamma - b_\beta \cdot_\sigma (a_\alpha \cdot_\sigma c_\gamma)], \\
&\qquad = \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\alpha+\beta,\gamma)(a_\alpha b_\beta)c_\gamma - \sigma(\beta,\gamma)\sigma(\alpha,\beta+\gamma)a_\alpha(b_\beta c_\gamma) \\
&\qquad\quad + \epsilon(\alpha,\beta)\rho(\alpha,\beta)[\sigma(\beta,\alpha)\sigma(\beta+\alpha,\gamma)(b_\beta a_\alpha)c_\gamma - \sigma(\alpha,\gamma)\sigma(\beta,\alpha+\gamma)b_\beta(a_\alpha c_\gamma)], \\
&\qquad = \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\alpha+\beta,\gamma)(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) + \epsilon(\alpha,\beta)\sigma(\alpha,\beta)\sigma(\beta,\alpha)^{-1}[\sigma(\beta,\alpha)\sigma(\beta+\alpha,\gamma)(b_\beta, a_\alpha, c_\gamma)], \\
&\qquad = \sigma(\alpha,\beta)\sigma(\alpha+\beta,\gamma)[(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) + \epsilon(\alpha,\beta)(b_\beta, a_\alpha, c_\gamma)] = 0.
\end{aligned}$$

Analogamente podemos mostrar que

$$(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma)_\sigma + (\epsilon\rho)(\beta,\gamma)(a_\alpha, c_\gamma, b_\beta)_\sigma = 0.$$

Como $\sigma(\alpha,0) = \sigma(0,\alpha) = \sigma(0,0)$ então

$$\begin{aligned}
(d_0, d_0, a_\alpha)_\sigma &= (d_0 \cdot_\sigma d_0) \cdot_\sigma a_\alpha - d_0 \cdot_\sigma (d_0 \cdot_\sigma a_\alpha), \\
&= \sigma(0,0)\sigma(0,\alpha)(d_0 d_0)a_\alpha - \sigma(0,\alpha)\sigma(0,\alpha)d_0(d_0 a_\alpha), \\
&= \sigma(0,0)^2(d_0, d_0, a_\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, A^σ é uma $\epsilon\rho$-álgebra alternativa.

□

Capítulo 3

Classificação das Álgebras de composição de cor

Neste Capítulo vamos dar uma caracterização das álgebras de composição de cor sem restrição na característica do corpo. Nesta caracterização usaremos como referência o processo de Cayley-Dickson generalizado e a construção da base "canônica" de uma álgebra de Cayley cindida.
Seja $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ uma ϵ-álgebra de composição sobre um corpo F com ϵ o fator de comutação trivial. Em particular mostraremos que quando $car(F) = 2$, se A_0 é não cindida então A é uma álgebra de composição e, se A_0 é cindida então A é uma álgebra de composição cindida ou A é uma álgebra de dimensão 4 a qual não é uma álgebra de composição.

Lembremos alguns fatos importantes. Sejam Γ um grupo abeliano e $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ uma álgebra Γ-graduada. Então, o conjunto

$$Supp_\Gamma(A) := \{\alpha \in \Gamma \mid A_\gamma \neq 0\},$$

é dito o *suporte da graduação*. Note-se que $A = \bigoplus_{\gamma\in\langle Supp_\Gamma(A)\rangle} A_\gamma$, onde $\langle Supp_\Gamma(A)\rangle$ é o subgrupo de Γ gerado por $Supp_\Gamma(A)$. Daqui em diante,

sempre vamos supor que $\langle Supp_\Gamma(A)\rangle = \Gamma$.

Observamos que cada ϵ-álgebra de composição $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. De fato, segue-se de (1.16) que a aplicação

$$\Gamma \to F^\times, \quad \alpha \to \epsilon(\alpha, \alpha),$$

é um homomorfismo de grupos e que $\epsilon(\alpha, \alpha) = \pm 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$.
Definamos os seguintes conjuntos $\Gamma_0 = \{\alpha \in \Gamma | \epsilon(\alpha, \alpha) = 1\}$ e $\Gamma_1 = \{\alpha \in \Gamma | \epsilon(\alpha, \alpha) \neq 1\}$. Então, Γ_0 é um subgrupo de Γ e temos que, $\Gamma_0 = \Gamma$ ($\Gamma_1 = \varnothing$) ou Γ_0 é um subgrupo de índice 2 em Γ, e Γ_0, Γ_1 são as duas classes de resíduos modulo Γ_0.
Agora definimos

$$A^{(i)} := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma_i} A_\gamma, \quad \text{para i=0,1,} \tag{3.1}$$

e consideramos os índices 0, 1 como inteiros modulo 2; então segue-se do acima exposto que a decomposição $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de A.

Nós queremos classificar as álgebras de composição de cor sob equivalência, no sentido da seguinte definição.

Definição 3.1. *Sejam* $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ *uma* ϵ*-álgebra de composição* Γ*-graduada e* $B = \bigoplus_{\gamma'\in\Gamma'} B_{\gamma'}$ *uma* ϵ'*-álgebra de composição* Γ'*-graduada. Dizemos que* A *e* B *são equivalentes se existem um isomorfismo de álgebras* $g : A \to B$ *e um isomorfismo de grupos* $\theta : \Gamma \to \Gamma'$ *tais que,* $g(A_\gamma) = B_{\theta(\gamma)}$ *para todo* $\gamma \in \Gamma$ *e* $\epsilon' \circ (\theta \times \theta) = \epsilon$.

Definição 3.2. *Dizemos que duas* ϵ*-álgebras de composição* (Γ*-graduadas*), $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ *e* $B = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, *são isomorfas se existe um isomorfismo de álgebras* $\varphi : A \to B$ *tal que* $\varphi(A_\gamma) = B_\gamma$ *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

Por outro lado, uma álgebra de composição C tem divisores de zero se, e somente se, $q(x) = 0$ para algum $x \neq 0$ em C. Quando isto ocorre dizemos que C é uma álgebra de composição *cindida*.

O objetivo principal deste capítulo é classificar as álgebras de composição de cor sob equivalência. Para isto, vamos dividir o problema em três casos: O primeiro caso é quando $A^{(1)} = 0$ e A_0 é uma álgebra de composição não cindida, o segundo caso é quando $A^{(1)} = 0$ e A_0 é uma álgebra de composição cindida e o terceiro caso é quando $A^{(1)} \neq 0$. Nos dois primeiros casos $A = A^{(0)}$, já que estamos sob a condição de que o subgrupo de Γ gerado pelo conjunto $Supp_\Gamma(A)$ coincide com Γ.

Antes de analisar os diferentes casos, vamos ver alguns resultados e definições que vão ser úteis em nosso objetivo.

Seja $f(x, y)$ a forma bilinear associada a uma ϵ-álgebra de composição $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Assim, $f|_{(A_\alpha+A_{-\alpha})\times(A_\alpha+A_{-\alpha})}$ é simétrica se $\epsilon(\alpha, \alpha) = 1$ ou anti-simétrica se $\epsilon(\alpha, \alpha) = -1$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Seja $B = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$ uma subálgebra Γ-graduada de A, será denotado por $(B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma}$ o complemento ortogonal do subespaço $B_\gamma + B_{-\gamma}$ de $A_\gamma + A_{-\gamma}$ com respeito à forma $f|_{(A_\alpha+A_{-\alpha})\times(A_\alpha+A_{-\alpha})}$, $(B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma} := \{a \in A_\gamma + A_{-\gamma} \mid f(a, B_\gamma + B_{-\gamma}) = 0\}$. E será denotado por $B^\perp$ o complemento ortogonal do subespaço B de A com respeito à forma bilinear $f(x, y)$, $B^\perp := \{a \in A \mid f(a, B) = 0\}$. Como $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$ e B é uma subálgebra Γ-graduada de A, é fácil ver que $B^\perp = \sum_{\gamma\in\Gamma} (B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma}$.

A seguir um teorema bem conhecido.

Teorema 3.3. *Seja* f *uma forma bilinear simétrica ou alternada sobre um espaço vetorial* V, *e seja* W *um subespaço de* V *de dimensão finita. Se a restrição da forma* $f(x, y)$ *em* W *é não-degenerada então* $W \cap W^\perp = \{0\}$ *e* $V = W \oplus W^\perp$.

Demonstração. Como a restrição da forma $f(x, y)$ em W é não-degenerada então é claro que $W \cap W^\perp = \{0\}$. Agora, mostremos que $V = W + W^\perp$. Como $dimW < \infty$ e a restrição da forma bilinear $f(x, y)$ em W é não-degenerada então a aplicação linear de W a seu espaço dual W^*, $B : W \to W^*$ dada por $w \mapsto f(w, -)|_W$ é um isomorfismo. Assim, todo elemento de W^* tem a forma $f(w, -)|_W$ para algum $w \in W$. Seja $v \in V$, é claro que $f(v, -)|_W$ é uma forma linear em W. Logo $f(v, -)|_W = f(w, -)|_W$, para algum $w \in W$. Então, para todo $w' \in W$, $f(v, w') = f(w, w')$, assim $f(v - w, w') = 0$ para todo $w' \in W$. Daí que $v - w \in W^\perp$ e $v = w + (v - w) \in W + W^\perp$. Portanto $V = W \oplus W^\perp$. □

Corolário 3.4. *Seja* A *uma* ϵ*-álgebra de composição e seja* B *uma subálgebra* Γ*-graduada de* A *de dimensão finita, tal que* $f|_{B\times B}$ *é não-degenerada. Então* $B \cap B^\perp = \{0\}$ *e* $A = B \oplus B^\perp$.

Demonstração. Seja B uma subálgebra Γ-graduada de A de dimensão finita, $B = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, tal que $f|_{B\times B}$ é não-degenerada. $f|_{(B_\gamma+B_{-\gamma})\times(B_\gamma+B_{-\gamma})}$ é não-degenerada já que $f|_{B\times B}$ é não-degenerada e

$f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$. Além disso, como $f|_{(A_\gamma + A_{-\gamma})\times(A_\gamma+A_{-\gamma})}$ é simétrica ou anti-simétrica e $B_\gamma + B_{-\gamma}$ é uma subálgebra de dimensão finita de $A_\gamma + A_{-\gamma}$, pelo Teorema 3.3 obtemos que

$$\begin{aligned} A = \sum_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma + A_{-\gamma} &= \sum_{\gamma\in\Gamma} (B_\gamma + B_{-\gamma}) \oplus (B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma}, \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} (B_\gamma + B_{-\gamma}) \oplus \sum_{\gamma\in\Gamma} (B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma} = B \oplus B^\perp. \end{aligned}$$

□

Agora, vejamos uma proposição que vai ser importante na classificação das álgebras de composição de cor.

Proposição 3.5. *Sejam A uma ϵ-álgebra de composição Γ-graduada e B uma subálgebra Γ-graduada de A. Então, $B^\perp$ é um subespaço vetorial Γ-graduado de A e $B^\perp B + BB^\perp \subseteq B^\perp$. Além disso, quando B tem dimensão finita e contém o elemento identidade 1 da álgebra A, e $f|_{B\times B}$ é não-degenerada, se $B^\perp \neq 0$ então B é associativa.*

Demonstração. É claro que $B^\perp$ é um subespaço vetorial de A, mostremos que ele é Γ-graduado. Como $B^\perp = \sum_{\gamma\in\Gamma} (B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma}$, é suficiente mostrar que para todo $x = u_\gamma + v_{-\gamma} \in (B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma} \subseteq A_\gamma + A_{-\gamma}$ ($u_\gamma \in A_\gamma$, $v_{-\gamma} \in A_{-\gamma}$) temos que $u_\gamma, v_{-\gamma} \in (B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma}$. Se $\gamma = -\gamma$ então $(B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma} = B_\gamma^{\perp_\gamma}$. Assim, $x = u_\gamma \in B_\gamma^{\perp_\gamma}$. Se $\gamma \neq -\gamma$, seja $b_\gamma \in B_\gamma$ então

$$0 = f(x, b_\gamma) = f(u_\gamma + v_{-\gamma}, b_\gamma) = f(u_\gamma, b_\gamma) + f(v_{-\gamma}, b_\gamma) = f(v_{-\gamma}, b_\gamma),$$

a última igualdade é devido a que $f(A_\gamma, A_\gamma) = 0$ (já que $2\gamma \neq 0$). Assim, $f(v_{-\gamma}, B_\gamma) = 0$. Por outro lado, como $f(A_{-\gamma}, A_{-\gamma}) = 0$ (já que $-2\gamma \neq 0$) então $f(v_{-\gamma}, B_{-\gamma}) = 0$. Logo, $f(v_{-\gamma}, B_\gamma + B_{-\gamma}) = 0$, isto é, $v_{-\gamma} \in (B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma}$. Analogamente pode-se mostrar que $u_\gamma \in (B_\gamma + B_{-\gamma})^{\perp_\gamma}$. Portanto, $B^\perp$ é um subespaço vetorial Γ-graduado de A.
Sejam $a_\alpha, b_\beta \in B$ e $v_\gamma \in B^\perp$ elementos homogêneos. De (2.3) obtemos que

$$f(a_\alpha, v_\gamma b_\beta) = f(a_\alpha \cdot 1, v_\gamma b_\beta) = f(a_\alpha, v_\gamma) f(1, b_\beta) - \epsilon(\gamma, \beta) f(a_\alpha b_\beta, v_\gamma) = 0.$$

Analogamente obtemos que $f(a_\alpha, b_\beta v_\gamma) = 0$. Como os elementos $a_\alpha, b_\beta \in B$ e $v_\gamma \in B^\perp$ são arbitrários, isto significa que $B^\perp B + BB^\perp \subseteq B^\perp$.
Agora, suponhamos que B tem dimensão finita e contém o elemento identidade 1 da álgebra A, e que $f|_{B\times B}$ é não-degenerada. Sejam $x_\xi \in B^\perp$ e $a_\alpha, b_\beta \in B$ elementos homogêneos. Então, pela Proposição 2.8 *vi*)

$$\overline{a_\alpha}(x_\xi b_\beta) + \epsilon(\alpha, \xi)\overline{x_\xi}(a_\alpha b_\beta) = f(a_\alpha, x_\xi) b_\beta = 0, \tag{3.2}$$

e pela Proposição 2.8 *iv*)

$$\overline{a_\alpha}(x_\xi b_\beta) + \epsilon(\alpha, \xi + \beta)\overline{(x_\xi b_\beta)} a_\alpha = f(a_\alpha, x_\xi b_\beta) = 0, \tag{3.3}$$

o último termo é zero já que $B^\perp B \subseteq B^\perp$. Por outro lado, como $1 \in B$ então $\overline{v_\gamma} = -v_\gamma$ para todo $v_\gamma \in B^\perp$. Assim, por (3.2) e (3.3) temos que

$$\epsilon(\alpha, \xi) x_\xi (a_\alpha b_\beta) = \overline{a_\alpha}(x_\xi b_\beta) = -\epsilon(\alpha, \beta + \xi)\overline{(x_\xi b_\beta)} a_\alpha = \epsilon(\alpha, \xi)\epsilon(\alpha, \beta)(x_\xi b_\beta) a_\alpha.$$

Portanto,

$$x_\xi (a_\alpha b_\beta) = \epsilon(\alpha, \beta)(x_\xi b_\beta) a_\alpha. \tag{3.4}$$

Se $(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) = (a_\alpha b_\beta)c_\gamma - a_\alpha(b_\beta c_\gamma)$ é o associador de quaisquer três elementos homogêneos $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma \in B$ então, por (3.4) obtemos que

$$\begin{aligned} x_\xi(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) &= x_\xi[(a_\alpha b_\beta)c_\gamma] - x_\xi[a_\alpha(b_\beta c_\gamma)], \\ &= \epsilon(\alpha+\beta,\gamma)(x_\xi c_\gamma)(a_\alpha b_\beta) - \epsilon(\alpha,\beta+\gamma)[x_\xi(b_\beta c_\gamma)]a_\alpha, \\ &= \epsilon(\alpha+\beta,\gamma)\epsilon(\alpha,\beta)[(x_\xi c_\gamma)b_\beta]a_\alpha - \epsilon(\alpha,\beta+\gamma)\epsilon(\beta,\gamma)[(x_\xi c_\gamma)b_\beta]a_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Assim, $B^\perp(B,B,B) = 0$.
Suponhamos que $B^\perp \neq 0$. Por Corolário 3.4, $f|_{B^\perp \times B^\perp}$ é não-degenerada. Logo existem $x_\xi, y_{-\xi} \in B^\perp \setminus \{0\}$ tais que $f(x_\xi, y_{-\xi}) \neq 0$. Sejam $d_\delta = (a_\alpha, b_\beta, c_\gamma)$ $(\delta = \alpha+\beta+\gamma)$ e $e_{-\delta} \in B_{-\delta}$. Como $B^\perp(B,B,B) = 0$, por (2.3) obtemos que

$$\begin{aligned} \epsilon(\delta,-\xi)f(x_\xi,y_{-\xi})f(d_\delta,e_{-\delta}) &= f(x_\xi d_\delta, y_{-\xi}e_{-\delta}) + \epsilon(-\xi,-\delta)\epsilon(\delta,-\xi-\delta)f(x_\xi e_{-\delta}, y_{-\xi}d_\delta), \\ &= f(0, y_{-\xi}e_{-\delta}) + \epsilon(2\xi+\delta,\delta)f(x_\xi e_{-\delta}, 0) = 0. \end{aligned}$$

Como $f|_{B\times B}$ é não-degenerada e $e_{-\sigma} \in B_{-\sigma}$ é arbitrário, segue-se que $d_\delta = 0$. Consequentemente $(B,B,B) = 0$. Portanto, se $B^\perp \neq 0$ então B é uma álgebra associativa. □

O seguinte Corolário é uma consequência directa da Proposição acima.

Corolário 3.6. *Se A é uma ϵ-álgebra de composição tal que $A_\alpha \neq 0$ para algum $0 \neq \alpha \in \Gamma$ então A_0 é uma álgebra de composição associativa e dim$(A_0) \leq 4$.*

3.1 $A^{(1)} = 0$ e A_0 é uma álgebra de composição não cindida

Lema 3.7. *Sejam A uma ϵ-álgebra de composição e B uma subálgebra Γ-graduada de A contendo o elemento identidade 1 da álgebra A. Então para todo $a_\alpha, b_\beta \in B$ e $v_\gamma \in B^\perp$ homogêneos as seguintes relações são válidas:*

$$\overline{v_\gamma} = -v_\gamma, \qquad a_\alpha v_\gamma = \epsilon(\alpha,\gamma)v_\gamma\overline{a_\alpha}, \tag{3.5}$$

$$a_\alpha(v_\gamma b_\beta) = \epsilon(\alpha,\gamma)v_\gamma(\overline{a_\alpha}b_\beta), \qquad (v_\gamma b_\beta)a_\alpha = \epsilon(\beta,\alpha)v_\gamma(a_\alpha b_\beta), \tag{3.6}$$

$$(v_\gamma a_\alpha)(v_\gamma b_\beta) = \epsilon(\alpha,\beta+\gamma)\epsilon(2\gamma,\beta)[b_\beta v_\gamma^2]\overline{a_\alpha}. \tag{3.7}$$

Demonstração. Da igualdade $f(1, v_\gamma) = 0$ temos que $v_\gamma + \overline{v_\gamma} = 0$, e, da igualdade $f(a_\alpha, v_\gamma) = 0$ e da Proposição 2.8 *iv*) obtém-se que $a_\alpha\overline{v_\gamma} + \epsilon(\alpha,\gamma)v_\gamma\overline{a_\alpha} = f(a_\alpha, v_\gamma) = 0$, onde segue-se (3.5). Além disso, pela Proposição 2.8 *vi*) temos que

$$a_\alpha(v_\gamma b_\beta) = -\epsilon(\alpha,\gamma)\overline{v_\gamma}(\overline{a_\alpha}b_\beta) + f(\overline{a_\alpha}, v_\gamma)b_\beta = \epsilon(\alpha,\gamma)v_\gamma(\overline{a_\alpha}b_\beta),$$

a última igualdade é devido a que $\overline{a_\alpha} = f(1, a_\alpha) - a_\alpha \in B$. Analogamente, por (3.5) e da Proposição 2.8 *vi*), obtemos

$$\begin{aligned} (v_\gamma b_\beta)a_\alpha &= (\epsilon(\gamma,\beta)\overline{b_\beta}v_\gamma)a_\alpha = \epsilon(\gamma,\beta)[f(v_\gamma,\overline{a_\alpha})\overline{b_\beta} - \epsilon(\gamma,\alpha)(\overline{b_\beta}\overline{a_\alpha})\overline{v_\gamma}], \\ &= \epsilon(\gamma,\alpha+\beta)(\overline{b_\beta}\overline{a_\alpha})v_\gamma = \epsilon(\gamma,\alpha+\beta)(\epsilon(\beta,\alpha)\overline{a_\alpha b_\beta})v_\gamma, \\ &= \epsilon(\gamma,\alpha+\beta)\epsilon(\beta,\alpha)\epsilon(\alpha+\beta,\gamma)v_\gamma(a_\alpha b_\beta), \\ &= \epsilon(\beta,\alpha)v_\gamma(a_\alpha b_\beta). \end{aligned}$$

Portanto, temos (3.6). Por último da Proposição 2.8 *vi*), (3.5) e $B^{\perp}B \subseteq B^{\perp}$, temos que

$$\begin{aligned}
(v_\gamma a_\alpha)(v_\gamma b_\beta) &= f(a_\alpha, \overline{v_\gamma b_\beta})v_\gamma - \epsilon(\alpha, \beta+\gamma)[v_\gamma(\overline{v_\gamma b_\beta})]\overline{a_\alpha},\\
&= -f(a_\alpha, v_\gamma b_\beta)v_\gamma + \epsilon(\alpha, \beta+\gamma)[v_\gamma(v_\gamma b_\beta)]\overline{a_\alpha},\\
&= -\epsilon(\alpha, \beta+\gamma)[\overline{v_\gamma}(v_\gamma b_\beta)]\overline{a_\alpha} = -\epsilon(\alpha, \beta+\gamma)[\overline{v_\gamma}(\epsilon(\gamma,\beta)\overline{b_\beta}v_\gamma)]\overline{a_\alpha},\\
&= -\epsilon(\alpha, \beta+\gamma)\epsilon(\gamma,\beta)[f(v_\gamma, \overline{b_\beta})v_\gamma - \epsilon(\gamma,\beta)b_\beta(v_\gamma v_\gamma)]\overline{a_\alpha},\\
&= \epsilon(\alpha, \beta+\gamma)\epsilon(2\gamma,\beta)[b_\beta v_\gamma^2]\overline{a_\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.8. *Seja A uma ϵ-álgebra de composição tal que A_0 é não-cindida, isto é, $q_0(a_0) \neq 0$, para todo $0 \neq a_0 \in A_0$. Seja $\alpha \in \Gamma$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = 1$ e $A_\alpha \neq 0$, então $a_\alpha\overline{a_\alpha} \in F \setminus \{0\}$ para todo $0 \neq a_\alpha \in A_\alpha$ e $2\alpha = 0$.*

Demonstração. Seja $0 \neq a_0 \in A_0$. Como A_0 é não-cindida então $a_0\overline{a_0} = q_0(a_0) \in F \setminus \{0\}$. Logo fica demonstrado o lema no caso que $\alpha = 0$. Seja $0 \neq \alpha \in \Gamma$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = 1$ e $A_\alpha \neq 0$. Para este caso vamos dividir o problema em duas partes, primeiro vamos mostrar que $a_\alpha\overline{a_\alpha} = -a_\alpha^2 \neq 0$, para todo $0 \neq a_\alpha \in A_\alpha$, e depois vamos ver que $a_\alpha\overline{a_\alpha} \in F$.
Seja $0 \neq a_\alpha \in A_\alpha$. Como $f|_{(A_\alpha + A_{-\alpha})\times(A_\alpha + A_{-\alpha})}$ é não-degenerada e $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha+\beta \neq 0$, existe $b_{-\alpha} \in A_\alpha$ tal que $f(a_\alpha, b_{-\alpha}) \neq 0$. Dado que $\alpha \neq 0$ e $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$, pela Proposição 2.8 *vi*) e *i*), obtemos que

$$\begin{aligned}
a_\alpha^2 b_{-\alpha}^2 &= \overline{a_\alpha^2}(b_{-\alpha}b_{-\alpha}) = f(a_\alpha^2, b_{-\alpha})b_{-\alpha} - \epsilon(2\alpha, -\alpha)\overline{b_{-\alpha}}(a_\alpha^2 b_{-\alpha}),\\
&= \overline{b_{-\alpha}}[(a_\alpha a_\alpha)\overline{b_{-\alpha}}] = \overline{b_{-\alpha}}[f(a_\alpha, b_{-\alpha})a_\alpha - \epsilon(\alpha,-\alpha)(a_\alpha b_{-\alpha})\overline{a_\alpha}],\\
&= f(a_\alpha, b_{-\alpha})\overline{b_{-\alpha}}a_\alpha + \overline{b_{-\alpha}}[(a_\alpha b_{-\alpha})a_\alpha],\\
&= -f(a_\alpha\overline{b_{-\alpha}}, 1)b_{-\alpha}a_\alpha + f(b_{-\alpha}, a_\alpha b_{-\alpha})a_\alpha - \epsilon(-\alpha, 0)\overline{a_\alpha b_{-\alpha}}(b_{-\alpha}a_\alpha),\\
&= [f(a_\alpha b_{-\alpha}, 1) - \overline{a_\alpha b_{-\alpha}}](b_{-\alpha}a_\alpha),\\
&= (a_\alpha b_{-\alpha})\overline{(a_\alpha b_{-\alpha})} = q_0(a_\alpha b_{-\alpha}) \neq 0.
\end{aligned}$$

O último termo é diferente de 0 já que $a_\alpha b_{-\alpha} \neq 0$ ($f(a_\alpha b_{-\alpha}, 1) = -f(a_\alpha, b_{-\alpha}) \neq 0$) e A_0 é não-cindida. Portanto $a_\alpha^2 \neq 0$.
Agora provemos que $a_\alpha\overline{a_\alpha} = -a_\alpha^2 \in F$ e $2\alpha = 0$. Em particular, se $car(F) \neq 2$ então por (2.8), $a_\alpha^2 = -\frac{1}{2}f(a_\alpha, a_\alpha) \in F$. Como $A_\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 0$ então pelo Corolário 3.6 temos que A_0 é associativa e $dim(A_0) \leq 4$. Neste caso A_0 é uma álgebra de divisão: Como A_0 é associativa é suficiente mostrar que todo $0 \neq d \in A_0$ tem inverso multiplicativo. Seja $0 \neq d \in A_0$. Como $d^2 - f(d,1)d + q_0(d) = 0$ então, $\frac{1}{q_0(d)}d(f(d,1) - d) = \frac{1}{q_0(d)}(f(d,1) - d)d = 1$ ($q_0(d) \neq 0$ já que A_0 é não-cindida). Portanto, A_0 é uma álgebra de divisão.
Seja $0 \neq a_\alpha \in A_\alpha$. Como $q = (q_0, f)$ é não-degenerada, existem $b_{-\alpha} \in A_{-\alpha}$ e $u_0 \in A_0$ tais que, $f(a_\alpha, b_{-\alpha}) \neq 0$ e $f(1, u_0) = 1$. Como A_0 é uma álgebra de divisão e $a_\alpha b_{-\alpha} \neq 0$, então existe $d_0 \in A_0$ tal que $d_0(a_\alpha b_{-\alpha}) = u_0$. Além disso, pela Proposição 2.8 *vi*) temos que

$$u_0 = d_0(a_\alpha b_{-\alpha}) = f(\overline{d_0}, a_\alpha)b_{-\alpha} - \epsilon(0,\alpha)\overline{a_\alpha}(\overline{d_0}b_{-\alpha}) = a_\alpha(\overline{d_0}b_{-\alpha}).$$

Assim, para $b'_{-\alpha} = \overline{d_0}b_{-\alpha}$ temos que $a_\alpha b'_{-\alpha} = u_0$. Também, $b'_{-\alpha}a_\alpha = \overline{a_\alpha b'_{-\alpha}} = \overline{u_0}$.

Pela Proposição 2.8 *vi*) e (2.11) obtemos

$$\begin{aligned} f(a_\alpha, a_\alpha u_0)b'_{-\alpha} &= \overline{a_\alpha}[(a_\alpha u_0)b'_{-\alpha}] + \epsilon(\alpha,\alpha)\overline{(a_\alpha u_0)}(a_\alpha b'_{-\alpha}), \\ &= -a_\alpha[f(u_0, \overline{b'_{-\alpha}})a_\alpha - (a_\alpha \overline{b'_{-\alpha}})\overline{u_0}] - (a_\alpha u_0)u_0, \\ &= -a_\alpha[(a_\alpha b'_{-\alpha})\overline{u_0}] - a_\alpha u_0^2, \\ &= -a_\alpha(u_0\overline{u_0}) - a_\alpha(u_0 - q_0(u_0)), \\ &= -a_\alpha u_0. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.8 *v*) e (3.7) temos que

$$\begin{aligned} q_0(u_0)a_\alpha^2 = [a_\alpha^2\overline{u_0}]u_0 = [(a_\alpha u_0)a_\alpha]u_0 &= [(-f(a_\alpha, a_\alpha u_0)b'_{-\alpha})a_\alpha]u_0, \\ = -f(a_\alpha, a_\alpha u_0)\overline{u_0}u_0 &= -f(a_\alpha, a_\alpha u_0)q_0(u_0). \end{aligned}$$

Portanto, $a_\alpha\overline{a_\alpha} = -a_\alpha^2 = f(a_\alpha, a_\alpha u_0) \in F$ e $2\alpha = 0$. □

Lema 3.9. *Seja A uma ϵ-álgebra de composição tal que A_0 é não-cindida. Sejam $\alpha, \beta \in \Gamma$, $\alpha \neq 0$, tais que $\epsilon(\alpha,\alpha) = \epsilon(\beta,\beta) = 1$ e $A_\alpha, A_\beta \neq 0$. Então, para todo $0 \neq a_\alpha \in A_\alpha$ o operador de multiplicação a direita $L^\beta_{a_\alpha} : A_\beta \to A_{\alpha+\beta}$, $b_\beta \mapsto b_\beta a_\alpha$, é injetivo ($A_{\alpha+\beta} \neq 0$). Em particular, $dim(A_\alpha) = dim(A_0)$ para todo $\alpha \in \Gamma$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = 1$ e $A_\alpha \neq 0$.*

Demonstração. Como $f|_{A_0\times A_0}$ é não-degenerada, existe $u_0 \in A_0$ com $f(1, u_0) = 1$. Na demonstração do lema acima vimos que para todo $0 \neq \alpha \in \Gamma$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = 1$ e $A_\alpha \neq 0$ temos que, $f(a_\alpha, a_\alpha u_0) = a_\alpha\overline{a_\alpha} \neq 0$ para todo $0 \neq a_\alpha \in A_\alpha$. Por outro lado, para qualquer $0 \neq c_0 \in A_0$, por (2.2) obtemos que $f(c_0, c_0 u_0) = q_0(c_0)f(1, u_0) = q_0(c_0) \neq 0$, porque A_0 é não-cindida.
Sejam $a_\alpha, b_\beta \in A \setminus \{0\}$ elementos homogêneos. Pela Proposição 2.8 *vi*) e como $\alpha \neq 0$, temos que

$$(b_\beta u_0)a_\alpha = -f(u_0, a_\alpha)b_\beta + (b_\beta a_\alpha)\overline{u_0} = (b_\beta a_\alpha)\overline{u_0}. \tag{3.8}$$

Logo, por (2.3), (3.8) e por Proposição 2.8 *i*) temos que

$$\begin{aligned} 0 \neq \epsilon(\alpha,\beta)f(b_\beta, b_\beta u_0)f(a_\alpha, a_\alpha u_0) &= f(b_\beta a_\alpha, (b_\beta u_0)(a_\alpha u_0)) + \epsilon(\alpha, \beta+\alpha)\epsilon(\beta,\alpha)f(b_\beta(a_\alpha u_0), (b_\beta u_0)a_\alpha), \\ &= f(b_\beta a_\alpha, (b_\beta u_0)(a_\alpha u_0)) + f(b_\beta(a_\alpha u_0), (b_\beta a_\alpha)\overline{u_0}), \\ &= f(b_\beta a_\alpha, (b_\beta u_0)(a_\alpha u_0)) + f([b_\beta(a_\alpha u_0)]u_0, b_\beta a_\alpha), \\ &= f(b_\beta a_\alpha, (b_\beta u_0)(a_\alpha u_0) + [b_\beta(a_\alpha u_0)]u_0). \end{aligned}$$

Assim, $b_\beta a_\alpha \neq 0$, e portanto o operador de multiplicação a direita $L^\beta_{a_\alpha}$ é injetivo. Em particular $L^\alpha_{a_\alpha}$ e $L^0_{a_\alpha}$ são injetivos. Assim, $dim(A_\alpha) = dim(A_0)$. □

No seguinte teorema vamos ver que, se $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ é uma ϵ-álgebra de composição tal que $A = A^{(0)}$ e A_0 é não-cindida então A é isomorfa a uma das álgebras do Exemplo 2.16.

Teorema 3.10. *Seja $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ uma ϵ-álgebra de composição tal que, $A = A^{(0)}$ e A_0 é não-cindida. Então, A é isomorfa a uma das álgebra dos tipos I-X do Exemplo 2.16.*

Demonstração. Pelo termo "subálgebra Γ-graduada" vamos entender como uma subálgebra Γ-graduada contendo o elemento identidade 1. Dado que $a + \overline{a} \in F$, cada tal subálgebra Γ-graduada é invariante sob a ϵ involução $a \mapsto \overline{a}$.
Seja B uma subálgebra Γ-graduada de A, de dimensão finita sobre a qual a restrição da forma $f(x, y)$ é não-degenerada. Por corolário 3.4, A se decompõe em uma soma direta de subespaços, $A = B \oplus B^\perp$. Além disso, a restrição da forma $f(x, y)$ a $B^\perp$ também é não-degenerada. Suponhamos que $B \neq A$,

então podemos achar um elemento homogêneo $0 \neq v_\gamma \in B^\perp$ (já vimos que $B^\perp$ é um espaço vetorial Γ-graduado). Como $A = A^{(0)}$ e A_0 é não-cindida então pelo Lema 3.8, temos que $v_\gamma^2 = -v_\gamma \overline{v_\gamma} = \mu \in F\backslash\{0\}$ e $2\gamma = 0$.
Sejam $a_\alpha, b_\beta \in B$. Então de (3.7)

$$(v_\gamma a_\alpha)(v_\gamma b_\beta) = \epsilon(\alpha, \beta+\gamma)\epsilon(2\gamma, \beta)[b_\beta v_\gamma^2]\overline{a_\alpha} = \epsilon(\alpha, \beta+\gamma)\mu b_\beta \overline{a_\alpha}. \tag{3.9}$$

Assim, por Proposição 2.8 *i*) e por (3.9),

$$\begin{aligned} f(v_\gamma a_\alpha, v_\gamma b_\beta) &= -f(v_\gamma a_\alpha, \overline{v_\gamma} b_\beta) = -\epsilon(\alpha+\gamma, \gamma) f(v_\gamma(v_\gamma a_\alpha), b_\beta), \\ &= -\epsilon(\alpha, \gamma) f(\epsilon(0, \alpha+\gamma)\mu a_\alpha, b_\beta) = -\epsilon(\alpha, \gamma)\mu f(a_\alpha, b_\beta). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(v_\gamma a_\alpha, v_\gamma b_\beta) = -\epsilon(\alpha, \gamma)\mu f(a_\alpha, b_\beta). \tag{3.10}$$

Como f é não-degenerada em B e a dimensão de B é finita então a aplicação $a \to v_\gamma a$ do subespaço B no subespaço $v_\gamma B$ é um a um. Consequentemente, B e $v_\gamma B$ tem a mesma dimensão. Em adição, a relação (3.18) mostra que o subespaço $v_\gamma B$ é não-degenerado com respeito a $f(x, y)$. Na prova do Lema 3.7 mostramos que $f(a_\alpha, v_\gamma b_\beta) = 0$, isto implica que, o subespaço $B_1 = B + v_\gamma B$ é uma soma ortogonal de dois subespaços não-degenerados, o qual também é não-degenerado. As relações (3.6) e (3.9) mostram que $B_1 = B + v_\gamma B$ é uma subálgebra Γ-graduada da álgebra A obtida de B por meio do processo de Cayley-Dickson generalizado, $B_1 = (B, \mu, \epsilon)$ ($\epsilon(\alpha, \gamma) = \pm 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$, já que $2\gamma = 0$).
Dado que $\overline{v_\gamma} = -v_\gamma$ e $\overline{a_\alpha + v_\gamma b_\beta} = \overline{a_\alpha} - \epsilon(\gamma, \beta)\overline{b_\beta} v_\gamma = \overline{a_\alpha} - v_\gamma b_\beta$, a involução induzida em B_1 pela involução em A coincide com a involução obtida pelo processo de Cayley-Dickson generalizado. Finalmente, a subálgebra B_1 é não-degenerada e satisfaz as mesmas condições que B. Portanto podemos repetir o mesmo processo com a álgebra B_1.
Agora voltemos para a álgebra A e consideremos quatro casos separadamente.

(1) $dim(A_0) = 1$. Neste caso $car(F) \neq 2$ e $A_0 = F$. A_0 é uma álgebra de composição do tipo I. Por Lema 3.9, $dim(A_\gamma) = dim(A_0) = 1$ para todo $A_\gamma \neq 0$. Como a subálgebra $A_0 = F$ é não-degenerada com respeito a $f(x, y)$, podemos definir $B = A_0 = F$. Se $A \neq F$ então existe um $0 \neq \alpha_1 \in \Gamma$ tal que $A_{\alpha_1} \neq 0$ ($2\alpha_1 = 0$). Sejam $\Gamma_1 = \langle \alpha_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, $B_1 = A_0 \oplus A_{\alpha_1}$ e $\epsilon_1 = \epsilon|_{\Gamma_1 \times \Gamma_1}$. B_1 é uma ϵ_1-álgebra de composição do tipo II. Se $A \neq B_1$ então existe um $\alpha_2 \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ tal que $A_{\alpha_2} \neq 0$ ($2\alpha_2 = 0$). Sejam $\Gamma_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $B_2 = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_2} A_\gamma$ e $\epsilon_2 = \epsilon|_{\Gamma_2 \times \Gamma_2}$. B_2 é uma ϵ_2-álgebra de composição do tipo III. Finalmente, se $B_2 \neq A$ então existe um $\alpha_3 \in \Gamma$ tal que $A_{\alpha_3} \neq 0$ ($2\alpha_3 = 0$). Sejam $\Gamma_3 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \cong \mathbb{Z}_2^3$, $B_3 = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_3} A_\gamma$ e $\epsilon_3 = \epsilon|_{\Gamma_3 \times \Gamma_3}$. B_3 é uma ϵ_3-álgebra de composição do tipo IV. Como B_3 é não-associativa, por Lema 2.14 o processo deve terminar, isto é, $A = B_3$, $\Gamma = \Gamma_3$ e $\epsilon = \epsilon_3$.

    Se $dim(A_0) \geq 2$, o corpo F tem característica arbitrária.

(2) $dim(A_0) = 2$. Neste caso $A_0 = K(\mu) = F + Fv_1$ onde $v_1^2 = v_1 + \mu$ e $4\mu + 1 \neq 0$ com involução $\overline{r + sv_1} = (r + s) - sv_1$ e forma quadrática $q_0(a) = a\bar{a}$. Como A_0 é não-cindida, μ é tal que o polinômio $x^2 - x - \mu$ é irredutível em $F[x]$. A_0 é uma álgebra de composição do tipo V. Pelo Lema 3.9, $dim(A_\gamma) = dim(A_0) = 2$ para todo $A_\gamma \neq 0$. Como a subálgebra A_0 é não-degenerada com respeito a $f(x, y)$, podemos definir $B = A_0$. Se $A \neq A_0$ então existe um $0 \neq \alpha_1 \in \Gamma$ tal que $A_{\alpha_1} \neq 0$ ($2\alpha_1 = 0$). Sejam $\Gamma_1 = \langle \alpha_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, $B_1 = A_0 \oplus A_{\alpha_1}$ e $\epsilon_1 = \epsilon|_{\Gamma_1 \times \Gamma_1}$. B_1 é uma ϵ_1-álgebra de composição do tipo VI. Finalmente, se $B_1 \neq A$ então existe um $\alpha_2 \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ tal que $A_{\alpha_2} \neq 0$ ($2\alpha_2 = 0$). Sejam $\Gamma_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $B_2 = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_2} A_\gamma$ e $\epsilon_2 = \epsilon|_{\Gamma_2 \times \Gamma_2}$. B_2 é uma ϵ_2-álgebra

de composição do tipo VII. Como B_2 é não-associativa, por Lema 2.14 o processo deve terminar, isto é, $A = B_2$, $\Gamma = \Gamma_2$ e $\epsilon = \epsilon_2$.

(3) $dim(A_0) = 4$. Neste caso $A_0 = Q(\mu, \psi) = (K(\mu), \psi)$ $(\psi \neq 0)$ é uma álgebra dos quatérnios generalizada não-cindida. A_0 é uma álgebra de composição do tipo $VIII$. Pelo Lema 3.9, $dim(A_\gamma) = dim(A_0) = 4$ para todo $A_\gamma \neq 0$. Como a subálgebra A_0 é não-degenerada com respeito a $f(x, y)$, podemos definir $B = A_0$. Se $A \neq A_0$ então existe um $0 \neq \alpha \in \Gamma$ tal que $A_\alpha \neq 0$ $(2\alpha = 0)$. Sejam $\Gamma_1 = \langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, $B_1 = A_0 \oplus A_\alpha$ e $\epsilon_1 = \epsilon|_{\Gamma_1 \times \Gamma_1}$. B_1 é uma ϵ_1-álgebra de composição do tipo IX. Com isso o processo deve terminar, caso contrario por Lema 2.14 haveria na álgebra A uma subálgebra B_2 a qual não é uma ϵ-álgebra de composição, e isto é impossível. Consequentemente $A = B_1$, $\Gamma = \Gamma_1$ e $\epsilon = \epsilon_1$.

(4) Se $dim(A_0) = 8$, $A_0 = C(\mu, \psi, \lambda) = (Q(\mu, \psi), \lambda)$ com $\lambda \neq 0$, é uma álgebra de Cayley-Dickson não-cindida, a qual é não-associativa. Portanto $A = A_0$ é uma álgebra de composição do tipo X.

□

Com a notação do Exemplo 2.16, IV, temos as seguintes equivalências.

Proposição 3.11. *As seguintes álgebras de composição de cor são equivalentes:*

i) $C^{(1,(1,-1))}(\mu, \psi, \lambda) \equiv C^{(1,(-1,1))}(\psi, \mu, \lambda)$,

ii) $C^{(1,(1,-1))}(\mu, \psi, \lambda) \equiv C^{(-1,(1,1))}(\lambda, \psi, \mu)$,

iii) $C^{(1,(-1,-1))}(\mu, \psi, \lambda) \equiv C^{(-1,(1,-1))}(\mu, \lambda, \psi)$,

iv) $C^{(1,(-1,-1))}(\mu, \psi, \lambda) \equiv C^{(-1,(-1,1))}(\lambda, \psi, \mu)$,

v) $C^{(1,(1,-1))}(\mu, s, -rs) \equiv C^{(-1,(-1,-1))}(r\mu, s, -rs)$,

para quaisquer $\mu, \psi, \lambda \in F^\times$ *e* $r, s \in \{1, -1\}$.

Demonstração. i) Definamos $\theta : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^3$ por $\theta((\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$, $\theta((\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})) = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$, $\theta((\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})) = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})$. E definamos $g : C^{(1,(1,-1))}(\mu, \psi, \lambda) \to C^{(1,(-1,1))}(\psi, \mu, \lambda)$ por $g(1) = 1$, $g(e_1) = e_2$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = -e_3$, $g(e_4) = e_4$, $g(e_5) = e_6$, $g(e_6) = e_5$, $g(e_7) = -e_7$. É fácil verificar que g é um isomorfismo de álgebras, θ é um automorfismo de grupos, $\tilde{\epsilon}_{(-1,1)} = \tilde{\epsilon}_{(1,-1)} \circ (\theta \times \theta)$ e $g(C^{(1,(1,-1))}(\mu, \psi, \lambda)_\gamma) \subseteq C^{(1,(-1,1))}(\psi, \mu, \lambda)_{\theta(\gamma)}$, para todo $\gamma \in \mathbb{Z}_2^3$. Portanto,

$$C^{(1,(1,-1))}(\mu, \psi, \lambda) \equiv C^{(1,(-1,1))}(\psi, \mu, \lambda).$$

ii) Definamos $\theta : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^3$ por $\theta((\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})) = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})$, $\theta((\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$, $\theta((\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})) = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$. E definamos $g : C^{(1,(1,-1))}(\mu, \psi, \lambda) \to C^{(-1,(1,1))}(\lambda, \psi, \mu)$ por $g(1) = 1$, $g(e_1) = -e_4$, $g(e_2) = -e_2$, $g(e_3) = e_6$, $g(e_4) = e_1$, $g(e_5) = e_5$, $g(e_6) = e_3$, $g(e_7) = e_7$. É fácil verificar que, g é um isomorfismo de álgebras, θ é um automorfismo de grupos, $\tilde{\epsilon}'_{(1,1)} = \tilde{\epsilon}_{(1,-1)} \circ (\theta \times \theta)$ e $g(C^{(1,(1,-1))}(\mu, \psi, \lambda)_\gamma) \subseteq C^{(-1,(1,1))}(\lambda, \psi, \mu)_{\theta(\gamma)}$, para todo $\gamma \in \mathbb{Z}_2^3$. Portanto,

$$C^{(1,(1,-1))}(\mu, \psi, \lambda) \equiv C^{(-1,(1,1))}(\lambda, \psi, \mu).$$

iii) Definamos $\theta : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^3$ por $\theta((\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})) = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$, $\theta((\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})) = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})$, $\theta((\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$. E definamos $g : C^{(1,(-1,-1))}(\mu, \psi, \lambda) \to C^{(-1,(1,-1))}(\mu, \lambda, \psi)$ por $g(1) = 1$, $g(e_1) = e_1$, $g(e_2) = e_4$, $g(e_3) = e_5$, $g(e_4) = e_2$, $g(e_5) = e_3$, $g(e_6) = e_6$, $g(e_7) = e_7$. É fácil verificar que, g é um isomorfismo de álgebras, θ é um automorfismo de grupos, $\tilde{\epsilon}'_{(1,-1)} = \tilde{\epsilon}_{(-1,-1)} \circ (\theta\times\theta)$ e $g(C^{(1,(-1,-1))}(\mu,\psi,\lambda)_\gamma) \subseteq C^{(-1,(1,-1))}(\mu,\lambda,\psi)_{\theta(\gamma)}$, para todo $\gamma \in \mathbb{Z}_2^3$. Portanto,

$$C^{(1,(-1,-1))}(\mu,\psi,\lambda) \equiv C^{(-1,(1,-1))}(\mu,\lambda,\psi).$$

iv) Definamos $\theta : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^3$ por $\theta((\bar{1},\bar{0},\bar{0})) = (\bar{0},\bar{0},\bar{1})$, $\theta((\bar{0},\bar{1},\bar{0})) = (\bar{0},\bar{1},\bar{0})$, $\theta((\bar{0},\bar{0},\bar{1})) = (\bar{1},\bar{0},\bar{0})$. E definamos $g : C^{(1,(-1,-1))}(\mu,\psi,\lambda) \to C^{(-1,(-1,1))}(\lambda,\psi,\mu)$ por $g(1)=1$, $g(e_1)=e_4$, $g(e_2) = -e_2$, $g(e_3) = -e_6$, $g(e_4) = e_1$, $g(e_5) = e_5$, $g(e_6) = e_3$, $g(e_7) = e_7$. É fácil verificar que, g é um isomorfismo de álgebras, θ é um automorfismo de grupos, $\tilde{\epsilon}'_{(-1,1)} = \tilde{\epsilon}_{(-1,-1)} \circ (\theta \times \theta)$ e $g(C^{(1,(-1,-1))}(\mu,\psi,\lambda)_\gamma) \subseteq C^{(-1,(-1,1))}(\lambda,\psi,\mu)_{\theta(\gamma)}$, para todo $\gamma \in \mathbb{Z}_2^3$. Portanto,

$$C^{(1,(-1,-1))}(\mu,\psi,\lambda) \equiv C^{(-1,(-1,1))}(\lambda,\psi,\mu).$$

v) Definamos $\theta : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^3$ por $\theta((\bar{1},\bar{0},\bar{0})) = (\bar{1},\bar{1},\bar{1})$, $\theta((\bar{0},\bar{1},\bar{0})) = (\bar{0},\bar{1},\bar{0})$, $\theta((\bar{0},\bar{0},\bar{1})) = (\bar{0},\bar{0},\bar{1})$. E definamos $g : C^{(1,(1,-1))}(\mu,s,-rs) \to C^{(-1,(-1,-1))}(r\mu,s,-rs)$ por $g(1)=1$, $g(e_1)=e_7$, $g(e_2) = se_2$, $g(e_3) = e_5$, $g(e_4) = se_4$, $g(e_5) = -re_3$, $g(e_6) = e_6$, $g(e_7) = -re_1$. É fácil verificar que, g é um isomorfismo de álgebras, θ é um automorfismo de grupos, $\tilde{\epsilon}'_{(-1,-1)} = \tilde{\epsilon}_{(1,-1)} \circ (\theta \times \theta)$ e $g(C^{(1,(1,-1))}(\mu,s,-rs)_\gamma) \subseteq C^{(-1,(-1,-1))}(r\mu,s,-rs)_{\theta(\gamma)}$, para todo $\gamma \in \mathbb{Z}_2^3$. Portanto,

$$C^{(1,(1,-1))}(\mu,s,-rs) \equiv C^{(-1,(-1,-1))}(r\mu,s,-rs).$$

□

Com a notação do Exemplo 2.16, IV, VII, IX, X, segue-se o seguinte resultado.

Corolário 3.12. *Seja A uma álgebra de composição de cor de dimensão 8 tal que, $A = A^{(0)}$ e A_0 é não-cindida. Então temos, a menos de equivalência, um dos seguintes casos:*

i) $A = A_0 = C(\mu,\psi,\lambda)$ é uma álgebra de Cayley-Dickson não-cindida.

ii) $A = \tilde{C}(\mu,\psi,\lambda)$ com $A_0 = Q(\mu,\psi)$ uma álgebra de quatérnions não-cindida.

iii) A é $C^{(1)}(\mu,\psi,\lambda)$, ou $C^{(-1)}(\mu,\psi,\lambda)$, com $A_0 = K(\mu)$ uma álgebra de composição não-cindida.

iv) A é $C^{(1,(1,1))}(\mu,\psi,\lambda)$, ou $C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)$, ou $C^{(1,(-1,-1))}(\mu_2,\psi_2,\lambda_2)$, ou $C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)$, com $A_0 = F$ um corpo de característica diferente de 2.

Demonstração. Apenas precisamos mostrar que $C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)$ e $C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)$, não são sempre equivalentes, e que $C^{(1,(-1,-1))}(\mu_2,\psi_2,\lambda_2)$ não é equivalente a $C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)$ ou $C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)$, para quaisquer $\mu_1,\psi_1,\lambda_1,\mu_2,\psi_2,\lambda_2,\mu_3,\psi_3,\lambda_3 \in F^\times$.
É fácil ver que

$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)_{(\alpha_1,\alpha_2,\bar{0})} \cong Q^{(1)}(\mu_1,\psi_1),$$

$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)_{(\alpha_1,\bar{0},\alpha_2)} \cong Q^{(1)}(\mu_1,\lambda_1),$$

$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)_{(\bar{0},\alpha_1,\alpha_2)} \cong Q^{(-1)}(\psi_1,\lambda_1),$$

$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)} \cong Q^{(1)}(\mu_1,\psi_1\lambda_1),$$

$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)_{(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2)} \cong Q^{(-1)}(\psi_1,-\mu_1\lambda_1),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)_{(\alpha_2,\alpha_2,\alpha_1)} \cong Q^{(1)}(-\mu_1\psi_1,\lambda_1).$$

$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(-1,-1))}(\mu_2,\psi_2,\lambda_2)_{(\alpha_1,\alpha_2,\bar{0})} \cong Q^{(1)}(\mu_2,\psi_2),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(-1,-1))}(\mu_2,\psi_2,\lambda_2)_{(\alpha_1,\bar{0},\alpha_2)} \cong Q^{(-1)}(\mu_2,\lambda_2),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(-1,-1))}(\mu_2,\psi_2,\lambda_2)_{(\bar{0},\alpha_1,\alpha_2)} \cong Q^{(-1)}(\psi_2,\lambda_2),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(-1,-1))}(\mu_2,\psi_2,\lambda_2)_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)} \cong Q^{(-1)}(\mu_2,\psi_2\lambda_2),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(-1,-1))}(\mu_2,\psi_2,\lambda_2)_{(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2)} \cong Q^{(-1)}(\psi_2,\mu_2\lambda_2),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(1,(-1,-1))}(\mu_2,\psi_2,\lambda_2)_{(\alpha_2,\alpha_2,\alpha_1)} \cong Q^{(1)}(-\mu_2\psi_2,\lambda_2).$$

$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)_{(\alpha_1,\alpha_2,\bar{0})} \cong Q^{(-1)}(\mu_3,\psi_3),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)_{(\alpha_1,\bar{0},\alpha_2)} \cong Q^{(-1)}(\mu_3,\lambda_3),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)_{(\bar{0},\alpha_1,\alpha_2)} \cong Q^{(-1)}(\psi_3,\lambda_3),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)} \cong Q^{(1)}(\mu_3,\psi_3\lambda_3),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)_{(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2)} \cong Q^{(1)}(\psi_3,\mu_3\lambda_3),$$
$$\bigoplus_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_2^2} C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)_{(\alpha_2,\alpha_2,\alpha_1)} \cong Q^{(1)}(\mu_3\psi_3,\lambda_3).$$

Assim, das subálgebras $\mathbb{Z}_2^3$-graduadas de dimensão 4 de $C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)$ e $C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)$, 3 são álgebras de composição, e das subálgebras $\mathbb{Z}_2^3$-graduadas de dimensão 4 de $C^{(1,(-1,-1))}(\mu_2,\psi_2,\lambda_2)$, 2 são álgebras de composição. Portanto, dados $\mu_2,\psi_2,\lambda_2 \in F^\times$ temos que $C^{(1,(-1,-1))}(\mu_2,\psi_2,\lambda_2)$ não é equivalente a $C^{(1,(1,-1))}(\mu_1,\psi_1,\lambda_1)$ ou $C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)$, para quaisquer $\mu_1,\psi_1,\lambda_1,\mu_3,\psi_3,\lambda_3 \in F^\times$.

Por outro lado, seja F um corpo tal que contém 4 ou mais elementos, logo existe $l \in F\backslash\{0,1,-1\}$. É fácil ver que não existem $\mu_3,\psi_3,\lambda_3 \in F^\times$ tais que $C^{(-1,(-1,-1))}(\mu_3,\psi_3,\lambda_3)$ é equivalente a $C^{(1,(1,-1))}(l,l,l)$. $\square$

3.2 $A^{(1)} = 0$ e A_0 é uma álgebra de composição cindida

Seja A uma ϵ-álgebra de composição tal que $A^{(1)} = 0$ e A_0 é uma álgebra de composição cindida. Para este caso vamos nos basear na construção da base "canônica" de uma álgebra de Cayley-Dickson cindida. Devido a que $A^{(1)} = 0$ ($A = A^{(0)}$) temos que $\epsilon(\gamma,\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Além disso, como A_0 é uma álgebra de composição cindida ($dim\ A_0 \geq 2$) e $f|_{A_0 \times A_0}$ é não-degenerada, existe um elemento isotrópico $0 \neq a_0 \in A_0$ ($q_0(a_0) = 0$) e um elemento b_0 tais que $f(a_0b_0, 1) = f(a_0, \overline{b_0}) = 1$. Seja $e_1 := a_0b_0$. Temos que $q_0(e_1) = q_0(a_0b_0) = 0$ e $f(e_1, 1) = f(a_0, \overline{b_0}) = 1$, assim $e_1^2 = e_1$. Seja $e_2 := \overline{e_1} = 1 - e_1$, logo $q_0(e_2) = 0$, $e_2^2 = e_2$, $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ e $f(e_1, e_2) = f(e_1, 1 - e_1) = f(e_1, 1) = 1$. Então $K = Fe_1 \oplus Fe_2$ é uma subálgebra de composição de A_0. Por Corolário 3.4, obtemos que $A = K \oplus K^{\perp}$, e por Proposição 3.5 o subespaço vetorial $K^{\perp}$ de A é Γ-graduado.
Para qualquer $x_\alpha \in K^{\perp}$, $\overline{x_\alpha} = -x_\alpha$ (já que $1 = e_1 + e_2 \in K$) e da Proposição 2.8 i), segue-se que $x_\alpha e_1 + \overline{x_\alpha e_1} = f(x_\alpha e_1, 1) = f(x_\alpha, \overline{e_1}) = f(x_\alpha, e_2) = 0$, logo $x_\alpha e_1 = -\overline{x_\alpha e_1} = -\epsilon(\alpha, 0)\overline{e_1}\ \overline{x_\alpha} = e_2x_\alpha$, assim $x_\alpha e_1 = e_2x_\alpha$. Analogamente podemos ver que $x_\alpha e_2 = e_1x_\alpha$. Por outro lado $x_\alpha = 1 \cdot x_\alpha = e_1x_\alpha + e_2x_\alpha$, e da Proposição 2.8 *v*) temos que $e_2(e_1x_\alpha) = \overline{e_1}(e_1x_\alpha) = q_0(e_1)x_\alpha = 0$ e $e_1(e_2x_\alpha) = \overline{e_2}(e_2x_\alpha) = q_0(e_2)x_\alpha = 0$. Também, por (2.11) $e_i(e_ix_\alpha) = e_i^2x_\alpha$ e $(x_\alpha e_i)e_i = x_\alpha e_i^2 = x_\alpha e_i$. Portanto $K^{\perp} = U \oplus V$, onde

$$U = \{x \in A : e_1x = x = xe_2, e_2x = 0 = xe_1\} = (e_1A)e_2,$$
$$V = \{x \in A : e_2x = x = xe_1, e_1x = 0 = xe_2\} = (e_2A)e_1.$$

É fácil ver que U e V são subespaços Γ-graduados de A. Para quaisquer $u_\alpha, u'_\beta \in U$,

$$f(u_\alpha, u'_\beta) = f(e_1u_\alpha, e_1u'_\beta) = q_0(e_1)f(u_\alpha, u'_\beta) = 0,$$

assim $f(U, U) = 0$. Analogamente pode-se mostrar que $f(V, V) = 0$. Também, temos que

$$f(u_\alpha u'_\beta, K) \subseteq f(u_\alpha, Ku'_\beta) \subseteq f(U, U) = 0,$$

e para qualquer $v_\gamma \in V$, por (2.3) temos que

$$f(u_\alpha u'_\beta, v_\gamma) = f(u_\alpha u'_\beta, e_2v_\gamma) = \epsilon(\beta, 0)f(u_\alpha, e_2)f(u'_\beta, v_\gamma) - \epsilon(\beta, \gamma)f(u_\alpha v_\gamma, e_2u'_\beta) = 0.$$

Consequentemente, U^2 é ortogonal a K e V, logo $U^2 \subseteq V$. Analogamente podemos provar que V^2 é ortogonal a K e U, daí que $V^2 \subseteq U$. Além disso, para $u_\alpha \in U$ e $v_\gamma \in V$, pela Proposição 2.8 *vi*),

$$f(u_\alpha, v_\gamma)e_1 = \overline{u_\alpha}(v_\gamma e_1) + \epsilon(\alpha, \gamma)\overline{v_\gamma}(u_\alpha e_1) = -u_\alpha v_\gamma.$$

Assim,

$$u_\alpha v_\gamma = -f(u_\alpha, v_\gamma)e_1. \tag{3.11}$$

Da Proposição 2.8 *vi*),

$$f(u_\alpha, v_\gamma)e_2 = \overline{u_\alpha}(v_\gamma e_2) + \epsilon(\alpha, \gamma)\overline{v_\gamma}(u_\alpha e_2) = -\epsilon(\alpha, \gamma)v_\gamma u_\alpha.$$

Logo,

$$v_\gamma u_\alpha = -\epsilon(\gamma, \alpha)f(u_\alpha, v_\gamma)e_2 = -f(v_\gamma, u_\alpha)e_2. \tag{3.12}$$

Então, $UV \subseteq Fe_1$ e $VU \subseteq Fe_2$. Vejamos como é o comportamento de u_α^2 e v_γ^2. Se $car(F) \neq 2$, como $\epsilon(\alpha, \alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$, por (2.8), $u_\alpha^2 = v_\gamma^2 = 0$, já que $f(U, U) = f(V, V) = f(U \oplus V, K) = 0$. Se $car(F) = 2$. Seja $0 \neq u_\alpha \in U \setminus \{0\}$, como $f|_{(A_\alpha + A_{-\alpha}) \times (A_\alpha + A_{-\alpha})}$ é não-degenerada e $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se

$\alpha+\beta\neq 0$, existe $v_{-\alpha}\in V$ tal que $f(u_\alpha, v_{-\alpha})=1$. Pela Proposição 2.8 *vi*) e (3.12) obtemos que

$$\begin{aligned} v_{-\alpha}u_\alpha^2 &= -\overline{v_{-\alpha}}(u_\alpha u_\alpha) = -f(v_{-\alpha},u_\alpha)u_\alpha + \epsilon(-\alpha,\alpha)\overline{u_\alpha}(v_{-\alpha}u_\alpha),\\ &= -u_\alpha - \epsilon(\alpha,\alpha)u_\alpha(-f(v_{-\alpha},u_\alpha)e_2) = -u_\alpha + u_\alpha e_2 = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$v_{-\alpha}u_\alpha^2 = 0. \tag{3.13}$$

Também, pela Proposição 2.8 *vi*) e (3.11) obtemos que

$$\begin{aligned} u_\alpha v_{-\alpha}^2 &= -\overline{u_\alpha}(v_{-\alpha}v_{-\alpha}) = -f(u_\alpha,v_{-\alpha})v_{-\alpha} + \epsilon(\alpha,-\alpha)\overline{v_{-\alpha}}(u_\alpha v_{-\alpha})\\ &= -v_{-\alpha} - \epsilon(\alpha,\alpha)v_{-\alpha}(-f(u_\alpha,v_{-\alpha})e_1) = -v_{-\alpha} + v_{-\alpha}e_1 = 0. \end{aligned}$$

Então,

$$u_\alpha v_{-\alpha}^2 = 0. \tag{3.14}$$

Por outro lado, da Proposição 2.8 *vi*), (3.11) e (3.13) temos que

$$\begin{aligned} u_\alpha^2 &= f(v_{-\alpha},u_\alpha)u_\alpha^2 = \overline{v_{-\alpha}}(u_\alpha u_\alpha^2) + \epsilon(-\alpha,\alpha)\overline{u_\alpha}(v_{-\alpha}u_\alpha^2),\\ &= v_{-\alpha}[f(u_\alpha,u_\alpha^2)e_1] = f(u_\alpha,u_\alpha^2)v_{-\alpha}. \end{aligned}$$

Assim,

$$u_\alpha^2 = f(u_\alpha,u_\alpha^2)v_{-\alpha}. \tag{3.15}$$

Pela Proposição 2.8 *vi*), (3.12) e (3.14) obtemos que

$$\begin{aligned} v_{-\alpha}^2 &= f(u_\alpha,v_{-\alpha})v_{-\alpha}^2 = \overline{u_\alpha}(v_{-\alpha}v_{-\alpha}^2) + \epsilon(\alpha,-\alpha)\overline{v_{-\alpha}}(u_\alpha v_{-\alpha}^2),\\ &= u_\alpha[f(v_{-\alpha},v_{-\alpha}^2)e_2] = f(v_{-\alpha},v_{-\alpha}^2)u_\alpha. \end{aligned}$$

Então,

$$v_{-\alpha}^2 = f(v_{-\alpha},v_{-\alpha}^2)u_\alpha. \tag{3.16}$$

Substituindo (3.15) e (3.16) em (3.13) e (3.14) respectivamente, temos que

$$f(u_\alpha^2,u_\alpha)v_{-\alpha}^2 = 0 \qquad e \qquad f(v_{-\alpha}^2,v_{-\alpha})u_\alpha^2 = 0. \tag{3.17}$$

Assim, $f(u_\alpha^2,u_\alpha)=0$ ou $v_{-\alpha}^2=0$ e, $f(v_{-\alpha}^2,v_{-\alpha})=0$ ou $u_\alpha^2=0$. Se $f(u_\alpha^2,u_\alpha)=0$ de (3.15) segue-se que $u_\alpha^2=0$, e se $f(v_{-\alpha}^2,v_{-\alpha})=0$ de (3.16) temos que $v_{-\alpha}^2=0$. Portanto, podemos concluir que, $u_\alpha^2=0$ ou $v_{-\alpha}^2=0$.
No caso que, $v_{-\alpha}^2\neq 0$ ou $u_\alpha^2\neq 0$, de (3.16) e (3.15) teríamos que $-2\alpha=\alpha$, isto é, $3\alpha=0$.
Já estamos em condições de mostrar o primeiro exemplo de álgebra de composição de cor para este caso.

Exemplo 3.13. *(A álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada Q_{rs}) Seja $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_3}A_\gamma$, uma álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada, $A_{\bar 0}=Fe_1\oplus Fe_2$, $A_{\bar 1}=Fu_{\bar 1}$, e $A_{\bar 2}=Fv_{\bar 2}$, com a seguinte tabela de multiplicação:*

$\cdot$	e_1	e_2	$u_{\bar 1}$	$v_{\bar 2}$
e_1	e_1	0	$u_{\bar 1}$	0
e_2	0	e_2	0	$v_{\bar 2}$
$u_{\bar 1}$	0	$u_{\bar 1}$	$rv_{\bar 2}$	$-e_1$
$v_{\bar 2}$	$v_{\bar 2}$	0	$-e_2$	$su_{\bar 1}$

Onde $r,s\in F$. A norma é dada por $q_0(l_1e_1+l_2e_2)=l_1l_2$ para quaisquer $l_1,l_2\in F$, $f(e_1,e_2)=1$, $f(u_{\bar 1},v_{\bar 2})=1$, $f(u_{\bar 1},u_{\bar 1})=f(v_{\bar 2},v_{\bar 2})=0$ e $f(A_{\bar 0},A_{\bar 1}+A_{\bar 2})=0$.

Proposição 3.14. *Seja ϵ o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_3$. Se $r = s = 0$ então Q_{rs}, dotada com a norma dada no Exemplo 3.13, é uma ϵ-álgebra de composição. Se $s \neq 0$ ($r \neq 0$) então Q_{0s} (Q_{r0}), dotada com a norma dada no Exemplo 3.13, é uma ϵ-álgebra de composição se, e somente se, $car(F) = 2$.*

Demonstração. É claro que Q_{00} é a álgebra dos quatérnios cindida. Assim, Q_{00} é uma ϵ-álgebra de composição. Seja $0 \neq s \in F$. Mostremos que Q_{0s} é uma ϵ-álgebra de composição se, e somente se, $car(F) = 2$. É fácil ver que Q_{0s} satisfaz (2.1) e (2.2), sem importar a característica de F. Só falta analisar (2.3) nos diferentes casos:

$$\begin{aligned}
&f(e_2v_{\bar{2}}, v_{\bar{2}}v_{\bar{2}}) + f(e_2v_{\bar{2}}, v_{\bar{2}}v_{\bar{2}}) - f(e_2, v_{\bar{2}})f(v_{\bar{2}}, v_{\bar{2}}) = 2f(v_{\bar{2}}, su_{\bar{1}}) = 2s,\\
&f(v_{\bar{2}}e_1, v_{\bar{2}}v_{\bar{2}}) + f(v_{\bar{2}}v_{\bar{2}}, v_{\bar{2}}e_1) - f(v_{\bar{2}}, v_{\bar{2}})f(e_1, v_{\bar{2}}) = 2f(v_{\bar{2}}, su_{\bar{1}}) = 2s,\\
&f(v_{\bar{2}} \cdot 1, v_{\bar{2}}v_{\bar{2}}) + f(v_{\bar{2}}v_{\bar{2}}, v_{\bar{2}} \cdot 1) - f(v_{\bar{2}}, v_{\bar{2}})f(1, v_{\bar{2}}) = f(v_{\bar{2}}, su_{\bar{1}}) + f(su_{\bar{1}}, v_{\bar{2}}) = 2s,\\
&f(v_{\bar{2}}v_{\bar{2}}, u_{\bar{1}}u_{\bar{1}}) + f(v_{\bar{2}}u_{\bar{1}}, u_{\bar{1}}v_{\bar{2}}) - f(v_{\bar{2}}, u_{\bar{1}})f(v_{\bar{2}}, u_{\bar{1}}) = f(-e_2, -e_1) - 1 = -2.\\
&f(e_2v_{\bar{2}}, u_{\bar{1}}e_1) + f(e_2e_2, u_{\bar{1}}v_{\bar{2}}) - f(e_2, u_{\bar{1}})f(v_{\bar{2}}, e_2) = f(v_{\bar{2}}, u_{\bar{1}}) + f(e_2, -e_1) - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Os outros casos se verificam facilmente. Portanto, Q_{0s} é uma ϵ-álgebra de composição se, e somente se, $car(F) = 2$.
Igualmente, pode-se provar que, se $r \neq 0$ então Q_{r0}, dotada com a norma dada no Exemplo 3.13, é uma ϵ-álgebra de composição se, e somente se, $car(F) = 2$. $\square$

Se $s \neq 0$, a álgebra Q_{0s} não é potência-associativa, já que $(v_{\bar{2}}v_{\bar{2}})v_{\bar{2}} - v_{\bar{2}}(v_{\bar{2}}v_{\bar{2}}) = (su_{\bar{1}})v_{\bar{2}} - v_{\bar{2}}(su_{\bar{1}}) = -se_1 + se_2 \neq 0$.

Q_{s0} e Q_{0s} são equivalentes: Seja $g : Q_{s0} \to Q_{0s}$ dada por $g(u_{\bar{1}}) = v_{\bar{2}}$, $g(v_{\bar{2}}) = u_{\bar{1}}$, $g(e_{\bar{i}}) = e_{\bar{i}}$. Seja $\theta : \mathbb{Z}_{\bar{3}} \to \mathbb{Z}_{\bar{3}}$ tal que $\theta(\bar{1}) = \bar{2}$. É fácil ver que g é um isomorfismo de álgebras e $g((Q_{s0})_\gamma) = (Q_{0s})_{\theta(\gamma)}$ para todo $\gamma \in \mathbb{Z}_3$.

Em conclusão, se $\dim(U) = \dim(V) = 1$ então A é uma álgebra de quatérnios ou $A = Q_{rs}$ com $r = 0$ ou $s = 0$.

Agora, vejamos que acontece quando $\dim(U) \geq 2$ ou $\dim(V) \geq 2$. Para isso, precisamos primeiro da seguinte proposição.

Proposição 3.15. *Seja A uma álgebra de composição de cor e sejam U e V subespaços vetoriais Γ-graduados de A pareados por f, isto é, $f(U,U) = f(V,V) = 0$ e $f|_{(W_\alpha+W_{-\alpha})\times(W_\alpha+W_{-\alpha})}$ é não-degenerada, $W_\alpha = U_\alpha + V_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Se $u_\alpha, u'_\beta \in U$ são elementos homogêneos linearmente independentes então existe $v_{-\alpha} \in V \cap A_{-\alpha}$ satisfazendo que $f(u_\alpha, v_{-\alpha}) \neq 0$ e $f(u'_\beta, v_{-\alpha}) = 0$.*

Demonstração. Se $\alpha \neq \beta$ é clara a afirmação, por que $f(A_{-\alpha}, A_\beta) = 0$ e $f|_{(A_\alpha+A_{-\alpha})\times(A_\alpha+A_{-\alpha})}$ é não-degenerada. Se $\alpha = \beta$, sem perda de generalidade podemos supor que $\dim(V) < \infty$ (já que se $\dim(V) = \infty$ então é suficiente tomar um subespaço vetorial Γ-graduado V' de V de dimensão 2 tal que $f(u_\alpha, V') \neq 0$.)
Seja $G_{u_\alpha} : V \to F, v \mapsto f(u_\alpha, v)$. Como $f|_{(W_\alpha+W_{-\alpha})\times(W_\alpha+W_{-\alpha})}$ é não-degenerada e $f(U,U) = f(V,V) = 0$, G_{u_α} é uma forma linear não nula. Então, $\dim(Ker(G_{u_\alpha})) = \dim(V) - 1$.
Suponhamos que não existe $v_{-\alpha} \in V \cap A_{-\alpha}$ tal que $f(u_\alpha, v_{-\alpha}) \neq 0$ e $f(u'_\alpha, v_{-\alpha}) = 0$, isto é, $Ker(G_{u'_\alpha}) \subseteq Ker(G_{u_\alpha})$. Assim, $Ker(G_{u'_\alpha}) = Ker(G_{u_\alpha})$, por que $\dim(Ker(G_{u'_\alpha})) = \dim(Ker(G_{u_\alpha}))$. Dado que $\dim(Ker(G_{u_\alpha})) = \dim(V) - 1$, existe $v_{-\alpha} \in V$ tal que $V = Fv_{-\alpha} \oplus Ker(G_{u_\alpha})$. Devido a que $v_{-\alpha} \notin Ker(G_{u_\alpha}) = Ker(G_{u'_\alpha})$, segue-se que $f(u_\alpha, v_{-\alpha}) = l_1 \neq 0$ e $f(u'_\alpha, v_{-\alpha}) = l_2 \neq 0$. Assim, $f(l_1^{-1}u_\alpha - l_2^{-1}u'_\alpha, v_{-\alpha}) = 0$, logo $f(l_1^{-1}u_\alpha - l_2^{-1}u'_\alpha, V) = 0$. Como $f|_{(W_\alpha+W_{-\alpha})\times(W_\alpha+W_{-\alpha})}$ é não-degenerada e

$f(U,U) = f(V,V) = 0$, isto implica que $l_1^{-1}u_\alpha - l_2^{-1}u'_\alpha = 0$, contradizendo o fato que u_α, u'_α são linearmente independentes. O qual prova a proposição. $\square$

Voltando para nossa álgebra. Se $\dim(U) \geq 2$, existem $u_\alpha, u'_\beta \in U$ linearmente independentes. Assim, pela proposição acima existem $v_{-\alpha} \in V \cap A_{-\alpha}$ e $v'_{-\beta} \in V \cap A_{-\beta}$ linearmente independentes tais que $f(u_\alpha, v_{-\alpha}) = f(u'_\beta, v'_{-\beta}) = 1$ e $f(u'_\beta, v_{-\alpha}) = f(u_\alpha, v'_{-\beta}) = 0$. Por (3.11) e (3.12), $u_\alpha v'_{-\beta} = v'_{-\beta}u_\alpha = u'_\beta v_{-\alpha} = v_{-\alpha}u'_\beta = 0$, $u_\alpha v_{-\alpha} = u'_\beta v'_{-\beta} = -e_1$ e $v_{-\alpha}u_\alpha = v'_{-\beta}u'_\beta = -e_2$.
Mostremos que $u_\alpha^2 = 0$. Por Proposição 2.8 *vi*), (3.15), (3.12) e (3.11), obtemos que

$$\begin{aligned} u_\alpha^2 &= f(u'_\beta, v'_{-\beta})u_\alpha^2 = \overline{u'_\beta}[v'_{-\beta}u_\alpha^2] + \epsilon(\beta,-\beta)\overline{v'_{-\beta}}[u'_\beta u_\alpha^2], \\ &= u'_\beta[f(v'_{-\beta}, u_\alpha)u_\alpha + \epsilon(-\beta,\alpha)u_\alpha(v'_{-\beta}u_\alpha)] - v'_{-\beta}[u'_\beta(f(u_\alpha^2, u_\alpha)v_{-\alpha})], \\ &= \epsilon(-\beta,\alpha)u'_\beta[u_\alpha(-f(v'_{-\beta}, u_\alpha)e_2)] - f(u_\alpha^2, u_\alpha)v'_{-\beta}[-f(u'_\beta, v_{-\alpha})e_1] = 0. \end{aligned}$$

Analogamente podemos provar que $(u'_\beta)^2 = v_{-\alpha}^2 = (v'_{-\beta})^2 = 0$.

Agora mostremos que $u_\alpha u'_\beta \neq 0$ e $v_{-\alpha}v'_{-\beta} \neq 0$. Pela Proposição 2.8 *vi*) e (3.11) temos que

$$\begin{aligned} (u_\alpha u'_\beta)v_{-\alpha} &= -(u_\alpha u'_\beta)\overline{v_{-\alpha}} = -f(u'_\beta, v_{-\alpha})u_\alpha + \epsilon(\beta,-\alpha)(u_\alpha v_{-\alpha})\overline{u'_\beta}, \\ &= \epsilon(\alpha,\beta)(f(u_\alpha, v_{-\alpha})e_1)u'_\beta = \epsilon(\alpha,\beta)u'_\beta \neq 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $u_\alpha u'_\beta \neq 0$.
Pela Proposição 2.8 *vi*) e (3.12) temos que

$$\begin{aligned} (v_{-\alpha}v'_{-\beta})u_\alpha &= -(v_{-\alpha}v'_{-\beta})\overline{u_\alpha} = -f(v'_{-\beta}, u_\alpha)v_{-\alpha} + \epsilon(-\beta,\alpha)(v_{-\alpha}u_\alpha)\overline{v'_{-\beta}}, \\ &= \epsilon(\alpha,\beta)(f(v_{-\alpha}, u_\alpha)e_2)v'_{-\beta} = \epsilon(\alpha,\beta)v'_{-\beta} \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, $v_{-\alpha}v'_{-\beta} \neq 0$.
Por outra lado, pela Proposição 2.8 *i*),

$$\begin{aligned} f(v_{-\alpha}v'_{-\beta}, v_{-\alpha}) &= \epsilon(-\alpha,-\beta)f(v'_{-\beta}, \overline{v_{-\alpha}}v_{-\alpha}) = -\epsilon(-\alpha,-\beta)f(v'_{-\beta}, v_{-\alpha}^2) = 0, \\ f(v_{-\alpha}v'_{-\beta}, v'_{-\beta}) &= \epsilon(-\beta,-\beta)f(v_{-\alpha}, v'_{-\beta}\overline{v'_{-\beta}}) = -\epsilon(-\beta,-\beta)f(v_{-\alpha}, (v'_{-\beta})^2) = 0, \\ f(u_\alpha u'_\beta, u_\alpha) &= \epsilon(\alpha,\beta)f(u'_\beta, \overline{u_\alpha}u_\alpha) = -\epsilon(\alpha,\beta)f(u'_\beta, u_\alpha^2) = 0, \\ f(u_\alpha u'_\beta, u'_\beta) &= \epsilon(\beta,\beta)f(u_\alpha, u'_\beta\overline{u'_\beta}) = -\epsilon(\beta,\beta)f(u_\alpha, (u'_\beta)^2) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $v_{-\alpha}v'_{-\beta}$, u_α e u'_β são linearmente independentes, e $u_\alpha u'_\beta$, $v_{-\alpha}$ e $v'_{-\beta}$ são linearmente independentes. Assim, temos que $\dim(U),\ \dim(V) \geq 3$. Sejam

$$u''_\gamma = \epsilon(\beta,\alpha)v_{-\alpha}v'_{-\beta} \quad e \quad v''_{-\gamma} = \epsilon(\beta,\alpha)u_\alpha u'_\beta.$$

($\gamma = -\alpha-\beta$). Por (2.3)

$$\begin{aligned} f(u''_\gamma, v''_{-\gamma}) &= \epsilon(2\beta,\alpha)f(v_{-\alpha}v'_{-\beta}, u_\alpha u'_\beta), \\ &= \epsilon(2\beta,\alpha)[\epsilon(-\beta,\alpha)f(v_{-\alpha}, u_\alpha)f(v'_{-\beta}, u'_\beta) - \epsilon(-\beta,\alpha+\beta)\epsilon(\alpha,\beta)f(v_{-\alpha}u'_\beta, u_\alpha v'_{-\beta})], \\ &= \epsilon(\beta,\alpha). \end{aligned}$$

Por (3.11) e (3.12), $u_\alpha v''_{-\gamma} = u'_{-\beta}v''_{-\gamma} = v_{-\alpha}u''_\gamma = v'_{-\beta}u''_\gamma = 0$, $u''_\gamma v''_{-\gamma} = -\epsilon(\beta,\alpha)e_1$ e $v''_{-\gamma}u''_\gamma = -\epsilon(\beta,\alpha)e_2$.

Além disso, pela Proposição 2.8 *iv*) e *vi*),

$$\begin{aligned}
&u'_\beta u_\alpha = -f(u'_\beta, u_\alpha) - \epsilon(\beta,\alpha)u_\alpha u'_\beta = -v''_{-\gamma},\\
&u_\alpha u''_\gamma = u_\alpha(\epsilon(\beta,\alpha)v_{-\alpha}v'_{-\beta}) = -\epsilon(\beta,\alpha)[f(u_\alpha, v_{-\alpha})v'_{-\beta} + \epsilon(\alpha,-\alpha)v_{-\alpha}(u_\alpha v'_{-\beta})] = -\epsilon(\beta,\alpha)v'_{-\beta},\\
&u''_\gamma u'_\beta = \epsilon(\beta,\alpha)(v_{-\alpha}v'_{-\beta})u'_\beta = -\epsilon(\beta,\alpha)[f(v'_{-\beta}, u'_\beta)v_{-\alpha} + \epsilon(-\beta,\beta)(v_{-\alpha}u'_\beta)v'_{-\beta}] = -\epsilon(\beta,\alpha)v_{-\alpha},\\
&u''_\gamma u_\alpha = -f(u''_\gamma, u_\alpha) - \epsilon(\gamma,\alpha)u_\alpha u''_\gamma = -\epsilon(-\alpha-\beta,\alpha)(-\epsilon(\beta,\alpha)v'_{-\beta}) = v'_{-\beta},\\
&u'_\beta u''_\gamma = -f(u'_\beta, u''_\gamma) - \epsilon(\beta,\gamma)u''_\gamma u'_\beta = -\epsilon(\beta,-\alpha-\beta)(-\epsilon(\beta,\alpha)v_{-\alpha}) = v_{-\alpha}.
\end{aligned}$$

E pela Proposição 2.8 *iv*) e *vi*),

$$\begin{aligned}
&v'_{-\beta}v_{-\alpha} = -f(v'_{-\beta}, v_{-\alpha}) - \epsilon(-\beta,-\alpha)v_{-\alpha}v'_{-\beta} = -u''_\gamma,\\
&v_{-\alpha}v''_{-\gamma} = v_{-\alpha}(\epsilon(\beta,\alpha)u_\alpha u'_\beta) = -\epsilon(\beta,\alpha)[f(v_{-\alpha}, u_\alpha)u'_\beta + \epsilon(-\alpha,\alpha)u_\alpha(v_{-\alpha}u'_\beta) = -\epsilon(\beta,\alpha)u'_\beta,\\
&v''_{-\gamma}v'_{-\alpha} = -f(v''_{-\gamma}, v'_{-\beta}) - \epsilon(-\gamma,-\alpha)v_{-\alpha}v''_{-\gamma} = -\epsilon(\alpha+\beta,-\alpha)(-\epsilon(\beta,\alpha)u'_\beta) = u'_\beta,\\
&v''_{-\gamma}v'_{-\beta} = \epsilon(\beta,\alpha)(u_\alpha u'_\beta)v'_{-\beta} = -\epsilon(\beta,\alpha)[f(u'_\beta, v'_{-\beta})u_\alpha + \epsilon(\beta,-\beta)(u_\alpha v'_{-\beta})u'_\beta) = -\epsilon(\beta,\alpha)u_\alpha,\\
&v'_{-\beta}v''_{-\gamma} = -f(v'_{-\beta}, v''_{-\gamma}) - \epsilon(-\beta,-\gamma)v''_{-\gamma}v'_{-\beta} = -\epsilon(-\beta,\alpha+\beta)(-\epsilon(\beta,\alpha)u_\alpha) = u_\alpha.
\end{aligned}$$

Os outros produtos se calculam analogamente. Resumindo, temos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.16. *Sejam $\Gamma = \langle\alpha,\beta\rangle$ o grupo abeliano gerado por α e β, ϵ um fator de comutação sobre Γ tal que $\epsilon(\gamma,\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$, e $B = K \oplus U \oplus V$ ($K = Fe_1 \oplus Fe_2 \subseteq B_0$, $U = Fu_\alpha \oplus Fu'_\beta \oplus Fu''_\gamma$, $V = Fv_{-\alpha} \oplus Fv'_{-\beta} \oplus Fv''_{-\gamma}$, $\gamma = -\alpha-\beta$) uma álgebra Γ-graduada, com a seguinte tabela de multiplicação:*

$\cdot$	e_1	e_2	u_α	u'_β	u''_γ	$v_{-\alpha}$	$v'_{-\beta}$	$v''_{-\gamma}$
e_1	e_1	0	u_α	u'_β	u''_γ	0	0	0
e_2	0	e_2	0	0	0	$v_{-\alpha}$	$v'_{-\beta}$	$v''_{-\gamma}$
u_α	0	u_α	0	$\epsilon(\alpha,\beta)v''_{-\gamma}$	$-\epsilon(\beta,\alpha)v'_\beta$	$-e_1$	0	0
u'_β	0	u'_β	$-v''_{-\gamma}$	0	$v_{-\alpha}$	0	$-e_1$	0
u''_γ	0	u''_γ	$v'_{-\beta}$	$-\epsilon(\beta,\alpha)v_{-\alpha}$	0	0	0	$-\epsilon(\beta,\alpha)e_1$
$v_{-\alpha}$	$v_{-\alpha}$	0	$-e_2$	0	0	0	$\epsilon(\alpha,\beta)u''_\gamma$	$-\epsilon(\beta,\alpha)u'_\beta$
$v'_{-\beta}$	$v'_{-\beta}$	0	0	$-e_2$	0	$-u''_\gamma$	0	u_α
$v''_{-\gamma}$	$v''_{-\gamma}$	0	0	0	$-\epsilon(\beta,\alpha)e_2$	u'_β	$-\epsilon(\beta,\alpha)u_\alpha$	0

Com norma $q = (q_0, f)$ dada por: $q_0(l_1e_1 + le_2) = l_1l_2$ para qualquer $l_1, l_2 \in F$, $f(e_1,e_2) = 1$, $f(u_\alpha, v_{-\alpha}) = 1$, $f(u'_\beta, v'_{-\beta}) = 1$, $f(u''_\gamma, v''_{-\gamma}) = \epsilon(\beta,\alpha)$, $f(K \oplus V, V) = f(K \oplus U, U) = 0$ e $f(u_\alpha, Fv'_{-\beta} + Fv''_{-\gamma}) = f(u'_\beta, Fv_{-\alpha} + Fv''_{-\gamma}) = f(u''_\gamma, Fv_\alpha + Fv'_{-\beta}) = 0$. Vamos denotar à álgebra B como $CG(\langle\alpha,\beta\rangle, \epsilon(\alpha,\beta))$. $CG(\langle\alpha,\beta\rangle, 1)$ é a álgebra de matrizes de Cayley-Dickson com uma Γ-graduação.

Proposição 3.17. *$CG(\langle\alpha,\beta\rangle, \epsilon(\alpha,\beta))$ é uma ϵ-álgebra de composição.*

Demonstração. Seja $\Gamma = \langle\alpha,\beta\rangle$, sem perda de generalidade, temos que $\Gamma = \mathbb{Z}_l$ ou $\Gamma = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$, com $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{0\}$. Seja ϵ um fator de comutação sobre Γ, se $\Gamma = \mathbb{Z}_l$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) então ϵ é o fator de comutação trivial e se $\Gamma = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$ ($m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{0\}$) então ϵ é um fator de comutação da Proposição 1.33.
Se ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\Gamma = \langle\alpha,\beta\rangle$ então $CG(\langle\alpha,\beta\rangle, 1)$ é a álgebra de matrizes de Cayley-Dickson com uma Γ-graduação, portanto $CG(\langle\alpha,\beta\rangle, 1)$ é uma ϵ-álgebra de composição.
Por outro lado, se ϵ é um fator de comutação não-trivial sobre $\Gamma = \langle\alpha,\beta\rangle$ então $\Gamma = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$, com $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{0\}$. Definamos uma função $\sigma : \Gamma \times \Gamma \to F^\times$ por $\sigma((\overline{p_1}, \overline{p_2}), (\overline{q_1}, \overline{q_2})) = \epsilon((\overline{p_1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{q_2}))$, é fácil ver que σ é um 2-cociclo sobre Γ e que ϵ é o fator de comutação associado a σ, isto é, $\epsilon(\gamma,\delta) =$

$\sigma(\gamma,\delta)\sigma(\delta,\gamma)^{-1}$, para todo $\gamma,\delta\in\Gamma$. Como $CG(\langle\alpha,\beta\rangle,\epsilon(\alpha,\beta)) = CG(\langle\alpha,\beta\rangle,1)^{\sigma}$, então pelo Teorema 2.22, $CG(\langle\alpha,\beta\rangle,\epsilon(\alpha,\beta))$ é uma ϵ-álgebra de composição. □

Como $(u_\alpha u'_\beta)e_1 - u_\alpha(u'_\beta e_1) = v''_{-\gamma}e_1 = v''_{-\gamma}$ então $CG(\langle\alpha,\beta\rangle,\epsilon(\alpha,\beta))$ é não-associativa. Assim, se $CG(\langle\alpha,\beta\rangle,\epsilon(\alpha,\beta))$ é uma subálgebra Γ-graduada de uma álgebra de composição de cor A então, pela Proposição 3.5, $A = CG(\langle\alpha,\beta\rangle,\epsilon(\alpha,\beta))$. Por outro lado, $CG(\langle\alpha,\beta\rangle,\epsilon(\alpha,\beta))$ não sempre é alternativa: Se $\epsilon(\beta,\alpha)\neq 1$ então

$$(u_\alpha + u'_\beta, u_\alpha + u'_\beta, e_1) = [1-\epsilon(\beta,\alpha)]v''_{-\gamma}\neq 0.$$

Pelo visto até agora, para caracterizar as álgebras de composição de cor neste caso é suficiente conhecer as graduações das álgebras de composição ([Eld98] e [Eld09]) e os fatores de comutação sobre os grupos abelianos que graduam estas álgebras (ver seções 1.2 e 1.4). Portanto temos o seguinte resultado.

Teorema 3.18. *Seja $A=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ uma ϵ-álgebra de composição tal que, $A=A^{(0)}$ e A_0 é cindida. Então temos, a menos de equivalência, um dos seguintes casos:*

i) $A=A_0$. Assim, A é isomorfa a $F\oplus F$, ou à álgebra das matrizes $M_2(F)$, ou à álgebra matriz Cayley-Dickson $\boldsymbol{C}(F)$.

ii) $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_2}A_\gamma$ onde $A_{\bar 0}=Fe_1\oplus Fe_2$ e $A_{\bar 1}=Fu_{\bar 1}\oplus Fv_{\bar 1}$, e ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_2$. A é isomorfa à álgebra de matrizes $M_2(F)$.

iii) $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_n}A_\gamma$ onde $A_{\bar 0}=Fe_1\oplus Fe_2$, $A_{\bar 1}=Fu_{\bar 1}$, $A_{-\bar 1}=Fv_{-\bar 1}$, ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_n$ e $n\in\mathbb{Z}_{\geq 3}\cup\{0\}$. A é isomorfa à álgebra de matrizes $M_2(F)$.

iv) $A=Q_{r0}$ para algum $r\in F$, $car(F)=2$.

v) $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_2}A_\gamma$ onde $A_{\bar 0}=Fe_1\oplus Fe_2\oplus Fu_{\bar 0}\oplus Fv_{\bar 0}$, $A_{\bar 1}=Fu'_{\bar 1}\oplus Fv'_{\bar 1}\oplus Fv''_{\bar 1}\oplus Fu''_{\bar 1}$, e ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_2$. A é isomorfa à álgebra matriz Cayley-Dickson $\boldsymbol{C}(F)$.

vi) $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_n}A_\gamma$ onde $A_{\bar 0}=Fe_1\oplus Fe_2$, $A_{\bar 1}=Fu_{\bar 1}\oplus Fu'_{\bar 1}\oplus Fu''_{\bar 1}$, $A_{-\bar 1}=Fv_{-\bar 1}\oplus Fv'_{-\bar 1}\oplus Fv''_{-\bar 1}$, ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_n$ e $n\in\mathbb{Z}_{\geq 3}\cup\{0\}$. A é isomorfa à álgebra matriz Cayley-Dickson $\boldsymbol{C}(F)$.

vii) $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_4}A_\gamma$ onde $A_{\bar 0}=Fe_1\oplus Fe_2$, $A_{\bar 1}=Fu_{\bar 1}\oplus Fu'_{\bar 1}$, $A_{\bar 2}=Fu''_{\bar 2}\oplus Fv''_{\bar 2}$, $A_{\bar 3}=Fv_{\bar 3}\oplus Fv'_{\bar 3}$, e ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_4$. A é isomorfa à álgebra matriz Cayley-Dickson $\boldsymbol{C}(F)$.

viii) $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_n}A_\gamma$ onde $A_{\bar 0}=Fe_1\oplus Fe_2\oplus Fu''_{\bar 0}\oplus Fv''_{\bar 0}$, $A_{\bar 1}=Fu_{\bar 1}\oplus Fv'_{\bar 1}$, $A_{-\bar 1}=Fu'_{-\bar 1}\oplus Fv_{-\bar 1}$, ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_n$ e $n\in\mathbb{Z}_{\geq 3}\cup\{0\}$. A é isomorfa à álgebra matriz Cayley-Dickson $\boldsymbol{C}(F)$.

ix) $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_n}A_\gamma$ onde $A_{\bar 0}=Fe_1\oplus Fe_2$, $A_{\bar 1}=Fu_{\bar 1}\oplus Fu'_{\bar 1}$, $A_{-\bar 1}=Fv_{-\bar 1}\oplus Fv'_{-\bar 1}$, $A_{\bar 2}=Fv''_{\bar 2}$, $A_{-\bar 2}=Fu''_{-\bar 2}$, ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_n$ e $n\in\mathbb{Z}_{\geq 5}\cup\{0\}$. A é isomorfa à álgebra matriz Cayley-Dickson $\boldsymbol{C}(F)$.

x) $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_n}A_\gamma$ onde $A_{\bar 0}=Fe_1\oplus Fe_2$, $A_{\bar 1}=Fu_{\bar 1}$, $A_{-\bar 1}=Fv_{-\bar 1}$, $A_{\bar 2}=Fu'_{\bar 2}$, $A_{-\bar 2}=Fv'_{-\bar 2}$, $A_{\bar 3}=Fv''_{\bar 3}$, $A_{-\bar 3}=Fu''_{-\bar 3}$, ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_n$ e $n\in\mathbb{Z}_{\geq 7}\cup\{0\}$. A é isomorfa à álgebra matriz Cayley-Dickson $\boldsymbol{C}(F)$.

xi) $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_{2n}}A_\gamma$ onde $A_{\bar 0}=Fe_1\oplus Fe_2$, $A_{\bar 1}=Fu_{\bar 1}$, $A_{-\bar 1}=Fv_{-\bar 1}$, $A_{\overline{n-1}}=Fu'_{\overline{n-1}}$, $A_{\overline{1-n}}=Fv'_{\overline{1-n}}$, $A_{\bar n}=Fu''_{\bar n}\oplus v''_{\bar n}$, ϵ é o fator de comutação trivial sobre $\mathbb{Z}_{2n}$ e $n\in\mathbb{Z}_{\geq 3}\cup\{0\}$. A é isomorfa à álgebra matriz Cayley-Dickson $\boldsymbol{C}(F)$.

xii) $A=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2}A_\gamma$ onde $A_{(\bar 0,\bar 0)}=Fe_1\oplus Fe_2$, $A_{(\bar 1,\bar 0)}=Fu_{(\bar 1,\bar 0)}\oplus Fv_{(\bar 1,\bar 0)}$, $A_{(\bar 0,\bar 1)}=Fu'_{(\bar 0,\bar 1)}\oplus Fv'_{(\bar 0,\bar 1)}$, $A_{(\bar 1,\bar 1)}=Fv''_{(\bar 1,\bar 1)}\oplus Fu''_{(\bar 1,\bar 1)}$, e ϵ é um fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha)=1$ para todo $\alpha\in\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$. Se ϵ é o fator de comutação trivial então A é isomorfa à álgebra matriz Cayley-Dickson

$\boldsymbol{C}(F)$ e se ϵ não é o fator de comutação trivial ($car(F) \neq 2$ e $\epsilon((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})) = -1$) então A é isomorfa a uma álgebra do tipo $CG(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, -1)$.

xiii) *$A = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_l\oplus\mathbb{Z}_m} A_\gamma$ onde $A_{(\bar{0},\bar{0})} = Fe_1 \oplus Fe_2$, $A_{(\bar{1},\bar{0})} = Fu_{(\bar{1},\bar{0})}$, $A_{(-\bar{1},\bar{0})} = Fv_{(-\bar{1},\bar{0})}$, $A_{(\bar{0},\bar{1})} = Fu'_{(\bar{0},\bar{1})}$, $A_{(\bar{0},-\bar{1})} = Fv'_{(\bar{0},-\bar{1})}$, $A_{(\bar{1},\bar{1})} = Fv''_{(\bar{1},\bar{1})}$, $A_{(-\bar{1},-\bar{1})} = Fu''_{(-\bar{1},-\bar{1})}$, $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \cup \{0\}$, e ϵ é um fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_l \oplus \mathbb{Z}_m$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_l \oplus \mathbb{Z}_m$. Se ϵ é o fator de comutação trivial então A é isomorfa à álgebra matriz Cayley-Dickson $\boldsymbol{C}(F)$ e se ϵ não é o fator de comutação trivial ($\epsilon((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})) \neq 1$) então A é isomorfa a uma álgebra do tipo $CG(\mathbb{Z}_l \oplus \mathbb{Z}_m, \epsilon((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})))$.*

xiv) *$A = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}_n\oplus\mathbb{Z}_2} A_\gamma$ onde $A_{(\bar{0},\bar{0})} = Fe_1 \oplus Fe_2$, $A_{(\bar{1},\bar{0})} = Fu_{(\bar{1},\bar{0})}$, $A_{(-\bar{1},\bar{0})} = Fv_{(-\bar{1},\bar{0})}$, $A_{(\bar{0},\bar{1})} = Fu''_{(\bar{0},\bar{1})} \oplus Fv''_{(\bar{0},\bar{1})}$, $A_{(\bar{1},\bar{1})} = Fv'_{(\bar{1},\bar{1})}$, $A_{(-\bar{1},\bar{1})} = Fu'_{(-\bar{1},\bar{1})}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \cup \{0\}$, e ϵ é um fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2$. Se ϵ é o fator de comutação trivial então A é isomorfa à álgebra matriz Cayley-Dickson $\boldsymbol{C}(F)$ e se ϵ não é o fator de comutação trivial (n é um inteiro não negativo par, $car(F) \neq 2$ e $\epsilon((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})) = -1$) então A é isomorfa a uma álgebra do tipo $CG(\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2, -1)$.*

É fácil que a álgebra do item x) é equivalente à álgebra do item $xiii$) se l e m são relativamente primos e $n = l \cdot m$ (ϵ é o fator de comutação trivial nos dois casos). Também, a álgebra do item xi) é equivalente à álgebra do item xiv) no caso que 2 não divida a n.

3.3 $A^{(1)} \neq 0$

Nesta seção vamos mostrar que para toda álgebra de composição de cor A tal que $A^{(1)} \neq 0$, $A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ é uma superálgebra de composição.

Lema 3.19. *Sejam F um corpo de característica $\neq 2$ e $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ uma ϵ-álgebra de composição. Se existe $\alpha \in \Gamma$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = -1$ e $A_\alpha \neq 0$ então a superálgebra $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$, com $B^{(0)} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{2i\alpha}$ e $B^{(1)} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{(2i+1)\alpha}$, é isomorfa a uma superálgebra de composição, isto é, $car(F) = 3$ e, $B \cong B(1,2)$ ou $B \cong B(4,2)$. Além disso, $A = B$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \Gamma$ tal que $A_\alpha \neq 0$ e $\epsilon(\alpha,\alpha) = -1$ ($|\alpha| = 2n \geq 2$ ou $|\alpha| = \infty$). Pela Proposição 3.5, $B^{(0)} := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{2i\alpha}$ é associativa. Como $\epsilon(2i\alpha, 2j\alpha) = 1$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$ e $car(F) \neq 2$, pelo visto nos outros dois casos temos que $B^{(0)}$ é uma álgebra de composição de dimensão ≤ 4. Agora, seja $B^{(1)} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{(2i+1)\alpha}$. Como $car(F) \neq 2$, $f(B^{(0)}, B^{(1)}) = 0$, $\epsilon((2i+1)\alpha, (2j+1)\alpha) = -1$ e $\epsilon(2i\alpha, j\alpha) = 1$ $B^{(1)} \neq 0$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, então temos que $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ é uma superálgebra de composição isomorfa a, $B(1,2)$ ou $B(4,2)$. Além disso, de novo pela Proposição 3.5, temos que $A = B$, já que $B(1,2)$ e $B(4,2)$ são não-associativas. □

Assim, para caracterizar as álgebras de composição de cor em este caso é suficiente ver as graduações de $B(1,2)$ e $B(4,2)$, as quais já foram estudadas em [Ara15]. Ver seção 1.3.

Teorema 3.20. *Seja F um corpo de característica $\neq 2$ e A uma ϵ-álgebra de composição sobre F tal que $A^{(1)} \neq 0$. Então temos, sob equivalência, um dos seguintes casos:*

i) *$A = B(1,2)$ ou $A = B(4,2)$ com suas $\mathbb{Z}_2$-graduações principais.*

ii) *A é $B(1,2)$com a $\mathbb{Z}_n$-graduação (n par) dada em (1.12) e ϵ é o fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_n$ definido por $\epsilon(\bar{1},\bar{1}) = -1$.*

iii) *A é $B(4,2)$ com a $\mathbb{Z}_n$-graduação (n é um inteiro não-negativo par diferente de 2) dada em (1.13) e ϵ é o fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_n$ definido por $\epsilon(\bar{1},\bar{1}) = -1$.*

iv) *A é $B(4,2)$ com a $\mathbb{Z}_4$-graduação dada em (1.14) e ϵ é o fator de comutação sobre $\mathbb{Z}_4$ definido por $\epsilon(\bar{1},\bar{1}) = -1$.*

Capítulo 4

Álgebras alternativas quadráticas de cor simples graduadas

Neste capítulo vamos provar que se a característica do corpo F é diferente de 2, toda álgebra alternativa quadrática de cor simples graduada sobre F satisfazendo certas propriedades é uma álgebra de composição de cor sobre certo corpo.
Vamos começar com algumas definições. Seja A uma álgebra não necessariamente associativa sobre um corpo F. Denotamos por:

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= (xy)z - x(yz) && \text{o associador,}\\
[x,y] &= xy - yx && \text{o comutador,}\\
x \circ y &= xy + yx && \text{o produto de Jordan.}
\end{aligned}$$

Os seguintes conjuntos podem ser considerados na álgebra A : O *centro associativo* $N(A)$, o *centro comutativo* $K(A)$ e o *centro* $Z(A)$. Eles são definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&N(A) = \{n \in A | (n,A,A) = (A,n,A) = (A,A,n) = 0\},\\
&K(A) = \{k \in A | [k,A] = 0\}.\\
&Z(A) = \{z \in N(A) | [z,A] = 0\}.
\end{aligned}$$

Sejam Γ um grupo abeliano, ϵ um fator de comutação sobre Γ e $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ uma álgebra Γ-graduada. É fácil ver que $N(A)$ é um subespaço Γ-graduado de A. No caso de álgebras Γ-graduadas aparecem umas noções naturais, estas noções são:

$$\begin{aligned}
[a_\alpha, b_\beta]_\epsilon &= a_\alpha b_\beta - \epsilon(\alpha,\beta) b_\beta a_\alpha && \text{o } \epsilon\text{-comutador,}\\
a_\alpha \circ_\epsilon b_\beta &= a_\alpha b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta) b_\beta a_\alpha && \text{o } \epsilon\text{-produto de Jordan.}
\end{aligned}$$

Também, o *ϵ-centro* $Z^\epsilon(A) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} Z^\epsilon(A)_\alpha$, e o *$\epsilon$-centro comutativo* $K^\epsilon(A) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} K^\epsilon(A)_\alpha$, onde,

$$\begin{aligned}
&K^\epsilon(A)_\alpha = \{k_\alpha \in A_\alpha |\ [k_\alpha, A_\beta]_\epsilon = 0, \quad para\ todo\ \beta \in \Gamma\},\\
&Z^\epsilon(A)_\alpha = \{z_\alpha \in N(A)_\alpha |\ [z_\alpha, A_\beta]_\epsilon = 0, \quad para\ todo\ \beta \in \Gamma\}.
\end{aligned}$$

Lema 4.1. *([ZSSS82]) Sejam A uma álgebra arbitrária, $x, y, z \in A$ e $n \in N(A)$. Então, em A existem as seguintes relações*

$$n(x,y,z) = (nx,y,z), \tag{4.1}$$

$$(xn,y,z) = (x,ny,z), \tag{4.2}$$

$$(x,y,z)n = (x,y,zn). \tag{4.3}$$

Sejam A é uma álgebra Γ-graduada e $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$, $c_\gamma \in A_\gamma$ elementos homogêneos em A. Se um dos elementos homogêneos $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma$ pertence a $N(A)$, então em A valem as relações

$$[a_\alpha b_\beta, c_\gamma]_\epsilon = a_\alpha[b_\beta, c_\gamma]_\epsilon + \epsilon(\alpha,\beta)[a_\alpha, c_\gamma]_\epsilon b_\beta, \tag{4.4}$$

$$[c_\gamma, a_\alpha b_\beta]_\epsilon = [c_\gamma, a_\alpha]_\epsilon b_\beta + \epsilon(\gamma,\alpha)a_\alpha[c_\gamma, b_\beta]_\epsilon, \tag{4.5}$$

para qualquer fator de comutação ϵ sobre Γ.

Demonstração. Notemos que em toda álgebra vale a identidade

$$(wx,y,z) + (w,x,yz) - w(x,y,z) - (w,x,y)z - (w,xy,z) = 0. \tag{4.6}$$

Para sua prova é suficiente expandir todos os associadores. A validade das relações (4.1)-(4.3) segue da identidade (4.6). Para a prova da relação (4.4), é suficiente ver que para qualquer álgebra Γ-graduada vale a identidade

$$[a_\alpha b_\beta, c_\gamma]_\epsilon - a_\alpha[b_\beta, c_\gamma]_\epsilon - \epsilon(\beta,\gamma)[a_\alpha, c_\gamma]_\epsilon b_\beta = (a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) - \epsilon(\beta,\gamma)(a_\alpha, c_\gamma, b_\beta) + \epsilon(\alpha+\beta,\gamma)(c_\gamma, a_\alpha, b_\beta). \tag{4.7}$$

Vejamos sua prova,

$$\begin{aligned}
&[a_\alpha b_\beta, c_\gamma]_\epsilon - a_\alpha[b_\beta, c_\gamma]_\epsilon - \epsilon(\beta,\gamma)[a_\alpha, c_\gamma]_\epsilon b_\beta \\
&\quad = (a_\alpha b_\beta)c_\gamma - \epsilon(\alpha+\beta,\gamma)c_\gamma(a_\alpha b_\beta) - a_\alpha(b_\beta c_\gamma - \epsilon(\beta,\gamma)c_\gamma b_\beta) - \epsilon(\beta,\gamma)(a_\alpha c_\gamma - \epsilon(\alpha,\gamma)c_\gamma a_\alpha)b_\beta, \\
&\quad = (a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) - \epsilon(\beta,\gamma)(a_\alpha, c_\gamma, b_\beta) + \epsilon(\alpha+\beta,\gamma)(c_\gamma, a_\alpha, b_\beta).
\end{aligned}$$

Por último a relação (4.5) segue-se de (4.4). □

Corolário 4.2. *Os conjuntos $N(A)$ e $Z^\epsilon(A)$ são subálgebras Γ-graduadas da álgebra A. Se A é uma ϵ-álgebra alternativa então o ϵ-centro comutativo $K^\epsilon(A)$ é também uma subálgebra Γ-graduada de A, e além disso $3K^\epsilon(A) \subseteq N(A)$.*

Demonstração. Segue-se de (4.1)-(4.3) que $N(A)$ é uma subálgebra Γ-graduada, e segue-se de (4.4) que $Z^\epsilon(A)$ é também uma subálgebra Γ-graduada. Agora, suponhamos que A é uma ϵ-álgebra alternativa. Nesse caso a identidade (4.7) toma a forma

$$[a_\alpha b_\beta, c_\gamma]_\epsilon - a_\alpha[b_\beta, c_\gamma]_\epsilon - \epsilon(\beta,\gamma)[a_\alpha, c_\gamma]_\epsilon b_\beta = 3(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma). \tag{4.8}$$

Sejam $k_\gamma, k'_\xi \in K^\epsilon(A)$ e $a_\alpha, b_\beta \in A$ homogêneos. De (4.8) temos que

$$\begin{aligned}
3\epsilon(\alpha+\beta,\gamma)(k_\gamma, a_\alpha, b_\beta) &= 3\epsilon(\alpha,\beta+\gamma)(b_\beta, k_\gamma, a_\alpha) = 3(a_\alpha, b_\beta, k_\gamma), \\
&= [a_\alpha b_\beta, k_\gamma]_\epsilon - a_\alpha[b_\beta, k_\gamma]_\epsilon - \epsilon(\beta,\gamma)[a_\alpha, k_\gamma]_\epsilon b_\beta = 0,
\end{aligned}$$

onde segue-se que $3K^\epsilon(A) \subseteq N(A)$. Além disso, usando outra vez a identidade (4.8), obtemos

$$[k_\gamma k'_\xi, a_\alpha]_\epsilon = k_\gamma[k'_\xi, a_\alpha]_\epsilon + \epsilon(\xi,\alpha)[k_\gamma, a_\alpha]_\epsilon k'_\xi + 3(k_\gamma, k'_\xi, a_\alpha) = 0,$$

isto é, $K^\epsilon(A)$ é uma subálgebra da álgebra A □

Corolário 4.3. *Seja A uma ϵ-álgebra alternativa e ϵ-comutativa sobre um corpo F. Se $\frac{1}{3} \in F$ então A é associativa.*

Efetivamente, neste caso $A = K^\epsilon(A) \subseteq Z^\epsilon(A)$.

Seguem algumas definições relativas a álgebras graduadas. Seja $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ uma álgebra Γ-graduada. Um ideal $I \subseteq A$ é dito *graduado* se, dado qualquer $a \in I$, escrevendo a como soma de elementos homogêneos $a = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$, temos que $a_\gamma \in I$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Dizemos que A é uma *álgebra simples graduada* se $A^2 \neq 0$ e A não tem ideais graduados próprios não triviais. Similarmente, A é um *álgebra de divisão graduada* se para qualquer elemento homogêneo $a_\alpha \in A_\alpha$, e qualquer elemento homogêneo não-zero $b_\beta \in A_\beta$, existe exatamente um elemento homogêneo $x_{\alpha-\beta} \in A_{\alpha-\beta}$ com $a_\alpha = b_\beta x_{\alpha-\beta}$ e exatamente um elemento homogêneo $y_{\alpha-\beta} \in A_{\alpha-\beta}$ com $a_\alpha = y_{\alpha-\beta} b_\beta$.

Teorema 4.4. *Sejam Γ um grupo abeliano, ϵ um fator de comutação sobre Γ e A uma álgebra Γ-graduada. Se A é simples graduada então, $Z^\epsilon(A) = (0)$ ou $Z^\epsilon(A)$ é uma álgebra de divisão graduada. Em particular $Z^\epsilon(A)_0 = (0)$ ou $Z(A)_0 = Z^\epsilon(A)_0$ é um corpo.*

Demonstração. Seja $Z^\epsilon = Z^\epsilon(A) \neq (0)$. Como Z^ϵ é um álgebra associativa então é suficiente mostrar que existe um elemento identidade em Z^ϵ e que todo elemento homogêneo não zero de Z^ϵ é invertível em Z^ϵ. Seja $0 \neq z_\alpha \in Z^\epsilon_\alpha$. Então o conjunto $z_\alpha A$ é um ideal graduado da álgebra A, além disso $z_\alpha A \neq (0)$ (Seja $I = z_\alpha A + z_\alpha \mathbb{Z}$, é claro que I é um ideal homogêneo de A e que $I \neq (0)$. Como A é simples graduada então $A = I$. Assim, se $z_\alpha A = (0)$ então $A^2 = I^2 = (0)$, contradizendo que $A^2 \neq (0)$. Portanto $z_\alpha A \neq (0)$.) Como a álgebra A é simples graduada, temos que $z_\alpha A = A$. Isto significa que existe $e \in A_0$ tal que $z_\alpha e = z_\alpha = e z_\alpha$. Agora seja $b_\beta \in A_\beta$. Então $b_\beta = z_\alpha y_{\beta-\alpha}$ para algum $y_{\beta-\alpha} \in A_{\beta-\alpha}$. Assim, $eb_\beta = e(z_\alpha y_{\beta-\alpha}) = (ez_\alpha)y_{\beta-\alpha} = z_\alpha y_{\beta-\alpha} = b_\beta$, e analogamente $b_\beta e = b_\beta$, isto significa que e é um elemento identidade para a álgebra A. Também, existe um $z'_{-\alpha} \in A_{-\alpha}$ tal que $e = z_\alpha z'_{-\alpha} = \epsilon(\alpha, -\alpha) z'_{-\alpha} z_\alpha$. Observe que $\epsilon(\alpha, \alpha) = 1$:

$$z_\alpha = ez_\alpha = (z_\alpha z'_{-\alpha})z_\alpha = z_\alpha(z'_{-\alpha} z_\alpha) = z_\alpha(\epsilon(\alpha,\alpha)e) = \epsilon(\alpha,\alpha)z_\alpha.$$

Mostremos que $z'_{-\alpha} \in Z^\epsilon_{-\alpha}$. Sejam x, y elementos homogêneos arbitrários na álgebra A e $x = z_\alpha t_\beta$. Então por (4.2) temos que

$$(z'_{-\alpha}, x, y) = (z'_{-\alpha}, z_\alpha t_\beta, y) = (z'_{-\alpha} z_\alpha, t_\beta, y) = (e, t_\beta, y) = 0,$$

e analogamente $(x, z'_{-\alpha}, y) = (x, y, z'_{-\alpha}) = 0$, isto é, $z'_{-\alpha} \in N(A)$. Finalmente, de (4.5) e (4.4) obtemos

$$\begin{aligned}
[z'_{-\alpha}, x]_\epsilon &= [z'_{-\alpha}, z_\alpha t_\beta]_\epsilon = [z'_{-\alpha}, z_\alpha]_\epsilon t_\beta + \epsilon(-\alpha,\alpha) z_\alpha [z'_{-\alpha}, t_\beta]_\epsilon,\\
&= z_\alpha [z'_{-\alpha}, t_\beta]_\epsilon = [z_\alpha z'_{-\alpha}, t_\beta]_\epsilon - \epsilon(-\alpha,\beta)[z_\alpha, t_\beta]_\epsilon z'_{-\alpha},\\
&= [e, t_\beta]_\epsilon = 0.
\end{aligned}$$

Isto é, $z'_{-\alpha} \in Z^\epsilon$. Isto prova o teorema. □

Vejamos uma generalização da definição de álgebra quadrática a qual foi introduzida em [SZ09] para o caso de superálgebras. Primeiro lembremos a definição de álgebra quadrática.
Seja A uma álgebra não-associativa com elemento identidade 1 sobre um corpo F de característica diferente de 2. Identificaremos F com a subálgebra $F \cdot 1$ da álgebra A. A álgebra A é dita *quadrática sobre F* se cada elemento $x \in A$ satisfaz a igualdade

$$x^2 - \tau(x)x + q(x) = 0, \tag{4.9}$$

onde $\tau(x)$ é uma forma linear (*o traço*) e $q(x)$ é uma forma quadrática (*a norma*) sobre A, e $q(1) = 1$ (equivalentemente, $\tau(1) = 2$). De (4.9) obtemos que

$$(x+y)^2 - \tau(x+y)(x+y) + q(x+y) = 0.$$

Consequentemente,

$$p(x,y) = xy + yx - \tau(x)y - \tau(y)x + f(x,y) = 0, \tag{4.10}$$

onde $f(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$. Então,

$$\tau(p(x,y)) = \tau(xy) + \tau(yx) - \tau(x)\tau(y) - \tau(y)\tau(x) + 2f(x,y) = 0. \tag{4.11}$$

Assim, $q(x) = \frac{1}{2}(\tau(x)^2 - \tau(x^2))$. Aliás, por (4.10) e (4.11) temos que (4.9) pode ser reescrita em uma forma linearizada:

$$x \circ y - \tau(x)y - \tau(y)x - \frac{1}{2}\tau(x \circ y) + \tau(x)\tau(y) = 0. \tag{4.12}$$

Uma álgebra quadrática é dita *simétrica* se $\tau([x,y]) = 0$. Nesse caso a identidade (4.12) fica

$$x \circ y - \tau(x)y - \tau(y)x - \tau(xy) + \tau(x)\tau(y) = 0. \tag{4.13}$$

Baseados na definição de álgebra quadrática simétrica, vamos definir uma ϵ-álgebra quadrática.

Definição 4.5. *Sejam F um corpo com característica diferente de 2, Γ um grupo abeliano, ϵ um fator de comutação sobre Γ e A uma álgebra Γ-graduada ($A = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$) sobre F com elemento identidade 1. Uma transformação linear (entre espaços vetoriais Γ-graduadas) $\tau : A \to Z^\epsilon(A)$, da álgebra A em seu ϵ-centro $Z^\epsilon(A)$ é chamada de ϵ-traça se ela satisfaz que $\tau([a_\alpha, b_\beta]_\epsilon) = 0$ e $\tau(\tau(a_\alpha)b_\beta) = \tau(a_\alpha)\tau(b_\beta)$, para quaisquer elementos homogêneos a_α, b_β. E dizemos que A é uma ϵ-álgebra quadrática se $\tau(1) = 2$ e A satisfaz a seguinte identidade*

$$x_\alpha \circ_\epsilon y_\beta - \tau(x_\alpha)y_\beta - \epsilon(\alpha,\beta)\tau(y_\beta)x_\alpha - \tau(x_\alpha y_\beta) + \tau(x_\alpha)\tau(y_\beta) = 0. \tag{4.14}$$

Seja $\alpha \in \Gamma$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = 1$, então de (4.14) obtemos que $2x_\alpha^2 - 2\tau(x_\alpha)x_\alpha - \tau(x_\alpha^2) + \tau(x_\alpha)^2 = 0$. Assim,

$$x_\alpha^2 - \tau(x_\alpha)x_\alpha + \frac{1}{2}(\tau(x_\alpha)^2 - \tau(x_\alpha^2)) = 0. \tag{4.15}$$

Seja $\alpha \in \Gamma$ tal que $\epsilon(\alpha,\alpha) = -1$ então por (4.14) temos que $\tau(x_\alpha)^2 - \tau(x_\alpha^2) = 0$, para todo $x_\alpha \in A_\alpha$, logo $\tau(x_\alpha)^2 = 0$, já que $2\tau(x_\alpha^2) = \tau([x_\alpha, x_\alpha]_\epsilon) = 0$.

Seja (A,τ) uma ϵ-álgebra quadrática. Identificaremos a subálgebra $F\cdot 1$ com F. Denotamos $Z_\tau(A) = \{a \in A | \tau(a) = 2a\}$, então $F \subseteq Z_\tau(A) \subseteq Z^\epsilon(A)$. Para quaisquer $a \in Z_\tau(A)$ e $b \in A$ temos que

$$2\tau(ab) = \tau((2a)b) = \tau(\tau(a)b) = \tau(a)\tau(b) = 2a\tau(b),$$

o qual implica que $Z_\tau(A)$ é uma subálgebra de A e a ϵ-traça $\tau : A \to Z^\epsilon(A)$ é uma $Z_\tau(A)$-aplicação linear. Além disso, como $\tau(\tau(a)) = \tau(\tau(a)\cdot 1) = \tau(a)\tau(1) = 2\tau(a)$ temos que $\tau(A) \subseteq Z_\tau(A)$.

Dado um ϵ-traço τ sobre A, podemos definir uma forma $f : A \times A \to Z^\epsilon(A)$ da seguinte maneira $f(a,b) = \tau(a)\tau(b) - \tau(ab)$, a qual é bilinear já que τ é linear. Dizemos que f é a *a forma bilinear associada com* τ. Além disso, se A é uma ϵ-álgebra quadrática então por (4.14)

$$f(a_\alpha, b_\beta) = \tau(a_\alpha)b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta)\tau(b_\beta)a_\alpha - a_\alpha \circ_\epsilon b_\beta, \tag{4.16}$$

para quaisquer elementos homogêneos $a_\alpha, b_\beta \in A$. É fácil ver que f é ϵ-simétrica, já que

$$\begin{aligned} f(a_\alpha, b_\beta) &= \epsilon(\alpha,\beta)[\epsilon(\beta,\alpha)\tau(a_\alpha)b_\beta + \tau(b_\beta)a_\alpha - \epsilon(\beta,\alpha)a_\alpha \circ_\epsilon b_\beta], \\ &= \epsilon(\alpha,\beta)[\tau(b_\beta)a_\alpha + \epsilon(\beta,\alpha)\tau(a_\alpha)b_\beta - b_\beta \circ_\epsilon a_\alpha], \\ &= \epsilon(\alpha,\beta)f(b_\beta, a_\alpha). \end{aligned}$$

Proposição 4.6. *Seja $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ uma ϵ-álgebra de composição com ϵ- forma quadrática $q = (q_0, f)$. Definamos $\tau(a) = f(a, 1)$. Então, τ é um ϵ-traço e (A, τ) é uma ϵ-álgebra quadrática.*

Demonstração. Primeiro vejamos que τ é um ϵ-traço. Como f é uma forma bilinear então τ é uma transformação linear. $\tau(A_\gamma) \subseteq F \cdot 1 \subseteq Z^\epsilon(A)_\gamma$, já que $f(A_\gamma, A_0) = 0$ se $\gamma \neq 0$. Além disso

$$\tau(\tau(a)b) = \tau(f(a,1)b) = f(f(a,1)b, 1) = f(a,1)f(b,1) = \tau(a)\tau(b). \tag{4.17}$$

E pela Proposição 2.8 $i)$

$$\tau(a_\alpha b_\beta) = f(a_\alpha b_\beta, 1) = f(a_\alpha, \overline{b_\beta}) = \epsilon(\alpha,\beta)f(b_\beta a_\alpha, 1) = \epsilon(\alpha,\beta)\tau(b_\beta a_\alpha).$$

Logo, $\tau([a_\alpha, b_\beta]_\epsilon) = 0$. Portanto, τ é um ϵ-traço.
Agora vejamos que A é uma ϵ-álgebra quadrática. Pela Proposição 2.8 $iv)$ e (2.7) temos

$$\begin{aligned} a_\alpha \circ_\epsilon b_\beta = a_\alpha b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta)b_\beta a_\alpha &= (f(a_\alpha,1) - \overline{a_\alpha})b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta)(f(b_\beta,1) - \overline{b_\beta})a_\alpha, \\ &= f(a_\alpha,1)b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta)f(b_\beta,1)a_\alpha - (\overline{a_\alpha}b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}a_\alpha), \\ &= f(a_\alpha,1)b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta)f(b_\beta,1)a_\alpha - f(a_\alpha, b_\beta), \\ &= f(a_\alpha,1)b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta)f(b_\beta,1)a_\alpha - [f(a_\alpha,1)f(b_\beta,1) - f(a_\alpha b_\beta, 1)], \\ &= \tau(a_\alpha)b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta)\tau(b_\beta)a_\alpha - \tau(a_\alpha)\tau(b_\beta) + \tau(a_\alpha b_\beta). \end{aligned}$$

Por último $\tau(1) = f(1,1) = 2$. Portanto A é uma ϵ-álgebra quadrática. $\square$

Lema 4.7. *Seja (A, τ) uma ϵ-álgebra quadrática então a aplicação $a \to \overline{a} = \tau(a) - a$ é uma ϵ-involução.*

Demonstração. É claro que $a \to \overline{a} = \tau(a) - a$ é linear. Seja $a \in A$ então

$$\overline{\overline{a}} = \overline{\tau(a) - a} = \tau(\tau(a) - a) - (\tau(a) - a) = \tau(a)\tau(1) - 2\tau(a) + a = a.$$

Sejam $a_\alpha, b_\beta \in A$, vejamos que $\overline{a_\alpha b_\beta} = \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}\,\overline{a_\alpha}$: Por (4.14)

$$\begin{aligned} \overline{a_\alpha b_\beta} - \epsilon(\alpha,\beta)\overline{b_\beta}\,\overline{a_\alpha} &= \tau(a_\alpha b_\beta) - a_\alpha b_\beta - \epsilon(\alpha,\beta)(\tau(b_\beta) - b_\beta)(\tau(a_\alpha) - a_\alpha), \\ &= \tau(a_\alpha b_\beta) - a_\alpha b_\beta - \epsilon(\alpha,\beta)[\tau(b_\beta)\tau(a_\alpha) - \tau(b_\beta)a_\alpha - b_\beta\tau(a_\alpha) + b_\beta a_\alpha], \\ &= [\tau(a_\alpha b_\beta) - a_\alpha \circ_\epsilon b_\beta + \epsilon(\alpha,\beta)\tau(b_\beta)a_\alpha] - \epsilon(\alpha,\beta)\tau(b_\beta)\tau(a_\alpha) + \epsilon(\alpha,\beta)b_\beta\tau(a_\alpha), \\ &= \tau(a_\alpha)\tau(b_\beta) - \tau(a_\alpha)b_\beta - \epsilon(\alpha,\beta)\tau(b_\beta)\tau(a_\alpha) + \epsilon(\alpha,\beta)b_\beta\tau(a_\alpha), \\ &= [\tau(a_\alpha), \tau(b_\beta)]_\epsilon - [\tau(a_\alpha), b_\beta]_\epsilon = 0. \end{aligned}$$

O último termo é igual a 0 já que $\tau(a_\alpha) \in Z^\epsilon(A)$. $\square$

Lema 4.8. *Seja, (A, τ) uma ϵ-álgebra quadrática e f a forma bilinear associada com τ, então temos a seguinte relações.*

$$f(\tau(a_\alpha)b_\beta, c_\gamma) = \tau(a_\alpha)f(b_\beta, c_\gamma), \tag{4.18}$$

$$f(b_\beta, \tau(a_\alpha)c_\gamma) = \epsilon(\beta,\alpha)\tau(a_\alpha)f(b_\beta, c_\gamma), \tag{4.19}$$

$$f(f(a_\alpha, c_\gamma)b_\beta, d_\delta) = f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta), \tag{4.20}$$

para quaisquer $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$, $c_\gamma \in A_\gamma$ *e* $d_\delta \in A_\delta$ *homogêneos.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} f(\tau(a_\alpha)b_\beta, c_\gamma) &= \tau(\tau(a_\alpha)b_\beta)\tau(c_\gamma) - \tau(\tau(a_\alpha)b_\beta c_\gamma) = \tau(a_\alpha)\tau(b_\beta)\tau(c_\gamma) - \tau(a_\alpha)\tau(b_\beta c_\gamma) \\ &= \tau(a_\alpha)[\tau(b_\beta)\tau(c_\gamma) - \tau(b_\beta c_\gamma)] = \tau(a_\alpha)f(b_\beta, c_\gamma). \end{aligned}$$

A relação (4.19) segue-se de (4.18) e por f ser ϵ-simétrica.
Por (4.18) temos que

$$\begin{aligned} f(f(a_\alpha, c_\gamma)b_\beta, d_\delta) &= f([\tau(a_\alpha)\tau(c_\gamma) - \tau(a_\alpha c_\gamma)]b_\beta, d_\delta), \\ &= f(\tau(a_\alpha)(\tau(c_\gamma)b_\beta), d_\delta) - f(\tau(a_\alpha c_\gamma)b_\beta, d_\delta), \\ &= \tau(a_\alpha)f(\tau(c_\gamma)b_\beta, d_\delta) - \tau(a_\alpha c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta), \\ &= \tau(a_\alpha)\tau(c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta) - \tau(a_\alpha c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta), \\ &= [\tau(a_\alpha)\tau(c_\gamma) - \tau(a_\alpha c_\gamma)]f(b_\beta, d_\delta), \\ &= f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta). \end{aligned}$$

□

Lema 4.9. *Seja* (A, τ) *uma* ϵ*-álgebra alternativa quadrática e* f *a forma bilinear associada com* τ*. Então* A *satisfaz a seguinte relação*

$$f(\overline{a_\alpha}b_\beta, c_\gamma) = \epsilon(\beta, \gamma)f(a_\alpha c_\gamma, b_\beta), \tag{4.21}$$

para todo $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma \in A$

Demonstração. Sejam $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma \in A$, por (4.16), (4.14) e (2.12)

$$\begin{aligned} f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma) &= \tau(a_\alpha b_\beta)c_\gamma + \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)\tau(c_\gamma)a_\alpha b_\beta - (a_\alpha b_\beta) \circ_\epsilon c_\gamma, \\ &= \tau(a_\alpha b_\beta)c_\gamma + \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)\tau(c_\gamma)a_\alpha b_\beta - (a_\alpha b_\beta)c_\gamma - \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)c_\gamma(a_\alpha b_\beta), \\ &= \tau(a_\alpha b_\beta)c_\gamma + \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)\tau(c_\gamma)a_\alpha b_\beta + \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)[(c_\gamma, a_\alpha, b_\beta) - (c_\gamma a_\alpha)b_\beta] \\ &\quad - [\tau(a_\alpha b_\beta) - \tau(a_\alpha)\tau(b_\beta) + \tau(a_\alpha)b_\beta + \epsilon(\alpha, \beta)\tau(b_\beta)a_\alpha - \epsilon(\alpha, \beta)b_\beta a_\alpha]c_\gamma, \\ &= \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)\tau(c_\gamma)a_\alpha b_\beta + \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)(c_\gamma, a_\alpha, b_\beta) - \epsilon(\beta, \gamma)[\epsilon(\alpha, \gamma)c_\gamma a_\alpha]b_\beta \\ &\quad + \tau(a_\alpha)\tau(b_\beta)c_\gamma - \tau(a_\alpha)b_\beta c_\gamma - \epsilon(\alpha, \beta)\tau(b_\beta)a_\alpha c_\gamma + \epsilon(\alpha, \beta)(b_\beta a_\alpha)c_\gamma, \\ &= \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)\tau(c_\gamma)a_\alpha b_\beta + \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)(c_\gamma, a_\alpha, b_\beta) \\ &\quad - \epsilon(\beta, \gamma)[\tau(a_\alpha c_\gamma) - \tau(a_\alpha)\tau(c_\gamma) + \tau(a_\alpha)c_\gamma + \epsilon(\alpha, \gamma)\tau(c_\gamma)a_\alpha - a_\alpha c_\gamma]b_\beta \\ &\quad + \tau(a_\alpha)\tau(b_\beta)c_\gamma - \tau(a_\alpha)b_\beta c_\gamma - \epsilon(\alpha, \beta)\tau(b_\beta)a_\alpha c_\gamma + \epsilon(\alpha, \beta)(b_\beta a_\alpha)c_\gamma, \\ &= \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)(c_\gamma, a_\alpha, b_\beta) - \epsilon(\beta, \gamma)\tau(a_\alpha c_\gamma)b_\beta + \epsilon(\beta, \gamma)\tau(a_\alpha)\tau(c_\gamma)b_\beta \\ &\quad - \epsilon(\beta, \gamma)\tau(a_\alpha)c_\gamma b_\beta + \epsilon(\beta, \gamma)(a_\alpha c_\gamma)b_\beta + \tau(a_\alpha)\tau(b_\beta)c_\gamma - \tau(a_\alpha)b_\beta c_\gamma \\ &\quad - \epsilon(\alpha, \beta)\tau(b_\beta)a_\alpha c_\gamma + \epsilon(\alpha, \beta)(b_\beta, a_\alpha, c_\gamma) + \epsilon(\alpha, \beta)b_\beta(a_\alpha c_\gamma), \\ &= \epsilon(\alpha, \beta)[(b_\beta, a_\alpha, c_\gamma) + \epsilon(\alpha+\beta, \gamma)\epsilon(\beta, \alpha)(c_\gamma, a_\alpha, b_\beta)] \\ &\quad + \tau(a_\alpha)[\tau(b_\beta)c_\gamma + \epsilon(\beta, \gamma)\tau(c_\gamma)b_\beta - b_\beta c_\gamma - \epsilon(\beta, \gamma)c_\gamma b_\beta] \\ &\quad - \epsilon(\beta, \gamma)[\tau(a_\alpha c_\gamma)b_\beta + \epsilon(\alpha+\gamma, \beta)\tau(b_\beta)a_\alpha c_\gamma - (a_\alpha c_\gamma)b_\beta - \epsilon(\alpha+\gamma, \beta)b_\beta(a_\alpha c_\gamma)], \\ &= \tau(a_\alpha)f(b_\beta, c_\gamma) - \epsilon(\beta, \gamma)f(a_\alpha c_\gamma, b_\beta). \end{aligned}$$

Assim, por (4.18) temos que

$$\begin{aligned}
f(\overline{a_\alpha}b_\beta, c_\gamma) &= f((\tau(a_\alpha) - a_\alpha)b_\beta, c_\gamma) = f(\tau(a_\alpha)b_\beta, c_\gamma) - f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma),\\
&= \tau(a_\alpha)f(b_\beta, c_\gamma) - [\tau(a_\alpha)f(b_\beta, c_\gamma) - \epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha c_\gamma, b_\beta)],\\
&= \epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha c_\gamma, b_\beta).
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.10. *Seja (A,τ) uma ϵ-álgebra alternativa quadrática e f a forma bilinear associada com τ. Então, temos a seguinte relação*

$$f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma d_\delta) + \epsilon(\beta,\gamma+\delta)\epsilon(\gamma,\delta)f(a_\alpha d_\delta, c_\gamma b_\beta) = \epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, c_\gamma), \tag{4.22}$$

para quaisquer elementos homogêneos $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta \in A$.

Demonstração. Por (4.16) e (2.10) temos que

$$\begin{aligned}
f(a_\alpha, c_\gamma)b_\beta &= [\tau(a_\alpha)c_\gamma + \epsilon(\alpha,\gamma)\tau(c_\gamma)a_\alpha - a_\alpha \circ_\epsilon c_\gamma]b_\beta,\\
&= \tau(a_\alpha)c_\gamma b_\beta + \epsilon(\alpha,\gamma)\tau(c_\gamma)a_\alpha b_\beta - (a_\alpha c_\gamma)b_\beta - \epsilon(\alpha,\gamma)(c_\gamma a_\alpha)b_\beta,\\
&= \tau(a_\alpha)c_\gamma b_\beta + \epsilon(\alpha,\gamma)\tau(c_\gamma)a_\alpha b_\beta - [(a_\alpha, c_\gamma, b_\beta) + a_\alpha(c_\gamma b_\beta)]\\
&\quad - \epsilon(\alpha,\gamma)[(c_\gamma, a_\alpha, b_\beta) + c_\gamma(a_\alpha b_\beta)],\\
&= \tau(a_\alpha)c_\gamma b_\beta + \epsilon(\alpha,\gamma)\tau(c_\gamma)a_\alpha b_\beta - a_\alpha(c_\gamma, b\beta) - \epsilon(\alpha,\gamma)c_\gamma(a_\alpha b_\beta),\\
&= (\tau(a_\alpha) - a_\alpha)(c_\gamma b_\beta) + \epsilon(\alpha,\gamma)(\tau(c_\gamma) - c_\gamma)(a_\alpha b_\beta),\\
&= \overline{a_\alpha}(c_\gamma b_\beta) + \epsilon(\alpha,\gamma)\overline{c_\gamma}(a_\alpha b_\beta).
\end{aligned}$$

Assim, por (4.21) e (4.20), e como f é ϵ-simétrica, temos que

$$\begin{aligned}
\epsilon(\beta,\gamma)f(a_\alpha, c_\gamma)f(b_\beta, d_\delta) &= \epsilon(\beta,\gamma)f(f(a_\alpha, c_\gamma)b_\beta, d_\delta),\\
&= \epsilon(\beta,\gamma)f(\overline{a_\alpha}(c_\gamma b_\beta) + \epsilon(\alpha,\gamma)\overline{c_\gamma}(a_\alpha b_\beta), d_\delta),\\
&= \epsilon(\beta,\gamma)f(\overline{a_\alpha}(c_\gamma b_\beta), d_\delta) + \epsilon(\alpha+\beta,\gamma)f(\overline{c_\gamma}(a_\alpha b_\beta), d_\delta),\\
&= \epsilon(\beta,\gamma)\epsilon(\gamma+\beta,\delta)f(a_\alpha d_\delta, c_\gamma b_\beta) + \epsilon(\alpha+\beta,\gamma+\delta)f(c_\gamma d_\delta, a_\alpha b_\beta),\\
&= f(a_\alpha b_\beta, c_\gamma d_\delta) + \epsilon(\beta,\gamma)\epsilon(\gamma+\beta,\delta)f(a_\alpha d_\delta, c_\gamma b_\beta).
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.11. *Seja (A,τ) uma ϵ-álgebra alternativa quadrática tal que $\tau(A_\alpha) = 0$ para todo $0 \neq \alpha \in \Gamma$ e seja f a forma bilinear associada com τ. Se A é simples graduada, então $Z_\tau(A)$ é um corpo e A é uma ϵ-álgebra de composição sobre o corpo $Z_\tau(A)$, com ϵ-forma quadrática $q = (q_0, f)$, onde $q_0(a_0) = \frac{f(a_0,a_0)}{2}$ para todo $a_0 \in A_0$.*

Demonstração. Como $F \cdot 1 \subseteq Z^\epsilon(A)_0$, $Z^\epsilon(A)_0 \neq (0)$. Assim, pelo Teorema 4.4, $Z^\epsilon(A)_0 = Z(A)_0$ é um corpo. Como $\tau(A_\alpha) = \{0\}$ para todo $0 \neq \alpha \in \Gamma$, então $Z_\tau(A) = Z_\tau(A)_0$ é um subanel de $Z^\epsilon(A)_0$. Além disso, $F \cdot 1 \subseteq Z_\tau(A)$. Portanto, para mostrar que $Z_\tau(A)$ é um corpo é suficiente provar que cada elemento não zero de $Z_\tau(A)$ possui inverso em $Z_\tau(A)$: Seja $0 \neq a \in Z_\tau(A) \subseteq Z^\epsilon(A)_0$. Como $Z^\epsilon(A)_0$ é um corpo existe $b \in Z^\epsilon(A)_0$ tal que $ab = ba = 1$, então

$$4 = 2\tau(1) = 2\tau(ab) = \tau((2a)b) = \tau(\tau(a)b) = \tau(a)\tau(b) = 2a\tau(b).$$

Assim, $2b = b(a\tau(b)) = (ba)\tau(b) = \tau(b)$, isto é, $b \in Z_\tau(A)$. Portanto $Z_\tau(A)$ é um corpo.
Pelo Teorema 4.10, sobre a álgebra A esta definida uma forma bilinear f satisfazendo a identidade (2.3).

Portanto, para mostrar que A é uma álgebra de composição sobre o corpo $Z_\tau(A)$, apenas precisamos mostrar que a ϵ-forma quadrática $q = (q_0, f)$ é não-degenerada e que f é $Z_\tau(A)$-bilinear, para isto, vejamos o comportamento de f.

I) Sejam $\alpha, \beta \in \Gamma$, vejamos que $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$: Se $\alpha + \beta \neq 0$ ($\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$), como $\tau(A_\gamma) = 0$ para todo $0 \neq \gamma \in \Gamma$, então

$$f(a_\alpha, b_\beta) = \tau(a_\alpha)\tau(b_\beta) - \tau(a_\alpha b_\beta) = 0 - 0 = 0,$$

para todo $a_\alpha \in A_\alpha$ e $b_\beta \in A_\beta$. Portanto, $f(A_\alpha, A_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$.

II) Consideremos o conjunto $W = \{a \in A | f(a, A) = 0\}$, o núcleo da forma $f(x, y)$. Mostremos que W é um ideal graduado de A. É claro que W é um subespaço do espaço vetorial A. Seja $a \in W$, $a = a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \ldots + a_{\alpha_n}$, onde as a_{α_i} são as componentes homogêneas de a. Como $f(a, A) = 0$, em particular $f(a, A_{-\alpha_i}) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots n\}$. Por outro lado, pelo item I), $f(a_{\alpha_j}, A_{-\alpha_i}) = 0$ para todo $j \neq i$ (porque $\alpha_j - \alpha_i \neq 0$ se $j \neq i$). Então, $f(a_{\alpha_i}, A_{-\alpha_i}) = f(a, A_{-\alpha_i}) = 0$. Assim, outra vez pelo item I) temos que $f(a_{\alpha_i}, A) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, isto é, $a_{\alpha_i} \in W$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots n\}$. Portanto W é um subespaço Γ-graduado do espaço vetorial A.
Agora sejam $b_\beta, c_\gamma \in A$. Então, por (2.3) obtemos que

$$f(a_{\alpha_i} b_\beta, c_\gamma) = f(a_{\alpha_i} b_\beta, c_\gamma \cdot 1) = \epsilon(\beta, \gamma) f(a_{\alpha_i}, c_\gamma) f(b_\beta, 1) - \epsilon(\beta, \gamma) f(a_{\alpha_i}, c_\gamma b_\beta) = 0.$$

Logo, W é um ideal graduado a direita de A. Se prova analogamente que W é um ideal graduado a esquerda de A. Portanto, W é um ideal graduado de A.
Como A é uma álgebra simples graduada temos que, $W = (0)$ ou $W = A$. No caso que $W = (0)$, a ϵ-forma quadrática $q = (q_0, f)$ é não-degenerada. Por outro lado, como $f(1, 1) = \tau(1)\tau(1) - \tau(1) = 2 \neq 0$, não pode acontecer que $W = A$. Portanto, a ϵ-forma quadrática $q = (q_0, f)$ é não-degenerada.

III) Vejamos que f é $Z_\tau(A)_0$-bilinear: Seja $z \in Z_\tau(A)_0$. Então, por (4.18)

$$\begin{aligned} 2f(za_\alpha, b_\beta) &= f((2z)a_\alpha, b_\beta) = f(\tau(z)a_\alpha, b_\beta), \\ &= \tau(z) f(a_\alpha, b_\beta) = 2z f(a_\alpha, b_\beta). \end{aligned}$$

Portanto $f(za_\alpha, b_\beta) = z f(a_\alpha, b_\beta)$. Analogamente se mostra que $f(a_\alpha, zb_\beta) = z f(a_\alpha, b_\beta)$.

Portanto, A é uma ϵ-álgebra de composição sobre o corpo $Z_\tau(A)_0$. □

Referências Bibliográficas

[Ara15] Diego Aranda-Orna, Gradings on composition superalgebras, *Comm. Algebra* **43** (2015), no.6, pp. 2367-2387. x, 11, 55

[Bae01] John C. Baez, The Octonions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **39** (2001), no.2, pp. 145-205. x

[BM99] Yuri Bahturin and Susan Montgomery, PI-envelopes of Lie superalgebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), no. 10, 2829-2839. 34

[Eld98] A. Elduque, Gradings on octonions, *J. Algebra* **207** (1998), pp. 342-354. x, 7, 8, 10, 54

[Eld09] A. Elduque, Gradings on symmetric composition algebras, *J. Algebra* **322** (2009), no.10, pp. 3542-3579. x, 8, 9, 54

[EK13] A. Elduque and M. Kochetov, Grading on Simple Lie Algebras, *Mathematical Surveys and Monographs* **189**, American Mathematical Society, 2013. 1, 7, 9

[EO02] A. Elduque and S. Okubo, Composition Superalgebras, *Comm. Algebra* **30** (2002), no.11, pp. 5447-5471. x, 9, 10, 15

[KMRT98] M. A. Knus, A. S. Merkjurev, M. Rost, J. P. Tignol, The Book of Involutions, *American Mathematical Society, Colloquium Publications* **44**, *Providence,* 1979.

[Sch79] M. Scheunert, Generalized Lie algebras, *J. Math. Phys.* **20** (1979), no. 4, pp. 712-720. x, 11, 13, 33

[She97] I. P. Shestakov, Prime alternative superalgebras of arbitrary characteristic, *Algebra and Logic* **36** (1997), no. 6, pp. 389-412. x, 10

[SZ09] I. P. Shestakov, N. Zhukavets, Skew-symmetric identities of octonions, *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), no. 4, pp. 479-492. 59

[ZSSS82] K.A. Zhevlakov, A.M. Slin'ko, I.P. Shestakov, A.I. Shirshov, Rings that are nearly associative, *Academic Press,* 1982. xi, 3, 4, 5, 6, 15, 57