Automorfismos de G-estruturas

Leandro Augusto Lichtenfelz

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paolo Piccione

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, julho de 2011

Automorfismos de G-estruturas

Esta dissertação trata-se da versão original
do aluno Leandro Augusto Lichtenfelz.

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar.

A toda minha família, principalmente minha mãe, Marina da Silva, e minha madrinha, Marli da Silva, pelo indispensável suporte que sempre me prestaram, sem o qual eu não teria chegado até aqui.

Ao meu orientador, Prof. Paolo Piccione, a quem admiro profundamente, por ter me ensinado e me ajudado inúmeras vezes e de todas as maneiras possíveis.

Aos professores Daniel Victor Tausk, Marcos Martins Alexandrino da Silva, Ivan Pontual Costa e Silva, Miguel Angel Javaloyes, Henri Anciaux e Gaetano Siciliano, por várias discussões iluminadoras, acadêmicas ou não.

A minha namorada, Clara Macêdo Lage, com quem sempre pude contar; por estar comigo durante todo esse tempo, nas horas boas e ruins.

Aos meus amigos do IME, pelo grande apoio e pelos bons momentos que me proporcionaram.

Resumo

Dada uma variedade diferenciável M, para cada subgrupo de Lie $G \subseteq GL(n)$, pode-se contemplar a redução do grupo estrutural do $GL(n)$-fibrado principal de referenciais sobre M a G. Quando existe, tal redução se chama uma G-estrutura.

Dentre todas as G-estruturas, há uma classe favorável delas, chamadas G-estruturas de *tipo finito*, para as quais o grupo G satisfaz uma certa condição algébrica, a saber, que o k-ésimo prolongamento da sua álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, é o espaço vetorial nulo. Para estas G-estruturas, mostramos que seu grupo de automorfismos, que consiste dos difeomorfismos de M que mandam referenciais da G-estrutura sobre referenciais da G-estrutura, é um grupo de Lie.

Casos particulares incluem grupos de isometrias Riemannianas, grupos de isometrias Lorentzianas e grupos conformes.

Palavras-chave: fibrados principais, G-estruturas, grupos de Lie.

Abstract

Given a differentiable manifold M, for each group $G \subseteq GL(n)$, one might consider the reduction of the structure group of the $GL(n)$-principal bundle of frames over M to G. When such a reduction exists, it is called a G-structure over M.

Among all G-structures, there exists a more tractable class, called G-structures of *finite type*, for which the group G satisfies a certain algebraic condition, namely, that the kth prolongation of its Lie algebra, $\mathfrak{g}$, is the null vector space. We prove, for such G-structures, that their automorphism group, which consists of all diffeomorpshisms of M onto itself sending frames from the G-structure into frames again belonging to the G-structure, is a Lie group.

Some special cases include isometry groups of Riemannian manifolds, isometry groups of Lorentzian manifolds and conformal groups.

Palavras-chave: principal bundles, G-structures, Lie groups.

Sumário

1 Fibrados Principais **2**

2 *G*-estruturas **13**

2.1 Definição e exemplos 13

2.2 A função estrutural de primeira ordem 17

2.3 Prolongamentos de uma álgebra de Lie de endomorfismos 28

2.4 Prolongamentos de uma *G*-estrutura 34

2.5 Paralelismos 39

Capítulo 1

Fibrados Principais

Fibrados são objetos de interesse em várias áreas da matemática, sobretudo em Geometria Diferencial. De fato, muitas teorias são formuladas em termos de certas construções sobre o fibrado tangente, TM, de uma variedade diferenciável M, dentre as quais podemos citar a Geometria Riemanniana e a Geometria Simplética.

Intuitivamente falando, um fibrado E com base M e fibra G pode ser visto como uma família de *cópias* de G indexada por M. Em certos casos, G possui alguma estrutura adicional, e o fibrado recebe uma denominação especial. Se G é um espaço vetorial, temos os chamados fibrados vetoriais. Quando G é um grupo de Lie, o fibrado recebe o nome de G-fibrado principal. Este é o caso no qual estaremos interessados, e que descreveremos brevemente a partir daqui.

Sejam X um conjunto, G um grupo e 1 o elemento neutro de G. Lembramos que uma *ação à esquerda* de G em X é uma função

$$\begin{aligned} \nu : G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto \nu(g, x) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

que satisfaz duas condições, a saber:

(i) $\nu(1, x) = x, \ \ \forall x \in X;$

(ii) $\nu(g_1, \nu(g_2, x)) = \nu(g_1 g_2, x), \ \ \forall x \in X, \ \ \forall g_1, g_2 \in G.$

Analogamente, uma *ação à direita* de G em X é uma função

$$\begin{aligned} \mu : X \times G &\to X \\ (x, g) &\mapsto \mu(x, g) \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

satisfazendo

(i) $\mu(x, 1) = x, \ \ \forall x \in X;$

(ii) $\mu(\mu(x, g_1), g_2) = \mu(x, g_1 g_2), \ \ \forall x \in X, \ \ \forall g_1, g_2 \in G.$

Eventualmente, quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos $gx \equiv \nu(g, x)$ ou $xg \equiv \mu(x, g)$. Vamos nos concentrar agora em ações à direita.

Dizemos que uma ação como aquela dada em 1.1.2 é *livre* se vale a seguinte propriedade: sempre que $\mu(x, g) = x$ para algum $x \in X$, tem-se necessariamente $g = 1$. Em outras palavras, a identidade de G é o único elemento de G que fixa algum elemento do conjunto X. A ação 1.1.2 é chamada *transitiva* quando dados quaisquer $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $\mu(x, g) = y$.

Se H é um subgrupo de G, os subconjuntos de X da forma $\{\mu(x_0, h) : h \in H\}$, para algum $x_0 \in X$, são chamados *H-órbitas*. Assim, uma ação μ é transitiva se, e somente se, X é uma G-órbita.

Fixado $x \in X$, podemos definir a *ação de μ no elemento x*, que é a função

$$\begin{aligned} \beta_x : G &\to X \\ g &\mapsto \mu(x, g). \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Observe que, quando a ação μ é livre e transitiva, β_x é uma bijeção, qualquer que seja $x \in X$.

Definição 1.1.1. Um *G-espaço principal* consiste de um conjunto $X \neq \emptyset$, um grupo G e uma ação à direita de G em X que é livre e transitiva. Neste caso, dizemos que G é o *grupo estrutural* do G-espaço principal X.

Exemplo 1.1.2. Sejam G um grupo e $H \subseteq G$ um subgrupo qualquer. Então, dado $g \in G$, a classe lateral $gH = \{gh : h \in H\}$ é um H-espaço principal, para o qual a ação à direita de H em gH é dada por $\mu(gh_1, h_2) = gh_1h_2$. É fácil verificar que trata-se de uma ação livre e transitiva.

G-espaços principais são o análogo, na Teoria de Grupos, dos espaços afins na Álgebra Linear. Intuitivamente, um G-espaço principal X é um tipo de *versão homogênea* de G, na qual perdeu-se a existência de um elemento preferido, que é o elemento neutro. Assim, não existe operação de grupo em X. Contudo, dados $x, y \in X$, existe um *único* $g \in G$ tal que $xg = y$, e este g às vezes é denotado por $x^{-1}y$, apesar de x^{-1} ou xy não fazerem sentido isoladamente. Se fixarmos um elemento $x_0 \in X$, então é possível munir X de uma estrutura de grupo. Basta definir

$$\begin{aligned} m_{x_0} : X \times X &\to X \\ (x, y) &\mapsto \beta_{x_0}\Big(\beta_{x_0}^{-1}(x) * \beta_{x_0}^{-1}(y)\Big), \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

onde $*$ denota a operação de grupo de G. É fácil ver que m_{x_0} de fato torna X um grupo cujo elemento neutro é x_0, e que β_{x_0} se torna então um isomorfismo de grupos. Esta construção depende crucialmente da escolha de x_0

A distinção entre grupos e G-espaços principais, que pode parecer artificial num primeiro momento, é útil para descrever com precisão o tipo de objeto que constitui cada fibra de um fibrado principal, que de modo geral não é um grupo. Apresentaremos agora os elementos que constituirão a definição de fibrado principal.

Sejam M uma variedade diferenciável, G um grupo de Lie, E um conjunto e $\pi : E \to M$ uma função sobrejetiva. Dado $x \in M$, denotamos por E_x o conjunto $\pi^{-1}(x) \subseteq E$, ao qual damos o nome de *fibra de E sobre x*. Suponha agora que cada E_x admite uma ação à direita de G, $\mu_x : E_x \times G \to E_x$, tornando-a um G-espaço principal. Então, podemos definir uma ação à direita de G em E, dada por $\mu(p, g) := \mu_{\pi(p)}(p, g)$; por construção, temos $\pi \circ \mu(p, g) = \pi(p)$, $\forall p \in E$, $\forall g \in G$.

Por uma *seção local* de π entendemos uma função $s : U \subseteq M \to E$, com $U \subseteq M$ aberto, tal que $\pi \circ s = i_U$, onde $i_U : U \to M$ é a inclusão. Se tivermos $U = M$, então s é chamada de *seção global*. Muitas vezes, quando a aplicação π está subentendida, diremos também que s é uma seção de E.

A cada duas seções locais $s_i : U_i \to E$, $i = 1, 2$, está associada de maneira natural uma função $\psi_{1,2} : U_1 \cap U_2 \to G$, denominada *função de transição de* s_1 *para* s_2, definida pela condição $s_2(x) = s_1(x)\psi_{1,2}(x)$, $\forall x \in U_1 \cap U_2$. De fato, o elemento $\psi_{1,2}(x) \in G$ existe porque $\pi(s_1(x)) = \pi(s_2(x))$ e a ação de G em E_x é transitiva, e tal elemento é único porque esta ação é livre. As seções s_1 e s_2 são ditas *compatíveis* se $\psi_{1,2}$ for suave (isto é, de classe C^∞). Observe que, dadas seções $s_i : U_i \to E$, $i = 1, 2, 3$, temos

$$\begin{aligned}
&(i)\ \psi_{1,1}(x) = 1, \ \ \forall x \in U_1;\\
&(ii)\ \psi_{1,2} = (\psi_{2,1})^{-1};\\
&(iii)\ \psi_{1,3}(x) = \psi_{1,2}(x) * \psi_{2,3}(x), \ \ \forall x \in U_1 \cap U_2 \cap U_3.
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Aqui, $*$ denota a multiplicação de G. Estas propriedades, de simples verificação, implicam que a relação de compatibilidade no conjunto de todas as seções de E é uma relação de equivalência.

Até este ponto, M e G possuem uma estrutura diferenciável, enquanto E é apenas um conjunto. Desejamos tornar E uma variedade diferenciável. Para isto, precisamos introduzir um *atlas de seções locais* em E, em analogia às cartas locais de uma variedade. Diremos que um conjunto A de seções locais de E é um atlas de seções locais de E se A satisfaz:

$$\begin{aligned}
&(i)\ s \text{ é compatível com } s', \ \ \forall s, s' \in A;\\
&(ii)\ \bigcup_{s \in A} Dom(s) = M,
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

onde $Dom(s)$ denota o domínio da seção s. É fácil ver que, se A é um atlas de seções locais de E, então existe único atlas maximal A_{max} contendo A, que consiste de todas as seções locais compatíveis com aquelas de A.

Suponha agora que temos um atlas maximal, A_{max}, escolhido para E. Para cada seção local $A_{max} \ni s : U \to E$, podemos considerar a *trivialização local* associada a s, que é a aplicação

$$\begin{aligned}
\Psi_s : U \times G &\to \pi^{-1}(U) \subseteq E\\
(x, g) &\mapsto \mu(s(x), g).
\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Note que Ψ_s é uma bijeção. Com efeito, se $\Psi_s(x,g) = \Psi_s(y,h)$, então

$$x = \pi \circ \mu(s(x),g) = \pi \circ \Psi_s(x,g) = \pi \circ \Psi_s(y,h) = \pi \circ \mu(s(y),h) = y,$$

e portanto $\mu(s(x),g) = \mu(s(x),h)$. Como a ação μ é livre, $g = h$. Logo Ψ_s é injetiva. Dado $p \in \pi^{-1}(U)$, seja $x = \pi(p) \in U$. Como a ação μ é transitiva em cada fibra e os elementos $\pi(p), s(x)$ ambos pertencem a $\pi^{-1}(x)$, existe $g \in G$ tal que $\mu(s(x),g) = p$. Isto prova a sobrejetividade. Duas trivializações locais Ψ_{s_1} e Ψ_{s_2}, vindas de seções locais $s_i : U_i \to E$, $i = 1,2$, são sempre compatíveis, no sentido que a aplicação

$$\begin{aligned} (\Psi_{s_2})^{-1} \circ \Psi_{s_1} : U_1 \times G &\to U_2 \times G \\ (x,g) &\mapsto (x, \psi_{2,1}(x)g) \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

é suave, como se pode ver diretamente. Estas considerações implicam, por fim, que E admite uma única estrutura diferenciável tal que, para cada $A_{max} \ni s : U \to E$, $\pi^{-1}(U)$ é aberto em E e Ψ_s é um difeomorfismo de $U \times G$ sobre o aberto $\pi^{-1}(U)$. O fato de que G e M possuem topologias Hausdorff e Segundo Contáveis implica que a topologia de E goza das mesmas propriedades. Para mais detalhes sobre essa construção de estrutura diferenciável, pode-se consultar o capítulo 1 da referência [1].

Definição 1.1.3. Um *G-fibrado principal*, ou simplesmente *fibrado principal*, é uma coleção de objetos $(E, M, \pi, G, \mu, A_{max})$, conforme descritos acima, sendo que E é sempre munido da estrutura diferenciável induzida pelo atlas maximal A_{max}. A variedade diferenciável E é então chamada *espaço total* do fibrado; M é a *base* do fibrado, $\pi : E \to M$ é chamada *projeção*, G é o *grupo estrutural* e os elementos de A_{max} são chamados *seções admissíveis* de E.

Observação 1.1.4. Eventualmente, como acontece em várias situações na matemática, cometemos alguns abusos de notação e nos referimos a E ou a $\pi : E \to M$ como fibrados principais, quando fica claro quem são os objetos que os constituem, ou quando estes não forem relevantes para a discussão.

A partir daqui, demonstraremos alguns fatos básicos sobre fibrados principais, diretamente da definição. Assim, fixamos daqui por diante um fibrado principal $(E, M, \pi, G, \mu, A_{max})$.

Proposição 1.1.5. *A ação μ é suave. Além disso, para cada $g \in G$, a multiplicação à direita por g, isto é, a aplicação*

$$\begin{aligned} R_g : E &\to E \\ x &\mapsto \mu(x,g), \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

é um difeomorfismo.

Demonstração. Dado $p \in E$ com $\pi(p) = x \in M$, escolha uma seção local $s : U \to E$, com $x \in U$, e considere a trivialização local Ψ_s associada a s. Se restringirmos a ação μ ao aberto $\pi^{-1}(U) \times G \subseteq E$ e identificarmos $\pi^{-1}(U) \simeq U \times G$ usando Ψ_s, obtemos a aplicação

$$\begin{aligned} \mu : (U \times G) \times G &\to E \\ \Big(\mu(s(x),g),h\Big) &\mapsto \mu(s(x),gh), \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

que é manifestamente suave. Como $p \in E$ é arbitrário e cada Ψ_s é um difeomorfismo, concluímos que μ é uma função suave. Como μ é suave e R_g consiste apenas em fixar a segunda variável na função μ, temos que R_g é suave. Por construção, segue imediatamente que $R_{g^{-1}}$ é uma inversa bilateral de R_g, e portanto R_g é um difeomorfismo. ■

Proposição 1.1.6. *A aplicação $\pi : E \to M$ é suave; mais ainda, π é uma submersão.*

Demonstração. Se nos restringirmos a $\pi^{-1}(U)$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\pi"] & U \\
U \times G \arrow[u, "\Psi_s"] \arrow[ur, "\Psi_s \circ \pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Assim, $\pi \circ \Psi_s(x, g) = \pi(\mu(s(x), g)) = \pi(s(x)) = x$; ou seja, $\pi \circ \Psi_s$ é simplesmente a projeção na primeira coordenada. Já que Ψ_s é um difeomorfismo, segue que π é uma submersão C^∞ em todos os pontos de E. ■

Existe um teorema clássico sobre submersões que diz que, se $f : M_1 \to M_2$ é uma submersão entre as variedades diferenciáveis M_1 e M_2, então $f^{-1}(y) \subseteq M_1$ é uma subvariedade, qualquer que seja $y \in M_2$. Para mais detalhes, pode-se consultar o capítulo 5 de [1]. Este teorema fornece o seguinte corolário.

Corolário 1.1.7. *Para todo $x \in M$, a fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade de E.*

Graças ao corolário 1.1.7, podemos dar a próxima definição.

Definição 1.1.8. Sejam $p \in E$ e $\pi(p) = x \in M$. O *espaço vertical em p*, denotado por $\mathcal{V}_p$, é o subespaço $T_p(E_x) \subseteq T_pE$.

Proposição 1.1.9. *(Caracterizações do espaço vertical.) Para todo $p \in E$, temos*

$$Im\Big(d(\beta_p)_1\Big) \ = \ \ker(d\pi_p) \ = \ \mathcal{V}_p \ \simeq \ \mathfrak{g},$$

onde $\mathfrak{g}$ denota a álgebra de Lie de G, e o isomorfismo acima é canônico.

Demonstração. Para provar a primeira igualdade, tome $v \in Im\Big(d(\beta_p)_1\Big)$. Então $v = d(\beta_p)_1(X)$, com $X \in \mathfrak{g}$. Assim, $d\pi_p(v) = d\pi_p \circ d(\beta_p)_1(X) = d(\pi \circ \beta_p)_1(X)$. Note que $\pi \circ \beta_p : G \to M$ é uma função constante, porque β_p manda a fibra $E_{\pi(p)}$ nela mesma, de modo que $\pi(\beta_p(g)) = \pi(p)$, $\forall g \in G$. Assim, $d(\pi \circ \beta_p)_1 \equiv 0$, e portanto $v \in \ker(d\pi_p)$. Por outro lado, $d(\beta_p)_1$ é injetiva, o que implica $\dim\Big(Im\Big(d(\beta_p)_1\Big)\Big) = \dim(\mathfrak{g})$. Como π é uma submersão, $\dim\Big(\ker(d\pi_p)\Big) = \dim(\mathfrak{g})$, provando a primeira igualdade. A segunda igualdade segue diretamente da definição de $\mathcal{V}_p$ e do fato de π ser uma submersão. Por fim, o isomorfismo canônico entre $\mathfrak{g}$ e $\mathcal{V}_p$ é dado, obviamente, por $d(\beta_p)_1$. ■

Definição 1.1.10. Seja H um subgrupo de Lie de G. Um *subfibrado principal* de E com base M e grupo estrutural H é um subconjunto $E' \subseteq E$ tal que, para todo $x \in M$,

$$\begin{aligned}
&(i)\ (E')_x := E_x \cap E' \text{ é uma } H\text{-órbita;} \\
&(ii)\ \exists s : U \to E,\ s \in A_{max},\ \text{tal que } s(U) \subseteq E'.
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Um subfibrado principal E' pode ser visto, ele mesmo, como um fibrado principal, cujo grupo estrutural é H. Basta para isso herdar a estrutura de E: como projeção, tomamos a restrição de π a E'; a ação de H em E' é a restrição de μ a $E' \times H$, cuja imagem está contida em E', pela condição (i) em 1.1.11. Por fim, o atlas maximal A'_{max} de H é definido como o conjunto de todas as seções locais $A_{max} \ni s : U \to E$ tais que $s(U) \subseteq E'$ e $\imath \circ s$ é suave, onde $\imath : E' \to E$ é a inclusão. Assim, é fácil ver que $(E', M, \pi_{|E'}, H, \mu_{|E' \times H}, A'_{max})$ é um fibrado principal. A questão delicada aqui é a compatibilidade das seções locais de E'. Para discutirmos um pouco melhor esse ponto, introduzimos o seguinte conceito.

Definição 1.1.11. Sejam Q uma variedade diferenciável e $P \subseteq Q$ uma subvariedade de Q. Dizemos que P é *quase-mergulhada* em Q quando satisfaz a seguinte propriedade: se $f : N \to Q$ é suave e $f(N) \subseteq P$, então $f_0 : N \to P$ é suave, qualquer que seja a variedade diferenciável N. Aqui, f_0 é definida por $\imath_0 \circ f_0 = f$, onde $\imath_0 : P \to Q$ é a inclusão.

Pode-se verificar que variedades mergulhadas são automaticamente quase-mergulhadas, justificando a definição. Os exemplos típicos de subvariedades quase-mergulhadas, mas não necessariamente mergulhadas, são aquelas dadas pelo teorema de Frobenius como folhas de uma folheação construída a partir de uma distribuição involutiva na variedade "ambiente". Uma demonstração disto pode ser consultada em [2], pg. 95. Subgrupos de Lie podem ser construídos dessa maneira, e é essencialmente por isso que temos o seguinte resultado.

Proposição 1.1.12. *Todo subgrupo de Lie $K \subseteq G$ é quase-mergulhado em G.* $\square$

Tendo a proposição 1.1.12, podemos provar a compatibilidade das seções de E'. Dadas $A'_{max} \ni s'_i : U_i \to E'$, considere $s_i = \imath \circ s'_i$, $i = 1, 2$. Por construção, s_1 e s_2 são compatíveis, e assim a função de transição $\psi_{1,2} : U_1 \cap U_2 \to G$ de s_1 para s_2 é suave. Como $s_i(U_i) \subseteq E'$ e cada fibra de E' é uma H-órbita, temos que $\psi_{1,2}$ toma valores em H. A proposição 1.1.12 diz que a restrição do contradomínio $\psi'_{1,2} : U_1 \cap U_2 \to H$ ainda é suave, portanto s'_1 é compatível com s'_2.

Vejamos alguns exemplos de fibrados principais.

Exemplo 1.1.13. *(O fibrado trivial.)* Dada uma variedade diferenciável M e um grupo de Lie G, defina $E = M \times G$. É fácil ver que $\{x\} \times G$ é um G-espaço principal, com a ação $\mu_x((x, g), h) = (x, gh)$, $\forall x \in M$, $\forall g, h \in G$. A projeção $\pi : M \times G \to M$ é simplesmente a projeção na primeira coordenada. Para construir um atlas A de seções locais, basta escolher $g \in G$ e definir $A = \{ s_g \}$, onde $s_g(x) = (x, g)$, $\forall x \in M$. A obviamente satisfaz 1.1.6, e portanto está contido num atlas maximal A_{max}. Assim, $(E, M, \pi, G, \mu, A_{max})$ é um fibrado principal.

Exemplo 1.1.14. *(Subfibrados por restrição.)* Dado um fibrado principal $(E, M, \pi, G, \mu, A_{max})$, a cada aberto $U \subseteq M$ podemos associar um subfibrado principal chamado *restrição de E a U*, que consiste dos seguintes objetos. O espaço total é

$$E|_U := \bigcup_{x \in U} \pi^{-1}(x) \subseteq E,$$

a base é U, e a projeção é simplesmente a restrição $\pi|_U : E|_U \to U$. Seu grupo estrutural é G, e a ação é a restrição

$$\mu|_U : E|_U \times G \to E|_U.$$

O atlas de seções locais é obtido tomando apenas as seções $A_{max} \ni s : V \subseteq M \to E$ tais que $V \subseteq U$. $E|_U$ é um aberto de E, e sua estrutura diferenciável assim construída coincide com aquela herdada de E como conjunto aberto.

Daremos agora um exemplo menos trivial e que será de crucial importância neste trabalho.

Definição 1.1.15. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Um *referencial em $x \in M$* é um isomorfismo linear $L : \mathbb{R}^n \to T_xM$. Denotamos por $Iso(\mathbb{R}^n, T_xM)$ o conjunto de todos os referenciais em x.

Note que, dado um referencial $L : \mathbb{R}^n \to T_xM$, temos uma base ordenada naturalmente associada a L: a base $\{L(e_1), \ldots, L(e_n)\}$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, toda base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ determina um referencial L, que é definido por $L(e_i) = X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Assim, referenciais em x e bases ordenadas de T_xM carregam essencialmente a mesma informação, e por isso o termo referencial é às vezes usado para denotar bases ordenadas.

Exemplo 1.1.16. *(O fibrado de referenciais.)* Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Considere $L(M)$ o conjunto de todos os referenciais em todos os pontos de M, ou seja,

$$L(M) := \bigcup_{x \in M} Iso(\mathbb{R}^n, T_xM).$$

Defina $\pi : L(M) \to M$ pondo $\pi(L : \mathbb{R}^n \to T_xM) = x$. O grupo de Lie $GL(n)$, que consiste de todos os isomorfismos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, age em $Iso(\mathbb{R}^n, T_xM)$ por composição à direita: dada $L \in Iso(\mathbb{R}^n, T_xM)$ e $T \in GL(n)$, definimos $\mu_x(L, T) = L \circ T$. Pode-se verificar diretamente que esta é uma ação livre e transitiva. Por fim, dado $x \in M$, tome $\xi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n$, $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$, uma carta local no aberto U contendo x. Associados a ξ, temos os campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, que constituem uma base de T_yM, quando avaliados em cada $y \in U$. Podemos definir então uma seção local

$$\begin{aligned} s_\xi : U &\to L(M) \\ y &\mapsto L_y, \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

onde $L_y : \mathbb{R}^n \to T_yM$ é dado por $L(e_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_y$, $i = 1, \ldots, n$. Para obter um atlas de seções locais desta maneira, basta tomar uma cobertura enumerável $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de abertos de M, com cada U_j sendo o domínio de uma carta local ξ_j de M, e definir $A = \{ s_{\xi_j} : j \in \mathbb{N} \}$. Se $\xi_i : U_i \to M$, $i = 1, 2$, são duas cartas locais com $\xi_1 = (x^1, \ldots, x^n)$ e $\xi_2 = (y^1, \ldots, y^n)$, então

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_z = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(z) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_z, \quad \forall z \in U_1 \cap U_2.$$

Assim, a função de transição $\psi_{1,2} : U_1 \cap U_2 \to GL(n)$ de s_{ξ_1} para s_{ξ_2} é dada por

$$\psi_{1,2}(z) = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(z)\right)_{ij}, \quad \forall z \in U_1 \cap U_2,$$

donde vemos que duas seções quaisquer de A são compatíveis. O fibrado que resulta desta construção, $(L(M), M, \pi, GL(n), \mu, A_{max})$, chama-se *fibrado de referenciais de M*.

Voltando ao caso geral, vamos introduzir o conceito de *conexão principal*. Daqui por diante, omitiremos a notação de 6-upla $(E, M, \pi, G, \mu, A_{max})$ e escreveremos simplesmente $\pi : E \to M$, ou mesmo E, para denotar um fibrado principal.

Como vimos na proposição 1.1.9, em cada espaço tangente T_pE temos um subespaço $\mathcal{V}_p$ isomorfo à álgebra de Lie do grupo estrutural de $\pi : E \to M$.

Definição 1.1.17. Uma *conexão principal* Γ em $\pi : E \to M$ é uma distribuição suave em E (ou seja, uma escolha diferenciável de subespaços $\Gamma_p \subseteq T_pE$, para cada $p \in E$), satisfazendo:

$$\begin{aligned} &(i)\ T_pE = \Gamma_p \oplus \mathcal{V}_p; \\ &(ii)\ \Gamma_{\mu(p,g)} = d\left(R_g\right)_p\left(\Gamma_p\right). \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

Seja Γ uma conexão principal e X um campo vetorial suave em E. Os subespaços Γ_p são tipicamente chamados de *horizontais*, por serem complementares ao vertical em p. O campo vetorial X pode ser decomposto em dois campos vetoriais, que denotamos por X^{vert} e X^{hor}, tais que

$$\begin{aligned} &(i)\ X(p) = X^{vert}(p) + X^{hor}(p); \\ &(ii)\ X^{vert}(p) \in \mathcal{V}_p,\ X^{hor}(p) \in \Gamma_p,\ \ \forall p \in E. \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

A existência e unicidade de X^{vert} e X^{hor} vem da condição (i) na definição de conexão principal. A suavidade de Γ implica que X^{vert} e X^{hor} são eles mesmos suaves. Quando X^{vert} é identicamente zero, dizemos que X é um campo *horizontal*, e quando X^{hor} se anula identicamente dizemos que X é um campo *vertical*. Há em todo fibrado principal uma classe especial de campos verticais, induzidos por elementos da álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, do seu grupo estrutural G.

Definição 1.1.18. Seja $T \in \mathfrak{g}$. O *campo induzido por T em E* é o campo vetorial

$$\begin{aligned} T^* : E &\to TE \\ p &\mapsto d\left(\beta_p\right)_1(T). \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

A proposição 1.1.9 implica que T^* é vertical.

Proposição 1.1.19. *Seja T^* o campo vetorial induzido por $T \in \mathfrak{g}$. Dado $g \in G$, temos*

$$d(R_g)_p\left(T^*(p)\right) = \left(Ad(g^{-1})T\right)^*, \quad \forall p \in E.$$

$Ad(g^{-1}) \in Aut(\mathfrak{g})$ denota a ação adjunta do elemento $g^{-1} \in G$ na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Demonstração. A demonstração deste resultado utiliza apenas fatos elementares da teoria de grupos de Lie, e pode ser consultada na referência [3]. □

Dada uma conexão Γ em $\pi : E \to M$, a decomposição 1.1.14 nos permite definir uma 1-forma ω em E a valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, pondo

$$\omega_p(X) := \left[d\left(\beta_p\right)_1\right]^{-1}\left(X^{vert}\right), \ \ \forall X \in T_pE, \ \ \forall p \in E. \tag{1.1.16}$$

Como β_p é suave, $\left[d(\beta_p)_1\right]^{-1}$ varia suavemente com p. O mesmo acontece com X^{vert}, pela definição de conexão principal. Portanto, ω é suave.

Definição 1.1.20. A 1-forma ω é chamada *forma de conexão* associada a Γ.

Como mostra a próxima proposição, a 1-forma de conexão caracteriza completamente a conexão principal Γ, pois esta pode ser reconstruída a partir de ω.

Proposição 1.1.21. *A forma de conexão ω satisfaz*

$$\begin{aligned} &(i)\ \omega_p(T^*(p)) = T, \ \ \forall T \in \mathfrak{g}, \ \ \forall p \in E; \\ &(ii)\ (R_g)^*\omega = Ad(g^{-1})\omega, \ \ \forall g \in G. \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

Além disso, dada uma 1-forma ω satisfazendo (i) e (ii), existe uma única conexão principal Γ em $\pi : E \to M$ cuja forma de conexão é ω.

Demonstração. O item (i) é trivial, visto que $(T^*)^{vert} = T^*$, e portanto

$$\omega_p(T^*(p)) = \left[d(\beta_p)_1\right]^{-1} \circ \left[d(\beta_p)_1\right](T) = T, \ \ \forall T \in \mathfrak{g}, \ \ \forall p \in E.$$

Para provar o item (ii), tome $X \in \mathfrak{X}(E)$. Uma vez que a identidade a ser demonstrada é linear, podemos demonstrá-la nos casos $X = X^{hor}$ e $X = X^{vert}$ separadamente. Assim, no primeiro caso, X é horizontal e portanto temos

$$\left((R_g)^*\omega\right)_p (X(p)) = \omega_{\mu(p,g)}\left(d(R_g)_p(X(p))\right) = 0, \ \ \forall g \in G,$$

porque $X(p) \in \Gamma_p$ implica $d(R_g)_p\,(X(p)) \in \Gamma_{\mu(p,g)}$, pela definição de conexão principal, e ω se anula em vetores horizontais. Por outro lado, $Ad(g^{-1})\omega_p(X(p)) = 0$, donde concluímos que (ii) se verifica para vetores horizontais. No segundo caso, podemos sem perda de generalidade assumir $X = T^*$, para algum $T \in \mathfrak{g}$. Assim, $d(R_g)_p\,(X(p)) = \left(Ad(g^{-1})T\right)^*(p)$, pela proposição 1.1.19. Portanto

$$\left((R_g)^*\omega\right)_p (X(p)) = \omega_{\mu(p,g)}\left(d(R_g)_p(X(p))\right) = Ad(g^{-1})T = ad(g^{-1})\left(\omega_p(X(p))\right),$$

provando (ii).
Suponha agora que não temos uma conexão principal, mas apenas uma 1-forma ω satisfazendo (i) e (ii). Definimos então

$$\Gamma_p := \ker(\omega_p), \ \ \forall p \in E. \tag{1.1.18}$$

Observe que esta definição é obrigatória: a fim de que ω seja a forma de conexão associada a uma dada Γ, deve-se ter 1.1.18. Isto prova a unicidade de Γ. As propriedades necessárias para que Γ seja uma conexão principal podem ser facilmente verificadas, diretamente da definição. ■

Além das formas de conexão, existe um outro tipo de 1-forma que será particularmente útil durante todo o desenvolvimento deste trabalho, mas que só existe para os fibrados de referenciais. Mostraremos agora do que se trata este objeto, através do qual obteremos muitas informações geométricas sobre as G-estruturas, no capítulo 2.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e $\pi : L(M) \to M$ seu fibrado de referenciais (cf. exemplo 1.1.16). Dado $p \in L(M)$, se $x = \pi(p)$, a diferencial $d\pi_p : T_p(L(M)) \to T_xM$ fornece uma aplicação linear de $T_p(L(M))$ em T_xM. Por definição, o ponto p é um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^n$ em T_xM. Definimos $\theta_p(X) := p^{-1} \circ d\pi_p(X)$, para todo $X \in T_p(L(M))$. Assim, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} T_p(L(M)) \arrow[r, "d\pi_p"] \arrow[rr, bend right, "\theta_p"'] & T_xM & \mathbb{R}^n \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

Proposição 1.1.22. *A função $\theta : L(M) \to T^*(L(M))$ é suave, e portanto é uma 1-forma em $L(M)$, a valores em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $p \in L(M)$, $\pi(p) = x \in M$ e $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ uma carta local de M, com $x \in U$. Se $\xi = (x^1, \dots, x^n)$, temos uma seção local $s := s_\xi$ de $L(M)$, definida como em 1.1.12. A seção s fornece a trivialização local

$$\begin{aligned} \Psi_s : U \times GL(n) &\to \pi^{-1}(U) \subseteq L(M) \\ (x, g) &\mapsto s(x) \circ g. \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Seja $X \in \mathfrak{X}(E)$ um campo vetorial suave em E. Restringindo θ ao aberto $\pi^{-1}(U)$ e compondo com Ψ_s, obtemos uma função que quando aplicada na restrição de X a $\pi^{-1}(U)$, tem a forma

$$\begin{aligned} (\theta \circ \Psi_s)(X) : U \times GL(n) &\to \mathbb{R}^n \\ (x, g) &\mapsto g^{-1} \circ (s(x))^{-1} \circ d\pi_{s(x) \circ g}(X). \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

Esta função é manifestamente suave, portanto θ é suave. ■

Observação 1.1.23. *Estaremos sempre usando a mesma ação de $GL(n)$ em $L(M)$, que se dá por composição. Assim, o símbolo $\circ$ será omitido daqui pra frente.*

A proposição 1.1.9 deixa claro que se $X \in T_pE$ é vertical, então $\theta_p(X) = 0$. Vamos determinar como θ varia ao longo das fibras de $L(M)$. Seja $X \in T_pE$ um vetor qualquer e $g \in GL(n)$. Então, como $\pi \circ R_g = \pi$,

$$\begin{aligned} &\theta_{pg}\left(d(R_g)_p(X)\right) = (pg)^{-1} d\pi_{pg}\left(d(R_g)_p(X)\right) = g^{-1}p^{-1}d(\pi \circ R_g)_p(X) = \\ &g^{-1}p^{-1}d\pi_p(X) = g^{-1}\theta_p(X). \end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Em outras palavras, $(R_g)^*\theta = g^{-1}\theta$. O símbolo $g^{-1}\theta$ deve ser entendido como a multiplicação (à esquerda) da matriz g^{-1} pelo vetor de $\mathbb{R}^n$ obtido como resultado de aplicar θ_p em X.

Dado $A \in \mathfrak{gl}(n)$, seja A^* o campo induzido por A (cf. 1.1.18). Usando 1.1.21, podemos calcular a derivada de Lie de θ na direção de A^*. Note que o fluxo de A^* é dado por $R_{e(t)}$, onde $e : \mathbb{R} \to GL(n)$ é a exponencial de matrizes, $e(t) = \exp(tA)$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A^*}\theta &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{R^*_{e(t)}(\theta) - \theta}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{e(t)^{-1}\theta - \theta}{t}\right) = \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{e(t)^{-1} - 1}{t}\right)\theta = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\exp(t(-A)) - \exp(0)}{t}\right)\theta = -A\theta, \end{aligned} \tag{1.1.22}$$

onde 1 denota a matriz identidade. Disto decorre que

$$\begin{aligned} d\theta_p(A^* \wedge Y) &= A^*(\theta(Y)) - Y(\cancelto{0}{\theta(A^*)}) - \theta([A^*, Y]) \\ &= A^*(\theta(Y)) - \theta(\mathcal{L}_{A^*}(Y)) \\ &= \mathcal{L}_{A^*}(\theta(Y)) - \theta(\mathcal{L}_{A^*}(Y)) \\ &= (\mathcal{L}_{A^*}(\theta))\,(Y) = -A\theta(Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(L(M)). \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

Aqui, usamos $\mathcal{L}_{A^*}$ para denotar a *derivação* definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A*}(f) &= A^*(f), \quad \forall f \in C^\infty(L(M)); \\ \mathcal{L}_{A*}(Y) &= [A^*, Y], \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(L(M)). \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Capítulo 2

G-estruturas

A Geometria Diferencial pode ser pensada como o estudo das variedades diferenciáveis e das possíveis estruturas sobre elas. Apesar de não haver uma definição precisa e totalmente geral do que seria uma *estrutura*, neste sentido, é um ponto pacífico que métricas Riemannianas e Lorentzianas, estruturas Hamiltonianas e estruturas complexas constituem exemplos muito importantes.

A teoria de G-estruturas em variedades é uma linguagem que permite unificar estes e outros exemplos, de uma maneira natural. Esta linguagem foi primeiramente introduzida por Élie Cartan, no estudo do então chamado *problema de equivalência*. Trataremos, também, deste problema aqui, com algum detalhe. Numa linguagem moderna, ele consiste essencialmente em construir invariantes locais para G-estruturas.

2.1 Definição e exemplos

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n.

Definição 2.1.1. Se G é um subgrupo de Lie de $GL(n)$, uma G-estrutura $\pi : B_G \to M$ sobre M é um subfibrado de $L(M)$ com grupo estrutural G. Assim, B_G é uma subvariedade de $L(M)$ tal que, se $p \in B_G$ e $g \in GL(n)$, então $pg \in B_G$ se e somente se $g \in G$.

Exemplo 2.1.2. Se $G = \{1\}$, então uma G-estrutura $\pi : B_G \to M$ é o mesmo que um paralelismo em M, ou seja, uma escolha de base em cada T_xM. Isto porque dado $x \in M$, a fibra $\pi^{-1}(x)$ deve conter exatamente um elemento p, que fornece então um isomorfismo "preferido" $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$.
1-estruturas aparecem naturalmente quando M é um grupo de Lie: neste caso, escolhida uma base $\{X_1, \dots, X_n\}$ da álgebra de Lie de M, os campos invariantes à esquerda gerados por $X_1, \dots, X_n$ fornecem um paralelismo, portanto uma 1-estrutura.

Exemplo 2.1.3. $O(n)$-estruturas, onde $O(n)$ é o grupo das matrizes ortogonais, são o mesmo que métricas Riemannianas em M. De fato, dada uma $O(n)$-estrutura $\pi : B_O \to M$, podemos definir

$$\langle u, v \rangle_x := \langle p^{-1}(u), p^{-1}(v) \rangle^{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x \in M, \quad \forall v, w \in T_xM, \tag{2.1.1}$$

onde $p \in \pi^{-1}(x)$. $\langle\ ,\ \rangle^{\mathbb{R}^n}$ denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$. Note que esta definição não depende da escolha de p em $\pi^{-1}(x)$. Em torno de cada ponto $x \in M$, existe um aberto $U \subseteq M$ e uma seção local $s : U \to \pi^{-1}(U)$. Se $E_i(y) := s(y)(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, então os campos vetoriais $E_1, \ldots, E_n$, definidos em U, formam uma base de T_yM, para cada $y \in U$. A métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ é dada, segundo a base $\{E_1, \ldots, E_n\}$, por

$$\langle E_i(y), E_j(y)\rangle_y = \Big\langle s(y)^{-1}\Big(E_i(y)\Big), s(y)^{-1}\Big(E_j(y)\Big)\Big\rangle^{\mathbb{R}^n} = \langle e_i, e_j\rangle^{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}, \quad \forall y \in U,$$

para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$. Isto mostra que $\langle\ ,\ \rangle$ é suave.
Por outro lado, dada uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ em M, construímos uma $O(n)$-estrutura escolhendo, para cada $x \in M$, aqueles isomorfismos $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$ que preservam produto interno, ou seja, as isometrias lineares de $\mathbb{R}^n$ com o produto interno canônico em T_xM com $\langle\ ,\ \rangle_x$. Como conjunto, temos

$$B_O := \bigcup_{x \in M} \{\, p \in Iso(\mathbb{R}^n; T_xM) \ : \ p \text{ é isometria linear} \,\}.$$

A cada sistema de coordenadas locais $\xi = (x^1, \ldots, x^n) : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n$, associamos uma seção local $s : U \to B_O$ pondo

$$s(y)(e_i) = \frac{\frac{\partial}{\partial x^i}|_y}{\|\frac{\partial}{\partial x^i}|_y\|}, \quad i = 1, \ldots, n; \ \ \forall y \in U.$$

Estas formam um atlas de seções locais, e temos assim uma $O(n)$-estrutura.

Exemplo 2.1.4. Generalizando o exemplo anterior, podemos considerar $G = O(n, \nu)$, onde $0 \leq \nu \leq n$. Os grupos $O(n, \nu)$ são chamados *grupos pseudo-ortogonais*, e consistem das transformações que preservam o produto escalar $\langle\ ,\ \rangle_\nu$ em $\mathbb{R}^n$, que é dado por

$$\Big\langle (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)\Big\rangle_\nu := -\sum_{i=1}^{\nu} u_i v_i + \sum_{i=\nu+1}^{n} u_i v_i. \tag{2.1.2}$$

Uma construção análoga à que fizemos para métricas Riemannianas mostra que uma $O(n, \nu)$-estrutura em M é o mesmo que uma métrica pseudo-Riemanniana em M, de índice ν. Os casos $\nu = 1$, $n \geq 2$ são especiais, e fornecem as chamadas métricas de Lorentz.

Exemplo 2.1.5. Seja ω uma forma bilinear, anti-simétrica e não-degenerada em $\mathbb{R}^{2n}$. Denotamos por $Sp_\omega(n)$ o grupo dos isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^{2n}$ que preservam ω (quando ω é a forma simplética canônica, este grupo é denotado simplesmente por $Sp(n)$). Se Q é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, uma $Sp_\omega(n)$-estrutura em Q é o mesmo que uma *estrutura quase-simplética* em Q. Dar uma estrutura quase-simplética em Q significa dar uma forma bilinear, anti-simétrica e não-degenerada em cada espaço tangente, variando suavemente. A estrutura quase-simplética é dita *simplética* se esta forma for também fechada.

Exemplo 2.1.6. Seja $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ uma transformação linear tal que $J \circ J = -1$. Uma tal transformação linear fornece uma maneira de complexificar $\mathbb{R}^{2n}$. Definimos a multiplicação do vetor $v \in \mathbb{R}^{2n}$ pelo número complexo $a + b\mathrm{i}$ pondo

$$(a + b\mathrm{i})\, v := av + bJ(v).$$

É fácil ver que isto define um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Denotamos por $GL_J(n,\mathbb{C})$ o subgrupo de $GL(2n)$ das transformações lineares que comutam com J. Este é um subgrupo fechado de $GL(n)$, e seus elementos são precisamente as transformações lineares de $\mathbb{R}^{2n}$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial que continuarão lineares após a complexificação, ou seja, que serão $\mathbb{C}$-lineares, vendo $\mathbb{R}^{2n}$ como $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Uma $GL_J(n,\mathbb{C})$-estrutura sobre uma variedade diferenciável S, de dimensão $2n$, é equivalente a uma *estrutura quase-complexa*. Uma estrutura quase-complexa é um endomorfismo $\mathcal{J}$ de TS, satisfazendo $\mathcal{J}\circ\mathcal{J} = -1$. Já uma *estrutura complexa* em S é um atlas $\mathbb{A}$ de cartas locais de S em $\mathbb{C}^n$, de maneira que as funções de transição são analíticas no sentido complexo. Não é difícil ver que uma estrutura complexa em S induz uma estrutura quase-complexa. A recíproca não é verdadeira em geral.

Exemplo 2.1.7. Seja $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão k, e $G \subseteq GL(n)$ o grupo das transformações que preservam $\mathbb{V}$, ou seja, as aplicações lineares $T \in GL(n)$ tais que $T(\mathbb{V}) = \mathbb{V}$. Neste caso, uma G-estrutura em M é o mesmo que uma distribuição de posto k em M. Com efeito, dada $\pi : B_G \to M$, podemos definir

$$\mathcal{D}_x := p(\mathbb{V}) \subseteq T_xM,$$

para qualquer escolha de $p \in \pi^{-1}(x)$. Se $q \in \pi^{-1}(x)$, então existe $g \in G$ com $q = pg$, e $q(\mathbb{V}) = pg(\mathbb{V}) = p(\mathbb{V})$, pois $g(\mathbb{V}) = \mathbb{V}$. Escolha uma seção local $s : U \to \pi^{-1}(U) \subseteq B_G$. A partir de s, podemos construir k campos vetoriais em U, da seguinte forma: escolha uma base $\{u_1,\ldots,u_k\}$ de $\mathbb{V}$, e defina

$$V_i(x) := s(x)(u_i), \ \ i = 1,\ldots,k; \ \ \forall x \in U.$$

Os campos vetoriais $V_1,\ldots,V_k$ são suaves, e geram a distribuição $\mathcal{D}$ em cada ponto de U. Logo, $\mathcal{D}$ é suave, por definção.
Por outro lado, dada uma distribuição suave $\mathcal{D}$ de posto k em M, construímos uma G-estrutura definindo

$$B_G := \bigcup_{x\in M}\{\, p \in Iso(\mathbb{R}^n; T_xM) \ : \ p(\mathbb{V}) = \mathcal{D}_x \,\},$$

onde $\mathbb{V} = span\{e_1,\ldots,e_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. A projeção $\pi : B_G \to M$ é óbvia. Quanto às seções locais de B_G, a suavidade de $\mathcal{D}$ significa, por definição, que dado qualquer $x \in M$, existe um aberto U contendo x e campos vetoriais em U, $V_1,\ldots,V_k$, que são suaves e geram $\mathcal{D}_y$, para todo $y \in U$. Podemos facilmente completar o conjunto $\{V_1,\ldots,V_k\}$ para uma base $\{V_1,\ldots,V_k,V_{k+1},\ldots,V_n\}$, reduzindo U se necessário. Basta então definir $s : U \to \pi^{-1}(U)$ pondo $s(y)(e_i) = V_i(y)$, para $i = 1,\ldots,n$, $\forall y \in U$.

O problema de existência de G-estruturas em uma dada variedade M pode ser complicado, e de modo geral envolve certas obstruções topológicas. O exemplo 2.1.2 deixa claro que não existem 1-estruturas em $\mathbb{S}^2$, mas em $\mathbb{S}^3$ sim. Por outro lado, $O(n)$-estruturas sempre existem em qualquer variedade. Não trataremos deste problema aqui, uma vez que ele foge ao escopo deste trabalho.

Uma aplicação diferenciável $f : M_1 \to M_2$ induz sempre uma aplicação

$$\begin{aligned} f_\star : L(M_1) &\to L(M_2) \\ p &\mapsto df_{\pi(p)}\circ p \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Observe que, se q é outro ponto na mesma fibra de p, isto é, $\pi(q) = \pi(p)$, então existe $g \in G$ tal que $q = pg$, e assim $f_\star(q) = (df_{\pi(p)} \circ p)g$. A aplicação $f_\star$ fica então determinada em toda a fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$ pelo seu valor em um ponto desta. Denotando por $\pi^i : L(M_i) \to M_i$, $i = 1, 2$, as projeções, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} L(M_1) \arrow[r, "f_\star"] \arrow[d, "\pi^1"'] & L(M_2) \arrow[d, "\pi^2"] \\ M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \end{tikzcd}$$

Note que, dadas $f : M_1 \to M_2$ e $g : M_2 \to M_3$, vale $(g \circ f)_\star = g_\star \circ f_\star$, pela regra da cadeia. Assim, se f é um difeomorfismo, $I_1 = (f^{-1} \circ f)_\star = f_\star^{-1} \circ f_\star$, e $I_2 = (f \circ f^{-1})_\star = f_\star \circ f_\star^{-1}$, onde I_i é a função identidade em $L(M_i)$. Portanto, $f_\star$ também é um difeomorfismo.

Dadas G-estruturas $\rho^i : B^i_G \to M_i$, $i = 1, 2$, faz sentido falar nas aplicações $f : M_1 \to M_2$ para as quais $f_\star(B^1_G) \subseteq B^2_G$. Estaremos mais interessados nos difeomorfismos que levam uma G-estrutura sobre a outra.

Definição 2.1.8. Sejam $\rho^i : B^i_G \to M_i$, $i = 1, 2$, G-estruturas sobre M_1 e M_2. Um difeomorfismo $f : M_1 \to M_2$ é um *isomorfismo* de B^1_G em B^2_G se $f_\star(B^1_G) = B^2_G$. Dizemos que B^1_G e B^2_G são isomorfas quando existe um tal isomorfismo. Quando $M_1 = M_2$ e $B^1_G = B^2_G$, f recebe o nome de *automorfismo* de B^1_G.

Não é difícil ver que duas $O(n)$-estruturas são isomorfas se e somente se as métricas Riemannianas que elas induzem são isométricas. Da mesma forma, duas $O(n, 1)$-estruturas são isomorfas se e somente se as métricas Lorentzianas que elas induzem são isométricas, e assim por diante. Pode acontecer que duas G-estruturas sejam isomorfas apenas localmente.

Definição 2.1.9. Sejam $\rho^i : B^i_G \to M_i$, $i = 1, 2$, G-estruturas sobre M_1 e M_2. Sejam $x \in M_1$ e $y \in M_2$. Dizemos que B^1_G e B^2_G são *localmente equivalentes* em (x, y) se existem vizinhanças $U_i \subseteq M_i$, $i = 1, 2$, com $x \in U_1$ e $y \in U_2$, e um isomorfismo $\phi : U_1 \to U_2$ de $B^1_G|_{U_1}$ sobre $B^2_G|_{U_2}$, tal que $\phi(x) = y$.

Dado um subgrupo de Lie $G \subseteq GL(n)$, o espaço $\mathbb{R}^n$ admite sempre uma G-estrutura canonicamente definida. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, denote por

$$\tau_x : T_x\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{2.1.4}$$

o isomorfismo que vem da projeção nas n últimas coordenadas (lembrando que $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). Definimos

$$\mathbb{R}^n_G := \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\, p \in Iso(\mathbb{R}^n; T_x\mathbb{R}^n) \ : \ \tau_x \circ p \in G \,\}.$$

Temos assim uma projeção natural. O atlas de seções locais (composto neste caso por apenas uma seção global) pode ser construído escolhendo um $g \in G$, e definindo $s_g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_G$ por $s(x) = \tau_x^{-1} \circ g$. É fácil ver que qualquer escolha de g fornece a mesma estrutura diferenciável.

Definição 2.1.10. A G-estrutura $\mathbb{R}^n_G$, como definida acima, é chamada *G-estrutura plana canônica*.

2.2 A função estrutural de primeira ordem

Nesta seção, construiremos um dos principais invariantes de uma G-estrutura, a saber, a função estrutural de primeira ordem. Veremos alguns exemplos nos quais ela coincide com objetos conhecidos, dentre eles o colchete em grupos de Lie. Mais adiante, usaremos esta função também para construir prolongamentos de uma dada G-estrutura, obtendo um refinamento dos métodos aqui utilizados.

Fixamos, de agora em diante, uma variedade diferenciável M, um subgrupo de Lie $G \subseteq GL(n)$ e uma G-estrutura $\pi : B_G \to M$. Usaremos a notação θ para denotar, também, a restrição da 1-forma θ (que foi definida sobre $L(M)$) a B_G.

Dado $p \in B_G$, tome um subespaço vetorial $H_1 \subseteq T_p(B_G)$ de tal maneira que $\mathcal{V}_p \oplus H_1 = T_p(B_G)$. Os subespaços com esta propriedade são chamados de *complementos horizontais em p*. Ao contrário, porém, do que acontece com o vertical, não temos unicidade; existem em princípio infinitas escolhas possíveis de complementos horizontais. Como $\mathcal{V}_p = ker(\theta_p)$, a restrição $\theta_p\big|_{H_1} : H_1 \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Isto significa que se H_2 é outro complemento horizontal em p, então para cada $v \in \mathbb{R}^n$, existem únicos $X_i \in H_i$ tais que $\theta_p(X_i) = v$, $i = 1, 2$, ou seja, $p(v) = d\pi_p(X_1) = d\pi_p(X_2)$. Assim,

$$d\pi_p(X_2 - X_1) = d\pi_p(X_2) - d\pi_p(X_1) = p(v) - p(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_2 - X_1 \in \mathcal{V}_p.$$

Temos portanto definida uma aplicação, que obviamente depende da escolha de H_1 e H_2, $S_{H_2,H_1} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}_p$ dada por $S_{H_2,H_1}(v) = X_2 - X_1$, onde X_i é o único vetor pertencente a H_i tal que $\theta_p(X_i) = v$, $i = 1, 2$. Como $\mathcal{V}_p \simeq \mathfrak{g}$, por 1.1.9, podemos pensar nesta aplicação $S_{H_2,H_1} : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{g}$ tomando valores na álgebra de Lie de G.

Observação 2.2.1. *Dados dois espaços vetoriais, $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$, denotaremos sempre por $Hom(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ o conjunto das aplicações lineares entre $\mathbb{V}_1$ e $\mathbb{V}_2$.*

Fixemos agora $H_1 \in HOR(T_p(B_G))$, onde $HOR(T_p(B_G))$ denota o conjunto de todos os complementos horizontais em p. Vale a seguinte proposição.

Proposição 2.2.2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} S_{*,H_1} : HOR(T_p(B_G)) &\to Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}) \\ H_2 &\mapsto S_{H_2,H_1} \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} T_{H_1} : Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}) &\to HOR(T_p(B_G)) \\ L &\mapsto Im\Big(L + (\theta_p\big|_{H_1})^{-1}\Big). \end{aligned}$$

Aqui, a imagem de $L \in Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$ está identificada com um subespaço de $\mathcal{V}_p \subseteq T_p(B_G)$, via $d(\beta_p)_1$, como em 1.1.9. Por outro lado, $(\theta_p\big|_{H_1})^{-1}$ obviamente toma valores em H_1, e $H_1 \cap \mathcal{V}_p = \{0\}$. Assim,

$$\Big(L + (\theta_p\big|_{H_1})^{-1}\Big)(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L(v) = 0 \text{ e } (\theta_p\big|_{H_1})^{-1}(v) = 0.$$

Mas $(\theta_p\big|_{H_1})^{-1}$ é um isomorfismo. Portanto $L + (\theta_p\big|_{H_1})^{-1}$ é injetiva e $dim(T_{H_1}(L)) = n$, qualquer que seja $L \in Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$. Resta mostrar que $T_{H_1}(L) \cap \mathcal{V}_p = \{0\}$ para que T_{H_1} esteja bem definida. Seja $X \in T_{H_1}(L) \cap \mathcal{V}_p$. Então $X = L(v) + X_0$, com $v \in \mathbb{R}^n$, $X_0 \in H_1$ e $\theta_p(X_0) = v$. Ao mesmo tempo, $X \in \mathcal{V}_p = ker(\theta_p)$, logo

$$0 = \theta_p(X) = \theta_p(L(v)) + \theta_p(X_0) = 0 + \theta_p(X_0) = v,$$

donde segue que $X = 0$, e portanto que T_{H_1} está bem definida.

Vamos agora mostrar que T_{H_1} é a inversa bilateral de S_{*,H_1}. Dada $L \in Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$ e $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\Big(S_{*,H_1} \circ T_{H_1}\Big)\Big(L\Big)(v) = S_{H_2,H_1}(v) = X_2 - X_1,$$

onde $H_2 = T_{H_1}(L)$ e $X_i \in H_i$ são tais que $\theta_p(X_i) = v$, $i = 1, 2$. Seja $X = L(v) + X_1$. Então $X \in H_2$, por definição. Além disso, $\theta_p(X) = \theta_p(X_1) = v$. Estas duas propriedades, satisfeitas por X, caracterizam X_2 (de acordo com a definição de S_{H_2,H_1}), e portanto

$$X_2 - X_1 = \Big(L(v) + X_1\Big) - X_1 = L(v),$$

qualquer que seja $v \in \mathbb{R}^n$. Logo $\Big(S_{*,H_1} \circ T_{H_1}\Big)\Big(L\Big) = L$.

Por outro lado, dado $H \in HOR(T_p(B_G))$,

$$\Big(T_{H_1} \circ S_{*,H_1}\Big)\Big(H\Big) = Im\Big(S_{H,H_1} + (\theta_p\big|_{H_1})^{-1}\Big).$$

Se $X \in H$, considere $v = \theta_p(X)$. Por definição, $S_{H,H_1}(v) = X - X_1$, com $X_1 \in H_1$ e $\theta_p(X_1) = v$. Daí $\Big(S_{H,H_1} + (\theta_p\big|_{H_1})^{-1}\Big)(v) = X$. Este argumento mostra que

$$H \subseteq Im\Big(S_{H,H_1} + (\theta_p\big|_{H_1})^{-1}\Big).$$

Como os dois espaços acima tem a mesma dimensão, segue a igualdade. Desta forma, T_{H_1} é uma inversa bilateral para S_{*,H_1}, e portanto ambas são bijetivas. ■

Fixado $p \in B_G$, a diferencial de θ fornece uma aplicação bilinear anti-simétrica $d\theta_p : T_p(B_G) \times T_p(B_G) \to \mathbb{R}^n$. Se tomarmos $H \in HOR(T_p(B_G))$, temos um isomorfismo, dado pela própria θ_p, entre H e $\mathbb{R}^n$. Restringindo $d\theta_p$ ao subespaço $H \times H \subseteq T_p(B_G) \times T_p(B_G)$ e identificando $H \times H \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ via θ_p, obtemos uma função bilinear anti-simétrica $c_H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Explicitamente,

$$c_H(u, v) = d\theta_p\left(\left(\theta_p\big|_H\right)^{-1}(u), \left(\theta_p\big|_H\right)^{-1}(v)\right). \tag{2.2.1}$$

Como em geral não temos uma escolha canônica de complementos horizontais, gostaríamos de eliminar a dependência de H nesta função. Para isso, vamos analisar a diferença entre duas tais funções, c_{H_1} e c_{H_2}, vindas de complementos horizontais quaisquer H_1, H_2 em p.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. Temos

$$c_{H_2}(u, v) - c_{H_1}(u, v) = d\theta_p\left(X_2, Y_2\right) - d\theta_p\left(X_1, Y_1\right),$$

onde $X_i = \left(\theta_p\big|_{H_i}\right)^{-1}(u)$ e $Y_i = \left(\theta_p\big|_{H_i}\right)^{-1}(v)$, $i = 1, 2$. Daí,

$$d\theta_p\,(X_2, Y_2) - d\theta_p\,(X_1, Y_1) = d\theta_p\,(X_2 - X_1, Y_2) + d\theta_p\,(X_1, Y_2 - Y_1) =$$

$$d\theta_p\,(S_{H_2,H_1}(u), Y_2) + d\theta_p\,(X_1, S_{H_2,H_1}(v)) = S_{H_2,H_1}(u) * v - S_{H_2,H_1}(v) * u.$$

A última desigualdade vem de 1.1.23, e o símbolo $*$ deve ser entendido aqui como multiplicação de uma matriz de $\mathfrak{g} \subseteq Hom(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ por um elemento de $\mathbb{R}^n$. Esta última expressão obtida é de um tipo especial: se $S \in Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$, podemos considerar a *antisimetrizada de S*, dada por

$$\mathcal{A}(S)(u) * v := S(u) * v - S(v) * u, \tag{2.2.2}$$

que é novamente um elemento de $Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$. Claramente, $\mathcal{A}(S)$ é anti-simétrica com respeito a u e v na expressão acima. Isto significa que podemos vê-la como um elemento de $Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, pela propriedade universal deste último. O mesmo vale, evidentemente, para c_{H_1} e c_{H_2}. Podemos então escrever

$$c_{H_2}(u \wedge v) - c_{H_1}(u \wedge v) = \mathcal{A}(S_{H_2,H_1})(u \wedge v). \tag{2.2.3}$$

Como a aplicação $\mathcal{A} : Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}) \to Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ é evidentemente linear, sua imagem é um subespaço de $Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Seja

$$\rho : Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \to \frac{Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))}$$

a projeção natural. A equação 2.2.3 deixa claro que fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} c : B_G &\to \frac{Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))} \\ p &\mapsto \rho(c_H(p)) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

onde H é qualquer complemento horizontal em p.

Definição 2.2.3. A função dada em 2.2.4 é chamada *função estrutural de primeira ordem*, ou simplesmente *função estrutural*, da G-estrutura B_G.

Exemplo 2.2.4. Lembramos que uma 1-estrutura $\pi : B_1 \to M$ é o mesmo que uma escolha de base em cada T_xM. Vamos calcular a função estrutural no caso em que M é um grupo de Lie e B_1 é dada da seguinte forma: fixe uma base $\{L_1, \ldots, L_n\}$ em T_oM, onde o é o elemento neutro de M, e considere $\widetilde{L}_1, \ldots, \widetilde{L}_n$ os campos vetoriais invariantes à esquerda definidos a partir de $L_1, \ldots, L_n$. Então é claro que $\{\widetilde{L}_1(x), \ldots, \widetilde{L}_n(x)\}$ é uma base em T_xM, para todo $x \in M$. A projeção $\pi : B_1 \to M$ é dada simplesmente por $\pi\left(\{\widetilde{L}_1(x), \ldots, \widetilde{L}_n(x)\}\right) = x$. Observe que, neste caso, $\mathcal{V}_p = \{0\}$, para todo $p \in B_1$. De fato, $\pi : B_1 \to M$ é um difeomorfismo, cuja inversa[1]1 é dada por $s : M \to B_1$, onde $s(x) = \{\widetilde{L}_1(x), \ldots, \widetilde{L}_n(x)\}$, e portanto $d\pi_p$ deve ter como núcleo apenas o vetor nulo, $\forall p \in B_1$. Logo $\mathcal{V}_p = ker(d\pi_p) = \{0\}$, e $T_p(B_1) \simeq T_xM$, com $x = \pi(p)$. Note que, pondo $\mathcal{L}_i(p) := ds_x(\widetilde{L}_i(x))$, o conjunto

[1]Aqui estamos identificando a base com o referencial por ela induzido, como discutido no capítulo 1.

$\{\mathcal{L}_1(p),\dots,\mathcal{L}_n(p)\}$ é uma base para $T_p(B_1)$, para cada $p \in B_1$. Isto nos ajudará a calcular a função estrutural, da seguinte maneira.
Fixe $p \in B_1$. Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$, sejam $X, Y \in T_p(B_1)$ tais que $\theta_p(X) = u$, $\theta_p(Y) = v$. Aqui, X e Y são sempre horizontais, portanto não há necessidade de especificar um complemento horizontal. Temos

$$c(p)(u \wedge v) = d\theta_p(X \wedge Y) = X(\theta(\widetilde{Y})) - Y(\theta(\widetilde{X})) - \theta_p([\widetilde{X}, \widetilde{Y}](p)),$$

onde $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ são campos vetoriais em B_1 que estendem X e Y. Como $d\theta_p(X \wedge Y)$ não depende da escolha da extensão, escreva

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{L}_i(p) \quad \text{e} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathcal{L}_i(p)$$

e defina

$$\widetilde{X}(q) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{L}_i(q) \quad \text{e} \quad \widetilde{Y}(q) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathcal{L}_i(q), \ \ \forall q \in B_1.$$

Assim, para todo $q \in B_1$,

$$\theta_q(\widetilde{X}(q)) = q^{-1}\Big(d\pi_q\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{L}_i(q)\Big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q^{-1}\Big(d\pi_q\Big(ds_{\pi(q)}(\widetilde{L}_i(\pi(q)))\Big)\Big) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q^{-1}\Big(d\big(\pi \circ s\big)_{\pi(q)}\big(\widetilde{L}_i(\pi(q))\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q^{-1}\big(\widetilde{L}_i(\pi(q))\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Logo, $\theta(\widetilde{X})$ é constante e $Y(\theta(\widetilde{X})) = 0$. O mesmo argumento vale para $X(\theta(\widetilde{Y}))$. Ficamos então com

$$c(p)(u \wedge v) = -\theta_p([\widetilde{X}, \widetilde{Y}](p)).$$

Sejam κ_{ij}^k números reais tais que

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{n} \kappa_{ij}^k L_k, \ \ i, j = 1, \dots, n,$$

ou seja, as constantes estruturais do grupo de Lie M com respeito à base $\{L_1, \dots, L_n\}$. Então,

$$c(p)(u \wedge v) = -\theta_p\Big(\Big[ds\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{L}_i\Big), ds\Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widetilde{L}_j\Big)\Big](p)\Big) =$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \theta_p\Big(ds_{\pi(p)}\big([\widetilde{L}_i, \widetilde{L}_j](\pi(p))\big)\Big) = -\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \theta_p\Big(ds_{\pi(p)}\Big(\sum_{k=1}^{n} \kappa_{ij}^k \widetilde{L}_k(\pi(p))\Big)\Big) =$$
$$-\sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_i \beta_j \kappa_{ij}^k \theta_p\Big(ds_{\pi(p)}\big(\widetilde{L}_k(\pi(p))\big)\Big) = -\sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_i \beta_j \kappa_{ij}^k e_k.$$

Agora, fixando $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e escolhendo $X = \theta_p^{-1}(e_i)$ e $Y = \theta_p^{-1}(e_j)$, obtemos

$$c(p)(e_i \wedge e_j) = -\sum_{k=1}^{n} \kappa_{ij}^k e_k.$$

Concluímos assim que $c(p)$ se reduz ao colchete da álgebra de Lie de M, transferido para $\mathbb{R}^n$ pelo isomorfismo $L_i \leftrightarrow e_i$.

O exemplo 2.2.4 é a motivação por trás do nome função estrutural, uma vez que c fornece as constantes de estrutura no caso em que M é um grupo de Lie. Vale notar também que naquele exemplo a função c é constante como função de B_1 em $Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Observação 2.2.5. *Daqui por diante, para não carregar a notação, vamos omitir o símbolo* $*$ *usado até então para denotar o produto de uma matriz por um vetor.*

Nosso próximo passo é estudar como a função estrutural varia ao longo das fibras de uma G-estrutura. Seja $\pi : B_G \to M$ uma G-estrutura sobre M, $p \in B_G$ e $a \in G$. Considere o difeomorfismo

$$\begin{aligned} R_a : B_G &\to B_G \\ q &\mapsto qa. \end{aligned}$$

Proposição 2.2.6. *Se* $H \in HOR(T_p(B_G))$*, então* $d(R_a)_p(H) \in HOR(T_{pa}(B_G))$*. Em outras palavras,* $d(R_a)$ *manda subespaços horizontais em subespaços horizontais.*

Demonstração. De fato, $d(R_a)_p(H)$ tem a mesma dimensão de H, porque $d(R_a)_p$ é um isomorfismo linear. Além disso, R_a preserva fibras, ou seja, $\pi \circ R_a = \pi$. Assim, se $Z \in d(R_a)_p(H) \cap ker(d\pi_{pa}) \equiv d(R_a)_p(H) \cap \mathcal{V}_{pa}$, então $Z = d(R_a)_p(Z_0)$ e $d\pi_{pa}(Z) = 0$. Esta última equação fornece

$$0 = d\pi_{pa}\Big(d(R_a)_p(Z_0)\Big) = d(\pi \circ R_a)_p(Z_0) = d\pi_p(Z_0),$$

o que implica $Z_0 \in \mathcal{V}_p$. Como $Z_0 \in H$ e H é horizontal, temos $Z_0 = 0$ e portanto $Z = 0$. Isto mostra que $d(R_a)_p(H) \cap \mathcal{V}_{pa} = \{0\}$, e portanto que $d(R_a)_p(H) \in HOR(T_{pa}(B_G))$. ■

Em geral, para calcularmos a função estrutural com respeito a um complemento horizontal $H \in HOR(T_pd(B_G))$ fixado, isto é, calcular c_H, devemos entender o isomorfismo induzido pela 1-forma θ em num ponto $q \in B_G$ qualquer, como visto no exemplo 2.2.4. Para estudar como a função estrutural varia ao longo de uma fibra, interessa em particular a relação entre este isomorfismo no ponto q e o isomorfismo no ponto qa, para cada $a \in G$.

Fixe $H \in HOR(T_p(B_G))$. Se $X, Y \in H$ e $a \in G$, então $\theta_{pa}(d(R_a)_p(X)) = a^{-1}u$ e $\theta_{pa}(d(R_a)_p(Y)) = a^{-1}v$, onde $u, v \in \mathbb{R}^n$ são tais que $\theta_p(X) = u$ e $\theta_p(Y) = v$. Por outro lado, usando a fórmula obtida para o *pull-back* de θ_p (1.1.21) e a comutatividade do operador d com o *pull-back*,

$$d\theta_{pa}\Big(d(R_a)_p(X) \wedge d(R_a)_p(Y)\Big) = (R_a)^*(d\theta)_p\Big(X \wedge Y\Big) = a^{-1}d\theta_p\Big(X \wedge Y\Big),$$

Denotando por K o subespaço $d(R_a)_p(H)$,

$$\begin{aligned} c_K(pa)\Big(a^{-1}u \wedge a^{-1}v\Big) = d\theta_{pa}\Big(d(R_a)_p(X) \wedge d(R_a)_p(Y)\Big) = \\ a^{-1}d\theta_p\Big(X \wedge Y\Big) = a^{-1}c_H(u \wedge v). \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Podemos reescrever esta equação na forma

$$c_K(pa)\Big(u \wedge v\Big) = a^{-1}c_H(au \wedge av). \tag{2.2.6}$$

Agora, se passarmos ao quociente na equação 2.2.6, isto é, aplicarmos a projeção ρ aos dois lados de 2.2.6, do lado esquerdo obtemos $c(pa)(u \wedge v)$, por definição. Gostaríamos de relacionar o lado direito, isto é, $\rho(a^{-1}c_H(au \wedge av))$ com $c(p)(u \wedge v)$. Para isto, introduzimos a função

$$\begin{aligned}\sigma : Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \times G &\to Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)\\ (a, L) &\mapsto L\sigma_a,\end{aligned}$$

onde $L\sigma_a$ é a aplicação dada por

$$\begin{aligned}L\sigma_a : \mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n\\ u \wedge v &\mapsto a^{-1}L(au \wedge av).\end{aligned}$$

Proposição 2.2.7. *A função σ é uma ação à direita. Além disso, o subespaço $\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})) \subseteq Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ é invariante por esta ação.*

Demonstração. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$, $L \in Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e $a, b \in G$. Temos

$$(L\sigma_{ab})(u \wedge v) = (ab)^{-1}L((ab)u \wedge (ab)v) = b^{-1}a^{-1}L((ab)u \wedge (ab)v).$$

Por outro lado,

$$\Big((L\sigma_a)\sigma_b\Big)\Big(u \wedge v\Big) = b^{-1}(L\sigma_a)(bv \wedge bv) = b^{-1}\Big(a^{-1}L(a(bu) \wedge a(bv))\Big),$$

o que prova que σ é uma ação à direita. Suponha, agora, que $L \in \mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))$. Então $L = \mathcal{A}(S)$, onde $S \in Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$. Afirmamos que

$$L\sigma_a = \mathcal{A}\Big(Ad(a^{-1}) \circ S \circ a\Big). \tag{2.2.7}$$

A equação 2.2.7 mostra que $\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))$ é de fato invariante pela ação σ. A fim de estabelecê-la, lembramos que quando G é um subgrupo de $GL(n)$, $Ad(a)X = aXa^{-1}$ (produto usual de matrizes), para todo $X \in \mathfrak{g}$. Assim,

$$\begin{aligned}(L\sigma_a)(u \wedge v) = (\mathcal{A}(S)\sigma_a)(u \wedge v) = a^{-1}\Big(\mathcal{A}(S)(au \wedge av)\Big) =\\ a^{-1}\Big(S(au)av - S(av)au\Big) = a^{-1}S(au)av - a^{-1}S(av)au =\\ \Big(Ad(a^{-1})S(au)\Big)v - \Big(Ad(a^{-1})S(av)\Big)u = \mathcal{A}\Big(Ad(a^{-1}) \circ S \circ a\Big)(u \wedge v). \ \blacksquare\end{aligned}$$

A proposição 2.2.7 permite estender a ação σ ao espaço quociente $\dfrac{Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))}$.

Denotando ainda por σ esta extensão, obtemos da equação 2.2.6 a relação

$$c(pa) = c(p)\sigma_a, \tag{2.2.8}$$

que descreve de modo preciso a variação da função estrutural ao longo da fibra que contém p. Uma consequência imediata desta relação é a seguinte: se a função estrutural se anula em algum ponto $p \in B_G$, então ela se anula identicamente em toda a fibra sobre p.

A própria construção da função estrutural de primeira ordem sugere fortemente que ela é de fato um invariante da G-estrutura. Provaremos este fato explicitamente.

Teorema 2.2.8. *Sejam M_1, M_2 variedades diferenciáveis de dimensão n, $\phi : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo, $\pi^1 : B^1_G \to M_1$ uma G-estrutura sobre M_1 e $\pi^2 : B^2_G \to M_2$ uma G-estrutura sobre M_2. Se a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi_\star : B^1_G &\to L(M_2) \\ p &\mapsto d\phi_{\pi^1(p)} \circ p \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

for um isomorfismo de B^1_G sobre B^2_G, então $c^2 \circ \phi_\star = c^1$, onde c^1, c^2 denotam as funções de estrutura de B^1_G e B^2_G, respectivamente.

Demonstração. Fixe $p \in B^1_G$ e $q = \phi_\star(p) \in B^2_G$. Sejam θ^1, θ^2 as formas canônicas associadas a B^1_G e B^2_G. A igualdade a ser mostrada é $c^2(q) = c^1(p)$.
Como estes são elementos de $\dfrac{Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))}$, vamos tomar um representante, ξ, da classe de equivalência $c^1(p)$, e mostrar que $\xi \in c^2(q)$. Associado a $\xi : \mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existe um subespaço horizontal $H_1 \in HOR(T_p(B^1_G))$ restrito ao qual a forma canônica θ^1 de B^1_G é um isomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$. Em outras palavras, $\xi = c_{H_1}$. Por definição, $\xi(u \wedge v) = d\theta^1_p(X^1 \wedge Y^1)$, onde $X^1, Y^1 \in T_p(B^1_G)$ são tais que $\theta^1_p(X^1) = u$ e $\theta^1_p(Y^1) = v$.
Por hipótese, a aplicação $\phi_\star$ é um difeomorfismo de B^1_G sobre B^2_G; logo sua derivada em p é o isomorfismo linear $d(\phi_\star)_p : T_p(B^1_G) \to T_q(B^2_G)$. Este isomorfismo linear manda o subespaço horizontal H_1 em outro subespaço horizontal. Para ver isto, note em primeiro lugar que a própria definição de $\phi_\star$ mostra que esta aplicação manda fibras em fibras, ou seja, $\pi^2 \circ \phi_\star = \phi \circ \pi^1$. Defina $L = d(\phi_\star)_p(H_1)$. Como $d(\phi_\star)_p$ é isomorfismo linear, L é um subespaço de dimensão n de $T_q(B^2_G)$. Se $X^2 \in L$, então $X^2 = d(\phi_\star)_p(X^1)$, para algum $X^1 \in H_1$, e temos

$$d(\pi^2)_q(X^2) = d(\pi^2)_q\left(d(\phi_\star)_p(X^1)\right) = d\left(\pi^2 \circ \phi_\star\right)_p(X^1) = d\left(\phi \circ \pi^1\right)_p(X^1) =$$

$$= d\phi_{\pi^1(p)}\left(d(\pi^1)_p(X^1)\right) = 0 \iff d(\pi^1)_p(X^1) = 0 \iff X^1 = 0.$$

Assim, $d(\pi^2)_q$ é injetiva quando restrita a L, e portanto é um isomorfismo de L sobre $\mathbb{R}^n$. Por isso, L é horizontal. Escrevemos $L =: H_2$. Associada a H_2 existe uma aplicação $\eta := c_{H_2} : \mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que pertence a $c^2(q)$. Vamos agora mostrar que $\eta = \xi$.
Em primeiro lugar, se $X \in T_p(B^1_G)$, então

$$\left((\phi_\star)^* \theta^2\right)_p(X) = \theta^2_q\left(d(\phi_\star)_p(X)\right) = \left(q^{-1} \circ d(\pi^2)_q\right)\left(d(\phi_\star)_p(X)\right) =$$

$$\left([d\phi_{\pi^1(p)} \circ p]^{-1} \circ d(\pi^2)_q\right)\left(d(\phi_\star)_p(X)\right) = p^{-1} \circ [d\phi_{\pi^1(p)}]^{-1} \circ d(\pi^2)_q \circ d(\phi_\star)_p\,(X) =$$

$$p^{-1} \circ [d\phi_{\pi^1(p)}]^{-1} \circ d(\pi^2 \circ \phi_\star)_p\,(X) = p^{-1} \circ [d\phi_{\pi^1(p)}]^{-1} \circ d(\phi \circ \pi^1)_p\,(X) =$$

$$p^{-1} \circ [d\phi_{\pi^1(p)}]^{-1} \circ [d\phi_{\pi^1(p)}] \circ d(\pi^1)_p\,(X) = p^{-1} \circ d(\pi^1)_p\,(X) = \theta^1_p(X).$$

Portanto $\left(\phi_\star\right)^* \theta^2 = \theta^1$. Finalmente, dados quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, por definição

$$\eta(u \wedge v) = d\theta^2_q(X^2 \wedge Y^2),$$

onde $X^2, Y^2 \in H_2$ são tais que $\theta^2_q(X^2) = u$, $\theta^2_q(Y^2) = v$. Logo existem $X^1, Y^1 \in H_1$ com $d(\phi_\star)_p(X^1) = X^2$ e $d(\phi_\star)_p(Y^1) = Y^2$. Temos

$$\eta(u \wedge v) = d\theta^2_q\left(d(\phi_\star)_p(X^1) \wedge d(\phi_\star)_p(Y^1)\right) = \left(\left(\phi_\star\right)^* d\theta^2\right)_p (X^1 \wedge Y^1) =$$

$$d\left(\left(\phi_\star\right)^* \theta^2\right)_p (X^1 \wedge Y^1) = d\theta^1_p(X^1 \wedge Y^1) = \xi(u \wedge v),$$

pois $\theta^1_p(X^1) = u$ e $\theta^1_p(Y^1) = v$. Portanto $c^2(q) = \rho(\eta) = \rho(\xi) = c^1(p)$, como queríamos. ■

O Teorema 2.2.8 implica que se duas G-estruturas B^1_G e B^2_G possuem funções estruturais constantes, como no exemplo 2.2.4, então uma condição necessária para que elas sejam localmente equivalentes é que estas constantes sejam iguais, isto é, determinem a mesma classe de equivalência em $\dfrac{Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))}$. Em particular, se B^1_G e B^2_G são localmente equivalentes, então c^1 é identicamente zero se e somente se c^2 o é. Esta observação leva ao seguinte Corolário.

Corolário 2.2.9. *Se uma G-estrutura B_G é localmente plana então sua função estrutural se anula identicamente.*

Demonstração. Como B_G é localmente equivalente à G-estrutura plana canônica, $\pi : \mathbb{R}^n_G \to \mathbb{R}^n$, basta mostrar que a função estrutural c de $\mathbb{R}^n_G$ se anula identicamente e aplicar o Teorema 2.2.8. Considere a 1-estrutura canônica $\pi_1 : \mathbb{R}^n_1 \to \mathbb{R}^n$, cuja fibra típica num ponto $x \in \mathbb{R}^n$ consiste de somente um isomorfismo, a saber, a identificação natural $\tau_x^{-1} : \mathbb{R}^n \to T_x\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ com seu espaço tangente $T_x\mathbb{R}^n$ (ver 2.1.4). $\mathbb{R}^n_1$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n_G$. Além disso, $\pi_1^{-1}(x) \subseteq \pi^{-1}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Este fato, juntamente com a equação 2.2.8 que obtivemos anteriormente, revela que é suficiente mostrar que c se anula identicamente em $\mathbb{R}^n_1$. Neste ponto, estamos em situação semelhante ao exemplo 2.2.4: $\mathbb{R}^n_1$ é claramente difeomorfa ao próprio $\mathbb{R}^n$, via a projeção π_1, e o (único) complemento horizontal em qualquer $p \in \mathbb{R}^n_1$ é isomorfo a $T_x\mathbb{R}^n$, via $d(\pi_1)_p$, onde $\pi_1(p) = x$.

Cabe aqui uma pequena observação, antes de prosseguirmos, a respeito da diferencial de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ de uma variedade diferenciável arbitrária, M, em $\mathbb{R}$. Se vista como aplicação entre duas variedades, a diferencial de f num ponto $y \in M$ é uma aplicação do tipo $df_y : T_yM \to T_{f(y)}\mathbb{R}$. Quando pensamos em df como 1-forma, porém, temos tipicamente uma aplicação do tipo $df_y : T_yM \to \mathbb{R}$. Neste formato, a aplicação é a composição de df_y com um isomorfismo que identifica $T_{f(y)}\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$. O mesmo vale para aplicações a valores vetoriais, fato que será usado a seguir.

Seja $\eta := (\pi_1^{-1})^*(\theta)$ Então, se $v \in T_x\mathbb{R}^n$,

$$\eta(v) = \theta_p\Big(d(\pi_1^{-1})_x(v)\Big) = p^{-1}\Big([d\pi_p \circ d(\pi_1^{-1})_x](v)\Big) = p^{-1}\Big(d(\pi \circ \pi_1^{-1})_x(v)\Big) = p^{-1}(d(Id)_x(v)).$$

Aqui, como $p \in \mathbb{R}^n_1$ é a identificação natural de $\mathbb{R}^n$ com $T_x\mathbb{R}^n$, a forma θ_e nada mais é do que a diferencial da aplicação identidade $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, vista como 1-forma a valores vetoriais. Assim, $(\pi_1^{-1})^*(\theta) = \eta = d(Id)$, e portanto $d\theta = 0$. Isto mostra que a função estrutural de $\mathbb{R}^n_1$ se anula identicamente, o que conclui a demonstração. ■

A recíproca do Corolário 2.2.9 não é, em geral, verdadeira. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.2.10. Se (M, h) é uma variedade Riemanniana, considere a $O(n)$-estrutura $\pi : B_O \to M$ associada a (M, h). Neste caso, a função estrutural c de B_O se anula identicamente, independente da métrica h. Isto acontece porque

$$\mathcal{A}\Big(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{o}(n))\Big) = Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n). \tag{2.2.10}$$

Com efeito, temos

$$dim\Big(Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)\Big) = dim(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n) * dim(\mathbb{R}^n) = \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big) * n, \quad e$$

$$dim\Big(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{o}(n))\Big) = dim(\mathbb{R}^n) * dim(\mathfrak{o}(n)) = n * \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big).$$

Logo, 2.2.10 estará provada se mostrarmos que $ker(\mathcal{A}) = \{0\}$. Seja $S \in ker(\mathcal{A})$. Denote por $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$. Como $S(u) \in \mathfrak{o}(n)$, temos $\langle S(u)v, w\rangle$ = -$\langle v, S(u)w\rangle$, e como $S \in ker(\mathcal{A})$, $S(u)v = S(v)u$, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Assim,

$$\langle S(u)v, w\rangle = \langle S(v)u, w\rangle = -\langle u, S(v)w\rangle = -\langle u, S(w)v\rangle = \langle S(w)u, v\rangle =$$
$$\langle S(u)w, v\rangle = -\langle w, S(u)v\rangle, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Logo $S \equiv 0$, como queríamos. Este exemplo mostra que, algumas vezes, a função estrutural de primeira ordem não dá informação alguma sobre a G-estrutura em questão. Por isso, vamos introduzir mais adiante a noção de *prolongamento* da álgebra de Lie de G, com o objetivo de obter invariantes mais finos.

Exemplo 2.2.11. Seja $\mathbb{V} := span\{e_1, \ldots, e_k\}$, onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, e considere $G = \{T \in GL(n) \,:\, T(\mathbb{V}) = \mathbb{V}\}$ o grupo das transformações que preservam $\mathbb{V}$. Como vimos, para este grupo G uma G-estrutura $\pi : B_G \to M$ sobre uma variedade diferenciável M, de dimensão n, é o mesmo que uma distribuição de posto k em M. Denote por $\mathcal{D}$ esta distribuição. Podemos fazer uma identificação

$$\frac{Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))} \;\simeq\; Hom\Big(\mathbb{V} \wedge \mathbb{V}; \mathbb{R}^n/\mathbb{V}\Big), \tag{2.2.11}$$

onde $\mathbb{R}^n/\mathbb{V}$ denota o quociente de $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{V}$. Para isso, defina

$$\begin{aligned} \psi : Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\to Hom\Big(\mathbb{V} \wedge \mathbb{V}; \mathbb{R}^n/\mathbb{V}\Big) \\ T &\mapsto \psi(T), \end{aligned}$$

onde $\psi(T)$ é dada por

$$\begin{aligned} \psi(T) : \mathbb{V} \wedge \mathbb{V} &\to \mathbb{R}^n/\mathbb{V} \\ u \wedge v &\mapsto T(u \wedge v) + \mathbb{V}. \end{aligned}$$

A aplicação ψ é linear. Assim, para estabelecer 2.2.11, basta mostrarmos que $ker(\psi) = \mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))$ e que ψ é sobrejetiva. Se $T \in ker(\psi)$, então $T(u \wedge v) \in \mathbb{V}$, sempre que $u, v \in \mathbb{V}$. Neste caso, considere $S \in Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$ dada por

$$S(u) = \frac{T(u \wedge *)}{2}.$$

O símbolo $T(u \wedge *)$ indica a matriz da aplicação linear $v \mapsto T(u \wedge v)$, para $v \in \mathbb{V}$. Por hipótese, essa é uma aplicação linear de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$. Como a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ consiste exatamente de todas as aplicações lineares (não só as invertíveis) que deixam $\mathbb{V}$ invariante, S está bem definida como elemento de $Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$. Temos

$$\mathcal{A}(S)(u \wedge v) = S(u)v - S(v)u = \left(\frac{T(u \wedge *)}{2}\right)v - \left(\frac{T(v \wedge *)}{2}\right)u =$$
$$\frac{T(u \wedge v)}{2} - \frac{T(v \wedge u)}{2} = T(u \wedge v).$$

Logo $T \in \mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))$.

Por outro lado, se $T \in \mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))$, então $T = \mathcal{A}(S)$, com $S \in Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$. Neste caso, dados $u, v \in \mathbb{V}$,

$$T(u \wedge v) = S(u)v - S(v)u.$$

Como $S(u)$ e $S(v)$ pertencem a $\mathfrak{g}$ e as transformações em $\mathfrak{g}$ preservam $\mathbb{V}$, concluímos que $T(u \wedge v) \in \mathbb{V}$. Logo $\psi(T) = 0$. Isto prova que $ker(\psi) = \mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))$. Quanto à sobrejetividade de ψ, dada $T \in Hom(\mathbb{V} \wedge \mathbb{V}; \mathbb{R}^n/\mathbb{V})$, basta escolher um isomorfismo $\eta : \mathbb{R}^n/\mathbb{V} \oplus \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n$. A aplicação $\eta \circ T : \mathbb{V} \wedge \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n$ pode agora ser estendida para $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$, de maneira trivial. Se $\widetilde{\eta \circ T}$ denota essa extensão, então $\psi(\widetilde{\eta \circ T}) = T$, como queríamos. Concluímos que a aplicação

$$\Psi : \frac{Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))} \to Hom\Big(\mathbb{V} \wedge \mathbb{V}; \mathbb{R}^n/\mathbb{V}\Big)$$
$$[T] \mapsto \psi(T),$$

está bem definida e é um isomorfismo linear.

Sejam $x \in M$ e $\beta = \{V_1, \ldots, V_n\}$ uma base local para $\mathcal{D}$ em torno de x. Isto significa que existe $U \subseteq M$ aberto contendo x tal que

$$T_yM \supseteq \mathcal{D}_y = span\{V_1(y), \ldots, V_k(y)\}, \;\; \forall y \in U,$$

com $V_i \in \mathfrak{X}(U)$, $i = 1, \ldots, n$. Além disso, o conjunto $\{V_1(y), \ldots, V_n(y)\}$ é uma base de T_yM, em cada $y \in U$. Associado naturalmente a β existe, para cada $y \in U$, um único elemento na fibra $\pi^{-1}(y)$ em B_G, que vamos denotar por $s(y)$, tal que

$$s(y)(e_i) = V_i(y), \;\; i = 1, \ldots, n.$$

A aplicação $s : U \subseteq M \to B_G$ é suave, dado que $V_1, \ldots, V_n$ são suaves. Dado $p \in B_G$, temos $p = s(y) \circ a$, para algum $a \in G$. Defina

$$\widetilde{V}_i(p) = (d(R_a)_{s(y)} \circ ds_y)(V_i(y)), \;\; \forall p \in \pi^{-1}(U), \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Pondo

$$H_p := span\{\widetilde{V}_1(p), \ldots, \widetilde{V}_n(p)\}, \ \ \forall p \in \pi^{-1}(U),$$

é fácil ver que $H_p \in HOR(T_p(B_G))$. De fato, $d\pi_p$ restrita a H_p fornece um isomorfismo linear entre H_p e $T_{\pi(p)}M$, que manda cada $\widetilde{V}_i(p)$ em $V_i(p)$, qualquer que seja $p \in \pi^{-1}(U)$. Em particular, $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_n$ são campos vetoriais horizontais no aberto $\pi^{-1}(U)$. A condição para integrabilidade de $\mathcal{D}$ (em U), segundo o Teorema de Fröbenius, é

$$[V_i, V_j](y) \in \mathcal{D}_y, \ \ \forall y \in U, \ \ i, j = 1, \ldots, k.$$

Se $p = s(y) \circ a \in \pi^{-1}(y)$, como acima, então para quaisquer $i, j = 1, \ldots, k$,

$$\theta_p\Big([\widetilde{V}_i, \widetilde{V}_j](p)\Big) = \theta_p\Big([d(R_a) \circ ds(V_i), d(R_a) \circ ds(V_j)](p)\Big) =$$
$$\theta_p\Big(d(R_a)_{s(y)} \circ ds_y\Big([V_i, V_j](y)\Big)\Big) = \Big(p^{-1} \circ d\pi_p \circ d(R_a)_{s(y)} \circ ds_y\Big)\Big([V_i, V_j](y)\Big) =$$
$$\Big(p^{-1} \circ d(\pi \circ R_a)_{s(y)} \circ s_y\Big)\Big([V_i, V_j](y)\Big) = \Big(p^{-1} \circ d\pi_{s(y)} \circ s_y\Big)\Big([V_i, V_j](y)\Big) =$$
$$\Big(p^{-1} \circ d(\pi \circ s)_y\Big)\Big([V_i, V_j](y)\Big) = p^{-1}\Big([V_i, V_j](y)\Big),$$

e $p^{-1}\Big([V_i, V_j](y)\Big)$ pertence a $\mathbb{V}$ se, e somente se, $[V_i, V_j](y)$ pertence a $\mathcal{D}_y$, pela definição da G-estrutura. Temos também

$$\theta_p(\widetilde{V}_i(p)) = p^{-1}(V_i(y)) = a^{-1} \circ s(y)^{-1}(V_i(y)) = a^{-1}(e_i). \tag{2.2.12}$$

Evidentemente, a pode depender de p, de maneira que as funções

$$\begin{aligned} A_i : \pi^{-1}(U) &\to \mathbb{V} \\ p &\mapsto \theta_p(\widetilde{V}_i(p)), \end{aligned}$$

definidas para $1 \leq i \leq k$, podem não ser constantes. Contudo, cada uma delas toma valores no subespaço $\mathbb{V}$, pela equação 2.2.12. O mesmo acontece, portanto, com as suas derivadas direcionais; ou seja,

$$\widetilde{V}_j(p)(A_i) \in \mathbb{V}, \ \ \forall p \in \pi^{-1}(U), \ \ i, j = 1, \ldots, k. \tag{2.2.13}$$

Fixe um ponto $p \in \pi^{-1}(U)$ e seja $y = \pi(p)$. Temos

$$c_{H_p}(e_i, e_j) = d\theta_p(\widetilde{V}_i(p), \widetilde{V}_j(p)) = \widetilde{V}_i(p)\left(\theta(\widetilde{V}_j)\right) - \widetilde{V}_j(p)\left(\theta(\widetilde{V}_i)\right) - \theta_p\left([\widetilde{V}_i, \widetilde{V}_j](p)\right) =$$
$$\widetilde{V}_i(p)\Big(A_j\Big) - \widetilde{V}_j(p)\Big(A_i\Big) - p^{-1}\left([V_i, V_j](y)\right),$$

para $i, j = 1, \ldots, k$. Então, observando o isomorfismo dado em 2.2.11 via Ψ temos, novamente para $i, j = 1, \ldots, k$,

$$\Psi(c(p))(e_i, e_j) = d\theta_p(\widetilde{V}_i(p), \widetilde{V}_j(p)) + \mathbb{V} = \widetilde{V}_i(p)\Big(A_j\Big) - \widetilde{V}_j(p)\Big(A_i\Big) - p^{-1}\left([V_i, V_j](y)\right) + \mathbb{V} =$$
$$- p^{-1}\left([V_i, V_j](y)\right) + \mathbb{V},$$

por 2.2.13. Portanto, a função estrutural se anula sobre a fibra $\pi^{-1}(y)$ precisamente quando todos os colchetes $[V_i, V_j](y) \in \mathcal{D}_y$, para $i, j = 1, \ldots, k$. Em particular, ela é identicamente nula quando $\mathcal{D}$ é involutiva.

2.3 Prolongamentos de uma álgebra de Lie de endomorfismos

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita. O espaço vetorial $End(\mathbb{V})$, formado pelas aplicações lineares de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$, possui uma estrutura natural de Álgebra de Lie: dadas $S, T \in End(\mathbb{V})$, definimos $[S, T] := S \circ T - T \circ S$. É trivial verificar que esta operação satisfaz as propriedades exigidas de um colchete de Lie.

Proposição 2.3.1. *O espaço vetorial $End(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ é canonicamente isomorfo a $\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*$.*

Demonstração. Vamos construir um isomorfismo linear $\phi : \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^* \to End(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ da seguinte forma. Primeiro, definimos $\phi(w \otimes f)$ como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \phi(w \otimes f) : \mathbb{V} &\to \mathbb{W} \\ v &\mapsto f(v)w \end{aligned}$$

para qualquer $w \otimes f \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*$. Como um elemento genérico de $\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*$ é da forma $\sum_{i=1}^{k} w_i \otimes f^i$ e queremos que ϕ seja linear, estendemos ϕ a todo $\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*$ pondo

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{k} w_i \otimes f^i\right) := \sum_{i=1}^{k} \phi(w_i \otimes f^i).$$

É fácil ver que ϕ está bem definida. Como $dim(End(\mathbb{V}, \mathbb{W})) = dim(\mathbb{V}) * dim(\mathbb{W}) = dim(\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*)$, a proposição estará provada se mostrarmos que ϕ é injetiva.

Seja $X = \sum_{i=1}^{k} w_i \otimes f^i \in ker(\phi)$. Suponha, por absurdo, que $X \neq 0$. Deste modo podemos assumir, descartando os termos nulos, que cada w_i e cada f^i são diferentes de zero, para $i = 1, \ldots, k$. Podemos supor ainda que $\{w_1, \ldots, w_k\}$ é um conjunto linearmente independente, escolhendo k minimal. De fato, se $\{w_1, \ldots, w_k\}$ não fosse linearmente independente teríamos, por exemplo, $w_1 = \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_k w_k$, e neste caso poderíamos escrever

$$\begin{aligned} X = \sum_{i=1}^{k} w_i \otimes f^i = \left(\alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_k w_k\right) \otimes f^1 + \sum_{i=2}^{k} w_i \otimes f^i = \\ w_2 \otimes (\alpha_2 f^1) + \ldots + w_k \otimes (\alpha_k f^1) + \sum_{i=2}^{k} w_i \otimes f^i = \sum_{i=2}^{k} w_i \otimes \left(f^i + \alpha_i f^1\right), \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

contrariando a minimalidade de k. Sendo $f^1 \neq 0$, existe $v_1 \in \mathbb{V}$ tal que $f^1(v_1) \neq 0$. Daí

$$0 = \phi(X)(v_1) = \sum_{i=1}^{k} \phi(w_i \otimes f^i)(v_1) = \sum_{i=1}^{k} f^i(v_1) w_i. \tag{2.3.2}$$

Como $f^1(v_1) \neq 0$, a equação 2.3.2 contraria a independência linear de $\{w_1, \ldots, w_k\}$. Logo ϕ deve ser injetiva, como queríamos. ∎

Seja $\mathfrak{g}$ um subespaço vetorial de $End(\mathbb{V})$. Segundo a proposição 2.3.1, $\mathfrak{g}$ pode ser identificado com um subespaço de $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*$. Definimos $\mathfrak{g}^{(1)}$ como sendo

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \left(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{V}^*\right) \cap \left(\mathbb{V} \otimes S^2(\mathbb{V}^*)\right) \subseteq \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*,$$

onde $S^k(\mathbb{V}^*)$ denota, em geral, o espaço dos k-tensores simétricos em $\mathbb{V}^*$. Para $i \geq 2$, definimos indutivamente

$$\mathfrak{g}^{(i)} = \left(\mathfrak{g}^{(i-1)} \otimes \mathbb{V}^*\right) \cap \left(\mathbb{V} \otimes S^i(\mathbb{V}^*)\right).$$

Convencionamos também que $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$.

Definição 2.3.2. O espaço $\mathfrak{g}^{(i)}$ é chamado *i-ésimo prolongamento* de $\mathfrak{g}$.

Observação 2.3.3. O prolongamento $\mathfrak{g}^{(i)}$ pode ser realizado, pela proposição 2.3.1, como o espaço das aplicações $(i+1)$-lineares simétricas $T : \mathbb{V}^{i+1} \to \mathbb{V}$ que satisfazem a seguinte propriedade adicional: dados $v_1, \ldots, v_i \in \mathbb{V}$, a aplicação

$$\begin{aligned} T_{v_1,\ldots,v_i} : \mathbb{V} &\to \mathbb{V} \\ v &\mapsto T(v_1, \ldots, v_i, v) \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

pertence ao subespaço $\mathfrak{g}$. Frequentemente, usaremos esta caracterização de $\mathfrak{g}^{(i)}$.

Veremos agora uma interpretação para os prolongamentos sucessivos da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie $G \subseteq GL(n)$. Intuitivamente falando, se $\mathfrak{g}$ corresponde às "derivadas de primeira ordem" (isto é, vetores tangentes) em G, $\mathfrak{g}^{(i)}$ seria o espaço das derivadas de ordem i. Isto ficará mais claro se estudarmos o que acontece nas G-estruturas planas canônicas, como faremos adiante.

Definição 2.3.4. Seja $\pi : B_G \to M$ uma G-estrutura e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dado $x_0 \in M$, considere o fluxo local $\phi_{x_0} : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ do campo vetorial X, onde $(-\epsilon, \epsilon) \times U \subseteq \mathbb{R} \times M$ é qualquer vizinhança de $(0, x_0)$ onde o fluxo esteja definido. Se o fluxo no tempo t, isto é, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi^t_{x_0} : U &\to M \\ x &\mapsto \phi_{x_0}(t, x) \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

for tal que

$$(\phi^t_{x_0})_\star(B_G|_U) = B_G|_{\phi^t_{x_0}(U)}, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon), \tag{2.3.5}$$

dizemos que X é um *automorfismo infinitesimal de B_G no ponto x_0*. Se esta propriedade for válida para qualquer $x_0 \in M$, então dizemos simplesmente que X é um *automorfismo infinitesimal* de B_G.

Exemplo 2.3.5. Seja (M, h) uma variedade Riemanniana e $\pi : B_O \to M$ a $O(n)$-estrutura associada a (M, h). A fim de que um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ seja um automorfismo infinitesimal de B_O num ponto $x_0 \in M$, é necessário e suficiente que X seja um campo de Killing numa vizinhança de x_0.
De fato, se X é um campo de Killing numa vizinhança V de x_0, considere o fluxo

local $\phi_{x_0} : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ de X em x_0. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um referencial ortonormal em $y \in U \cap V$, então

$$h_{\phi_{x_0}(t,y)}\Big(d(\phi^t_{x_0})_y(v_i), d(\phi^t_{x_0})_y(v_j)\Big) = ((\phi^t_{x_0})^* h)_y\Big(v_i, v_j\Big) = h_y(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \tag{2.3.6}$$

para qualquer $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Logo $(\phi^t_{x_0})_\star(B_O|_{U\cap V}) = B_O|_{\phi^t_{x_0}(U\cap V)}$.

Por outro lado, se X é tal que seu fluxo local em x_0, $\phi_{x_0} : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$, satisfaz $(\phi^t_{x_0})_\star(B_O|_U) = B_O|_{\phi^t_{x_0}(U)}$ em alguma vizinhança $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ de $(0, x_0)$, a equação 2.3.6 mostra que $(\phi^t_{x_0})^*(h) = h$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Logo X é um campo de Killing em U.

Sabemos que um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação suave $V : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$ tal que $V(x) \in T_x\mathbb{R}^n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como cada $T_x\mathbb{R}^n$ se identifica naturalmente com $\mathbb{R}^n$, podemos pensar em V como uma função da forma $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Usando a base canônica, escreva $V = (V^1, \ldots, V^n)$. Denotamos por $DV : \mathbb{R}^n \to Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a derivada usual da aplicação V, dada pela expressão

$$DV(x)(v) = DV(x)(v_1, \ldots, v_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial V^1}{\partial x^j}(x), \ldots, \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial V^n}{\partial x^j}(x)\right), \ \ \forall x, v \in \mathbb{R}^n.$$

Mais geralmente, denotamos por $D^k V(x) : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ a derivada k-ésima da função V no ponto x, que é dada por

$$D^k V(x)(v_1, \ldots, v_k) = \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k V^1}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}}(x) v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k}, \ \ldots \ , \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k V^n}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}}(x) v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k}\right),$$

para quaisquer $x, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Neste contexto, temos as seguintes proposições.

Proposição 2.3.6. *Sejam $\pi : \mathbb{R}^n_G \to \mathbb{R}^n$ a G-estrutura plana canônica sobre $\mathbb{R}^n$ e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto qualquer. Um campo vetorial $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um automorfismo infinitesimal de $\mathbb{R}^n_G$ em U se, e somente se, $DV(x) \in \mathfrak{g}$, $\forall x \in U$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G.*

Demonstração. Dado $x \in U$, considere o fluxo local de V em x, $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times W \to \mathbb{R}^n$, onde W é uma vizinhança de x. A aplicação

$$d(\phi^t)_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

preserva a G-estrutura $\mathbb{R}^n_G$ em x, isto é, satisfaz

$$d(\phi^t)_x \circ p \in \pi^{-1}(\phi(t, x)), \ \ \forall p \in \pi^{-1}(x) \ \ \forall t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

se e somente se $d(\phi^t)_x \in G$, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ (lembrando que estamos identificando espaços tangentes). Agora, se V é um automorfismo infinitesimal de $\mathbb{R}^n_G$ em U, então, em particular $d(\phi^t)_x \in G$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Assim, a curva

$$\begin{aligned} \Phi : (-\epsilon, \epsilon) &\to Hom(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \\ t &\mapsto d(\phi^t)_x \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

fica contida em G, e portanto $\Phi'(0) \in \mathfrak{g}$. Como $\Phi'(0) = DV(\phi(0,x)) = DV(x)$, segue que $DV(x) \in \mathfrak{g}$.

Por outro lado, se $DV(U) \subseteq \mathfrak{g}$, dado $x_0 \in U$ existe $\delta > 0$ e $W \subseteq U$ com $x_0 \in W$ tais que $\phi(t,x) \in U$, para $(t,x) \in (-\delta,\delta) \times W$. Pondo $\Psi(t) = d(\phi_x^t)$, com $t \in (-\delta,\delta)$ e $x \in W$, temos $\mathfrak{g} \ni DV(\phi(t,x)) = \Psi'(t)$, de modo que $Im(\Psi) \subseteq G$. Assim, V é um automorfismo infinitesimal de $\mathbb{R}^n_G$ em x_0. Como $x_0 \in U$ é arbitrário, a proposição está provada. ■

A proposição 2.3.6 caracteriza os automorfismos infinitesimais de $\mathbb{R}^n_G$ como aqueles cuja derivada primeira (em qualquer ponto) pertence à álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A noção de prolongamento que introduzimos corresponde justamente ao espaço ao qual pertencem as derivadas de ordem superior de tais automorfismos, conforme o próximo teorema.

Teorema 2.3.7. *Se V é um automorfismo infinitesimal de $\mathbb{R}^n_G$, então $D^{k+1}V(x) \in \mathfrak{g}^{(k)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução. Temos $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, de modo que o caso $k = 0$ se reduz à proposição 2.3.6. Suponha agora que $D^{k+1}V(x) \in \mathfrak{g}^{(k)}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 0$. Isto significa que cada aplicação $(k+1)$-linear

$$\begin{aligned} D^{k+1}V(x) : (\mathbb{R}^n)^{k+1} &\to \mathbb{R}^n \\ (v_1, \ldots, v_{k+1}) &\mapsto D^{k+1}V(x)(v_1, \ldots, v_{k+1}) \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

é simétrica em todas as entradas, e que

$$\begin{aligned} D^{k+1}V(x)_{v_1,\ldots,v_k} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto D^{k+1}V(x)(v_1, \ldots, v_k, v) \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

pertence a $\mathfrak{g}$ (usamos aqui a mesma notação de 2.3.3), quaisquer que sejam os vetores fixados $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Agora, fixe $x, v_1, \ldots, v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ arbitrários. É imediato, por causa da diferenciabilidade de V, que a aplicação $D^{k+2}V(x) : (\mathbb{R}^n)^{k+2} \to \mathbb{R}^n$ é simétrica em todas as entradas, pelo teorema de Schwartz. Pondo $\alpha(t) = x + tv_{k+1}$, temos por hipótese de indução que a curva $A(t) = D^{k+1}V(\alpha(t))_{v_1,\ldots,v_k}$ tem sua imagem contida em $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n^2}$, a derivada $A'(0)$ pertence a $\mathfrak{g}$. Concluímos assim que

$$A'(0) = D^{k+2}V(\alpha(0))_{v_1,\ldots,v_k,\alpha'(0)} = D^{k+2}V(x)_{v_1,\ldots,v_{k+1}} \in \mathfrak{g},$$

e portanto que $D^{k+2}V(x) \in \mathfrak{g}^{(k+1)}$. ■

É fácil ver, pela definição, que se G é um subgrupo de Lie de $GL(n)$ tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ para algum k natural, então $\mathfrak{g}^{(l)} = \{0\}$, $\forall l \geq k$. Para um tal grupo, o Teorema 2.3.7 nos permite concluir que a álgebra de Lie dos automorfismos infinitesimais de $\mathbb{R}^n_G$ tem dimensão finita, por um argumento simples de integração. Isto porque, para este grupo, todas as derivadas de ordem maior ou igual a k de um automorfismo infinitesimal de $\mathbb{R}^n_G$ se anulam *em todo ponto*. Esta observação motiva a próxima definição.

Definição 2.3.8. Uma G-estrutura $\pi : B_G \to M$ é chamada *de tipo finito* se $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$, para algum k natural. Neste caso, o menor k tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ será chamado de *ordem* da G-estrutura.

Observe que as definições de tipo finito e ordem para uma G-estrutura dependem apenas do grupo $G \subseteq GL(n)$, sendo portanto puramente algébricas. Vejamos alguns exemplos de prolongamentos.

Proposição 2.3.9. *Toda $O(n,\nu)$-estrutura é de tipo finito e ordem 1, para $0 \leq \nu \leq n$.*

Demonstração. Seja $T \in \mathfrak{o}(n,\nu)^{(1)}$. Podemos pensar (cf. Observação 2.3.3) em T como uma aplicação bilinear simétrica $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que para qualquer $u \in \mathbb{R}^n$, a aplicação

$$\begin{aligned} T_u : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto T(u,v) \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

pertence a $\mathfrak{o}(n,\nu)$, ou seja, é anti-simétrica em relação ao produto escalar $\langle\ ,\ \rangle_\nu$ de $\mathbb{R}^n$ (conforme 2.1.2). Neste caso, dados $u,v,w \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} &\langle T(u,v),w\rangle_\nu = \langle T(v,u),w\rangle_\nu = \langle T_v(u),w\rangle_\nu = -\langle u,T_v(w)\rangle_\nu = -\langle u,T_w(v)\rangle_\nu = \\ &\langle T_w(u),v\rangle_\nu = \langle T_u(w),v\rangle_\nu = -\langle w,T_u(v)\rangle_\nu = -\langle w,T(u,v)\rangle_\nu = -\langle T(u,v),w\rangle_\nu \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

e portanto, como w é arbitrário, $T(u,v) = 0$ para quaisquer $u,v \in \mathbb{R}^n$. ■

O *grupo conforme linear $CO(n) \subseteq GL(n)$* consiste das aplicações lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para as quais existe $\lambda_T \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle T(u),T(v)\rangle = \lambda_T\langle u,v\rangle, \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3.12}$$

Segue de 2.3.12, fazendo $u = v$, que deve-se ter $\lambda_T > 0$. Para $\lambda_T = 1$, temos o grupo ortogonal, de modo que $O(n) \subseteq CO(n)$. Esta inclusão é estrita.

Proposição 2.3.10. *O grupo conforme linear $CO(n)$ é isomorfo a $\mathbb{R}_+ \times O(n)$. Em particular, $CO(n)$ é não-compacto para todo n.*

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} \phi : CO(n) &\to \mathbb{R}_+ \times O(n) \\ T &\mapsto \left(\lambda_T, \frac{T}{\sqrt{\lambda_T}}\right). \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

É fácil ver que ϕ está bem definida, e é um monomorfismo de grupos. A sobrejetividade segue de maneira igualmente trivial, observando que o produto de uma matriz ortogonal por um escalar positivo sempre produz um operador T que satisfaz 2.3.12. ■

A proposição 2.3.10 nos diz que $dim(CO(n)) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, e também que a álgebra de Lie $\mathfrak{co}(n)$ é isomorfa a $\mathbb{R} \times \mathfrak{o}(n)$. Identificando $\mathbb{R}$ com o espaço de matrizes $\{\mu I\ :\ \mu \in \mathbb{R}\}$, podemos descrever $\mathfrak{co}(n)$ como sendo o conjunto de todas as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ para as quais existe $\lambda_A \in \mathbb{R}$ tal que

$$A^t + A = \lambda_A I. \tag{2.3.14}$$

Esta descrição será usada para calcularmos os prolongamentos de $\mathfrak{co}(n)$.

Proposição 2.3.11. *O prolongamento $\mathfrak{co}(n)^{(1)}$ é canonicamente isomorfo a $(\mathbb{R}^n)^*$.*

Demonstração. Seja $T \in \mathfrak{co}(n)^{(1)}$. Dado $u \in \mathbb{R}^n$, temos $T(u) \in \mathfrak{co}(n)$, o que implica a existência de $\lambda_{T(u)} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle T(u)v, w\rangle + \langle v, T(u)w\rangle = \lambda_{T(u)}\langle v, w\rangle, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Note que a aplicação $\lambda_T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que associa a cada $u \in \mathbb{R}^n$ a constante $\lambda_{T(u)}$, é linear: se $u, u' \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
&\lambda_{T(u+\alpha u')}\langle v, w\rangle = \langle T(u + \alpha u')v, w\rangle + \langle v, T(u + \alpha u')w\rangle = \\
&\langle T(u)v, w\rangle + \alpha\langle T(u')v, w\rangle + \langle v, T(u)w\rangle + \alpha\langle v, T(u')w\rangle = \\
&\lambda_{T(u)}\langle v, w\rangle + \alpha\lambda_{T(u')}\langle v, w\rangle = \left(\lambda_{T(u)} + \alpha\lambda_{T(u')}\right)\langle v, w\rangle, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

donde $\lambda_T \in (\mathbb{R}^n)^*$. Afirmamos agora que a aplicação

$$\begin{aligned}
\phi : \mathfrak{co}(n)^{(1)} &\to (\mathbb{R}^n)^* \\
T &\mapsto \frac{\lambda_T}{2}
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

é um isomorfismo linear. De fato, a linearidade de ϕ é de fácil verificação. Quanto à injetividade, observe que se $2\phi(T) = \lambda_T = 0$, então a equação 2.3.14 mostra que $T \in \mathfrak{o}(n)^{(1)}$, e portanto $T = 0$ pela proposição 2.3.9. Para mostrar que ϕ é sobrejetiva, pensamos em $(\mathbb{R}^n)^*$ como o conjunto dos funcionais lineares da forma $u^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $u^*(v) = \langle u, v\rangle$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$. Assim, considere a aplicação

$$\begin{aligned}
\psi : (\mathbb{R}^n)^* &\to \mathfrak{co}(n)^{(1)} \\
u^* &\mapsto T_{u^*}
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

sendo que $T_{u^*}(v, w) = \langle u, v\rangle w + \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$. A simetria de T_{u^*} é evidente da definição. Dados $v, w, z \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}
&\langle T_{u^*}(v, w), z\rangle + \langle w, T_{u^*}(v, z)\rangle = \\
&\Big\langle \langle u, v\rangle w + \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u,\ z\Big\rangle + \Big\langle w,\ \langle u, v\rangle z + \langle u, z\rangle v - \langle v, z\rangle u\Big\rangle = \\
&2\langle u, v\rangle\langle w, z\rangle = 2u^*(v)\langle w, z\rangle,
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

o que mostra que $(T_{u^*})_v \in \mathfrak{co}(n)$, e portanto que $T_{u^*} \in \mathfrak{co}(n)^{(1)}$. Dado $u^* \in (\mathbb{R}^n)^*$, temos

$$\phi\left(\psi(u^*)\right) = \phi(T_{u^*}) = \frac{\lambda_{T_{u^*}}}{2} = u^*,$$

por 2.3.18. Com isso, provamos que ϕ admite uma inversa à direita, e portanto é sobrejetiva. ■

Proposição 2.3.12. *Para $n \geq 3$, toda $CO(n)$-estrutura é de tipo finito e ordem* 2.

Demonstração. A fim de mostrar que $\mathfrak{co}(n)^{(2)} = \{0\}$, note que dada $T \in \mathfrak{co}(n)^{(2)}$, temos $T(u, v) \in \mathfrak{co}(n)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$. Isto significa que

$$\langle T(u, v)w, z\rangle + \langle w, T(u, v)z\rangle = \Lambda_{T(u,v)}\langle w, z\rangle, \quad \forall w, z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3.19}$$

Da mesma forma como fizemos anteriormente, é possível verificar que $\Lambda_T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma aplicação bilinear. A simetria de T nas duas primeiras variáveis implica que Λ_T é também simétrica. Novamente, se Λ_T for identicamente zero, 2.3.19 implica $T \in \mathfrak{o}(n)^{(2)} = \{0\}$. Pela simetria de Λ_T, basta então mostrar que $\Lambda_T(u,u) = 0$ para qualquer $u \in \mathbb{R}^n$, e o resultado seguirá da fórmula de polarização. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ ortonormais. Então,

$$\Lambda_{T(u,u)} = \Lambda_{T(u,u)}\langle v, v\rangle = 2\langle T(u,u)v, v\rangle = 2\langle T(u,v)u, v\rangle,$$

pela simetria de T nas duas últimas variáveis. Como $T(u,v) \in \mathfrak{co}(n)$,

$$2\langle T(u,v)u, v\rangle = 2\Lambda_{T(u,v)}\langle u, v\rangle - 2\langle u, T(u,v)v\rangle = -2\langle u, T(u,v)v\rangle.$$

Usando agora a simetria de T na primeira com a terceira variável, obtemos

$$-2\langle u, T(u,v)v\rangle = -2\langle u, T(v,v)u\rangle = \Lambda_{T(v,v)}\langle u, u\rangle = -\Lambda_{T(v,v)}.$$

Assim, sendo $n \geq 3$, dado qualquer $u \in \mathbb{R}^n$ diferente de zero, podemos normalizar u e escolher mais dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ tais que $\{u, v, w\}$ seja um conjunto ortonormal. Daí,

$$\Lambda_T(u,u) = -\Lambda_T(v,v) = \Lambda_T(w,w) = -\Lambda_T(u,u),$$

o que implica $\Lambda_T \equiv 0$. ■

2.4 Prolongamentos de uma G-estrutura

Como vimos nos exemplos da seção anterior, algumas G-estruturas naturais (correspondentes, por exemplo, a métricas Riemannianas ou estruturas conformes) são de tipo finito, e portanto os prolongamentos sucessivos da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ diminuem de dimensão, até se tornarem zero.

Veremos a seguir que é possível construir um novo grupo $G^{(k)}$ associado a cada prolongamento $\mathfrak{g}^{(k)}$ de $\mathfrak{g}$, com a propriedade de que se $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$, então $G^{(k)} = \{1\}$. Para cada grupo $G^{(k)}$, construiremos também uma $G^{(k)}$-estrutura e obteremos uma relação entre os automorfismos desta $G^{(k)}$-estrutura com aqueles da G-estrutura original. Em particular, para as G-estruturas de tipo finito, seus automorfismos formarão um subgrupo fechado dos automorfismos de uma 1-estrutura, ou seja, um paralelismo.

Definição 2.4.1. Seja $G \subseteq GL(n)$ um grupo de Lie. Para cada $T \in \mathfrak{g}^{(1)}$, considere a transformação linear

$$\begin{aligned} \alpha_T : \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} &\to \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \\ (v, X) &\mapsto (v, T_v + X). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Definimos $G^{(1)} := \{\alpha_T : T \in \mathfrak{g}^{(1)}\}$. Se identificarmos $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^m$, onde $m = \dim(\mathfrak{g})$, então $G^{(1)}$ pode ser visto como um subgrupo de Lie de $GL(n+m)$, com a operação usual de composição.

Neste caso, definimos indutivamente $G^{(k)} := \left(G^{(k-1)}\right)^{(1)}$, para todo $k \geq 2$.

Proposição 2.4.2. *Seja $\mathcal{G}^{(1)}$ a álgebra de Lie do grupo $G^{(1)}$. Então, $\mathcal{G}^{(1)}$ consiste das aplicações*

$$\begin{aligned} A_T : \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} &\to \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \\ (v, X) &\mapsto (0, T_v), \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

para $T \in \mathfrak{g}^{(1)}$.

Demonstração. Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to G^{(1)}$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = I$, onde $I : \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}$ é a identidade. Pela definição 2.4.1, podemos escrever

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} I_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ T(t) & I_{\mathfrak{g}} \end{bmatrix},$$

onde $I_{\mathbb{R}^n}$ e $I_{\mathfrak{g}}$ são os operadores identidade em $\mathbb{R}^n$ e $\mathfrak{g}$, respectivamente, e $T : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathfrak{g}^{(1)}$ é uma curva suave tal que $T(0) = 0$. Derivando esta expressão, obtemos o resultado desejado, uma vez que $T'(0) \in \mathfrak{g}^{(1)}$. ■

Lembramos, conforme visto na seção 2.2, que cada G-estrutura B_G possui uma função estrutural de primeira ordem

$$c : B_G \to \frac{Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))}. \tag{2.4.3}$$

Escolha um subespaço $\mathcal{H} \subseteq Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{H} \oplus \mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})) \simeq Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Feito isso, temos a aplicação

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{H} &\to \frac{Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))} \\ T &\mapsto [T], \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

sendo que $[T]$ denota a classe de T. ξ é claramente um isomorfismo linear. Isto nos permite trazer a função estrutural de primeira ordem para $Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, definindo a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{c} : B_G &\to \mathcal{H} \subseteq Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \\ p &\mapsto \xi^{-1}(c(p)). \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Assim, $\bar{c}(p)$ corresponde ao único elemento da classe de equivalência $c(p)$ que pertence a $\mathcal{H}$. Lembrando que $c(p)$ consiste de todas as aplicações $c_H \in Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ (vide 2.2.1), concluímos que existe $H \in HOR(T_p(B_G))$ tal que $\bar{c}(p) = c_H$. A relação 2.2.3, provada na seção 2.1, estabelece que

$$c_{H_2}(u \wedge v) - c_{H_1}(u \wedge v) = \mathcal{A}(S_{H_2,H_1})(u \wedge v), \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}^n,$$

quaisquer que sejam $H_1, H_2 \in HOR(T_p(B_G))$. Esta fórmula sugere que é possível existir vários complementos horizontais H satisfazendo $\bar{c}(p) = c_H$. Neste caso, se $c_{H_1} = \bar{c}(p) = c_{H_2}$, então $\mathcal{A}(S_{H_2,H_1}) = 0$, ou seja, $S_{H_2,H_1} \in \mathfrak{g}^{(1)}$.

Há pelo menos um exemplo importante no qual temos unicidade do complemento horizontal H satisfazendo $\bar{c}(p) = c_H$.

Exemplo 2.4.3. *($O(n)$-estruturas, revisitado.)* Seja $\pi : B_O \to M$ uma $O(n)$-estrutura. Sabemos que $\mathcal{A}(\hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{o}(n))) = Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, pela proposição 2.3.9. Assim, o único subespaço $\mathcal{H} \subseteq Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ que satisfaz

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})) \simeq Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$$

é o espaço vetorial nulo, $\mathcal{H} = \{0\}$. Se, dado $p \in B_O$, tivermos $H_1, H_2 \in HOR(T_p(B_G))$ tais que $c_{H_1} = \bar{c}(p) = c_{H_2}$, então $S_{H_2,H_1} \in \mathfrak{o}(n)^{(1)} = \{0\}$. Portanto, a proposição 2.2.2 diz que $H_2 = H_1$. Note que não foi preciso fazer escolha alguma neste caso. Obtemos assim uma família natural de complementos horizontais em cada $T_p(B_G)$. A associação $p \xrightarrow{\Gamma} H_p$ é, de fato, uma conexão principal.

Teorema 2.4.4. *Seja $\pi : B_G \to M$ uma G-estrutura. Para cada subespaço $\mathcal{H} \subseteq Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})) \oplus \mathcal{H} = Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, existe uma $G^{(1)}$-estrutura $\pi^1 : B_G^{(1)} \to B_G$, chamada* primeiro prolongamento *de B_G.*

Demonstração. Seja $p \in B_G$. Fixe um isomorfismo $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathfrak{g}$, $m = \dim(\mathfrak{g})$. Identificamos, de uma vez por todas, $\mathcal{V}_p \simeq \mathfrak{g}$, $\forall p \in B_G$, conforme o isomorfismo dado em 1.1.9. Definimos a fibra sobre p como sendo

$$\begin{aligned} \left(B_G^{(1)}\right)_p := \Big\{ L : L \in Iso\left(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, T_p(B_G)\right),\ L(e_i) = \phi(e_i),\ i = 1, \dots, m, \\ L(\{0\} \times \mathbb{R}^n) = H, \text{ tal que } c_H = \bar{c}(p). \Big\} \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

O espaço total obviamente é

$$B_G^{(1)} := \bigcup_{p \in B_G} \left(B_G^{(1)}\right)_p .$$

A projeção $\pi^1 : B_G^{(1)} \to B_G$ é dada por $\pi^1(L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to T_p(B_G)) = p$. Se $L_1, L_2 \in \left(B_G^{(1)}\right)_p$, então $L_i(\{0\} \times \mathbb{R}^n) = H_i$, $i = 1, 2$. Portanto,

$$\begin{aligned} &\left(L_1^{-1} \circ L_2\right)(e_i) = L_1^{-1}(\phi(e_i)) = e_i, \quad i = 1, \dots, m; \text{ e} \\ &L_2(v) - L_1(v) = S_{H_1,H_2}(v) \Rightarrow L_2(v) = S_{H_1,H_2}(v) + L_1(v), \quad \forall v \in \{0\} \times \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

onde $S_{H_1,*}$ é a aplicação definida em 2.2.2. Como $c_{H_1} = \bar{c}(p) = c_{H_2}$, a equação 2.2.3 mostra que $\mathcal{A}(S_{H_1,H_2}) = 0$, ou seja, $S_{H_1,H_2} \in \mathfrak{g}^{(1)}$, donde concluímos que o grupo estrutural de $B_G^{(1)}$ é realmente $G^{(1)}$. Resta apenas construir um atlas de seções locais. Para isto, considere $s : U \subseteq M \to B_G$ uma seção local de B_G. Defina

$$h(x) := ds_x \circ s(x) : \mathbb{R}^n \to T_{s(x)}B_G. \tag{2.4.8}$$

Temos $\left(\theta_{s(x)} \circ h(x)\right)(v) = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, de modo que as imagens

$$H_x := h(x)(\mathbb{R}^n) \subseteq T_{s(x)}B_G$$

são complementos horizontais em $T_{s(x)}B_G$. Gostaríamos de ter $c_{H_x} = \bar{c}(p)$; ou, equivalentemente, $c_{H_x} \in \mathcal{H}$. Para cada $A \in Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$, o subespaço

$$H_x + A := (h(x) + A)(\mathbb{R}^n) \subseteq T_s(x)B_G$$

é um complemento horizontal em $s(x)$. Se $\pi_2 : \mathcal{H} \oplus \mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})) \to \mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g}))$ é a projeção natural, então teremos $c_{H_x+A} \in \mathcal{H}$ se e somente se $\pi_2(c_{H_x+A}) = 0$. Basta então encontrar um A conveniente. A aplicação de antisimetrização, $\mathcal{A}$, é sobrejetiva. Logo, é possível escolher uma inversa de $\mathcal{A}$ à direita, digamos, $\mathcal{B} : \mathcal{A}(Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})) \to Hom(\mathbb{R}^n; \mathfrak{g})$. Defina

$$A := \mathcal{B}(\pi_2 \circ c_{H_x}).$$

Usando a equação 2.2.3, temos

$$c_{H_x+A} - c_{H_x} = \mathcal{A}(S_{H_x+A,\, H_x}) = \mathcal{A}(-A) = -\mathcal{A}(\mathcal{B}(\pi_2 \circ c_{H_x})) = -\pi_2 \circ c_{H_x},$$

e portanto $c_{H_x+A} = c_{H_x} - \pi_2 \circ c_{H_x}$, ou seja, $c_{H_x+A} \in \mathcal{H}$. Finalmente, uma seção local de $B_G^{(1)}$ é obtida pondo

$$\begin{aligned} s^1 : \pi^{-1}(U) \subseteq B_G &\to \left(\pi^1\right)^{-1}(U) \subseteq B_G^{(1)} \\ p &\mapsto L_p, \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

onde $L_p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to T_p(B_G)$ é dada por

$$\begin{aligned} &L_p(e_i) = \phi(e_i), \quad i = 1, \ldots, m; \\ &L_p(v) = (h(\pi(p)) + A)(v), \quad \forall v \in \{0\} \times \mathbb{R}^n. \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

A construção feita no teorema 2.4.4 pode ser estendida indutivamente: a partir de uma $G^{(1)}$-estrutura, $B_G^{(1)}$, podemos fazer um prolongamento e obter uma $G^{(2)}$-estrutura, $B_G^{(2)}$, e assim por diante. Vamos agora determinar qual a relação entre os automorfismos de uma G-estrutura e os automorfismos do seu primeiro prolongamento.

Seja $\pi : B_G \to M$ uma G-estrutura e $\pi^1 : B_G^{(1)} \to B_G$ seu primeiro prolongamento. Denotaremos por $Aut_G(M)$ os automorfismos de B_G, ou seja, os difeomorfismos $f : M \to M$ tais que $f_\star(B_G) = B_G$ (notação cf. 2.1.3). Diremos que uma aplicação $\varphi : B_G \to B_G$ *preserva fibras* quando, para qualquer $x \in M$, a imagem $\varphi(\pi^{-1}(x))$ é novamente uma fibra de B_G (não necessariamente a mesma). Como já observamos, $f_\star$ tem essa propriedade, para qualquer $f \in Dif(M)$. Contudo, nem todo difeomorfismo de B_G que preserva fibras é da forma $f_\star$, para alguma $f \in Dif(M)$. Isso é verdade se impusermos uma condição adicional.

Proposição 2.4.5. *Seja $\varphi : B_G \to B_G$ um difeomorfismo que preserva fibras. Defina*

$$\begin{aligned} f^\varphi : M &\to M \\ x &\mapsto \pi \circ \varphi(p), \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

onde p é um ponto escolhido em $\pi^{-1}(x)$. Como φ preserva fibras, f^φ está bem definida. Se tivermos $\varphi^*\theta = \theta$, então $\varphi = (f^\varphi)_\star$.

Demonstração. Seja $U \subseteq M$ um aberto tal que existe uma seção local $s : U \to \pi^{-1}(U)$. Assim, temos

$$f(x) = \pi \circ \varphi \circ s(x), \quad \forall x \in U,$$

e portanto f é diferenciável. Seja ψ a inversa de φ, e f^{ψ} definida como no enunciado da proposição. Então, f^{φ} e f^{ψ} são inversas uma da outra. De fato, dado $y \in M$,

$$f^{\varphi} \circ f^{\psi}(y) = f^{\varphi}\left(\pi \circ \psi(p)\right),$$

sendo que $\pi(p) = y$. Para calcular f^{φ} em $\pi \circ \psi(p)$, devemos escolher algum $q \in B_G$ com $\pi(q) = \pi \circ \psi(p)$, por definição. Podemos então tomar $q = \psi(p)$. Logo,

$$f^{\varphi}\left(\pi \circ \psi(p)\right) = \pi \circ \varphi(\psi(p)) = \pi(p) = y.$$

Provamos assim que f^{φ} é um difeomorfismo. Agora, fixe $x \in U$ e tome $v \in T_xM$. Usando a equação $\varphi^*\theta = \theta$ para $ds_x(v)$, temos

$$\begin{aligned}
\theta_{\varphi(s(x))}\left(d\varphi_{s(x)}(ds_x(v))\right) &= \theta_{s(x)}(ds_x(v)) \\
(\varphi(s(x)))^{-1} \circ d\pi_{\varphi(s(x))} \circ d\varphi_{s(x)}\left(ds_x(v)\right) &= (s(x))^{-1} \circ d\pi_{s(x)}(ds_x(v)) \\
(\varphi(s(x)))^{-1} \circ d\left(\pi \circ \varphi \circ s\right)_x(v) &= (s(x))^{-1} \circ d\left(\pi \circ s\right)_x(v) \\
(\varphi(s(x)))^{-1} \circ df_x(v) &= (s(x))^{-1}(v) \\
s(x) \circ (\varphi(s(x)))^{-1} \circ df_x(v) &= v,
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

donde concluímos que

$$\varphi(s(x)) = df_x \circ s(x) = \left(f^{\varphi}\right)_\star(s(x)), \tag{2.4.13}$$

pois df_x e $s(x)$ são isomorfismos. ■

A proposição 2.4.5 juntamente com a demonstração do teorema 2.2.8 estabelecem que a imagem do homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned}
\star : Aut_G(M) &\to Dif(B_G) \\
f &\mapsto f_\star
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

é precisamente o conjunto

$$\star(Aut_G(M)) = \left\{ \varphi \in Dif(B_G) \;:\; \varphi \text{ preserva fibras e } \varphi^*\theta = \theta. \right\}$$

É fácil ver que $\star$ é também injetiva, de modo que podemos identificar $\star(Aut_G(M))$ com $Aut_G(M)$.

Teorema 2.4.6. *$\star(Aut_G(M))$ é um subgrupo fechado de $Aut_{G^{(1)}}(B_G)$ (os automorfismos do primeiro prolongamento de B_G), na topologia da convergência C^k-uniforme sobre compactos, para qualquer $k \geq 0$.*

Demonstração. Seja $f \in Aut_G(M)$. A demonstração do teorema 2.2.8 prova que, dado $H \in HOR(T_p(B_G))$, o subespaço $\widetilde{H} := d(f_\star)_p(H)$ pertence a $HOR(T_{f(p)}(B_G))$, e que $c_H = c_{\widetilde{H}}$. Em particular, $c_H \in \mathcal{H}$ se e somente se $c_{\widetilde{H}}$. Vamos mostrar que

$$\begin{aligned}
(f_\star)_\star : B_G^{(1)} &\to L(B_G) \\
z &\mapsto d(f_\star)_{\pi^1(z)} \circ z,
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

é um automorfismo da $G^{(1)}$-estrutura, ou seja, $(f_\star)_\star(B_G^{(1)}) = B_G^{(1)}$. Por uma questão de clareza, vamos deixar de identificar por um momento $\mathfrak{g}$ com $\mathcal{V}_p$, $p \in B_G$. Tal isomorfismo será escrito explicitamente, usando $d(\beta_p)_1 : \mathfrak{g} \to \mathcal{V}_p$. Sejam $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathfrak{g}$ o isomorfismo fixado na construção de $B_G^{(1)}$ (cf. teorema 2.4.4), $z \in B_G^{(1)}$ com $\pi^1(z) = p \in B_G$. Assim, dado $e_i \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$, $i = 1, \ldots, m$, temos

$$d(f_\star)_p \circ z(e_i) = d(f_\star)_p \circ d(\beta_p)_1(\phi(e_i)) = d(f_\star \circ \beta_p)_1(\phi(e_i)) = d(\beta_{f_\star(p)})_1(\phi(e_i)), \quad (2.4.16)$$

o que mostra que $d(f_\star)_p \circ z$ age como um elemento de $B_G^{(1)}$ nos vetores de $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. Como $z \in B_G^{(1)}$, temos $z(\{0\} \times \mathbb{R}^n) = H_1$ com $c_{H_1} \in \mathcal{H}$. Logo,

$$\Big(d(f_\star)_p \circ z\Big)(\{0\} \times \mathbb{R}^n) = d(f_\star)_p(H_1) = H_2, \quad (2.4.17)$$

e, como já observamos, H_2 é horizontal e satisfaz $c_{H_2} \in \mathcal{H}$. Portanto $(f_\star)_\star(z) \in B_G^{(1)}$. Como todo elemento de $Aut_{G^{(1)}}(B_G)$ preserva θ, temos

$$\star(Aut_G(M)) = \Big\{ \varphi \in Aut_{G^{(1)}}(B_G) \ : \ \varphi \text{ preserva fibras.} \Big\} \quad (2.4.18)$$

A condição de preservar fibras é obviamente fechada na topologia da convergência C^k-uniforme sobre compactos, donde segue o resultado desejado. ■

O teorema 2.4.6 é um passo crucial neste trabalho. Um argumento simples de indução mostra agora que, dada uma G-estrutura $\pi : B_G \to M$ de *tipo finito*, seu grupo de automorfismos $Aut_G(M)$ pode ser visto, após um número finito de prolongamentos, como um subgrupo fechado de $Aut_{G^{(k)}}(B_G^{(k-1)})$, com $G^{(k)} = \{1\}$. Portanto, qualquer grupo de automorfismos de uma G-estrutura de tipo finito é um subgrupo fechado do grupo de automorfismos de um paralelismo. Invocamos agora um resultado clássico da teoria de grupos de Lie.

Teorema 2.4.7. *Seja H um grupo de Lie e $F \subseteq H$ um subconjunto fechado de H que é, algebricamente, um subgrupo de H. Então, F é um subgrupo de Lie mergulhado em H.* □

A demonstração do teorema 2.4.7 pode ser consultada, por exemplo, na referência [5].

2.5 Paralelismos

Nesta seção, provaremos que o grupo de automorfismos de um paralelismo sobre uma variedade conexa é um grupo de Lie, com a topologia compacto-aberta. A restrição de conexidade será removida posteriormente, pois em geral invocaremos o teorema abaixo quando M é o espaço total de alguma G-estrutura genérica, com G não-conexo, caso em que não temos conexidade de M.

Teorema 2.5.1. *Seja M uma variedade conexa munida de um paralelismo e $G \subseteq Dif(M)$ seu grupo de automorfismos. Considere G com a topologia compacto-aberta. Dado $p \in M$, a aplicação $\beta_p : G \to M$ dada por $\beta_p(g) = g(p)$ é um homeomorfismo sobre sua imagem (esta última com a topologia induzida de M). Além disso, $\beta_p(G)$ é uma subvariedade fechada de M e, quando munida da estrutura diferenciável induzida por M, torna-se um grupo de Lie.*

A demonstração deste teorema será dividida em lemas. Antes, porém, vamos introduzir algumas notações.
Denotaremos por $V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{X}(M)$ o paralelismo, ou seja, os campos vetoriais suaves tais que o conjunto $\{V_1(x), \ldots, V_n(x)\}$ é uma base de T_xM, para cada $x \in M$. Cada $v \in \mathbb{R}^n$ induz um campo vetorial em M; se $v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ na base canônica, definimos

$$\begin{aligned} X_v : M &\to TM \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i(x). \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Escreveremos $\exp(v)$ para denotar o fluxo do campo X_v no tempo 1, que de modo geral só está definido para v suficientemente pequeno. Assim, $\exp(v)$ é um difeomorfismo entre abertos da variedade M. Por definição, dado $t > 0$ e $x \in M$, $\exp(tv)(x) = \gamma_{tX_v}(1)$, onde γ_{tX_v} é a curva integral do campo tX_v passando por x. Se γ_{X_v} está definida em $(-\delta, \delta)$, então γ_{tX_v} está definida em $(-\frac{\delta}{t}, \frac{\delta}{t})$. Em particular, temos $1 \in (-\frac{\delta}{t}, \frac{\delta}{t})$ se e somente se $t \in (-\delta, \delta)$. Portanto, $\gamma_{tX_v}(1)$ está definida se e somente se $\gamma_{X_v}(t)$ está definida, e em caso afirmativo temos $\gamma_{tX_v}(1) = \gamma_{X_v}(t)$. Pelo teorema de existência de fluxos globais, dado $x \in M$ existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ contendo 0 onde a aplicação

$$\begin{aligned} \exp_x : U &\to M \\ v &\mapsto \exp(v)(x) \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

está bem definida. Vamos agora calcular sua derivada em 0. Dado $v \in \mathbb{R}^n$,

$$d(\exp_x)_0(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\exp_x(tv)\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\gamma_{tX_v}(1)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\gamma_{X_v}(t)) = X_v(x). \tag{2.5.3}$$

$X_v(x) \neq 0$ se $v \neq 0$. Portanto, a aplicação $d(\exp_x)_0 : \mathbb{R}^n \to T_xM$ é um isomorfismo linear. O teorema da função inversa garante então que $\exp_x$ é um difeomorfismo de um aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo 0 sobre um aberto de M contendo x.

Ao longo desta demonstração, vamos denotar por $U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ o aberto contendo 0 tal que $\exp_x : U_x \to M$ é um difeomorfismo sobre sua imagem, que contém x.

Note que $\exp(v)$ comuta com a ação dos elementos de G. Com efeito, dados $x \in M$, $v \in \mathbb{R}^n$ e $g \in G$, sejam $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ e $\beta : J \subseteq \mathbb{R} \to M$ curvas integrais maximais de X_v tais que $\alpha(0) = x$, $\beta(0) = g(x)$. Defina $\gamma = g \circ \alpha$. Então $\gamma(0) = g(x)$, e

$$\gamma'(t) = (g \circ \alpha)'(t) = dg_x\left(X_v(\alpha(t))\right) = X_v(g(\alpha(t))) = X_v(\gamma(t)), \ \ \forall t \in J,$$

já que g preserva o campo X_v, por construção. Pela unicidade das curvas integrais maximais, temos $\gamma = \beta$ e $I = J$. Logo, β está definida em 1 se e somente se γ está, e neste caso,

$$\left(g \circ \exp(v)\right)(x) = g(\alpha(1)) = \gamma(1) = \beta(1) = \left(\exp(v) \circ g\right)(x). \tag{2.5.4}$$

Defina a seguinte relação em M:

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists\, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n) \ : \ y = \exp(v_1) \circ \cdots \circ \exp(v_k)(x). \tag{2.5.5}$$

Que a aplicação $\exp(v_1)\circ\cdots\circ\exp(v_k)$ esteja bem definida faz parte da definição desta relação, ou seja, a afim de que $x \sim y$, é necessário em particular que a composição em 2.5.5 esteja bem definida. A reflexividade desta relação é imediata, visto que $\exp(0)$ é a função identidade de M. Ela também é simétrica, pois se

$$y = \exp(v_1) \circ \cdots \circ \exp(v_k)(x),$$

como cada $\exp(v_i)$ é um difeomorfismo entre abertos de M, podemos invertê-los, obtendo

$$\exp(-v_k) \circ \cdots \circ \exp(-v_1)(y) = x.$$

A transitividade de $\sim$ é também de fácil verificação. Assim, $\sim$ é uma relação de equivalência em M. Dado $x \in M$, a classe de equivalência $[x]$ é sempre aberta, pois se $y \in [x]$, $\exp_y(U_y)$ é evidentemente uma vizinhança de y contida em $[x]$. Como o conjunto das classes de equivalência é uma partição de M, o complementar de $[x]$ é uma união de classes de equivalência, que são todas abertas, pelo mesmo argumento, e portanto $[x]$ é também fechada. A conexidade de M implica $[x] = M$. Como consequência disto, podemos estabelecer alguns lemas.

Lema 2.5.2. *A ação de G em M é livre. Em particular, β_p é injetiva.*

Demonstração. Seja $g \in G$. Suponha que existe $x \in M$ tal que $g(x) = x$. Dado qualquer outro $y \in M$, como $x \sim y$, existem $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tais que $y = \exp(v_1) \circ \cdots \circ \exp(v_k)(x)$. Então,

$$\begin{aligned} g(y) &= g \circ \exp(v_1) \circ \exp(v_2) \circ \cdots \circ \exp(v_k)(x) = \\ &= \exp(v_1) \circ g \circ \exp(v_2) \circ \ldots \circ \exp(v_k)(x) = \cdots = \\ &= \exp(v_1) \circ \ldots \circ \exp(v_k) \circ g(x) = \\ &= \exp(v_1) \circ \ldots \circ \exp(v_k) \circ x = y, \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

pois g comuta com $\exp(v_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Logo g é a identidade. ∎

Lema 2.5.3. *Seja $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em G. Se existir $g \in G$ e $x \in M$ tais que $g_i(x) \to g(x)$, então para todo $y \in M$, $g_i(y) \to g(y)$.*

Demonstração. Novamente, dado $y \in M$, existem $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tais que $y = \exp(v_1) \circ \cdots \circ \exp(v_k)(x)$. Temos

$$\begin{aligned} g_i(y) &= g_i \circ \exp(v_1) \circ \exp(v_2) \circ \cdots \circ \exp(v_k)(x) = \cdots = \\ &= \exp(v_1) \circ \ldots \circ \exp(v_k) \circ g_i(x) \to \exp(v_1) \circ \ldots \circ \exp(v_k) \circ x = y. \ \blacksquare \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Para o próximo lema, vamos escolher uma função distância

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_+$$

em M, compatível com a topologia de M, que é metrizável. Lembramos que a noção de convergência uniforme sobre compactos, neste caso, não depende da função d escolhida, desde que d seja compatível com a topologia de M.

Lema 2.5.4. *Seja $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em G. Se $g_i \to g \in G$ pontualmente, então $g_i \to g$ na topologia compacto-aberta.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que $g_i \to g$ uniformemente em uma vizinhança de um ponto $x \in M$ arbitrário. Temos $g_i(x) \to g(x)$ pela convergência pontual. Escolha um compacto $K \subseteq M$ de interior não vazio contendo $g(x)$. Para cada $y \in K$, $\exp_y(U_y)$ é uma vizinhança aberta de y. Sendo K compacto, existe um número finito de pontos $y_1, \dots, y_m \in K$ tais que

$$K \subseteq \exp_{y_1}(U_{y_1}) \cup \cdots \cup \exp_{y_m}(U_{y_m}).$$

Defina $U := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_m}$. Então, U é ainda um aberto contendo 0, e $\exp(v)(y)$ está definida, para todo $v \in U$ e todo $y \in K$. Escolha agora uma bola fechada $B \subseteq U$ contendo 0, e considere a restrição:

$$\begin{aligned} \exp : B \times K &\to M \\ (v, y) &\mapsto \exp(v)(y). \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Como exp é contínua e o domínio $B \times K$ é compacto, exp é uniformemente contínua. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d\left((v, y), (u, z)\right) < \delta \Rightarrow d\left(\exp(v)(y), \exp(u)(z)\right) < \epsilon.$$

Escolha $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $i > N_0$, $d(g_i(x), g(x)) < \delta$. Dado $y \in \exp_{g(x)}(int(B))$, $y = \exp(v)(g(x))$ para algum $v \in int(B)$. Se $i > N_0$, temos $d((v, g_i(x)), (v, g(x))) < \delta$, e então

$$d(g_i(y), g(y)) = d\Big(g_i \exp(v)(x)), g(\exp(v)(x))\Big) = d\Big(\exp(v)(g_i(x)), \exp(v)(g(x))\Big) < \epsilon.$$

Isto prova que $g_i \to g$ uniformemente na vizinhança $\exp_{g(x)}(int(B))$.
Agora, dado um compacto $D \subseteq M$ qualquer, cada $x \in D$ possui uma vizinhança $W_x \subseteq M$ na qual a convergência $g_i \to g$ é uniforme. Extraia uma subcobertura finita $W_{x_1}, \dots, W_{x_k}$ de D. Dado $\epsilon > 0$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, seja $N_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall y \in W_{x_j}, \;\; i > N_j \Rightarrow d(g_i(y), g(y)) < \epsilon.$$

Tomando $N = \text{máx}\{N_1, \dots, N_k\}$, temos que

$$\forall y \in D, \;\; i > N \Rightarrow d(g_i(y), g(y)) < \epsilon. \;\; \blacksquare$$

Para provar o lema 2.5.8, vamos precisar de dois resultados auxiliares, que enunciamos abaixo. As demonstrações podem ser consultadas no artigo [6].

Lema 2.5.5. *Seja* $(\mathfrak{M}, d_{\mathfrak{M}})$ *um espaço métrico localmente compacto,* $\mathfrak{I}(\mathfrak{M}, d_{\mathfrak{M}})$ *o conjunto das isometrias de* $(\mathfrak{M}, d_{\mathfrak{M}})$ *e* $F \subseteq \mathfrak{I}(\mathfrak{M}, d_{\mathfrak{M}})$. *Então, o conjunto*

$$K(F) = \Big\{\, x \in \mathfrak{M} \;:\; F(x) := \{\, f(x) \;:\; f \in F \,\} \text{ é relativamente compacto.} \Big\}$$

é aberto e fechado em $\mathfrak{M}$. $\square$

Lema 2.5.6. *Seja* $(\mathfrak{M}, d_{\mathfrak{M}})$ *um espaço métrico localmente compacto e conexo. Se* $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $\mathfrak{I}(\mathfrak{M}, d_{\mathfrak{M}})$ *que converge pontualmente para* f, *então* f *é sobrejetiva.* $\square$

Também usaremos uma versão generalizada do teorema de Arzelá-Ascoli, que pode ser encontrada em [7].

Lema 2.5.7. *Sejam* $(\mathfrak{M}, d_{\mathfrak{M}})$ *e* $(\mathfrak{N}, d_{\mathfrak{N}})$ *espaços métricos. Se* $\mathfrak{M} = \cup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ *é uma união enumerável de compactos, com* $K_i \subseteq int(K_{i+1})$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$*, então um subconjunto* $F \subseteq C^0(\mathfrak{M}; \mathfrak{N})$ *é relativamente compacto se e somente se cumpre as seguintes condições:*

$$\begin{aligned} &(i)\ F \text{ é equicontínuo;} \\ &(ii)\ F(x) \text{ é relativamente compacto, } \forall x \in \mathfrak{M}. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Aqui, $C^0(\mathfrak{M}; \mathfrak{N})$ *denota o espaço das funções contínuas de* $\mathfrak{M}$ *em* $\mathfrak{N}$*, munido da topologia compacto-aberta.* □

Lema 2.5.8. *A imagem* $\beta_p(G)$ *é fechada em* M*.*

Demonstração. Em primeiro lugar, vamos definir uma métrica $\langle\ ,\ \rangle$ em M, da seguinte forma. Dados $u, v \in T_xM$, escrevemos $u = u_1X_1(x) + \cdots + u_nX_n(x)$ e $v = v_1X_1(x) + \cdots + v_nX_n(x)$, e definimos

$$\langle u, v\rangle_x := u_1v_1 + \cdots + u_nv_n. \tag{2.5.10}$$

Com respeito a esta métrica, o referencial $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é ortonormal, e portanto o grupo G se torna um subgrupo do grupo de isometrias Riemannianas de M, porque a diferencial de um difeomorfismo $f \in G$ manda bases ortonormais em bases ortonormais. Lembramos que uma métrica Riemanniana em M induz uma distância em M, dada por

$$d_M(x, y) := \inf\{\, L(\gamma)\ :\ \gamma \in \Omega(x, y)\,\},\ \ \forall x, y \in M,$$

onde $\Omega(x, y)$ denota o conjunto de todas as curvas $\gamma : [a, b] \to M$, suaves por partes, com $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$, e $L(\gamma)$ denota o comprimento Riemanniano da curva γ. Munido da função d_M, M se torna um espaço métrico. A topologia induzida por d_M coincide com a topologia de M, e portanto (M, d_M) é conexo e localmente compacto. Uma isometria Riemanniana de M preserva a métrica $\langle\ ,\ \rangle$, logo preserva também o comprimento de quaisquer curvas. Assim, segue da definição que toda função $f \in G$ é também uma isometria do espaço métrico (M, d_M), fato que será usado a seguir.

Seja $\{g_i(p)\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\beta_p(G)$, $g_i \in G$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Suponha que $g_i(p) \to q \in M$. Então, usando a notação do lema 2.5.5, se $F := \{\, g_i : i \in \mathbb{N}\,\}$, temos $F(p)$ compacto. Em particular, $F(p)$ é relativamente compacto, o que mostra que $K(F)$ é não-vazio. O lema 2.5.5 implica $K(F) = M$. Como F é uma família de isometrias de (M, d_M), F é obviamente equicontínua. Assim, podemos aplicar o lema 2.5.7 para concluir que, passando a uma subsequência se necessário, existe $g \in C^0(M; M)$ tal que $g_i \to g$ na topologia compacto-aberta. Mas então g deve ser uma isometria, porque dados $x, y \in M$, como cada g_i é isometria,

$$d_M(x, y) = \lim_{i\to\infty} d_M(g_i(x), g_i(y)) = d_M\left(\lim_{i\to\infty} g_i(x), \lim_{i\to\infty} g_i(y)\right) = d_M(g(x), g(y)).$$

Isso implica em particular que g é injetiva. O lema 2.5.6 diz que g é sobrejetiva, também. Portanto g é uma isometria de M como espaço métrico. Ainda que g fosse uma isometria de M como variedade Riemanniana, isso não garante que $g \in G$, pois G pode não ser todo o grupo de isometrias Riemannianas de M. Precisamos mostrar então que g é suave e que $g \in G$. As duas coisas seguem da seguinte observação. Dado um ponto $x \in M$, considere a aplicação $\exp_x : U_x \subseteq \mathbb{R}^n \to M$, que é um difeomorfismo sobre o aberto $W = \exp_x(U_x)$. Podemos supor, reduzindo U_x se necessário, que $\overline{W}$ e $\overline{U_x}$ são compactos, e que $\exp_x$ é um difeomorfismo entre vizinhanças um pouco maiores que contém estes compactos. Assim, temos

$$g_i \circ \exp_x(v) = g_i \circ \exp(v)(x) = \exp(v)(g_i(x)), \quad \forall v \in U_x,$$

o que implica, tomando o limite de ambos os lados,

$$g(y) = g \circ \exp_x(v) = g \circ \exp(v)(x) = \exp(v)(g(x)), \text{ onde } v = \exp_x^{-1}(y), \quad \forall y \in W. \tag{2.5.11}$$

A expressão 2.5.11 prova que $g \in G$, logo $g_i(p) \to q \equiv g(p) \in \beta_p(G)$, como queríamos. ■

O próximo passo será construir uma distribuição em M que seria, se já soubessemos que $\beta_p(G)$ é uma subvariedade, o espaço tangente a $\beta_p(G)$ em cada ponto. A seguir, mostraremos que ela é involutiva e usaremos o teorema de Fröbenius para concluir que $\beta_p(G)$ deve ser uma subvariedade integral desta distribuição. O seguinte conceito será importante nesta parte da demonstração.

Definição 2.5.9. Seja $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em M. Suponha que $x_i \to x$ e $x_i \neq x$ para i suficientemente grande. Dizemos que x_i possui uma *direção limite* quando, dada uma carta local $\varphi : U \subseteq M \to \widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, com $x \in U$ e $\varphi(x) = 0$, a sequência

$$\frac{\varphi(x_i)}{\|\varphi(x_i)\|} \in \mathbb{S}^{n-1},$$

definida para i suficientemente grande, é convergente.

Na situação da definição acima, quando $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ possui uma direção limite, ela determina um único *raio* em T_xM. Se

$$v = \lim_{i\to\infty} \frac{\varphi(x_i)}{\|\varphi(x_i)\|}, \tag{2.5.12}$$

seja $w = d(\varphi^{-1})_0(v)$. O *raio limite* de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é o conjunto $\{\lambda w : \lambda > 0\} \subseteq T_xM$. Dizemos que o raio limite é *gerado* por qualquer um de seus elementos. É necessário mostrar que esta definição não depende da carta φ. Seja $\psi : V \subseteq M \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ outra carta local com $x \in V$ e $\psi(x) = 0$. Então,

$$\psi(x_i) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x_i)) = \cancelto{0}{\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(0)} + d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)_0\left(\varphi(x_i)\right) + o(\|\varphi(x_i)\|), \tag{2.5.13}$$

para i suficientemente grande, pela diferenciabilidade de $\psi \circ \varphi^{-1}$. Note agora que

$$\frac{\psi(x_i)}{\|\varphi(x_i)\|} = \left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)\left(\frac{\varphi(x_i)}{\|\varphi(x_i)\|}\right) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)_0\left(\frac{\varphi(x_i)}{\|\varphi(x_i)\|}\right) + \frac{o(\|\varphi(x_i)\|)}{\|\varphi(x_i)\|}. \tag{2.5.14}$$

A última expressão na identidade acima converge, por hipótese, para $d(\psi \circ \varphi^{-1})_0(v)$. Logo

$$\frac{\psi(x_i)}{\|\varphi(x_i)\|} \to d(\psi \circ \varphi^{-1})_0(v) = d\psi_x(w). \tag{2.5.15}$$

Normalizando, obtemos

$$\left\| \frac{\psi(x_i)}{\|\varphi(x_i)\|} \right\| = \frac{\|\psi(x_i)\|}{\|\varphi(x_i)\|} \to \|d\psi_x(w)\|. \tag{2.5.16}$$

Note que $w \neq 0$, e por isso $d\psi_x(w) \neq 0$. Usando 2.5.15 e 2.5.16, escrevemos

$$\begin{aligned} d(\psi^{-1})_0\Big(\frac{\psi(x_i)}{\|\psi(x_i)\|}\Big) &= d(\psi^{-1})_0\Big(\frac{\psi(x_i)}{\|\varphi(x_i)\|}\frac{\|\varphi(x_i)\|}{\|\psi(x_i)\|}\Big), \text{ e assim} \\ d(\psi^{-1})_0\Big(\frac{\psi(x_i)}{\|\varphi(x_i)\|}\frac{\|\varphi(x_i)\|}{\|\psi(x_i)\|}\Big) &\longrightarrow d(\psi^{-1})_0\Big(\frac{d\psi_x(w)}{\|d\psi_x(w)\|}\Big) = \frac{w}{\|d\psi_x(w)\|}, \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

o que mostra a convergência da sequência $\left\{ \frac{\psi(x_i)}{\|\psi(x_i)\|} \right\}_{i\in\mathbb{N}}$ e a independência de cartas na definição do raio limite.

O paralelismo que temos em M fornece uma identificação de cada espaço tangente de M com $\mathbb{R}^n$. Mais especificamente, podemos definir uma aplicação $\top : TM \to \mathbb{R}^n$ que a cada $v \in T_xM$ associa o vetor $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são tais que

$$v = \lambda_1 X_1(x) + \ldots + \lambda_n X_n(x).$$

Isto nos permite definir o campo vetorial $X_{\top(v)}$ (usando a mesma notação de 2.5.1).

Definição 2.5.10. Dado $q \in M$, defina

$$\mathcal{D}_q := \Big\{ v \in T_qM : \exp(s\top(v))(q) \text{ está bem definido e pertence a } \beta_q(G), \forall s \in \mathbb{R}. \Big\}$$

Provaremos que cada $\mathcal{D}_q$ é um subespaço vetorial de T_qM e que $\mathcal{D}$ é uma distribuição suave e involutiva. O primeiro passo é estabelecer uma caracterização alternativa de $\mathcal{D}_q$ em termos de raios limites.

Lema 2.5.11. *Dado $q \in M$ e $v \in T_qM$ não-nulo, temos $v \in \mathcal{D}_q$ se, e somente se, v pertence ao raio limite de alguma sequência $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em $\beta_q(G)$ com $q_i \to q$.*

Demonstração. Se $v \in \mathcal{D}_q$ e $v \neq 0$, considere a sequência

$$q_i := \exp\Big(\frac{\top(v)}{i}\Big)(q). \tag{2.5.18}$$

Por hipótese, $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ está bem definida e pertence a $\beta_q(G)$. Temos $q_i \to q$ porque $\exp(0)(q) = q$. A fim de calcular o raio limite de $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, usaremos a carta local dada por $\exp_q^{-1}$, que está definida em $\exp_q(U_q)$. Para i suficientemente grande, $q_i \in \exp_q(U_q)$. Temos

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\exp_q^{-1}(q_i)}{\|\exp_q^{-1}(q_i)\|} = \lim_{i\to\infty} \frac{\top(v)}{\|\top(v)\|} = \frac{\top(v)}{\|\top(v)\|}. \tag{2.5.19}$$

Portanto, o raio limite é gerado pelo vetor

$$d(\exp_q)_0(\top(v)) = X_{\top(v)}(q) = v. \tag{2.5.20}$$

A primeira igualdade vem de 2.5.3, e a segunda da própria definição de $X_{\top(v)}$. Isso prova que todo elemento de $\mathcal{D}_q$ pertence ao raio limite de alguma sequência na sua órbita, $\beta_q(G)$.

Suponha, por outro lado, que temos uma sequência $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em $\beta_q(G)$, com $q_i \to q$, cujo raio limite está bem definido e contém um vetor $v \in T_qM$. Como $\beta_q(G)$ é a órbita de q, podemos escrever $q_i = g_i(q)$, onde $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em G com $g_i \to 1$. Para i suficientemente grande, $g_i(q) \in \exp_q(U_q)$, logo $g_i(q) = \exp(v_i)(q)$, e a sequência $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n$ assim definida converge para 0. Por hipótese,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{v_i}{\|v_i\|} = \frac{\top(v)}{\|\top(v)\|}. \tag{2.5.21}$$

Escolha $s > 0$ tal que $\exp(s\top(v))(q)$ está definida. Vamos mostrar que, neste caso, $\exp(s\top(v))(q) \in \beta_q(G)$.

Suponha, por um momento, que temos $u \in \mathbb{R}^n$ qualquer tal que $\exp(u)(q)$ está definida e pertence a $\beta_q(G)$; assim, existe $g \in G$ tal que $\exp(u)(q) = g(q)$. Afirmamos que, para todo $m \in \mathbb{Z}$, $\exp(mu)(q)$ está definida e

$$\exp(mu)(q) = g^m(q). \tag{2.5.22}$$

Provaremos 2.5.22 inicialmente para $m \geq 0$, por indução. Para $m = 0$, a identidade é óbvia (interpretando $g^0 = 1 \in G$). Supondo 2.5.22 válida para $m \geq 0$ fixo, temos

$$g\circ g^m(q) = g\circ\exp(mu)(q) = \exp(mu)\circ g(q) = \exp(mu)\circ\exp(u)(q) = \exp\Big((m+1)u\Big)(q).$$

A última igualdade é válida porque se $\exp(u)(q)$ está no domínio de $\exp(mu)(q)$, então é possível percorrer 1 no parâmetro da curva integral do campo X_{mu} partindo do ponto $\exp(u)(q)$; ou, equivalentemente, percorrer m no parâmetro da curva integral de X_u partindo de $\exp(u)(q)$. Como $\exp(u)(q)$ é o ponto obtido percorrendo 1 no parâmetro da curva integral de X_u a partir de q, concluímos que é possível percorrer $m + 1$ no parâmetro da curva integral de X_u a partir de q, que é por definição $\exp\Big((m + 1)u\Big)(q)$. O caso $m \leq 0$ é análogo.

Defina, para todo $i \geq 1$,

$$n_i := \left\lfloor \frac{s}{s_i} \right\rfloor, \text{ onde } s_i := \frac{\|v_i\|}{\|\top(v)\|}. \tag{2.5.23}$$

O símbolo $\lfloor\ \rfloor$ denota a função piso. A definição implica

$$\lim_{i\to\infty} n_i s_i = s \text{ e } \lim_{i\to\infty}\left(\frac{v_i}{s_i}\right) = \top(v).$$

Por 2.5.22, temos, para i suficientemente grande,

$$\exp(n_i v_i)(q) = g_i^{n_i}(q) \in \beta_q(G).$$

Como $\beta_q(G)$ é fechada, segue que

$$\exp(n_i v_i)(q) = \exp\left(n_i s_i \frac{v_i}{s_i}\right)(q) \to \exp\left(s\top(v)\right)(q) \in \beta_q(G). \tag{2.5.24}$$

Assim, existe $g(s) \in G$ tal que $\exp(s\top(v))(q) = g(s)(v)$. Usando 2.5.22, temos

$$\exp(ms\top(v))(q) = g(s)^m(q), \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

o que mostra que $t \mapsto \exp(t\top(v))(q)$ está definida para valores arbitrariamente grandes (positivos e negativos) do parâmetro t; logo está definida em $\mathbb{R}$. Para cada t tal que $\exp(t\top(v))(q)$ está definida, ela permanece em $\beta_q(G)$, conforme provamos, e o resultado segue. ■

Lema 2.5.12. *$\mathcal{D}_q$ é um subespaço vetorial de T_qM, $\forall q \in M$.*

Demonstração. Segue imediatamente da definição que dado $v \in \mathcal{D}_q$, $tv \in \mathcal{D}_q$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, basta mostrar que dados $v, w \in \mathcal{D}_q$, temos $v + w \in \mathcal{D}_q$. Vamos supor $v + w \neq 0$, do contrário não há nada a fazer. Seja $\epsilon > 0$ tal que a aplicação

$$\begin{aligned} \eta : (-\epsilon,\epsilon) \times (-\epsilon,\epsilon) &\to M \\ (t,s) &\mapsto \exp(t\top(w)) \circ \exp(s\top(v))(q) \end{aligned} \tag{2.5.25}$$

está bem definida. Note que

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(0,0) = w, \quad \frac{\partial \eta}{\partial s}(0,0) = v,$$

e portanto

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\Big(\exp(t\top(w)) \circ \exp(t\top(v))(q)\Big) = v + w.$$

Para cada $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, como

$$\exp(t\top(v))(q) \in \beta_q(G) \;\text{ e }\; \exp(t\top(w))(q) \in \beta_q(G),$$

por hipótese, existem $g(t), h(t) \in G$ tais que

$$\exp(t\top(v))(q) = g(t)(q) \;\text{ e }\; \exp(t\top(w))(q) = h(t)(q).$$

Portanto, para qualquer $t \in (-\epsilon,\epsilon)$,

$$\begin{aligned} \eta(t,t) = \exp(t\top(w)) \circ \exp(t\top(v))(q) &= \exp(t\top(w)) \circ g(t)(q) = \\ g(t) \circ \exp(t\top(w))(q) &= g(t) \circ h(t)(q) \;\in\; \beta_q(G). \end{aligned} \tag{2.5.26}$$

Para $i > \dfrac{1}{\epsilon}$, defina $q_i = \eta\left(\dfrac{1}{i}, \dfrac{1}{i}\right)$. A sequência $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ assim definida pertence a $\beta_q(G)$, converge para q e seu raio limite contém $v + w$. Pelo lema 2.5.11, $v + w \in \mathcal{D}_q$. ■

Lema 2.5.13. *$\mathcal{D}$ é suave.*

Demonstração. Seja $x_0 \in M$. Afirmamos que

$$\mathcal{D}_{\exp(v)(x_0)} = d(\exp(v))_{x_0}(\mathcal{D}_{x_0}), \quad \forall v \in U_x. \tag{2.5.27}$$

De fato, fixe $v \in U_{x_0}$ e defina $y_0 := \exp(v)(x_0)$. Como $\exp(v)$ é um difeomorfismo entre abertos de M, existem $U, V \subseteq M$ vizinhanças de x_0 e y_0, respectivamente, tais que $\exp(v) : U \to V$ é um difeomorfismo. Podemos supor ainda, reduzindo U e V

se necessário, que existe uma carta local $\psi : V \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\psi(y_0) = 0$. Defina $\phi : U \to \widetilde{V}$ pondo $\phi(x) = \psi \circ \exp(v)(x)$, para todo $x \in U$. Dado $u \in \mathcal{D}_{x_0}$, $u \neq 0$, existe uma sequência $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, a qual podemos supor que permanece em U, com $x_i \to x_0$ e $x_i \neq x_0$, para todo i, tal que

$$d(\phi^{-1})_0\,(u_0) = u, \text{ onde } u_0 := \lim_{i\to\infty} \frac{\phi(x_i)}{\|\phi(x_i)\|}. \tag{2.5.28}$$

Defina $y_i := \exp(v)(x_i)$. A sequência $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ permanece em V, converge para $\exp(v)(x_0) = y_0$ e satisfaz $y_i \neq y_0$, para todo i. A existência do limite em 2.5.28 implica, pela definição de ϕ,

$$u_0 = \lim_{i\to\infty} \frac{\phi(x_i)}{\|\phi(x_i)\|} = \lim_{i\to\infty} \frac{\psi(y_i)}{\|\psi(y_i)\|}. \tag{2.5.29}$$

A existência deste último limite implica que $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ define um raio limite em $\mathcal{D}_{y_0}$, que é gerado pelo vetor $d(\psi^{-1})_0\,(u_0)$. Assim, temos

$$d(\exp(v))_{x_0} \circ d(\phi^{-1})_0(u_0) = d(\exp(v) \circ \phi^{-1})_0(u_0) = d(\psi^{-1})_0(u_0) \in \mathcal{D}_{y_0}, \tag{2.5.30}$$

donde $d(\exp(v))_{x_0}(\mathcal{D}_{x_0}) \subseteq \mathcal{D}_{y_0}$. O mesmo argumento, invertendo os papéis de x_0 e y_0, mostra a inclusão inversa, provando o resultado. ■

Lema 2.5.14. *$\mathcal{D}$ é involutiva.*

Demonstração. Dados $v \in \mathcal{D}_x$ e $t \in \mathbb{R}$, existe um único $g_t^v \in G$ tal que

$$g_t^v(x) = \exp(t\top(v))(x). \tag{2.5.31}$$

Esta equação mostra que a curva

$$\begin{aligned} g^v(x) : \mathbb{R} &\to M \\ t &\mapsto g_t^v(x) \end{aligned} \tag{2.5.32}$$

é suave. Dado $y \in M$, existem $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$y = \exp(v_1) \circ \cdots \circ \exp(v_k)(x). \tag{2.5.33}$$

Logo,

$$g_t^v(y) = g_t^v \circ \exp(v_1) \circ \cdots \circ \exp(v_k)(x) = \exp(v_1) \circ \cdots \circ \exp(v_k)(g_t^v(x)), \tag{2.5.34}$$

o que mostra que a curva $t \mapsto g_t^v(y)$ também é suave. Isto permite definir um campo vetorial v^* em M (que ainda não sabemos se é suave), pondo

$$v^*(y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(g_t^v(y)\right), \quad \forall y \in M. \tag{2.5.35}$$

Note também que a aplicação

$$\begin{aligned} g^v : \mathbb{R} &\to G \\ t &\mapsto g_t^v \end{aligned} \tag{2.5.36}$$

é um homomorfismo de grupos. De fato, dados $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g_t^v \circ g_s^v(x) &= g_t^v \circ \exp(s\top(v))(x) = \exp(s\top(v))(g_t^v(x)) = \\ &= \exp(s\top(v)) \circ \exp(t\top(v))(x) = \exp\Big((t+s)\top(v)\Big)(x) = \\ &= g_{t+s}^v(x). \end{aligned} \tag{2.5.37}$$

Usando 2.5.37, temos

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0}\Big(g_t^v(y)\Big) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\Big(g_t^v \circ g_{t_0}^v(y)\Big) = v^*(g_{t_0}^v(y)), \tag{2.5.38}$$

o que significa que $t \mapsto g_t^v(y)$ é a curva integral de v^* passando por y. Além disso, dado $u \in U_x$,

$$\begin{aligned} v^*(\exp_x(u)) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\Big(g_t^v \circ \exp(u)(x)\Big) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\Big(\exp(u) \circ g_t^v(x)\Big) = \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\Big(\exp(u) \circ \exp_x(t\top(v))\Big) = d(\exp(u))_x \circ d(\exp_x)_0(\top(v)) = \\ &= d(\exp(u))_x(v), \end{aligned} \tag{2.5.39}$$

o que implica a suavidade de v^* em $\exp_x(U_x)$ e $v^*(\exp_x(u)) \in \mathcal{D}_{\exp_x(u)}$, por 2.5.27. Como todo $y \in M$ se escreve na forma 2.5.33, um argumento de indução mostra que v^* é suave em toda M e, usando 2.5.27, que v^* fica sempre na distribuição $\mathcal{D}$. Seja $w \in \mathcal{D}_x$, com w^* definido analogamente. É suficiente mostrar que $[v^*, w^*](x) \in \mathcal{D}_x$. Para $t > 0$ pequeno, defina

$$\gamma(t) := g^w_{-\sqrt{t}} \circ g^v_{-\sqrt{t}} \circ g^w_{\sqrt{t}} \circ g^v_{\sqrt{t}}(x).$$

Então, $\gamma'(0^+)$ (derivada à direita) existe e

$$\gamma'(0^+) = [v^*, w^*](x).$$

Portanto, a sequência $\{\gamma(\frac{1}{i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ possui direção limite $[v^*, w^*](x)$, logo $[v^*, w^*](x) \in \mathcal{D}_x$. ■

Usando o teorema de Frobenius, temos agora para cada $x \in M$ uma subvariedade integral de $\mathcal{D}$, maximal e conexa, passando por x, que denotaremos por N_x. Fixe um ponto $x \in N_x$ e escolha uma base $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathcal{D}_x = T_xN$. Os campos vetoriais $v_1^*, \ldots, v_k^*$ restritos a N_x fornecem um paralelismo global em N_x. De fato, a equação 2.5.33 mostra que o conjunto $\{v_1^*, \ldots, v_k^*\}$ é linearmente independente em todo ponto, porque este conjunto é obtido aplicando-se um número finito de isomorfismos lineares a $\{v_1, \ldots, v_k\}$, que é linearmente independente. Além disso, como vimos na demonstração do último lema, $v_i \in \mathcal{D}_x$ implica $v_i^*(y) \in \mathcal{D}_y$, $\forall y$.

Defina a seguinte relação em N_x:

$$y \smile z \Leftrightarrow (\exists\, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}) \ : \ z = g_{t_1}^{v_1} \circ \cdots \circ g_{t_k}^{v_k}(y), \tag{2.5.40}$$

lembrando que $g_t^{v_i}$ é o fluxo do campo vetorial v_i^* no tempo t. Por argumentos inteiramente análogos àqueles que demos após definir 2.5.5, pode-se provar que esta é uma relação de equivalência em N_x, cujas classes são abertas. Pela conexidade de N_x, todos os seus pontos são equivalentes.

Lema 2.5.15. *Para quaisquer $x, y \in M$, se $N_x \cap \beta_y(G) \neq \emptyset$, então $N_x \subseteq \beta_y(G)$.*

Demonstração. Seja $z \in N_x \cap \beta_y(G)$. Dado qualquer ponto $z' \in N_x$, temos $z \smile z'$, o que mostra que $z' \in \beta_y(G)$. ■

Temos assim que cada órbita $\beta_y(G)$ consiste exatamente da união disjunta das subvariedades integrais maximais e conexas que a intersectam, pois as famílias $\{N_x\}_{x\in M}$ e $\{\beta_y(G)\}_{y\in M}$ são partições de M.

Lema 2.5.16. *Para todo $x \in M$, N_x é aberta em $\beta_x(G)$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $y \in N_x$ que não é ponto interior de N_x em $\beta_x(G)$. Seja $\varphi = (x^1, \ldots, x^n) : U \subseteq M \to U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ um sistema de coordenadas "cúbico" em torno de $y \in U$, com $\varphi(y) = 0$, de modo que as subvariedades

$$S_{c_{k+1},\ldots,c_n} \coloneqq \{\, q \in U \;:\; x^i(q) = c_i, \;\; i = k+1, \ldots, n \,\} \tag{2.5.41}$$

são subvariedades integrais de $\mathcal{D}$ (desde que $S_{c_{k+1},\ldots,c_n} \neq \emptyset$), onde k é a dimensão de N_x, e cada subvariedade integral conexa de $\mathcal{D}$ contida em U fica dentro de algum $S_{c_{k+1},\ldots,c_n}$. Como y não é ponto interior de N_x em $\beta_x(G)$, existe uma sequência $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em $\beta_x(G)\backslash N_x$ com $y_i \to y$. Podemos supor que $y_i \in U$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Considere a sequência $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em U dada por

$$\varphi(z_i) \coloneqq (0, \ldots, 0, x^{k+1}(y_i), \ldots, x^n(y_i)) \in U_1 \times U_2.$$

Então $z_i \in N_{y_i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Como $y_i \in N_{y_i} \cap \beta_x(G)$, temos $y_i \in N_{y_i} \cap \beta_x(G) \neq \emptyset$, logo $N_{y_i} \subseteq \beta_x(G)$, pelo lema anterior. Em particular, $z_i \in \beta_x(G)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que a sequência

$$\frac{\varphi(z_i)}{\|\varphi(z_i)\|} = \frac{\big(0, \ldots, 0, x^{k+1}(y_i), \ldots, x^n(y_i)\big)}{\sqrt{\big(x^{k+1}(y_i)\big)^2 + \cdots + \big(x^n(y_i)\big)^2}}$$

converge para algum $u = (0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$. Assim, $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ define um raio limite gerado por $d(\varphi^{-1})_0(u)$, que portanto está em $\mathcal{D}_y = T_y(N_x)$. Por outro lado, a definição de φ claramente implica $\mathcal{D}_y = d(\varphi^{-1})_0(\mathbb{R}^k \times \{0\})$, fato que leva a uma contradição. ■

Como o conjunto $\{N_y : N_y \subseteq \beta_x(G)\}$ é uma partição de $\beta_x(G)$, o lema anterior mostra que qualquer $N_y \subseteq \beta_x(G)$ é também fechada em $\beta_x(G)$. Assim, as subvariedades integrais maximais e conexas de $\mathcal{D}$ que intersectam $\beta_x(G)$ coincidem com as componentes conexas de $\beta_x(G)$, que agora possuem uma estrutura diferenciável.

Fixado p ∈M, definimos uma estrutura diferenciável em G via $\beta_p : G \to \beta_p(G)$.

Lema 2.5.17. *A estrutura diferenciável de G não depende do ponto $p \in M$.*

Demonstração. Como $p \sim q$, existem $v_1, \ldots, v_j \in \mathbb{R}^n$ tais que $q = E_{p,q}(p)$, onde $E_{p,q} \coloneqq \exp(v_1) \circ \cdots \circ \exp(v_j)$. Temos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\beta_p"] \arrow[dr, "\beta_q"'] & \beta_p(G) \arrow[d, "E_{p,q}"] \\ & \beta_q(G) \end{tikzcd}$$

Como $E_{p,q}$ é um difeomorfismo (entre abertos de M), o resultado segue. ■

Lema 2.5.18. *A ação $\mu : G \times M \to M$ dada por $\mu(g,x) = g(x)$ é suave.*

Demonstração. Provaremos que μ é suave na vizinhança $\exp_x(U_x) \subseteq M$ de um ponto arbitrário $x \in M$. Pelo lema anterior, podemos pensar em G com a estrutura diferenciável induzida por β_x. Assim, basta verificar que a aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_x : \beta_x(G) \times \exp_x(U_x) &\to M \\ (g(x), \exp(u)(x)) &\mapsto g(\exp(u)(x)) = \exp(u)(g(x)), \end{aligned} \tag{2.5.42}$$

é suave; mas isso é evidente da expressão acima. ■

Lema 2.5.19. *G é um grupo de Lie, isto é, as operações $\mathfrak{m} : G \times G \to G$ e $\mathfrak{inv} : G \to G$, dadas por $\mathfrak{m}(g,h) = g \circ h$ e $\mathfrak{inv}(g) = g^{-1}$, $\forall g, h \in G$, são suaves.*

Demonstração. Um resultado bem conhecido da teoria de grupos de Lie estabelece que se $\mathfrak{m}$ é suave, então $\mathfrak{inv}$ também é (ver, por exemplo, [4]). Como $\beta_p(G)$ é uma subvariedade de M, a restrição

$$\mu_{|\beta_p(G)} : G \times \beta_p(G) \to \beta_p(G) \tag{2.5.43}$$

da ação μ é suave, porque μ é suave pelo lema anterior. Mas esta é precisamente a multiplicação $\mathfrak{m}$ de G, se identificarmos $\beta_p(G) \equiv G$. ■

Estabelecemos assim que o grupo de automorfismos de uma 1-estrutura sobre M, M conexa, é um grupo de Lie cuja topologia é a compacto-aberta. Vamos agora estender o resultado para incluir o caso em que M não é conexa, mas possui uma quantidade finita de componentes conexas. Precisaremos do seguinte teorema geral.

Teorema 2.5.20. *Seja G_0 um subgrupo normal de um grupo algébrico G (isto é, G não tem estrutura diferenciável) tal que G/G_0 é enumerável. Suponha que G_0 é um grupo de Lie e que, para cada $g \in G$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \ell_g : G_0 &\to G_0 \\ h &\mapsto g^{-1}hg \end{aligned} \tag{2.5.44}$$

é suave. Então, existe uma estrutura diferenciável em G que torna G um grupo de Lie e G_0 um subgrupo de Lie aberto em G.

Demonstração. Escreva $G/G_0 = \{\bar{1}\} \cup \{Q_k\}_{k \in K}$, onde $K \subseteq \mathbb{N}$ e $\bar{1}$ denota a classe de equivalência correspondente a $1 \in G$, ou seja, o próprio G_0. Para cada Q_k, escolha um representante $g_k \in Q_k$. Temos então

$$G \; = \; G_0 \, \cup \, \dot{\bigcup_{k \in K}} \, g_k G_0, \tag{2.5.45}$$

de modo que basta introduzir uma estrutura diferenciável em cada classe lateral $g_k G_0$. Vamos fixar um $k \in K$ e abreviar $g_k \equiv g$. Considere um atlas $A_0 = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$

de G_0. Para cada $i \in I$, $U_i \subseteq G_0$ é um aberto e $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo sobre um aberto $\phi_i(U_i)$ de $\mathbb{R}^n$. Usando a bijeção

$$\begin{aligned} L_g : G_0 &\to gG_0 \\ h &\mapsto gh, \end{aligned} \tag{2.5.46}$$

podemos construir o atlas

$$A_g := \left\{ \left(L_g(U_i),\ \phi_i \circ L_g^{-1} \right) \right\}_{i \in I} \tag{2.5.47}$$

de gG_0. Como L_g é uma bijeção, a união dos conjuntos $L_g(U_i)$ cobre gG_0 e cada $\phi \circ L_g^{-1} : L_g(U_i) \to \phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma bijeção de $L_g(U_i)$ sobre $\phi_i(U_i)$. Definimos a estrutura diferenciável em gG_0 como sendo aquela induzida pelo atlas A_g. Note que esta definição não depende de g, no seguinte sentido: se $\widetilde{g} \in G$ é tal que $gG_0 = \widetilde{g}G_0$, então a estrutura diferenciável induzida pelo atlas $A_{\widetilde{g}}$ coincide com aquela induzida pelo atlas A_g. De fato, denotando por gG_0 a variedade diferenciável construída usando o atlas A_g e por $\widetilde{g}G_0$ a variedade diferenciável construída usando o atlas $A_{\widetilde{g}}$, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : gG_0 &\to \widetilde{g}G_0 \\ gh &\mapsto \widetilde{g}h \end{aligned} \tag{2.5.48}$$

é um difeomorfismo, porque $L_g : G_0 \to gG_0$ e $L_{\widetilde{g}} : G_0 \to \widetilde{g}G_0$ são difeomorfismos, por construção, e $\phi = L_{\widetilde{g}} \circ L_{g^{-1}}$. Assim, a união

$$\mathbb{A} := \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I} \ \cup \ \dot{\bigcup_{k \in K}} \left\{ \left(L_{g_k}(U_i), \phi_i \circ L_{g_k}^{-1} \right) \right\}_{i \in I} \tag{2.5.49}$$

fornece um atlas $\mathbb{A}$ para G, que define uma estrutura diferenciável em G, independente das escolhas de cada $g_k \in Q_k$. Observe que cada classe lateral gG_0, incluindo o próprio G_0, é aberta em G, porque

$$gG_0 = \bigcup_{i \in I} L_g(U_i), \tag{2.5.50}$$

e cada $L_g(U_i)$ é aberto em G, por definição. Resta verificar que o produto $\mathfrak{m} : G \times G \to G$ é suave. Dados $g, h \in G$, basta verificar a suavidade de $\mathfrak{m}$ em um aberto contendo (g, h); a escolha natural aqui é $gG_0 \times hG_0$. A função $\mathfrak{m}$ restrita a $gG_0 \times hG_0$ toma valores em ghG_0, e é suave se e somente se $\widetilde{\mathfrak{m}}$ o for, onde $\widetilde{\mathfrak{m}}$ é definida conforme o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} gG_0 \times hG_0 \arrow[r, "\mathfrak{m}"] & ghG_0 \\ G_0 \times G_0 \arrow[u, "L_g \times L_h"] \arrow[r, "\widetilde{\mathfrak{m}}"'] & G_0 \arrow[u, "L_{gh}"'] \end{tikzcd}$$

Temos $\widetilde{\mathfrak{m}}(x, y) = h^{-1}xhy = \mathfrak{m}_0(\ell_h(x), y)$, onde $\mathfrak{m}_0$ é a multiplicação de G_0, e portanto $\widetilde{\mathfrak{m}}$ é suave, como queríamos. ■

A construção feita na demonstração do teorema 2.5.20 induz, em particular, uma topologia em G a partir do subgrupo normal G_0. Não é difícil ver que esta topologia é a única topologia em G que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &(i)\ L_g \text{ é contínua, para todo } g \in G;\\ &(ii)\ G_0 \text{ é aberto em } G;\\ &(iii) \text{ A topologia induzida em } G_0 \text{ coincide}\\ &\qquad \text{com a topologia original de } G_0. \end{aligned} \tag{2.5.51}$$

De fato, pode-se reconstruir a topologia de G usando apenas (i), (ii) e (iii).

Teorema 2.5.21. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n tal que*

$$M = M_1 \dot\cup \ldots \dot\cup M_k,$$

com M_i conexa para $i = 1, \ldots, k$. Suponha que M possui uma 1-estrutura, ou seja, um paralelismo, e seja G o grupo de automorfismos desta 1-estrutura. Então, G é um grupo de Lie com a topologia compacto-aberta.

Demonstração. Para cada $i = 1, \ldots, k$, seja G_i o grupo de automorfismos da 1-estrutura sobre M_i. Pelo teorema 2.5.1, G_i é um grupo de Lie com a topologia compacto-aberta. Defina

$$G_0 := \prod_{i=1}^{k} G_i. \text{ (Produto como grupos de Lie.)}$$

Então G_0 tem a topologia produto, e é fácil ver que esta coincide com a topologia compacto-aberta. Temos uma inclusão natural $\mathrm{i}_0 : G_0 \hookrightarrow G$, de modo que podemos identificar G_0 com o subgrupo de G que consiste dos automorfismos da 1-estrutura sobre M que "preservam" as componentes conexas de M. Note que G_0 é subgrupo normal de G. De fato, cada $g \in G$ induz uma permutação $\sigma_g : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$, dada implicitamente pela condição

$$g(M_i) = M_{\sigma_g(i)}, \ \ i = 1, \ldots, k.$$

Assim, se $g \in G$ e $h \in G_0$, temos

$$g^{-1} \circ h \circ g(M_i) = g^{-1} \circ h(M_{\sigma_g(i)}) = g^{-1}(M_{\sigma_g(i)}) = M_i, \ \ i = 1, \ldots, k,$$

logo $g^{-1} \circ h \circ g \in G_0$. Seja $g \in G$ e uma sequência $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ em G_0 com $h_j \to h \in G_0$. Vamos mostrar que $g^{-1} \circ h_j \circ g \to g^{-1} \circ h \circ g$, ou seja, que $\ell_g : G_0 \to G_0$ é contínua. Como ℓ_g é um homomorfismo de grupo, isso implicará que ℓ_g é suave.

Defina uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ em M, como fizemos em 2.5.10, de modo que G agora é um subgrupo das isometrias de M, que em particular preserva a função distância, d_M. Dado um compacto $K \subseteq M$, como g é contínua temos $g(K)$ compacto. Uma vez que $h_j \to h$ uniformemente sobre compactos, dado $\epsilon > 0$, existe $J_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > J_0 \ \Rightarrow \ d_M(h_j(y), h(y)) < \epsilon, \ \ \forall y \in g(K);$$

ou, equivalentemente,

$$j > J_0 \ \Rightarrow\ d_M(h_j \circ g(x), h \circ g(x)) < \epsilon, \ \ \forall x \in K.$$

Como g^{-1} é uma isometria, podemos escrever ainda

$$j > J_0 \ \Rightarrow\ d_M(g^{-1} \circ h_j \circ g(x),\ g^{-1} \circ h \circ g(x)) < \epsilon, \ \ \forall x \in K,$$

e isso mostra que $g^{-1} \circ h_j \circ g \to g^{-1} \circ h \circ g$ uniformemente sobre compactos.

Invocando agora o teorema 2.5.20, podemos munir G de uma estrutura diferenciável segundo a qual G é um grupo de Lie. Resta apenas identificar a topologia induzida por esta estrutura. Mas a topologia compacto-aberta satisfaz as três propriedades listadas em 2.5.51, que caracterizam a topologia de G. Logo, G tem a topologia compacto-aberta. ■

Vamos analisar agora o caso geral. Seja $G \subseteq GL(n)$ um subgrupo de Lie e M uma variedade diferenciável de dimensão finita. Suponha que M e G possuem uma quantidade finita de componentes conexas. Seja $\pi : B_G \to M$ uma G-estrutura sobre M, de tipo finito e ordem $k \geq 0$. Temos o seguinte teorema.

Teorema 2.5.22. *Nas condições acima, o grupo de automorfismos da G-estrutura B_G sobre M, que denotamos por $Aut_G(M)$, é um grupo de Lie com a topologia da convergência C^k-uniforme sobre compactos.*

Demonstração. Provaremos o teorema por indução sobre k. Para $k = 0$, B_G é uma 1-estrutura e o teorema 2.5.21 se aplica. A topologia de $Aut_G(M)$ é a compacto-aberta, ou seja, a topologia da convergência C^0-uniforme sobre compactos.

Suponha o resultado válido para $k \geq 0$ fixo, e suponha que B_G possui ordem $k + 1$. Neste caso, o primeiro prolongamento de B_G, ou seja, a $G^{(1)}$-estrutura $\pi^1 : B_G^{(1)} \to B_G$ possui ordem k. Note que, como M e G possuem uma quantidade finita de componentes conexas, o espaço total B_G também satisfaz esta propriedade, o que nos permite aplicar a hipótese de indução para concluir que seu grupo de automorfismos, $Aut_{G^{(1)}}(B_G)$, é um grupo de Lie com a topologia da convergência C^k-uniforme sobre compactos. A imagem $\star(Aut_G(M)) \subseteq Aut_{G^{(1)}}(B_G)$ de $Aut_G(M)$ pela aplicação $\star$, dada em 2.4.14, é fechada, pelo teorema 2.4.6, e portanto é um subgrupo de Lie mergulhado em $Aut_{G^{(1)}}(B_G)$, pelo teorema 2.4.7. Como a aplicação $\star$ é uma bijeção sobre sua imagem, podemos utilizá-la para induzir uma estrutura de grupo de Lie em $Aut_G(M)$. É fácil ver, pela definição de $\star$, que a topologia assim induzida em $Aut_G(M)$ é a topologia da convergência C^{k+1}-uniforme sobre compactos, concluindo a demonstração. ■

Referências Bibliográficas

[1] Lee, J. M. *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 2000, Springer.

[2] Chevalley, C. *Theory of Lie groups*, Princeton University Press, 1946.

[3] Kobayashi, S.; Nomizu, K. *Foundations of differential geometry*, Interscience Tracts in Pure and Applied Math., No. 15. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1963.

[4] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1, Berkeley, CA: Publish or Perish Press, 1979a.

[5] Sternberg, S. *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

[6] Manoussos, A.; Strantzalos, P. *On the Group of Isometries on a Locally Compact Metric Space*, Journal of Lie Theory, Vol. **13** (2003), 7-12.

[7] Lima, E. L. *Espaços Métricos*, Coleção Projeto Euclides, IMPA (1976).

[8] Singer, I. M.; Sternberg, S. *The infinite groups of Lie and Cartan. Part I. The transitive groups.* Cambridge, MA.