Extensão da teoria de Nielsen de raízes a aplicações cujo contradomínio não é uma variedade

Diolan Godinho Araujo

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Lucília Daruiz Borsari

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES/CNPq

São Paulo, Maio de 2015

Extensão da teoria de Nielsen de raízes a aplicações cujo contradomínio não é uma variedade

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo
candidato Diolan Godinho Araujo, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Dedicatória

À minha mãe Nilza Godinho que me mostrou um caminho e me ensinou a caminhar; à minha companheira Stephanie Pumarino cujo caminho se amalgamou ao meu e que desde então caminha junto a mim; e, especialmente, ao meu filho Cauê Pumarino Godinho que nos desvenda um novo caminho e a quem pretendemos, caminhando juntos, ensinar a caminhar e sempre descobrir novos caminhos.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe e aos meus irmãos por serem a fundação em que minha vida está baseada; à Stephanie pelo companheirismo em todos os momentos; ao Cauê pelos momentos de genuínas felicidade e alegria e pelo aprendizado; às professoras Zara e Rosely por, através do zelo com que lecionam, fazer crescer em mim o gosto e o fascínio pela Matemática; a todas as pessoas que já dividiram o mesmo teto comigo pelos momentos juntos, em particular, Márcia Oliveira, Márcia Scapaticio, Diogo (Mineiro) Silvieri, Wanderson (Gago) Teixeira, Diego Silva, Rodrigo (o Gui) Correia e João Paulo Muniz; a todos os colegas de IME pela convivência e enriquecimento pessoal e intelectual, em particular, Leandro Souza, Giselle Bertaggia, Gláucio Fabiano, Anderson (Baiano) Almeida , Gabriel Zanetti, Pedro Russo e, em especial ao grande amigo e parceiro, João Paulo Mello.

Em destaque, minha sincera gratidão à professora Lucília, não só pelo acompanhamento acadêmico desde a graduação, mas também, e principalmente, pela paciência, compreensão e sensibilidade com que me auxiliou nesta jornada.

Resumo

GODINHO, D. G. **Extensão da teoria de Niesen de raízes a aplicações cuja contradomínio não é uma variedade**. 2015. 46 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Para uma aplicação própria $f\colon X \to Y$ entre variedades conexas de mesma dimensão n, o número de Nielsen próprio de f em $y_0 \in Y$, $\mathrm{PNR}(f, y_0)$, e o grau absoluto de f em y_0, $\mathcal{A}(f, y_0)$, constituem invariantes propriamente homotópicos de f. Além disso, $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ é um limitante inferior para o número de raízes em y_0 de toda aplicação propriamente homotópica a f, e $\mathcal{A}(f, y_0)$ é um limitante inferior para o número de raízes em y_0 de toda aplicação propriamente homotópica a f e transversa a y_0. Se $n \neq 2$, existem uma aplicação propriamente homotópica a f com exatamente $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ raízes em y_0, e uma aplicação propriamente homotópica a f e transversa a y_0 com exatamente $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes em y_0. Estendemos estes resultados, com a condição $n > 2$, para uma aplicação própria $f\colon X \to Y$ onde X é uma variedade conexa de dimensão n, Y é um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e $y_0 \in Y$ é um ponto que admite uma vizinhança euclidiana de dimensão n. Aplicamos esta extensão da teoria de Nielsen de raízes à teoria do grau para estabelecer uma relação entre os graus absoluto e geométrico.

Palavras-chave: número de Nielsen, grau absoluto, grau geométrico.

Abstract

ARAUJO, D. G. **Root theory extension for maps in a space that is not a manifold**. 2015. 46 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

For a proper map $f\colon X \to Y$ between connected manifolds of dimension n, the proper Nielsen number of f at $y_0 \in Y$, $\mathrm{PNR}(f, y_0)$, and the absolute degree of f at y_0, $\mathcal{A}(f, y_0)$, are proper homotopy invariants of f. Moreover, $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ is a lower bound for the number of roots at y_0 of all maps properly homotopic to f, and $\mathcal{A}(f, y_0)$ is a lower bound for the number of roots at y_0 of all maps properly homotopic to f and transverse at y_0. If $n \neq 2$, there is a map properly homotopic to f with exactly $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ roots at y_0, and a map properly homotopic to f and transverse at y_0 with exactly $\mathcal{A}(f, y_0)$ roots at y_0. We extend these results, for $n \neq 2$, for proper maps $f\colon X \to Y$, where X is a connected n-dimensional manifold, Y is a connected, locally path connected, semi-locally simply connected space and $y_0 \in Y$ has an euclidean neighborhood of dimension n. We apply this extended Nielsen Root theory to the degree theory to obtain a relation between the absolute an geometric degrees.
Keywords: Nielsen number, absolute degree, geometric degree

Sumário

Introdução

No desenvolvimento de sua teoria do grau, o matemático alemão Heinz Hopf, influenciado pela recém desenvolvida teoria de pontos fixos de Jakob Nielsen [Nie27, Nie29], introduziu os conceitos de número de Nielsen de raízes e de grau absoluto [Hop28, Hop30]. Concernentes as estes conceitos, Hopf estabeleceu, no segundo dos trabalhos acima referenciados, dois importantes resultados. A presente dissertação tem como base o artigo entitulado "Roots of mappings from manifolds"de autoria de Robin Brooks, publicado no ano de 2004 [Bro04] cujo principal objetivo é estender estes dois conhecidos resultados da teoria de Nielsen de raízes no sentido de substituir a hipótese de que certo espaço topológico seja uma variedade topológica pela condição, menos exigente, de que este tal espaço seja localmente euclidiano apenas no ponto em que se consideram as raízes.

Uma raiz da aplicação $f\colon X \to Y$ entre espaços topológicos no ponto $y_0 \in Y$ é um elemento da imagem inversa $f^{-1}(y_0)$ de y_0 por f. Duas raízes de f em y_0 estão na mesma classe de raízes se existe um caminho unindo-os cuja imagem por f é um laço contrátil no ponto y_0. Nos trabalhos de Hopf, estes conceitos, assim como os que se seguem, tinham por substrato uma aplicação própria entre variedades topológicas conexas de mesma dimensão que preserva fronteiras. Com a noção de multiplicidade, uma classe de raízes era dita essencial se sua multiplicidade fosse não nula. Hopf então define o número de Nielsen de raízes de f em y_0 como sendo a quantidade de classes de raízes essenciais e o grau absoluto de f como a soma das multiplicidades das classes de raízes de f em y_0. Também foi introduzida a idéia de transversalidade de uma aplicação a um ponto do seu contradomínio. No segundo de seus dois trabalhos Hopf prova que para $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria entre variedades topológicas conexas de mesma dimensão que preserva fronteira valem os seguintes resultados:

I) tanto o número de Nielsen de raízes quanto o grau absoluto são invariantes da classe de homotopia própria de f, isto é, toda aplicação propriamente homotópica a f possui os mesmos número de Nielsen de raízes e grau absoluto de f;

II) se a dimensão das variedades for diferente de dois então o número de Nielsen de raízes é um limitante inferior realizável para o número de raízes na classe de homotopia própria de f, isto é, a quantidade de raízes de qualquer aplicação propriamente homotópica a f é, no mínimo, o número de Nielsen de raízes de f e, ainda mais, existe uma aplicação propriamente homotópica a f que tem exatamente como quantidade de raízes, o número de Nielsen de raízes de f; e

III) o grau absoluto é um limitante inferior realizável para o número de raízes na classe tranversa de homotopia própria de f, isto é, a quantidade de raízes de qualquer aplicação propriamente homotópica a f e tranversa ao ponto em que se consideram as raízes é, pelo menos, o grau absoluto de f e uma dentre estas aplicações tem exatamente como quantidade de raízes, o grau absoluto de f.

O trabalho de Brooks e portanto o presente texto objetivam reestabelecer os item (II) e (III) acima substituindo a hipótese de que Y seja uma variedade topológica de mesma dimensão da variedade X pela suposição de que o espaço Y seja, no ponto y_0, localmente euclidiano.

Quando considerada uma aplicação entre variedades conexas de mesma dimensão mostra-se que o número de Nielsen de raízes independe do ponto em que se consideram as raízes e por isso se fala apenas em número de Nielsen de raízes de f. Nestes casos a multiplicidade também independe da classe de raízes, isto é, a multiplicidade é a mesma para todas as classes de raízes. Veremos que este panorama não é preservado se fazemos a substituição supracitada. Ou seja, há exemplos em que o número de Nielsen de raízes depende do ponto para os quais se olham as raízes e onde as classes de raízes podem apresentar multiplicidades distintas umas das outras, quando Y não é uma variedade. Uma outra mudança obtida ao se relaxar a hipótese sobre o espaço Y se dá no seguinte cenário: conquanto não empregasse tal nomenclatura, Hopf introduziu um outro número, o número de Reidemeister de raízes, o qual vem a ser um limitante superior para a quantidade de classes de raízes. Portanto o número de Reidemeister é sempre maior do que, ou igual a, o número de Nielsen de raízes. Ocorre que para aplicações entre variedades vale a igualdade entre esses números sempre que o número de Nielsen de raízes for positivo. Isto não mais é verdadeiro se Y não for uma variedade. Mostraremos exemplos onde o número de Nielsen de raízes é positivo e estritamente menor do que o número de Reidemeister.

Finalmente, assim como Robert Brown e Helga Schirmer fizeram em [BS01] tentaremos reestabelecer a ligação entre a teoria de Nielsen de raízes e a teoria do grau de Hopf.

Este trabalho está organizado do seguinte modo: no primeiro capítulo, fixamos as notações e recordamos os pré-requisitos necessários ao subsequente desenvolvimento do texto; no capítulo seguinte estabelecemos as definições e resultados básicos da teoria de Nielsen de raízes. No último capítulo enunciamos e demonstramos as extensões dos dois teoremas de Hopf e aplicamos a teoria de Nielsen de raízes desenvolvida nos três capítulos anteriores à teoria do grau.

Capítulo 1

Preliminares

1.0.1 Convenções e notações

Neste trabalho todos os espaços são Hausdorff e uma **aplicação** é uma função contínua entre espaços topológicos.

O espaço euclidiano n-dimensional é denotado por $\mathbb{R}^n$, a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{B}^n$, a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$ por $\mathbb{S}^n$, o intervalo $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ por $\mathbf{I}$, o conjunto dos números inteiros por $\mathbb{Z}$, os inteiros módulo dois por $\mathbb{Z}_2$ e o plano complexo por $\mathbb{C}$.

Se X é um espaço e $U \subset X$ é um subespaço denotamos o interior, o fecho e a fronteira de U, respectivamente, por $\mathrm{int}U$, $\overline{U}$ e ∂U. Um subespaço $B \subset X$ é uma n-**bola** se existe um homeomorfismo $\phi\colon \mathbb{B}^n \to B$ e um subespaço $E \subset X$ é n-**euclidiano** se existe um homeomorfismo $\psi\colon \mathbb{R}^n \to E$. Dizemos ainda que um espaço topológico é **localmente** n-**euclidiano** em um dado ponto se tal ponto admite uma vizinhança n-euclidiana.

Se X e Y são espaços topológicos, uma **homotopia** $\{h_t\colon X \to Y | t \in \mathbf{I}\}$ é uma família de aplicações $h_t\colon X \to Y$ indexada por $\mathbf{I}$ tal que a função que a cada $(x,t) \in X \times \mathbf{I}$ associa o ponto $h_t(x) \in Y$ é contínua. Denotamos uma homotopia por $\{h_t\colon X \to Y\}$ ou simplesmente por $\{h_t\}$ e dizemos que é uma homotopia de h_0 a h_1. Dizemos que uma homotopia $\{h_t\colon X \to Y\}$ é uma **homotopia constante em** $A \subset X$ se $h_t(x) = h_0(x)$ para todo $x \in A$ e para todo $t \in \mathbf{I}$; e dizemos que é uma **homotopia constante fora de** $A \subset X$ se é constante em $X - A$.

Um **caminho** em um espaço X é uma aplicação do intervalo unitário $\mathbf{I}$ em X, $\gamma\colon \mathbf{I} \to X$. Se $x_0 \in X$ então o **caminho constante** em x_0, isto é, o caminho $\gamma\colon \mathbf{I} \to X$ tal que $\gamma(t) = x_0$ para todo $t \in \mathbf{I}$, pode ser denotado pelo próprio x_0. Homotopias entre caminhos é considerada, a menos de menção contrária, uma homotopia com extremidades fixas, ou seja, se $\{h_t\colon \mathbf{I} \to X\}$ é uma homotopia de caminhos em X então $h_t(0) = h_0(0)$ e $h_t(1) = h_0(1)$ para todo $t \in \mathbf{I}$. A classe de homotopia do caminho $\gamma\colon \mathbf{I} \to X$ é denotada por $[\gamma]$.

Uma aplicação $\bar{f}\colon (X', A') \to (Y', B')$ é **definida por** $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ se $X' \subset X$, $f(X') \subset Y'$, $f(A') \subset B'$ e $\bar{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X'$.

Se X, Y e $\widehat{Y}$ são espaços topológicos, $f\colon X \to Y$ e $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$ são aplicações, um **levantamento** de f através de $\widehat{q}$ é uma aplicação $\widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}$ tal que $\widehat{q} \circ \widehat{f} = f$, ou seja, é uma aplicação que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} & \widehat{Y} \arrow[d, "\widehat{q}"] \\ X \arrow[ur, "\widehat{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

comutativo. O mesmo se dá com homotopias, ou seja, um levantamento de uma homotopia $\{h_t\colon X \to Y\}$ através de $\widehat{q}$ é uma homotopia $\{\widehat{h}_t\colon X \to \widehat{Y}\}$ tal que $\widehat{q} \circ \widehat{h}_t = h_t$ para todo $t \in \mathbf{I}$.

Uma **aplicação de recobrimento**, ou simplesmente **recobrimento**, é uma aplicação $p\colon \widehat{X} \to X$, onde $\widehat{X}$ é conexo por caminhos, tal que cada $x \in X$ admite uma vizinhança aberta U tal que $p^{-1}(U)$ é uma união disjunta de abertos cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre U. Chamamos de **vizinhança distinguida** a cada aberto U deste tipo. O espaço $\widehat{X}$ é chamado **espaço de recobrimento** e X é chamado a **base do recobrimento**.

Se $e\colon (X-U, B-U) \subset (X, B)$ é uma inclusão onde U é um aberto de X cujo fecho está contido no interior de B, então $X - \text{int}B \subset X - \overline{U}$. Assim, tomando $N = X - U$ e $A = X - B$ temos que N é fechado em X e

$$\overline{A} = \overline{X-B} = X - \text{int}B \subset X - \overline{U} = \text{int}(X_U) = \text{int}N.$$

Logo $e\colon (N, N-A) \subset (X, X-A)$ é uma inclusão onde N é uma vizinhança fechada do fecho de A. Por outro lado se $e\colon (N, N-A) \subset (X, X-A)$ é uma inclusão onde N é uma vizinhança fechada do fecho de A, então $X - \text{int}N \subset X - \overline{A}$. Assim, tomando $U = X - N$ e $B = X - A$ temos que U é aberto e

$$\overline{U} = \overline{X-N} = X - \text{int}N \subset X - \overline{A} = \text{int}(X-A) = \text{int}B.$$

Logo $e\colon (X-U, B-U) \subset (X, B)$ é uma inclusão onde U é um aberto de X cujo fecho está contido no interior de B. Isto mostra que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $e\colon (X-U, B-U) \subset (X, B)$ é uma inclusão onde U é um aberto de X cujo fecho está contido no interior de B

2. $e\colon (N, N-A) \subset (X, X-A)$ é uma inclusão onde N é uma vizinhança fechada do fecho de A.

Uma inclusão como nos itens (1) e (2) acima induz isomorfismo em todas as dimensões em homologia e é o que se chama excisão. Adotamos uma definição um pouco diferente de excisão baseado no seguinte argumento: suponhamos que X é um espaço normal, $A \subset X$ e $N \subset X$ é uma vizinhança qualquer do fecho de A. Então $\overline{A}$ e $X - \text{int}N$ são dois fechados disjuntos em X e, portanto, existem abertos disjuntos U e V tais que $\overline{A} \subset U$ e $X - \text{int}N \subset V$. Daí $U \subset X - \overline{V}$ e $X - V \subset \text{int}N$. Logo

$$\overline{A} \subset U \subset X - \overline{V} = \text{int}(X - V).$$

Ou seja, $C = X - V$ é uma vizinhança fechada do fecho de A contida no interior de N. Neste caso, tanto $e'\colon (C, C-A) \subset (N, N-A)$ quanto $e \circ e'\colon (C, C-A) \subset (X, X-A)$ são excisões no sentido do item (2) acima e, portanto, induzem isomorfismo em todas as dimensões de homologia. Logo e também induz isomorfismo em todas as dimensões de homologia. Nossa definição de excisão é a seguinte:

Definição 1.1. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$ um subconjunto. Uma **excisão** em X é uma inclusão $e\colon (N, N-A) \subset (X, X-A)$ onde N é uma vizinhança qualquer do fecho de A, em X.

Observamos que o que chamamos de excisão, Eilenberg e Steenrod chamam de excisão do tipo E_2 e que se for usada homologia singular tal inclusão induz ismorfismo independentemente da normalidade [ES52, p. 267-268].

1.0.2 Aplicações próprias

Definição 1.2. Uma **aplicação prórpia** é uma aplicação $f\colon X \to Y$ cuja pré-imagem $f^{-1}(K)$ de todo compacto $K \subset Y$ é um compacto de X.

Definição 1.3. Uma **homotopia própria** é uma homotopia $\{h_t\colon X \to Y\}$ tal que a aplicação de $X \times \mathbf{I}$ em Y dada por $(x,t) \mapsto h_t(x)$ é própria.

Teorema 1.4. *Uma homotopia $\{h_t\colon X \to Y\}$ é própria se, e somente se, $\bigcup_{t\in\mathbf{I}} h_t^{-1}(K)$ é compacto em X sempre que K for compacto em Y.*

Demonstração. Suponhamos que $\{h_t\}$ é própria e seja $K \subset Y$ um compacto. Então o conjunto $\{(x,t) \in X \times \mathbf{I} : h_t(x) \in K\}$ é compacto em $X \times \mathbf{I}$. Logo sua imagem pela projeção $X \times \mathbf{I} \to X$ é um compacto de X. Mas esta imagem é extamente o conjunto $\bigcup_{t\in\mathbf{I}} h_t^{-1}(K)$.

Reciprocamente, suponhamos que o conjunto $\bigcup_{t\in\mathbf{I}} h_t^{-1}(K)$ é um compacto de X sempre que K for um compacto de Y. Seja $K \subset Y$ um compacto. Então $\bigcup_{t\in\mathbf{I}} h_t^{-1}(K) \times \mathbf{I}$ é um compacto em $X \times \mathbf{I}$. Como a função $(x,t) \mapsto h_t(x)$ é contínua e K é fechado em Y (pois é compacto) temos que $C = \{(x,t) \in X \times \mathbf{I} : h_t(x) \in K\}$ é um fechado em $X \times \mathbf{I}$ que, além disso, está contido no compacto $\bigcup_{t\in\mathbf{I}} h_t^{-1}(K) \times \mathbf{I}$. Logo C é compacto em $X \times \mathbf{I}$ de onde concluimos que $\{h_t\}$ é uma homotopia própria. $\square$

Teorema 1.5. *Toda homotopia que seja constante igual a uma aplicação própria fora de um compacto, é uma homotopia própria.*

Demonstração. Sejam $\{h_t\colon X \to Y\}$ uma homotopia, $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria e $C \subset X$ um compacto. Suponhamos que a homotopia $\{h_t\}$ é constante igual a f fora de C, isto é, se $h_t(x) = f(x)$ para todo $(x,t) \in (X - C) \times \mathbf{I}$. Mostremos que $\{h_t\}$ é uma homotopia própria.

Seja $K \subset Y$ um compacto. Pelo teorema acima, é suficiente provar que $\bigcup_{t\in\mathbf{I}} h_t^{-1}(K)$ é compacto em X. Como $\{h_t\}$ é constante igual a f fora de C segue que $\bigcup_{t\in\mathbf{I}} h_t^{-1}(K) = (\bigcup_{t\in\mathbf{I}} (h_t|C)^{-1}(K)) \bigcup f^{-1}(K)$ e, como f é própria basta mostrar que $\bigcup_{t\in\mathbf{I}} (h_t|C)^{-1}(k)$ é compacto em X. Mas isto decorre do teorema acima uma vez que a homotopia $\{h_t|C\}$ é própria (pois C é compacto). $\square$

Teorema 1.6. *Uma aplicação é própria se, e somente se, um levantamento seu, através de um recobrimento, também o for.*

Demonstração. Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação e $\widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}$ um levantamento seu através de um recobrimento $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$.

Suponhamos que f é própria e seja $\widehat{K} \subset \widehat{Y}$ um compacto. Portanto são compactos em Y e X, respectivamente, os conjuntos $\widehat{q}(\widehat{K})$ e $f^{-1}(\widehat{q}(\widehat{K}))$. Além disso, $\widehat{f}^{-1}(\widehat{K})$ é fechado em X pois $\widehat{K}$ o é em Y e $\widehat{f}^{-1}(\widehat{K}) \subset f^{-1}(\widehat{q}(\widehat{K}))$. Assim $\widehat{f}^{-1}(\widehat{K})$ é um fechado contido em um compacto, logo um compacto de X. Então $\widehat{f}$ é uma apliclação própria.

Reciprocamente, suponhamos que $\widehat{f}$ é uma aplicação própria e seja $K \subset Y$ um compacto. Então K admite uma cobertura finita $\mathcal{C}$ por compactos que são vizinhanças distinguidas. Para cada $C \subset \mathcal{C}$ seja $\widehat{K}_C$ um compacto homeomorfo (através de $\widehat{q}$) a C. Então $\widehat{f}^{-1}(\widehat{K}_C)$ também é compacto pois $\widehat{f}$ é própria. Assim $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} \widehat{f}^{-1}(\widehat{K}_C)$, sendo uma união finita de compactos, é um compacto. E $f^{-1}(K)$, sendo um subconjunto fechado de $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} \widehat{f}^{-1}(\widehat{K}_C)$, também é compacto. Portanto f é própria. $\square$

Como uma homotopia própria de um espaço X é uma aplicação própria do espaço $X \times \mathbf{I}$ temos o seguinte corolário do teorema acima.

Corolário 1.7. *Uma homotopia é própria se, e somente se, um levantamento seu, através de um recobrimento, também o for.*

Teorema 1.8. *Uma aplicação de recobrimento com base conexa é própria se, e somente se, possui um número finito de folhas.*

Demonstração. Sejam X um espaço conexo e $p\colon \widehat{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento.

Suponhamos que p seja própria. Se $x \in X$ temos que $p^{-1}(x)$ é discreto (pois p é recobrimento) e compacto (pois p é própria e os espaços são Hausdorff). Logo, $p^{-1}(x)$ é finito.

Reciprocamente, suponhamos que p tem um número finito de folhas e seja $K \subset X$ um compacto. Basta mostrar que se Y é um espaço conexo e compacto e $q\colon \widehat{Y} \to Y$ é um recobrimento com um número finito de folhas então $\widehat{Y}$ é compacto, pois $p|p^{-1}(K)\colon p^{-1}(K) \to K$ é um recobrimento nestas condições. Para cada $y \in Y$ seja U_y uma vizinhança distinguida aberta de y. Então $\{U_y : y \in Y\}$ é uma cobertura por abertos de Y. Logo existem $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tais que $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}\}$ é uma cobertura por abertos de Y. Sendo compacto, Y é normal e, por [Dug66, Teorema 6.1, p. 152], existe um refinamento $\{V_1, \ldots, V_n\}$ da cobertura $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}\}$ tal que o fecho de V_i está contido em U_{y_i} para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\overline{V}_i$ é compacto e $\widehat{q}^{-1}(\overline{V}_i)$ é a união finita de cópias homeomorfas a $\overline{V}_i$ (pois $\widehat{q}$ tem um número finito de folhas e $\overline{V}_i \subset U_i$) segue que $\widehat{q}^{-1}(\overline{V}_i)$ é um compacto. Logo $\widehat{Y} = \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{q}^{-1}(\overline{V}_i)$ é compacto. ☐

Teorema 1.9. *A composição de aplicações próprias é uma aplicação própria.*

A demonstração deste fato é imediata e por isso a omitimos.

1.0.3 Orientação

Sejam X um espaço localmente n-euclidiano em $x \in X$ e $E \subset X$ uma vizinhança n-euclidiana de x. Por excisão temos que $H_*(X, X-x; \mathbb{Z}) \approx H_*(E, E-x; \mathbb{Z})$. Logo $H_p(X, X-x)$ é cíclico infinito para $p = n$ e trivial caso contrário.

Definição 1.10. Seja X um espaço localmente n-euclidiano em $x \in X$. Uma **orientação local** de X em x é um gerador do grupo $H_n(X, X-x)$.

No restante desta subseção seja X uma n-**variedade**, isto é, um espaço topológico paracompacto, (Hausdorff) e n-euclidiano em cada um de seus pontos. Consideremos o conjunto

$$\Theta(X) = \bigcup_{x \in X} H_n(X, X-x).$$

A família formada pelos interiores de todas as n-bolas em X constitui uma base para a topologia de X, isto é, o conjunto

$$\{\mathrm{int}B : B \text{ é uma } n\text{-bola em } X\}$$

é uma base para a topologia de X. Seja V o interior de uma n-bola em X. Para cada $x \in V$, o conjunto $X - V$ é um retrato por deformação de $X - x$ de modo que a inclusão $j_x\colon (X, X-V) \to (X, X-x)$ induz um isomorfismo $j_{xn}\colon H_n(X, X-V) \to H_n(X, X-x)$. Seja $V_\xi = \{j_{xn}(\xi) : x \in V\}$ onde $\xi \in H_n(X, X-V)$. Assim

$$\{V_\xi : V \text{ é o interior de uma } n\text{-bola e } \xi \in H_n(X, X-V)\}$$

constitui uma base para a topologia de $\Theta(X)$ [Dol72, Proposição 2.3, p. 252].

Consideremos a aplicação $\phi\colon \Theta(X) \to \mathbb{Z}$ definida por $\phi(\nu) = |\phi_x(\nu)|$ onde $\phi_x\colon H_n(X, X-x) \to \mathbb{Z}$ é um isomorfismo. Por tomarmos o módulo, temos que ϕ independe da escolha de ϕ_x estando, portanto, bem definida. Mostremos que ϕ é constante em cada V_ξ. Sejam V o interior de uma n-bola em X, $\xi \in H_n(X, X-V)$ e $\nu \in V_\xi$. Então existe $x \in V$ tal que $\nu = j_{xn}(\xi)$. Sejam μ_x e μ_V geradores de $H_n(X, X-x)$ e $H_n(X, X-V)$, respectivamente, tais que $j_{xn}(\mu_V) = \mu_x$. Como $\xi \in H_n(X, X-V)$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\xi = k\mu_V$. Logo

$$\begin{aligned}\phi(\nu) &= \phi(j_{xn}(\xi)) = \phi(j_{xn}(k\mu_V)) = \phi(kj_{xn}(\mu_V))\\ &= \phi(k\mu_x) = |k\phi_x(\mu_x)| = |k|,\end{aligned}$$

pois $\phi_x\colon H_n(X, X-x) \to \mathbb{Z}$ é um isomorfismo e, portanto, $\phi_x(\mu_x) = \pm 1$. Mostramos assim que ϕ é constante em V_ξ. Deste modo, ϕ é localmente constante e, portanto, contínua ($\mathbb{Z}$ munido da topologia discreta). Em particular, $\Theta(X)$ se decompõe em uma união disjunta

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{X}(k), \quad \text{onde} \quad \widetilde{X}(k) = \phi^{-1}(k).$$

Obsevemos que dado $\nu \in \Theta(X)$, existe $x \in X$ tal que $\nu \in H_n(X, X-x)$ de modo que $\phi(\nu) = 1$ se, e somente se, ν é um gerador de $H_n(X, X-x)$. Ou seja, $\widetilde{X}(1) = \phi^{-1}(1)$ é exatamente o conjunto das orientações locais de X.

Consideremos agora a aplicação $p_{\Theta(X)}\colon \Theta(X) \to X$ dada por $p_{\Theta(X)}(\nu) = x$ para cada $\nu \in H_n(X, X-x)$ com $x \in X$. Se V é o interior de uma n-bola em X e μ_V é um gerador de $H_n(X, X-V)$ então $j_{xn}(\mu_V)$ é um gerador de $H_n(X, X-x)$, onde $j_{xn}\colon H_n(X, X-V) \to H_n(X, X-x)$ é o isomorfismo induzido pela inclusão. Todo elemento de $H_n(X, X-V)$ é representado de maneira única por $k\mu_V$ com $k \in \mathbb{Z}$ e assim como todo elemento de $H_n(X, X-x)$ é representado de maneira única por $kj_{xn}(\mu_V)$ com $k \in \mathbb{Z}$. Deste modo temos que

$$\begin{aligned}p^{-1}_{\Theta(X)}(V) &= \bigcup_{x\in V} H_n(X, X-x)\\ &= \{\nu : \nu \in H_n(X, X-x),\, x \in V\}\\ &= \{kj_{xn}(\mu_V) : k \in \mathbb{Z},\, x \in V\}\\ &= \{j_{xn}(k\mu_V) : k \in \mathbb{Z},\, x \in V\}\\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} V_{k\mu_V}.\end{aligned}$$

Observemos que a união é disjunta e que cada $V_{k\mu_V}$ se aplica homeomorficamente, por $p_{\Theta(X)}$, sobre V, pois $p_{\Theta(X)}(kj_{xn}(\mu_V)) = x$ para todo $x \in V$. Como a coleção dos interiores de todas as n-bolas em X é uma base para a topologia de X segue que a restrição de $p_{\Theta(X)}\colon \Theta(X) \to X$ a cada componente conexa de $\Theta(X)$ é um recobrimento de X. Para cada $x \in X$, o grupo $H_n(X, X-x)$ possui exatamente dois geradores. Denotemos por $\widetilde{X}$ o subespaço de $\Theta(X)$ formado por todos estes geradores, isto é, $\widetilde{X} = \widetilde{X}(1)$. À restrição de $p_{\Theta(X)}$ a $\widetilde{X}$, denotada por $\widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to X$, chamamos **recobrimento duplo orientado** de X. Aqui estamos fazendo um abuso de linguagem, uma vez que $\widetilde{p}$ pode não ser, de fato, um recobrimento já que nada sabemos da conexidade por caminhos do espaço $\widetilde{X}$. Contudo a restrição de $\widetilde{p}$ a cada componente conexa de $\widetilde{X}$ é um recobrimento de X. Como $\widetilde{p}$ é um homeomorfismo local temos que $\widetilde{X}$ é uma n-variedade chamada **fibrado orientado** de X. O adjetivo orientado se deve ao teorema (1.13).

Seja uma aplicação $f\colon X \to Y$ entre espaços topológicos. Uma **seção** de f é uma aplicação $s\colon Y \to X$ tal que a composição $f \circ s$ é a identidade em Y. De outro modo, uma seção é uma aplicação que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "id"'] & Y
\end{tikzcd}$$

comutativo. Observemos que uma seção é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Definição 1.11. Uma **orientação** de uma variedade X é uma seção $s_X\colon X \to \widetilde{X}$ do recobrimento duplo orientado $\widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to X$ de X.

Definição 1.12. Uma variedade é **orientável** se admite uma orientação. Caso contrário, é dita **não orientável**.

Uma variedade orientável juntamente com uma sua orientação é dita uma **variedade orientada**.

Vimos acima que o fibrado orientado é uma variedade. O próximo resultado versa sobre a orientabilidade desta variedade.

Teorema 1.13. *O fibrado orientado de uma variedade é uma variedade orientável.*

Demonstração. Seja X uma n-variedade, $\widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to X$ seu recobrimento duplo orientado e $\widetilde{\widetilde{p}}\colon \widetilde{\widetilde{X}} \to \widetilde{X}$ o recobrimento duplo orientado do fibrado orientado $\widetilde{X}$ de X. Devemos encontrar uma orientação $s_{\widetilde{X}}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{\widetilde{X}}$ de $\widetilde{X}$. Isto é, devemos encontrar uma seção da aplicação $\widetilde{\widetilde{p}}$. Dado $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ sejam $x = \widetilde{p}(\widetilde{x}) \in X$, $U \subset X$ uma vizinhança distinguida de x e $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ a componente de $\widetilde{p}^{-1}(U)$ que contém $\widetilde{x}$ e consideremos o seguinte diagrama

$$(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{x}) \overset{\widetilde{e}}{\supset} (\widetilde{U}, \widetilde{U} - \widetilde{x}) \overset{\widetilde{p}_{\widetilde{U}}}{\to} (U, U - x) \overset{e}{\subset} (X, X - x),$$

onde e e $\widetilde{e}$ são inclusões e $\widetilde{p}_{\widetilde{U}}$ e a restrição de $\widetilde{p}$ a $\widetilde{U}$. As inclusões e e $\widetilde{e}$ são excisões e $\widetilde{p}_{\widetilde{U}}$ é um homeomorfismo de modo que estas três aplicações induzem, respectivamente, os isomorfismos $e_n\colon H_n(U, U-x) \to H_n(X, X-x)$, $\widetilde{e}_n\colon H_n(\widetilde{U}, \widetilde{U} - \widetilde{x}) \to H_n(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{x})$ e $(\widetilde{p}_{\widetilde{U}})_n\colon H_n(\widetilde{U}, \widetilde{U} - \widetilde{x}) \to H_n(U, U-x)$. Como $\widetilde{x}$ é um gerador de $H_n(X, X-x)$ temos que $\widetilde{e}_n \circ (\widetilde{p}_{\widetilde{U}})_n^{-1} \circ e_n^{-1}(\widetilde{x})$ é um gerador de $H_n(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{x})$. Definimos $s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}) = \widetilde{e}_n \circ (\widetilde{p}_{\widetilde{U}})_n^{-1} \circ e_n^{-1}(\widetilde{x})$. Por construção $s_{\widetilde{X}}$ é uma seção de $\widetilde{\widetilde{p}}$. □

Denominamos **orientação canônica** de $\widetilde{X}$ à orientação $s_{\widetilde{X}}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{\widetilde{X}}$ obtida na demonstração acima. Deste modo o fibrado orientado de uma variedade juntamente com sua orientação canônica é uma variedade orientada. Por isso usamos o adjetivo orientado na denominação do fibrado.

Proposição 1.14. *Se o fibrado orientado de uma variedade conexa não é conexo, então é composto de exatamente duas componentes conexas.*

Demonstração. Seja X uma n-variedade conexa cujo fibrado orientado $\widetilde{X}$ não é conexo. Suponhamos que para algum $x \in X$ os geradores μ_x e $-\mu_x$ de $H_n(X, X-x)$ pertençam a componentes conexas distintas, digamos $\mu_x \in C_1$ e $-\mu_x \in C_2$. Seja γ um caminho em X começando em x. Como a restrição de $\widetilde{p}$ a C_i, $i = 1, 2$ é um recobrimento existem caminhos $\widetilde{\gamma}_i$ em C_i, $i = 1, 2$, com $\widetilde{\gamma}_1(0) = \mu_x$ e $\widetilde{\gamma}_2(0) = -\mu_x$. Se $\widetilde{\gamma}_1(1) = \widetilde{\gamma}_2(1)$ então $\widetilde{\gamma}_1 \widetilde{\gamma}_2^{-1}$ é um caminho em $\widetilde{X}$ ligando μ_x a $-\mu_x$ o que contradiz o fato de μ_x e $-\mu_x$ estarem em componentes conexas distintas. Logo $\widetilde{\gamma}_1(1) \neq \widetilde{\gamma}_2(1)$ e $\widetilde{\gamma}_i(1) \in C_i$, $i = 1, 2$. Sendo conexa, a variedade X é conexa por caminhos e, portanto, mostramos que se os geradores de $H_n(X, X-x)$ estão em componentes conexas distintas para algum $x \in X$ então o estão para todo $x \in X$ (e nas mesmas duas componentes). Por outro lado, pelo que acabamos de mostrar, se para algum $x \in X$, os geradores de $H_n(X, X - x)$ estão na mesma componente conexa de $\widetilde{X}$ então o mesmo deve ocorrer para todos os outros pontos de X. Mas neste caso teríamos que $\widetilde{X}$ é conexo. $\square$

Como consequência da proposição acima temos que se X for uma variedade conexa cujo fibrado orientado é conexo então $\widetilde{p}$ é, de fato, um recobrimento duplo de X. Por outro lado, se o fibrado orientado for desconexo então a restrição de $\widetilde{p}$ a cada componente conexa de $\widetilde{X}$ é um recobrimento simples de X. O resultado a seguir relaciona a orientabilidade de uma variedade conexa à conexidade de seu fibrado.

Teorema 1.15. *Uma variedade conexa é orientável se, e somente se, seu fibrado orientado não é conexo.*

Demonstração. Seja X uma variedade conexa. Suponhamos X orientável e seja $s_X\colon X \to \widetilde{X}$ uma orientação de X. Então para todo $x \in X$, $s_X(x)$ é um dos dois geradores do grupo $H_n(X, X-x)$. Designando por $-s_X(x)$ o outro gerador resulta que a aplicação $-s_X\colon x \to \widetilde{X}$ que a cada $x \in X$ associa $-s_X(x)$ também é uma orientação de X, pois $\widetilde{p}(-s_X(x)) = x$. Sendo orientações, s_X e $-s_X$ são homeomorfismos sobre suas imagens e, além disso, $\widetilde{X} = \mathrm{Im}(s_X) \sqcup \mathrm{Im}(-s_X)$. Assim $\mathrm{Im}(s_X)$ e $\mathrm{Im}(-s_X)$ são abertos de $\widetilde{X}$, não vazios, disjuntos cuja união é $\widetilde{X}$, ou seja, $\widetilde{X}$ é desconexo.

Reciprocamente, suponhamos que $\widetilde{X}$ não é conexo. Pela proposição (1.14), $\widetilde{X}$ é a união disjunta de duas componentes conexas $C_1, C_2 \subset \widetilde{X}$ cada uma das quais contém exatamente um dos geradores de $H_n(X, X - x)$ para cada $x \in X$. A restrição $\widetilde{p}|_{C_i}\colon C_i \to X$ é um recobrimento simples de X, ou seja, um homeomorfismo e, neste caso, $(\widetilde{p}|_{C_i})^{-1}\colon X \to C_i \subset \widetilde{X}$ é uma orientação de X. $\square$

Sejam X uma n-variedade e $U \subset X$ um aberto de X. Então U é, por si mesma, uma variedade. Para cada $x \in U$, a inclusão $e_x\colon (U, U - x) \subset (X, X - x)$ é uma excisão e, portanto, induz um isomorfismo $e_{xn}\colon H_n(U, U - x) \to H_n(X, X - x)$. Se $s_X\colon X \to \widetilde{X}$ é uma orientação de X então a aplicação $s_U\colon U \to \widetilde{U}$ dada por $s_U(x) = e_{xn}^{-1}(s_X(x))$ para todo $x \in U$ é uma orientação de U, à qual denominamos, com certo abuso de terminologia, **restrição da orientação** s_X de X a U.

Um homeomorfismo $h\colon X \to X$ em uma variedade X induz um homeomorfismo $\widetilde{h}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ em seu fibrado orientado do seguinte modo. Dado $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ existe $x \in X$ tal que $\widetilde{x}$ é um gerador do grupo $H_n(X, X-x)$. A aplicação $h_x\colon (X, X-x) \to (X, X-h(x))$ definida por h é um homeomorfismo e, portanto, induz um isomorfismo $h_{xn}\colon H_n(X, X - x) \to H_n(X, X - h(x))$. Definimos $\widetilde{h}(\widetilde{x}) = h_{xn}(\widetilde{x})$. O fato de $\widetilde{h}$ ser bijetora segue de sua construção, e sua continuidade segue de $\widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to X$ ser um homeomorfismo local e da comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{h}"] \arrow[d, "\widetilde{p}"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "\widetilde{p}"] \\
X \arrow[r, "h"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Suponhamos agora que X é uma variedade orientável conexa e seja $s_X\colon X \to \widetilde{X}$ uma orientação de X. Vimos na demonstração do teorema (1.15) que $\mathrm{Im}(s_X)$ e $\mathrm{Im}(-s_X)$ são abertos disjuntos de $\widetilde{X}$ cuja união é $\widetilde{X}$. Portanto $\mathrm{Im}(\widetilde{h}\circ s_X)\cap\mathrm{Im}(s_X)$ e $\mathrm{Im}(\widetilde{h}\circ s_X)\cap\mathrm{Im}(-s_X)$ são abertos disjuntos de $\mathrm{Im}(\widetilde{h}\circ s_X)$ cuja união é $\mathrm{Im}(\widetilde{h}\circ s_X)$, que é conexo (pois X é conexo), de sorte que ocorre apenas uma das possibilidades abaixo:

1) $\mathrm{Im}(\widetilde{h}\circ s_X)\cap\mathrm{Im}(-s_X)=\emptyset$ e, neste caso, $\mathrm{Im}(\widetilde{h}\circ s_X)\subset\mathrm{Im}(s_X)$;

2) $\mathrm{Im}(\widetilde{h}\circ s_X)\cap\mathrm{Im}(s_X)=\emptyset$ e, neste caso, $\mathrm{Im}(\widetilde{h}\circ s_X)\subset\mathrm{Im}(-s_X)$.

Acontece que dado $x\in X$ temos que $\widetilde{h}(s_X(x))=h_{xn}(s_X(x))$ é um dos geradores de $H_n(X,X-h(x))$ de modo que ou $\widetilde{h}(s_X(x))=s_X(h(x))$ ou $\widetilde{h}(s_X(x))=-s_X(h(x))$. Assim, ou

$$\widetilde{h}\circ s_X(x)=s_X\circ h(x),\ \text{para todo}\, x\in X;$$

ou

$$\widetilde{h}\circ s_X(x)=-s_X\circ h(x),\ \text{para todo}\, x\in X.$$

No primeiro caso dizemos que $h\colon X\to X$ é um homeomorfismo que **preserva orientação** e no segundo, que **reverte orientação**.

Exemplo 1.16. Seja X uma variedade conexa não orientável. O homeomorfismo $\widetilde{h}\colon\widetilde{X}\to\widetilde{X}$ dado por $\widetilde{h}(\widetilde{x})=-\widetilde{x}$ para todo $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$, reverte orientação. Seja $s_{\widetilde{X}}\colon\widetilde{X}\to\widetilde{\widetilde{X}}$ a orientação canônica de $\widetilde{X}$. Então o homeomorfismo $\widetilde{\widetilde{h}}\colon\widetilde{\widetilde{X}}\to\widetilde{\widetilde{X}}$ induzido por $\widetilde{h}$ é tal que

$$\widetilde{\widetilde{h}}(s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}))=\widetilde{h}_{\widetilde{x}n}(s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x})),\ \text{para todo}\,\widetilde{x}\in\widetilde{X},\tag{1.17}$$

onde $\widetilde{h}_x\colon(\widetilde{X},\widetilde{X}-\widetilde{x})\to(\widetilde{X},\widetilde{X}-\widetilde{h}(\widetilde{x}))$ é definida por $\widetilde{h}$ e $\widetilde{h}_{xn}$ é o isomorfismo induzido em homologia. Dado $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$, lembremos que $s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x})$ é definido, de acordo com o diagrama

$$(\widetilde{X},\widetilde{X}-\widetilde{x})\overset{\widetilde{e}}{\supset}(\widetilde{U},\widetilde{U}-\widetilde{x})\overset{\widetilde{p}_{\widetilde{U}}}{\to}(U,U-x)\overset{e}{\subset}(X,X-x),$$

por $s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x})=\widetilde{e}_n\circ(\widetilde{p}_{\widetilde{U}})_n^{-1}\circ e_n^{-1}(\widetilde{x})$, onde $x=\widetilde{p}(\widetilde{x})$, U é uma vizinhança distinguida de x, $\widetilde{U}$ é a componente conexa de $\widetilde{p}^{-1}(U)$ que contém $\widetilde{x}$ e $\widetilde{p}_{\widetilde{U}}$ é definida por $\widetilde{p}$ (1.13). Como $\widetilde{p}(\widetilde{h}(\widetilde{x}))=x$, tomando $\widetilde{V}=\widetilde{h}(\widetilde{U})$ temos que $\widetilde{V}$ é a componente conexa de $\widetilde{p}^{-1}(U)$ que contém $\widetilde{h}(\widetilde{x})$. Assim temos o seguinte diagrama

$$(\widetilde{X},\widetilde{X}-\widetilde{h}(\widetilde{x}))\overset{\widetilde{\ell}}{\supset}(\widetilde{V},\widetilde{V}-\widetilde{h}(\widetilde{x}))\overset{\widetilde{p}_{\widetilde{V}}}{\to}(U,U-x)\overset{e}{\subset}(X,X-x).$$

Agora da comutatividade do digrama

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{V},\widetilde{V}-\widetilde{h}(\widetilde{x})) \arrow[r, "\widetilde{\ell}"] & (\widetilde{X},\widetilde{X}-\widetilde{h}(\widetilde{x})) \\
(\widetilde{U},\widetilde{U}-\widetilde{x}) \arrow[u, "\widetilde{h}"] \arrow[r, "\widetilde{e}"'] & (\widetilde{X},\widetilde{X}-\widetilde{x}) \arrow[u, "\widetilde{h}_{\widetilde{x}}"']
\end{tikzcd}$$

segue que $\widetilde{\ell}=\widetilde{h}_{\widetilde{x}}\circ\widetilde{e}\circ\widetilde{h}^{-1}$. E da comutatividade de

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{U},\widetilde{U}-\widetilde{x}) \arrow[r, "\widetilde{h}"] \arrow[d, "\widetilde{p}_{\widetilde{U}}"'] & (\widetilde{V},\widetilde{V}-\widetilde{h}(\widetilde{x})) \arrow[dl, "\widetilde{p}_{\widetilde{V}}"] \\
(U,U-x) &
\end{tikzcd}$$

segue que $\widetilde{p}_{\widetilde{V}} = \widetilde{p}_{\widetilde{U}} \circ \widetilde{h}^{-1}$. Assim

$$\begin{aligned} s_X(\widetilde{h}(\widetilde{x})) &= \widetilde{\ell}_n \circ (\widetilde{p}_{\widetilde{V}})_n^{-1} \circ e_n^{-1}(\widetilde{h}(\widetilde{x})) \\ &= \widetilde{\ell}_n \circ (\widetilde{p}_{\widetilde{V}})_n^{-1} \circ e_n^{-1}(-\widetilde{x}) \\ &= -\widetilde{\ell}_n \circ (\widetilde{p}_{\widetilde{V}})_n^{-1} \circ e_n^{-1}(\widetilde{x}) \\ &= -(\widetilde{h}_{\widetilde{x}} \circ \widetilde{e} \circ \widetilde{h}^{-1})_n \circ (\widetilde{p}_{\widetilde{U}} \circ \widetilde{h}^{-1})_n^{-1} \circ e_n^{-1}(\widetilde{x}) \\ &= -\widetilde{h}_{\widetilde{x}n} \circ \widetilde{e}_n \circ \widetilde{p}_{\widetilde{U}} \circ e_n^{-1}(\widetilde{x}) \\ &= -\widetilde{h}_{\widetilde{x}n}(s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}))1.17 \\ &= -\widetilde{\widetilde{h}}(s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x})). \end{aligned}$$

Portanto

$$\widetilde{\widetilde{h}}(s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x})) = -s_{\widetilde{X}}(\widetilde{h}(\widetilde{x})), \text{ para todo } \widetilde{x} \in \widetilde{X},$$

ou seja, $\widetilde{h}$ é um homeomorfismo que reverte orientação.

Seja X uma n-variedade, γ um laço em X e $\widetilde{\gamma}$ um levantamento de γ através do recobrimento duplo orientado $\widetilde{p}\colon X \to \widetilde{X}$ de X. Como γ é um laço temos que ambos $\widetilde{\gamma}(0)$ e $\widetilde{\gamma}(1)$ são geradores de $H_n(X, X - \gamma(0))$. Se $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\gamma}(0)$, em outras palavras, se $\widetilde{\gamma}$ é um laço, dizemos que γ é um laço em X que **preserva orientação**. Se, pelo contrário, $\widetilde{\gamma}(1) = -\widetilde{\gamma}(0)$ ($\widetilde{\gamma}$ não é um laço) dizemos que γ é um laço em X que **reverte orientação**.

Teorema 1.18. *Uma variedade é orientável se, e somente se, todos os seus laços preservam orientação.*

Demonstração. Sejam X uma variedade e $\widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to X$ seu recobrimento duplo orientado.

Suponhamos que X seja orientável e seja $s_X\colon X \to \widetilde{X}$ uma orientação de X. Dado um laço γ em X temos que $s_X \circ \gamma$ é um levantamento de γ pois

$$\widetilde{p} \circ (s_X \circ \gamma) = (\widetilde{p} \circ s_X) \circ \gamma = id_X \circ \gamma = \gamma.$$

Como s_X é contínua segue que $s_X \circ \gamma(0) = s_X \circ \gamma(1)$. Logo γ preserva orientação.

Reciprocamente, suponhamos que todos os laços em X preservam orientação. Para todo $x \in X$ seja γ_x um laço baseado em x e $\widetilde{\gamma}_x$ um levantamento de γ_x através de $\widetilde{p}$. Definimos $s_X\colon X \to \widetilde{X}$ por $s_X(x) = \widetilde{\gamma}_x(0)$ para todo $x \in X$. Então s_X é contínua pois, por hipótese, $\widetilde{\gamma}_x(0) = \widetilde{\gamma}_x(1)$. Além disso, para todo $x \in X$ temos que

$$\widetilde{p}(s_X(x)) = \widetilde{p}(\widetilde{\gamma}_x(0)) = \gamma(0) = x.$$

Ou seja, s_X é uma seção de $\widetilde{p}$ e, portanto, uma orientação de X. □

Definição 1.19. Uma aplicação $f\colon X \to Y$ de uma variedade X em um espaço topológico Y é uma **aplicação não orientável** se existe um laço que reverte orientação em X cuja imagem por f é um laço contrátil em Y. Caso contrário, dizemos que é uma **aplicação orientável**.

Observação 1.20. A definição acima concorda com a definição usual de orientabilidade de aplicação [BS01, Definição 2.1, p. 54], onde também Y é uma n-variedade.

Exemplo 1.21. Se X é uma variedade orientável, então toda aplicação $f\colon X \to Y$ é orientável. Em particular o recobrimento duplo orientado $\widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to X$ é orientável.

Exemplo 1.22. Consideremos o toro $\mathbb{T}^2$ como o espaço quociente do quadrado unitário identificando $(s,0)$ com $(s,1)$ e $(0,t)$ com $(1,t)$. Consideremos ainda a garrafa de Klein $\mathbb{K}$ como o espaço quociente do quadrado unitário identificando $(s,0)$ com $(s,1)$ e $(0,t)$ com $(1,1-t)$. Seja $\widetilde{p}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{K}$ dada por

$$\widetilde{p}([(s,t)]) = \begin{cases} [(2s,t)] & \text{se } 0 \le s \le 1/2, \\ [(2s-1,t)] & \text{se } 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

Então $\widetilde{p}$ é o recobrimento duplo orientado de $\mathbb{K}$. Consideremos agora os laços $\beta(s) = [(s,0)]$ e $\gamma(t) = [(0,t)]$ em $\mathbb{K}$. Então o grupo fundamental da garrafa de Klein é gerado por $[\beta]$ e $[\gamma]$. O caminho $\widetilde{\beta}(s) = [(s/2,0)]$ no toro é um levantamento de β que não é um laço. Logo β reverte orientação. Por outro lado, $\widetilde{\gamma}(t) = [(0,t)]$ é um levantamento de γ que é um laço. Logo γ preserva orientação.

Seja $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{T}^2$ definida por $f([(s,t)]) = [(s,0)]$. Então $f \circ \beta(s) = f([(s,0)]) = [(s,0)]$ é um dos geradores do grupo fundamental do toro. Por outro lado, $f \circ \gamma(t) = f([(0,t)]) = [(0,0)]$. Como $\beta\gamma\beta^{-1}\gamma$ é contrátil (relação dos geradores), qualquer elemento do grupo fundamental da garrafa de Klein pode ser representado na forma $[\beta]^m[\gamma]^n$ e $f_\#([\beta]^m[\gamma]^n) = [f\circ\beta]^m[f\circ\gamma]^n = [f\circ\beta]^m$, que não é trivial a menos que m seja zero. Agora se $\mathbb{T}^2/\sim$ é o toro pinçado, onde o meridiano $[(0,t)]$ do toro foi identificado a um ponto, e $p\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2/\sim$ é a identificação então $p\circ f$ leva β no laço que representa o gerador do grupo fundamental do toro pinçado. Portanto um laço na garrafa de Klein que cuja imagem por $p \circ f$ é contrátil deve ser homotópico a γ^n, para algum n, e todos estes preservam orientação.

Exemplo 1.23. Sejam $D_T \subset \mathbb{T}^2$ e $D_P \subset \mathbb{P}^2$, discos fechados no toro e no plano projetivo, respectivamente, e consideremos a soma conexa $\mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2$ obtida da identificação entre os pontos das fronteiras de D_T e D_P através de um homeomorfismo $h\colon \partial D_T \to \partial D_P$. Como ∂D_P é fechado em $\mathbb{P}^2 - \mathrm{int}D_P$ e como D_T é um subconjunto contrátil do tipo ENR, temos que a aplicação $id \circ h^{-1}\colon \partial D_P \to D_T$, onde $id\colon \mathbb{T}^2 - \mathrm{int}D_T \to \mathbb{T}^2 - \mathrm{int}D_T$ é a identidade, se estende continuamente a uma aplicação $f'\colon \mathbb{P}^2 - \mathrm{int}D_P \to D_T$ [Lim06, Corolário 1, p.18]. Consideremos $f\colon \mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2 \to \mathbb{T}^2$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} id(x) & \text{se } x \in \mathbb{T}^2 - \mathrm{int}D_T, \\ f'(x) & \text{se } x \in \mathbb{P}^2 - \mathrm{int}D_P. \end{cases}$$

A aplicação f está bem definida, pois $\partial D_T = id(\partial D_T) = id(h^{-1}(\partial D_P)) = f'(\partial D_P)$, e é uma extensão contínua de id à soma conexa $\mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2$. A soma conexa $\mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2$ possui um laço que reverte orientação cuja imagem por f está contida no subconjunto contrátil D_T. Seja $\mathbb{T}^2/\sim$ o toro cum um dos meridianos identificado a um único ponto, isto é, o toro pinçado, e seja $p\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2/\sim$ a aplicação de identificação. Então a aplicação $p\circ f\colon \mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2 \to \mathbb{T}^2/\sim$ leva um laço que reverte orientação em laço contrátil e, portanto, é não orientável.

Não faremos a demonstração da próxima proposição pois se trata de um resultado clássico [Mas80, Teorema 2.1, p. 202] e que usaremos apenas a propósito de definição.

Proposição 1.24 (**e Definição**). *Sejam $(X, s_X\colon X \to \widetilde{X})$ uma n-variedade orientada e $K \subset X$ um compacto. Então existe um único elemento $o_K \in H_n(X, X-K)$ tal que $i_{xn}(o_K) = s_X(x)$ para todo $x \in K$, onde $i_{xn}\colon H_n(X,X-K) \to H_n(X,X-x)$ é o homomorfismo induzido pela inclusão $(X,X-K) \overset{i_x}{\subset} (X,X-x)$. Ao elemento o_K denominamos **classe fundamental** de X em K.*

Observação 1.25. Quando o compacto K na definição acima é conexo então o_K é um gerador de $H_n(X, X-K)$ [Dol72, corolário 3.4, p.260] e, neste caso, a inclusão $(X, X-K) \overset{i}{\subset} (X, X-x)$ induz isomorfismo em homologia para todo $x \in K$.

Definição 1.26. Sejam $(X, s_X \colon X \to \widetilde{X})$ uma n-variedade orientada, Y um espaço localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f \colon X \to Y$ uma aplicação tais que $f^{-1}(y_0)$ é compacto em X. A aplicação $f' \colon (X, X - f^{-1}(y_0)) \to (Y, Y - y_0)$, definida por f, induz um homomorfismo $f'_n \colon H_n(X, X - f^{-1}(y_0); \mathbb{Z}) \to H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z})$. O **grau local** de f em y_0, denotado por $\mathrm{gr}_{y_0}(f)$, é o inteiro definido pela equação

$$f'_n(o_{f^{-1}(y_0)}) = \mathrm{gr}_{y_0}(f)\nu,$$

onde ν é um gerador de $H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z})$.

Observemos que o grau local está definido para todo ponto do espaço Y se este for uma n-variedade e a aplicação f for própria. Neste caso podemos considerar a associação $Y \ni y \mapsto \mathrm{gr}_y(f) \in \mathbb{Z}$. Se Y for uma variedade orientável então tal associação é contínua. Se, além disso, Y for conexa então podemos definir um grau global de f. É o que mostra o próximo resultado.

Proposição 1.27. *Sejam $(X, s_X \colon X \to \widetilde{X})$ e $(Y, s_Y \colon Y \to \widetilde{Y})$ n-variedades orientadas com Y conexa e $f \colon X \to Y$ uma aplicação própria. Então o grau local de f é constante, isto é, é o mesmo para todo $y \in Y$.*

Demonstração. Como f é própria, o grau local de f está definido para todo $y \in Y$. Seja $g \colon Y \to \mathbb{Z}$ dada por $g(y) = \mathrm{gr}_y(f)$. Se mostrarmos que g é contínua, então da conexidade de Y seguirá que g é constante ($\mathbb{Z}$ com a topologia discreta), o que termina a demonstração. Mostremos então que g é contínua. Para tanto basta mostrar que g é localmente constante em cada ponto de Y.

Seja $y \in Y$ e $B \subset Y$ uma n-bola em Y cujo interior contém y. Como B é compacto e f é própria temos que $f^{-1}(B)$ é compacto em X que contém $f^{-1}(y)$. Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & (X, X - f^{-1}(y)) \arrow[dd, "f''"] \arrow[dr, "f'"] & \\
(X, X - f^{-1}(B)) \arrow[ur, "i_y"] \arrow[dr, "f'''"'] & & (Y, Y - y) \\
 & (Y, Y - B) \arrow[ur, "j_y"'] &
\end{tikzcd}$$

onde i_y e j_y são inclusões e f', f'' e f''' são definidas por f. Então temos o seguinte diagrama comutativo em homologia

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(X, X - f^{-1}(y)) \arrow[dd, "f''_n"] \arrow[dr, "f'_n"] & \\
H_n(X, X - f^{-1}(B)) \arrow[ur, "i_{yn}"] \arrow[dr, "f'''_n"'] & & H_n(Y, Y - y). \\
 & H_n(Y, Y - B) \arrow[ur, "j_{yn}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por definição temos que $f'_n(o_{f^{-1}(y)}) = \mathrm{gr}_y(f)s_Y(y)$, onde $s_Y : Y \to \widetilde{Y}$ é uma orientação de Y. E como $j_{yn} \circ f''_n = f'_n$ temos que

$$j_{yn} \circ f''_n(o_{f^{-1}(y)}) = \mathrm{gr}_y(f)s_Y(y). \tag{1.28}$$

Agora como $i_{yn}(o_{f^{-1}(B)}) = o_{f^{-1}(y)}$ temos que

$$f''_n(o_{f^{-1}(y)}) = f''_n(i_{yn}(o_{f^{-1}(B)})) = f''_n \circ i_{yn}(o_{f^{-1}(B)}) = f'''_n(o_{f^{-1}(B)}).$$

Substituindo esta última igualdade em (1.28) obtemos

$$j_{yn}(f'''_n(o_{f^{-1}(B)})) = \mathrm{gr}_y(f)s_Y(y). \tag{1.29}$$

Por outro lado, da definição de classe fundamental de um compacto, temos que

$$j_{yn}(\mathrm{gr}_y(f)o_B) = \mathrm{gr}_y(f)j_{yn}(o_B) = \mathrm{gr}_y(f)s_Y(y). \tag{1.30}$$

De (1.29) e (1.30) segue que $f'''_n(o_{f^{-1}(B)}) = \mathrm{gr}_y(f)o_B$. Podemos aplicar o mesmo raciocínio a qualquer outro ponto da bola B. Assim concluímos que

$$f'''_n(o_{f^{-1}(B)}) = \mathrm{gr}_y(f)o_B, \text{ para todo } y \in B. \tag{1.31}$$

Por outro lado, se $y \in B$, então $Y - B$ é um retrato por deformação de $Y - y$, de modo que a inclusão $j_y \colon (Y, Y - B) \to (Y, Y - y)$ induz isomorfismo em homologia. E como $j_{yn}(o_B) = s_Y(y)$ é um gerador de $H_n(Y, Y - y)$ segue que o_B é um gerador de $H_n(Y, Y - B)$. Logo existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f'''_n(o_{f^{-1}(B)}) = ko_B. \tag{1.32}$$

De (1.31) e (1.32) resulta que $\mathrm{gr}_y(f) = k$ para todo $y \in B$. □

Assim quando X e Y são variedades orientáveis com Y conexa e $f \colon X \to Y$ é uma aplicação própria o grau local de f em qualquer (portanto todo) ponto de Y é denominado **grau** de f, denotado por $\mathrm{gr}(f)$. Isto generaliza a noção de grau de Brower para aplicações entre variedades compactas conexas orientáveis.

Capítulo 2

Teoria de Nielsen de raízes

Neste capítulo estabelemos o básico da teoria de Nielsen de raízes sob a qual se inserem os resultados principais. Começamos definindo e analisando as propriedades dos números de Nielsen e de Reidemeister. Em seguida tratamos da noção de índice de raízes. Depois fazemos uma breve pausa na teoria para ilustrar com exemplos a teoria desenvolvida até ali, e finalizamos com as definições de multiplicidade e grau absoluto.

2.1 Número de Nielsen

Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação. Uma **raiz** de f em $y_0 \in Y$ é um elemento da pré-imagem $f^{-1}(y_0)$ de y_0 por f. Em teoria de raízes estamos interessados em encontrar um limitante inferior para o número de raízes de f em y_0 que seja invariante por homotopias de f e realizável no sentido de existir uma aplicação homotópica a f que tenha exatamente um tal limitante como quantidade de raízes em y_0. Neste sentido podemos considerar a seguinte definição:

Definição 2.1. Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos e $y_0 \in Y$. O **número mínimo de raízes** de f em y_0, $\mathrm{MR}(f, y_0)$, é o mínimo do conjunto

$$\{\#g^{-1}(y_0) \,|\, g\colon X \to Y \text{ é homotópica a } f\}.$$

Além das propriedades que acabamos de expressar de um tal limitante, esperamos que seja possível encontrar técnicas para calculá-lo. A definição acima não parece nos contemplar neste caso.

O restante desta seção segue o seguinte roteiro: agrupar as raízes de f em y_0 em classes através de uma relação de equivalência no conjunto das raízes de f em y_0; definir a noção de essencialidade de uma classe e finalmente definir um limitante inferior para o número de raízes de f em y_0 como sendo o número de classes essenciais. O teorema (3.19) mostra que um tal limitante satisfaz as condições expressas acima.

Definição 2.2. Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Duas raízes $x_0, x_1 \in f^{-1}(y_0)$ de f em y_0 são **Nielsen equivalentes**, ou apenas **equivalentes**, se existe um caminho γ em X de x_0 a x_1 tal que o laço $f \circ \gamma$ em Y é homotópico ao laço constante y_0.

A equivalência de raízes de f em y_0 é uma relacão de equivalência em $f^{-1}(y_0)$. Com efeito temos o seguinte:

1) O laço em X constante em $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ é levado por f no laço em Y constante em y_0;

2) Se $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ está relacionada a $x_1 \in f^{-1}(y_0)$ pelo caminho γ então x_1 está relacionada a x_0 pelo caminho γ^{-1} pois

$$[f \circ \gamma^{-1}] = f_\#[\gamma^{-1}] = f_\#[\gamma]^{-1} = (f_\#[\gamma])^{-1} = ([f \circ \gamma])^{-1} = [y_0]^{-1} = [y_0];$$

3) Se $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ está relacionada a $x_1 \in f^{-1}(y_0)$ pelo caminho γ_0 e se x_1 está relacionada a $x_2 \in f^{-1}(y_0)$ pelo caminho γ_1 então x_0 está relacionada a x_2 pelo caminho $\gamma_0\gamma_1$ pois

$$[f \circ \gamma_0\gamma_1] = [f \circ \gamma_0][f \circ \gamma_1] = [y_0][y_0] = [y_0].$$

Às classes de equivalência desta relação chamamos **classes de raízes de Nielsen**, ou apenas **classe de raízes**, de f em y_0 e ao conjunto das classes de raízes de f em y_0 denotamos por $f^{-1}(y_0)/\mathcal{N}$.

Definição 2.3. Sejam $\{f_t\colon X \to Y\}$ uma homotopia e $y_0 \in Y$. Uma raiz x_0 de f_0 em y_0 e uma raiz x_1 de f_1 em y_0 estão **$\{f_t\}$-relacionadas**, se existe um caminho γ em X de x_0 a x_1 tal que o laço $\{t \mapsto f_t(\gamma(t))\}$ em Y é homotópico ao laço constante y_0. Neste caso, dizemos que x_0 está $\{f_t\}$-relacionada a x_1 pelo caminho γ ou ainda que γ relaciona x_0 a x_1.

Quando o contexto for claro, diremos apenas relacionada em vez de $\{f_t\}$-relacionada. A $\{f_t\}$-relação é simétrica no seguinte sentido: se $x_0 \in f_0^{-1}(y_0)$ está $\{f_t\}$-relacionada a $x_1 \in f_1^{-1}(y_0)$ então x_1 está $\{f_{(1-t)}\}$-relacionada a x_0. De fato, se x_0 está relacionada a x_1 pelo caminho γ então o laço $\{t \mapsto f_{1-t}(\gamma^{-1}(t))\}$ é homotópico ao laço constante em y_0 pois é o inverso do laço $\{t \mapsto f_t(\gamma(t))\}$ e este é, por hipótese, homotópico ao laço constante em y_0. Observemos também que uma raiz x_0 de $f\colon X \to Y$ é equivalente a outra raiz x_1 se e somente se x_0 está relacionada a x_1 pela homotopia constante em f.

Proposição 2.4. *Sejam $\{f_t\colon X \to Y\}$ uma homotopia e $y_0 \in Y$. Se uma raiz em uma classe de Nielsen α_0 de f_0 está $\{f_t\}$-relacionada a uma raiz em uma classe de Nielsen α_1 de f_1, então toda raiz em α_0 está $\{f_t\}$-relacionada a toda raiz em α_1.*

Demonstração. Sejam $x_0 \in \alpha_0$ e $x_1 \in \alpha_1$ duas raízes $\{f_t\}$-relacionadas por um caminho γ. Seja $x_0' \in \alpha_0$ equivalente a x_0 pelo caminho γ'. Basta mostrarmos que x_0' está relacionada a x_1. Seja $F\colon X \times \mathbf{I} \to Y$ a homotopia $\{f_t\}$ e consideremos o caminho β em $X \times \mathbf{I}$ dado por

$$\beta(t) = \begin{cases} (\gamma'(2t), 0) & \text{se } 0 \le t \le 1/2 \\ (\gamma(2t-1), 2t-1) & \text{se } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Então $\beta(0) = (\gamma'(0), 0) = (x_0', 0)$ e $\beta(1) = (\gamma(1), 1) = (x_1, 1)$. Além disso

$$\begin{aligned} F(\beta(t)) &= \begin{cases} F(\gamma'(2t), 0), & 0 \le t \le 1/2, \\ F(\gamma(2t-1, 2t-1)), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_0(\gamma'(2t)), & 0 \le t \le 1/2 \\ f_{2t-1}(\gamma(2t-1)), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Tanto $f_0(\gamma(2t))$, $0 \le t \le 1/2$, quanto $f_{2t-1}(\gamma(2t-1))$, $1/2 \le t \le 1$, são laços homotópicos a y_0. Logo $F \circ \beta$ também é homotópico a y_0, ou seja, $(x_0', 0)$ é uma raiz de F equivalente a $(x_1, 1)$. Podemos "decompor" β em suas componentes, $\beta(t) = (\beta_X(t), \beta_{\mathbf{I}}(t))$ onde $\beta_X\colon \mathbf{I} \to X$ e $\beta_{\mathbf{I}}\colon \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ são definidas, respectivamente, por

$$\beta_X(t) = \begin{cases} \gamma'(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta_{\mathbf{I}}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1/2 \\ 2t-1, & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Sendo um caminho em $\mathbf{I}$ de 0 a 1, $\beta_{\mathbf{I}}$ é homotópico à identidade $id_{\mathbf{I}}\colon \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ e portanto β é homotópico ao caminho $(\beta_X, id_{\mathbf{I}})$ em $X \times \mathbf{I}$. Deste modo, $F \circ (\beta_X, id_{\mathbf{I}})$ é homotópico a y_0, ou seja, o laço $\{t \mapsto f_t(\beta_X(t))\}$ é homotópico a y_0 e β_X é um caminho de x_0' a x_1, o que mostra que x_0' está relacionada a x_1. □

A proposição acima nos diz que a $\{f_t\}$-relação entre raízes de f_0 e f_1 induz uma relação entre as classes de raízes de f_0 e f_1, a saber, uma classe α_0 de f_0 está relacionada com uma classe α_1 de f_1 se alguma (e portanto toda) raiz em α_0 está relacionada com alguma (e portanto toda) raiz em α_1. Pode ocorrer, no entanto, que uma classe de raízes de f_0 não esteja relacionada a nenhuma classe de raízes de f_1. Por isso introduzimos o conceito de essencialidade de uma classe.

Definição 2.5. Uma classe de raízes de uma aplicação $f\colon X \to Y$ em $y_0 \in Y$ é essencial se para toda homotopia $\{f_t\colon X \to Y\}$ começando em f esta classe está $\{f_t\}$-relacionada a alguma classe de raízes de f_1.

Definição 2.6. O número de classes de raízes essenciais de uma aplicação $f\colon X \to Y$ em $y_0 \in Y$ é chamado número de Nielsen de raízes de f em y_0, ou somente número de Nielsen de f em y_0 e é denotado por $\mathrm{NR}(f, y_0)$.

As duas definições acima tem suas análogas para aplicações próprias.

Definição 2.7. Uma classe de raízes de uma aplicação própria $f\colon X \to Y$ em $y_0 \in Y$ é propriamente essencial se para toda homotopia própria $\{f_t\colon X \to Y\}$ começando em f esta classe $\{f_t\}$-relacionada com a alguma classe de raízes de f_1.

Definição 2.8. O número de classes de raízes propriamente essenciais de uma aplicação própria $f\colon X \to Y$ em $y_0 \in Y$ é chamado número próprio de Nielsen de raízes de f em y_0, ou somente número próprio de Nielsen de f em y_0 e é denotado por $\mathrm{PNR}(f, y_0)$.

Sejam X é um espaço conexo e localmente conexo por caminhos, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo e $f\colon X \to Y$ uma aplicação. Sabemos da teoria de espaços de recobrimento [Mas87, Teorema 5.1, p.156 e Teorema 10.2, p.175] que existe um recobrimento $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$ e um levantamento de $\widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}$ de f através de $\widehat{q}$ tais que para todo $x \in X$, a imagem do grupo fundamental $\pi(\widehat{Y}, \widehat{f}(x))$ pelo homomorfismo induzido por $\widehat{q}$ é igual à imagem do grupo fundamental $\pi(X, x)$ pelo homomorfismo induzido por f, isto é,

$$\widehat{q}_{\#}\pi(\widehat{Y}, \widehat{f}(x)) = f_{\#}\pi(X, x), \text{ para todo } x \in X.$$

Além disso, $\widehat{f}_{\#}\colon \pi(X, x) \to \pi(\widehat{Y}, \widehat{f}(x))$ é um homomorfismo sobrejetor. Às aplicações $\widehat{q}$ e $\widehat{f}$ obtidas dessa forma denominamos **recobrimenteo de Hopf** e **levantamento de Hopf** para f. O recobrimento de Hopf $\widehat{q}$ para f é único a menos de isomorfismo de espaços de recobrimento, e é o recobrimento de Hopf para toda aplicação homotópica a f. O levantamento de Hopf para f é único a menos de uma transformação de recobrimento, ou seja, fixados $x \in X$ e $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(f(x))$ existe um único levantamento $\widehat{f}$ de f através de $\widehat{q}$ tal que $\widehat{f}(x) = \widehat{y}$.

Observação 2.9. Até o final desta subseção (Número de Nielsen) e na próxima (Número de Reidemeister), X será sempre um espaço conexo e localmente conexo por caminhos e Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo, de modo que uma aplicação $f\colon X \to Y$ admita recobrimento e levantamento de Hopf.

Podemos caracterizar a $\{f_t\}$-relação através do recobrimento e do levantamento de Hopf.

Proposição 2.10. *Sejam* $Xf\colon X \to Y$ *uma aplicação e* $y_0 \in Y$. *Sejam ainda* $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$ *e* $\widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}$ *um recobrimento e um levantamento de Hopf para* f, $\{f_t\colon X \to Y\}$ *uma homotopia começando em* f *e* $\{\widehat{f}_t\colon X \to \widehat{Y}\}$ *um levantamento de* $\{f_t\}$ *através de* $\widehat{q}$. *Então uma raiz* x_0 *de* $f = f_0$ *em* y_0 *está* $\{f_t\}$*-relacionada com uma raiz* x_1 *de* f_1 *em* y_0 *se e somente se* $\widehat{f}_0(x_0) = \widehat{f}_1(x_1)$.

Demonstração. Suponhamos que x_0 está relacionada com x_1 e seja γ um caminho relacionando-as, isto é, um caminho de x_0 a x_1 tal que o laço $t \mapsto f_t(\gamma(t))$ é homotópico a y_0. O caminho $\{t \mapsto \widehat{f}_t(\gamma(t))\}$, em $\widehat{Y}$, é um levantamento de $\{t \mapsto f_t(\gamma(t))\}$ através de $\widehat{q}$ e portanto deve ser homotópico a um caminho constante em $\widehat{Y}$ e, em particular, deve ser um laço. Logo $\widehat{f}_0(x_0) = \widehat{f}_0(\gamma(0)) = \widehat{f}_1(\gamma(1)) = \widehat{f}_1(x_1)$.

Reciprocamente, suponhamos que $\widehat{f}_0(x_0) = \widehat{f}_1(x_1)$. Seja γ um caminho em X de x_0 a x_1. Então o caminho $\{t \mapsto \widehat{f}_t(\gamma(t))\}$ é de fato um laço em $\widehat{Y}$ com ponto base $\widehat{y} = \widehat{f}_0(x_0) = \widehat{f}_1(x_1)$ de modo que sua projeção β, por $\widehat{q}$, em Y, é um laço baseado em y_0. Assim

$$[\beta] = \widehat{q}_\#([\{t \mapsto \widehat{f}_t(\gamma(t))\}]) \in \widehat{q}_\#\pi(\widehat{Y}, \widehat{f}_0(x_0)) = (f_0)_\#\pi(X, x_0).$$

Então β é homotópico a $f_0 \circ \gamma_0$ para algum laço γ_0 em X com ponto base x_0. Consideremos $H\colon \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to Y$ definida por

$$H(t,s) = \begin{cases} f_{ts} \circ \gamma_0(1-2t) & \text{se } 0 \le t \le 1/2 \\ f_{(1-t)s+2t-1} \circ \gamma(2t-1) & \text{se } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

A aplicação H está bem definida e é contínua pois as duas expressões que a definem valem $f_{s/2}(x_0)$ para $t = 1/2$ e $s \in \mathbf{I}$. Para todo $s \in \mathbf{I}$ temos que

$$H(0,s) = f_0 \circ \gamma_0(1) = f_0(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad H(1,s) = f_1 \circ \gamma(1) = f_1(x_1) = y_0.$$

Além disso, para todo $t \in \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \begin{cases} f_0 \circ \gamma_0(1-2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ f_{2t-1} \circ \gamma(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (f_0 \circ \gamma_0)^{-1}(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \\ &= (f_0 \circ \gamma_0)^{-1}\beta(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H(t,1) &= \begin{cases} f_t \circ \gamma_0(1-2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ f_t \circ \gamma(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_t \circ \gamma_0^{-1}(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ f_t \circ \gamma(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \\ &= f_t \circ \gamma_0\gamma(t). \end{aligned}$$

Com isso mostramos que os laços $(f_0 \circ \gamma_0)^{-1}\beta$ e $\{t \mapsto f_t(\gamma_0^{-1}\gamma(t))\}$ são homotópicos. Assim $\gamma_0^{-1}\gamma$ é um caminho em X de x_0 a x_1 tal que

$$[\{t \mapsto f_t(\gamma_0^{-1}\gamma(t))\}] = [(f_0 \circ \gamma_0)^{-1}\beta] = [f_0\gamma_0]^{-1}[\beta] = [y_0].$$

Logo x_0 está relacionada a x_1. $\square$

Observação 2.11. Tomando a homotopia $\{f_t\}$ constante em f temos como consequência imediata deste resultado que uma raiz x_0 de f em y_0 é equivalente a uma raiz x_1 de f em y_0 se e somente se $\widehat{f}(x_0) = \widehat{f}(x_1)$ e portanto as classes de Nielsen de f em y_0 são precisamente os subconjuntos não vazios de X da forma $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$ com $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$. Uma outra consequência desta proposição é a seguinte. Dada uma homotopia $\{f_t \colon X \to Y\}$, a relação entre as classes de raízes de f_0 e as classes de raízes de f_1 induzida pela $\{f_t\}$-relação entre raízes de f_0 e f_1 é biúnivoca, isto é, uma classe de raízes de f_0 está relacionada a no máximo uma classe de raízes de f_1 e uma classe de raízes de f_1 tem no máximo uma classe de raízes de f_0 a si relacionada. Isto porque $\alpha_0 \in f_0^{-1}(y_0)/\mathcal{N}$ e $\alpha_1 \in f_1^{-1}(y_0)/\mathcal{N}$ estão relacionadas se e somente se $\widehat{f_0}(\alpha_0) = \widehat{f_1}(\alpha_1)$, ou de outra maneira, se e somente se $\alpha_0 = \widehat{f_0}^{-1}(\widehat{y})$ e $\alpha_1 = \widehat{f_1}^{-1}(\widehat{y})$ para o mesmo $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$.

Também é possível caracterizarmos as classes de raízes essencias de uma aplicação através de um seu levantamento de Hopf.

Corolário 2.12. *Sejam $f \colon X \to Y$ uma aplicação, $y_0 \in Y$, $\widehat{q} \colon \widehat{Y} \to Y$ o recobrimento de Hopf para f e $\widehat{f} \colon X \to \widehat{Y}$ um levantamento de Hopf para f. Seja ainda $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$. Então $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$ é uma classe de raízes essencial se e somente se $\widehat{f_1}^{-1}(\widehat{y})$ é não vazio para toda homotopia $\{f_t \colon X \to Y\}$ começando em f.*

A $\{f_t\}$-relação entre as classe de raízes de f_0 e f_1 se restringe a uma bijeção entre os conjuntos das classes de raízes essenciais de f_0 e f_1.

Com o que foi exposto até aqui podemos concluir que se $f \colon X \to Y$ é uma aplicação (própria) entre espaços topológicos então número (próprio) de Nielsen $\mathrm{NR}(f, y_0)$ ($\mathrm{PNR}(f, y_0)$) de f em y_0 é um limitante inferior para o número de raízes na classe de homotopia (própria) de f e um invariante desta classe, ou seja, toda aplicação $g \colon X \to Y$ (propriamente) homotópica a f tem pelo menos $\mathrm{NR}(f, y_0)$ ($\mathrm{PNR}(f, y_0)$) raízes em y_0 e $\mathrm{NR}(g, y_0) = \mathrm{NR}(f, y_0)$ ($\mathrm{PNR}(g, y_0) = \mathrm{PNR}(f, y_0)$). Resumimos tudo isto no teorema a seguir.

Teorema 2.13. *Sejam $f \colon X \to Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. Então*

1. $\mathrm{NR}(f, y_0)$ *é um invariante homotópico de f e* $\mathrm{NR}(f, y_0) \leq \mathrm{MR}(f, y_0)$;
2. *se f é própria então* $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ *é um invariante propriamente homotópico de f e* $\mathrm{PNR}(f, y_0) \leq \mathrm{MR}(f, y_0)$;
3. *se f é própria então* $\mathrm{NR}(f, y_0) \leq \mathrm{PNR}(f, y_0)$.

Observemos que quando o domínio da aplicação f é compacto então $\mathrm{NR}(f, y_0) = \mathrm{PNR}(f, y_0)$. No exemplo (2.50) mostraremos um caso onde vale a desigualdade estrita $\mathrm{NR}(f, y_0) < \mathrm{PNR}(f, y_0)$, e o próximo exemplo mostra um caso onde $\mathrm{PNR}(f, y_0) < \mathrm{MR}(f, y_0)$.

Exemplo 2.14. Consideremos $n > 1$ e X o seguinte espaço

$$X = \{(s_1, \ldots, s_{n+1}, t) \in \mathbb{S}^n \times \mathbf{I} : s_{n+1} = 0 \text{ ou } t \in \{0, 1\}\}.$$

Seja $f \colon X \to \mathbb{S}^n$ dada por $f(\boldsymbol{s}, t) = \boldsymbol{s}$ para todo $(\boldsymbol{s}, t) \in X$. Notemos que f é uma aplicação própria. Como $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexo, segue que f tem uma única classe de raízes em $(1, 0, \ldots, 0)$ e, portanto, $\mathrm{NR}(f, y_0) = \mathrm{PNR}(f, y_0) \leq 1$.

Consideremos agora as aplicações $i_0, i_1 \colon \mathbb{S}^n \to X$ dadas, respectivamente, por

$$i_0(\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{s}, 0) \quad \text{e} \quad i_1(\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{s}, 1).$$

Então $f \circ i_0$ e $f \circ i_1$ são a identidade em $\mathbb{S}^n$. Se $g\colon X \to \mathbb{S}^n$ é uma aplicação qualquer, homotópica a f, então $g \circ i_0$ e $g \circ i_1$ são homotópicas à identidade em $\mathbb{S}^n$ e, portanto, existem $\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_1 \in \mathbb{S}^n$ tais que

$$g \circ i_0(\boldsymbol{s}_0) = (1, 0, \ldots, 0) = g \circ i_1(\boldsymbol{s}_1).$$

Logo $i_0(\boldsymbol{s}_0)$ e $i_1(\boldsymbol{s}_1)$ são duas raízes distintas de g no ponto $(1, 0, \ldots, 0)$. Deste modo temos que $\mathrm{MR}(f, y_0) \geq 2$.

O número (próprio) de Nielsen não é apenas um invariante homotópico. Em verdade é um invariante topológico no seguinte sentido.

Teorema 2.15. *Suponhamos que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

seja comutativo, onde g e h são homeomorfismos e f e f' são aplicações (próprias). Então g leva, bijetivamente, o conjunto das classes de raízes de f em $y_0 \in Y$ no conjunto das classes de raízes de f' em $h(y_0)$. Além disso, $g(\alpha)$ é uma classe (propriamente) essencial de f' se, e somente se, α é uma classe (propriamente) essencial de f. Portanto $\mathrm{NR}(f, y_0) = \mathrm{NR}(f', h(y_0))$ *(* $\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathrm{PNR}(f', h(y_0))$ *).*

Demonstração. Sejam $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$ e $\widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}$ o recobrimento e um levantamento de Hopf para f. Então $h \circ \widehat{q}$ e $g^{-1} \circ \widehat{f}$ são, respectivamente, o recobrimento e um levantamento de Hopf para f', onde g^{-1} é a inversa de g. Para todo $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ tem-se que

$$g(\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})) = (g^{-1})^{-1}(\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})) = (\widehat{f} \circ g^{-1})^{-1}(\widehat{y}),$$

e portanto, g leva uma classe de raízes de f em y_0 em uma única classe de raízes de f' em $h(y_0)$. Ainda mais, se $\{\widehat{h}_t\colon X \to \widehat{Y}\}$ é o levantamento de uma homotopia (própria) começando em f, então $\{g^{-1} \circ \widehat{h}_t\colon X' \to \widehat{Y}\}$ é o levantamento da homotopia (própria) $\{g^{-1} \circ f \circ h\colon X' \to Y'\}$ começando em f'. Substituindo $\widehat{f}$ por $\widehat{h}_1$ na equação 2.1 vemos que g leva classe essencial em classe essencial. O mesmo procedimento se aplica a g^{-1} invertendo os sentidos de g e h. ☐

Teorema 2.16. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. Existe uma família $\{U_\alpha : \alpha \in f^{-1}(y_0)/\mathcal{N}\}$ de abertos disjuntos de X tal que $\alpha \subset U_\alpha$ para toda classe de raízes α de f em y_0.*

Demonstração. Sejam $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$ e $\widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}$, respectivamente, o recobrimento e um levantamento de Hopf para f. Então y_0 admite uma vizinhança distinguida aberta V com relação ao recobrimento $\widehat{q}$. Seja

$$\widehat{q}^{-1}(V) = \bigsqcup_{\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)} V_{\widehat{y}},$$

onde $\widehat{y} \in V_{\widehat{y}}$ para cada $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$. Vimos que as classes de raízes de f em y_0 são precisamente os conjuntos não vazios da forma $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$ com $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$. Assim

$$\left\{\widehat{f}^{-1}(V_{\widehat{y}}) : \widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0) \text{ e } \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}) \neq \emptyset\right\}$$

é uma família com as propriedades do enunciado. □

Corolário 2.17. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. Toda classe de raízes de f em y_0 é aberta e fechada em $f^{-1}(y_0)$. Consequentemente, se f é própria então possui apenas um número finito de classes de raízes.*

Demonstração. Pelo teorema (2.16) se α é uma classe de raízes de f em y_0 então existe um aberto U_α tal que $\alpha = U_\alpha \cap f^{-1}(y_0)$. Logo α é aberto em $f^{-1}(y_0)$. A classe α é fechada em $f^{-1}(y_0)$ pois $f^{-1}(y_0) - \alpha$ é a união das demais classes de raízes de f em y_0, que como acabamos de ver é um aberto. Consequentemente se f é própria então como Y é Hausdorff, y_0 é um compacto em Y, e portanto, $f^{-1}(y_0)$ é compacto em X. A família $\{U_\alpha\}$ do teorema (2.16) é uma cobertura por abertos de $f^{-1}(y_0)$. Logo admite uma subcobertura finita. Ou seja, f possui um número finito de classes de raízes. □

2.1.1 Número de Reidemeister

Recordemos que se $h\colon A \to B$ é um homomorfismo de grupos ou módulos então o conúcleo de h, ou cokernel de h, denotado por $\mathrm{Coker}(h)$, é, no caso de módulos, o módulo quociente $B/h(A)$ e no caso de grupos o grupo quociente $B/h(A)$ desde que $h(A)$ seja normal em B. Vamos estender este conceito dizendo que o **conúcleo**, ou **cokernel**, de h é a estrutura quociente $B/h(A)$, mesmo sem a normalidade de $h(A)$ no caso de grupos.

Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$ e consideremos $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$ o recobrimento de Hopf para f e $\widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}$ um levantamento de Hopf para f. Vimos na observação (2.11) que existe uma bijeção entre o conjunto das classes de raízes de f em y_0, $f^{-1}(y_0)/\mathcal{N}$, e um subconjunto da fibra $\widehat{q}^{-1}(y_0)$. Logo o conjunto $f^{-1}(y)/\mathcal{N}$ das classes de raízes de f em y está em correpondência bijetiva com um subconjunto da fibra $\widehat{q}^{-1}(y)$, para todo $y \in Y$. Por outro lado, sabemos que para cada $x \in X$ a fibra $\widehat{q}^{-1}(f(x))$ está em bijeção com o conjunto $\pi(Y, f(x))/\widehat{q}_\#\pi(\widehat{Y}, \widehat{f}(x))$ das classes laterais de $\widehat{q}_\#\pi(\widehat{Y}, \widehat{f}(x))$ em $\pi(Y, f(x))$. Como $\widehat{q}$ é o recobrimento de Hopf para f, temos que $\widehat{q}_\#\pi(\widehat{Y}, \widehat{f}(x)) = f_\#\pi(X, x)$. Portanto o conjunto das classes de raízes de f em y_0 está em correspondência biunívoca com um subconjunto do $\mathrm{Coker}(f_\#) = \pi(Y, y_0)/f_\#\pi(X, x)$, onde $x \in f^{-1}(y_0)$. O número de classes laterais em $\mathrm{Coker}\, f_\#$ é então um limitante superior do número de classes de raízes de f em y_0 e, portanto, um limitante superior para o número de Nielsen de f em y_0, $\mathrm{NR}(f, y_0)$. Se f é própria então $\#\,\mathrm{Coker}(f_\#)$ é um limitante superior também para $\mathrm{PNR}(f, y_0)$.

Definição 2.18. Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação e $x \in X$. Às classes laterais em $\mathrm{Coker}(f_\#) = \pi(Y, f(x))/f_\#\pi(X, x)$ chamamos **classes de raízes de Reidemeister** de f em x, onde $f_\#\pi(X, x) \to \pi(Y, f(x))$ é o homomorfismo induzido por f nos grupos fundamentais. À cardinalidade de $\mathrm{Coker}(f_\#)$ chamamos **número de Reidemeister** de f e o denotamos por $\mathrm{RR}(f)$. Ou seja, $\mathrm{RR}(f) = \#\,\mathrm{Coker}(f_\#)$.

O cokernel de f, $\mathrm{Coker}(f_\#) = \pi(Y, f(x))/f_\#\pi(X, x)$, depende do ponto x, mas a sua cardinalidade não, isto é, o número de elementos em $\mathrm{Coker}(f_\#)$ é o mesmo independentemente do ponto x considerado. Por esta razão omitimos x em $\mathrm{RR}(f)$. Desta discusão obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.19. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação (própria) e $y_0 \in Y$. Então*

1. *o número de Reidemeister de f é igual ao número de folhas do recobrimento de Hopf $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$ de f, isto é, $\mathrm{RR}(f) = \#\widehat{q}^{-1}(y)$ para todo $y \in Y$;*

2. *a aplicação f tem no máximo $\mathrm{RR}(f)$ classes de Nielsen de raízes; e*

3. $\mathrm{NR}(f, y_0) \leq \mathrm{RR}(f)$ *(*$\mathrm{PNR}(f, y_0) \leq \mathrm{RR}(f)$*).*

Fizemos acima uma correspondência entre o conjunto das classes de raízes de Nielsen da aplicação $f \colon X \to Y$ e um subconjunto da fibra $\widehat{q}^{-1}(y_0)$ e depois, uma correspondência entre esta fibra e o conjunto das classes de Reidemeister de f. Vamos agora estabelecer uma correspondência direta entre as classes de Nielsen e as classes de Reidemeister. Seja então $f \colon X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos e $y_0 \in Y$ e suponhamos que $f^{-1}(y_0)$ é não vazio. Seja x_0 uma raiz de f em y_0. Dada $\alpha \in f^{-1}(y_0)/\mathcal{N}$ uma classe de raízes de f em y_0 sejam $x \in \alpha$ e γ um caminho em X de x a x_0. Então $f \circ \gamma$ é um laço em Y com ponto base y_0 de modo que $[f \circ \gamma]$ é um elemento de $\pi(Y, y_0)$. Seja $\phi(\alpha)$ a classe lateral em $\pi(Y, y_0)/f_\# \pi(X, x_0)$ que contém $[f \circ \gamma]$, isto é, $\phi(\alpha) = [f \circ \gamma] f_\# \pi(X, x_0)$. Mostremos que $\phi(\alpha)$ independe da escolha do ponto $x \in \alpha$. Se $x' \in \alpha$ é outra raiz de f em y_0 então, como x e x' estão na mesma classe de raízes, existe um caminho β em X de x' a x cuja imagem por f é um laço em Y homotópico ao laço constante em y_0. Deste modo, $\beta\gamma$ é um caminho de x' a x_0 tal que

$$[f \circ (\beta\gamma)] = [f \circ \beta][f \circ \gamma] = [y_0][f \circ \gamma] = [f \circ \gamma].$$

Mostremos agora que $\phi(\alpha)$ independe do caminho γ. Se γ' é outro caminho em X de x a x_0 então $(\gamma')^{-1}\gamma$ é um laço em X baseado em x_0 e, portanto,

$$[f \circ \gamma']^{-1}[f \circ \gamma] = [f \circ ((\gamma')^{-1}\gamma)] \in f_\# \pi(X, x_0).$$

Logo a aplicação $\phi \colon f^{-1}(y_0)/\mathcal{N} \to \pi(Y, y_0)/f_\# \pi(X, x_0)$ dada por

$$\phi(\alpha) = [f \circ \gamma] f_\# \pi(X, x_0),$$

onde γ é um caminho em X de uma raiz $x \in \alpha$ a x_0, está bem definida. Mostremos que ϕ é injetora. Suponhamos então que $\phi(\alpha) = \phi(\alpha')$ para duas classes de raízes de f em y_0. Se $x \in \alpha$ e $x' \in \alpha'$ são duas raízes de f em y_0 e, γ e γ' são caminhos de x a x_0 e de x' a x_0, respectivamente, então

$$[f \circ \gamma] f_\# \pi(X, x_0) = [f \circ \gamma'] f_\# \pi(X, x_0).$$

Logo existe laço β em X com ponto base x_0 tal que

$$[f \circ \gamma] = [f \circ \gamma'][f \circ \beta] = [f \circ (\gamma'\beta)]$$

e, portanto,

$$[f \circ (\gamma'\beta)][f \circ \gamma]^{-1} = [f \circ (\gamma'\beta\gamma^{-1})] = [y_0].$$

Assim $\gamma'\beta\gamma^{-1}$ é um caminho em X de x' a x cuja imagem por f é um laço homotópico ao laço constante em y_0. Portanto, $\alpha = \alpha'$ e ϕ é injetora.

Sempre que $\pi(Y)$ for abeliano podemos usar os grupos de homologia em dimensão um em vez dos grupos fundamentais para calcular o número de Reidemeister.

Teorema 2.20. *Seja $f \colon X \to Y$ uma aplicação e suponhamos que $\pi(Y, y)$ é abeliano para algum (e portanto todo) $y \in Y$. Então $\mathrm{RR}(f) = \#\,\mathrm{Coker}(f_1)$ onde $f_1 \colon H_1(X; \mathbb{Z}) \to H_1(Y; \mathbb{Z})$ é o homomorfismo induzido por f no primeiro grupo de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \pi(X,x) \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "\mathcal{H}_X"'] & \pi(Y,f(x)) \arrow[d, "\mathcal{H}_Y"] \\ H_1(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "f_1"'] & H_1(Y;\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

onde $\mathcal{H}_X$ e $\mathcal{H}_Y$ são os homomorfismos de Hurewicz para X e Y [Hu59, Proposição 4.2, p.147], respectivamente, e $f_\#$ é o homomorfismo induzido por f nos grupos fundamentais. Ambos $\mathcal{H}_X$ e $\mathcal{H}_Y$ são sobrejetores e como $\pi(Y,f(x))$ é abeliano este último é também injetor e, portanto, bijetor. Então $\mathcal{H}_Y$ induz uma bijeção entre os conúcleos de $f_\#$ e f_1. Com efeito, seja $j\colon \operatorname{Coker}(f_\#) \to \operatorname{Coker}(f_1)$ dada por

$$j(af_\#\pi(X,x)) = \mathcal{H}_Y(a)f_1H_1(Y;\mathbb{Z}),$$

para todo $a \in \pi(Y,f(x))$. A sobrejetividade de j segue diretamente da sobrejetividade de $\mathcal{H}_Y$. Se a e a' são elementos de $\pi(Y,f(x))$ tais que $\mathcal{H}_Y(a)f_1H_1(X;\mathbb{Z}) = \mathcal{H}_Y(a')f_1H_1(X;\mathbb{Z})$ então existe $b \in H_1(X,x)$ tal que $\mathcal{H}_Y(a) = \mathcal{H}_Y(a')f_1(b)$. Como $\mathcal{H}_X$ é sobrejetor existe $c \in \pi(X,x)$ tal que $b = \mathcal{H}_X(c)$. Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_Y(a) &= \mathcal{H}_Y(a')f_1(b) = \mathcal{H}_Y(a')f_1 \circ \mathcal{H}_X(c) \\ &= \mathcal{H}_Y(a')\mathcal{H}_Y \circ f_\#(c) = \mathcal{H}_Y(a'f_\#(c)).\end{aligned}$$

Da injetividade de $\mathcal{H}_Y$ resulta que $a = a'f_\#(c)$. Então $af_\#\pi(X,x) = a'f_\#\pi(X,x)$, de modo que j é injetora. $\square$

Como dissemos anteriormente, queremos um limitante inferior para o número de raízes que seja calculável. O próximo teorema expressa um meio de calcular o número de Nielsen através do número de Reidemeister.

Teorema 2.21. *Sejam Y um espaço topológico e $y_0 \in Y$ tais que para todo laço γ em Y com ponto base y_0 existe uma homotopia (própria) $\{h_t\colon Y \to Y\}$ que começa na identidade, termina em um homeomorfismo e tal que o caminho $\{h_t(y_0)\}$ é homotópico a γ. Então para toda aplicação (própria) $f\colon X \to Y$, ou $\operatorname{NR}(f,y_0) = 0$ ou $\operatorname{NR}(f,y_0) = \operatorname{RR}(f)$ (ou $\operatorname{PNR}(f,y_0) = 0$ ou $\operatorname{PNR}(f,y_0) = \operatorname{RR}(f)$).*

Demonstração. Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação, $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$ o recobrimento de Hopf para f e $\widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}$ um levantamento de Hopf para f e suponhamos que $\operatorname{NR}(f,y_0) \neq 0$ ($\operatorname{PNR}(f,y_0) \neq 0$). É suficiente mostrar que para todo $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ o conjunto $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$ é uma classe de raízes (propriamente) essencial de f em y_0. Fixemos então $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$.

Como $\operatorname{NR}(f,y_0) \neq 0$ ($\operatorname{PNR}(f,y_0) \neq 0$) existe $\widehat{y}_0 \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ tal que $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)$ é uma classe de raízes (propriamente) essencial de f em y_0. Seja $\widehat{\gamma}$ um caminho em $\widehat{Y}$ de $\widehat{y}$ a $\widehat{y}_0$. Então $\gamma = \widehat{q} \circ \widehat{\gamma}$ é um laço em Y baseado em y_0 e, por hipótese, existe uma homotopia (própria) $\{h_t\colon Y \to Y\}$ que começa na identidade em Y, termina em um homeomorfismo e tal que o caminho $\{h_t(y_0)\}$ é homotópico a γ. Seja $\{\widehat{h}_t\colon \widehat{Y} \to \widehat{Y}\}$ um levantamento de $\{h_t\}$ começando na identidade em $\widehat{Y}$ ($\{\widehat{h}_t\}$ é própria). Como γ e $\{h_t(y_0)\}$ são homotópicos, também o são seus levantamentos $\widehat{\gamma}$ e $\{\widehat{h}_t(\widehat{y})\}$ e, portanto, $\widehat{h}_1(\widehat{y}) = \widehat{\gamma}(1) = \widehat{y}_0$. Agora $\{h_t \circ f\colon X \to Y\}$ é uma homotopia (própria) começando em f e $\{\widehat{h}_t \circ \widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}\}$ um seu levantamento começando em $\widehat{f}$. Além disso, como $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)$ é uma classe de raízes (propriamente) essencial de f em y_0, segue que $(\widehat{h}_1 \circ \widehat{f})^{-1}(\widehat{y}_0)$ é não vazio. Seja então $x \in (\widehat{h}_1 \circ \widehat{f})^{-1}(\widehat{y}_0)$. Como $\widehat{h}_1$ é um homeomorfismo em $\widehat{Y}$, pois é um levantamento do homeomorfismo h_1, $\widehat{h}_1(\widehat{y}) = \widehat{\gamma}(1) = \widehat{y}_0$ e $\widehat{h}_1 \circ \widehat{f}(x) = \widehat{y}_0$ temos que $\widehat{f}(x) = \widehat{y}$. Assim $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$ é não vazio e, portanto, uma classe de raízes de f em y_0.

Vejamos que $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$ é essencial. Para tanto consideremos uma homotopia (própria) $\{f_t\colon X \to Y\}$ começando em f. Seja $\{\widehat{f}_t\colon X \to \widehat{Y}\}$ o levantamento de $\{f_t\}$ começando em $\widehat{f}$. Então $\widehat{f}_1^{-1}(\widehat{y}_0)$ é uma classe de raízes (propriamente) essencial de f_1 em y_0, pois $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_0)$ o é para f. Repetindo o raciocínio do parágrafo anterior para f_1 no lugar de f, concluímos que $\widehat{f}_1^{-1}(\widehat{y})$ é não vazio, logo $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$ é (propriamente) essencial. □

O próximo teorema nos garante que as hipóteses do teorema anterior são satisfeitas sempre que o espaço Y for uma variedade conexa.

Teorema 2.22. *Sejam Y uma variedade conexa, γ um caminho em Y e N uma vizinhança de $\gamma(\mathbf{I})$. Então existe uma isotopia $\{h_t\colon Y \to Y\}$ começando na identidade, que é a identidade fora de N e tal que $h_t(\gamma(0)) = \gamma(t)$ para todo $t \in \mathbf{I}$.*

Demonstração. Inicialmente suponhamos que γ está contido em uma n-bola $B \subset N$ e seja $\phi\colon \mathbb{B}^n \to B$ um homeomorfismo. Sejam ainda $\psi\colon \mathrm{int}\mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ o homeomorfismo que expande o interior da bola $\mathbb{B}^n$ radialmente, isto é, ψ e seu inverso ψ^{-1} são dados, respectivamente, por

$$\psi(u) = \left(\frac{1}{1 - \|u\|}\right) u \quad \text{e} \quad \psi^{-1}(u) = \left(\frac{1}{1 + \|u\|}\right) u.$$

Assim se $v \in \mathbb{R}^n$ e $u_0 \in \partial\mathbb{B}^n$ então $\lim_{u \to u_0} \psi^{-1}(\psi(u) + v) = u_0$, pois

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(\psi(u) + v) &= \frac{1}{1 + \|\frac{1}{1-\|u\|}\|u + v} \left(\frac{1}{1 - \|u\|} u + v\right) \\ &= \frac{1}{1 - \|u\| + \|u + (1 - \|u\|)v\|}(u + (1 - \|u\|)v).\end{aligned}$$

Isto nos garante que a homotopia $\{h_t\colon Y \to Y\}$ definida por

$$h_t(y) = \begin{cases} \phi \circ \psi^{-1}(\psi \circ \phi^{-1}(y) + \psi \circ \phi^{-1}(\gamma(t)) - \psi \circ \phi^{-1}(\gamma(0))), & y \in \mathrm{int}B \\ y, & y \notin \mathrm{int}B. \end{cases}$$

é contínua. Além disso, h_0 é a identidade, h_t é a identidade fora de N e $h_t(\gamma(0)) = \gamma(t)$.

Para uma γ qualquer, segue da compacidade de $\gamma(\mathbf{I})$ que podemos dividí-la em uma sequência $\gamma^1, \cdots, \gamma^m$ de caminhos

$$\gamma^k(t) = \gamma\left(\frac{k - 1 + t}{m}\right),\ 1 \le k \le m,\ t \in \mathbf{I},$$

cada um dos quais está contido no interior de uma n-bola. Para cada um desses caminhos γ^k construa a isotopia $\{h_t^k\}$ como acima. A isotopia $\{h_t\}$ que procuramos é definida do seguinte modo

$$h_t = \begin{cases} h^1_{mt} & \text{se } 0 \le t \le 1/m \\ h^k_{mt-k+1} \circ h_1^{k-1} \circ \cdots h_1^1 & \text{se } (k-1)/m \le t \le k/m \text{ e } 2 \le k \le m. \end{cases}$$

Para $k = 2$ e $t = 1/m$ a segunda expressão acima vale

$$h^2_{m1/m-2+1} \circ h_1^1 = h_0^2 \circ h_1^1 = id_Y \circ h_1^1 = h_1^1.$$

Portanto $\{h_t\}$ está bem definida. Além disso, $h_0 = h_0^1 = id_Y$ e $\{h_t\}$ é a identidade fora de N pois cada uma das $\{h_t^k\}$ o é. Se $0 \leq t \leq 1/m$ então $h_t(\gamma(0)) = h_{mt}^1(\gamma(0)) = h_{mt}^1(\gamma^1(0)) = \gamma^1(mt) = \gamma(t)$. Agora se $t \geq 1/m$ então

$$\begin{aligned}
h_t(\gamma(0)) &= h_{mt-k+1}^k \circ h_1^{k-1} \circ \cdots h_1^1(\gamma(0)) \\
&= h_{mt-k+1}^k \circ h_1^{k-1} \circ \cdots h_1^1(\gamma^1(0)) \\
&\vdots \\
&= h_{mt-k+1}^k \circ h_1^{k-1}(\gamma^{k-1}(0)) \\
&= h_{mt-k+1}^k(\gamma^{k-1}(1)) \\
&= h_{mt-k+1}^k(\gamma^k(0)) \\
&= \gamma^k(mt-k+1) \\
&= \gamma(t)
\end{aligned}$$

□

Dos teoremas (2.21) e (2.22) resulta imediatamente o seguinte.

Corolário 2.23. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação (própria) do espaço X na variedade conexa Y e $y_0 \in Y$. Então ou $\mathrm{NR}(f, y_0) = 0$ ou $\mathrm{NR}(f, y_0) = \mathrm{RR}(f)$ (ou $\mathrm{PNR}(f, y_0) = 0$ ou $\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathrm{RR}(f)$).*

O resultado a seguir é consequência imediata do corolário (2.17) e do corolário acima.

Corolário 2.24. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria do espaço X na variedade conexa Y tal que $\mathrm{RR}(f) = \infty$ e $y_0 \in Y$. Então $\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathrm{NR}(f, y_0) = 0$.*

Corolário 2.25. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação (própria) do espaço X na variedade conexa Y. Então $\mathrm{NR}(f, y_0)$ ($\mathrm{PNR}(f, y_0)$) independe do ponto $y_0 \in Y$.*

Demonstração. Sejam y_0, $y_1 \in Y$ e γ um caminho de y_0 a y_1. Pelo teorema (2.22) existe uma isotopia $\{h_t\colon Y \to Y\}$ começando na identidade tal que $h_1(y_0) = y_1$. Como $\mathrm{NR}(f, y_1)$ ($\mathrm{PNR}(f, y_0)$) é um invariante homotópico de f e $\{h_t \circ f\colon X \to Y\}$ é uma homotopia própria (pois é f é própria e $\{h_t\}$ é isotopia) começando em f temos que $\mathrm{NR}(h_1 \circ f, y_1) = \mathrm{NR}(f, y_1)$ ($\mathrm{PNR}(h_1 \circ f, y_1) = \mathrm{PNR}(f, y_1)$). Por outro lado, segue do teorema (2.15) que

$$\mathrm{NR}(h_1 \circ f, y_1) = \mathrm{NR}(f, h_1^{-1}y_1) = \mathrm{NR}(f, y_0)$$
$$(\mathrm{PNR}(h_1 \circ f, y_1) = \mathrm{PNR}(f, h_1^{-1}y_1) = \mathrm{NR}(f, y_0)).$$

Logo $\mathrm{NR}(f, y_0) = \mathrm{NR}(f, y_1)$ ($\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathrm{PNR}(f, y_1)$). □

Os resultados dos corolários (2.23), (2.24) e (2.25) acima não permanecem verdadeiros, em geral, se o espaço Y não for uma variedade. Os exemplos (2.56) e (3.16) são contra-exemplos para o corolário (2.24). Já os exemplos (2.57) e (2.58) são contra-exemplos para o corolário (2.25) que, conquanto não seja verdadeiro em geral, podemos usá-lo para obter uma extensão de seu resultado para o caso em que Y não for uma variedade. De fato, se $y_0 \in Y$ admite uma vizinhança localmente euclidiana $E \subset Y$ então do corolário (2.25) resulta que $\mathrm{NR}(f, y) = \mathrm{NR}(f, y_0)$ para todo $y \in E$, de onde concluímos o seguinte resultado:

Teorema 2.26. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação (própria) e $E(Y) \subset Y$ o subconjunto constituído dos pontos de Y que admitem vizinhança n-euclidiana. Então $\mathrm{NR}(f, y_0)$ ($\mathrm{PNR}(f, y_0)$) é constante nas componentes conexas por caminhos de $E(Y)$.*

Os exemplos (2.57) e (2.58) ilustram o resultado acima.

2.2 Índice de raízes

Um índice de raízes é uma função definida em uma classe formada por pares (f, A), onde f é uma aplicação entre espaços topológicos e A é um subconjunto do domínio de f, que, grosso modo, serve como um indicador da existência de raízes de f em A. Nesta seção veremos a definição de índice de raízes, algumas propriedades e procederemos a construção de alguns índices de raízes, e a um destes descreveremos em termos do grau local de uma aplicação.

2.2.1 Definição e propriedades de índice

Definição 2.27. Sejam X e Y espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Um par (f, A) é dito um **par admissível** para X, Y, y_0 se $f\colon X \to Y$ é uma função contínua, $A \subset X$ e A admite uma vizinhança fechada N tal que $N - A$ não contém raízes de f em y_0. Nestas condições, se f for uma aplicação própria dizemos que o par (f, A) é **propriamente admissível** para X, Y, y_0.

Observação 2.28. Seja $A \subset X$ aberto. Se (f, A) é um par admissível N é como na definição acima então a fronteira de A não contém raízes de f, pois $\partial A = \overline{A} - A \subset N - A$. Reciprocamente, se a fronteira de A não contém raízes de f então $\overline{A}$ é uma vizinhança fechada de A tal que $\overline{A} - A = \partial A$ não contém raízes de f, ou seja, (f, A) é um par admissível

O teorema a seguir fornece-nos uma lista de exemplos de pares (propriamente) admissíveis.

Teorema 2.29. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. Então:*

1. *(f, X) e $(f, \emptyset)$ são admissíveis;*
2. *se (f, A) e (f, B) são admissíveis então $(f, A \cup B)$ e $(f, A \cap B)$ são admissíveis;*
3. *$(f, f^{-1}(y_0))$ é admissível;*
4. *se α é uma classe de raízes de f em y_0 então (f, α) é admissível;*
5. *se $A \subset X$ é aberto e sua fronteira ∂A não possui raízes de f em y_0 então (f, A) é admissível.*

Demonstração. (1) Temos que X é uma vizinhança fechada de X e $X - X = \emptyset$ não possui raízes de f assim como $\emptyset$ é uma vizinhança fechada de $\emptyset$ e $\emptyset - \emptyset = \emptyset$ não possui raízes de f.

(2) Sejam N uma vizinhança fechada de A tal que $N - A$ não contém raízes de f e M uma vizinhança de B tal que $M - B$ não contém raízes de f. Então $N \cup M$ é uma vizinhança fechada de $A \cup B$ e $N \cap M$ é uma vizihança fechada de $A \cap B$. Tanto $(N \cup M) - (A \cup B)$ quanto $(N \cap M) - (A \cap B)$ estão contidos em $(N - A) \cup (M - B)$ e como este não contém raízes de f, aqueles também não as contém.

(3) Temos que X é uma vizinhança fechada de $f^{-1}(y_0)$ e $X - f^{-1}(y_0)$ não contém raízes de f.

(4) Pelo teorema (2.16) existe um aberto $U_\alpha \subset X$ tal que $\alpha \subset \overline{U}_\alpha$ e $\overline{U}_\alpha - \alpha$ não possui raízes de f.

(5) Temos que $\overline{A}$ é uma vizihança fechada de A e $\overline{A} - A = \partial A$ não possui raízes de f. ☐

Obviamente que se f for própria cada um dos pares admissíveis acima é propriamente admissível.

Teorema 2.30. *Sejam X um espaço topológico normal e (f, A) um par admissível para X, Y, y_0. Então o fecho de A admite uma vizinhança N tal que $N - A$ não contém raízes de f em y_0. Consequentemente a inclusão $(N, N - A) \subset (X, X - A)$ é uma excisão.*

Demonstração. Seja M uma vizinhança fechada de A tal que $M - A$ não contém raízes de f em y_0. Então M e $(X - \mathrm{int}M) \cap f^{-1}(y_0)$ são dois fechados de X disjuntos. Como X é normal existem abertos disjuntos N e N' tais que $M \subset N$ e $(X - \mathrm{int}M) \cap f^{-1}(y_0) \subset N'$. Então N é uma vizinhança do fecho de A tal que $N - A$ não possui raízes de f em y_0. $\square$

Agora estamos aptos a definir índice de raízes.

Definição 2.31. Sejam X e Y espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Um **índice (próprio) de raízes** para X, Y, y_0 é uma função ω do conjunto dos pares (propriamente) admissíveis para X, Y, y_0 com valores em um grupo abeliano satisfazendo as seguintes propriedades:

1. (Propriedade Aditiva) Se $A \subset X$ e $A_1, \ldots, A_n$ são subcojuntos disjuntos de A tais que

   (a) (f, A) e (f, A_i), $1 \leq i \leq n$, são pares (propriamente) admissíveis,

   (b) os conjuntos A_i, $1 \leq i \leq n$, contém todas as raízes de f que estão em A, isto é, $(A - \cup_i A_i) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$,

   então $\omega(f, A) = \sum_i \omega(f, A_i)$.

2. (Propriedade Homotópica) Se $\{f_t \colon X \to Y\}$ é uma homotopia (própria), $A \subset X$ é aberto e para todo $t \in \mathbf{I}$, (f_t, A) é um par (propriamente) admissível para X, Y, y_0 então $\omega(f_0, A) = \omega(f_1, A)$.

Sejam $f \colon X \to Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. Seja ainda ω um índice de raízes para X, Y, y_0. Da propridade aditiva do índice, usando $A = \emptyset$ e $A_1 = A_2 = \emptyset$, temos que $\omega(f, \emptyset) = \omega(f, \emptyset) + \omega(f, \emptyset)$ e portanto $\omega(f, \emptyset) = 0$. Suponhamos agora que (f, A) é um par admissível para X, Y, y_0 e que f não tenha raízes em A. Novamente da propriedade aditiva do índice, usando $A_1 = \emptyset$, temos que $\omega(f, A) = \omega(f, \emptyset) = 0$. Portanto se $\omega(f, A) \neq 0$ então A contém alguma raiz de f em y_0.

De agora em diante, vamos trabalhar somente com índices próprios de raízes. Mas observamos que o que se segue se aplica ao caso não (necessariamente) próprio. O resultado a seguir mostra que um índice de raízes assume o mesmo valor para classes de raízes homotopicamente relacionadas.

Teorema 2.32. *Sejam X um espaço conexo e localmente conexo por caminhos, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Sejam ainda $\{f_t \colon X \to Y\}$ uma homotopia própria, $y_0 \in Y$, ω um índice próprio de raízes para X, Y, y_0 e α_0 uma classe de raízes de f_0 em y_0. Se α_0 está $\{f_t\}$-relacionada a uma classe de raízes α_1 de f_1 então $\omega(f_0, \alpha_0) = \omega(f_1, \alpha_1)$. Caso contrário $\omega(f_0, \alpha_0) = 0$.*

Demonstração. Sejam $\hat{q} \colon \hat{Y} \to$ e $\{\hat{f}_t \colon X \to \hat{Y}\}$ um recobrimento e um levantamento de Hopf, respectivamente, para $\{f_t\}$. Notemos de imediato que a homotopia $\{\hat{f}_t\}$ é própria pois $\{f_t\}$ o é (corolário (1.7)). Sabemos que $\alpha_0 = \hat{f}_0^{-1}(\hat{y}_0)$ para algum $\hat{y}_0 \in \hat{q}^{-1}(y_0)$. Se α_0 está relacionada a uma classe de raízes α_1 de f_1 então $\alpha_1 = f_1^{-1}(\hat{y}_0)$. Queremos mostrar que $\omega(f_0, \hat{f}_0^{-1}(\hat{y}_0)) = \omega(f_1, \hat{f}_1^{-1}(\hat{y}_0))$. De $\mathbf{I}$ ser conexo segue que se $\omega(f_t, \hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0))$ é, como função de t, localmente constante então é constante em $\mathbf{I}$. Assim basta mostrarmos que $\omega(f_t, \hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0))$ é localmente constante como função de t.

O conjunto $\{(x, t) \in X \times \mathbf{I} : f_t(x) = y_0\}$ é compacto pois $\{f_t\}$ é própria (teorema (1.4)). Logo sua projeção em X, $C = \bigcup_{t \in \mathbf{I}} f_t^{-1}(y_0)$, também é compacto.

Fixemos $t_0 \in \mathbf{I}$. Como na demonstração do teorema (2.16) existe uma família $\{U_{\hat{y}} : \hat{y} \in \hat{q}^{-1}(y_0)\}$ de abertos disjuntos de X tal que $\hat{f}_{t_0}^{-1}(\hat{y}) \subset U_{\hat{y}}$ para cada $\hat{y} \in \hat{q}^{-1}(y_0)$. Observemos que $\hat{f}_{t_0}$ leva o conjunto compacto $C - U_{\hat{y}_0}$ no aberto $\hat{Y} - \hat{y}_0$. Se ao conjunto $\mathcal{C}(X, \hat{Y})$ das funções contínuas de X em $\hat{Y}$ for atribuída a topologia compacto-aberta então a associação $t \mapsto \hat{f}_t$ é uma função contínua de $\mathbf{I}$ em $\mathcal{C}(X, \hat{Y})$ [Hu59, Proposição 9.4, p.75]. Além disso o conjunto de todas as aplicações de X em $\hat{Y}$ que levam $C - U_{\hat{y}_0}$ em $\hat{Y} - \hat{y}_0$ é um aberto em $\mathcal{C}(X, \hat{Y})$. Deste modo, t_0 admite uma vizinhança $J_0 \in \mathbf{I}$ tal que $\hat{f}_t(C - U_{\hat{y}_0}) \subset \hat{Y} - \hat{y}_0$, para todo $t \in J_0$. Portanto

$$\hat{f}_t^{-1}(y_0) \subset U_{\hat{y}_0}, \text{ para todo } t \in J_0 \tag{2.33}$$

De modo semelhante temos que $\hat{f}_{t_0}$ leva o compacto $C - \bigcup_{\hat{y} \neq \hat{y}_0} U_{\hat{y}}$ no aberto $\hat{Y} - (\hat{q}^{-1}(y_0) - \hat{y}_0)$ e assim t_0 admite uma vizinhança $J_1 \in \mathbf{I}$ tal que $\hat{f}_t(C - \bigcup_{\hat{y} \neq \hat{y}_0} U_{\hat{y}}) \subset \hat{Y} - (\hat{q}^{-1}(y_0) - \hat{y}_0)$, para todo $t \in J_1$, ou seja, para todo $t \in J_1$ temos que $\hat{f}_t^{-1}(\hat{q}^{-1}(y_0) - \hat{y}_0) \subset \bigcup_{\hat{y} \neq \hat{y}_0} U_{\hat{y}}$. Mas

$$\begin{aligned}
\hat{f}_t^{-1}(\hat{q}^{-1}(y_0) - \hat{y}_0) &= \hat{f}_t^{-1}(\hat{q}^{-1}(y_0)) - \hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0) \\
&= (\hat{q} \circ \hat{f}_t)^{-1}(y_0) - \hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0) \\
&= f_t^{-1}(y_0) - \hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0).
\end{aligned}$$

Portanto

$$f_t^{-1}(y_0) - \hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0) \subset \bigcup_{\hat{y} \neq \hat{y}_0} U_{\hat{y}}, \text{ para todo } t \in J_1. \tag{2.34}$$

Seja $J = J_0 \cap J_1$. De (2.33) e (2.34) segue que para todo $t \in J$, a fronteira de $U_{\hat{y}_0}$ não possui raízes de f_t, isto é, $\partial U_{\hat{y}_0} \cap f_t^{-1}(y_0) = \emptyset$, para todo $t \in J$. Então $(f_t, U_{\hat{y}_0})$ é, para todo $t \in J$, um par admissível para X, Y, y_0. Segue também de (2.33) e (2.34) que $\hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0) = f_t^{-1}(y_0) \cap U_{\hat{y}_0}$ para todo $t \in J$, donde obtemos que $f_t^{-1}(y_0) \cap (U_{\hat{y}_0} - \hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0)) = \emptyset$ para todo $t \in J$. Daí pela propriedade aditiva do índice temos que para todo $t \in J$, $\omega(f_t, \hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0)) = \omega(f_t, U_{\hat{y}_0})$. Por outro lado, como $U_{\hat{y}_0}$ é aberto temos pela propriedade homotópica do índice que $\omega(f_t, U_{\hat{y}_0})$ é constante em J. Logo $\omega(f_t, \hat{f}_t^{-1}(\hat{y}_0))$ é constante em J.

Agora se α_0 não está relacionada com nenhuma classe de raízes de f_1 então, como já observamos, α_0 está relacionada com a classe de raízes vazia e, pelo que acabamos de demonstrar, $\omega(f_0, \alpha_0) = \omega(f_1, \emptyset) = 0$. □

Como consequência imediata temos o seguinte resultado.

Corolário 2.35. *Sejam X um espaço conexo e localmente conexo por caminhos, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Sejam ainda $f : X \to Y$ uma aplicação própria, $y_0 \in Y$, α uma classe de raízes de f em y_0 e ω um índice próprio de raízes para X, Y, y_0. Então $\omega(f, \alpha) \neq 0$ implica que α é propriamente essencial.*

O próximo resultado permite-nos construir um índice de raízes definindo-o apenas para uma conjunto particular de pares admissíveis em vez de todos os pares admissíveis.

Teorema 2.36. *Sejam X e Y espaços topológicos e $y_0 \in Y$. Seja ainda ω uma função com valores em um grupo abeliano e cujo domínio é o conjunto dos pares propriamente admissíveis (f, A) para X, Y, y_0 tais que A tem fecho compacto. Suponhamos que ω satisfaz o seguinte:*

1. *Se $A \subset X$ tem fecho compacto e $A_1, \ldots, A_n$ são subcojuntos disjuntos de A também com fechos compactos em X tais que*

(a) (f, A) *e* (f, A_i), $1 \leq i \leq n$, *são pares propriamente admissíveis,*

(b) os conjuntos A_i, $1 \leq i \leq n$, *contém todas as raízes de* f *que estão em* A, *isto é,* $(A - \cup_i A_i) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$,

então $\omega(f, A) = \sum_i \omega(f, A_i)$.

2. *Se* $\{f_t \colon X \to Y\}$ *é uma homotopia própria,* $A \subset X$ *é aberto e tem fecho compacto, e para todo* $t \in \mathbf{I}$, (f_t, A) *é um par propriamente admissível para* X, Y, y_0 *então* $\omega(f_0, A) = \omega(f_1, A)$.

Então ω *admite uma única extensão a um índice próprio de raízes para* X, Y, y_0.

Demonstração. Seja (f, A) um par propriamente admissível para X, Y, y_0. Então $(f, f^{-1}(y_0) \cap A)$ é propriamente admissível. Como f é própria temos que $f^{-1}(y_0)$ é compacto e assim $f^{-1}(y_0) \cap A$ tem fecho compacto, de modo que o par $(f, f^{-1}(y_0) \cap A$ está no domínio de ω. Vamos definir uma função ω' no par (f, A) do seguinte modo

$$\omega'(f, A) = \omega(f, f^{-1}(y_0) \cap A).$$

Se A tem fecho compacto então $\omega(f, A)$ está definido e pela propriedade (1) acima, tomando $A_1 = f^{-1}(y_0) \cap A$, temos $\omega(f, A) = \omega(f, f^{-1}(y_0) \cap A)$. Ou seja, se A tem fecho compacto então $\omega'(f, A) = \omega(f, A)$ de sorte que ω' é, de fato, uma extensão de ω.

Verifiquemos que ω' é um índice próprio de raízes para X, Y, y_0. Sejam $A \subset X$ e $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos disjuntos de A tais que (f, A) e $(f, A_1), \ldots, (f, A_n)$ são pares propriamente admissíveis e tais que $f^{-1}(y_0) \cap (A - \cup_i A_i) = \emptyset$. Então $f^{-1}(y_0)$ tem fecho compacto e $f^{-1}(y_0) \cap A_1, \ldots, f^{-1}(y_0) \cap A_n$ são subconjuntos disjuntos de $f^{-1}(y_0) \cap A$. Além disso

$$\begin{aligned}\big(f^{-1}(y_0) \cap A\big) - \bigcup_i \big(f^{-1}(y_0) \cap A_i\big) &= f^{-1}(y_0) \cap A - f^{-1}(y_0) \cap (\cup_i A_i) \\ &= f^{-1}(y_0) \cap \big(A - \cup_i A_i\big) \\ &= f^{-1}(y_0) \cap \emptyset = \emptyset,\end{aligned}$$

de onde concluimos que

$$f^{-1}(y_0) \cap \big[\, \big(f^{-1}(y_0) \cap A\big) - \bigcup_i \big(f^{-1}(y_0) \cap A_i\big) \,\big] = \emptyset.$$

Logo

$$\omega'(f, A) = \omega(f, f^{-1}(y_0) \cap A) = \sum_i \omega(f, f^{-1}(y_0) \cap A_i) = \sum_i \omega'(f, A_i).$$

Isto é, ω' satisfaz a propriedade aditiva de índice.

Suponhamos agora que $\{f_t \colon X \to Y\}$ é uma homotopia própria, $A \subset X$ é um aberto e que (f_t, A) é propriamente admissível para todo $t \in \mathbf{I}$. Seja V uma vizinhança aberta de y_0 com fecho compacto e consideremos $U = \bigcup_{t \in \mathbf{I}} f_t^{-1}(V)$. Para todo $t \in \mathbf{I}$, U é uma vizinhança aberta de $f_t^{-1}(y_0)$ seguindo daí que $f_t^{-1}(y_0) \cap U = \emptyset$ de modo que (f_t, U), e por conseguinte, $(f_t, U \cap A)$ são propriamente admissíveis para todo $t \in \mathbf{I}$. Como $U = \bigcup_{t \in \mathbf{I}} f_t^{-1}(V) \subset \bigcup_{t \in \mathbf{I}} f_t^{-1}(\overline{V})$, temos, pelo teorema (1.4) que U tem fecho compacto e portanto $U \cap A$ também tem fecho compacto. Assim $\omega(f_t, U \cap A)$ está definido para todo $t \in \mathbf{I}$. Temos ainda que $f_t^{-1}(y_0) \cap A \subset U \cap A$ e $(U \cap A) - (f_t^{-1}(y_0) \cap A)$ não possui raízes de f_t para todo $t \in \mathbf{I}$ e como ω satisfaz a propriedade

(1) do enunciado resulta que $\omega(f_t, U \cap A) = \omega(f_t, f_t^{-1}(y_0) \cap A)$ para todo $t \in \mathbf{I}$. Então

$$\begin{aligned}\omega'(f_0, A) &= \omega(f_0, f_0^{-1}(y_0) \cap A)\\ &= \omega(f_0, U \cap A)\\ &= \omega(f_1, U \cap A)\\ &= \omega(f_1, f_1^{-1}(y_0) \cap A)\\ &= \omega'(f_1, A).\end{aligned}$$

Portanto ω' satisfaz a propriedade homotópica de índice. Concluimos assim que ω' é, de fato, um índice próprio de raízes para X, Y, y_0. Resta mostrarmos que é a única extensão possível de ω. Mas isto segue da propriedade aditiva de índice, pois se ω'' for um índice próprio de raízes qualquer que é uma extensão de ω então dado um par admissível (f, A) temos que

$$\omega''(f, A) = \omega''(f, f^{-1}(y_0) \cap A) = \omega(f, f^{-1}(y_0) \cap A) = \omega'(f, A).$$

A primeira igualdade segue da propriedade aditiva de ω'', a segunda do fato de ω'' ser uma extensão de ω (pois $f^{-1}(y_0) \cap A$ tem fecho compacto) e a terceira da definição de ω'. □

2.2.2 O índice homológico

Nosso objetivo agora é construir um índice próprio de raízes. Iniciamos com uma construção simples para detectar a existência de raízes. Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria entre espaços topológicos e $y_0 \in Y$. A aplicação composta

$$X \xrightarrow{f} Y \overset{j}{\subset} (Y, Y - y_0)$$

induz em homologia o homomorfismo

$$H_*(X) \xrightarrow{f_*} H_*(Y) \xrightarrow{j_*} H_*(Y, Y - y_0).$$

Suponhamos que f não tenha raízes em y_0. Então podemos restringir o contradomínio de f e, assim, obter uma aplicação $\bar{f}\colon X \to Y - y_0$. Podemos então reescrever a composição acima como

$$X \xrightarrow{\bar{f}} Y - y_0 \overset{\bar{j}}{\subset} (Y - y_0, Y - y_0) \overset{k}{\subset} (Y, Y - y_0).$$

Isto significa que o homomorfismo $j_* \circ f_* = k_* \circ \bar{j}_* \circ \bar{f}_*$ pode ser fatorado através do grupo $H_*(Y - y_0, Y - y_0) = 0$ donde se conclui que $j_* \circ f_* = 0$. Deste modo, se $j_* \circ f_* \neq 0$ então f (e portanto toda aplicação homotópica a f) tem pelo menos uma raiz em y_0. Assim somos levados a usar o homomorfismo $j_* \circ f_*$ como um indicador algébrico de quando é possível deformar f através de homotopia de modo a torná-la livre de raízes.

A fim de construirmos um índice, vamos localizar a construção acima: seja (f, A) um par propriamente admissível para X, Y, y_0 e N uma vizinhança fechada de A tal que $N - A$ não contém raízes de f em y_0. Então f define uma aplicação

$$\bar{f}\colon (N, N - A) \to (Y, Y - y_0).$$

Se A não contém raízes de f em y_0 então podemos fatorar $\bar{f}$ através de $(Y - y_0, Y - y_0)$ cuja homologia é trivial. Então se A não contém raízes de f em y_0 o homomorfismo induzido por $\bar{f}$

$$\bar{f}_*\colon H_*(N, N - A) \to H_*(Y, Y - y_0)$$

é trivial. Podemos então usar $\bar{f}_*$ como um indicador algébrico da existência de raízes de f em y_0. Embora $\bar{f}_*$ seja um elemento do grupo de homomorfismos de $H_*(N, N-A)$ em $H_*(Y, Y-y_0)$, tal grupo depende do conjunto A e por isso $\bar{f}_*$ não pode ser um índice de raízes para X, Y, y_0, pois um índice deve depender apenas de X, Y, y_0.

Se o espaço X é normal então uma solução para o problema acima é considerarmos o seguinte diagrama

$$X \overset{i}{\subset} (X, X-A) \overset{e}{\supset} (N, N-A) \xrightarrow{\bar{f}} (Y, Y-y_0)$$

onde N é uma vizinhança do fecho de A como garantido pelo teorema (2.30) e, neste caso, e é uma excisão que, portanto, induz isomorfismo em homologia. Temos assim o homomorfismo

$$\bar{f}_* \circ e_*^{-1} \circ i_* \colon H_*(X) \to H_*(Y, Y-y_0).$$

Deste modo, para X normal, definimos uma função I_*, do conjunto dos pares propriamente admissíveis (f, A) para X, Y, y_0 com valores no grupo de homomorfismos de $H_*(X)$ em $H_*(Y, Y-y_0)$, por

$$I_*(f, A) = \bar{f}_* \circ e_*^{-1} \circ i_*. \tag{2.37}$$

Logo adiante mostraremos que I_* é, de fato, um índice próprio de raízes para X, Y, y_0, o qual denominamos por **índice homológico** de raízes. Quando quisermos destacar o grupo G dos coeficientes em que se considera a homologia escreveremos $I_*(f, A; G)$. À restrição de $I_*(f, A)$ ao enésimo grupo de homologia denotamos $I_n \colon H_n(X; G) \to H_n(Y, Y-y_0; G)$.

Vejamos que a construção de $I_*(f, A)$ independe da escolha do conjunto N e que I_* satisfaz as propriedades aditiva e homotópica de índice próprio de raízes.

Independência de N

Para provarmos a independência de N consideremos N' outra vizinhança do fecho de A tal que $N'-A$ não contém raízes de f em y_0. Então $N'' = N \cup N'$ também é uma vizinhança do fecho de A com $N''-A$ livre de raízes de f em y_0. Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i"] & (X, X-A) & \\
(N, N-A) \arrow[ur, hook, "e_N"] \arrow[r, hook, "j_N"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & (N'', N''-A) \arrow[u, hook, "e_{N''}"] \arrow[d, "\bar{f}''"] & (N', N'-A) \arrow[ul, hook', "e_{N'}"'] \arrow[l, hook', "j_{N'}"'] \arrow[dl, "\bar{f}'"] \\
& (Y, Y-y_0) &
\end{tikzcd}$$

onde $\bar{f}$, $\bar{f}'$ e $\bar{f}''$ são definidas por f e as demais aplicações são inclusões. Assim em homologia temos

$$\bar{f}_* \circ e_{N*}^{-1} = (\bar{f}''_* \circ j_{N*}) \circ e_{N*}^{-1} = \bar{f}''_* \circ (j_{N*} \circ e_{N*}^{-1}) = \bar{f}''_* \circ e_{N''*}^{-1}$$

e

$$\bar{f}'_* \circ e_{N'*}^{-1} = (\bar{f}''_* \circ j_{N'*}) \circ e_{N'*}^{-1} = \bar{f}''_* \circ (j_{N'*} \circ e_{N'*}^{-1}) = \bar{f}''_* \circ e_{N''*}^{-1}.$$

Logo $\bar{f}_* \circ e_{N*}^{-1} \circ i_* = \bar{f}'_* \circ e_{N'*}^{-1} \circ i_*$ e portanto $I_*(f, A)$ independe da escolha de N.

Propriedade aditiva

Vamos agora mostrar que $I_*(f, A)$ satisfaz a propriedade aditiva de índice próprio de raízes, ou seja, vamos mostrar que se $A_1, \ldots, A_m \subset A$ são subconjuntos disjuntos de A tais que

(a) (f, A) e (f, A_ℓ), $1 \leq \ell \leq m$ são pares propriamente admissíveis, e

(b) $f^{-1}(y_0) \cap (A - \cup_\ell A_\ell) = \emptyset$,

então $I_*(f, \cup_\ell A_\ell) = \sum_\ell I_*(f, A_\ell)$. Para tanto, seja N uma vizinhança do fecho de A, com $N - A$ livre de raízes de f em y_0. Então N é uma vizinhança do fecho de $\cup_\ell A_\ell$ e $N - \cup_\ell A_\ell$ não contém raízes de f em y_0. Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & (X, X-K) \arrow[dl, hook', "i"'] \arrow[dr, hook, "i'"] & \\
(X, X-A) \arrow[rr, hook, "j"] & & (X, X-\cup_i A_i) \\
(N, N-A) \arrow[u, hook, "e"] \arrow[rr, hook, "k"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & & (N, N-\cup_i A_i) \arrow[u, hook', "e'"'] \arrow[dl, "\bar{f}'"] \\
 & (Y, Y-y_0) &
\end{tikzcd}$$

onde $\bar{f}$ e $\bar{f}'$ são as aplicações definidas por f. Temos que

$$\begin{aligned}
\bar{f}'_* \circ (e'_*)^{-1} \circ i'_* &= \bar{f}'_* \circ (e'_*)^{-1} \circ (j_* \circ i_*) \\
&= \bar{f}'_* \circ ((e'_*)^{-1} \circ j_*) \circ i_* \\
&= \bar{f}'_* \circ (k_* \circ e_*^{-1}) \circ i_* \\
&= (\bar{f}'_* \circ k_*) \circ e_*^{-1} \circ i_* \\
&= \bar{f}_* \circ e_*^{-1} \circ i_*,
\end{aligned}$$

de onde concluímos que $I_*(f, A) = I_*(f, \cup_{ell} A_{ell})$. Para obtermos nosso resultado vamos mostrar que $I_*(f, \cup_\ell A_\ell) = \sum_\ell I_*(f, A_\ell)$. Para cada $1 \leq \ell \leq m$, seja N_ℓ uma vizinhança do fecho de A_ℓ tal que $N_\ell - A_\ell$ não contém raízes de f. Como estamos supondo X normal, vamos tomar as vizinhanças N_ℓ, $1 \leq \ell \leq m$, disjuntas entre si. Temos assim o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & H_*(X) \arrow[dl, "\bigoplus_\ell (i_\ell)_*"'] \arrow[dr, "i_*"] & \\
\bigoplus_\ell H_*(X, X-A_\ell) & & H_*(X, X-\cup_i A_i) \arrow[ll, "\bigoplus_\ell (j_\ell)_*"'] \\
\bigoplus_\ell H_*(N_\ell, N_\ell - A_\ell) \arrow[u, "\bigoplus_\ell (e_\ell)_*"] \arrow[rr, "\bigoplus_\ell (k_\ell)_*"] \arrow[dr, "\bigoplus_\ell (\bar{f}_\ell)_*"'] & & H_*(\cup_\ell N_\ell, \cup_\ell N_\ell - \cup_\ell A_\ell) \arrow[u, "e_*"'] \arrow[dl, "\bar{f}_*"] \\
 & H_*(Y, Y-y_0) &
\end{tikzcd}$$

onde $\bar{f}$ e $\bar{f}_\ell$ são, respectivamente, os homomorfismos induzidos pelas aplicações $\bar{f}\colon (\cup_\ell N_\ell, \cup_\ell N_\ell - \cup_\ell A_\ell) \to (Y, Y - y_0)$ e $\bar{f}_\ell\colon (N_\ell, N_\ell - A_\ell) \to (Y, Y - y_0)$ (ambas definidas por f) e os demais são induzidos pelas respectivas inclusões. Temos que $\bigoplus_\ell (k_\ell)_*$ é um isomorfismo [ES52, Teorema 13.2, p. 33] e, pela comutatividade do diagrama, segue que $\bigoplus_\ell (j_\ell)_*$ também o é. Daí

$$\bigoplus_\ell (e_\ell)_* = \big(\bigoplus_\ell (j_\ell)_*\big) \circ e \circ \big(\bigoplus_\ell (k_\ell)_*\big)$$

de onde obtemos $e_*^{-1} = \big(\bigoplus_\ell (k_\ell)_*\big) \circ \big(\bigoplus_\ell (e_\ell)_*^{-1}\big) \circ \big(\bigoplus_\ell (j_\ell)_*\big)$. De modo que

$$\begin{aligned}\bar{f}_* \circ e_*^{-1} \circ i_* &= \bar{f}_* \circ \Big(\bigoplus_\ell (k_\ell)_*\Big) \circ \Big(\bigoplus_\ell (e_\ell)_*^{-1}\Big) \circ \Big(\bigoplus_\ell (j_\ell)_*\Big) \circ i_* \\ &= \Big(\bigoplus_\ell (\bar{f}_\ell)_*\Big) \circ \Big(\bigoplus_\ell (e_\ell)_*^{-1}\Big) \circ \Big(\bigoplus_\ell (i_\ell)_*\Big).\end{aligned}$$

Logo $I_*(f, \cup_\ell A_\ell) = \sum_\ell I_*(f, A_\ell)$.

Propriedade homotópica

Agora vamos mostrar que $I_*(f, A)$ satisfaz a propriedade homotópica de índice próprio, ou seja, vamos mostrar que se A é um aberto e $\{f_t\colon X \to Y\}$ é uma homotopia própria tal que (f_t, A) é propriamente admissível para todo $t \in \mathbf{I}$ então $I_*(f_0, A) = I_*(f_1, A)$. Sejam então A e $\{f_t\}$ nestas condições. Como para todo $t \in \mathbf{I}$ o par (f_t, A) é propriamente admissível segue que para todo $t \in \mathbf{I}$ e para todo $x \in \partial A$, $f_t(x) \in Y - y_0$. Logo para cada $(x, t) \in \partial A \times \mathbf{I}$ existem vizinhanças abertas U_t^x de x e V_t^x de t tais que $f_{t'}(x') \in Y - y_0$ para todo $(x', t') \in U_t^x \times V_t^x$. Para cada $x \in \partial A$, a coleção $\{V_t^x : t \in \mathbf{I}\}$ é uma cobertura de $\mathbf{I}$ por abertos e portanto admite uma subcobertura finita $\{V_{t_1}^x, \ldots, V_{t_{m(x)}}^x\}$ de modo que podemos definir $U^x = \cap_{i=1}^{m(x)} U_{t_i}^x$. Consideremos agora $U = A \cup \big(\bigcup_{x \in \partial A} U^x\big)$. Então U é uma vizinhança do fecho de A tal que $f^{-1}(y_0) \cap (U - A) = \emptyset$ para todo $t \in \mathbf{I}$. Como X é normal, U contém uma vizinhança N do fecho de A (com $f_t^{-1}(y_0) \cap (N - A) = \emptyset$). Além disso $\{f_t\}$ define uma homotopia $\{\bar{f}_t\colon (N, N - A) \to (Y, Y - y_0)\}$. Portanto $(\bar{f}_0)_* = (\bar{f}_1)_*\colon H_*(N, N - A) \to H_*(Y, Y - y_0)$ e a inclusão $e\colon (N, N - A) \to (X, X - A)$ é uma excisão. Considerando a inclusão $i\colon X \to (X, X - A)$ temos que

$$(\bar{f}_0)_* \circ e_*^{-1} \circ i_* = (\bar{f}_1)_* \circ e_*^{-1} \circ i_*.$$

Logo $I_*(f_0, A) = I_*(f_1, A)$.

Desta feita, mostramos que I_* é, com efeito, um índice próprio de raízes para X, Y, y_0 como havíamos prometido.

Observação 2.38. Quando $A = X$ deve ocorrer $N = X$ e então

$$I_*(f, X) = j_* \circ f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y, Y - y_0)$$

de modo que I_* é, com efeito, uma localização do indicador algébrico para existência de raízes com o qual iniciamos esta discusão.

Teorema 2.39. *Sejam X um espaço normal conexo e localmente conexo por caminhos, Y uma variedade conexa e $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria. Considerando a homologia com coeficientes inteiros ou inteiros módulo dois, o índice homológico é o mesmo, a menos de sinal, para todas as classes de raízes de f em $y_0 \in Y$, isto é, se α e α' são duas classes de raízes de f em y_0 então $I_*(f, \alpha) = \pm I_*(f, \alpha')$.*

Demonstração. Sejam $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$ o recobrimento de Hopf para f, $\widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}$ um levantamento de Hopf para f e $\widehat{y}_1, \widehat{y}_2 \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ dois pontos na fibra de y_0. Pela observação (2.11) é suficiente mostramos que

$$I_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)) = \pm I_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_2)).$$

Seja $\widehat{\gamma}$ um caminho em $\widehat{Y}$ de $\widehat{y}_1$ a $\widehat{y}_2$. A projeçao de $\widehat{\gamma}$ em Y, $\gamma = \widehat{q} \circ \widehat{\gamma}$, é um laço em y_0. Pelo teorema (2.22) existe uma isotopia $\{h_t\colon Y \to Y\}$ começando na identidade em Y tal que $h_t(y_0) = \gamma(t)$ para todo $t \in I$. Seja $\{\widehat{h}_t\colon \widehat{Y} \to \widehat{Y}\}$ um levantamento de $\{h_t\}$ a uma isotopia começando na identidade em $\widehat{Y}$. Então $\{\widehat{h}_t(y_1)\}$ é um levantamento de γ começando no ponto $\widehat{y}_1$ e, portanto, é $\widehat{\gamma}$. Em particular $\widehat{h}_1(\widehat{y}_1) = \widehat{y}_2$. Assim $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_2) = (\widehat{h}_0 \circ \widehat{f})^{-1}(\widehat{y}_2)$ está $\{h_t \circ f\}$-relacionada a $(\widehat{h}_1 \circ \widehat{f})^{-1}(\widehat{y}_2) = \widehat{f}^{-1}(\widehat{h}_1^{-1}(\widehat{y}_2)) = \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)$. Pelo teorema (2.32)

$$I_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_2)) = I_*(h_0 \circ f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_2)) = I_*(h_1 \circ f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)).$$

Resta mostrarmos que $I_*(h_1 \circ f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)) = \pm I_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1))$. Seja N uma vizinhança fechada de $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)$ tal que $N - \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)$ não contém raízes de f em y_0. Temos então a seguinte sequência de aplicações

$$X \overset{i}{\subset} (X, X - \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)) \overset{e}{\supset} (N, N - \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)) \xrightarrow{\bar{f}} (Y, Y - y_0) \xrightarrow{\bar{h}_1} (Y, Y - y_0)$$

onde $\bar{f}$ é definida por f, $\bar{h}_1$ é o homeomorfismo definido por h_1 e a inclusão e é uma excisão. Então

$$I_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)) = \bar{f}_* \circ e_*^{-1} \circ i_* \text{ e } I_*(h_1 \circ f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)) = (\bar{h}_1)_* \circ \bar{f}_* \circ e_*^{-1} \circ i_*.$$

Logo

$$I_*(h_1 \circ f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)) = (\bar{h}_1)_* \circ I_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)), \tag{2.40}$$

onde $(\bar{h}_1)_*$ é um isomorfismo. Como Y é n-euclidiano em y_0 temos, por excisão,

$$H_p(Y, Y - y_0; G) = \begin{cases} G & \text{se } p = n, \\ 0 & \text{se } p \neq n. \end{cases}$$

Agora se G é o grupo dos inteiros ou dos inteiros módulo dois, então os únicos isomorfismos de $H_n(Y, Y - y_0; G)$ em si mesmo são a identidade ou menos a identidade e portanto

$$I_*(h_1 \circ f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)) = \pm I_*(f, \widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_1)). \qquad \square$$

Veremos no exemplo (2.48) uma ilustração do teorema acima. Este exemplo também ilustra o fato de que o índice de raízes não detecta, globalmente, a existência de raízes. Ou seja, pode ocorrer de uma certa aplicação ter classes de raízes cujos índices são não nulos, mas que se cancelem de modo a tornar nulo o índice do espaço todo. Este tipo de situação, no entanto, não ocorre se, nas hipóteses de teorema acima, Y for uma variedade compacta orientável. Com efeito, neste caso, como a inclusão $j\colon Y \subset (Y, Y - y_0)$ induz em homologia um homomorfismo sobrejetor e o homeomorfismo $h_1\colon Y \to Y$ obtido na demonstração do teorema é homotópico à identidade em Y e, portanto, seu homomorfismo induzido $(h_1)_*\colon H_*(Y) \to H_*(Y)$ é a identidade em $H_*(Y)$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H_*(Y) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, equal] & H_*(Y, Y - y_0) \arrow[d, "(\bar{h})_*"] \\ H_*(Y) \arrow[r, "j_*"'] & H_*(Y, Y - y_0). \end{tikzcd}$$

Então $(\bar{h}_1)_*$ é a identidade em $H_*(Y, Y - y_0)$ e da equação (2.40) concluímos que todas classes de raízes possuem o mesmo índice. Enunciamos este fato no corolário a seguir.

Corolário 2.41. *Sejam X um espaço normal conexo e localmente conexo por caminhos, Y uma variedade compacta, conexa e orientável e $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria. Considerando a homologia com coeficientes inteiros ou inteiros módulo dois, o índice homológico é* *o mesmo para todas as classes de raízes de f em y_0.*

2.2.3 O índice inteiro

Em algumas situações, podemos usar o índice homológico para definir outros índices. Por exemplo, suponhamos que X seja uma n-variedade conexa, compacta e orientável, Y um espaço localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e seja (f, A) um par propriamente admissível para X, Y, y_0. Neste caso, ambos os grupos $H_n(X;\mathbb{Z})$ e $H_n(Y, Y - y_0;\mathbb{Z})$ são cíclicos infinitos. Assim se $\mu \in H_n(X;\mathbb{Z})$ e $\nu \in H_n(Y, Y - y_0;\mathbb{Z})$ são geradores então a equação

$$I_n(f, A;\mathbb{Z})\mu = \lambda(f, A)\nu, \tag{2.42}$$

define uma função λ do conjunto dos pares propriamente admissíveis para X, Y, y_0 com valores no grupo abeliano dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Ainda mais, λ satisfaz as propriedades aditiva e homotópica de índice, pois I_n as satisfaz, sendo portanto um índice de raízes para X, Y, y_0. No caso do espaço Y também ser uma n-variedade compacta, conexa e orientável então $H_n(Y;\mathbb{Z})$ também é cíclico infinito e a inclusão $j\colon Y \subset (Y, Y - y_0)$ induz isomorfismo na n-ésima dimensão homológica. Escolhendo $\nu' = j_n^{-1}(\nu)$ como gerador de $H_n(Y)$ temos que o grau de Brouwer de f, $\mathrm{gr}_{\mathcal{B}}(f)$ satisfaz $f_n(\mu) = \mathrm{gr}_{\mathcal{B}}(f)\nu'$, logo

$$j_n \circ f_n(\mu) = j_n(\mathrm{gr}_{\mathcal{B}}(f)\nu') = \mathrm{gr}_{\mathcal{B}}(f)j_n(\nu') = \mathrm{gr}_{\mathcal{B}}(f)\nu.$$

Da equação (2.42) e da observação (2.38) resulta que $j_n \circ f_n(\mu) = I_n(f, X)\mu = \lambda(f, X)\nu$. Portanto $\lambda(f, X) = \mathrm{gr}_{\mathcal{B}}(f)$.

Observação 2.43. Em verdade, para definir o índice λ, não é necessário supor que o espaço X seja uma variedade conexa, compacta e orientável. Basta supor que $H_n(X;\mathbb{Z})$ seja cíclico infinito.

Usando o teorema (2.36) e a noção de classe fundamental de um compacto, vamos estender a construção do índice λ para o caso em que X é uma variedade orientável qualquer.

Suponhamos então que X seja uma n-variedade orientável e Y um espaço localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$. Sejam $s_X\colon X \to \widetilde{X}$ uma orientação de X e $\nu \in H_n(Y, Y - y_0;\mathbb{Z})$ uma orientação local de Y em y_0. Dado um par (f, A) propriamente admissível para X, Y, y_0 tendo A fecho compacto, sejam $N \subset X$ uma vizinhança do fecho de A tal que $N - A$ não contém raízes de f em y_0 e $K \subset X$ um compacto contendo A. Seja ainda $o_K \in H_n(X, X - K)$ a classe fundamental de X em K relativamente à orientação s_X e consideremos o seguinte diagrama

$$(X, X - K) \overset{i_k}{\subset} (X, X - A) \overset{e}{\supset} (N, N - A) \overset{\bar{f}}{\to} (Y, Y - y_0)$$

onde i_k e e são inclusões e f' é aplicação definida por f. Pelo teorema (2.30), e é uma excisão e portanto induz isomorfismo em todas as dimensões de homologia. Temos então o homomorfismo $\bar{f}_n \circ e_n^{-1} \circ i_K n\colon H_n(X, X - K;\mathbb{Z}) \to H_n(Y, Y - y_0;\mathbb{Z})$. Definamos o inteiro $\lambda(f, A)$ por

$$\bar{f}_n \circ e_n^{-1} \circ i_K n(o_K) = \lambda(f, A)\nu.$$

Para mostrar que a construção acima define um índice de raízes para X, Y, y_0 precisamos mostrar que $\lambda(f, A)$ independe da escolha dos conjuntos N e K, e satisfaz as propriedades aditiva e homotópica de índice desde que, é claro, os conjuntos considerados tenham fecho compacto. A demonstração de que $\lambda(f, A)$ independe de N e satisfaz as propriedades de índice são semelhantes àquelas feitas para o índice I_* e por isso as omitimos. Mostremos então que $\lambda(f, A)$ independe do conjunto K.

Seja $K' \subset X$ um outro compacto contento A. Então $K \cap K'$ também é um compacto contendo A e temos o seguinte diagrama comutativo de inclusões:

$$\begin{tikzcd}
(X, X-K) \arrow[d, "j_K"'] \arrow[dr, "i_K"] & \\
(X, X-(K\cap K')) \arrow[r, "i_{K\cap K'}"] & (X, X-A) \\
(X, X-K') \arrow[u, "j_{K'}"] \arrow[ur, "i_{K'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Assumindo por um instante que $j_{Kn}(o_K) = o_{K\cap K'} = j_{K'n}(o_{K'})$ temos da comutatividade do digrama que

$$i_{Kn}(o_K) = i_{K\cap K'n}(o_{K\cap K'}) = i_{K'n}(o_{K'}), \tag{2.44}$$

e portanto

$$f'_n \circ e_n^{-1} \circ i_{kn}(o_K) = f'_n \circ e_n^{-1} \circ i_{K'n}(o_{K'})$$

de modo que $\lambda(f, A)$ é independente do compacto K escolhido. Para mostrarmos as igualdades em (2.44) consideremos, para cada $x \in K \cap K'$, o seguinte diagrama de inclusões comutativo

$$\begin{tikzcd}
(X, X-K) \arrow[d, "j_K"'] \arrow[dr, "i_K"] & \\
(X, X-(K\cap K')) \arrow[r, "i_{K\cap K'}"] & (X, X-x). \\
(X, X-K') \arrow[u, "j_{K'}"] \arrow[ur, "i_{K'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Assim, para todo $x \in K \cap K'$ temos da definição de classe fundamental de um compacto que $i_{K\cap K'n} \circ j_{Kn}(o_K) = i_{Kn}(o_K) = s_X(x)$ e $i_{K\cap K'n} \circ j_{K'n}(o'_K) = i_{K'n}(o'_K) = s_X(x)$ de onde resulta as igualdades em (2.44).

Desta forma λ é uma função com valores no grupo abeliano dos números inteiros $\mathbb{Z}$ cujo domínio é o conjunto dos pares propriamente admissíveis (f, A) para X, Y, y_0 tais que A tem fecho compacto e que satisfaz:

1. Se $A \subset X$ tem fecho compacto e $A_1, \ldots, A_n$ são subcojuntos disjuntos de A também com fechos compactos em X tais que

   (a) (f, A) e (f, A_i), $1 \leq i \leq n$, são pares propriamente admissíveis,

   (b) os conjuntos A_i, $1 \leq i \leq n$, contém todas as raízes de f que estão em A, isto é, $(A - \cup_i A_i) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$,

   então $\lambda(f, A) = \sum_i \lambda(f, A_i)$.

2. Se $\{f_t \colon X \to Y\}$ é uma homotopia própria, $A \subset X$ é aberto e tem fecho compacto, e para todo $t \in \mathbf{I}$, (f_t, A) é um par propriamente admissível para X, Y, y_0 então $\lambda(f_0, A) = \lambda(f_1, A)$.

Pelo teorema (2.36) λ admite uma única extensão a um índice próprio de raízes para X, Y, y_0 com valores em $\mathbb{Z}$. A esta extensão chamamos **índice inteiro** de raízes e a denotamos, também, por λ.

Observação 2.45. Quando X é uma n-variedade compacta, tomamos $K = X$ na discusão acima. Neste caso, o homomorfismo

$$\bar{f}_n \circ e_n^{-1} \circ i_{Kn} \colon H_n(X, X - K; \mathbb{Z}) \to H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z})$$

é o homomorfismo

$$I_n(f, A) = \bar{f}_n \circ e_n^{-1} \circ i_n \colon H_n(X; \mathbb{Z}) \to H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z})$$

da definição do índice homológico (2.37). Se, além disso, X for conexa, então o_X é um gerador de $H_n(X; \mathbb{Z})$ de modo que o índice inteiro é o índice definido por (2.42).

Vejamos como o índice inteiro se relaciona com o grau local de uma aplicação. Se X é uma n-variedade orientável, Y é um espaço localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f\colon X \to Y$ é uma aplicação própria então o par $(f, f^{-1}(y_0))$ é propriamente admissível. Na definição do índice inteiro $\lambda(f, f^{-1}(y_0))$, tomando o compacto K como sendo o próprio $f^{-1}(y_0)$ temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
(N, N - f^{-1}(y_0)) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, hook, "e"'] & (Y, Y - y_0) \\
(X, X - f^{-1}(y_0)) \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $\bar{f}$ e f' são induzidas por f e e é uma excisão. Assim se ν é uma orientação local de Y em y_0 então

$$\lambda(f, f^{-1}(y_0))\nu = \bar{f}_n \circ e_n^{-1}(o_{f^{-1}(y_0)}) = f'_n(o_{f^{-1}(y_0)}) = \mathrm{gr}_{y_0}(f)\nu.$$

Ou seja, $\lambda(f, f^{-1}(y_0)) = \mathrm{gr}_{y_0}(f)$. Por outro lado, da aditividade do índice temos que $\lambda(f, f^{-1}(y_0)) = \lambda(f, X)$. Logo $\lambda(f, X) = \mathrm{gr}_{y_0}(f)$. Deste fato e da proposição (1.27) obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.46. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria entre variedades orientáveis de mesma dimensão com Y conexa. Então $\lambda(f, X) = \mathrm{gr}(f)$.*

2.2.4 O índice inteiro como grau local

Veremos agora uma descrição do índice inteiro em termos do grau local de uma aplicação. Sejam X uma n-variedade orientável e Y um espaço localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$. Sejam também $s_X \colon X \to \widetilde{X}$ uma orientação de X e $\nu \in H_n(Y, Y - y_0)$ uma orientação local de Y em y_0 e consideremos λ o índice inteiro de raízes para X, Y, y_0 construído acima. Sejam ainda $E \subset Y$ uma vizinhança n-euclidiana de y_0 e $s_E \colon E \to \widetilde{E}$ a orientação de E tal que $j_n(s_E(y_0)) = \nu$, onde j_n é a induzida no n-ésimo grupo de homologia da inclusão $j\colon (E, E - y_0) \hookrightarrow (Y, Y - y_0)$. Se (f, A) é um par propriamente admissível para X, Y, y_0 então $(f, f^{-1}(y_0) \cap A)$ também o é, e portanto $f^{-1}(y_0) \cap A$ admite uma vizinhança fechada C tal que $C - (f^{-1}(y_0) \cap A)$ não contém raízes de f em y_0. Consideremos o aberto $U = \mathrm{int}C \cap f^{-1}(\mathrm{int}E)$. Então:

1) $f^{-1}(y_0) \cap A \subset U$, pois $f^{-1}(y_0) \cap A \subset f^{-1}(y_0) \subset f^{-1}(\mathrm{int}E)$;

2) $f(U) \subset E$, pois $U = \mathrm{int}C \cap f^{-1}(\mathrm{int}E) \subset f^{-1}(\mathrm{int}E)$; e

3) $U - (f^{-1}(y_0) \cap A)$ não possui raízes de f em y_0, pois é igual a

$$(\mathrm{int}C - (f^{-1}(y_0) \cap A)) \cap (f^{-1}(\mathrm{int}E) - (f^{-1}(y_0) \cap A)).$$

Seja $s_U \colon U \to \widetilde{U}$ a restrição de s_X a U.

Teorema 2.47. *Com as notações acima e relativamente às orientações s_U e s_E vale que*

$$\lambda(f, A) = \mathrm{gr}_{y_0}(f_{UE}),$$

onde $f_{UE} \colon U \to E$ é definida por f.

Demonstração. Da aditividade do índice temos que $\lambda(f, A) = \lambda(f, f^{-1}(y_0) \cap A)$. Além disso $f^{-1}(y_0) \cap A = f_{UE}^{-1}(y_0)$. De sorte que é suficiente mostramos que $\lambda(f, f_{UE}^{-1}(y_0)) = \mathrm{gr}_{y_0}(f_{UE})$.

Temos que $f^{-1}(y_0)$ é compacto em X pois f é própria; e como (f, A) é um par admissível para X, Y, y_0 temos também que $f^{-1}(y_0) \cap A = f^{-1}(y_0) \cap \overline{A}$ e este é um fechado em X (e portanto fechado no compacto $f^{-1}(y_0)$). Logo $f_{UE}^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0) \cap A$ é um compacto em X. Assim para calcular $\lambda(f, f_{UE}^{-1}(y_0))$ vamos considerar, na definição de λ, $K = f_{UE}^{-1}(y_0)$ e $N = U$. Consideremos também o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
(X, X - f_{UE}^{-1}(y_0)) & (U, U - f_{UE}^{-1}(y_0)) \arrow[l, hook', "e"'] \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, equal] & (Y, Y - y_0) \\
 & (U, U - f_{UE}^{-1}(y_0)) \arrow[r, "\bar{f}_{UE}"] & (E, E - y_0) \arrow[u, hook, "j"'] \\
 & U \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_{UE}"] & E \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

onde $\bar{f}$, $\bar{f}_{UE}$ e f_{UE} são definidas por f e as demais funções são inclusões. Da definição do índice inteiro de raízes temos que

$$\bar{f}_n \circ e_n^{-1}(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(X)) = \lambda(f, f_{UE}^{-1}(y_0))\nu,$$

onde $o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(X)$ é a classe fundamental de X em $f_{UE}^{-1}(y_0)$. Por outro lado, da definição do grau de f_{UE} em y_0 temos que

$$\bar{f}_{UEn}(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U)) = (\mathrm{gr}_{y_0}(f_{UE}))s_E(y_0),$$

onde $o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U)$ é a classe fundamental de U em $f_{UE}^{-1}(y_0)$. Aplicando j_n em ambos os lados da última equação resulta

$$j_n \circ \bar{f}_{UEn}(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U)) = (\mathrm{gr}_{y_0}(f_{UE}))j_n \circ s_E(y_0) = (\mathrm{gr}_{y_0}(f_{UE}))\nu,$$

mas $j_n \circ \bar{f}_{UEn}(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U)) = \bar{f}_n(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U))$ e portanto $\bar{f}_n(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U)) = (\mathrm{gr}_{y_0}(f_{UE}))\nu$. Resta mostrar que $o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U) = e_n^{-1}(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(X))$. Para tanto, seja $x \in f_{UE}^{-1}(y_0)$ e consideremos o diagrama comutativo de inclusões

$$\begin{tikzcd}
(X, X - f_{UE}^{-1}(y_0)) \arrow[d, hook, "i_x"] & (U, U - f_{UE}^{-1}(y_0)) \arrow[l, hook', "e"'] \arrow[d, hook, "k_x"] \\
(X, X - x) & (U, U - x) \arrow[l, hook', "e_x"]
\end{tikzcd}$$

Então

$$i_{xn} \circ e_n(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U)) = e_{xn} \circ k_{xn}(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U)) = e_{xn} \circ s_U(x) = s_X(x).$$

Da definição de classe fundamental $o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}$ segue que $e_n(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U)) = o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(X)$ e portanto $o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(U) = e_n^{-1}(o_{f_{UE}^{-1}(y_0)}(X))$. □

2.2.5 O índice inteiro módulo dois

Na construção do índice inteiro de raízes consideramos X uma variedade orientável e homologia com coeficientes inteiros. Contudo estamos interessados no caso em que X é uma variedade não necessariamente orientável. Nestes casos podemos considerar homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. Assim podemos, de maneira análoga ao caso inteiro, definir um índice de raízes tomando valores em $\mathbb{Z}_2$. Tal definição pode ser feita independente da orientabilidade de X. Além disso não precisamos preocupar-nos com escolha de orientação uma vez que os grupos locais $H_n(X, X-x; \mathbb{Z}_2)$ têm geradores únicos. O índice próprio de raízes para X, Y, y_0 com valores em $\mathbb{Z}_2$ obtido será chamado **índice inteiro módulo dois** e será denotado por λ_2. O teorema (2.47) tem seu paralelo para λ_2 e, neste caso, o grau local é, como deve ser, definido em termos de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

2.3 Alguns exemplos

Vamos fazer uma pausa no desenvolvimento da teoria para ilustrar o que foi feito até agora através de alguns exemplos. Iniciamos com um exemplo que ilustra o fato de um índice de raízes, em geral, não indicar, globalmente, a existência de raízes.

Exemplo 2.48. Consideremos a esfera $\mathbb{S}^2$ como a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$ e o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ como $\mathbb{S}^2$ com os pontos antípodas identificados. Seja $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ a identificação. Denotemos por $P_n = (0,0,1)$ e $P_s = (0,0,-1)$ os pólos norte e sul de $\mathbb{S}^2$, respectivamente, e consideremos $p = \{P_n, P_s\} = f(\{P_n, P_s\}) \in \mathbb{P}^2$. Então f tem como únicas raízes em p os pólos norte e sul, P_n e P_s. A imagem, por f, de qualquer caminho em $\mathbb{S}^2$ unindo os pólos norte e sul é um laço em $\mathbb{P}^2$ baseado em p cuja classe de homotopia é um gerador do grupo fundamental de $\mathbb{P}^2$, $\pi(\mathbb{P}^2, p)$. Logo as duas únicas raízes de f em p não podem ser equivalentes e, portanto, f possui exatamente duas classes de raízes em p: $\{P_n\}$ e $\{P_s\}$.

Sejam N uma vizinhança fechada do pólo norte toda contida no hemisfério norte, $\bar{\bar{f}}\colon (N, N-P_n) \to (f(N), f(N)-p)$ a aplicação definida por f e consideremos o diagrama

$$\mathbb{S}^2 \overset{i}{\subset} (\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 - P_n) \overset{e}{\supset} (N, N-P_n) \xrightarrow{\bar{\bar{f}}} (f(N), f(N)-p) \overset{\bar{e}}{\subset} (\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 - p).$$

As inclusões e e $\bar{e}$ são excisões e $\bar{\bar{f}}$ é um homeomorfismo de modo que todas as três induzem isomorfismo em homologia. A inclusão i induz isomorfismo na homologia de dimensão dois. Observemos que $\bar{f} = \bar{e} \circ \bar{\bar{f}}$ é a aplicação definida por f que usamos na construçao de I_*. Então

$$I_2(f, \{P_n\}; \mathbb{Z}) = \bar{e}_2 \circ \bar{\bar{f}}_2 \circ e_2^{-1} \circ i_2$$

é um isomorfismo de $H_2(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z})$ em $H_2(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 - p; \mathbb{Z})$ e, portanto, $\{P_n\}$ é uma classe de raízes essencial de f em p.

Do teorema (2.39) resulta que

$$I_2(f, \{P_s\}; \mathbb{Z}) = \pm I_2(f, \{P_n\}; \mathbb{Z}) \tag{2.49}$$

de onde obtemos que $\{P_s\}$ também é uma classe de raízes essencial de f em p. Logo $\mathrm{NR}(f, p) = 2$.

Vamos mostrar que a igualdade em (2.49) é realizada com o sinal negativo. Seja $a\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ a aplicação antípoda, isto é, $a(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Então $a(N)$ é uma vizinhança fechada do pólo sul toda contida no hemisfério sul. Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^2 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, leftrightarrow, "a"'] & (\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 - P_n) \arrow[d, leftrightarrow, "a'"'] & (N, N - P_n) \arrow[l, hook', "e"'] \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, leftrightarrow, "a''"'] & (\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 - p) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{S}^2 \arrow[r, hook, "j"'] & (\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 - P_n) & (a(N), a(N) - P_s) \arrow[l, hook', "\ell"] \arrow[r, "f'"'] & (\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 - p)
\end{tikzcd}$$

onde a' e a'' são definidas por a, $\bar{f}$ e f' são definidas por f e e e ℓ são excisões. As aplicações e, ℓ, a' e a'' induzem isomorfismo em homologia de onde obtemos a igualdade $\ell_2^{-1} = a_2'' \circ e_2^{-1} \circ a_2'$ que juntamente com a comutatividade do digrama implicam que

$$\begin{aligned}
I_2(f, \{P_s\}; \mathbb{Z}) &= f_2' \circ \ell_2^{-1} \circ i_2' \\
&= f_2' \circ a_2'' \circ e_2^{-1} \circ a_2' \circ i_2' \\
&= \bar{f}_2 \circ e_2^{-1} \circ i_2 \circ a_2 \\
&= I_2(f, \{P_n\}; \mathbb{Z}) \circ a_2 \\
&= -I_2(f, \{P_n\}; \mathbb{Z}),
\end{aligned}$$

pois $a_2 = -\operatorname{id}_{H_2(\mathbb{S}^2)}$. Como $\{P_n\}$ e $\{P_s\}$ são as únicas duas classes de raízes de f em p, segue da aditividade de I_2 que

$$I_2(f, \mathbb{S}^2) = I_2(f, \{P_n\}) + I_2(f, \{P_s\}) = 0.$$

O índice inteiro de raízes permite-nos dar um exemplo onde o número de Nielsen é estritamente menor do que o número próprio de Nielsen.

Exemplo 2.50. Sejam $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a identidade e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Então y_0 é a única raiz de f em y_0 e portanto $\{y_0\}$ é a única classe de raízes de f em y_0. Sejam $s\colon \mathbb{R}^n \to \widetilde{\mathbb{R}}^n$ uma orientação de $\mathbb{R}^n$ e $\nu = s(y_0)$ a orientação local de $\mathbb{R}^n$ em y_0. Para calcularmos $\lambda(f, y_0)$ consideremos $N = \mathbb{R}^n$ e $K = \{y_0\}$. Então $i_K\colon (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - y_0)$ e $e\colon (N, N - y_0) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - y_0)$ são ambas a identidade. Também é a identidade a aplicação $\bar{f}\colon (N, N - y_0) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - y_0)$. Logo $\bar{f}_n \circ e_n^{-1} \circ (i_K)_n$ é a identidade em $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - y_0; \mathbb{Z})$. Como $o_K = \nu$ resulta que $\lambda(f, y_0) = 1$. Pelo corolario (2.35) temos que $\{y_0\}$ é uma classe propriamente essencial e portanto $\mathrm{PNR}(f, y_0) = 1$.

Por outro lado, seja $y_1 \in \mathbb{R}^n$ um ponto distinto de y_0 e consideremos a homotopia $\{f_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ dada por $f_t(y) = (1-t)y + ty_1$. Então $\{f_t\}$ começa na identidade f e termina na aplicação constante y_1 de modo que $f_1^{-1}(y_0) = \emptyset$ e portanto $\mathrm{NR}(f_1, y_0) = 0$. Como NR é um invariante homotópico segue que $\mathrm{NR}(f, y_0) = \mathrm{NR}(f_1, y_0) = 0$. Desta forma $\mathrm{NR}(f, y_0) < \mathrm{PNR}(f, y_0)$.

Nos próximos dois exemplos calculamos o número de Niesen para aplicações da esfera $\mathbb{S}^n$ em si mesma, vide [BS01, Teorema 3.13, p.66].

Exemplo 2.51. Sejam $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ uma aplicação e $y_0 \in \mathbb{S}^1$. Como o grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ é abeliano temos, pelo teorema (2.20), que o número de Reidemeister de f é igual à cardinalidade do conúcleo da aplicação induzida por f no primeiro grupo de homologia, isto é, $\mathrm{RR}(f) = \mathrm{Coker}(f_1)$ onde $f_1\colon H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$ é a induzida por f. Da definição do grau temos que $f_1(x) = \operatorname{gr}(f)x$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$ de onde concluímos que

$$\mathrm{RR}(f) = \#\operatorname{Coker}(f_1) = \#(\mathbb{Z}/\operatorname{gr}(f)\mathbb{Z}) = \begin{cases} |\operatorname{gr}(f)| & \text{se } \operatorname{gr}(f) \neq 0, \\ \infty & \text{se } \operatorname{gr}(f) = 0. \end{cases}$$

Pela observação (2.46), temos que $\lambda(f, \mathbb{S}^1) = \operatorname{gr}(f)$. Assim se $\operatorname{gr}(f) \neq 0$ então $\mathrm{NR}(f, y_0) > 0$ e do corolário (2.23) resulta que $\mathrm{NR}(f, y_0) = \mathrm{RR}(f) = |\operatorname{gr}(f)|$. Por outro lado, se $\operatorname{gr}(f) = 0$ então $\mathrm{RR}(f) = \infty$ e do corolário (2.24) resulta que $\mathrm{NR}(f, y_0) = 0$. Em qualquer caso, e como $\mathrm{NR}(f, y_0) = \mathrm{PNR}(f, y_0)$ pois $\mathbb{S}^1$ é compacto, concluímos que $\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathrm{NR}(f, y_0) = |\operatorname{gr}(f)|$.

Exemplo 2.52. Sejam $n > 1$, $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação e $y_0 \in \mathbb{S}^n$. Aqui, como no exemplo anterior, $\mathrm{NR}(f, y_0) = \mathrm{PNR}(f, y_0)$. Como $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexo, f admite, no máximo, uma classe de raízes em y_0. Pela observação (2.46), $\lambda(f, \mathbb{S}^n) = \operatorname{gr}(f)$. Portanto se $\operatorname{gr}(f) \neq 0$ então $\mathrm{NR}(f, y_0) = 1$. Por outro lado, se $\operatorname{gr}(f) = 0$ sabemos que f é homotópica a uma aplicação constante e, neste caso, podemos escolher uma constante distinta de y_0 de modo que $\mathrm{NR}(f, y_0) = 0$. Resumindo

$$\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathrm{NR}(f, y_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } \operatorname{gr}(f) \neq 0, \\ 0 & \text{se } \operatorname{gr}(f) = 0. \end{cases}$$

O exemplo a seguir ilustra um outro caso em que o número mínimo de raízes $\mathrm{MR}(f, y_0)$ é estritamente maior que o número de Nielsen $\mathrm{NR}(f, y_0)$.

Exemplo 2.53. Consideremos a esfera $\mathbb{S}^1$ como o círculo unitário no plano complexo e seja X a união de duas esferas $\mathbb{S}^1$ unidas por um ponto (a figura do oito), isto é, seja $X = \mathbb{S}^1 \times \{1\} \cup \{1\} \cup \mathbb{S}^1$. Sejam $f\colon X \to \mathbb{S}^1$ e $y_0 = 1 \in \mathbb{S}^1$. Sejam $e\colon \mathbb{S}^1 \subset X$ e $d\colon \mathbb{S}^1 \subset X$ as inclusões na esquerda e na direita de X, isto é, $e(z) = (z, 1)$ e $d(z) = (1, z)$. Se ν é um gerador de $H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1 - 1)$ então $H_1(X)$ é o grupo abeliano livre gerado por $e(\nu)$ e $d(\nu)$, e

$$f_1(k_e e(\nu) + k_d d(\nu)) = (k_e \operatorname{gr}(f \circ e) + k_d \operatorname{gr}(f \circ d))\nu, \tag{2.54}$$

onde $f_1\colon H_1(X) \to H_1(\mathbb{S}^1)$ é o homomorfismo induzido por f. Como $j\colon \mathbb{S}^1 \to (\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1 - 1)$ induz um isomorfismo $j_1\colon H_1(\mathbb{S}^1) \to H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1 - 1)$ temos que $I_1(f, X) = j_1 \circ f_1 \neq 0$ se algum dos graus $\operatorname{gr}(f \circ e), \operatorname{gr}(f \circ d)$ for não nulo e, neste caso, $\mathrm{NR}(f, 1) > 0$.

Como o grupo fundamental da esfera $\mathbb{S}^1$ é abeliano temos, pelo teorema (2.20) que $\mathrm{RR}(f) = \#\operatorname{Coker}(f_1)$. Da equação ((2.54)) acima, resulta que o conúcleo de f_1 é isomorfo ao grupo quociente de $\mathbb{Z}$ por $\operatorname{gr}(f \circ e)\mathbb{Z} + \operatorname{gr}(f \circ d)\mathbb{Z}$. Assim, se ambos $\operatorname{gr}(f \circ e)$ e $\operatorname{gr}(f \circ d)$ forem nulos, então $\mathrm{RR}(f) = \infty$; e se algum dos graus for não nulo então

$$\mathrm{RR}(f) = \operatorname{mdc}(|\operatorname{gr}(f \circ e)|, |\operatorname{gr}(f \circ d)|).$$

Neste exemplo também ocorre a igualdade $\mathrm{NR}(f, 1) = \mathrm{PNR}(f, 1)$, pois X é compacto. Pelos corolários (2.23) e (2.24) temos que

$$\mathrm{NR}(f, 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } \operatorname{gr}(f \circ e) = \operatorname{gr}(f \circ d) = 0, \\ \operatorname{mdc}(\operatorname{gr}(f \circ e), \operatorname{gr}(f \circ d)) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em particular, se $f(z_1, z_2) = z_1^2 z_2$ então $f \circ e(z) = z^2$ e $f \circ d(z) = z$ de sorte que $\mathrm{PNR}(f, 1) = \mathrm{NR}(f, y_1) = \operatorname{mdc}(2, 1) = 1$. Agora se g é uma aplicação homotópica a f então

$g \circ e$ tem grau e admite duas raízes, digamos x_1 e x_2, em 1. Neste caso, $(x_1, 1)$ e $(x_2, 1)$ são duas raízes de g em 1. Ou seja, toda aplicação homotópica a f tem pelo menos duas raízes. Logo, neste exemplo, $\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathrm{NR}(f, 1) < \mathrm{MR}(f, 1)$.

Em verdade, o exemplo acima é um caso particular do exemplo a seguir.

Exemplo 2.55. Como no exemplo acima, consideremos $\mathbb{S}^1$ como o círculo unitário no plano complexo. Seja $X = \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{S}^1_k$ um bouquê de enumeráveis círculos, ou seja, a união enumerável de círculos $\mathbb{S}^1$ unidos por um único ponto. Consideremos X munido da topologia fraca (um subconjunto de X é aberto se, e somente se, sua interseçao com cada $\mathbb{S}^1_k$ é aberto) e seja $f \colon X \to \mathbb{S}^1$ uma aplicação própria. Observemos que X não é compacto. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ seja $j_k \colon \mathbb{S}^1_k \subset X$ a inclusão. Como no exemplo acima mostra-se que

$$\mathrm{PNR}(f, 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{gr}(f \circ j_k) = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}, \\ \mathrm{mdc}\{|\mathrm{gr}(f \circ j_k)|\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observemos que este exemplo é uma fonte de exemplos para os quais o número de Nielsen é finito e o número mínimo de raízes é infinito e, portanto, $\mathrm{PNR}(f, 1) < \mathrm{MR}(f) = \infty$.

Veremos agora um caso em que, diferentemente do acontece quando o espaço de chegada da aplicação é uma variedade (corolário (2.23)), o número de Nielsen é positivo e estritamente menor que o número de Reidemeister.

Exemplo 2.56. Sejam $Y = \mathbb{S}^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times \mathbb{S}^1$ a união de dois círculos unidos pelo ponto $y_0 = (1, 1)$ e $e \colon \mathbb{S}^1 \to Y$ a inclusão na esfera esquerda de Y, como no exemplo (2.53). O ponto $1 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ é a única raiz de e em y_0 e, portanto, $\mathrm{NR}(e, y_0) \leq 1$. De $Y - y_0$ ser a união de duas componentes conexas por caminhos contráteis resulta que o primeiro grupo de homologia $H_1(Y - y_0)$ é trivial. Seja $j \colon Y \subset (Y, Y - y_0)$ a inclusão. Da sequência exata do par obtemos

$$0 = H_1(Y - y_0; \mathbb{Z}) \to H_1(Y; \mathbb{Z}) \xrightarrow{j_1} H_1(Y, Y - y_0; \mathbb{Z}),$$

de onde concluímos que j_1 é um homomorfismo injetor. Assim

$$I_1(e, \mathbb{S}^1) = j_1 \circ e_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e_1 = 0.$$

Consideremos agora $p_e \colon Y \to \mathbb{S}^1$ a projeção na esfera esquerda de Y, isto é, $p_e(z_1, z_2) = z_1$, para todo $(z_1, z_2) \in Y$. Então $p_e \circ e$ é a identidade em $\mathbb{S}^1$ de sorte que $e_1 \colon H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \to H_1(Y; \mathbb{Z})$ não é o homomorfismo trivial. Então $I_1(e, \mathbb{S}^1) \neq 0$ o que implica que $\mathrm{NR}(e, y_0) > 0$. Logo $\mathrm{NR}(e, y_0) = 1$.

Por outro lado, $\mathrm{RR}(e) = \#\,\mathrm{Coker}(e_1) = \infty$. Concluímos então que $0 < \mathrm{NR}(e, y_0) < \mathrm{RR}(e)$.

Para finalizar, apresentamos dois exemplos em que o número de Nielsen depende do ponto em que se consideram as raízes quando o contradomínio da aplicação não é uma variedade (vide corolário (2.25)) e que ilustram o teorema (2.26).

Exemplo 2.57. Seja $X = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$ uma coroa circular no plano complexo. Seja J a interseção de X com o eixo real positivo, isto é,

$$J = \{x + iy \in \mathbb{C} : 1/2 < x < 2 \text{ e } y = 0\}.$$

Seja $Y = X/J$ o espaço quociente obtido de X pela identificação de J a um único ponto e consideremos $f\colon X \to Y$ a aplicação quociente. Consideremos ainda $y_0 = J \in Y$. Então $f^{-1}(y_0) = J \subset X$. Dados duas raízes de f em y_0, $z_0, z_1 \in f^{-1}(y_0) = J$, o segmento de reta contido em J que os une é um caminho cuja imagem por f é o laço constante em $y_0 = J$. Assim f possui uma única classe de raízes em y_0 e, portanto, $\mathrm{NR}(f, y_0) \leq 1$. Agora a aplicação $r\colon X \to \mathbb{S}^1 \subset X$ dada por $r(z) = z/|z|$ é um retrato por deformação e induz retratos por deformação $r'\colon Y \to \mathbb{S}^1$ e $r''\colon (Y, Y - y_0) \to (\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1 - 1)$ de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & Y \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "r'"'] & (Y, Y - y_0) \arrow[d, "r''"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{S}^1 \arrow[r, hook, "k"'] & (\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1 - 1)
\end{tikzcd}$$

comuta. Os retratos por deformação r, r' e r'' induzem isomorfismos em homologia, e a inclusão k induz isomorfismo homológico em dimensão um. Logo f_1 e j_1 também são isomorfismos. Então

$$I_1(f, X) = j_1 \circ f_1 \colon H_1(X; \mathbb{Z}) \to H_1(Y, Y - y_0; \mathbb{Z})$$

é não trivial de modo que o número de Nielsen de f em y_0 é não nulo. Logo $\mathrm{NR}(f, y_0) = 1$.

Por outro lado, seja $y_0 \in Y$ um ponto distinto de $y_0 = J$. Então f possui uma única raiz em y_0, digamos z_0. Se $z_0 \notin \mathbb{S}^1 \subset X$ então $f \circ r$ é uma aplicação homotópica a f que não possui raiz em y_0. Se $z_0 \in \mathbb{S}^1 \subset X$ então, redefinindo r por $r(z) = 3z/2|z|$, temos que $f \circ r$ é uma aplicação homotópica a f que não possui raiz em y_1. Logo $\mathrm{NR}(f, y_0) = 0$. Em resumo

$$\mathrm{NR}(f, y_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } y_0 = J, \\ 0 & \text{sw } y_0 \neq J. \end{cases}$$

Observemos que neste exemplo, X e Y são espaçõs não compactos e f não é própria, uma vez que $J \subset Y$ é compacto mas $f^{-1}(J) = J \subset X$ não o é.

Exemplo 2.58. Sejam $n > 2$ e Y a união de duas esferas unidas por um ponto, isto é, consideremos

$$Y = \mathbb{S}^n \times \{z_0\} \cup \{z_0\} \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n.$$

onde $z_0 \in \mathbb{S}^n$ e seja $e\colon \mathbb{S}^n \to Y$ dada por $e(z) = (z, z_0)$ para todo $z \in \mathbb{S}^n$, ou seja, e é a inclusão na esquerda. A única raiz de e em $y_0 = (z_0, z_0)$ é z_0 e, portanto, $\mathrm{NR}(e, y_0) \leq 1$. Constata-se facilmente que $\{z_0\}$ é uma classe de raízes essencial. Logo $\mathrm{NR}(e, y_0) = 1$. O mesmo raciocínio se aplica a qualquer ponto $y \in Y$ na esfera da esquerda, ou seja, $\mathrm{NR}(e, y) = 1$ para todo $y = (z, z_0) \in Y$. Por outro lado, a aplicação e não possui raízes em pontos da esfera direita, distintos de y_0, isto é, se $y = (z_0, z) \in Y$ com $z \neq z_0$ então e não possui raiz em y e então $\mathrm{NR}(f, y) = 0$. Observemos que, novamente, o número de Nielsen próprio coincide com o número de Nielsen pois $\mathbb{S}^n$ é compacta. Em resumo

$$\mathrm{PNR}(f, y) = \mathrm{NR}(f, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = (z, z_0) \\ 0 & \text{se } y = (z_0, z),\ z \neq z_0. \end{cases}$$

2.4 Multiplicidade e grau absoluto

O primeiro de nossos resultados principais, o teorema (3.17) relaciona dois conceitos de uma dada aplicação: a transversalidade a um ponto e o grau absoluto. Informalmente, uma aplicação é transversa a um ponto de seu contra-domínio se é um recobrimento neste ponto.

O grau absoluto de uma aplicação vem a ser um número de Nielsen da mesma e é definido como a soma das multiplicidades das classes de raízes desta aplicação, multiplicidade esta que serve, grosso modo, como um indicador da essencialidade de uma classe de raízes e, em alguns casos, um medidor da quantidade mínima de raízes. Nesta seção vamos formalizar e estudar um pouco estes três conceitos: transversalidade, multiplicidade e grau absoluto.

2.4.1 Tranversalidade

Uma **raiz isolada** de uma aplicação $f\colon X \to Y$ em $y_0 \in Y$ é uma raiz que admite uma vizinhança sem nenhuma outra raiz de f em y_0. Se todas as raízes de uma aplicação num ponto são isoladas então o conjunto das raízes é discreto de modo que se a aplicação é própria então tal conjunto é compacto e, portanto, finito. Ou seja, se $f\colon X \to Y$ é uma aplicação própria cujas raízes em $y_0 \in Y$ são todas isoladas então $f^{-1}(y_0)$ é finito.

Uma aplicação $f\colon X \to Y$ é um *homeomorfismo local* em $x \in X$ se x possui uma vizinhança que se aplica por f homeomorficamente sobre uma vizinhança de $f(x)$. Observemos que se f é um homeomorfismo local em uma raiz então tal raiz é isolada.

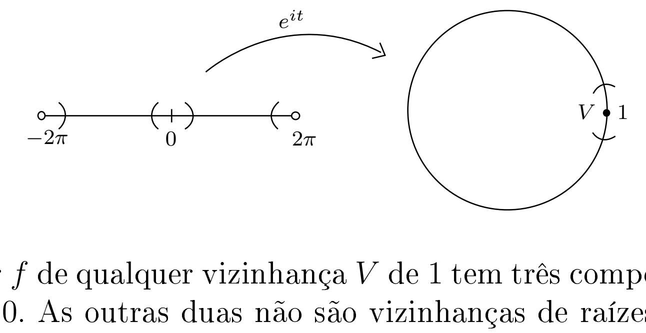
Definição 2.59. Uma aplicação $f\colon X \to Y$ é **tranversa a** $y_0 \in Y$ se y_0 admite uma vizinhança V tal que $f^{-1}(V)$ é uma união disjunta, indexada por $f^{-1}(y_0)$, de subconjuntos de X cada um dos quais é uma vizinhança de uma raiz de f em y_0 e se aplica por f homeomorficamente sobre V.

Observação 2.60. Quando $f^{-1}(y_0)$ é vazio, f pode ou não ser transversa a y_0. Se y_0 não está no fecho da imagem de f então admite uma vizinhaça V cuja imagem inversa por f é vazio e, portanto, a união de uma família vazia que, por vacuidade, satisfaz a definição acima. Neste caso, f é, por vacuidade, tranversa a y_0. Por outro lado, se y_0 não está na imagem de f e está na fronteira desta então $f^{-1}(V)$ é não vazio para toda vizinhança V de y_0. Acontece neste caso, que nenhum subconjunto de $f^{-1}(V)$ se aplica por f sobrejetivamente sobre V de modo que f não pode ser tranversa a y_0.

Assim ser transversa a um ponto é como ser um recobrimento neste ponto. De fato, se X é conexo por caminhos, então uma aplicação $f\colon X \to Y$ é um recobrimento se, e somente se, é transversa a todo $y \in Y$.

Se uma aplicação $f\colon X \to Y$ é tranversa a $y_0 \in Y$ então todas as suas raízes em y_0 são isoladas e f é um homeomorfismo local em cada uma dessas raízes. A recíproca, como nos mostra o exemplo a seguir, não é verdadeira em geral.

Exemplo 2.61. Consideremos a aplicação exponencial do intervalo $(-2\pi, 2\pi)$ na esfera $\mathbb{S}^1$ do plano complexo, isto é, seja $f\colon (-2\pi, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$ definida por $f(t) = e^{it}$. Em $1 \in \mathbb{S}^1$, f tem como única raiz o ponto $0 \in (-2\pi, 2\pi)$.



A imagem inversa por f de qualquer vizinhança V de 1 tem três componentes, uma das quais é uma vizinhança de 0. As outras duas não são vizinhanças de raízes de f em 1 tampouco se aplicam por f homeomorficamente sobre nhança V.

Contudo, a recíproca é verdadeira desde que f seja própria e y_0 admita uma vizinhança compacta.

Teorema 2.62. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria e $y_0 \in Y$ um ponto que admite uma vizinhança compacta. Se f é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em y_0 então f é tranversa a y_0.*

Demonstração. Seja $K \subset Y$ uma vizinhança compacta de y_0. Então $f^{-1}(K)$ é compacto pois f é própria. Logo $f^{-1}(y_0)$ é finito (lembremos que, neste trabalho, todos os espaços são Hausdorff). Como f é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes, para cada $x \in f^{-1}(y_0)$ considere uma vizinhança aberta U_x de x que se aplica por f homeomorficamente sobre sua imagem $f(U_x)$ que podemos supor, intersectando com $\operatorname{int}K$ se necessário, contida em K. Então $V = \bigcap_{x\in f^{-1}(y_0)} f(U_x)$ é uma vizinhança aberta (pois $f^{-1}(y_0)$ é finito) de y_0 contida em K. Para cada $x \in f^{-1}(y_0)$ seja $W_x = U_x \cap f^{-1}(V)$. Então para cada $x \in f^{-1}(y_0)$, W_x é uma vizinhança de x que se aplica por f homeomorficamente sobre V. Por contrução, $\bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} W_x \subset f^{-1}(V)$. Seja $\mathcal{C}$ a família de todos as vizinhanças fechadas de y_0 contidas em V. A família $\mathcal{C}$ é não vazia. Com efeito, y_0 e $K - V$ sendo fechados disjuntos no espaço normal K (compacto Hausdorff), admitem vizinhanças abertas (em K) disjuntas. O fecho de uma tal vizinhança de y_0 está, necessáriamente, contido em V sendo, portanto, um elemento de $\mathcal{C}$. Da normalidade de K segue também que a interseção de $\mathcal{C}$ é y_0, isto é, $\bigcap \mathcal{C} = \{y_0\}$, pois dado $y \neq y_0$ sempre podemos encontrar uma vizinhança fechada de y_0 (contida em K) disjunta de y. Então

$$
\begin{aligned}
\bigcap_{C\in\mathcal{C}} \Big(f^{-1}(C) - \bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} W_x\Big) &= f^{-1}\Big(\bigcap_{c\in\mathcal{C}} C\Big) - \bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} W_x \\
&= f^{-1}(y_0) - \bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} W_x \\
&= \emptyset,
\end{aligned}
$$

pois $f^{-1}(y_0) \subset \bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} W_x$. Assim $\{(f^{-1}(C) - \bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} W_x) : c \in \mathcal{C}\}$ é uma família de fechados do compacto $f^{-1}(K)$ cuja interseção é vazia. Logo tal família não possui a propriedade da interseção finita e portanto existe uma subfamília fintita $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ tal que

$$
f^{-1}\Big(\bigcap_{C\in\mathcal{C}'} C\Big) - \bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} W_x = \bigcap_{c\in\mathcal{C}'} \Big(f^{-1}(C) - \bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} W_x\Big) = \emptyset,
$$

de onde concluimos que $f^{-1}(\bigcap_{c\in\mathcal{C}'} C) \subset \bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} W_x$. Assim $\bigcap_{C\in\mathcal{C}'} C$ é uma vizinhança de y_0 tal que

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\Big(\bigcap_{C\in\mathcal{C}'} C\Big) &= \Big(\bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} W_x\Big) \cap f^{-1}\Big(\bigcap_{C\in\mathcal{C}'} C\Big) \\
&= \bigsqcup_{x\in f^{-1}(y_0)} \Big(W_x \cap f^{-1}\Big(\bigcap_{C\in\mathcal{C}'} C\Big)\Big),
\end{aligned}
$$

e, para cada $x \in f^{-1}(y_0)$, a vizinhança $W_x \cap f^{-1}(\bigcap_{C\in\mathcal{C}'} C)$ de x se aplica, por f, homeomorficamente sobre $\bigcap_{C\in\mathcal{C}'} C$. Isto mostra que f é transversa a y_0. $\square$

Vamos definir um número mínimo de raízes de uma aplicação $f\colon X \to Y$ em $y_0 \in Y$ como na definição (2.1), mas, tendo em vista o teorema (3.17), o faremos considerando apenas aplicações propriamente homotópicas a f e transversas a y_0.

Definição 2.63. Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria entre espaços topológicos e $y_0 \in Y$. O **número mínimo transverso** de raízes de f em y_0, denotado por $\mathrm{MR}_{\mathcal{T}}(f, y_0)$, é o mínimo do conjunto

$$\{\#g^{-1}(y_0) \mid g\colon X \to Y \text{ é propriamente homotópica a } f \text{ e transversa a } y_0\}.$$

Claro que $\mathrm{MR}(f, y_0) \leq \mathrm{MR}_{\mathcal{T}}(f, y_0)$.

2.4.2 Multiplicidade

Para definir a multiplicidade de uma classe de raízes, Brown e Schirmer [BS01, Definição 2.7, p.57] se utilizavam de uma vizinhança orientada desta classe. Os resultados que se seguem prestam-se como maquinário para darmos essencialmente a mesma definição sem precisar lidar com uma tal vizinhança.

Sejam X uma variedade conexa não orientável, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo e $f\colon X \to Y$ uma aplicação. Sejam também $\widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to X$ o recobrimento duplo orientado de X, $\widehat{q}\colon \widehat{Y} \to Y$ o recobrimento de Hopf para f e $\widehat{f}\colon X \to \widehat{Y}$ um recobrimento de Hopf para f. Sejam ainda $\bar{q}\colon \bar{Y} \to \widehat{Y}$ o recobrimento de Hopf para $\widehat{f} \circ \widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to \widehat{Y}$ e $\bar{f}\colon \widetilde{X} \to \bar{Y}$ um levantamento de Hopf para $\widehat{f} \circ \widetilde{p}$. Fixemos $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ e consideremos os grupos fundamentais de $\widetilde{X}$, X, Y, $\widehat{Y}$ e $\bar{Y}$ com pontos base $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{p}(\widetilde{x}_0)$, $f \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}_0)$, $\widehat{f} \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}_0)$ e $\bar{f}(\widetilde{x}_0)$, respectivamente. Temos assim os seguinte diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{Y} \arrow[d, "\bar{q}"] \\
\widetilde{X} \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[d, "\widetilde{p}"'] & \widehat{Y} \arrow[d, "\widehat{q}"] \\
X \arrow[ur, "\widehat{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \pi(\bar{Y}, \bar{f}(\widetilde{x}_0)) \arrow[d, "\bar{q}_\#"] \\
\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \arrow[ur, "\bar{f}_\#"] \arrow[d, "\widetilde{p}_\#"'] & \pi(\widehat{Y}, \widehat{f} \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}_0)) \arrow[d, "\widehat{q}_\#"] \\
\pi(X, \widetilde{p}(\widetilde{x}_0)) \arrow[ur, "\widehat{f}_\#"] \arrow[r, "f_\#"'] & \pi(Y, f \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.64. *Com as notações acima, $\widehat{q} \circ \bar{q}$ e $\bar{f}$ são, respectivamente, o recobrimento de Hopf e um levantamento de Hopf para $f \circ \widetilde{p}$. Se f é orientável então $\bar{q}$ é um recobrimento duplo. Se f é não orientável então $\bar{q}$ é um recobrimento de uma folha (homeomorfismo) de modo que $\widehat{q}$ e $\widehat{f} \circ \widetilde{p}$ são, respectivamente, o recobrimento de Hopf e um levantamento de Hopf para $f \circ \widetilde{p}$.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
(\widehat{q} \circ \bar{q})_\# \pi(\bar{Y}, \bar{f}(\widetilde{x}_0)) &= \widehat{q}_\#(\bar{q}_\# \pi(\bar{Y}, \bar{f}(\widetilde{x}_0))) \\
&= \widehat{q}_\#((\widehat{f} \circ \widetilde{p})_\# \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) \\
&= (\widehat{q}_\# \circ \widehat{f}_\# \circ \widetilde{p}_\#) \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \\
&= f_\# \circ \widetilde{p}_\# \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \\
&= (f \circ \widetilde{p})_\# \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0).
\end{aligned}$$

A segunda igualdade segue de $\bar{q}$ ser o recobrimento de Hopf para $\widehat{f} \circ \widetilde{p}$ e a quarta da comutatividade do diagrama acima. Isto mostra que $\widehat{q} \circ \bar{q}$ e $\bar{f}$ são o recobrimento e um levantamento de Hopf para $f \circ \widetilde{p}$, respectivamente.

A sequência exata

$$1 \to \ker \widehat{f}_\# \to \pi(X, \widetilde{p}(\widetilde{x}_0)) \xrightarrow{\widehat{f}_\#} \pi(\widehat{Y}, \widehat{f} \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}_0)) \to 1$$

induz a sequência exata

$$1 \to \frac{\ker \widehat{f}_\#}{\operatorname{Im} \widetilde{p}_\# \cap \ker \widehat{f}_\#} \to \frac{\pi(X, \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))}{\operatorname{Im} \widetilde{p}_\#} \to \frac{\pi(\widehat{Y}, \widehat{f} \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))}{\operatorname{Im}(\widehat{f}_\# \circ \widetilde{p}_\#)} \to 1.$$

Como $\widehat{q}$ é um recobrimento temos que $\widehat{q}_\#$ é um monomorfismo e portanto, $\ker \widehat{f}_\# = \ker(\widehat{q}_\# \circ \widehat{f}_\#) = \ker f_\#$. Além disso como $\bar{q}$ é o recobrimento de Hopf para $\widehat{f} \circ \widetilde{p}$ temos que $\operatorname{Im}(\widehat{f}_\# \circ \widetilde{p}_\#) = \operatorname{Im} \bar{q}_\#$. Deste modo obetmos a seguinte sequência exata curta

$$1 \to \frac{\ker f_\#}{\operatorname{Im} \widetilde{p}_\# \cap \ker f_\#} \to \frac{\pi(X, \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))}{\operatorname{Im} \widetilde{p}_\#} \to \frac{\pi(\widehat{Y}, \widehat{f} \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))}{\operatorname{Im} \bar{q}_\#} \to 1.$$

Se f é orientável então $\ker f_\# \subset \operatorname{Im} \widetilde{p}_\#$ e assim $\frac{\ker f_\#}{\operatorname{Im} \widetilde{p}_\# \cap \ker f_\#}$ é trivial. Da exatidão da sequência curta acima temos que

$$\frac{\pi(X, \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))}{\operatorname{Im} \widetilde{p}_\#} \to \frac{\pi(\widehat{Y}, \widehat{f}_\# \circ \widetilde{p}_\#(\widetilde{x}_0))}{\operatorname{Im} \bar{q}_\#}$$

é um isomorfismo. Agora $\operatorname{Im} \widetilde{p}_\#$ tem índice dois em $\pi(X, \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))$ e portanto $\operatorname{Im} \bar{q}_\#$ também tem índice dois em $\pi(\widehat{Y}, \widehat{f} \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))$, ou seja, $\bar{q}$ é um recobrimento duplo.

Se f é não orientável então $\ker f_\# \not\subset \operatorname{Im} \widetilde{p}_\#$ e assim $\frac{\ker f_\#}{\operatorname{Im} \widetilde{p}_\# \cap \ker f_\#}$ não é trivial. Como a sequência é exata segue que

$$\frac{\pi(X, \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))}{\operatorname{Im} \widetilde{p}_\#} \to \frac{\pi(\widehat{Y}, \widehat{f}_\# \circ \widetilde{p}_\#(\widetilde{x}_0))}{\operatorname{Im} \bar{q}_\#}$$

não é um isomorfismo. Mas como é um homomorfismo sobrejetor e $\operatorname{Im} \widetilde{p}_\#$ tem índice dois em $\pi(X, \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))$ segue que $\operatorname{Im} \bar{q}_\#$ tem índice um em $\pi(\widehat{Y}, \widehat{f} \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}_0))$, ou seja, $\bar{q}$ é um recobrimento de uma folha (homeomorfismo) e, neste caso,

$$\begin{aligned}(f \circ \widetilde{p})_\# \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) &= (\widehat{q} \circ \bar{q})_\# \pi(\bar{Y}, \bar{f}(\widetilde{x}_0)) \\ &= \widehat{q}_\# \left(\bar{q}_\# \pi(\bar{Y}, \bar{f}(\widetilde{x}_0))\right) \\ &= \widehat{q}_\# \pi(\widehat{Y}, \widehat{f} \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}_0)).\end{aligned}$$

A primeira igualdade segue do fato de $\widehat{q} \circ \bar{q}$ e $\bar{f}$ serem, respectivamente, o recobrimento e um levantamento de Hopf para $f \circ \widetilde{p}$ e a última igualdade do fato de $\bar{q}_\#$ ser um isomorfismo. Logo $\widehat{q}$ e $\widehat{f} \circ \widetilde{p}$ são, respectivamente, o recobrimento e um levantamento de Hopf para $f \circ \widetilde{p}$. $\square$

Uma vez que os pontos de $\widetilde{X}$ são orientações dos grupos $H_n(X, X - x)$, $x \in X$, dado um subconjunto $\widetilde{A} \subset \widetilde{X}$ chamaremos o subconjunto *oposto de* $\widetilde{A}$ ao conjunto $-\widetilde{A} = \{-\widetilde{x} : \widetilde{x} \in \widetilde{A}\}$.

Teorema 2.65. *Sejam X uma variedade conexa não orientável, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo, $f \colon X \to Y$ uma aplicação orientável, $y_0 \in Y$ e α uma classe de raízes de f em y_0. Então a imagem inversa de*

α pelo recobrimento duplo orientado $\widetilde{p}$ de X é a união disjunta de duas classes de raízes de $f \circ \widetilde{p}$ em y_0 cada uma das quais é o oposto da outra. Além disso, se alguma dessas duas classes é (propriamente) essencial então α também o é.

Demonstração. Como α é uma classe de raízes de f em y_0, existe $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ tal que $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}) = \alpha$, e como f é orientável segue do teorema (2.64) que $\bar{q}$ é um recobrimento duplo e, portanto, existem dois pontos distintos $\bar{y}, \bar{y}' \in \bar{Y}$ tais que $\bar{q}^{-1}(\widehat{y}) = \{\bar{y}, \bar{y}'\}$. Sejam $\widetilde{\alpha} = \bar{f}^{-1}(\bar{y})$ e $\widetilde{\alpha}' = \bar{f}^{-1}(\bar{y}')$. Então $\widetilde{p}^{-1}(\alpha) = \widetilde{\alpha} \sqcup \widetilde{\alpha}'$ é não vazio e tanto $\widetilde{\alpha}$ quanto $\widetilde{\alpha}'$ ou é uma classe de raízes de $f \circ \widetilde{p}$ em y_0 ou é vazio (não podendo, obviamente, que ambas sejam vazias). Vamos mostrar que uma é o oposto da outra. Mais precisamente, vamos mostrar que $\widetilde{\alpha}' = -\widetilde{\alpha}$. Para tanto seja $\widetilde{x} \in \widetilde{\alpha}$. Então

$$\bar{q} \circ \bar{f}(-\widetilde{x}) = \widehat{f} \circ \widetilde{p}(-\widetilde{x}) = \widehat{f} \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}) = \bar{q} \circ \bar{f}(\widetilde{x}) = \widehat{y}$$

de modo que $-\widetilde{x} \in \widetilde{\alpha} \sqcup \widetilde{\alpha}'$. Seja $\widetilde{\gamma}$ um caminho de $\widetilde{x}$ a $-\widetilde{x}$. Então $\widetilde{p} \circ \widetilde{\gamma}$ é um laço em X que reverte orientação e como f é orientável $f \circ \widetilde{p} \circ \widetilde{\gamma}$ não é contrátil, ou seja, não pode acontecer a igualdade $[f \circ \widetilde{p} \circ \widetilde{\gamma}] = [y_0]$. Temos então que $-\widetilde{x} \notin \widetilde{\alpha}$ e logo $-\widetilde{x} \in \widetilde{\alpha}'$. Assim $-\widetilde{\alpha} \subset \widetilde{\alpha}'$. Do mesmo modo concluimos que $-\widetilde{\alpha}' \subset \widetilde{\alpha}$ e daí $\widetilde{\alpha}' = -(-\widetilde{\alpha}') \subset -\widetilde{\alpha}$. Portanto $\widetilde{\alpha}' = -\widetilde{\alpha}$.

Vamos provar contrapositivamente que se $\widetilde{\alpha}$ (ou $-\widetilde{\alpha}$) é (propriamente) essencial então $\alpha = \widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$ também o é. Suponhamos então que α não seja (propriamente) essencial. Então existe uma homotopia (própria) $\{\widehat{f}_t \colon X \to \widehat{Y}\}$ começando em $\widehat{f}$ tal que $\widehat{f}_1^{-1}(\widehat{y}) = \emptyset$. Seja $\{\bar{f}_t \colon \widetilde{X} \to \bar{Y}\}$ uma homotopia (própria) começando em $\bar{f}$ que é um levantamento de $\{\widehat{f}_t \circ \widetilde{p}\}$ através de $\bar{q}$. Do mesmo modo como acima coloquemos $\widetilde{\alpha} = \bar{f}^{-1}(\bar{y})$, onde $\bar{y} \in \bar{q}^{-1}(\widehat{y})$. Temos que

$$\bar{f}_1^{-1}(\bar{y}) \subset (\bar{q} \circ \bar{f}_1)^{-1}(\widehat{y}) = (\widehat{f}_1 \circ \widetilde{p})^{-1}(\widehat{y}) = \widetilde{p}^{-1}(\widehat{f}_1^{-1}(\widehat{y})) = \emptyset.$$

Logo $\widetilde{\alpha}$ não é (propriamente) essencial. □

O próximo resultado é uma consequência direta dos dois teoremas anteriores.

Teorema 2.66. *Sejam X uma variedade conexa não orientável, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo, $f \colon X \to Y$ uma aplicação não orientável, $y_0 \in Y$ e α uma classe de raízes de f em y_0. Então a imagem inversa de α pelo recobrimento duplo orientado $\widetilde{p}$ de X é uma classe de raízes de $f \circ \widetilde{p}$ cuja classe oposta é ela mesma.*

Demonstração. Como α é uma classe de raízes de f em y_0 existe $\widehat{y} \in \widehat{q}^{-1}(y_0)$ tal que $\alpha = \widehat{f}^{-1}(\widehat{y})$. Pelo teorema (2.64) $\widehat{f} \circ \widetilde{p}$ é um levantamento de Hopf para $f \circ \widetilde{p}$ relativamente a $\widehat{q}$. Assim $\widetilde{p}^{-1}(\alpha) = \widetilde{p}(\widehat{f}^{-1}(\widehat{y})) = (\widehat{f} \circ \widetilde{p})^{-1}(\widehat{y})$ é uma classe de raízes de $f \circ \widetilde{p}$ em y_0 (pois $\widetilde{p}^{-1}(\alpha)$ é não vazio).

Seja $\widetilde{x} \in \widetilde{p}^{-1}(\alpha)$. Como $\widetilde{p}(-\widetilde{x}) = \widetilde{p}(\widetilde{x})$ segue que $\widehat{f} \circ \widetilde{p}(-\widetilde{x}) = \widehat{f} \circ \widetilde{p}(\widetilde{x}) = \widehat{y}$, ou seja, $-\widetilde{x} \in \widetilde{p}^{-1}(\alpha)$. Logo $-\widetilde{p}^{-1}(\alpha) \subset \widetilde{p}^{-1}(\alpha)$. Daí $\widetilde{p}^{-1}(\alpha) = -(-\widetilde{p}^{-1}(\alpha)) \subset -\widetilde{p}^{-1}(\alpha)$. Concluimos assim que $\widetilde{p}^{-1}(\alpha) = -\widetilde{p}^{-1}(\alpha)$. □

Vamos agora definir multiplicidade. Para tanto consideremos X uma n-variedade conexa, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e α uma classe de raízes de f em y_0.

Se X é não orientável e f é orientável então pelo teorema (2.65) existe uma classe de raízes $\widetilde{\alpha}$ de $f \circ \widetilde{p} \colon \widetilde{X} \to Y$ tal que $\widetilde{p}^{-1}(\alpha) = \widetilde{\alpha} \sqcup (-\widetilde{\alpha})$. Consideremos o homeomorfismo $\widetilde{h} \colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ dado por $\widetilde{h}(\widetilde{x}) = -\widetilde{x}$ para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$. Então $\widetilde{h}$ reverte orientação, isto é, para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ temos que

$$\widetilde{\widetilde{h}} \circ s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}) = -s_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{h}(\widetilde{x}) = -s_{\widetilde{X}}(-\widetilde{x}),$$

onde $s_{\widetilde{X}}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ é a orientação canônica de $\widetilde{X}$ e $\widetilde{\widetilde{h}}\colon \widetilde{\widetilde{X}} \to \widetilde{\widetilde{X}}$ é o homeomorfismo induzido por $\widetilde{h}$ (exemplo (1.16)). Sejam $\widetilde{N}$ uma vizinhança do fecho de $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{K}$ um compacto contendo $\widetilde{\alpha}$. Então $\widetilde{h}(\widetilde{N})$ é uma vizinhança do fecho de $-\widetilde{\alpha} = \widetilde{h}(\widetilde{\alpha})$ e $\widetilde{h}(\widetilde{K})$ é um compacto contendo $-\widetilde{\alpha}$. Para cada $\widetilde{x} \in \widetilde{K}$ consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{K}) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\widetilde{h}'"'] & (\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{x}) \arrow[d, "\widetilde{h}''"] \\
(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{h}(\widetilde{K})) \arrow[r, hook, "k"'] & (\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{h}(\widetilde{x}))
\end{tikzcd}$$

onde $\widetilde{h}'$ e $\widetilde{h}''$ são definidas por $\widetilde{h}$. Assim

$$\begin{aligned}
k_n(\widetilde{h}'_n(o_{\widetilde{K}})) &= \widetilde{h}''_n \circ j_n(o_{\widetilde{K}}) \\
&= \widetilde{h}''_n \circ s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}) \\
&= \widetilde{\widetilde{h}} \circ s_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}) \\
&= -s_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{h}(\widetilde{x}) \\
&= -s_{\widetilde{X}}(\widetilde{h}(\widetilde{x})).
\end{aligned}$$

Portanto $\widetilde{h}'_n(o_{\widetilde{K}}) = -o_{\widetilde{h}(\widetilde{K})}$. Consideremos agora o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{K}) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dd, "\widetilde{h}'"'] & (\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{\alpha}) \arrow[dd, "\widetilde{h}''"'] & (\widetilde{N}, \widetilde{N} - \widetilde{\alpha}) \arrow[l, hook', "e"'] \arrow[dd, "\widetilde{h}'''"'] \arrow[dr, "\overline{f \circ \widetilde{p}}"] & \\
& & & (Y, Y - y_0) \\
(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{\widetilde{K}}) \arrow[r, hook, "j"'] & (\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{\widetilde{\alpha}}) & (\widetilde{N}, \widetilde{N} - \widetilde{\widetilde{\alpha}}) \arrow[l, hook', "\ell"] \arrow[ur, "\overline{f \circ \widetilde{p}}"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $\widetilde{h}'$, $\widetilde{h}''$ e $\widetilde{h}'''$ são definidas por $\widetilde{h}$ e cujas induzidas $\widetilde{h}'_n$, $\widetilde{h}''_n$ e $\widetilde{h}'''_n$ são isomorfismos pois $\widetilde{h} \circ \widetilde{h} = 1_{\widetilde{X}}$. De sorte que se $\nu \in H_n(Y, Y - y_0; \mathbb{Z})$ é uma orientação local de Y em y_0 então

$$\begin{aligned}
\lambda(f \circ \widetilde{p}, \widetilde{\alpha})\nu &= (\overline{f \circ \widetilde{p}})_n \circ e_n^{-1} \circ i_n(o_{\widetilde{K}}) \\
&= (\overline{f \circ \widetilde{p}})_n \circ e_n^{-1} \circ (\widetilde{h}''_n)^{-1} \circ j_n \circ \widetilde{h}'_n(o_{\widetilde{K}}) \\
&= (\overline{f \circ \widetilde{p}})_n \circ e_n^{-1} \circ (\widetilde{h}''_n)^{-1} \circ j_n(-o_{\widetilde{h}(\widetilde{K})}) \\
&= (\overline{f \circ \widetilde{p}})_n \circ (\widetilde{h}'''_n)^{-1} \circ \ell_n^{-1} \circ \widetilde{h}''_n \circ (\widetilde{h}''_n)^{-1} \circ j_n(-o_{\widetilde{h}(\widetilde{K})}) \\
&= (\overline{f \circ \widetilde{p}})_n \circ (\widetilde{h}'''_n)^{-1} \circ \ell_n^{-1} \circ j_n(-o_{\widetilde{h}(\widetilde{K})}) \\
&= (\overline{f \circ \widetilde{p}})_n \circ \ell_n^{-1} \circ j_n(-o_{\widetilde{h}(\widetilde{K})}) \\
&= -(\overline{f \circ \widetilde{p}})_n \circ \ell_n^{-1} \circ j_n(o_{\widetilde{h}(\widetilde{K})}) \\
&= -\lambda(f \circ \widetilde{p}, \widetilde{h}(\widetilde{\alpha}))\nu \\
&= -\lambda(f \circ \widetilde{p}, -\widetilde{\alpha}).
\end{aligned}$$

Logo $\lambda(f \circ \widetilde{p}, \widetilde{\alpha}) = -\lambda(f \circ \widetilde{p}, -\widetilde{\alpha})$.

Definição 2.67. Sejam X uma n-variedade conexa, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f\colon X \to Y$ uma aplicação. A **multiplicidade** de uma classe α de raízes de f em y_0, denotada por $\mathcal{M}(f, \alpha, y_0)$, é definida do seguinte modo:

1. Se X é orientável então
$$\mathcal{M}(f, \alpha, y_0) = |\lambda(f, \alpha)|.$$

2. Se X é não orientável e f é orientável então
$$\mathcal{M}(f, \alpha, y_0) = |\lambda(f \circ \widetilde{p}, \widetilde{\alpha})| = |\lambda(f \circ \widetilde{p}, -\widetilde{\alpha})|.$$

3. Se X e f são não orientáveis então
$$\mathcal{M}(f, \alpha, y_0) = |\lambda_2(f, \alpha)|.$$

Nos dois primeiros casos, o fato de ter sido tomado como definiçao da multiplicidade o módulo do índice λ torna a definição independente da escolha das orientações envolvidas na construção de λ.

Observação 2.68. Em [BS01, Definição 2.7, p.57], Brown e Schirmer definem a multiplicidade de uma classe de raízes a partir da noçao de grau local. Tal definição coincide com a que demos acima. Nos casos (1) e (3) em função do teorema (2.47). No caso (2) eles primeiro mostram que α possui uma vizinhança aberta orientável U sem raízes de f em y_0 além das contidas em α que é mandada por f em uma vizinhança V aberta, conexa e orietável de y_0, de modo que f define uma aplicação $f_{UV}\colon U \to V$. Em geral, U não é conexo e, portanto diferentes orientações de U podem diferir mais do que apenas um sinal. Eles então descrevem um procedimento para orientar U e então definem a multiplicidade da classe α como sendo o módulo do grau local de f_{UV} em y_0, isto é, $\mathcal{M}(f, \alpha, y_0) = |\mathrm{gr}_{y_0}(f_{UV})|$. Pode-se mostrar que o procedimento para encontrar uma vizinhança orientada U de α é equivalente ao seguinte: como pelo teorema (2.65) $\widetilde{\alpha} \neq -\widetilde{\alpha}$ podemos encontrar uma vizinhança $\widetilde{U}$ de $\widetilde{\alpha}$, disjunta de $-\widetilde{U}$, que é mandada por $f \circ \widetilde{p}$ em uma vizinhança euclidiana E de y_0. Então $\widetilde{U}$ é mandada homeomorficamente por $\widetilde{p}$ sobre uma vizinhança U de α, pois $\widetilde{p}$ é um recobrimento duplo. Usamos a restrição da orientação canônica de $\widetilde{X}$ a $\widetilde{U}$ e o homeomorfismo $\widetilde{p}|\widetilde{U}$ para orientar U. Pelo teorema (2.47)
$$|\lambda(f \circ \widetilde{p}, \widetilde{\alpha})| = |\mathrm{gr}_{y_0}(f \circ \widetilde{p})_{\widetilde{U}E}| = |\mathrm{gr}_{y_0}(f_{UE})|.$$
Assim as duas definições coincidem também no caso (2).

Na definição acima, se Y for uma variedade conexa então, pelo teorema (2.39), a multiplicidade é a mesma para todas as classes de raízes. Pode-se mostrar que neste caso, a multiplicidade independe também do ponto y_0, ver [Bro05, p. 412-414]. Deste modo, podemos nos referir apenas à multiplicidade de f, $\mathcal{M}(f)$. Além disso, como aplicações homotópicas possuem levantamentos de Hopf homotópicos resulta que a multiplicidade de f é um invariante propriamente homotópico.

Teorema 2.69. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação entre variedades conexas de mesma dimensão. Então a multiplicidade $\mathcal{M}(f, \alpha, y_0)$ independe tanto da classe de raízes α quanto do ponto $y_0 \in Y$, e constitui um invariante propriamente homotópico de f.*

Definimos a multiplicidade de uma classe de raízes em termos de índice de raízes. O teorema (2.32) afirma que classes de raízes homotópicamente relacionadas tinham o mesmo índice e em consequência disto, uma classe de raízes cujo índice é não nulo é necessáriamente uma classe essencial (corolário (2.35)). As versões destes resultados para a multiplicidade continuam válidos.

Teorema 2.70. *Sejam X uma n-variedade conexa, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$, $\{f_t\colon X \to Y\}$ uma homotopia própria e α_0 uma classe de raízes de f_0 em y_0. Se α_0 está $\{f_t\}$-relacionada a uma classe de raízes α_1 de f_1 em y_0 então $\mathcal{M}(f_0, \alpha_0, y_0) = \mathcal{M}(f_1, \alpha_1, y_0)$. Se α não está $\{f_t\}$-relacionada com nenhuma classe de raízes de f_1 então $\mathcal{M}(f_0, \alpha_0, y_0) = 0$.*

Demonstração. Se X é orientável ou se X e f_0 (e portanto f_1) são não orientáveis, o resultado segue diretamente da definição de multiplicidade juntamente com o resultado do teorema (2.32) e o fato de λ e λ_2 serem índices próprios. Resta o caso em que X é não orientável e f_0 (e portanto f_1) é orientável. Seja $\widetilde{p}^{-1}(\alpha_0) = \widetilde{\alpha}_0 \sqcup (-\widetilde{\alpha}_0)$ como no teorema (2.65). Se α_0 não é propriamente essencial então do mesmo teorema (2.65) segue que $\widetilde{\alpha}_0$ também não é uma classe proppriamente essencial de $f_0 \circ \widetilde{p}$ e neste caso, pelo teorema (2.32), temos $\mathcal{M}(f_0, \alpha_0, y_0) = |\lambda(f_0 \circ \widetilde{p}, \widetilde{\alpha}_0)| = 0$. Por outro lado, se α_0 está $\{f_t\}$-relacionada a uma classe α_1 de f_1 então existem $x_0 \in \alpha_0$, $x_1 \in \alpha_1$ e um caminho γ em X de x_0 a x_1 tal que o caminho $\{t \mapsto f_t(\gamma(t))\}$ é homotópico a y_0. Seja $\widetilde{\gamma}$ o levantamento de γ a partir do ponto $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{p}^{-1}(x_0) \subset \widetilde{\alpha}_0$. Então o caminho $\{t \mapsto f_t(\widetilde{p} \circ \widetilde{\gamma}(t))\}$ é homotópico a y_0 e como $\widetilde{p}(\widetilde{\gamma(1)}) = \gamma(1) = x_1 \in \alpha_1$ temos que $\widetilde{\gamma}(1) \in \widetilde{p}^{-1}(\alpha_1) = \widetilde{\alpha}_1 \sqcup (-\widetilde{\alpha}_1)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\widetilde{\gamma}(1) \in \widetilde{\alpha}_1$. Assim $\widetilde{\alpha}_0$ está $\{f_t \circ \widetilde{p}\}$-relacionada a $\widetilde{\alpha}_1$ e portanto, pelo teorema (2.32), temos que

$$\mathcal{M}(f_0, \alpha_0, y_0) = |\lambda(f_0 \circ \widetilde{p}, \widetilde{\alpha}_0)| = |\lambda(f_1 \circ \widetilde{p}, \widetilde{\alpha}_1)| = \mathcal{M}(f_1, \alpha_1, y_0). \qquad \square$$

O teorema acima têm as seguintes consequências imediatas.

Corolário 2.71. *Sejam X uma n-variedade conexa, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e α uma classe de raízes da aplicação própria $f\colon X \to Y$ em y_0. Então $\mathcal{M}(f, \alpha, y_0) \neq 0$ implica que α é propriamente essencial.*

Corolário 2.72. *Sejam X uma n-variedade conexa, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e $\{f_t\colon X \to Y\}$ uma homotopia própria. Então a $\{f_t\}$-relação entre as classes de raízes de f_0 e f_1 define uma bijeção entre as classes de raízes de f_0 e f_1 cujas multiplicidades são não nulas.*

Veremos em nosso segundo resultado principal (teorema (3.17)) que a recíproca do corolário (2.71) é verdadeira para $n > 2$. Assim se $n > 2$ então uma classe de raízes é essencial se, e somente se, sua multiplicidade é não nula.

2.4.3 Grau absoluto

Com a noção de multiplicidade estabelecida podemos definir o grau absoluto de uma aplicação.

Definição 2.73. Sejam X uma n-variedade conexa, Y um espaço conexo localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e

$f\colon X \to Y$ uma aplicação própria. O **grau absoluto** $\mathcal{A}(f, y_0)$ de f em y_0, é a soma das multiplicidades de todas as classes de raízes de f em y_0. Em símbolos

$$\mathcal{A}(f, y_0) = \sum_{\alpha \in f^{-1}(y_0)/\mathcal{N}} \mathcal{M}(f, \alpha, y_0).$$

Como consequência do teorema (2.70) juntamente com o corolário (2.72) temos o seguinte resultado:

Corolário 2.74. *Sejam X uma n-variedade conexa, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria. Então o grau absoluto de f em y_0 é um invariante propriamente homotópico de f, isto é, se $g\colon X \to Y$ é uma aplicação propriamente homotópica a f então $\mathcal{A}(f, y_0) = \mathcal{A}(g, y_0)$.*

Do fato da pré-imagem de todo elemento $x \in X$ pelo recobrimento duplo orientado de X, $\widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to X$, ter exatamente dois elementos, das definições de multiplicidade e grau absoluto e do teorema (2.65), temos o seguinte teorema:

Teorema 2.75. *Sejam X uma n-variedade conexa não-orientável e Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$. Sejam ainda $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria orientável e $\widetilde{p}\colon \widetilde{X} \to X$ o recobrimento duplo orientado de X. Então o número de raízes de $f \circ \widetilde{p}$ em y_0 é exatamente o dobro do número de raízes de f em y_0 e o grau absoluto de $f \circ \widetilde{p}$ é duas vezes o grau absoluto de f em y_0, isto é,*

$$\#(f \circ \widetilde{p})^{-1}(y_0) = 2\#f^{-1}(y_0) \quad e \quad \mathcal{A}(f \circ \widetilde{p}, y_0) = 2\mathcal{A}(f, y_0).$$

Vimos no teorema (2.69) que se Y for uma variedade conexa então a multiplicidade é a mesma para todas as classes de raízes. Se esta multiplicidade é nula então o grau absoluto, por definição, também o é. Por outro lado se a multiplicidade é não nula então, pelo corolário (2.71), todas as classes são propriamente essenciais, e há exatamente $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ destas classes. Além disso o teorema (2.69) e o corolário (2.25) afirmam que tanto a multiplicidade quanto o número próprio de Nielsen independem do ponto y_0. Assim temos o seguinte resultado:

Teorema 2.76. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação entre variedades conexas de mesma dimensão. Então f possui o mesmo grau absoluto em todos os pontos de Y e este grau é o produto da multiplicidade de f pelo número próprio de Nielsen de f. Em símbolos*

$$\mathcal{A}(f) = \mathcal{M}(f)\,\mathrm{PNR}(f).$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que o grau absoluto $\mathcal{A}(f, y_0)$ é um limitante inferior para o número de raízes na classe de homotopia própria transversa de f, ou seja, toda aplicação propriamente homotópica a f e tranversa a y_0 tem pelo menos $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes em y_0. Em símbolos, queremos mostrar que $\mathcal{A}(f, y_0) \leq \mathrm{MR}_{\mathcal{T}}(f, y_0)$. Para tanto vamos precisar do seguinte resultado.

Lema 2.77. *Sejam X uma n-variedade orientável, Y um espaço localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$, $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria e x uma raiz de f em y_0. Suponha que f é um homeomorfismo local em x. Então (f, x) é um par propriamente admissível para X, Y, y_0 e $\lambda(f, x) = \pm 1$.*

Demonstração. Como f é um homeomorfismo local em x, existem vizinhanças $U \subset X$ de x e $V \subset Y$ de y_0 tal que a restrição de f a U, $f|U \colon U \to V$, é um homeomorfismo. Como X é uma variedade, x admite uma vizinhança fechada C tal que $x \in C \subset U$; e como f é homeomorfismo local temos que $C - x$ não contém raízes de f em y_0. Logo o par (f, x) é admissível.

Seja ν uma orientação local de Y em y_0 e tomemos, na definição do índice inteiro de raízes o compacto $K = \{x\}$. Consideremos o diagrama

$$(X, X - K) \overset{i_K}{\subset} (X, X - x) \overset{e}{\supset} (U, U - x) \xrightarrow{f|U} (V, V - y_0) \overset{j}{\subset} (Y, Y - y_0)$$

onde i_K é a identidade, e e j são excisões e $f|U$ é homeomorfismo, de modo que todas essas aplicações induzem isomorfismos em homologia. Como a classe fundamental de X em K é um dos geradores de $H_n(X, X - K) = H_n(X, X - x)$ temos que

$$j_n \circ (f|U)_n \circ e_n^{-1} \circ i_K(o_K) = \pm\nu.$$

Logo $\lambda(f, x) = \pm 1$. $\square$

Observamos que o resultado do lema acima continua válido (e a demonstração é análoga) se X for uma n-variedade qualquer desde que se considere o índice inteiro módulo dois λ_2 em vez do índice inteiro λ. Neste caso tem-se $\lambda_2(f, x) = 1$.

Teorema 2.78. *Sejam X uma n-variedade conexa, Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f \colon X \to Y$ uma aplicação própria. Então toda aplicação propriamente homotópica a f e transversa a y_0 tem, pelo menos, $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes em y_0, ou seja, $\mathcal{A}(f, y_0) \leq \mathrm{MR}_{\mathcal{T}}(f, y_0)$.*

Demonstração. Seja $g \colon X \to Y$ uma aplicação propriamente homotópica a f e tranversa a y_0.

Suponhamos que X é orientável. Seja α uma classe de raízes de g em y_0. Então

$$\mathcal{M}(g, \alpha, y_0) = |\lambda(g, \alpha)| = |\sum_{x \in \alpha} \lambda(g, x)| \leq \sum_{x \in \alpha} |\lambda(g, x)| = \#\alpha.$$

A primeira igualdade é a definição da multiplicidade, a segunda segue da aditividade do índice e a última do lema acima, uma vez que g é tranversa a y_0 - e portanto um homeomorfismo local em cada $x \in \alpha$. Somando ambos os lados desta desigualdade para todas as classes de raízes de g em y_0 obteremos $\mathcal{A}(g, y_0) \leq \#g^{-1}(y_0)$. Mas $\mathcal{A}(f, y_0) = \mathcal{A}(g, y_0)$ pois g é propriamente homotópica a f. Logo

$$\mathcal{A}(f, y_0) \leq \#g^{-1}(y_0).$$

Suponhamos agora que X é não-orientável e f é orientável. Seja $\widetilde{p} \colon \widetilde{X} \to X$ o recobrimento duplo orientado de X. Temos que $\widetilde{p}$ é uma aplicação própria, pois é um recobrimento duplo, de modo que $f \circ \widetilde{p}$ e $g \circ \widetilde{p}$ são propriamente homotópicas. Além disso, $g \circ \widetilde{p}$ é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em y_0, pois g o é e $\widetilde{p}$ é um recobrimento. Logo $g \circ \widetilde{p}$ é tranversa a y_0. Do caso acima e do teorema (2.75) resulta que

$$\mathcal{A}(f, y_0) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(f \circ \widetilde{p}, y_0) \leq \frac{1}{2}\#(g \circ \widetilde{p})^{-1}(y_0) = \#g^{-1}(y_0).$$

Finalmente se X e f são não-orientáveis então a demonstração é igual ao primeiro caso exceto pelo fato que se usa λ_2 em vez de λ. $\square$

Na demosntração do teorema, acabamos por mostrar um fato interessante: se $f\colon X \to Y$ é uma aplicação própria e transversa a $y_0 \in Y$ e α é uma classe de raízes de f em y_0 então $\mathcal{M}(f, \alpha, y_0) \leq \#\alpha$, ou seja, a multiplicidade de α é um limitante inferior para a quantidade de raízes em α.

Do corolário (2.71) e do teorema acima resulta que se o grau absoluto for positivo então os números de Nielsen próprio e mínimo próprio também são positivos, isto é,

$$\mathcal{A}(f, y_0) > 0 \quad \text{implica} \quad \mathrm{PNR}(f, y_0),\ \mathrm{MR}_{\mathcal{T}}(f, y_0) > 0. \tag{2.79}$$

Capítulo 3

Teoremas de realização do número mínimo e do grau absoluto

O objetivo deste capítulo é enunciar e demonstrar os fatos do número mínimo próprio de raízes e do grau absoluto serem limitantes inferiores realizáveis em classes de homotopia próprias. A primeira seção é dedicada a um único resultado que visa isolar raízes. A segunda serve para apresentarmos uma sequência de lemas necessários às demonstrações dos fatos acima mencionados, e na terceira e última seção, fazendo uso dos resultados das duas seções anteriores, alcançamos nosso objetivo.

3.1 Isolando raízes

Esta seção é dedicada a um único resultado que nos diz que, sob certas condições, dada uma aplicação existe outra que lhe é homotópica e cujas raízes são todas isoladas. Deste resultado segue que no caso da aplicação dada ser própria existe uma que lhe é homotópica e que é transversa no ponto em que se consideram as raízes. Para a demonstração deste fato precisaremos relembrar alguns conceitos.

Seja $\mathcal{K}$ um complexo simplicial. Se s é um simplexo aberto em $\mathcal{K}$ então a **estrela aberta** de s é a união de todos os simplexos abertos que contém s como uma de suas faces, denotada por $\mathrm{st}_{\mathcal{K}}(s)$. Se $v_0, \ldots, v_m$ são vértices de $\mathcal{K}$ então o simplexo aberto cujos vértices são $v_0, \ldots, v_m$ será denotado por $\langle v_0, \ldots, v_k \rangle$. Denotaremos a realização geométrica de $\mathcal{K}$ por $|\mathcal{K}|$. Por abuso de linguagem, às vezes, diremos o simplexo s em $|\mathcal{K}|$ querendo significar o subespaço de $|\mathcal{K}|$ correspondente ao siplexo s do complexo $\mathcal{K}$.

Uma **triangularização** do espaço topológico X é um par $\{\phi, \mathcal{K}\}$ onde $\mathcal{K}$ é um complexo simplicial e ϕ é uma aplicação da realização geométrica de $\mathcal{K}$ em X, $\phi\colon |\mathcal{K}| \to X$. Seja $\mathcal{S}$ uma família de subespaços do espaço topológico X. O **nervo** de $\mathcal{S}$, denotado por $\mathrm{nervo}\,\mathcal{S}$, é o complexo simplicial abstrato cujos vértices são os elementos de $\mathcal{S}$ e os n-simplexos são as subfamílias finitas $\{S_0, \ldots, S_n\}$ de $\mathcal{S}$ para as quais a interseção

$$S_0 \cap \cdots \cap S_n$$

é não vazia.

Estamos prontos para o nosso resultado.

Teorema 3.1. *Sejam X uma n-variedade, Y um espaço localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$, $N \subset Y$ uma vizinhança de y_0 e $f\colon X \to Y$ uma aplicação. Então f é homotópica a uma aplicação que é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em y_0 por uma homotopia que é constante fora de $f^{-1}(N)$.*

Demonstração. Seja $E \subset N$ uma vizinhança de y_0. Nosso primeiro objetivo é aproximar $f^{-1}(E)$ pela realização geométrica de um complexo simplicial e f por uma aplicação simplicial e usar esta aproximação de f para obter uma aplicação g homotópica a f através de uma homotopia constante fora de $f^{-1}(N)$ tal que o conjunto das raízes de g seja coberto por por uma união disjunta de abertos, cada um dos quais, contido no interior de uma n-bola.

Seja $\psi\colon \mathbb{R}^n \to E$ um homeomorfismo e $\mathcal{K}_E$ um complexo simplicial cuja realização geométrica é $\mathbb{R}^n$, isto é, $\mathbb{R}^n = |\mathcal{K}_E|$. Então $\{\psi, \mathcal{K}_E\}$ é uma triangularização de E. Podemos supor que $\psi^{-1}(y_0)$ está em um simplexo aberto s de $\mathbb{R}^n$, pois caso contrário, basta tomarmos um ponto $z_0 \in \mathbb{R}^n$ que está em um simplexo aberto e definirmos $\psi'\colon \mathbb{R}^n \to E$ por $\psi'(z) = \psi(\psi^{-1}(y_0)+z-z_0)$. Assim $\{\psi', \mathcal{K}_E\}$ será uma triangularização de E e $z_0 = (\psi')^{-1}(y_0) \in s$. A família $\{\mathrm{st}_{\mathcal{K}_E}(v) : v \text{ é um vértice de } \mathcal{K}_E\}$ é uma cobertura por abertos de $\mathbb{R}^n$ de modo que

$$\{f^{-1}(\psi(\mathrm{st}_{\mathcal{K}_E}(v))) : v \text{ é um vértice de } \mathcal{K}_E\}$$

é uma cobertura por abertos de $f^{-1}(E)$. Seja $\mathcal{W}$ uma cobertura por abertos de $f^{-1}(E)$ com as seguintes propriedades:

1) $\mathcal{W}$ é um refinamento de $\{f^{-1}(\psi(\mathrm{st}_{\mathcal{K}_E}(v))) : v \text{ é um vértice de } \mathcal{K}_E\}$;

2) o fecho de cada elemento de $\mathcal{W}$ está contido no interior de uma n-bola;

3) a dimensão do nervo de $\mathcal{W}$ é menor do que, ou igual a, n.

A realização geométrica do nervo de $\mathcal{W}$ é aproximação de $f^{-1}(E)$ a que nos referimos no início da demonstração. Vamos agora construir uma aproximação para f.

Para cada $W \in \mathcal{W}$ consideremos a função $\gamma'_W\colon f^{-1}(E) \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in f^{-1}(E)$ associa a distância de x a $X - W$. Como o nervo de $\mathcal{W}$ tem dimensão finita resulta que, para cada $x \in f^{-1}(E)$, a soma $\sum_{W\in\mathcal{W}} \gamma'_W(x)$ está bem definida, pois é a soma de um número finito de termos, e, além disso, é não nula pois $\mathcal{W}$ é uma cobertura de $f^{-1}(E)$. Assim podemos considerar a aplicação $\gamma_W\colon f^{-1}(E) \to \mathbf{I}$ dada por

$$\gamma_W(x) = \frac{\gamma'_W(x)}{\sum_{V\in\mathcal{W}} \gamma'_V(x)}.$$

A coleção de aplicações $\{\gamma_W : W \in \mathcal{W}\}$ tem as seguintes propriedades:

a) $W = \{x \in f^{-1}(E) : \gamma_W(x) > 0\}$, e

b) $\sum_{W\in\mathcal{W}} \gamma_W(x) = 1$ para todo $x \in f^{-1}(E)$.

Para cada $x \in f^{-1}(E)$ seja $\mathcal{W}(x)$ o conjunto dos abertos $W \in \mathcal{W}$ que contêm x, isto é, $\mathcal{W}(x) = \{W \in \mathcal{W} : x \in W\}$. Então a cardinalidade de $\mathcal{W}(x)$ é menor ou igual a n e, se $W \in \mathcal{W}(x)$ então $\gamma_W(x) > 0$. Cosideremos agora a aplicação $\nu\colon f^{-1}(E) \to |\mathrm{nervo}\,\mathcal{W}|$ dada por

$$\nu(x) = \sum_{W\in\mathcal{W}(x)} \gamma_W(x) W.$$

Como $\mathcal{W}$ é um refinamento de $\{f^{-1}(\psi(\mathrm{st}_{\mathcal{K}_E}(v))) : v \text{ é um vértice de } \mathcal{K}_E\}$ podemos selecionar, para cada $W \in \mathcal{W}$, um vértice v de $\mathcal{K}_E$ tal que $W \subset f^{-1}(\psi(\mathrm{st}_{\mathcal{K}_E}(v)))$ e daí colocarmos $\mu'(W) = \nu$. Assim μ' é uma aplicação de vértices que, portanto, se estende a uma aplicação simplicial $\mu\colon \mathrm{nervo}\,\mathcal{W} \to \mathcal{K}_E$. Seja $|\mu|\colon |\mathrm{nervo}\,\mathcal{W}| \to \mathbb{R}^n$ a aplicação induzida entre as correspondentes realizações geométricas. A composta $\psi\circ(|\mu|\circ\nu)\colon f^{-1}(E) \to E$ é a aproximação de f que buscávamos. Vamos usar esta aproximação para definir uma homotopia constante fora de $f^{-1}(N)$ que começa em f e que termina numa aplicação cujo conjunto das raízes em y_0 é coberto por uma união disjunta de abertos, cada um dos quais está contido em uma n-bola.

Dados $x \in f^{-1}(E)$ e $W_0, \ldots, W_m \in \mathcal{W}$,

$$\nu(x) \in \langle W_0, \ldots, W_m \rangle \Rightarrow |\mu| \circ \nu(x) \in \langle \mu(W_0), \ldots, \mu(W_m) \rangle. \tag{3.2}$$

Por outro lado,

$$\nu(x) \in \langle W_0, \ldots, W_m \rangle \Rightarrow x \in \bigcap_{i=0}^{m} W_i \subset \bigcap_{i=0}^{m} f^{-1}(\psi(\mathrm{st}_{\mathcal{K}_E}(\mu(W_i)))) \tag{3.3}$$

e, por conseguinte,

$$\nu(x) \in \langle W_0, \ldots, W_m \rangle \Rightarrow \psi^{-1} \circ f(x) \in \bigcap_{i=0}^{m} \mathrm{st}_{\mathcal{K}_E}(\mu(W_i)). \tag{3.4}$$

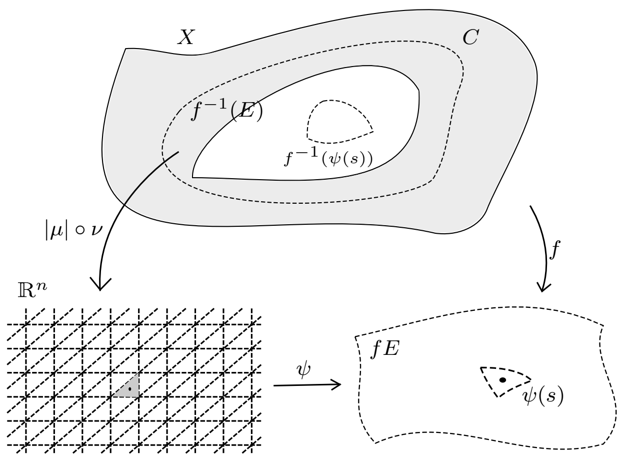
Observando que cada ponto em $\bigcap_{i=0}^{m} \mathrm{st}_{\mathcal{K}_E}(\mu(W_i))$ está em um simplexo que tem $\mu(W_0), \ldots, \mu(W_m)$ como alguns de seus vértices, concluímos de (3.2) e (3.4) que se $\nu(x) \in \langle W_0, \ldots, W_m \rangle$ então $|\mu| \circ \nu(x)$ está em uma face do simplexo que contém $\psi^{-1} \circ f(x)$. Usamos então a estrutura linear destes simplexos para definir uma homotopia $\{k'_t \colon f^{-1}(E) \to \mathbb{R}^n\}$ de $\psi^{-1} \circ (f|f^{-1}(E))$ a $|\mu| \circ \nu$ do seguinte modo

$$k'_t(x) = (1-t)\psi^{-1} \circ f(x) + t|\mu| \circ \nu(x).$$

Geometricamente, $k'_t(x)$ mora no segmento de reta que liga um ponto do único simplexo aberto contendo $\psi^{-1} \circ f(x)$ a um ponto em uma das faces desse simplexo. De não haver $(n+1)$-simplexos em $\mathcal{K}_E$, pois $|\mathcal{K}_E| = \mathbb{R}^n$, resulta que se $k'_t(x) \in s$ então $\psi^{-1} \circ f(x) \in s$ (lembrando que s é o n-simplexo aberto de $\mathbb{R}^n$ que contém $\psi^{-1}(y_0)$). Logo

$$k'_t(f^{-1}(E) - f^{-1}(\psi(s))) \subset \mathbb{R}^n - s \quad \text{para todo } t \in \mathbf{I}. \tag{3.5}$$

Da normalidade de X segue que existe uma vizinhança fechada C de $X - f^{-1}(E)$ disjunta do fecho de $f^{-1}(\psi(s))$.



Seja $\delta \colon f^{-1}(E) \to \mathbf{I}$ uma função que vale 0 em C e 1 no fecho de $f^{-1}(\psi(x))$ e consideremos a homotopia $\{k_t\colon X \to Y\}$ definida por

$$k_t(x) = \begin{cases} \psi \circ k'_{\delta(x)t}(x) & \text{se } x \in f^{-1}(E) \\ f(x) & \text{se } x \in \text{int}C. \end{cases}$$

Se $x \in (\text{int}C) \cap f^{-1}(E)$ então $\delta(x) = 0$ e portanto

$$\psi \circ k'_{\delta(x)t}(x) = \psi \circ k'_0(x) = \psi \circ \psi^{-1} \circ f(x) = f(x).$$

Ou seja, as duas expressões que definem k_t coincidem na interseção de seus domínios, que é o aberto $(\text{int}C) \cap f^{-1}(E)$ e, além disso $X = (X - f^{-1}(E)) \cup f^{-1}(E) \subset (\text{int}C) \cap f^{-1}(E)$. Portanto $\{k_t\}$ está bem definida em todo X. A homotopia $\{k_t\}$ começa em f e é constante igual a f fora de $f^{-1}(E)$ e, portanto, fora de $f^{-1}(N)$. Seja $g = k_1$.

Vamos agora no sentido de mostrar que esta aplicação g satisfaz as propriedades enunciadas no início da demonstração. Inicialmente mostremos que $g^{-1}(\psi(s)) = (|\mu| \circ \nu)^{-1}(s)$. Seja $x \in g^{-1}(\psi(s))$. Então $g(x) \in \psi(s)$. Se x não está em $f^{-1}(E)$ então está no interior de C e neste caso $f(x) = g(x) \in \psi(s)$ de onde concluímos que x está tanto em $f^{-1}(\psi(s))$ quanto no interior de C, o que é um absurdo. Logo x está em $f^{-1}(E)$ e, portanto, $g(x) = \psi \circ k'_{\delta(x)}(x)$. De (3.5) segue que

$$\psi \circ k'_t(f^{-1}(E) - f^{-1}(\psi(s))) \subset E - \psi(s), \text{ para todo } t \in \mathbf{I},$$

e como $\psi \circ k'_{\delta(x)}(x) = g(x) \in \psi(s)$ temos que $x \in f^{-1}(\psi(s))$. Daí $\delta(x) = 1$ e $g(x) = \psi \circ k'_1(x) = \psi \circ |\mu| \circ \nu(x)$. Então $\psi \circ |\mu| \circ \nu(x) \in \psi(s)$, ou seja, $x \in (|\mu| \circ \nu)^{-1}(s)$. Assim concluimos que

$$g^{-1}(\psi(s)) \subset (|\mu| \circ \nu)^{-1}(s).$$

Reciprocamente, seja $x \in (|\mu| \circ \nu)^{-1}(s)$. Então $|\mu| \circ \nu(x) \in s$. Mas $|\mu| \circ \nu = k'_1$. De (3.5) segue que $x \in f^{-1}(\psi(s)) \subset f^{-1}(E)$ e portanto $\delta(x) = 1$. Então

$$g(x) = k_1 = \psi \circ k'_1(x) = \psi \circ |\mu| \circ \nu(x) \in \psi(s),$$

ou seja, $x \in g^{-1}(\psi(s))$. Concluimos assim que

$$g^{-1}(\psi(s)) \supset (|\mu| \circ \nu)^{-1}(s).$$

De (3.1) e (3.1) resulta que $g^{-1}(\psi(s)) = (|\mu| \circ \nu)^{-1}(s)$. Estabelecida esta igualdade vejamos o que temos em mãos. Como $|\mu|$ é uma aplicação simplicial temos que $|\mu|^{-1}(s)$ ou é vazio ou é a união disjunta de n-simplexos abertos de $|\text{nervo}\,\mathcal{W}|$. No primeiro caso $g^{-1}(y_0) = \emptyset$. No segundo caso, denotemos por $\langle W_0, \ldots, W_n \rangle$ cada um dos n-simplexos abertos de $|\mathcal{W}|$ cuja união disjunta é $|\mu|^{-1}(s)$. Então $g^{-1}(\psi(s)) = (|\mu| \circ \nu)^{-1}(s)$ é a união disjunta de abertos $U = \nu^{-1}(\langle W_0, \ldots, W_n \rangle)$. Vimos em (3.3) que se $\nu(x) \in \langle W_0, \ldots, W_n \rangle$ então $x \in \bigcap_{i=0}^n W_i$. Portanto cada um dos abertos U é tal que $U \subset \bigcap_{i=0}^n W_i$ para algum subconjunto finito $\{W_0, \ldots, W_n\}$ de $\mathcal{W}$. Em particular, $U \in W_0$ e, portanto, o fecho de U está contido no fecho de W_0, que por sua vez está contido no interior de uma n-bola. Em qualquer um dos casos, o conjunto de raízes de g em y_0 é coberto por uma união disjunta de abertos cada um dos quais está contido no interior de uma n-bola. Com isso concluímos nosso primeiro objetivo. Antes de passarmos ao nosso segundo e último objetivo, observemos que cada um dos abertos U acima está contido em $g^{-1}(E)$ pois a união de todos eles é igual a $g^{-1}(\psi(s))$ que por sua vez está contido em $g^{-1}(E)$.

Nosso objetivo, daqui para frente, será obter uma homotopia, constante fora de $f^{-1}(N)$, começando em g e que termine em uma aplicação que seja um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em y_0.

Seja $\mathcal{U}$ a família dos abertos U obtidos acima. A fronteira da união de $\mathcal{U}$, $\partial \bigsqcup_{U\in\mathcal{U}}$, não contém raízes de g em y_0 pois tal união é um aberto que contém todas estas raízes. Por outro lado, $\bigsqcup_{U\in\mathcal{U}} \partial U \subset \partial \sqcup_{U\in\mathcal{U}} U$, de onde concluímos que ∂U não contém raízes de g em y_0, para todo $U \in \mathcal{U}$. Fixemos $U \in \mathcal{U}$ e seja B uma n-bola cujo interior contém o fecho de U. Sejam $(\phi\colon |\mathcal{K}_B| \to B, \mathcal{K}_B)$ uma triangularização de B e $C \subset \mathrm{int}B$ uma vizinhança fechada da fronteira de U que não contenha raízes de g em y_0. Então $\phi^{-1}(C)$ e $\phi^{-1}(g^{-1}(y_0))$ são compactos disjuntos de $|\mathcal{K}_B|$. Seja d a distância entre esses compactos. Subdividindo-o se necessário, podemos supor que o complexo $\mathcal{K}_B$ tem diâmetro menor do que d. Consideremos os seguintes subcomplexos de $\mathcal{K}_B$:

$$\mathcal{K} = \{\sigma \in \mathcal{K}_B : (\mathrm{st}_{\mathcal{K}_B}(\sigma)) \cap \phi^{-1}(U \cup C) \neq \emptyset\}$$
$$\mathcal{L} = \{\sigma \in \mathcal{K}_B : (\mathrm{st}_{\mathcal{K}_B}(\sigma)) \cap \phi^{-1}(C) \neq \emptyset\}.$$

Temos imediatamente que $\phi^{-1}(U \cup C) \subset |\mathcal{K}|$ e $\phi^{-1}(C) \subset |\mathcal{L}|$ (desta segue que $\phi^{-1}(\partial U) \subset \mathrm{int}|\mathcal{L}|$). Se $z \in |\mathcal{L}|$ então z está na face de um simplexo que intersecta $\phi^{-1}(C)$, e portanto a distância de z a $\phi^{-1}(C)$ é menor do que d, de onde concluímos que $z \notin \phi^{-1}(g^{-1}(y_0)) = (g \circ \phi)^{-1}(y_0)$. Logo $|\mathcal{L}|$ e $(g \circ \phi)^{-1}(y_0)$ são conjuntos disjuntos. Assim $\psi^{-1} \circ g \circ \phi(|\mathcal{L}|)$ é um compacto em $\mathbb{R}^n$ que não contém o ponto $\psi^{-1}(y_0)$ de modo que existe uma distância positiva d' entre $\psi^{-1} \circ g \circ \phi(|\mathcal{L}|)$ e $\psi^{-1}(y_0)$. Seja $\mathcal{K}'_E$ um complexo simplicial com diâmetro menor do que d' tal que $|\mathcal{K}'_E| = \mathbb{R}^n$. Como antes, transladando ψ se necessário, podemos assumir que $\psi^{-1}(y_0)$ está em um simplexo aberto s' de $\mathcal{K}'_E$. Logo $\psi^{-1} \circ g \circ \phi(|\mathcal{L}|)$ e s' são conjuntos disjuntos e, portanto, $\psi^{-1} \circ g \circ \phi$ define uma aplicação $g'\colon (|\mathcal{K}|, |\mathcal{L}|) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - s')$. Pelo teorema da aproximação simplicial [Cro78, Teorema 3.6, p.49] existem, uma subdivisão $(\mathcal{K}', \mathcal{L}')$ de $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, uma aproximação simplicial $k\colon (\mathcal{K}', \mathcal{L}') \to (\mathcal{K}'_E, \mathcal{K}'_E - s')$ de g' e uma homotopia $\{k'_t\colon (|\mathcal{K}'|, |\mathcal{L}'|) = (|\mathcal{K}|, |\mathcal{L}|) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - s')\}$ de g' a $|k|$. Como $\phi^{-1}(\partial U) \subset \mathrm{int}|\mathcal{L}|$, os fechados $\phi(|\mathcal{K}| - \mathrm{int}|\mathcal{L}|)$ e ∂U são disjuntos. Seja $\delta'\colon B \to \mathbf{I}$ uma aplicação que vale 1 em $\phi(|\mathcal{K}| - \mathrm{int}|\mathcal{L}|)$ e 0 em ∂U e consideremos a homotopia $\{(h_U)_t\colon \overline{U} \to Y\}$ definida por

$$(h_U)_t(x) = \psi \circ k_{\delta'(x)t} \circ \phi^{-1}(x).$$

A homotopia $\{(h_U)_t\}$ tem as seguintes propriedades:
(I) $(h_U)_0 = g|\overline{U}$
Dado $x \in \overline{U}$ temos que

$$\begin{aligned}(h_U)_0(x) &= \psi \circ k'_0 \circ \phi^{-1}(x)\\ &= \psi \circ g' \circ \phi^{-1}(x)\\ &= \psi \circ (\psi^{-1} \circ g \circ \phi) \circ \phi^{-1}(x)\\ &= g(x).\end{aligned}$$

(II) $\{(h_U)_t\}$ é constante na fronteira de U
Com efeito, dado $x \in \partial U$ temos que $\delta'(x) = 0$ e, portanto,

$$(h_U)_t(x) = \psi \circ k'_0 \circ \phi^{-1}(x) = g(x).$$

(III) $(h_U)_1$ é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em y_0
De fato, seja x uma raiz de $(h_U)_1$ em y_0. Então $\psi \circ k'_{\delta'(x)} \circ \phi^{-1}(x) = (h_U)_1(x) = y_0$ de onde

resulta que $k'_{\delta'(x)} \circ \phi^{-1}(x) = \psi^{-1}(y_0) \in s'$. Como, para todo $t \in \mathbf{I}$, k'_t leva $|\mathcal{L}|$ em $\mathbb{R}^n - s'$ então $\phi^{-1}(x) \in |\mathcal{K}| - |\mathcal{L}| \subset |\mathcal{K}| - \mathrm{int}|\mathcal{L}|$. Logo $\delta'(x) = 1$ e assim $|k| \circ \phi^{-1}(x) = k'_1 \circ \phi^{-1}(x) = \psi^{-1}(y_0) \in s'$. Como $|k|$ é simplicial, existe um simplexo aberto σ em $\mathcal{K}'$ que é mandado por $|k|$ homeomorficamente sobre s'. Portanto $\phi^{-1}(x) \in \sigma\sigma \in |\mathcal{K}| - |\mathcal{L}|$. Seja $V = \phi^{-1}(\sigma) \cap U$. Notemos que V é uma vizinhança de x. Para cada $x' \in V$, $\phi(x') \in \sigma \subset |\mathcal{K}| - \mathrm{int}|\mathcal{L}|$ resultando daí que $\delta'(x') = 1$. Além disso $\phi^{-1}(V) \subset \sigma$. Assim

$$(h_U)_1|V = \psi \circ |k| \circ \phi^{-1}|V = \psi \circ (|k||_\sigma) \circ (\phi^{-1}|V).$$

Como ψ, $|k||\sigma$ e $\phi^{-1}|V$ são homeomorfismos sobre suas imagens segue que $(h_U)_1$ manda V homeomorficamente sobre $(h_U)_1(V)$. Além disso, pelo teorema da invariância do domínio, temos que $(h_U)_1(V)$ é aberto em E e, portanto, aberto em Y. Em resumo, $(h_U)_1$ é um homeomorfismo local em $x \in (h_U)_1^{-1}(y_0)$.

Procedendo com a construção acima para cada $U \in \mathcal{U}$ podemos considerar a homotopia $\{h_t \colon X \to Y\}$ definida por

$$h_t(x) = \begin{cases} (h_U)_t & \text{se } x \in \overline{U} \text{ para algum } U \in \mathcal{U}, \\ g(x) & \text{se } x \in X - \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} U. \end{cases}$$

Então h_1 é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em y_0, pois $(h_U)_1$ o é para cada $U \in \mathcal{U}$ e todas estas raízes estão em $\sqcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Observemos que $\{h_t\}$ é constante igual a g fora de $f^{-1}(E)$ e, portanto, igual a f fora de $f^{-1}(N)$. Isto termina a demonstração do teorema. □

Este teorema tem, para aplicações próprias, a seguinte consequência.

Corolário 3.6. *Sejam X uma n-variedade, Y um espaço localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$, $N \subset Y$ uma vizinhança de y_0 e $f \colon X \to Y$ uma aplicação própria. Então f é propriamente homotópica a uma aplicação que é tranversa a y_0 por uma homotopia que é constante fora de $f^{-1}(N)$.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que N é compacto. Caso contrário basta substituir N por uma vizinhança compacta de y_0 contida em N. Pelo teorema acima, f é homotópica a uma aplicação que é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes em y_0 por uma homotopia que é constante fora de $f^{-1}(N)$. Como f é própria, $f^{-1}(N)$ é compacto, e portanto a homotopia entre f e g é própria, pois é constante fora do compacto $f^{-1}(N)$ (teorema (1.5)). Assim g é própria e, pelo teorema (2.62), é tranversa a y_0. □

3.2 Resultados auxiliares

Nesta seção nos dedicamos a uma série de lemas necessários à demonstração dos teoremas (3.17) e (3.19). Destes destacamos três: os lemas (3.12), (3.13) e (3.15). O lema (3.12) nos diz, em linhas gerais, que se tivermos um número finito de raízes, todas isoladas e pertencentes à mesma classe de raízes, então existe um conjunto contendo-as cuja fronteira é livre de raízes. Em seguida, o lema (3.13) nos diz que em um conjunto como este podemos eliminar todas estas raízes exceto uma. Finalmente o lema (3.15) afirma que se um conjunto como acima tiver índice nulo então podemos jogar fora, sem exceção, todas as raízes contidas neste conjunto.

Lema 3.7. *Sejam $n \geq 2$ e X um espaço conexo por caminhos e localmente n-euclidiano em $x_0 \in X$. Então $X - x_0$ é conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam x_1, $x_2 \in X - x_0$ e β um caminho em X de x_1 a x_2. Suponhamos que β passa por x_0, caso contrário, β já é um caminho em $X - x_0$ ligando x_1 a x_2. Seja B uma n-bola com $x_0 \in \mathrm{int}B$. Sendo compacto, $\beta^{-1}(B) \subset \mathbf{I}$ admite um mínimo t_m e um máximo t_M que são distintos pois $x_0 \in \mathrm{int}B$. Como $n \geq 2$ existe um caminho β_1 em $B - x_0$ de $\beta(t_m)$ a $\beta(t_M)$. Seja β_2 o caminho em $X - x_0$ de x_1 a x_2 dado por

$$\beta_2(t) = \begin{cases} \beta(t) & \text{se } 0 \leq t \leq t_m, \\ \beta_1(\frac{t-t_m}{t_M-t_m}) & \text{se } t_m \leq t \leq t_M, \\ \beta(t) & \text{se } t_M \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Assim $X - x_0$ é conexo por caminhos. □

Lema 3.8. *Sejam $n \geq 2$ e X um espaço localmente n-euclidiano em $x_0 \in X$. Para todo $x \in X - x_0$ o homomorfismo $k_\#\colon \pi(X - x_0, x) \to \pi(X, x)$ induzido pela inclusão $X - x_0 \overset{k}{\subset} X$ é sobrejetor. Se $n > 2$ então $k_\#$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Podemos assumir que X é conexo por caminhos, caso contrário basta tomar a componente conexa por caminhos que contém x_0. Sejam $E \subset X$ uma vizinhança n-euclidiana de x_0 e $x \in E - x_0$. Como $n \geq 2$ temos que E, $E - x_0$ são conexos e pelo lema anterior $X - x_0$ também é conexo. Deste modo podemos aplicar o teorema de Van Kampem [Lee00, Teorema 10.1, p.211] aos conjuntos E, $X - x_0$, $E \cap (X - x_0) = E - x_0$ e $E \cup (X - x_0) = X$ de onde obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
& & \pi(X-x_0,x) \arrow[d, "e"] \arrow[drr, "k_\#"] & & \\
\pi(E-x_0,x) \arrow[urr, "i_\#"] \arrow[rr, hook, "F"] \arrow[drr, "j_\#"'] & & \pi(X-x_0,x) * \pi(E,x) \arrow[rr, "G"] & & \pi(X,x) \\
& & \pi(E,x) \arrow[u, "d"'] \arrow[urr, "\ell_\#"'] & &
\end{tikzcd}$$

onde $i_\#$, $j_\#$, $k_\#$ e $\ell_\#$ são as induzidas das respectivas inclusões, e e d são as inclusões no produto livre, F é um homomorfismo injetor e G é um homomorfismo sobrejetor cujo núcleo é o subgrupo normal gerado pela imagem de F. O grupo $\pi(E, x)$ é trivial pois E é simplesmente conexo, daí e é um isomorfismo e portanto $k_\#$ é sobrejetor. Se $n > 2$ então $E - x_0$ também é simplesmente conexo. Daí $\ker(G) = F(\pi(E - x_0, x))$ é trivial. Logo ambos G e $k_\#$ são isomorfismos. □

Corolário 3.9. *Sejam $n \geq 2$ e X um espaço localmente n-euclidiano em $x_0 \in X$. Então*

1. *Todo caminho em X com extremidades em $X - x_0$ é homotópico, em X, a um caminho em $X - x_0$.*

2. *Se $n > 2$, quaisquer dois caminhos em $X - x_0$ homotópicos em X, são homotópicos em $X - x_0$.*

Demonstração. Sejam E e x como na demonstração do lema acima.

Para provar o primeiro item seja γ um caminho em X com extremidades em $X - x_0$. Se γ_1 um caminho em $X - x_0$ de x a $\gamma(0)$ e γ_2 um caminho também em $X - x_0$ de $\gamma(1)$ a x, então $\gamma_1\gamma\gamma_2$ é um laço em X com ponto base x. Como $k_\#$ é sobrejetor, $[\gamma_1\gamma\gamma_2] = [\gamma_3]$ para algum laço γ_3 em $X - x_0$ baseado em x. Deste modo $\gamma_1^{-1}\gamma_3\gamma_2^{-1}$ é um caminho em $X - x_0$ de $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ e $[\gamma_1^{-1}\gamma_3\gamma_2^{-1}] = [\gamma]$.

Para provar o segundo item sejam γ e γ' dois caminhos em $X - x_0$ homotópicos em X. Consideremos γ_1 e γ_2 caminhos em $X - x_0$ com o primeiro indo de x a $\gamma(0) = \gamma'(0)$ e o segundo de $\gamma(1) = \gamma'(1)$ a x. Assim $\gamma_1\gamma\gamma_2$ e $\gamma_1\gamma'\gamma_2$ são laços em $X - x_0$, baseados em x, homotópicos em X. Como $k_\#$ é injetor eles são homotópicos em $X - x_0$. Logo γ e γ' são homotópicos em $X - x_0$. □

Lema 3.10. *Sejam $n > 1$ e X uma n-variedade. Sejam ainda x_0 e x_1 dois pontos distintos em X e γ um caminho em X de x_0 a x_1. Então existe uma n-bola $B \subset X$ cujo interior contém x_0 e x_1 e tal que todo caminho em B de x_0 a x_1 é homotópico a γ em X.*

Demonstração. Sejam B_0 uma n-bola com $x_0 \in \text{int}B_0$ e γ_0 um caminho em $\text{int}B_0$ de x_0 a um ponto $x' \in \text{int}B_0 - x_0$. Então $\gamma_0^{-1}\gamma$ é um caminho em X com extremidades em $X - x_0$ de modo que pelo lema anterior existe um caminho γ_1 em $X - x_0$ homotópico, em X, a $\gamma_0^{-1}\gamma$ (e portanto γ é homotópico a $\gamma_0\gamma_1$). Como $X - x_0$ é uma vizinhança de γ_1 a proposição (2.22) nos garante a existência de uma isotopia $\{h_t \colon X \to X\}$, começando na identidade, que é constante fora de $X - x_0$ - e portanto $h_t(x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbf{I}$ - e tal que $\gamma_1 = \{h_t(x')\}$. Seja $B = h_1(B_0)$. Assim tanto $x_0 = h_1(x_0)$ quanto $x_1 = h_1(x')$ pertencem ao interior de B.

Resta mostrarmos que todo caminho em B de x_0 a x_1 é homotópico, em X, a γ. Seja então β um tal caminho. Consideremos a seguinte homotopia de caminhos

$$H_t(s) = \begin{cases} h_t \circ \gamma_0(s(2-t)) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2, \\ h_{(2s-1)(1-t)+t} \circ \gamma_0(1 + st - t) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Ambas as expressões de H_t valem $h_t \circ \gamma_0(1 - t/2)$ quando $s = 1/2$, de modo que $\{H_t\}$ está bem definida. Temos o seguinte

$$\begin{aligned} H_0(s) &= \begin{cases} h_0 \circ \gamma_0(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ h_{(2s-1)} \circ \gamma_0(1) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \gamma_0(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ h_{(2s-1)}(x') & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \gamma_0(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \gamma_1(2s-1) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \gamma_0\gamma_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \begin{cases} h_1 \circ \gamma_0(s) & \text{se } 0 \leq\leq 1/2 \\ h_1 \circ \gamma_0(s) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= h_1 \circ \gamma_0. \end{aligned}$$

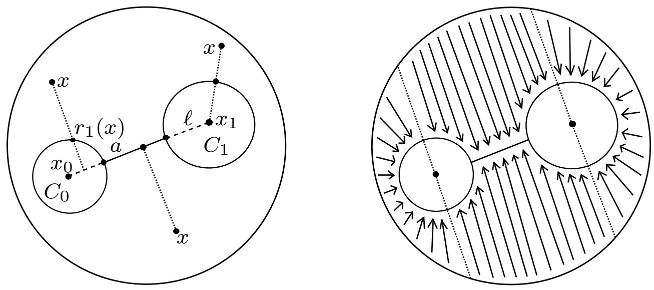
Ou seja, $\gamma_0\gamma_1$ e $h_1 \circ \gamma_0$ são homotópicos. Como $h_1 \circ \gamma_0$ e β são caminhos no conjunto simplesmente conexo B com as mesmas extremidades segue que os mesmos são homotópicos. Resumindo: γ é homotópico a $\gamma_0\gamma_1$, que é homotópico a $h_1\gamma_0$, que é homotópico a β. Logo β é homotópico a γ. □

Lema 3.11. *Sejam $C_0, C_1 \subset \text{int}\mathbb{B}^n$ duas n-bolas disjuntas, ℓ o segmento de reta unindo os centros de C_0 e C_1, $a \subset \ell$ o segmento de reta ligando os pontos de interseção de ℓ com as fronteiras de C_0 e C_1. Então a união $a \cup \partial C_0 \cup \partial C_1$ é um retrato por deformação de $\mathbb{B}^n - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1)$.*

Demonstração. Vamos construir um retrato por deformação

$$\{r_t\colon \mathbb{B}^n - (\mathrm{int}C_0 \cup \mathrm{int}C_1) \to \mathbb{B}^n - (\mathrm{int}C_0 \cup \mathrm{int}C_1) \mid t \in \mathbf{I}\}$$

de $\mathbb{B}^n - (\mathrm{int}C_0 \cup \mathrm{int}C_1)$ sobre $a \cup \partial C_0 \cup \partial C_1$.



Para todo $x \in \mathbb{B}^n - (\mathrm{int}C_0 \cup \mathrm{int}C_1)$ seja $r_1(x)$ o único ponto em que o segmento de reta que minimiza a distância de x a ℓ intercepta o conjunto $a \cup \partial C_0 \cup \partial C_1$. Agora, para todo $t \in \mathbf{I}$ e para todo $x \in \mathbb{B}^n - (\mathrm{int}C_0 \cup \mathrm{int}C_1)$ definimos

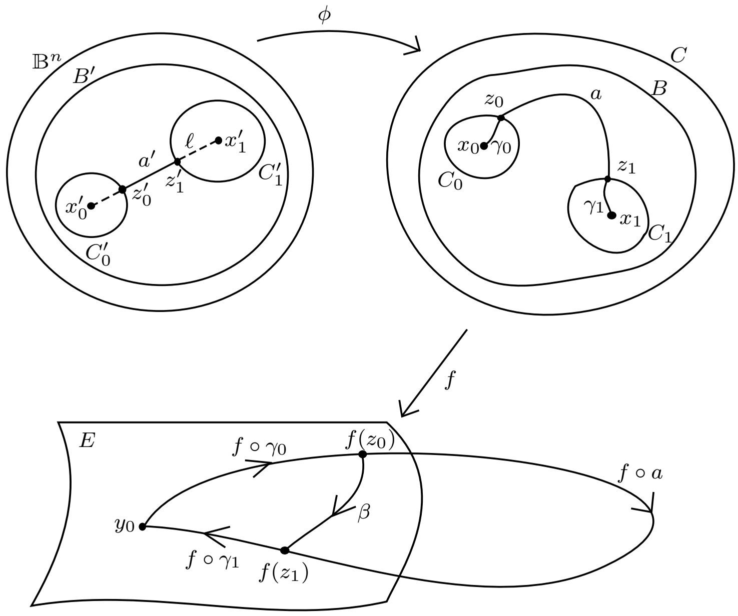
$$r_t(x) = (1-t)x + tr_1(x).$$ □

Lema 3.12. *Sejam $n > 2$ e $f\colon X \to Y$ uma aplicação da n-variedade conexa X no espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo Y que é localmente n-euclidiano em y_0. Sejam x_0 e x_1 duas raízes isoladas de f em y_0 Nielsen relacionadas pelo caminho $\gamma\colon \mathbf{I} \to X$ que vai de x_0 a x_1, $N \subset X$ uma vizinhança de γ sem raízes de f que não x_0 e x_1, e E uma vizinhança euclidiana de y_0. Então existem uma n-bola $B \subset N$ cujo interior contém x_0 e x_1 e uma homotopia $\{h_t\colon X \to Y\}$ começando em f com as seguintes propriedades:*

1. *$\{h_t\}$ é constante em uma vizinhança de $f^{-1}(y_0)$ e constante fora de N;*
2. *$h_t^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0)$ para todo $t \in \mathbf{I}$;*
3. *$g = h_1$ manda $(B, \partial B)$ em $(E, E - y_0)$;*
4. *todo caminho em B de x_0 a x_1 é homotópico a γ em N.*

Demonstração. Podemos assumir que N é conexo e aberto e portanto uma n-variedade conexa. Pelo lema (3.10) existe uma n-bola $C \in N$ com x_0 e x_1 em seu interior e tal que todo caminho em C de x_0 a x_1 é homotópico a γ em N.

Para as construções que se seguem, a figura abaixo pode ser útil.



Seja $\phi\colon \mathbb{B}^n \to C$ com $x'_0 = \phi(x_0)$ e $x'_1 = \phi(x_1)$. Sejam ainda $B' \subset \mathbb{B}^n$ uma bola concêntrica a $\mathbb{B}^n$ cujo interior contém x'_0 e x'_1, $C'_0, C'_1 \subset \mathrm{int}B'$ duas bolas disjuntas centradas respectivamente em x'_0 e x'_1 e cujas imagens por $f\circ\phi$ estão contidas em E, isto é, $f\circ\phi(C'_i) \subset E$, $i = 0, 1$. Seja também ℓ o segmento de reta ligando x'_0 a x'_1. Chamemos de z'_0 e z'_1, respectivamente, aos pontos onde ℓ intersecta as fronteiras de C'_0 e C'_1, e de $a' \subset \ell$ ao segmento de reta que liga z'_0 a z'_1 parametrizada por $a'(s) = (1-s)z'_0 + sz'_1$. Pelo lema acima existe um retrato por deformação

$$\{r'_t\colon \mathbb{B}^n - (\mathrm{int}C'_0 \cup \mathrm{int}C'_1) \to \mathbb{B}^n - (\mathrm{int}C'_0 \cup \mathrm{int}C'_1) |\ t \in \mathbf{I}\}$$

de $\mathbb{B}^n - (\mathrm{int}C'_0 \cup \mathrm{int}C'_1)$ sobre $a' \cup \partial C'_0 \cup \partial C'_1$.

Transportemos toda essa construção para dentro de C através de ϕ, isto é, sejam $B = \phi(B')$, $C_i = \phi(C'_i)$, $i = 0, 1$, $z_i = \phi(z'_i)$, $i = 0, 1$, $a = \phi(a')$ e $\{r_t\} = \{\phi \circ r'_t \circ \phi^{-1}\}$. Assim a é um caminho de z_0 a z_1 e

$$\{r_t\colon C - (\mathrm{int}C_0 \cup \mathrm{int}C_1) \to C - (\mathrm{int}C_0 \cup \mathrm{int}C_1) |\ t \in \mathbf{I}\}$$

é um retrato por deformação de $C - (\mathrm{int}C_0 \cup \mathrm{int}C_1)$ em $\partial C_0 \cup \partial C_1 \cup a$.

Sejam γ_0 um caminho em C_0 de x_0 a $z_0 = a(0)$, γ_1 um caminho em C_1 de $z_1 = a(1)$ a x_1, e β um caminho em $E - y_0$ de $f(z_0)$ a $f(z_1)$.

Como $\gamma_0 a \gamma_1$ é um caminho em C de x_0 a x_1 então é homotópico a γ em N, ou seja, $[\gamma_0 a \gamma_1] = [\gamma]$ e portanto

$$[f \circ \gamma_0][f \circ a][f \circ \gamma_1] = [f \circ \gamma] = [y_0]$$

Por outro lado, $(f \circ \gamma_0)\beta(f \circ \gamma_1)$ é um laço no espaço simplesmente conexo E, e portanto $[f \circ \gamma_0][\beta][f \circ \gamma_1] = [y_0]$. Logo $[f \circ a] = [\beta]$, ou seja, $f \circ a$ e β são homotópicos em Y. Mas ambos são caminhos em $Y - y_0$ e $n > 2$ de sorte que pelo item (2) do corolário (3.9), eles são homotópicos também em $Y - y_0$, resultando daí que existe uma aplicação $H\colon \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to Y - y_0$ tal que para todo $s \in \mathbf{I}$

$$H(s, 0) = f(z_0) \quad \text{e} \quad H(s, 1) = f(z_1)$$

e, para todo $t \in \mathbf{I}$

$$H(0,t) = f \circ a(t) \quad \text{e} \quad H(1,t) = \beta(t) \in E - y_0.$$

Consideremos a homotopia $\{h'_s \colon C - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1) \to Y - y_0\}$ definida por

$$h'_s(x) = \begin{cases} f \circ r_{2s}(x) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \text{ e } x \in C - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1), \\ f \circ r_1(x) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \text{ e } x \in r_1^{-1}(\partial C_0 \cup \partial C_1), \\ H(2s-1, a^{-1}(r_1(x))) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \text{ e } x \in r_1^{-1}(a(\mathbf{I})). \end{cases}$$

Na última expressão, $a^{-1}(r_1(x))$ é o ponto $t \in \mathbf{I}$ para o qual $a(t) = r_1(x)$. O conjunto $r_1^{-1}(z_0, z_1) \times [1/2, 1] \subset C - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1)$ é o domínio comum às duas últimas expressões, e para $(x, s) \in r_1^{-1}(z_0, z_1) \times [1/2, 1]$ a primeira expressão vale $f \circ r_1(x) = f(z_i)$, e a segunda vale $H(2s-1, a^{-1}(r_1(z_i))) = H(2s-1, i) = f(z_i)$. Para $s = 1/2$ a primeira expressão coincide com as duas últimas. Logo h'_s é uma função contínua bem definida.

Seja $\delta \colon X \to \mathbf{I}$ uma função contínua que vale um em B e zero fora do interior de C e consideremos a homotopia $\{h_t \colon X \to Y\}$ definida por

$$h_t(x) = \begin{cases} h'_{\delta(x)t}(x) & \text{se } x \in C - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1) \\ f(x) & \text{se } x \in (X - \text{int}C) \cup C_0 \cup C_1. \end{cases}$$

A interseção dos dois domínios acima é o conjunto fechado $(\partial C \cup \partial C_0 \cup \partial C_1)$. Se $x \in \partial C$ então $\delta(x) = 0$ e portanto $h'_{\delta(x)t}(x) = h'_0(x) = f \circ r_0(x) = f(x)$; e se $x \in (\partial C_0 \cup \partial C_1)$ então $\delta(x) = 1$ e $r_1(x) = x$ e portanto $h'_{\delta(x)t}(x) = h'_t(x) = f(x)$. Em qualquer um dos casos, as duas expressões que definem h_t coincidem no domínio comum a ambas, donde concluímos que a homotopia $\{h_t\}$ está bem definida.

Vamos verificar a validade das afirmações (1)-(4) contidas no enunciado. De sua definição segue que $\{h_t\}$ é constante em $X - (C - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1)) = (X - C) \cup \text{int}C_0 \cup \text{int}C_1$ que é uma vizinhança de $f^{-1}(y_0)$. Além disso $C - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1) \subset N$ de modo que $\{h_t\}$ é constante fora de N. Isto prova (1).

Para todo $s \in \mathbf{I}$, nem $f \circ r_s$ nem H possuem raízes em y_0, assim h_s não possui raiz em $C - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1)$, e como acabamos de ver h_s é constante em $f^{-1}(y_0)$. Logo $h_s^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0)$ para todo $s \in \mathbf{I}$, o que prova (2).

Da definição de $\{h'_s\}$ vemos que $h'_1(C - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1)) = f(\partial C_0 \cup \partial C_1) \cup \beta(\mathbf{I}) \subset E - y_0$ e portanto $h_1(B - (\text{int}C_0 \cup \text{int}C_1)) \subset E - y_0$, pois $\delta(x) = 1$ para $x \in B$. Além disso $h_1(C_0 \cup C_1) = f(C_0 \cup C_1) \subset E$. Logo h_1 manda o par $(B, \partial B)$ no par $(E, E - y_0)$, o que prova (3).

Finalmente, todo caminho em B de x_0 a x_1 é um caminho em C e pela construção de C deve ser homotópico a γ em N, o que prova (4). □

Lema 3.13. *Sejam $n \geq 1$, $f \colon X \to Y$ uma aplicação de uma n-variedade conexa X em um espaço Y que é localmente n-euclidiano em y_0 e B uma n-bola em X tal que sua imagem por f está contida em uma vizinhança n-euclidiana de y_0 e cuja fronteira não possui raízes de f em y_0. Então existe uma homotopia $\{h_t \colon X \to Y\}$ começando em f, que é igual a f fora do interior de B, e que termina em uma aplicação que possui, em B, uma única raiz em y_0.*

Demonstração. Seja E uma vizinhança n-euclidiana de y_0 tal que $f(B) \subset E$. Sejam ainda $\phi \colon \mathbb{B}^n \to B$ e $\psi \colon \mathbb{R}^n \to E$ homeomorfismos com $\psi(0) = y_0$. Consideremos $h \colon X \to Y$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} \psi\left(\|\phi^{-1}(x)\|\psi^{-1}\circ f\circ\phi\left(\frac{\phi^{-1}(x)}{\|\phi^{-1}(x)\|}\right)\right) & \text{se } x\in B \text{ e } \phi^{-1}(x)\neq 0,\\ y_0 & \text{se } x\in B \text{ e } \phi^{-1}(x)=0,\\ f(x) & \text{se } x\notin B.\end{cases}$$

Se $x \in \partial B$ então $\|\phi^{-1}(x)\| = 1$ e portanto a primeira fórmula vale, neste caso, $f(x)$; e

$$\lim_{\phi^{-1}(x)\to 0}\|\phi^{-1}(x)\|\psi^{-1}\circ f\circ\phi\left(\frac{\phi^{-1}(x)}{\|\phi^{-1}(x)\|}\right) = 0,$$

pois $\lim_{\phi^{-1}(x)\to 0}\|\phi^{-1}(x)\| = 0$ e $\psi^{-1}\circ f\circ\phi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ é limitada. Portanto h é contínua e está bem definida. Temos ainda que h é igual a f fora do interior de B e que $\phi(0)$ é sua única raiz em y_0 dentro de B. Consideremos a homotopia $\{h_t\colon X\to Y\}$ definida por

$$h_t(x) = \begin{cases}\psi\big((1-t)\psi^{-1}\circ f(x) + t\psi^{-1}\circ h(x)\big) & \text{se } x\in B\\ f(x) & \text{se } x\notin B\end{cases}$$

Como $h(x) = f(x)$ para $x \in \partial B$ segue que $\{h_t\}$ está bem definida. Além disso $h_0 = f$, $h_1 = h$ e $\{h_t\}$ é constante fora do interior de B. □

Lema 3.14. *Sejam $n > 2$ e $k\colon (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ uma aplicação cujo homomorfismo induzido em homologia $k_n\colon H_n(\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n; \mathbb{Z}) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; \mathbb{Z})$ é trivial. Então existe uma homotopia $\{l_t\colon (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)\}$ começando em k, que é constante na fronteira de $\mathbb{B}^n$ e com $h_1(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{R}^n - 0$.*

Demonstração. Sejam $b_0 \in \partial\mathbb{B}^n$ e $e_0 = k(b_0) \in \mathbb{R}^n - 0$ e consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_n(\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n, b_0) \arrow[r, "k_{\pi n}"] \arrow[d, "\mathcal{H}"'] & \pi_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0, e_0) \arrow[d, "\mathcal{H}"] \\ H_n(\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n; \mathbb{Z}) \arrow[r, "k_n"'] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

onde $k_{\pi n}$ é o homomorfismo induzido por k em grupo fundamental e ambos $\mathcal{H}$ são homomorfismos de Hurewicz. Como $\mathbb{R}^n - 0$ é simplesmente conexo, pois $n > 2$, e $H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; \mathbb{Z})$ é trivial para $p < n$ temos que o homomorfismo $\mathcal{H}$ da direita é um isomorfismo, resultando daí que $k_{\pi n}$ é trivial, pois k_n o é.

A identidade $i\colon (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n, b_0) \to (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n, b_0)$ representa um elemento $[i] \in \pi_n(\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n, b_0)$ cuja imagem por $k_{\pi n}$ é $[k\circ i] = [k] \in \pi_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0, e_0)$. Mas como $k_{\pi n}$ é trivial, segue que $[k] = [e_0]$. Portanto existe uma homotopia $\{h_t\colon (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n, b_0) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0, e_o)\}$ começando em k e tal que $h_1(\mathbb{B}^n) = e_0$.

Pelo teorema (1.4), $K = \bigcup_{t\in\mathbf{I}} h_t^{-1}(0)$ é compacto, e portanto fechado, em $\mathbb{B}^n$ e como, para todo $t \in \mathbf{I}$, $h_t(\partial\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{R}^n - 0$ temos que K e $\partial\mathbb{B}^n$ são disjuntos. Logo existe uma função $\delta\colon \mathbb{B}^n \to \mathbf{I}$ que vale zero na fronteira $\mathbb{B}^n$ e um em K. Consideremos $\{l_t\colon (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)\}$ dada por $l_t(x) = h_{\delta(x)t}$ para todo $(x, t) \in \mathbb{B}^n \times \mathbf{I}$. Então $\{l_t\}$ começa em k e é constante igual a k na fronteira de $\mathbb{B}^n$. Além disso se $l_1(x) = 0$ para algum $x \in \mathbb{B}^n$ então $h_{\delta(x)} = 0$ e portanto $x \in K = \bigcup_{t\in\mathbf{I}} h_t^{-1}(0)$ de modo que $\delta(x) = 1$. Assim $0 = l_1(x) = h_1(x) = e_0 \in \mathbb{R}^n - 0$, o que é um absurdo. Portanto $l_1(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{B}^n$ ou $l_1(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{R}^n - 0$. □

Lema 3.15. *Sejam $n > 2$, X uma n-variedade orientável conexa e Y um espaço conexo, localmente conexo, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em y_0.*

Sejam ainda $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria, $E \subset Y$ uma vizinhança n-euclidiana de y_0 e $B \subset X$ uma n-bola tais que $f(B) \subset E$, $f(\partial B) \subset E - y_0$ e que $\lambda(f, intB) = 0$. Então existe uma homotopia própria $\{h_t\colon X \to Y\}$ começando em f, que é constante fora de B e com $h_1(B) \subset E - y_0$.

Demonstração. Sejam $x \in \mathrm{int}B$, N uma vizinhança de B tal que $N - \mathrm{int}B$ não possui raízes de f em y_0 (observação (2.28)). Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
(X, X-B) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "k"'] & (X, X-\mathrm{int}B) \arrow[d, hook, "j"'] & (N, N-\mathrm{int}B) \arrow[l, hook', "e"'] \arrow[r, "f'"] & (Y, Y-y_0) \\
& (X, X-x) & (B, \partial B) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f''"'] & (E, E-y_0) \arrow[u, hook, "\ell"']
\end{tikzcd}$$

onde f' e f'' são definidas por f, e todas as demais aplicações são inclusões com e e ℓ sendo excisões. Como B é conexo, a classe fundamental de B, o_B, é um gerador de $H_n(X, X-B)$ e k induz isomorfismo em homologia (observação (1.25)). A aplicação j também induz isomorfismo pois $X - \mathrm{int}B$ é um retrato por deformação de $X - x$. Assim, da comutatividade do diagrama, segue que i induz isomorfismo em homologia. Como e também induz isomorfismo temos que $e_n^{-1} \circ i_n(o_B)$ é um gerador de $H_n(N, N - \mathrm{int}B)$, onde i_n e e_n são as induzidas no n-ésimo grupo de homologia de i e e, respectivamente. Agora

$$f'_n(e_n^{-1} \circ i_n(o_B)) = f'_n \circ e_n^{-1} \circ i_n(o_B) = \lambda(f, \mathrm{int}B)\mu = 0\mu = 0$$

implica que $f'_n = 0$, e como ℓ é uma excisão temos que $f''_n = 0$.

Sejam $\phi\colon \mathbb{B}^n \to B$ e $\psi\colon E \to \mathbb{R}^n$ homeomorfismos com $\psi(y_0) = 0$. Então $\psi \circ f'' \circ \phi\colon (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ é uma aplicação cuja induzida no n-ésimo nível de homologia é trivial. Pelo lema (3.14) existe uma homotopia $\{l_t\colon (\mathbb{B}^n, \partial\mathbb{B}^n) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)\}$ que começa em $\psi \circ f'' \circ \phi$, é constante igual a $\psi \circ f'' \circ \phi$ na fronteira de $\mathbb{B}^n$ e tal que $l_1(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{R}^n - 0$. Consideremos $h'_t\colon (B, \partial B) \to (E, E - y_0)$ dada por $h'_t = \psi^{-1} \circ l_t \circ \phi^{-1}$. Então $\{h'_t\}$ começa em f'' é constante igual a f'' na fronteira de B e h'_1 não possui raízes em y_0. Consideremos agora $\{h_t\colon X \to Y\}$ definida por

$$h_t(x) = \begin{cases} h'_t(x) & \text{se } x \in B, \\ f(x) & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

Como $\{h'_t\}$ é constante igual a f'' na fronteira de B, segue que $\{h_t\}$ está bem definida e é contínua. Assim $\{h_t\}$ é uma homotopia começa em f, é constante igual a f fora de B e $h_1(B) \subset E - y_0$. Finalmente, $\{h_t\}$ é própria pois f o é e $\{h_t\}$ é constante fora do compacto B. ☐

3.3 Os teoremas de realização

Antes de demonstrarmos os teoremas de realização do grau absoluto e do número mínimo transverso, vejamos um exemplo que é interessante, em primeiro lugar, porque ilustra e resume a teoria exposta neste texto. Em segundo lugar porque, assim como aplicações entre n-variedades com $n > 2$, o número próprio de Nielsen é um limitante inferior realizável para o número de raízes na classe de homotopia própria e o grau absoluto é um limitante inferior realizável para o número de raízes na classe de homotopia própria transversa. Em terceiro lugar porque, diferentemente do que ocorre com aplicações entre variedades, as classes de raízes podem ter multiplicidades diferentes, além de poder haver tanto classes essenciais quanto não essenciais. Finalmente, porque este é outro exemplo em que o número de Reidemeister é estritamente maior que o número próprio de Nielsen, mesmo este sendo positivo.

Exemplo 3.16. Seja $n \geq 2$. Sejam N e S, respectivamente, os pólos norte e sul da esfera $\mathbb{S}^n$, isto é, $N = (0, \ldots, 0, 1)$ e $S = (0, \ldots, 0, -1)$. Seja ainda k um inteiro positivo e consideremos $k\mathbb{S}^n$ o espaço quociente obtido de k cópias de $\mathbb{S}^n$ através da identificação do pólo norte de uma esfera com o pólo sul da seguinte, sem fechar o ciclo. Precisamente, considere, em $\{1, \ldots, k\} \times \mathbb{S}^n$, a relação de equivalência R que identifica (i, N) com $(i + 1, S)$ para todo $1 \leq i \leq k-1$ e seja $k\mathbb{S}^n = \{1, \ldots, k\} \times \mathbb{S}^n/R$. Em particular, $2\mathbb{S}^n$ é o produto wedge de duas esferas. Seja também $\mathbb{Z}\mathbb{S}^n = \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^n/R'$ onde R' é a relação que associa (i, N) a $(i+1, S)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. A inclusão $\{1, \ldots, k\} \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^n$ induz uma aplicação injetora $j \colon k\mathbb{S}^n \to \mathbb{Z}\mathbb{S}^n$. Denotemos por $\mathbb{S}^n/\{N, S\}$ o espaço quociente obtido de $\mathbb{S}^n$ identificando os pólos norte e sul. A projeção $(i, x) \mapsto x$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{S}^n$ sobre $\mathbb{S}^n$ induz uma aplicação $\widehat{q} \colon \mathbb{Z}\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\{N, S\}$ que é um recobrimento.

Ao identificarmos o equador de $\mathbb{S}^n$ a um único ponto, estrangulando a esfera, obtemos o produto wedge de duas esferas, ou seja, $2\mathbb{S}^n$. A aplicação quociente que realiza a identificação acima é uma aplicação sobrejetora de $\mathbb{S}^n$ em $2\mathbb{S}^n$. Vamos generalizar esta contrução para obtermos uma aplicação sobrejetora de $\mathbb{S}^n$ em $k\mathbb{S}^n$ do seguinte modo: primeiro dividimos a esfera $\mathbb{S}^n$ em k partes, todas de mesma altura, através de $(k-1)$ latitudes e depois estrangulamos a esfera em cada uma dessas latitudes. Para formalizar esta idéia consideremos, para cada $1 \leq i \leq k$, o subconjunto $S_i \subset \mathbb{S}^n$ definido por

$$S_i = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : \frac{2(i-1)}{k} - 1 \leq x_{n+1} \leq \frac{2i}{k} - 1 \right\}.$$

Sejam $g_i \colon S_i \to \mathbb{S}^n$ dadas por

$$g_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{cases} S & \text{se } x_{n+1} = -1 \\ \left(\sqrt{\frac{1-a_1^2(x_{n+1})}{1-x_{n+1}^2}} (x_1, \ldots, x_n), a_1(x_{n+1}) \right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$g_k(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{cases} N & \text{se } x_{n+1} = 1 \\ \left(\sqrt{\frac{1-a_k^2(x_{n+1})}{1-x_{n+1}^2}} (x_1, \ldots, x_n), a_k(x_{n+1}) \right) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e para $1 < i < k$,

$$g_k(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\sqrt{\frac{1 - a_i^2(x_{n+1})}{1 - x_{n+1}^2}} (x_1, \ldots, x_n), a_i(x_{n+1}) \right)$$

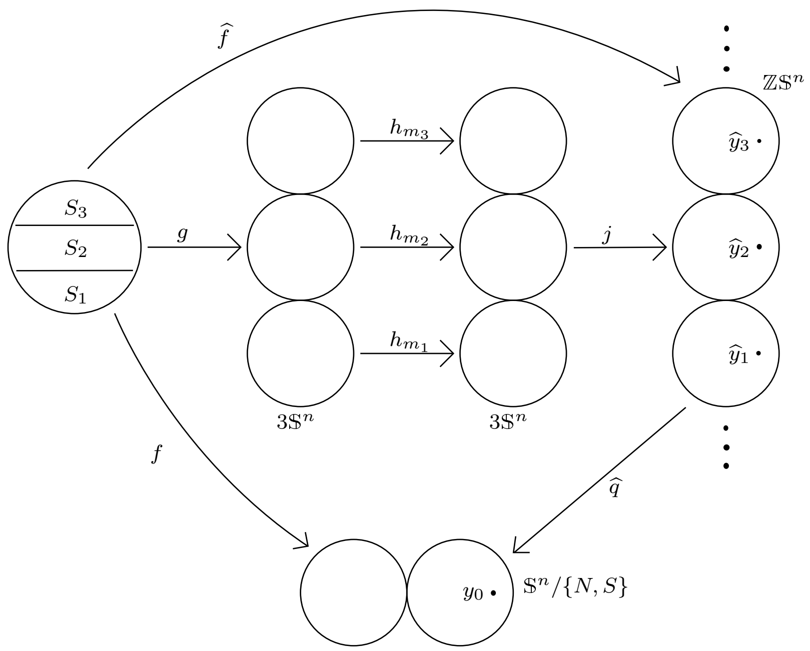
onde $a_z(x) = k(x + 1) - 2z + 1$. Então, para cada $1 \leq i \leq k$, g_i leva S_i sobrejetivamente em $\mathbb{S}^n$, comprimindo as latitudes $x_{n+1} = \frac{2(i-1)}{k} - 1$ e $x_{n+1} = \frac{2i}{k} - 1$ aos pólos sul e norte respectivamente, e levando o restante de S_i homeomorficamente em $\mathbb{S}^n - \{N, S\}$. Finalmente seja $g \colon \mathbb{S}^n \to k\mathbb{S}^n$ dada por

$$g(\boldsymbol{x}) = [(i, g_i(\boldsymbol{x}))] \quad \boldsymbol{x} \in S_i,\ 1 \leq i \leq k,$$

onde os colchetes indicam a classe de equivalência de $(i, g_i(x))$ no espaço quociente $k\mathbb{S}^n = \{1, \ldots, k\} \times \mathbb{S}^n/R$.

Para cada $m \in \mathbb{Z}$ seja $h_m \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação com grau de Brower igual a m que deixa fixo os pólos. Então dada uma k-upla de inteiros $(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^k$ a aplicação do produto cartesiano $\{1, \ldots, k\} \times \mathbb{S}^n$ em si mesmo dada por $(i, x) \mapsto (i, h_{m_i}(x))$ induz uma aplicação de $k\mathbb{S}^n$ em si mesmo que denotaremos por $h(m_1, \ldots, m_k) \colon k\mathbb{S}^n \to k\mathbb{S}^n$.

Sejam agora $\widehat{f} \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{Z}\mathbb{S}^n$ a composição $\widehat{f} = j \circ h(m_1, \ldots, m_k) \circ g$ e $f \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\{N, S\}$ a projeção de $\widehat{f}$ através de $\widehat{q}$, isto é, $f = \widehat{q} \circ \widehat{f}$. Consideremos um ponto $y_0 \in \mathbb{S}^n/\{N, S\} - \{N, S\}$ e denotemos os pontos em $\widehat{q}^{-1}(y_0)$ por $\widehat{y}_i$ onde $\widehat{y}_i \in \{i\} \times \mathbb{S}^n$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. A figura a seguir ilustra o caso $k = 3$.



Tanto $\mathbb{S}^n$ quanto $\mathbb{Z}\mathbb{S}^n$ são simplesmente conexos de sorte que as imagens de seus grupos fundamentais por f e $\widehat{q}$, respectivamente, são, trivialmente, iguais. Então $\widehat{q}$ e $\widehat{f}$ são, respectivamente, o recobrimento e um levantamento de Hopf para f. Assim cada um dos conjuntos $\widehat{f}^{-1}(\widehat{y}_i)$ ou é vazio ou é uma classe de raízes de Nielsen de f em y_0 (observação 2.11). Se $i < 1$ ou $i > k$ então $\lambda(f, \widehat{f}(\widehat{y}_i)) = 0$ pois $\widehat{f}(\widehat{y}_i) = \emptyset$. Para $1 \leq i \leq k$, temos que $\lambda(f, \widehat{f}(\widehat{y}_i)) = m_i$. Suponhamos então que $m_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq \ell$ e que $m_i = 0$ para $\ell + 1 \leq i \leq k$. Logo $\widehat{f}(\widehat{y}_i)$ é uma classe de raízes essencial para cada $1 \leq i \leq \ell$ (corolário 2.35). Já para $\ell + 1 \leq i \leq k$, como $m_i = 0$, existe uma homotopia em $\mathbb{S}^n$, constante nos pólos, de h_{m_i} a uma aplicação $h' \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tal que $(h')^{-1}(\widehat{y}_i) = \emptyset$. Tal homotopia pode ser usada para definir uma homotopia de $\widehat{f}$ a uma aplicação $\widehat{f}' \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{Z}\mathbb{S}^n$ tal que $(\widehat{f}')^{-1}(\widehat{y}_i) = \emptyset$. Logo, para $\ell + 1 \leq i \leq k$, $\widehat{f}(\widehat{y}_i)$ é vazio ou é uma classe não essencial. Deste modo, como $\mathbb{S}^n$ é compacto, segue da definição que

$$\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathrm{NR}(f, y_0) = \ell.$$

O índice global para $\mathbb{S}^n$ é

$$\lambda(f, \mathbb{S}^n) = m_1 + \cdots + m_k = m_1 + \cdots + m_\ell.$$

Para $1 \leq i \leq k$, a multiplicidade de $\widehat{f}(\widehat{y}_i)$ é

$$\mathcal{M}(f, \widehat{f}(\widehat{y}_i), y_0) = |m_i|.$$

e o grau absoluto de f em y_0 é

$$\mathcal{A}(f, y_0) = |m_1| + \cdots + |m_k| = |m_1| + \cdots + |m_\ell|.$$

Do teorema (3.19) sabemos que toda aplicação homotópica a f tem pelo menos $\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathrm{NR}(f, y_0) = \ell$ raízes em y_0. Por outro lado, para todo $m \neq 0$, existe uma aplicação homotópica a h_m, por uma homotopia constante nos pólos, que possui uma única raiz em y_0. Estas aplicações podem ser usadas para definir uma aplicação homotópica a f que possui exatamente $\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathrm{NR}(f, y_0) = \ell$ raízes em y_0.

Do teorema (3.17) sabemos que toda aplicação homotópica a f e tranversa a y_0 tem pelo menos $\mathcal{A}(f, y_0) = |m_1| + \cdots + |m_\ell|$ raízes em y_0. Por outro lado, cada h_m é homotópica a uma aplicação, por uma homotopia constante nos pólos, que é tranversa a y_0 e que possui exatamente $|m|$ raízes. Estas aplicações podem ser usadas para definir uma aplicação homotópica a f e tranversa a y_0 que possui exatamente $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes em y_0.

Teorema 3.17. *Sejam X uma n-variedade conexa, Y um espaço Hausdorff, conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria. Então toda aplicação propriamente homotópica a f e transversa a y_0 tem pelo menos $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes em y_0. Além disso, se $n > 2$ existe uma aplicação propriamente homotópica a f e transversa a y_0 que possui exatamente $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes em y_0.*

Demonstração. A primeira afirmação é o resultado do teorema (2.78). Suponhamos então que $n > 2$. Pelo corolário (3.6) existe pelo menos uma aplicação propriamente homotópica a f e transversa a y_0. Todas as aplicações propriamente homotópicas a f e transversas a y_0 possuem um número finito de raízes em y_0, de modo que podemos considerar dentre elas uma que seja minimal no sentido de ter o número mínimo de raízes em y_0, que denotaremos por f_m. Para concluir a demonstração basta mostrarmos que $\# f_m^{-1}(y_0) \leq \mathcal{A}(f, y_0)$ e para tanto vamos supor que $\# f_m^{-1}(y_0) > \mathcal{A}(f, y_0)$ e mostrar que f_m não é minimal. Como

$$\sum_{\alpha \in f_m^{-1}(y_0)/\mathcal{N}} \#\alpha = \# f_m^{-1}(y_0) > \mathcal{A}(f_m, y_0) = \sum_{\alpha \in f_m^{-1}(y_0)/\mathcal{N}} \mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0),$$

existe uma classe de raízes α tal que $\#\alpha > \mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0)$. Para mostrar que f_m não é minimal vamos considerar três casos.

CASO I - X orientável.

Sendo f_m transversa a y_0, f_m é um homeomorfismo local em cada raiz $x \in \alpha$ de onde obtemos que $\lambda(f_m, x) = \pm 1$ para cada $x \in \alpha$ (lema (2.77)). Como $\#\alpha > \mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0) = |\sum_{x \in \alpha} \lambda(f_m, x)|$, existem duas raízes, x_0 e x_1, em α tais que $\lambda(f_m, x_0) + \lambda(f_m, x_1) = 0$.

Sejam E uma vizinhança euclidiana de y_0 e γ um caminho em X de x_0 a x_1 tal que $[f_m \circ \gamma] = [y_0]$. Como f_m possui um número finito de raízes podemos aplicar o corolário (3.9) um número finito de vezes de modo a obter um caminho homotópico a γ que não passa por raízes de f_m a não ser x_0 e x_1. Assim podemos admitir que a própria γ não passa por raízes de f_m a não ser x_0 e x_1. Então $\gamma(I)$ e $f_m^{-1}(y_0) - \{x_0, x_1\}$ são fechados disjuntos em X e portanto $\gamma(I)$ admite uma vizinhança compacta N disjunta de $f_m^{-1}(y_0) - \{x_0, x_1\}$, pois X

é normal e $\gamma(I)$ é compacto. Do lema (3.12) segue que existem uma n-bola $B \subset N$ e uma homotopia $\{h_t \colon X \to Y\}$ começando em f_m com as seguintes propriedades:

1. $\{h_t\}$ é constante em uma vizinhança de $f_m^{-1}(y_0)$ e constante fora de N;
2. $h_t^{-1}(y_0) = f_m^{-1}(y_0)$ para todo $t \in \mathbf{I}$;
3. $g = h_1$ manda $(B, \partial B)$ em $(E, E - y_0)$;
4. todo caminho em B de x_0 a x_1 é homotópico a γ em N.

Então g é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes, pois h_t, sendo uma homotopia constante fora do compacto N, é própria e além disso é constante em uma vizinhança de $f_m^{-1}(y_0) = g^{-1}(y_0)$. Uma vez que, para todo $t \in \mathbf{I}$, h_t não possui raízes na fronteira de B temos, pelas propriedades homotópica e aditiva do índice, que

$$\lambda(g, \mathrm{int}B) = \lambda(f_m, \mathrm{int}B) = \lambda(f_m, x_0) + \lambda(f_m, x_1) = 0.$$

Logo pelo lema (3.15) existe uma homotopia $\{h'_t \colon X \to Y\}$ constante fora de B tal que $h'_0 = g$ e h'_1 não possui raízes em y_0 dentro de B. Notemos que h'_1 é propriamente homotópica a f_m e transversa a y_0 (pois é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes e é própria). Além disso h'_1 é igual a g em $X - B$. Portanto h'_1 possui duas raízes a menos que a aplicação minimal f_m.

CASO II - X não orientável e f_m orientável.
Sejam $\widetilde{p} : \widetilde{X} \to X$ o recobrimento duplo orientado de X e $\widetilde{\alpha}$ uma classe de raízes de $f_m \circ \widetilde{p}$ em y_0 tal que $\widetilde{p}^{-1}(\alpha) = \widetilde{\alpha} \sqcup (-\widetilde{\alpha})$ (teorema (2.65)). Do fato de $\widetilde{p}$ levar $\widetilde{\alpha}$ em α bijetivamete segue que $\#\widetilde{\alpha} = \#\alpha > \mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0) = |\lambda(f_m \circ \widetilde{p}, \widetilde{\alpha})|$. Além disso $f_m \circ \widetilde{p}$ é um homeomorfismo local em cada $\widetilde{x} \in \widetilde{\alpha}$ pois f_m é transversa a y_0 e $\widetilde{p}$ é um homeomorfismo local. Assim como no caso I, existem duas raízes, $\widetilde{x}_0$ e $\widetilde{x}_1$, em $\widetilde{\alpha}$ tal que $\lambda(f_m \circ \widetilde{p}, \widetilde{x}_0) + \lambda(f_m \circ \widetilde{p}, \widetilde{x}_1) = 0$. Seja $\widetilde{\gamma}$ um caminho em $\widetilde{X}$ de $\widetilde{x}_0$ a $\widetilde{x}_1$ tal que $[f_m \circ \widetilde{p} \circ \widetilde{\gamma}] = [y_0]$. Sejam ainda $\gamma = \widetilde{p} \circ \widetilde{\gamma}$, $x_0 = \widetilde{p}(\widetilde{x}_0)$ e $x_1 = \widetilde{p}(\widetilde{x}_1)$. Então γ é um caminho em X de x_0 a x_1 tal que $[f_m \circ \gamma] = [y_0]$. Podemos assumir, novamente como no caso I, que $\widetilde{\gamma}$ não passa por raízes de $f_m \circ \widetilde{p}$ a não ser $\widetilde{x}_0$ e $\widetilde{x}_1$ e portanto γ não passa por raízes de f_m exceto x_0 e x_1. Seja N uma vizinhança compacta de $\gamma(\mathbf{I})$ sem raízes de f_m a não ser x_0 e x_1. Pelo lema (3.12) existem uma n-bola $B \subset N$ e uma homotopia $\{h_t \colon X \to Y\}$ começando em f_m com as seguintes propriedades:

1. $\{h_t\}$ é constante em uma vizinhança de $f_m^{-1}(y_0)$ e constante fora de N;
2. $h_t^{-1}(y_0) = f_m^{-1}(y_0)$ para todo $t \in \mathbf{I}$;
3. $g = h_1$ manda $(B, \partial B)$ em $(E, E - y_0)$;
4. todo caminho em B de x_0 a x_1 é homotópico a γ em N.

Por ser simplesmente conexo segue que B é uma vizinhança distinguida com relação a $\widetilde{p}$. Seja $\widetilde{B}$ a componente de $\widetilde{p}^{-1}(B)$ que contém $\widetilde{x}_0$. Afirmamos que $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{B}$. De fato, se γ' é um caminho em B de x_0 a x_1 então, pelo item (4) acima, γ' e γ são homotópicas; como $(\widetilde{p}|\widetilde{B})^{-1}(\gamma')$ e $\widetilde{\gamma}$ são levantamentos de γ' e γ ambas começando em $\widetilde{x}_0$ temos que $(\widetilde{p}|\widetilde{B})^{-1}(\gamma')$ e $\widetilde{\gamma}$ são homotópicas e portanto $\widetilde{x}_1 = \widetilde{\gamma}(1) = (\widetilde{p}|\widetilde{B})^{-1}(\gamma')(1) \in \widetilde{B}$. Pelo lema (3.15) existe uma homotopia $\{\widetilde{h}_t : \widetilde{X} \to Y\}$ começando em $g \circ \widetilde{p}$ que é constante fora de $\widetilde{B}$ e tal que $\widetilde{h}_1$ não possui raízes em $\widetilde{B}$. Consideremos a homotopia $\{l_t : X \to Y\}$ definida por

$$l_t(x) = \begin{cases} \widetilde{h}_t \circ (\widetilde{p}|\widetilde{B})^{-1}(x) & \text{se } x \in B, \\ g(x) & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

Deste modo l_1 é propriamente homotópica a f_m, transversa a y_0 e possui duas raízes a menos que f_m.

CASO III - f_m não orientável.

Aqui $\mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0) = |\lambda_2(f_m, \alpha)|$, isto é, $\mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0)$ vale zero ou um. De f_m ser um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes resulta que $\lambda_2(f, x) = 1$ para todo $x \in \alpha$. Assim, se $\mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0) = 0$, então α possui uma quantidade par (não nula) de raízes. Por outro lado, se $\mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0) = 1$ então α possui pelo menos duas raízes, pois $\#\alpha > \mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0)$. Em qualquer um dos casos $\#\alpha \geq 2$. Sejam $x_0, x_1 \in \alpha$. Sejam ainda $\widetilde{p} : \widetilde{X} \to X$ o recobrimento duplo orientado de X, $\widetilde{x}_0 = \widetilde{p}^{-1}(x_0)$, e $\widetilde{x}_1 = \widetilde{p}^{-1}(x_1)$. O teorema (2.66) nos garante que $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}_1$, $-\widetilde{x}_0$ e $-\widetilde{x}_1$ são raízes Nilsen relacionadas de $f_m \circ \widetilde{p}$ em y_0. E como $f_m \circ \widetilde{p}$ é um homeomorfismo local em cada uma de suas raízes, temos que o índice inteiro de raízes de $f_m \circ \widetilde{p}$ em cada um desses quatro pontos vale 1 ou -1 (teorema (2.77)). Como a aplicação, de $\widetilde{X}$ em si mesmo, que leva $\widetilde{x}$ em $-\widetilde{x}$ é um homeomorfismo que reverte orientação segue que $\lambda(f_m \circ \widetilde{p}, \widetilde{x}_1) = -\lambda(f_m \circ \widetilde{p}, -\widetilde{x}_1)$. Assim ou $\lambda(f_m \circ \widetilde{p}, \widetilde{x}_0) + \lambda(f_m \circ \widetilde{p}, \widetilde{x}_1) = 0$, ou $\lambda(f_m \circ \widetilde{p}, \widetilde{x}_0) + \lambda(f_m \circ \widetilde{p}, -\widetilde{x}_1) = 0$. Suponhamos que aconteça o primeiro caso (caso contrário basta trocar $\widetilde{x}_1$ por $-\widetilde{x}_1$). O resto da demonstração segue exatamente como no caso II. ☐

Para aplicações não orientáveis temos o seguinte corolário:

Corolário 3.18. *Sejam $n > 2$, X uma n-variedade conexa não orientável e Y um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conxexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$. Se $f \colon X \to Y$ é uma aplicação própria e não orientável, então*

1. $\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathcal{A}(f, y_0)$
2. *uma classe de raízes de f em y_0 é propriamente essencial se, e somente se, tem multiplicidade não nula.*

Demonstração. Sejam C_m, $C_e \subset f^{-1}(y_0)/\mathcal{N}$, respectivamente, os conjuntos formados pelas classes de raízes de f em y_0 com multiplicidade não nula e pelas classes de raízes essencias de f em y_0. Sabemos que $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ é um invariante propriamente homotópico e um limitante inferior para o número de raízes de f em y_0, mas pelo teorema (3.17) existe uma aplicação propriamente homotópica a f que possui exatamente $\mathcal{A}(f, y_0)$ raízes em y_0. Portanto $\mathrm{PNR}(f, y_0) \leq \mathcal{A}(f, y_0)$. Agora como f é não orientável, a multiplicidade de cada uma de suas classes de raízes vale zero ou um, e como o grau absoluto é a soma de todas estas multiplicidades temos que $\mathcal{A}(f, y_0) = \#C_m$. Lembremos que cada classe com multiplicidade não nula é essencial e portanto $C_m \subset C_e$. Finalmente, segue de sua definição que $\mathrm{PNR}(f, y_0) = \#C_e$. Deste modo

$$\mathrm{PNR}(f, y_0) \leq \mathcal{A}(f, y_0) = \#C_m \leq \#C_e = \mathrm{PNR}(f, y_0).$$

Isto prova que $\mathrm{PNR}(f, y_0) = \mathcal{A}(f, y_0)$ e, ainda mais, que $C_m = C_e$, pois $C_m \subset C_e$ e ambos são conjuntos finitos de mesma cardinalidade. ☐

Teorema 3.19. *Sejam X uma n-variedade conexa, Y um espaço Hausdorff, conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano* *em* $y_0 \in Y$ *e* $f\colon X \to Y$ *uma aplicação própria. Então toda aplicação propriamente homotópica a* f *tem pelo menos* $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ *raízes em* y_0 *e toda classe de raízes de* f *em* y_0 *com multiplicidade não nula é propriamente essencial. Além disso, se* $n > 2$ *existe uma aplicação propriamente homotópica a* f *que possui exatamente* $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ *raízes em* y_0*, e uma classe de raízes de* f *em* y_0 *é propriamente essencial somente se tem multiplicidade não nula.*

Demonstração. Já sabemos, do teorema (2.13), que toda aplicação propriamente homotópica a f tem pelo menos $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ raízes em y_0 e, do corolário (2.71) que toda classe de raiz de f em y_0 com multiplicidade não nula é propriamente essencial. Resta-nos mostrar as duas afirmações enunciadas quando $n > 2$. Para aplicações não orientáveis, ambas seguem do teorema (3.17) e do corolário (3.18) acima. Portanto só precisamos considerar aplicações orientáveis.

Pelo teorema (3.17) existem aplicações propriamente homotópicas a f com um número finito de raízes. Assim dentre todas as aplicações propriamente homotópicas a f existe uma que é minimal no sentido de nenhuma outra ter uma quantidade menor de raízes. Denotemos uma tal aplicação por f_m, como na demonstração do teorema (3.17). Obviamente que f_m tem um número finito de raízes. Mostremos que toda classe de raízes de f_m tem uma única raiz. Para isso, supohamos que uma classe α possui duas raízes distintas x_0 e x_1. Seja γ um caminho em X de x_0 a x_1 tal que $[f_m \circ \gamma] = [y_0]$. Como $n > 2$ e f_m tem um número finito de raízes podemos, pelo corolário (3.9), supor que as únicas raízes de f_m contidas na imagem de γ são x_0 e x_1. Então $\gamma(\mathbf{I})$ admite uma vizinhança compacta N cuja interseção com $f_m^{-1}(y_0)$ é $\{x_0, x_1\}$. Pelo lema (3.12) existem uma n-bola $B \subset N$ e uma homotopia $\{h_t\colon X \to Y\}$ começando em f_m com as seguintes propriedades:

1. $\{h_t\}$ é constante em uma vizinhança de $f_m^{-1}(y_0)$ e constante fora de N;
2. $h_t^{-1}(y_0) = f_m^{-1}(y_0)$ para todo $t \in \mathbf{I}$;
3. $g = h_1$ manda $(B, \partial B)$ em $(E, E - y_0)$;
4. todo caminho em B de x_0 a x_1 é homotópico a γ em N.

Notemos que a homotopia $\{h_t\}$ é própria pois é constante fora do compacto N. Agora, pelo lema (3.13), existe uma homotopia $\{h'_t\colon X \to Y\}$ começando em g que é constante fora de B e tal que h'_1 tem uma única raiz em B. Deste modo h'_1 é propriamente homotópica a f e tem menos raízes que a aplicação minimal f_m. Logo toda classe de raízes de f_m tem apenas uma raiz.

Mostremos agora que cada classe de raízes de f_m tem multiplicidade não nula. Seja $\alpha = \{x\}$ uma classe de raízes de f_m e suponha que $\mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0) = 0$. Seja ainda E uma vizinhança euclidiana de y_0. Então existe uma n-bola B que é uma vizinhança de x e tal que $f_m(B) \subset E$ e $f_m(\partial B) \subset E - y_0$. Consideremos os casos quando X é orientável e quando não o é.

CASO I - X orientável.

Como $|\lambda(f_m, \alpha)| = \mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0) = 0$ segue da aditvidade do índice que $\lambda(f_m, \mathrm{int}B) = \lambda(f_m, \alpha) = 0$. Pelo lema (3.15) existe uma homotopia $\{h_t\colon X \to Y\}$ constante fora de B que começa em f_m e termina em uma aplicação que não possui raízes em B. Ou seja, h_1 é igual a f_m fora de B e não possui raiz em B tendo, portanto, menos raízes que f_m. Além disso, como f_m e $\{h_t\}$ são próprias - esta porque é constante fora do compacto B - temos que h_1 é propriamente homotópica a f_m e, por conseguinte, a f. Isto contradiz o fato de f_m ser minimal.

CASO II - X não orientável.

Seja $\widetilde{p} : \widetilde{X} \to X$ o recobrimento duplo orientado de X. Como B é uma vizinhança distinguida em relação a $\widetilde{p}$- pois é simplesmente conexo - existe uma n-bola $\widetilde{B} \subset \widetilde{X}$ tal que $\widetilde{p}$ manda $\widetilde{B}$ e $-\widetilde{B}$ homeomorficamente sobre B. Seja $\widetilde{\alpha} = (\widetilde{p}|\widetilde{B})^{-1}(\alpha)$. Notemos que $\widetilde{\alpha} = \{(\widetilde{p}|\widetilde{B})^{-1}(x)\}$. Assim $\widetilde{\alpha}$ e $-\widetilde{\alpha}$ são duas classes de raízes de $f_m \circ \widetilde{p}$ que $\widetilde{p}$ manda sobrejetivamente em α. Então

$$|\lambda(f_m \circ \widetilde{p}, \mathrm{int}B)| = |\lambda(f_m \circ \widetilde{p}, \alpha)| = \mathcal{M}(f_m, \alpha, y_0) = 0.$$

A primeira igualdade segue da aditividade do índice, a segunda da definição da multiplicidade e a última de nossa hipótese. Logo, $\lambda(f_m \circ \widetilde{p}, \alpha) = 0$. Pelo lema (3.15), existe uma homotopia $\{\widetilde{h}_t \colon \widetilde{X} \to Y\}$ começando em $f_m \circ \widetilde{p}$ que é constante fora de $\widetilde{B}$ e que termina em uma aplicação sem raízes em $\widetilde{B}$. Consideremos a homotopia $\{h_t : X \to Y\}$ definida por

$$h_t(x) = \begin{cases} \widetilde{h}_t \circ (\widetilde{p}|\widetilde{B})^{-1}(x) & \text{se } x \in B \\ f_m(x) & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Assim, h_1 é propriamente homotópica a f, tem as mesmas raízes que f_m fora de B e não tem raiz em B, tendo portanto menos raízes que a aplicação minimal f_m. Isto conclui a demonstração de que toda classe de raízes de f_m tem multiplicidade não nula,ou seja, toda classe de raízes de f_m é propriamente essencial. Assim f_m tem exatamente $\mathrm{PNR}(f_m, y_0) = \mathrm{PNR}(f, y_0)$ classes de raízes, e como cada uma delas tem uma única raiz segue que f_m possui exatamente $\mathrm{PNR}(f, y_0)$ raízes.

Resta mostrarmos que uma classe de raízes de f é essencial somente se sua multiplicidade for não nula. Sejam $C_m(f)$ e $C_e(f)$ como na demonstração do corolário (3.18). Considere os conjuntos análogos para f_m, isto é, $C_m(f_m)$ e $C_e(f_m)$. Temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{PNR}(f, y_0) &= \#f_m^{-1}(y_0) = \#C_m(f_m) \\ &= \#C_m(f) \leq \#C_e(f) = \mathrm{PNR}(f, y_0). \end{aligned}$$

As duas primeiras igualdades seguem do que demonstramos acima, a terceira do corolário (2.71) e a última da definição de $\mathrm{PNR}(f, y_0)$. Logo $\#C_m(f) = \#C_e(f)$. ☐

Seja $f \colon X \to Y$ uma aplicação como nas hipóteses dos teoremas (3.17) e (3.19) e suponhamos $n > 2$. Então existe uma aplicação $g \colon X \to Y$ propriamente homotópica a f e transversa a $y_0 \in Y$. Vimos no parágrafo seguinte ao teorema (2.78) que se α é uma classe de raízes de g em y_0 então α possui, no mínimo, $\mathcal{M}(g, \alpha, y_0)$ raízes. Assim se α for uma classe propriamente essencial de g então sua contribuição para o número próprio de Nielsen é um, enquanto que para o grau absoluto é $\mathcal{M}(g, \alpha, y_0) \leq 1$. Desta forma, $\mathrm{PNR}(g, y_0) \leq \mathcal{A}(g, y_0)$. Como o número próprio de Nielsen e o grau absoluto são invariantes propriamente homotópicos, e do resultado contido em (2.79), temos a seguinte consequência dos teoremas (3.17) e (3.19):

Corolário 3.20. *Sejam X uma n-variedade conexa, Y um espaço Hausdorff, conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f \colon X \to Y$ uma aplicação própria. Se $n > 2$ então o número de Nielsen próprio de f em y_0 é menor ou igual ao grau absoluto de f em y_0, e um destes é positivo se, somente se, o outro o for. Em símbolos*

$$\mathrm{PNR}(f, y_0) \leq \mathcal{A}(f, y_0) \quad e \quad \mathrm{PNR}(f, y_0) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(f, y_0) > 0.$$

Vejamos um exemplo em que o número próprio de Nielsen é estritamente menor que o grau absoluto.

Exemplo 3.21. Seja $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação de grau $k \geq 2$. Seja $Y = \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ duas esferas unidas por um ponto. Precisamente, seja

$$Y = \mathbb{S}^n \times \{z_0\} \cup \{z_0\} \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n.$$

. Consideremos $e\colon \mathbb{S}^n \to Y$ a inclusão na esquerda, isto é, $e(z) = (z, z_0)$ para todo $z \in \mathbb{S}^n$, e $y_0 = (z_1, z_0) \in Y$ um ponto distinto de (z_0, z_0). Como Y é simplesmente conexo, $e \circ f$ possui uma única classe de ráizes α em y_0 e, portanto, $\mathrm{PNR}(e \circ f, y_0) \leq 1$. Por outro lado, f é homotópica a uma aplicação que possui exatamente k raízes, todas isoladas, em z. Como o grau absoluto é um invariante homotópico, temos, do lema (2.77) e da aditividade do índice, que $\mathcal{A}(e \circ f, y_0) = k$.

3.4 Aplicação à teoria do grau

Nesta seção vamos tentar associar a teoria desenvolvida até aqui à teoria do grau de Hopf, como Brown e Schirmer fizeram em [BS01, seção 5]. A introdução do grau absoluto por Hopf em [Hop30] visava prover um invariante homotópico algébrico que fosse relacionado com o noção de grau geométrico. O objetivo do trabalho de Hopf era justamente estabelecer a igualdade entre os graus algébrico e geométrico, igualdade esta anteriormente estabelecida pelo próprio Hopf em [Hop28] para aplicações entre espaços euclidianos. A definição de grau geométrico abaixo é uma adaptação direta da definição encontrada em [BS01, Definição 5.2] ao nosso contexto, onde o contra-domínio da aplicação não é (necessáriamente) uma variedade.

Definição 3.22. Sejam Y um espaço localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria. O **grau geométrico** de f em y_0, denotado por $\mathcal{G}(f, y_0)$, é o menor inteiro não-negativo para o qual existe uma aplicação $g\colon X \to Y$ propriamente homotópica a f tal que a pré-imagem $g^{-1}(B)$ de uma n-bola B contendo y_0, tem exatamente $\mathcal{G}(f, y_0)$ componentes conexas, cada uma das quais se aplica por g homeomorficamente sobre B.

O grau geométrico de f em y_0 está bem definido pois é limitado superiormente pelo número de raízes em y_0 de uma aplicação propriamente homotópica a f e transversa a y_0. Observemos que o grau geométrico de f em y_0 coincide com o número mínimo transverso de raízes de f em y_0, isto é,

$$\mathcal{G}(f, y_0) = \mathrm{MR}_{\mathcal{T}}(f, y_0).$$

Assim do teorema (3.17) segue imediatamente o seguinte resultado.

Teorema 3.23. *Sejam $n > 2$, X uma n-variedade conexa, Y um espaço Hausdorff, conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$ e $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria. Então o grau geométrico de f em y_0 é o grau absoluto de f em y_0. Em símbolos*

$$\mathcal{A}(f, y_0) = \mathcal{G}(f, y_0).$$

Se na definição de grau geométrico Y for uma variedade, então podemos definir o grau geométrico global.

Definição 3.24. Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação própria do espaço topológico X na n-variedade Y. O **grau geométrico** de f, denotado por $\mathcal{G}(f)$ é o mínimo do graus locais de

f em y, para $y \in Y$. Em símbolos

$$\mathcal{G}(f) = min\{\mathcal{G}(f, y) : y \in Y\}.$$

A definição acima coincide com a definição de grau geométrico dada por [BS01, Definição 5.2, p.75] para aplicações entre variedades de mesma dimensão. Da definição acima, do teorema (3.23) e do teorema (2.76) resulta o teorema a seguir, ver [BS01, Teorema 5.4, p.76]:

Teorema 3.25. *Seja $f: X \to Y$ uma aplicação própria entre variedades conexas de mesma dimensão $n > 2$. Então os graus absoluto e geométrico de f coincidem, isto é, $\mathcal{A}(f) = \mathcal{G}(f)$.*

O teorema acima foi provado pela primeira vez por Hopf [Hop30, p. 607]. No trabalho de Epstein uma nova demonstração deste fato é estabelecida [Eps66, Teorema 4.1, p.376].

Se X for uma variedade conexa orientável então podemos relacionar o grau (homológico) local e o grau absoluto de uma aplicação.

Teorema 3.26. *Seja $f: X \to Y$ uma aplicação própria da n-variedade conexa orientável X no espaço conexo, localmente conexo por caminhos, semilocalmente simplesmente conexo e localmente n-euclidiano em $y_0 \in Y$. Então $\mathcal{A}(f, y_0) \geq |\mathrm{gr}_{y_0}(f)|$.*

Demonstração. Temos

$$|\mathrm{gr}_{y_0}(f)| = |\lambda(f, f^{-1}(y_0))| = |\sum_{\alpha \in f^{-1}(y_0)/\mathcal{N}} \lambda(f, \alpha)| \leq$$
$$\leq \sum_{\alpha \in f^{-1}(y_0)/\mathcal{N}} |\lambda(f, \alpha)| = \sum_{\alpha \in f^{-1}(y_0)/\mathcal{N}} \mathcal{M}(f, \alpha, y_0) = \mathcal{A}(f, y_0).$$

A validade da primeira igualdade se encontra no parágrafo anterior ao teorema (2.46), a segunda da aditividade do índice e as duas últimas das definições de multiplicidade e grau absoluto. ☐

O exemplo (2.49) mostra um caso em que vale a desigualdade estrita no teorema acima, tendo em vista a relação entre o índice de raízes e o grau local expressa no parágrafo antecedente ao teorema (2.46). Além disso, este exemplo mostra que a condição de orientabilidade das variedades no teorema 5.5 de [BS01, p. 76] não pode ser suprimida.

Referências Bibliográficas

[Bro04] Robin Brooks. Roots of mappings from manifolds. *Fixed Point Theory and Applications*, 2004(4):273–307, 2004. 1

[Bro05] Robin Brooks. Nielsen root theory. Em *Handbook of Topological Fixed Point Theory*, páginas 375–431. Springer, 2005. 50

[BS01] Robert F. Brown e Helga Schirmer. Nielsen root theory and hopf degree theory. *Pacific Journal of Mathematics*, 198(1):49–80, 2001. 2, 11, 40, 46, 50, 75, 76

[Cro78] Fred H. Croom. *Basic Concepts of Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1978. 59

[Dol72] Albrecht Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1972. 6, 13

[Dug66] James Dugundji. *Topology*. Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, 1966. 6

[Eps66] David B. A. Epstein. The degree of a map. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):369–383, 1966. 76

[ES52] Samuel Eilenberg e Norman Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton University Press, 1952. 4, 32

[Hop28] Heinz Hopf. Zur topologie der abbildungen von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 100(1):579–608, 1928. 1, 75

[Hop30] Heinz Hopf. Zur topologie der abbildungen von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 102(1):562–623, 1930. 1, 75, 76

[Hu59] Sze-tsen Hu. *Homotopy Theory*. Pure and Applied Mathematics. Academic press, 1959. 23, 28

[Lee00] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Number 202 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2000. 61

[Lim06] Elon L. Lima. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006. 12

[Mas80] Willian S. Massey. *Singular Homology Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1980. 12

[Mas87] Willian S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1987. 17

[Nie27] Jakob Nielsen. Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen flächen. *Acta Mathematica*, 50(1):189–358, 1927. 1

[Nie29] Jakob Nielsen. Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen flächen. ii. *Acta Mathematica*, 53(1):1–76, 1929. 1