

Medidas Invariantes para Recobrimentos Críticos do Círculo

Tiago Estrela de Oliveira

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Edson Vargas

Durante este trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo, 26 de Março de 2014

Medidas Invariantes para Recobrimentos Críticos do Círculo

Esta é a versão original da tese elaborada pelo
candidato Tiago Estrela de Oliveira, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por que toda honra e glória deve ser dada a Ele. A minha esposa Alexandra e a meus filhos Diego e Murilo por compreenderem minhas ausências de fim de semanas dedicadas ao IME. A minha mãe e irmã por participarem desta grande jornada iniciada no ingresso na UFBA em 2001. A todos os colegas do IME em especial a João Paulo, Robson, Oscar, Arlane e Belmiro que também fizeram partes destes mais de quatro anos. Finalmente a meu orientador, Edson, por toda ajuda destinada a mim através de palavras de incentivos e “brincas” além de sempre estar presente para conversamos sobre matemática.

Resumo

OLIVEIRA, T. E.: **Medidas Invariantes para Recobrimentos Críticos do Círculo**. Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

O objetivo principal deste trabalho é descrever certos aspectos de natureza métrica dos sistemas dinâmicos gerados por recobrimentos do círculo que possuem um único ponto crítico, chamados recobrimentos críticos do círculo. Na situação mais interessante, este recobrimento, digamos f , não possui órbita periódica atratora e é topologicamente conjugado com um decobrimento do círculo sem ponto crítico e que preserva a medida de Lebesgue. Então, é natural imaginar que f possua uma medida de probabilidade invariante e absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue (abreviadamente, *piac*). No entanto, provamos que dentre estes recobrimentos críticos, existem alguns que são até analíticos mas não possuem uma medida invariante *piac*. Para obter este resultado construímos recobrimentos críticos cujo ponto crítico é fortemente recorrente. A força de recorrência do ponto crítico é medida através de ingredientes combinatórios que são delicados neste contexto. Uma das principais dificuldades provem da falta de uma simetria natural e dinamicamente definida em torno do ponto crítico. Isto exige que algumas ferramentas usadas para tratar o mesmo tipo de problema no caso de aplicações unimodais sejam adaptadas, ou mesmo alteradas de modo mais drástico. Como resultado final, além da existência de recobrimentos críticos analíticos sem atratores periódicos e sem medida invariante *piac*, elucidamos alguns tipos combinatórios que levam a tal comportamento. Também discutimos um método combinatório que permite medir a força de recorrência do ponto crítico.

Palavras-chave: recobrimento crítico, medida invariante, círculo, aplicação kneading, atratores.

Abstract

OLIVEIRA, T. E.: **Invariant Measures for Critical Covering Maps of the Circle.**

Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

The main goal of this work is to describe some measure-theoretic aspects of the dynamical systems generated by covering maps of the circle which has a critical point, called critical covering map of the circle. In the most interesting situation, this covering map, say f , has no attracting periodic orbit and, it is topologically conjugate with a covering map of circle without critical point and preserving the Lebesgue measure. Then, it is natural to imagine that f has an invariant probability measure which is absolutely continuous with respect the Lebesgue measure (for short, acip). Nevertheless, we prove the existence of an analytic critical covering map of the circle, without attracting periodic orbits and without acip. To get this result we construct a critical covering map whose critical point is strongly recurrent. The power of recurrence of the a critical point is measured combinatorially and this is a very delicate problem in the present context. One of the main difficulty comes from the lack of a natural and dynamicaly defined simmetry around the critical point. Due to this, the tools used to treat similar problems in the context of unimodal maps have to be adapted or even changed in drastic way. As a final result, besides the existence of analytic critical covering maps of the circle without attracting periodic orbits and without acip. Como resultado final, we indicate the types of combinatorics which lead to such behavior. As a byproduct of all of this, one have a combinatorial way to measure how strong is the recurrence of the critical point.

Keywords: critical covering map, invariant measure, circle, kneading map, attractors.

Sumário

Lista de Símbolos	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
2 Principais resultados	4
2.1 Primeiros conceitos	4
2.2 Principais resultados	6
2.3 Aplicações unimodais	7
3 Conceitos e ferramentas	9
3.1 Recorrência do ponto crítico	9
3.2 Tempos de corte e aplicações kneading	10
3.3 Primeiros retornos	13
3.4 Derivada de Schwarz e Princípios de Koebe	17
4 Combinatórias especiais	20
4.1 Combinatórias quase-periódicas	20
4.2 Cortes e tempos de corte	24
5 Kneading, admissibilidade e atratores	39
5.1 Critério de admissibilidade	39
5.2 Kneading e atratores periódicos	44
5.3 Frequência da órbita crítica	45
6 A família de Arnold	48
6.1 Combinatórias especiais na família de Arnold	48
7 Propriedades métricas	49
7.1 Conjunto limite	49
7.2 Medida invariante	51

Referências Bibliográficas

Lista de Símbolos

Q^+	aplicação kneading à direita
Q^-	aplicação kneading à esquerda
S_k^+	tempo de corte à direita
S_k^-	tempo de corte esquerda
z_k^+, Z_k^+	pontos pré-críticos mais próximo à direita
z_k^-, Z_k^-	pontos pré-críticos mais próximo à esquerda

Lista de Figuras

2.1	recobrimento f_α	5
2.2	aplicação tenda	8
2.3	aplicação quadrática	8
3.1	pré-críticos mais próximos	12
3.2	aplicação kneading Q^+	14
3.3	um recobrimento f	15
4.1	o recobrimento g_0	22
4.2	os ramos ϕ_s , σ_{s,ℓ_s} e ψ_s	23
4.3	pontos pré-críticos iniciais	25
4.4	cascata de retornos de ψ_1	26
4.5	cascata de retornos de ψ_2	28
5.1	o caso $z_{Q^+(k+1)-1}^- < c_{S_k^+} < Z_{Q^+(k+1)}^-$	41
5.2	o caso $Z_{Q^+(k+1)}^- < c_{S_k^+} < z_{Q^+(k+1)}^-$	41
7.1	as funções G e \mathcal{G}	51

Lista de Tabelas

4.1	tempos de corte gerados por ψ_1	29
4.2	tempos de corte à esquerda, gerados por ψ_2	30
4.3	tempos de corte à direita, gerados por ψ_2	30

Capítulo 1

Introdução

Propriedades ergódicas e combinatórias em dinâmica unidimensional estão relacionadas entre si e constituem os principais temas de estudo neste trabalho. Vamos tratar especialmente das dinâmicas unidimensionais geradas pelas iterações de recobrimentos críticos do círculo, a saber: um recobrimento crítico do círculo é uma função $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ de classe C^r , com $r \geq 1$, que possui um único ponto crítico. Por simplicidade vamos nos restringir ao caso em que f tem grau topológico 2. O caso de grau $d \notin \{0, 1, -1\}$ pode ser tratado de modo similar, mas a sua maior complexidade combinatória poderia tornar este trabalho mais técnico e isto dificultaria a sua compreensão. Como exemplo destes recobrimentos veja no Capítulo 2 as aplicações f_α induzidas no círculo pelas aplicações de Arnold.

Vamos comparar o caso de um recobrimento crítico do círculo (por brevidade, diremos apenas recobrimento crítico) f e uma aplicação unimodal u . A teoria das aplicações unimodais já é bem extensa e possui uma rica bibliografia. Indicamos aqui os livros [CE83], [dMvS93], [Dev89] e [BB04], que contem uma grande parte desta teoria e mais fontes de literatura sobre este assunto. Relembramos que uma aplicação unimodal é uma função $u : I \rightarrow I$ de classe C^r , onde $r \geq 1$ e I é um intervalo compacto. Assumimos que u que aplica a fronteira de I nela mesma e possui um único ponto crítico do tipo extremo local no interior de I . Como exemplo destas aplicações veja no Capítulo 2 as aplicações da família quadrática q_α e da família tenda T_α .

Vamos comentar algumas semelhanças e algumas diferenças entre as dinâmicas de um recobrimento crítico f e de uma aplicação unimodal u : (i) a topologia do círculo é mais complexa do que a topologia de um intervalo e isto faz com que a ordem cíclica também seja mais complexa do que a ordem no intervalo. Isto acarreta algumas dificuldades combinatórias extras para a dinâmica de f . (ii) f sempre é um homeomorfismo local e preserva a orientação do círculo, enquanto que u possui um ramo que preserva orientação e outro ramo que inverte orientação. Por isto u pode possuir um intervalo periódico $J \subset I$, de período $n \geq 2$, tal que o iterado u^n ainda é unimodal quando restrito a este intervalo J . Neste caso dizemos que u é *renormalizável*. Um intervalo periódico $J \subset \mathbb{S}^1$ para f pode ser inteiramente constituído de pontos periódicos com o mesmo período, mas vamos assumir que esta situação não ocorre. Então a órbita positiva de todos os pontos de J converge para uma órbita periódica em J e com o mesmo período deste intervalo. Sendo assim, não consideramos que f seja renormalizável. Existem então menos possibilidades dinâmicas para f e isto torna a construção de determinados comportamentos bem mais elaborada. (iii) o ponto crítico de f é do tipo inflexão e isto faz com que f não possua uma simetria natural e dinamicamente definida, mesmo que seja em uma pequena vizinhança do seu ponto crítico. Ao contrário disto, u sempre possui uma simetria natural em relação ao seu ponto crítico. De fato, para todo ponto x à direita deste ponto crítico, existe um ponto x^* à esquerda deste ponto crítico tal

que $u(x) = u(x^*)$. Também podemos ver facilmente que o ponto crítico de u divide o intervalo I em dois sub intervalos os quais possuem o mesmo número de pontos críticos do iterado u^n , para todo $n \geq 1$. (iv) do ponto de vista topológico, f sempre é topologicamente semi-conjugado ao recobrimento do círculo, que denotamos por L_2 e é induzido pela aplicação de \mathbb{R} dada por $x \mapsto 2x$. Vamos assumir que f não possui intervalos errantes, não possui órbitas periódicas atratoras e nem intervalos inteiramente constituídos de pontos periódicos. Neste caso a semi-conjugação mencionada acima é de fato uma conjugação topológica. Por outro lado existem aplicações unimodais u que não são topologicamente semi-conjugadas. Uma classe importante de aplicações unimodais é a classe constituída de aplicações unimodais u que não são renormalizáveis, não possuem intervalos errantes, não possuem órbitas periódicas atratoras e nem intervalos inteiramente constituídos de pontos periódicos. De acordo com a Teoria de Milnor-Thurston em [MT88], uma aplicação unimodal desta classe sempre é topologicamente conjugada com uma *aplicação tenda* $T_\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, a saber, uma aplicação definida por $T_\alpha(x) = \alpha \min\{\alpha x, \alpha(1-x)\}$, onde $1 < \alpha \leq 2$. Mas é fácil ver que duas aplicações tendas distintas não são topologicamente conjugadas entre si. Decorre deste aspecto que um recobrimento crítico possui pontos periódicos de todos os períodos possíveis enquanto que o conjunto de períodos para pontos periódicos de uma aplicação unimodal varia com a aplicação. Por isto, também fica evidente que a dinâmica dos recobrimentos críticos possui vários ingredientes para torná-la mais rígida e com menos possibilidades de comportamentos métrico-ergódico do que o caso unimodal.

Vamos assumir no que segue que f pertence à classe \mathcal{R}^r , a classe dos recobrimentos críticos de grau topológico 2, classe C^r , com $r \geq 1$, que não possui intervalos errantes, não possui órbitas periódicas atratoras e nem intervalos inteiramente constituídos de pontos periódicos. Neste caso existe um homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $h \circ f = L - 2 \circ h$. Este homeomorfismo h é uma conjugação topológica entre f e o recobrimento L_2 . Uma das principais questões que vamos considerar neste trabalho está relacionada com a regularidade de h : por definição, h é pelo menos contínua, mas pode ser que h possua alguma regularidade adicional como ser absolutamente contínua, por exemplo. Para colocarmos esta questão de outro modo, observamos que a medida de Lebesgue λ em \mathbb{S}^1 é uma medida de probabilidade invariante por L_2 . Portanto podemos definir a medida $h^*\lambda$ definida por $h^*\lambda(\mathcal{B}) = \lambda(h(\mathcal{B}))$, para todo boreliano \mathcal{B} e é fácil ver que $h^*\lambda$ é uma medida de probabilidade invariante por f . Mas será que $h^*\lambda$ é de fato uma medida interessante para descrever propriedades estatísticas e outras propriedades métricas da dinâmica de f ? Será que $h^*\lambda$ é uma medida piac para f (isto é: uma medida de probabilidade absolutamente contínua em relação a λ e invariante para f)? Vamos ver que esta questão pode ter uma resposta negativa e estamos interessados em desvendar o quê leva a isto. Um aspecto a ser examinado é a capacidade de recorrência do ponto crítico e isto depende de certos aspectos combinatórios. Isto está enunciado de modo preciso no Teorema 4.1.1 e mostra que do ponto de vista métrico, um recobrimento crítico f pode ser bem distinto de do recobrimento L_2 . Equanto os pontos de uma órbita por f ficam mais concentrados em algumas regiões do que em outras, para L_2 os pontos de uma órbita se distribuem igualmente no círculo.

A existência e o comportamento de atratores são propriedades relevantes que devem ser investigadas em um sistema dinâmico. Toda a parte da dinâmica concentrada na bacia de atração de um atrator depende unicamente da dinâmica no próprio atrator. Em dinâmicas unidimensionais, devido a [Mañ85], estes atratores são órbitas periódicas ou contém pontos críticos. Então, se estivermos interessados apenas em aspectos topológicos, estes atratores podem ser classificados em apenas de três tipos: (i) órbita periódica atratora ou; (ii) solenoides, que são interseção enumerável de órbitas positivas de intervalos periódicos encaixantes ou; (iii) um intervalo periódico e transitivo. Além disto, o número de atratores é limitado. Veja

os artigos [Sin78], [Guc79], [Mis81], [LB86], [BL87], [GSS04] e os livros [CE83] e [dMvS93]. Acrescentamos que o caso de solenoides ocorrem em dinâmicas unimodais mas não ocorrem em dinâmicas de recobrimentos críticos.

Para descrever a dinâmica de uma aplicação unimodal em um intervalo periódico transitivo podemos pensar em métodos ergódicos e investigar sobre a existência de uma medida de probabilidade invariante. Neste caso, um iterado conveniente da aplicação unimodal é topologicamente conjugado a uma aplicação do tipo tenda. Como tal aplicação tenda possui uma medida invariante e absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue (abreviadamente, uma medida piac), chegaram-se a conjecturar, em [Guc79] e [Jak81], que a aplicação unimodal também teria uma medida piac. Muitas técnicas foram desenvolvidas para provar a existência de medida piac, mas todas estas técnicas dependem de algum tipo de expansão na órbita positiva do valor crítico, veja os artigos [CE83], [Jak81], [Mis81], [NvS88] e [BRLSvS08]. Na família quadrática chegaram-se a provar em [Lyu02] (veja também [ALdM03]) que para quase todo parâmetro α , a aplicação q_α possui uma órbita periódica atratora ou uma medida piac.

Porém, em [Joh87], foi provado que existem aplicações da família quadrática q_α que são topologicamente conjugadas a aplicações tendas, mas que não possuem uma medida piac. A ideia usada neste trabalho foi construir uma aplicação unimodal sem intervalos periódicos mas exibindo uma sequência infinita de intervalos encaixantes e quase periódicos ou possuindo quase sela-nó de períodos arbitrariamente grandes. Esta ideia foi aprimorada em [HK90] (veja também [Bru94]), com o uso de ferramentas de natureza combinatória, e chegaram-se a um bom entendimento dos motivos que levam a tal comportamento. Em uma outra frente, foi provado em [BKNvS96] (veja também [GJ90]) que uma aplicação unimodal, polinomial, com a combinatória de Fibonacci e com ponto crítico suficientemente degenerado não possui medida piac.

Neste trabalho abordamos a questão sobre a existência de medida piac para recobrimentos críticos do círculo. Intuitivamente podemos dizer que neste contexto, esta questão é mais delicada uma vez que tais recobrimentos são topologicamente mais expansores. Além disto a falta de simetria em torno do ponto crítico acarreta novas dificuldades combinatórias, uma vez que tempos de corte à direita e à esquerda precisam ser analisados. Também, vamos estudar vários aspectos combinatórios relacionados com a recorrência do ponto crítico, os quais tem o seu próprio interesse e aplicações relacionadas a existência de medida piac e outras.

Capítulo 2

Principais resultados

Neste capítulo introduzimos os primeiros conceitos e enunciamos os principais resultados deste trabalho. Eles dizem respeito a certas propriedades métricas dos sistemas dinâmicos associados a recobrimentos críticos do círculo e envolvem aspectos combinatórios e analíticos de várias naturezas.

2.1 Primeiros conceitos

O círculo \mathbb{S}^1 é por definição o conjunto de todos os números complexos de módulo 1. Consideramos \mathbb{S}^1 munido da topologia, orientação e estrutura diferenciável dos números reais \mathbb{R} , induzidas pela aplicação exponencial $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $\sigma(t) = e^{2\pi i(t-1/2)}$. Uma distância em \mathbb{S}^1 pode ser definida do seguinte modo: dados $x = \sigma(t_1)$ e $y = \sigma(t_2)$, com $t_1, t_2 \in [0, 1]$, a distância entre x e y , denotada por $|x - y|$ é o mínimo entre $|t_1 - t_2|$ e $1 - |t_1 - t_2|$. Para as figuras que usamos como ilustrações neste trabalho, escolhemos $t \in \mathbb{R}$ convenientemente e pensamos no círculo como sendo o intervalo $[t, t + 1]$, onde usamos a identificação $t \sim t + 1$. Também convenciamos chamar arcos de círculo de intervalos e usar a notação de intervalos para os mesmos.

Um *recobrimento crítico do círculo* é uma função $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ de classe C^r , onde $r \geq 1$, que possui um único ponto crítico, o qual denotamos pela letra c . Observamos que um tal recobrimento crítico é um homeomorfismo local de classe C^r de \mathbb{S}^1 e a sua função inversa local são aplicações de classe C^r , exceto no valor crítico $f(c)$. O ponto crítico c é um ponto de inflexão de f .

Exemplos específicos de recobrimentos críticos do círculo podem ser dados considerando, primeiro a família de funções $F_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, conhecida como família de Arnold, definida por

$$F_\alpha(t) = \alpha + d\left(t + \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi t)\right),$$

onde α é um parâmetro real no intervalo $[0, 1]$ e $d \neq 0$ é uma constante inteira. Então definimos a família de recobrimentos críticos do círculo f_α como sendo a correspondente função induzida por σ , a saber: $f_\alpha(\sigma(t)) = \sigma(F_\alpha(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$ (veja a Figura 2.1).

Uma boa compreensão dos sistemas dinâmicos associados a recobrimentos críticos é um objetivo ainda longe de ser atingido e depende das soluções dos mais variados tipos de questões. Passamos a descrever alguns ingredientes e abordagens que até o momento tem guiado o desenvolvimento desta área. Iniciamos observando que um recobrimento crítico f é sempre topologicamente semi-conjugado com o recobrimento $L_d : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $L_d(x) = x^d$, onde $d \neq 0$ é um inteiro chamado *grau topológico* de f . No caso em que $d \in \{-1, 1\}$, f é um homeomorfismo, sendo que para $d = -1$ a dinâmica é bem entendida

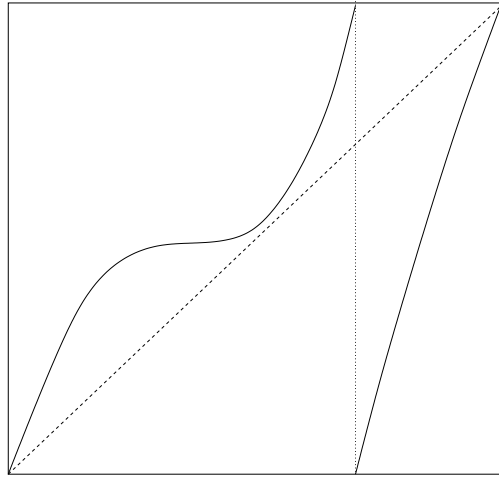


Figura 2.1: *recobrimento f_α*

e para $d = 1$ muitas questões ainda esperam por respostas. Neste trabalho, para efeitos de clareza dos resultados, consideramos apenas o caso $d = 2$, que ao contrário do que ocorre nos casos em que $d \in \{-1, 1\}$, f possui muitos pontos periódicos. Na verdade f possui pontos periódicos de todos os períodos e também possui muitos conjuntos compactos e invariantes (isto é: conjuntos compactos $\Lambda \subseteq \mathbb{S}^1$ tais que $f(\Lambda) \subseteq \Lambda$).

Dado $x \in \mathbb{S}^1$ consideramos a sua órbita positiva $\{f^n(x)\}_{n \geq 0}$ que denotamos por $\text{orb}^+(x)$ e o seu conjunto ω -limite, que é constituído de todos os pontos de acumulação de $\text{orb}^+(x)$ e é denotado por $\omega(x)$. Este conjunto é um primeiro exemplo de conjunto compacto invariante relevante para a análise da dinâmica de f . Se x é periódico, então $\omega(x) = \text{orb}^+(x)$ é um conjunto finito, mas muitas outras possibilidades podem ocorrer tais como $\omega(x)$ ser um conjunto de Cantor ou todo o círculo.

Dado um conjunto compacto e invariante, digamos Λ , consideramos a sua *bacia de atração*

$$\mathcal{B}(\Lambda) = \{x \in \mathbb{S}^1 : \omega(x) \subseteq \Lambda\}.$$

Uma maneira de medir a capacidade de um compacto invariante atrair órbitas de outros pontos depende da grandeza da sua bacia de atração. Esta grandeza pode ser medida do ponto de vista topológico ou métrico. Por exemplo, a bacia de atração de uma órbita periódica é considerada topologicamente grande se a mesma contém um intervalo aberto. Nesse caso essa órbita periódica é dita atratora. Mais geralmente, a bacia de atração de um compacto invariante é considerada topologicamente grande se a mesma contém a interseção de uma quantidade enumerável de subconjuntos abertos e densos. Nesse caso, o compacto invariante é chamado de *atrator topológico* ou simplesmente atrator se não houver risco de confusão.

Uma primeira etapa para uma boa compreensão da dinâmica de um recobrimento crítico depende de uma classificação dos seus atratores topológicos. Para o recobrimento $L = L_2$ existe um único atrator topológico que coincide com todo o círculo. Mas no caso de um recobrimento crítico podem existir órbitas periódicas atratoras que também são possíveis atratores topológicos. Também podem existir intervalos $I \subseteq \mathbb{S}^1$ cuja órbita positiva é constituída de intervalos dois a dois disjuntos, a saber: $f^m(I) \cap f^n(I) = \emptyset$, para todo $0 \leq m < n$. Um tal intervalo pode estar contido em uma componente conexa da bacia de um possível atrator periódico. Se esse não for o caso, o intervalo I é chamado de *intervalo errante*. A existência de intervalos errantes é um fator que dificulta a tarefa de classificar os atratores topológicos de um recobrimento crítico.

A semi-conjugação entre um recobrimento crítico f e o recobrimento L é sempre constante em intervalos errantes e em componentes conexas da bacia de atratores periódicos, caso esses existam. Na ausência de atratores periódicos e de intervalos errantes, essa semi-conjugação é de fato uma conjugação topológica e podemos concluir que o único atrator topológico de f é todo o círculo. Também podemos concluir que se $\text{Per}(f)$ é o conjunto de todos os pontos periódicos de f , o seu fecho $\overline{\text{Per}(f)}$ é todo o círculo.

2.2 Principais resultados

Para que um recobrimento críticos não possua intervalos errantes basta assumirmos que o mesmo é de classe C^2 e que o seu ponto crítico c tenha ordem finita, a saber: existem constantes $K \geq 1$, $S > 0$ e $\beta \geq 2$ tais que

$$K^{-1}S|x - c|^\beta \leq |f(x) - f(c)| \leq KS|x - c|^\beta,$$

para todo $x \in \mathbb{S}^1$, suficientemente próximo de c . A constante β , quando existe, é chamada de *ordem do ponto crítico*. Quando f é de classe C^2 e esta constante β não existe, para quaisquer que sejam $K \geq 1$ e $S > 0$, dizemos que o ponto crítico tem ordem infinita.

De agora em diante vamos assumir que f é um recobrimento crítico de classe C^3 , de grau topológico 2, com ponto crítico de ordem finita β e com derivada de Schwarz negativa (veja a Seção 3.4). Sendo assim, f não possui intervalos errantes. Vamos assumir também que f não possui atratores periódicos. Então f é topologicamente conjugado com $L = L_2$.

O homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que conjugua f com L , em geral não é um difeomorfismo uma vez que f possui muitos pontos periódicos. De fato, se h fosse um difeomorfismo, a derivada de f^n em um ponto periódico $p \in \text{Per}(f)$ seria igual a derivada de L^n em $h(p)$, a saber 2^n e isto não ocorre em geral.

A medida de Lebesgue no círculo, que denotamos por λ , é invariante pelo recobrimento L , ou seja, para um boreliano $B \subseteq \mathbb{S}^1$ vale que $\lambda(L^{-1}(B)) = \lambda(B)$. Então podemos definir a medida μ no círculo colocando $\mu(B) = \lambda(h(B))$, para todo boreliano $B \subseteq \mathbb{S}^1$. Esta medida μ é uma medida de probabilidade invariante por f . No entanto ainda resta saber se μ é relevante para uma descrição da dinâmica de f .

Seja ν uma medida no círculo (sempre consideramos medidas de probabilidade sobre os borelianos do círculo) que é invariante por f . A bacia de ν é definida como sendo o conjunto

$$\mathcal{B}(\nu) = \left\{ x \in \mathbb{S}^1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) = \int_{\mathbb{S}^1} \varphi d\nu, \text{ para toda } \varphi \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \right\},$$

onde $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ denota o conjunto das funções contínuas de \mathbb{S}^1 nos reais \mathbb{R} .

O suporte de ν , denotado por $\text{supp}(\nu)$, é um conjunto compacto e invariante por f , enquanto que a sua bacia é um conjunto *totalmente invariante*, a saber: $f(\text{supp}(\nu)) \subseteq \text{supp}(\nu)$ e $f^{-1}(\mathcal{B}(\nu)) \subseteq \mathcal{B}(\nu)$. Pelo teorema de Birkhoff resulta que a medida ν de $\mathcal{B}(\nu)$ é sempre igual a 1. Porém a medida de Lebesgue de $\mathcal{B}(\nu)$ pode ser nula e nesse caso a medida ν é menos relevante. Se ν é uma medida invariante por f e absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue λ (abreviadamente escrevemos: ν é uma medida piac), o suporte de ν tem medida de Lebesgue positiva. Ainda mais, dentro das condições que consideramos, f é ergódica em relação a λ e isto implica que a bacia de ν tem medida de Lebesgue total. Isto garante que as medidas piac são de grande relevância para uma descrição de aspectos estatísticos associados à dinâmica de f . Se a bacia de uma medida invariante ν tem medida de Lebesgue total, dizemos que ν é uma *medida física*. Uma medida piac é sempre uma

medida física.

Um dos principais temas que abordamos nesse trabalho diz respeito a existência de recobrimentos críticos f que são topologicamente conjugados ao recobrimento L mas que não possuem medidas piac.

Teorema A. *Seja $f \in \mathcal{R}$ um recobrimento crítico cuja sequência \mathcal{E} -kneading é φ_∞ , então f não possui medida piac.*

Teorema B. *O conjunto dos parâmetros $\alpha \in [0, 1]$ tais que f_α é topologicamente conjugado com o recobrimento do círculo dado por $L(x) = x^2$ e não possui uma medida de probabilidade invariante e absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue não é enumerável.*

Como comentamos acima, uma conjugação topológica entre um recobrimento crítico f e o recobrimento L , não é um difeomorfismo. De acordo com o Teorema A, esse homeomorfismo pode chegar ao extremo de transformar um conjunto com medida de Lebesgue total em outro com medida de Lebesgue nula e vice versa. Em particular esse homeomorfismo não é absolutamente contínuo.

Dado um recobrimento crítico f , a ordem do seu ponto crítico é um fator relevante para a existência ou não de uma medida piac. A capacidade de recorrência do ponto crítico, que depende de aspectos combinatórios, é outro fator determinante. De acordo com a prova do Teorema B, vamos concluir que as derivadas de nos seus pontos periódicos também desempenham um papel nesta questão.

2.3 Aplicações unimodais

Nesta seção vamos discutir a existência de medidas piac para aplicações unimodais e comparar com a situação menos explorada dos recobrimentos críticos do círculo. Relembramos que uma *aplicação unimodal* é uma função contínua de um intervalo fechado I nele próprio, $u : I \rightarrow I$, que possui um único extremo local no interior de I . Este ponto pode ser um ponto de máximo ou de mínimo local e também é denotado pela letra c . Quando u é de classe C^1 , este extremo local é um ponto crítico, o qual assumimos ser o único ponto crítico de u . Assumimos também, sem perda de generalidade, que u aplica o bordo de I em um único ponto do bordo de I .

As *aplicações tendas* $T_\alpha(x) = \min\{\alpha x, \alpha(1-x)\}$ e as *aplicações quadráticas* $q_\alpha(x) = 2\alpha x(1-x)$, onde $x \in I = [0, 1]$ e α é um parâmetro que varia em $[0, 2]$, são os exemplos mais populares de aplicação unimodal (vejam as Figuras 2.2 e 2.3).

No contexto das aplicações unimodais é até bem intuitivo que a existência ou não de intervalos errantes, a ordem e a capacidade de recorrência do ponto crítico e a presença ou não de atratores topológicos são fatores relevantes para a existência ou não de uma medida piac. Ressaltamos aqui que os atratores topológicos de uma aplicação unimodal podem ser uma órbita periódica atratora, a órbita positiva de um intervalo periódico e transitivo ou um *solenóide*, ou seja, uma interseção enumerável de órbitas positivas de intervalos periódicos encaixantes e com períodos crescentes. As aplicações unimodais que possuem solenóides são chamadas de *infinitamente renormalizáveis*. Quando uma tal aplicação é de classe C^2 e tem ponto crítico de ordem finita, o seu solenóide é um conjunto de Cantor minimal que contém o ponto crítico e tem medida de Lebesgue nula. No entanto a sua bacia de atração é uma interseção enumerável de conjuntos abertos e densos e tem medida de Lebesgue total. Portanto aplicações unimodais infinitamente renormalizáveis não possuem medidas piac.

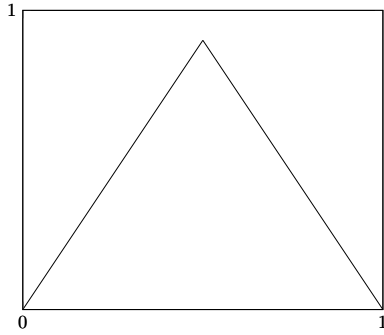


Figura 2.2: aplicação tenda

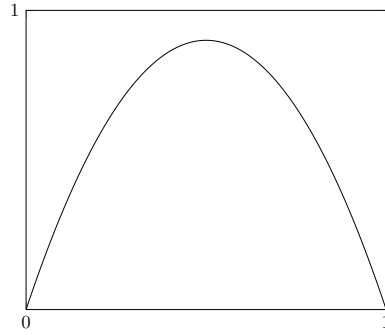


Figura 2.3: aplicação quadrática

Relembramos que as aplicações tendas T_α , para $\alpha > 1$, possuem no máximo uma quantidade finita de intervalos periódicos encaixantes e não são infinitamente renormalizáveis. Uma tal aplicação tenda sempre possui uma medida *piac*. Inicialmente chegou-se a conjecturar que se uma aplicação unimodal fosse topologicamente conjugada com uma aplicação tenda, ela possuiria uma medida *piac*. Mas em [Joh87], escolhendo-se uma aplicação quadrática q_α suficientemente próxima de uma infinitamente renormalizável, provou-se que esse não era o caso. A não existência de medida *piac* foi explorada mais detalhadamente em [HK90]. Ficou constatado que a ordem do ponto crítico, a sua capacidade de recorrência bem como as derivadas nos pontos periódicos desempenham um papel fundamental para existência ou não de uma medida *piac*.

Para concluir esta seção ressaltamos que um recobrimento crítico do círculo só possui um intervalo periódico quando possui uma órbita periódica atratora. Neste caso o intervalo periódico está contido em bacias de órbitas periódicas atratoras. Sendo assim os recobrimentos críticos são topologicamente mais expansores do que as aplicações unimodais. Portanto descrever as situações que levam a não existência de medidas *piac* neste primeiro caso é mais delicado do que no segundo caso.

Capítulo 3

Conceitos e ferramentas

Aspectos métricos da dinâmica de um recobrimento crítico f de classe C^2 depende de uma competição entre uma certa expansividade que ocorre em regiões mais afastadas do ponto crítico e uma contração arbitrariamente grande em regiões próximas deste ponto. A medida que iteramos f a expansividade tende a ganhar da contração, a menos que esta última se realimente muito frequentemente. Isto depende da força de recorrência do ponto crítico que está relacionada às sequências de tempos de primeira aproximação à direita e a esquerda definidas abaixo. No entanto não é claro quais são os pares de sequências de inteiros positivos podem ser realizadas como sequências de primeira aproximação à direita e a esquerda para algum recobrimento crítico.

3.1 Recorrência do ponto crítico

Seja \mathcal{R} o conjunto de todos os recobrimentos críticos de classe C^2 , de grau topológico 2, com ponto crítico de ordem finita β e sem intervalos inteiramente constituídos de pontos periódicos. De agora em diante fixamos $f \in \mathcal{R}$. Sendo assim, f não possui intervalos errantes. Vamos assumir também que f não possui atratores periódicos. Então existe um homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que conjuga f com $L = L_2$. Como já comentamos este homeomorfismo h não é um difeomorfismo e um dos objetivos deste trabalho é, além de verificar se h possui alguma regularidade, estudar as situações que acarretam irregularidades em h . Em especial, estamos interessados nos fatores que levam h a não ser absolutamente contínuo. Dito de outra forma, estamos interessados nos fatores que levam a medida de probabilidade μ , invariante por f e definida no capítulo anterior, não ser uma medida piac. A nossa expectativa, que confirmaremos no decorrer deste trabalho, é que o comportamento do ponto crítico de f desempenha um papel fundamental nesta questão. A ordem deste ponto crítico, a maneira pela a qual a sua órbita positiva está ordenada no círculo e o seu grau de recorrência são de grande relevância e tem influências, não somente em aspectos topológicos, mas também em aspectos métricos como as propriedades da medida invariante μ e outras.

Como mencionamos antes, o conjunto ω -limite de um ponto $x \in \mathbb{S}^1$, denotado por $\omega(x)$, é sempre um conjunto compacto e invariante. Se $x \in \omega(x)$, dizemos que x é *recorrente*. Em geral, um recobrimento crítico possui muitos conjuntos compactos e invariantes e todos são relevantes para a compreensão da dinâmica. Estes conjuntos sempre são suportes de probabilidades invariantes, por exemplo.

O fato do ponto crítico ser especial faz com que o conjunto $\omega(c)$ também seja especial. Se c não é recorrente, então é sabido que f possui uma medida piac. Vamos considerar então o caso em que c é recorrente. Para estudar o seu grau de recorrência, consideramos os arcos de círculo (c, c_1) e (c_1, c) , onde $c_1 = f(c)$. De um modo geral, vamos sempre usar a notação

$c_n = f^n(c)$, para todo inteiro $n \geq 1$. Consideramos então as sequências de inteiros positivos $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_n\}_{n=1}^\infty$, chamadas respectivamente, *tempos de primeira aproximação à direita e à esquerda*, definidos indutivamente pelas seguintes propriedades:

1. $c_i \notin (c, c_{d_n})$, para todo $0 < i < d_{n+1}$ e $c_{d_{n+1}} \in (c, c_{d_n})$.
2. $c_i \notin (c, c_{e_n})$, para todo $0 < i < e_{n+1}$ e $c_{e_{n+1}} \in (c, c_{e_n})$.

A ideia é que quanto “menores” forem os tempos de primeira aproximação, mais fortemente recorrente será o ponto c . No entanto o fato de existirem duas sequências de tempos de primeira aproximação impede que tenhamos uma ordem total e tornar esta ideia precisa é uma tarefa difícil. Também podemos constatar que entre dois tempos de primeira aproximação à esquerda consecutivos podem existir muitos tempos de aproximação à direita e vice versa. De fato ainda existe a questão sobre quais são os pares de sequências que podem ser realizadas como sequências de tempos de primeira aproximação à direita e esquerda. Este é um primeiro aspecto que faz os recobrimentos críticos diferentes das aplicações unimodais as quais possui uma única sequência de tempos de primeira aproximação. Uma das causas destas dificuldades adicionais no caso de recobrimentos críticos é a falta de uma simetria natural em torno de c .

Existem recobrimentos críticos tais que os tempos de primeira aproximação são $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 8, \dots$ e $e_1 = 2$, $e_2 = 5$, $e_3 = 13, \dots$. Isto pode ser escrito do seguinte modo: $d_{n+1} = e_n + d_{n-1}$ e $e_{n+1} = d_n + e_{n-1}$. Este recobrimento crítico é chamado de *recobrimento Fibonacci* e tem ponto crítico c com um alto grau de recorrência. Na verdade, no caso Fibonacci, $\omega(c)$ é um conjunto de Cantor invariante e minimal. No entanto, existem outras situações em que c possui recorrência ainda mais forte, em um sentido que tornaremos preciso mais adiante.

Seja $\Lambda \subseteq I$, um conjunto compacto e invariante pelo recobrimento crítico f . Definimos a *bacia* de Λ como sendo o conjunto:

$$\mathcal{B}(\Lambda) = \{x \in I : \omega(x) = \Lambda\}.$$

Se $\mathcal{B}(\Lambda)$ é um conjunto genérico, o que quer dizer que é uma interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos no círculo, dizemos que Λ é um *atrator topológico*. Se Λ é um subconjunto próprio do círculo, podemos ver que a sua bacia $\mathcal{B}(\Lambda)$ é sempre um *conjunto magro*. Isto quer dizer que $\mathcal{B}(\Lambda)$ é uma união de subconjuntos fechados e de interior vazio. Então os únicos atratores topológicos (para um recobrimento do círculo sem intervalos errantes) são as órbitas periódicas atratoras, quando estas existem, e também todo o círculo. Resta saber no entanto, no caso em que Λ é um subconjunto próprio do círculo, compacto e invariante, se $\mathcal{B}(\Lambda)$ tem medida de Lebesgue positiva, neste caso dizemos que Λ é um *atrator métrico*. Os atratores métricos que não são atratores topológicos (ou vice-versa) são chamados *atratores selvagens*.

No contexto de aplicações unimodais é sabido que pode existir um conjunto de Cantor invariante e minimal (de fato com a combinatória de Fibonacci) que é um atrator selvagem, veja [BKNvS96]. A existência de um recobrimento crítico do círculo exibindo um atrator selvagem ainda é um problema em aberto. Mais uma vez, vemos que no caso de recobrimentos críticos existem aspectos mais delicados do que no caso unimodal.

3.2 Tempos de corte e aplicações kneading

Seja $f \in \mathcal{R}$ seja menos topologicamente expansor ou seja, f é topologicamente conjugado com um recobrimento expansor de derivada constante e igual a 2. Mas cabe perguntar se

a presença de um ponto crítico, mesmo sem alterar a dinâmica topologicamente, pode impedir qualquer expansividade métrica de f . Pensando na solução deste tipo de questão, muitas vezes somos levados a procedimentos para eliminar o ponto crítico. Podemos particionar o círculo em intervalos e, em cada um destes intervalos, substituir f por um iterado adequado. Este é um procedimento usado com bastante frequência em dinâmica unidimensional e a função resultante costuma-se chamar de *função induzida*.

É natural pensarmos nos intervalos (arcos de círculo) máximos cujos interiores não contém pontos críticos de um iterado f^n , para cada $n \geq 1$. Um tal intervalo, denotado por J_n , é chamado de *intervalo acrítico* para f^n . Observe que o bordo de um tal intervalo J_n são pontos da órbita negativa de c . Já os pontos do bordo de $f^n(J_n)$ pertencem a órbita positiva de c . Em particular, sempre existem $0 \leq i \leq j < n$ tal que os bordos de $f^i(J_n)$ e $f^j(J_n)$ contém o ponto crítico c . Sendo assim dedicamos mais atenção aos intervalos acríticos cujo bordo contém c , os quais chamamos de *intervalos acríticos centrais*. Se J_n é um tal intervalo acrítico central para f^n , chamamos a restrição $f^n|_{J_n}$ de *ramo central*.

Como f não possui pontos críticos em $\mathbb{S}^1 \setminus \{c\}$, definimos $J_1^+ = J_1^- = \mathbb{S}^1 \setminus \{c\}$. Chamamos J_1^+ e J_1^- de intervalos acríticos centrais para f , J_1^+ à direita e J_1^- à esquerda de c . Ao mesmo tempo, definimos $z_0^+ = z_0^- = c$ e chamamos z_0^+ e z_0^- de pontos pré-críticos mais próximos à direita e à esquerda, respectivamente. Os primeiros tempos de corte correspondentes são $S_0^+ = 0$, tempo de corte à direita e $S_0^- = 0$, tempo de corte à esquerda.

Assumindo que c não é um ponto fixo, existem duas pré-imagens distintas de c por f , as quais denotamos por Z_1^+ e Z_1^- . Estas pré-imagens são escolhidas de modo que $(c, Z_1^-) \cap (Z_1^+, c) = \emptyset$. Para uso posterior, definimos $z_1^+ = Z_1^-$ e $z_1^- = Z_1^+$. Os intervalos (c, z_1^+) e (z_1^-, c) são intervalos acríticos centrais para f^2 . Convencionamos que o primeiro destes intervalos está à direita de c enquanto que o segundo está à esquerda de c . Os pontos z_1^+ e z_1^- , também são pontos pré-críticos mais próximos, à direita e à esquerda, respectivamente. Também definimos o tempo de corte $S_1^+ = 1$, à direita e o tempo de corte $S_1^- = 1$, à esquerda.

Vamos mostrar, usando indução em k , que existem os pontos pré-críticos à direita

$$c \dots < z_k^+ \leq Z_k^+ < \dots < z_1^+ \leq Z_1^+ < z_0^+ = Z_0^+ = c,$$

e os tempos de corte à direita

$$0 = S_0^+ < \dots < S_k^+ < \dots$$

Analogamente, existem os pontos pré-críticos à esquerda

$$c = Z_0^- = z_0^- < Z_1^- \leq z_1^- < \dots < Z_k^- \leq z_k^- < \dots < c$$

e os tempos de corte à esquerda

$$0 = S_0^- < \dots < S_k^- < \dots$$

Antes da demonstração por indução da existência dos pontos pré-críticos mais próximos à direita, veja a Figura 3.1, que mostra a posição relativa dos pontos pré-críticos mais próximos à direita e à esquerda.

Estes pontos pré-críticos e os tempos de corte à direita são determinados pelas propriedades:

(a) $f^{S_k^+}(z_k^+) = f^{S_k^+}(Z_k^+) = c$;

(b) (c, z_k^+) é um intervalo máximo no qual $f^{S_k^++1}$ é um difeomorfismo.

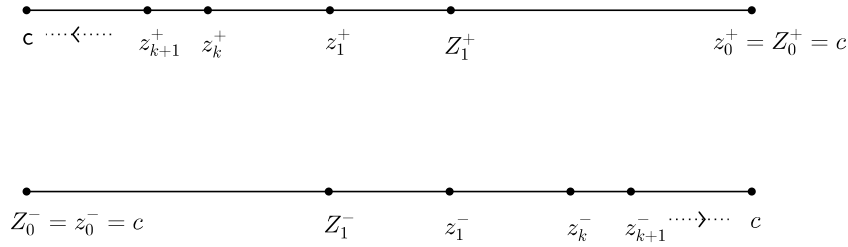


Figura 3.1: pré-críticos mais próximos

Para mostrar este fato, vamos usar indução em k . Assumimos que S_i^+ , z_i^+ e Z_i^+ , para $0 \leq i \leq k$, existem. Como f não possui intervalos errantes e nem órbitas periódicas atratoras, existe o menor inteiro $S_{k+1}^+ > S_k^+$ tal que $c \in f^{S_{k+1}^+}(c, z_k^+)$. Definimos $c < z_{k+1}^+ \leq Z_{k+1}^+ < z_k^+$ como sendo as pré-imagens de c por $f^{S_{k+1}^+}$. As Propriedades (a) e (b) são satisfeitas e isto encerra a indução.

Então temos a sequência $\{S_k^+\}_{k=0}^\infty$, os tempos de corte à direita, as sequências $\{z_k^+\}_{k=0}^\infty$ e $\{Z_k^+\}_{k=0}^\infty$, pontos pré-críticos à direita. Os pontos z_k^+ são chamados de *pontos pré-críticos mais próximos à direita*. Se $z_{k+1}^+ < Z_{k+1}^+$, dizemos que S_{k+1}^+ é um *tempo de duplicação à direita*. O tempo $S_0^+ = 1$, por exemplo, é um tempo de duplicação à direita. Então, também temos a sequência $\{d_k^+\}_{k=0}^\infty$ dos tempos de duplicação à direita. Analogamente, existem a sequência $\{S_k^-\}_{k=0}^\infty$, os tempos de corte à esquerda, as sequências $\{z_k^-\}_{k=0}^\infty$ e $\{Z_k^-\}_{k=0}^\infty$, pontos pré-críticos à esquerda e a sequência $\{d_k^-\}_{k=0}^\infty$, os tempos de duplicação à esquerda.

As sequências de tempos de corte, assim como as sequências de tempos de duplicação, são características combinatórias bem relevantes de um recobrimento crítico. Duas questões de importantes para uma boa compreensão dos sistemas dinâmicos gerados por recobrimentos críticos são as seguintes: (i) Saber se estas sequências determinam a classe de conjugação topológica do recobrimento crítico f . (ii) Saber quais são as condições para que quatro sequências dadas possam ser realizadas como sequências de tempos de corte e sequências de tempos de duplicação.

O lema a seguir reúne algumas propriedades importantes dos tempos de corte, dos pontos pré-críticos e dos tempos de duplicação. Vamos enunciar este lema apenas para o caso à direita mas o enunciado análogo continua sendo verdadeiro para o caso à esquerda.

Lema 3.2.1 *Considerando o contexto acima, temos que para todo $k \geq 0$, valem as seguintes propriedades:*

- (a) Se $S_k^+ < n \leq S_{k+1}^+$, então a restrição de f^n ao intervalo (c, z_k^+) é um difeomorfismo;
- (b) S_{k+1}^+ é o maior inteiro tal que a restrição de $f^{S_{k+1}^+}$ ao intervalo (c, z_{k+1}^+) é um difeomorfismo;
- (c) Se $z_{k+1}^+ < Z_{k+1}^+$, o intervalo (z_{k+1}^+, Z_{k+1}^+) é aplicado difeomorficamente sobre $\mathbb{S}^1 \setminus \{c\}$ por $f^{S_{k+1}^+}$. Neste caso S_{k+1}^+ é chamado de tempo de duplicação à direita;
- (d) Se f não possui intervalos errantes e nem órbitas periódicas atratoras, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k^+ = \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k^+ = c.$$

Demonstração:

A demonstração deste lema segue facilmente dos conceitos de tempo de corte e pontos pré-críticos mais próximos introduzidos acima. □

A diferença entre dois tempos de corte à direita é um tempo de corte à esquerda e vice-versa. Este fato permite-nos introduzir uma característica combinatória de grande relevância para o estudo da dinâmica dos recobrimentos críticos, são as *aplicações kneading* Q^+ e Q^- .

Lema 3.2.2 *Existem duas aplicações $Q^+, Q^- : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, chamadas de aplicações kneading à direita e à esquerda (respectivamente), tais que, para todo $k \geq 0$, valem que*

$$(a) \quad S_{k+1}^+ - S_k^+ = S_{Q^+(k+1)}^- \quad e \quad S_{k+1}^- - S_k^- = S_{Q^-(k+1)}^+ \quad (3.1)$$

Em particular $Q^+(k+1) \geq 1$ e $Q^-(k+1) \geq 1$;

$$(b) \quad f^{S_k^+}(z_{k+1}^+) = Z_{Q^+(k+1)}^- \quad e \quad f^{S_k^+}(Z_{k+1}^+) = z_{Q^+(k+1)}^- \quad (3.2)$$

$$f^{S_k^-}(z_{k+1}^-) = Z_{Q^-(k+1)}^+ \quad e \quad f^{S_k^-}(Z_{k+1}^-) = z_{Q^-(k+1)}^+ \quad (3.3)$$

Em particular, se $S_{k+1}^+ \geq 2$ é um tempo de duplicação à direita, então $S_{Q^+(k+1)}^-$ é um tempo de duplicação à esquerda. Vale uma afirmação análoga para S_{k+1}^- .

Demonstração.

Vamos demonstrar este lema apenas para os tempos de corte à direita, uma vez que o outro caso é completamente análogo. A Figura 3.2 ilustra a definição da aplicação kneading Q^+ e a relação entre os pontos pré-críticos mais próximos, no caso em S_{k+1}^+ é um tempo de duplicação à direita. Se S_{k+1}^+ não é um tempo de duplicação à direita, então $z_{k+1}^+ = Z_{k+1}^+$ e a demonstração é a mesma.

Como $z_{k+1}^+, Z_{k+1}^+ \in (c, z_k^+)$, resulta que

$$f^{S_k^+}(z_{k+1}^+), f^{S_k^+}(Z_{k+1}^+) \in (c_{S_k^+}, c) \quad e \quad c \in f^{S_{k+1}^+ - S_k^+}(c_{S_k^+}, c).$$

Portanto os pontos $f^{S_k^+}(z_{k+1}^+), f^{S_k^+}(Z_{k+1}^+)$ são pontos pré-críticos à esquerda. Também temos que $f^{S_{k+1}^+ - S_k^+}$ não possui pontos críticos em $(c_{S_k^+}, c)$. Então a diferença $S_{k+1}^+ - S_k^+$ é um tempo de corte à esquerda e podemos concluir que existe o inteiro $Q_{k+1}^+ \geq 1$ como no enunciado do lema. O Itém (b) está ilustrado na Figura 3.2 e segue facilmente. □

3.3 Primeiros retornos

Aplicações de primeiro retorno é uma ferramenta muito usada em todos os contextos de sistemas dinâmicos e aqui ela pode ser útil para evidenciar algumas propriedades de um

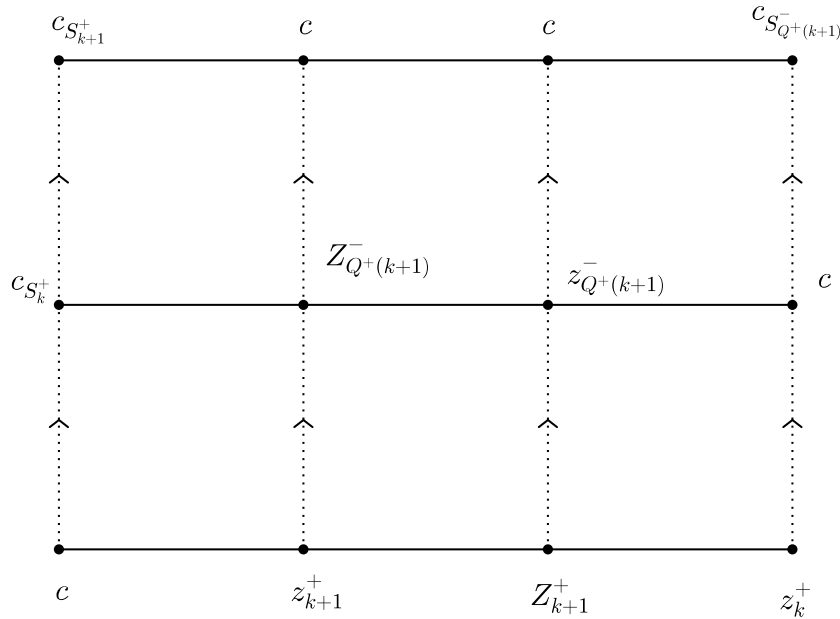


Figura 3.2: aplicação kneading Q^+

recobrimento crítico. Questões combinatórias e envolvendo o grau de recorrência do ponto crítico podem ser analisadas através destas aplicações.

Dado um recobrimento crítico sem órbita periódica atratora $f \in \mathcal{R}$, consideramos o seu único ponto fixo, denotamo-lo por p . O conjunto $f^{-1}(p)$ possui dois pontos, o próprio ponto p e uma outra pré imagem de p que denotamos por q . Vamos assumir que $c \in U_0 = (q, p)$ e que o ponto crítico c é recorrente. Sendo assim fica definida indutivamente uma sequência de intervalos encaixantes

$$U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots \supseteq \{c\},$$

onde U_n é uma componente conexa do domínio da aplicação de primeiro retorno a U_{n-1} . Sendo assim $\pi_n : U_n \rightarrow U_{n-1}$ é um ramo desta aplicação. Então temos a sequência $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ dos *tempos de primeiro retorno* do ponto crítico que são definidos pela igualdade $\pi_n(c) = f^{t_n}(c)$. Com esta sequência de tempos de primeiro retorno podemos sempre comparar dois recobrimentos críticos estabelecendo que aquele para o qual esta sequência é menor na ordem lexicográfica é o mais fortemente recorrente. A questão sobre quais sequências de inteiros podem ser realizadas como sequências de tempos de primeiro retorno de um recobrimento crítico ainda permanece como uma questão a ser discutida posteriormente.

Também podemos observar que a partição do círculo nos dois arcos $[q, p)$ e $[p, q)$ é uma partição de markov e permite associar a cada $x \in \mathbb{S}^1$ o seu itinerário

$$\mathcal{I}(x) = (u_0(x) \ u_1(x) \ u_2(x) \ \dots),$$

definido colocando

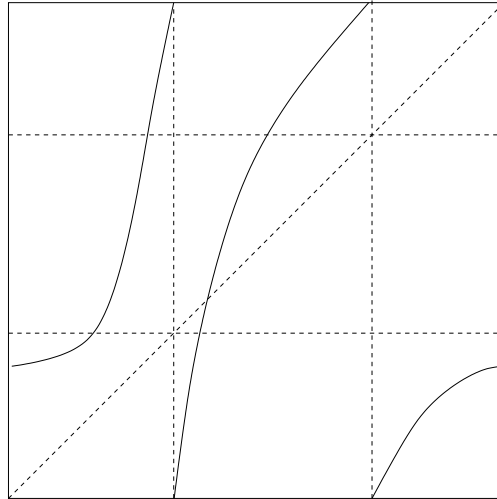


Figura 3.3: um recobrimento f

$$u_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f^i(x) \in [q, p), \\ 1, & \text{se } f^i(x) \in [p, q). \end{cases}$$

Fica então definida a aplicação itinerário $\mathcal{I} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma_2$, onde $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Esta aplicação é sempre sobrejetiva.

Como o ponto crítico é especial, o destacamos dando um nome especial para o itinerário do valor crítico $f(c)$, a saber:

$$\mathcal{I}_f(f(c)) = (u_1(f(c)) u_2(f(c)) u_3(f(c)) \cdots),$$

é chamado *sequência \mathcal{I} -kneading* e é denotada por k_f . Observamos que qualquer sequência $\underline{\theta} = (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots) \in \Sigma_2$ pode ser realizada como a sequência \mathcal{I} -kneading de um recobrimento crítico. Na verdade este recobrimento crítico pode ser escolhido na família de Arnold f_α , definida anteriormente.

A sequência \mathcal{I} -kneading determina a ordem da órbita crítica positiva em \mathbb{S}^1 e se dois recobrimentos críticos f e g tem a mesma sequência \mathcal{I} -kneading, então as suas órbitas críticas positivas tem a mesma ordem no círculo, isto é, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $h(f^n(c_f)) = g^n(c_g)$. Neste caso dizemos que f e g são *combinatoriamente equivalentes*. Se f e g não possuem intervalos errantes e nem atratores periódicos, então esta equivalência combinatória pode ser promovida para uma conjugação topológica.

Os ramos de primeiro retorno $\phi_n : U_n \rightarrow U_{n-1}$ detectam alguns dos pontos pré críticos mais próximos das sequências $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty$ e $\{z_k^-\}_{k=1}^\infty$. De fato, como estes são estritamente crescentes e sobrejetivos sempre existe um único $y_n \in U_n$ tal que $\pi_n(y_n) = c$. Se $\pi_n(c) > c$, então y_n é o ponto z_k^- tal que $S_k^- = t_n$ e se $\pi_n(c) < c$, então y_n é o ponto z_k^+ tal que $S_k^+ = t_n$. É claro que a aplicação de primeiro retorno ao intervalo U_{n-1} possui muitos outros ramos além de π_n e todos eles definem pontos pré-críticos. Alguns destes são pontos pré-críticos mais próximos e estão na sequência $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty$ ou $\{z_k^-\}_{k=1}^\infty$. A tarefa de detectar quais são e quais não são pontos pré-críticos mais próximos depende do tempo de retorno do ramo em questão.

Ressaltamos que a sequência \mathcal{I} -kneading k_f definida acima, baseada na partição do círculo determinada pelo ponto fixo p e pela sua pré imagem q , não possui uma relação clara com os tempos de corte à direita e à esquerda. Devido a isto propomos a partição do círculo definida pelo ponto crítico c e suas pré imagens $z_1^- < c < z_1^+$. Esta partição possui três arcos de círculo que são $I_0 = [c, z_1^+]$, (z_1^+, z_1^-) e $J_0 = [z_1^-, c]$ (veja a Figura 3.3).

Ficam definidas indutivamente duas seqüências de intervalos encaixantes

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \quad \text{e} \quad J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots$$

onde I_n e J_n são componentes conexas do domínio da aplicação de primeiro retorno a $I_{n-1} \cup J_{n-1}$. Sendo que um dos extremos de I_n (e também de J_n) é c . Sendo assim $\phi_n : I_n \rightarrow I_{n-1} \cup J_{n-1}$ e $\psi_n : J_n \rightarrow I_{n-1} \cup J_{n-1}$ são ramos desta aplicação. Novamente temos uma seqüência $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ de *tempos de primeiro retorno* do ponto crítico que são definidos pela igualdade $\phi_n(c) = \psi_n(c) = f^{r_n}(c)$. Assim como com a seqüência $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, esta seqüência $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ pode ser usada para comparar dois recobrimentos críticos. Estabelecemos que aquele para o qual esta seqüência é menor na ordem lexográfica é o mais fortemente recorrente. A questão sobre quais seqüências de inteiros podem ser realizadas desta forma ainda permanece como uma questão a ser discutida posteriormente.

Uma desvantagem aqui é que a partição do círculo nos três arcos $I_0 = [c, z_1^+]$, $\hat{M}_1 = (z_1^+, z_1^-)$ e $J_0 = [z_1^-, c]$ não é uma partição de Markov. Mesmo assim vamos associar a cada $x \in \mathbb{S}^1$ o seu itinerário $\mathcal{E}(x) = (v_0(x) v_1(x) v_2(x) \dots)$ definido colocando

$$v_i(x) = \begin{cases} A, & \text{se } f^i(x) \in [c, z_1^+], \\ B, & \text{se } f^i(x) \in (z_1^+, z_1^-), \\ C, & \text{se } f^i(x) \in [z_1^-, c]. \end{cases}$$

Agora temos a aplicação itinerário $\mathcal{E} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma_3$, onde $\Sigma_3 = \{A, B, C\}^{\mathbb{N}}$. Esta aplicação não é mais sobrejetiva, e os itinerários da sua imagem são chamados de *itinerários admissíveis*. Surge a questão de estabelecer um critério que permita decidir quais $\underline{\theta} = (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots) \in \Sigma_3$ são admissíveis.

Aqui fica uma questão extremamente interessante, como todas as seqüências em dois símbolos em Σ_2 são admissíveis, aquelas seqüências em três símbolos em Σ_3 que são admissíveis correspondem a alguma maneira de inserir o espaço Σ_2 em Σ_3 . Então colocamos a seguinte conjectura:

Conjectura. Seja $\Gamma \subset \Sigma_3$ invariante pelo shift e topologicamente conjugado ao shift em Σ_2 . Então Γ pode ser realizado como o conjunto de itinerários de um recobrimento de grau dois do círculo, usando-se uma partição em três intervalos a partir de um ponto qualquer.

O itinerário do valor crítico $f(c)$, a saber:

$$\mathcal{E}_f(f(c)) = (v_1(f(c)) v_2(f(c)) v_3(f(c)) \dots),$$

é chamado *seqüência \mathcal{E} -kneading* e é denotada por κ_f . Quais itinerários $\underline{\theta} = (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots) \in \Sigma_3$ podem ser realizados como a seqüência \mathcal{E} -kneading de um recobrimento crítico passa também a ser uma questão para posterior análise. De qualquer modo esperamos que sempre que esta realização for possível, ela será possível na família de Arnold f_α .

A seqüência \mathcal{E} -kneading também determina a ordem da órbita crítica positiva em \mathbb{S}^1 . Portanto, como antes, dois recobrimentos críticos f e g tem a mesma seqüência \mathcal{E} -kneading se, e somente se, são combinatoriamente conjugados.

Os ramos de primeiro retorno $\phi_n : I_n \rightarrow I_{n-1} \cup J_{n-1}$ detectam alguns dos pontos pré críticos à direita enquanto que os ramos $\psi_n : J_n \rightarrow I_{n-1} \cup J_{n-1}$ detectam alguns dos pontos pré críticos à esquerda. Para os tipos combinatorios que vamos construir, usamos estes ramos para determinar todos os pontos pré críticos mais próximos e também os tempos de corte e aplicações \mathcal{E} -kneading.

3.4 Derivada de Schwarz e Princípios de Koebe

Para obtermos resultados de natureza métrica, inevitavelmente temos de usar ferramentas que permitam analisar o efeito de iterar uma função sobre o comprimento de intervalos adjacentes. Usando outras palavras, precisamos saber se os iterados de um recobrimento crítico expande todos os intervalos com taxas comparáveis ou não. É claro que intervalos em torno do ponto crítico podem ser muito contraídos, enquanto que intervalos que permanecem distante do ponto crítico é expandido. Como veremos, estas questões possuem formulações bem precisas e a ferramenta principal que usamos são os Princípios de Koebe enunciados mais adiante. Segundo este princípio, fazendo algumas hipóteses bem razoáveis, intervalos adjacentes que permanecem distantes do ponto crítico quando iterados, são expandidos em taxas comparáveis. Os livros [CE83] and [dMvS93] tratam este assunto de forma mais detalhada e contém mais comentários e as demonstrações dos fatos que enunciamos aqui.

A *derivada de Schwarz* de um recobrimento crítico f , de classe C^3 , é definida por

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2,$$

para todo de $x \neq c$. A derivada de Schwarz possui uma interessante regra da cadeia, a saber: se g e h são de classe C^3 , então temos a seguinte fórmula para a derivada de Schwarz da composta $g \circ h$, a saber:

$$S(g \circ h)(x) = Sg(h(x))(h'(x))^2 + Sh(x).$$

Disto decorre que a composição de duas funções com derivada de Schwarz negativa tem derivada de Schwarz negativa. Em particular iterados de uma função com derivada de Schwarz negativa continua tendo derivada de Schwarz negativa e isto torna este conceito muito útil em dinâmica. Em 1978 Singer [Sin78] usou a derivada de Schwarz em dinâmica unidimensional para controlar o número de atratores periódicos de uma aplicação unimodal. Foi provado que se uma função que é de classe C^3 e tem derivada de Schwarz negativa, então o módulo da sua derivada não possui mínimo local positivo. Disto resultou que uma aplicação unimodal de classe C^3 e com derivada de Schwarz negativa pode ter no máximo uma órbita periódica atratora. Este importante resultado popularizou o uso da derivada de Schwarz em dinâmica unidimensional.

As aplicações quadráticas q_α e os recobrimentos críticos da família de Arnold f_α são exemplos de funções que tem derivada de Schwarz negativa. Todo polinômio real com raízes reais e simples te derivada de Schwarz negativa. A classe das funções de classe C^3 que tem derivada de Schwarz negativa é um aberto na topologia C^3 . Também é interessante lembrar que as transformações de Möbius são exatamente as que tem derivada de Schwarz nula, veja [dMvS93].

Uma medida de quanto uma função g de classe C^1 deixa de ser linear em um intervalo I do seu domínio é medida pela sua *distorção* em I , denotada por $NL(g, I)$ e definida como sendo o seguinte supremo:

$$NL(g, I) = \sup_{x, y \in I} \frac{|Dg(x)|}{|Dg(y)|}$$

Um outro modo de pensarmos na distorção seria pensarmos na razão cruzada de três pontos, o que é equivalente a pensar na razão dos comprimentos de dois intervalos adjacentes. Mais

precisamente, sejam $U, V \subset I$, dois intervalos adjacentes. Então a razão

$$\frac{|g(U)| |V|}{|g(V)| |U|}$$

é uma medida de como g altera o comprimento de U em comparação com o de V . O supremo desta razão sobre todos os pares de intervalos adjacentes $U, V \subset I$ é uma outra maneira de definir a distorção de g no intervalo I . Na verdade esta definição faz sentido até para homeomorfismos ou funções contínuas e estritamente monótonas.

A presença de um ponto crítico como no caso de um recobrimento crítico do círculo dificulta o estudo da variação da distorção quando tomamos iterados. Então é natural considerar a razão cruzada de quatro pontos o que corresponde a três intervalos adjacentes. Sejam J e T um par de intervalos abertos e limitados da reta tais que $\bar{J} \subset T$. Sejam L e R as componentes conexas de $T \setminus J$.

Definimos a *razão cruzada* dos intervalos T e J por

$$D(T, J) = \frac{|J||T|}{|L||R|}$$

Se $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e estritamente monótona, para cada par de intervalos J e T contidos em I , definimos

$$B(g, T, J) = \frac{D(g(T), g(J))}{D(T, J)}$$

que é uma medida da distorção da razão cruzada dos intervalos J e T por g .

Sabemos que $B(g, T, J) = 1$, para todo intervalos $J \subset T \subset I$ se, e somente se, g é uma transformação de Moebius em I . Se g é de classe C^3 e tem derivada de Schwarz negativa, então

$$B(g, T, J) > 1$$

A razão cruzada está relacionada com uma métrica de Poincaré no intervalo $T \subset I$: se $[x, y] = J \subset T$, então a distância de Poincaré entre x e y é dada por

$$\log(1 + D(T, J))$$

As transformações de Möbius são isometrias segundo à distância de Poincaré, enquanto que funções de classe C^3 com derivada de Schwarz negativa expandem esta distância.

Para enunciarmos os Princípios de Koebe vamos supor que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é um difeomorfismo de classe C^1 sobre a sua imagem $g(I)$. Supomos também que $[a, b]$ é um subintervalo de I e existe constante $K > 0$ tal que, para todo intervalos $J \subset T$ contidos em $[a, b]$, verifica-se que $B(g, T, J) \geq K$. Então valem os seguintes princípios:

Princípio do mínimo. Para todo $x \in [a, b]$ vale que

$$|g'(x)| \geq K^3 \min\{|g'(a)|, |g'(b)|\}$$

Princípio de Koebe. Se para algum $\delta > 0$ e $[c, d] \subset (a, b)$, verifica-se que

$$\min\{|g([a, c])|, |g([d, b])|\} \geq \delta |g([c, d])|,$$

então vale que

$$\frac{g'(x)}{g'(y)} \leq \frac{(1 + \delta)^2}{K^6 \delta^2},$$

para todo $x, y \in [c, d]$.

Princípio de Koebe macroscópico. Sob a mesmas condições do Ítem (b), vale que

$$\min\{c - a, b - d\} \geq \gamma (d - c),$$

onde γ é uma constante que depende apenas de K e δ .

Se a função g é de classe C^3 e tem derivada de Schwarz negativa então $B(g, T, J) > 1$ e podemos tomar a constante $K > 1$. O mais interessante é que neste caso todos os iterados g^n também tem derivada de Schwarz negativa e $B(g^n, T, J) > 1$. Isto permite-nos aplicar os Princípios de Koebe acima nestes iterados e obter importantes propriedades métricas como controlar a distorção de todos os iterados g^n em certos intervalos, uniformemente em n .

Capítulo 4

Combinatórias especiais

Buscamos aqui tipos combinatórios para os quais os pontos críticos sejam fortemente recorrentes. Com isto esperamos que, quando iteramos o recobrimento crítico, a forte contração que existe, próximo a este ponto, possa suplantar a expansão que existe na maior parte do círculo. Vamos interpretar que a contração suplantou a expansão quando o recobrimento crítico não possui uma medida invariante piac . É claro que poderíamos considerar situações em que o ponto crítico é periódico e isto ocorreria, mas este não é exatamente a situação que queremos explorar pelo fato de já ser bem entendida. Nestes casos não existem conjugação mas apenas uma semi-conjugação do recobrimento com o recobrimento L_2 . O ponto crítico seria um super atrator, sua bacia seria uma união enumerável de intervalos abertos com medida de Lebesgue total. A semi-conjugação teria de ser constante em cada um destes intervalos, uma vez que L_2 não possui atratores periódicos.

A principal ideia que vai nos guiar vem do fato que podemos criar recorrências do ponto crítico tão forte quanto quizermos. A noção que serve para avaliar quão forte uma recorrência é, pode ser tornada precisa através da ordem lexográfica aplicada à sequência de tempos de primeira aproximação. O recobrimento resultante terá ponto crítico quase periódico, em um sentido que vai ficar claro mais adiante. Intuitivamente, se uma simulação numérica, não importando a sua precisão, seremos levados a pensar que o ponto crítico dos recobrimentos críticos resultantes é periódico. Conjecturamos que, se o ponto crítico é quadrático, o modo de construção que usamos é o único modo para obtermos recobrimentos críticos que sejam topologicamente conjugados com L_2 mas não possuam uma medida invariante piac .

4.1 Combinatórias quase-periódicas

Visando construir um recobrimento crítico com ponto crítico fortemente recorrente, que seja topologicamente conjugado ao recobrimento L_2 e não possua uma medida invariante piac , procedemos como vamos detalhar a seguir. Primeiro construímos um itinerário $\underline{\theta} = (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots)$ adequado. Vamos considerar os itinerários associados à partição do círculo em três intervalos determinada pelo ponto crítico e suas duas pré-imagens. Como já comentamos antes, a vantagens destes itinerários são que eles estão associados como tempos de corte. Através destes itinerários podemos ver quão fortemente recorrente ele é. Isto também se traduzirá na capacidade de recorrência que o ponto crítico com este itinerário terá. Uma certa desvantagem, mas que também passa a ser vantagem porque geram questões interessantes, está relacionada com fato destes itinerários poderem ou não ser realizados por recobrimentos críticos. Então seremos levados a questões de admissibilidade de itinerários que trataremos posteriormente, de pelo menos duas maneiras diferentes. Ainda podemos comentar que o conjunto de itinerários que contruímos é, pelo menos, um conjunto não enumerável. Para

a família de Arnold, corresponde a um conjunto não enumerável de parâmetros.

Definimos θ indutivamente do seguinte modo: consideramos duas seqüências de inteiros positivos, $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$, onde $\ell_1 \geq 1$ e $\ell_{i+1} > \ell_i$. Definimos a palavra inicial $\wp_1 = AB^{\ell_1}C$ e assumindo que a palavra \wp_i esteja definida, definimos \wp_{i+1} pondo

$$\wp_{i+1} = \wp_i^{n_i} \dots \wp_2^{n_2} \wp_1^{n_1} AB^{\ell_{i+1}}C.$$

Denotando o número de letras em uma palavra \wp_i por $|\wp_i|$, resulta que:

$$|\wp_{i+1}| = n_i|\wp_i| + \dots + n_2|\wp_2| + n_1|\wp_1| + \ell_{i+1} + 2.$$

Definimos o conjunto de itinerários \mathcal{P}_i , constituído de todos os itinerários que tem a palavra \wp_i no seu início. Desta forma temos uma seqüência de conjuntos encaixantes de itinerários, a saber,

$$\mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \mathcal{P}_3 \supset \dots$$

Estes conjuntos \mathcal{P}_i são abertos e o fecho $\overline{\mathcal{P}}_{i+1}$ está contido em \mathcal{P}_i . Então definimos o itinerário \wp_{∞} associado a $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$ pondo

$$\wp_{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i.$$

Vamos mostrar, indutivamente, que existe uma seqüência $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ de recobrimentos críticos g_i , todos com o mesmo ponto crítico c e tais que, para todo $i \geq 1$, $g_i \in \mathcal{P}_i$. Antes disso observamos que, para um recobrimento crítico $f \in \mathcal{R}$, o intervalo $\hat{M}_1 = (z_1^+, z_1^-)$ contém o único ponto fixo p de f e

$$\hat{M}_1 \setminus \{p\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\overline{B_k^+} \cup \overline{B_k^-}),$$

onde $B_k^+, B_k^- \subset \hat{M}_1$ são intervalos abertos máximos tais que, para $k \geq 1$ satisfazem:

$$f(B_{k+1}^+) = B_k^+, \quad f(B_{k+1}^-) = B_k^-, \quad f(B_1^+) = (c, z_1^+) \quad \text{e} \quad f(B_1^-) = (z_1^-, c)$$

Estes intervalos B_k^+ e B_k^- são chamados de *domínios fundamentais* de p , à direita e à esquerda, respectivamente.

Preparação para o primeiro passo de indução. Antes de iniciarmos a indução em i , notamos preliminarmente que existem recobrimentos críticos $g_0 \in \mathcal{R}$, para os quais valem as seguintes propriedades (veja a Figura 4.1):

- Existem intervalos $I_1 \subseteq I_0$ e $J_1 \subseteq J_0$ tais que $I_1 \cap J_1 = I_0 \cap J_0 = \{c\}$ e que são, respectivamente, domínios dos ramos ϕ_0 e ψ_0 do primeiro retorno a $I_0 \cup J_0$;
- Os ramos de primeiro retorno, $\phi_0 : I_1 \rightarrow I_0 \cup J_0$ e $\psi_0 : J_1 \rightarrow I_0 \cup J_0$, aplicam $I_1 \subset I_0$ e $J_1 \subset J_0$ em I_0 ;
- O tempo de primeiro retorno de c a $I_0 \cup J_0$ é $r_0 = 1$;
- Para $k \geq 1$, existe o ramo de primeiro retorno, $\sigma_{0,k} : E_0^k \rightarrow I_0 \cup J_0$, que aplica $E_0^k \subset I_0 \setminus I_1$ difeomorficamente sobre J_0 ;
- Para $k \geq 1$, o tempo de primeiro retorno de $x \in E_0^k$ a $I_0 \cup J_0$ é $k + 1$ e o trecho de órbita $\{g_0(x), \dots, g_0^{k+1}(x)\}$ descreve a palavra $B^k C$.
- O valor crítico $\phi_0(c) = \psi_0(c) \in E_0^{\ell_1}$, $E_0^k \subset \phi_0(I_1)$, para todo $1 \leq k < \ell_1$ e $E_0^k \subset \phi_0(J_1)$, para todo $k > \ell_1$.

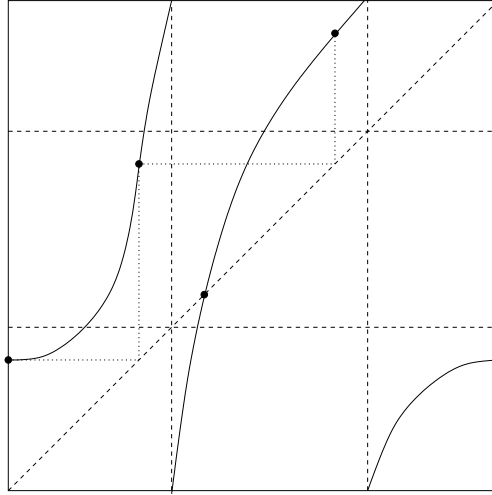


Figura 4.1: o recobrimento g_0

Para provarmos o primeiro passo de indução abaixo basta modificarmos g_0 em $I_1 \cup J_1$ para garantir que $\sigma_{0,\ell_1} \circ \phi_0(c) \in J_1 = J_0$. Então, definindo $V_1^+ = I_1$ e $V_1^- = J_1$, verificamos que existem intervalos $V_2^+ \subset V_1^+$ e $V_2^- \subset V_1^-$ tais que $V_2^+ \cap V_2^- = \{c\}$ e que são, respectivamente, domínios dos ramos ϕ_1 e ψ_1 , ramos do primeiro retorno a $V_1^+ \cup V_1^-$. Os Ítems (a), (b), (c) e (d) do primeiro passo de indução abaixo estão satisfeitos e, eventualmente, podemos precisar de mais um ajuste em g_1 para que o Ítem (e) seja satisfeito.

Primeiro passo de indução. Existem recobrimentos críticos $g_1 \in \mathcal{R}$ para os quais valem as seguintes propriedades (veja a figura abaixo):

- Existem intervalos $V_2^+ \subset V_1^+$ e $V_2^- \subset V_1^-$ satisfazem $V_2^+ \cap V_2^- = \{c\}$ e são, respectivamente, domínios dos ramos ϕ_1 e ψ_1 do primeiro retorno a $V_1^+ \cup V_1^-$;
- O tempo de primeiro retorno do ponto crítico c a $V_1^+ \cup V_1^-$ é $r_1 = |\varphi_1| = \ell_1 + 2$ e o trecho de órbita $\{g_1(c), \dots, g_1^{r_1}(c)\}$ descreve a palavra $\varphi_1 = AB^{\ell_1}C$. Em particular, ϕ_1 e ψ_1 , respectivamente, aplicam V_2^+ e V_2^- em V_1^- ;
- Para $k > \ell_1$, existe o ramo de primeiro retorno, $\sigma_{1,k} : E_1^k \rightarrow V_1^+ \cup V_1^-$, que aplica $E_1^k \subset V_1^- \setminus V_2^-$ difeomorficamente sobre V_1^- ;
- Para $k > \ell_1$, o tempo de primeiro retorno de $x \in E_1^k$ a $V_1^+ \cup V_1^-$ é $k + 2$ e o trecho de órbita $\{g_1(x), \dots, g_1^{k+2}(x)\}$ descreve a palavra AB^kC ;
- Para $1 \leq j < n_1$, tem-se que $\phi_1^j(c) = \psi_1^j(c) \in V_2^-$, $\phi_1^{n_1}(c) = \psi_1^{n_1}(c) \in E_1^{\ell_1}$ e $E_1^k \subset \psi_1^{n_1}(V_2^-)$, para todo $k > \ell_1$.

Hipótese de indução. Assumimos que existem recobrimentos críticos $g_1, \dots, g_i \in \mathcal{R}$ tais que, para todo $1 \leq s \leq i$, valem as seguintes propriedades:

- Existem intervalos $V_{2s}^+ \subset V_{2s-1}^+ \subset \dots \subset V_2^+ \subset V_1^+$ e $V_{2s}^- \subset V_{2s-1}^- \subset \dots \subset V_2^- \subset V_1^-$ satisfazem $V_{2s}^+ \cap V_{2s}^- = \{c\}$ e são, respectivamente, domínios dos ramos ϕ_s e ψ_s do primeiro retorno a $V_{2s-1}^+ \cup V_{2s-1}^-$;
- O tempo de primeiro retorno do ponto crítico c a $V_{2s-1}^+ \cup V_{2s-1}^-$ é $r_s = |\varphi_s|$ e o trecho de órbita $\{g_s(c), g_s^2(c), \dots, g_s^{r_s}(c)\}$ descreve a palavra φ_s . Em particular, ϕ_s e ψ_s , respectivamente, aplicam V_{2s}^+ e V_{2s}^- em V_{2s-1}^- ;

- (c) Para $k > \ell_s$, existe ramo de primeiro retorno, $\sigma_{s,k} : E_s^k \rightarrow V_{2s-1}^+ \cup V_{2s-1}^-$, que aplica $E_s^k \subset V_{2s-1}^- \setminus V_{2s}^-$ difeomorficamente sobre V_{2s-1}^- ;
- (d) Para $k > \ell_s$, o tempo de primeiro retorno de $x \in E_s^k$ a $V_{2s-1}^+ \cup V_{2s-1}^-$ é $n_s|\wp_s| + k + 2$ e o trecho de órbita $\{g_s(x), \dots, \sigma_{s,k}(x)\}$ descreve a palavra $\wp_s^{n_s} AB^k C$;
- (e) Para $1 \leq j < n_s$, tem-se que $\phi_s^j(c) = \psi_s^j(c) \in V_{2s}^-$, $\phi_s^{n_s}(c) = \psi_s^{n_s}(c) \in E_s^{\ell_s}$ e $E_s^k \subset \psi_s^{n_s}(V_{2s}^-)$, para todo $k > \ell_s$;
- (f) V_{2s-1}^+ e V_{2s-1}^- são intervalos máximos tais que $\phi_s^{n_s}(V_{2s-1}^+) \subset V_{2s-3}^-$ e $\psi_s^{n_s}(V_{2s-1}^-) \subset V_{2s-3}^-$.
- (g) Em $\mathbb{S}^1 \setminus (V_{2s}^+ \cup V_{2s}^-)$ verifica-se que $g_s = g_{s-1}$.

Veja a Figura 4.2 onde esboçamos os ramos $\phi_s, \sigma_{s,\ell_s}$ e ψ_s

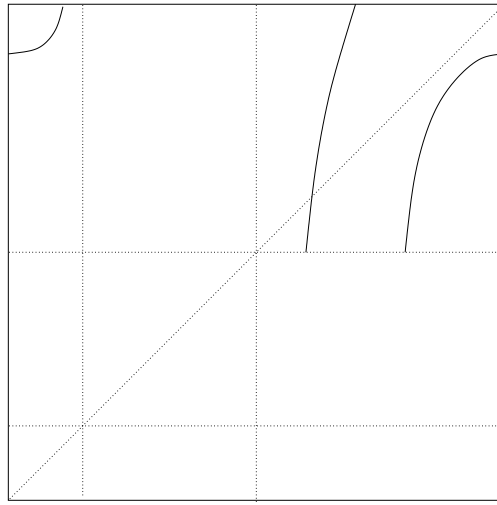


Figura 4.2: os ramos $\phi_s, \sigma_{s,\ell_s}$ e ψ_s

Passo de indução. Afirmamos que existem recobrimentos críticos g_1, \dots, g_{i+1} tais que as propriedades da hipótese de indução se verificam para todo $1 \leq s \leq i + 1$. Vamos provar esta afirmação e finalizar a indução. Como $\phi_s^{n_s}(c) = \psi_s^{n_s}(c) \in E_s^{\ell_s}$, definimos V_{2s+1}^+ e V_{2s+1}^- , são intervalos máximos tais que $\phi_s^{n_s}(V_{2s+1}^+) \subset V_{2s-1}^-$ e $\psi_s^{n_s}(V_{2s+1}^-) \subset V_{2s-1}^-$. Isto já garante que os Ítems (a), (b), (c) e (d) estão satisfeitos e então, se necessário, podemos fazer mais uma modificação em g_i , em $\mathbb{S}^1 \setminus (V_{2i}^+ \cup V_{2i}^-)$, e obter $g_{i+1} \in \mathcal{R}$ de modo que todas as propriedades necessárias para o passo indutivo sejam satisfeitas.

Esta indução, usando transformações de primeiro retorno, é o passo principal para provar o Teorema 4.1.1, que garante a existência de recobrimentos críticos $f \in \mathcal{R}$ cuja sequência \mathcal{E} -kneading κ_f é o itinerário $\wp_\infty = \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{P}_i$. Aqui, \mathcal{P}_i são os conjuntos de itinerários cujas $|\wp_i|$ primeiras letras coincidem com as letras de \mathcal{P}_i . Este conjuntos dependem das sequências $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ e $\{\ell_i\}_{i=1}^\infty$, onde $\ell_1 \geq 1$ e $\ell_{i+1} > \ell_i$.

Teorema 4.1.1 *Considere duas sequências $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ e $\{\ell_i\}_{i=1}^\infty$ tais que $\ell_1 \geq 1$ e $\ell_{i+1} > \ell_i$. Considere os conjuntos \mathcal{P}_i que se iniciam com a palavra \wp_i , $i \geq 1$. Então existem recobrimentos críticos $f \in \mathcal{R}$ tais que a sequência \mathcal{E} -kneading é o itinerário $\wp_\infty = \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{P}_i$.*

Demonstração:

Os recobrimentos críticos g_i da indução provada acima, tem sequência \mathcal{E} -kneading κ_{g_i} que estão no conjunto \mathcal{P}_i . Como a sequência $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ se estabiliza, a saber, para todo $s > 1$, tem-se que $g_s = g_{s-1}$ em $\mathbb{S}^1 \setminus (V_{2s}^+ \cup V_{2s}^-)$. Também temos liberdade para escolher os tamanhos dos intervalos V_{2s}^+ e V_{2s}^- de modo que $\bigcap_{s=1}^{\infty} V_{2s}^+ = \bigcap_{s=1}^{\infty} V_{2s}^- = \{c\}$ e garantir que $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge para $f \in \mathcal{R}$ como enunciado no teorema. \square

4.2 Cortes e tempos de corte

Nesta seção vamos estudar os pontos pré-críticos mais próximos com os seus respectivos tempos de corte, suas órbitas até chegar no ponto crítico e o comportamento de iterados do recobrimento nos intervalos definidos por estes pontos pré-críticos.

Para calcular estes tempos de corte nós vamos primeiro calcular alguns tempos iniciais. Depois vamos usar as aplicações de primeiro retorno ϕ_i e ψ_i para definir um processo indutivo e chegar a todos os tempos de corte, à direita e à esquerda. Uma aplicação ψ_i é retorno do tipo quase-parabólico (ou quase sela-nó) e faz uma cascata de retornos centrais. Nesta etapa, as pré-imagens dos pontos pré-críticos mais próximos à esquerda de uma etapa anterior geram novos pontos pré-críticos mais próximos. Os respectivos tempos de corte adicionados de r_i , onde $r_i = |\phi_i|$ é o tamanho da palavra associada a ψ_i . A cascata termina com $\psi^{n_1} \circ \dots \circ \psi_i^{n_i}(c)$ entre dois pontos pré-críticos duplos, Z_3^- e z_3^- . Neste momento algumas das pré-imagens dos pontos pré-críticos mais próximos da etapa anterior dão origem a pontos pré-críticos mais próximos à direita. Então o ponto $\psi^{n_1} \circ \dots \circ \psi_i^{n_i}(c)$ está em um domínio fundamental do ponto fixo e mais alguns pontos pré-críticos mais próximos são gerados. Neste caso tempo de corte que aumenta de 1 por vez. A seguir vamos detalhar este cálculo de modo mais preciso. Por simplicidade, vamos assumir que $\ell_1 = 1$. Isto faz com que a quantidade de pontos pré-críticos mais próximos iniciais seja menor, apenas 3.

Consideramos um recobrimento crítico $f \in \mathcal{R}$, dado pelo Teorema 4.1.1, que exhibe a sequência \mathcal{E} -kneading igual a φ_{∞} . Vamos calcular as sequências de tempos de corte à direita e à esquerda de f . Iniciamos com os pontos pré-críticos mais próximos $z_1^+ = Z_1^-$, $z_2^+ < Z_2^+$, $z_3^+ = Z_3^+$, $z_1^- = Z_1^+$, $z_2^- = Z_2^-$ e $z_3^- > Z_3^-$, que podem ser esboçados com a ajuda da Figura 4.1. A Figura 4.3 esboça estes pontos e os seus respectivos trechos de órbita até o ponto crítico. A partir disto podemos calcular todos os seus respectivos tempos de corte, a saber: $S_1^+ = 1$, $S_2^+ = 2$, $S_2^+ = 3$, $S_1^- = 1$, $S_2^- = 3$ e $S_3^- = \ell_1 + 3 = 4$. Observe que os tempos $S_1^+ = 1$ e $S_2^+ = 2$ são tempos de duplicação à direita e que os tempos $S_1^- = 1$ e $S_3^- = 4$ são tempos de duplicação à esquerda.

Observamos que x , a e b , todos definidos na própria Figura 4.3, também são pontos pré-críticos, mas não são pontos pré-críticos mais próximos. O intervalo $[Z_3^-, z_3^-]$ é aplicado difeomorficamente por f^3 sobre $[z_1^+, z_1^-]$. O mais importante é que $f^2([Z_3^-, z_3^-]) \subset [z_1^+, z_1^-]$ contém todos os domínios fundamentais do ponto fixo, com exceção de um domínio fundamental de cada lado do ponto fixo. Como já mencionamos acima, devido a combinatoria de f , para todo $i \geq 1$, o ponto $f^2 \circ \psi^{n_1} \circ \dots \circ \psi_i^{n_i}(c)$ está em um domínio fundamental do ponto fixo. Exatamente, é aquele domínio fundamental que visita o intervalo $[z_1^-, c]$ depois de ℓ_{i+1} iteradas e corresponde à palavra $B^{\ell_{i+1}}C$.

Com a ajuda dos ramos ϕ_1 , ψ_1 , vamos implementar uma primeira etapa ilustrada na Figura 4.4 para listar mais alguns pontos pré-críticos mais próximos, juntamente com os

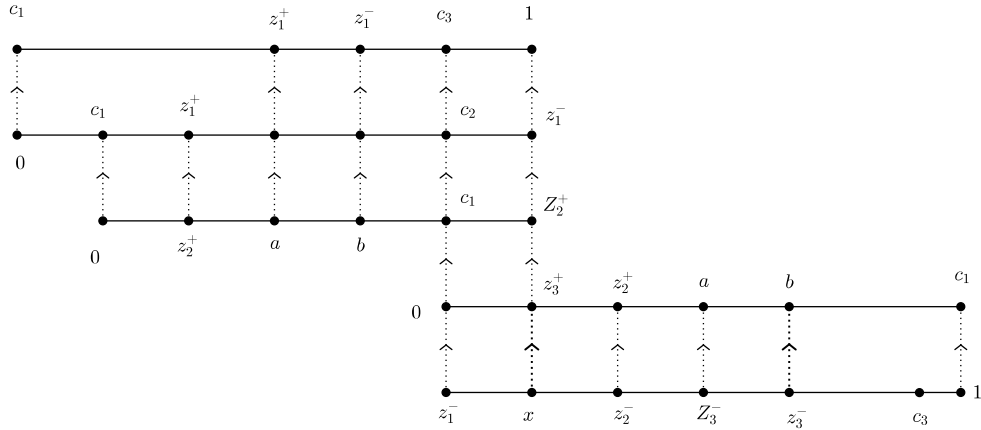


Figura 4.3: pontos pré-críticos iniciais

seus respectivos tempos de corte. Esta figura mostra uma torre com o comportamento de ϕ_1 e ψ_1 , ramos do primeiro retorno à união $V_1^+ \cup V_1^-$. Vamos listar algumas propriedades destes ramos:

- (a) $V_1^+ = [c, z_3^+]$ e $V_1^- = [z_1^-, c]$;
- (b) ϕ_1 e ψ_1 aplicam os seus respectivos domínios, $V_2^+ = [c, z_3^+]$ e $V_2^- = [z_3^-, c]$ em V_1^- ;
- (c) ϕ_1 e ψ_1 coincidem com f^{r_1} restrito, respectivamente, a V_2^+ e V_2^- . Aqui estamos assumindo que $\ell_1 = 1$ e disto resulta que $r_1 = |\varphi_1| = 3$;
- (d) Como $S_2^+ = 2$ e $S_2^- = 3$, resulta que f^{r_1} não possui pontos críticos nos intervalos (z_1^-, c) e (c, z_2^+) ;
- (e) f^{r_1} aplica o intervalo (Z_3^-, z_3^-) difeomorficamente sobre (z_1^+, z_1^-) ;
- (f) Os pontos $\phi_1^i(c) = \psi_1^i(c) = c_{ir_1}$, para $1 \leq i < n_1$, estão posicionados em V_2^- e fazem parte de uma cascata de retornos centrais;
- (g) O ponto $\phi_1^{n_1}(c) = \psi_1^{n_1}(c) = c_{n_1 r_1}$, o último ponto da cascata de ψ_1 , está em um intervalo $(b_{\ell_2+1}, b_{\ell_2}) \subset (Z_3^-, z_3^-) \subset V_1^- \setminus V_2^-$ que é aplicado por f^{ℓ_2+2} difeomorficamente sobre $V_3^- = [z_{2n_1+1}^-, c]$.

Para $1 \leq i \leq n_1$, os pontos z_{2i}^- , Z_{2i+1}^- e z_{2i+1}^- são pré-imagens por ψ_1^{i-1} de z_2^- , Z_3^- e z_3^- . Portanto, tem tempos de corte à esquerda $S_{2i}^- = ir_1$ e $S_{2i+1}^- = ir_1 + 1$, respectivamente. Observe que o tempo de corte à esquerda S_{2i+1}^- , é um tempo de duplicação à esquerda. Veja a Figura 4.4.

Ainda temos que $z_{2(n_1+1)}^-$ e $z_{2(n_1+1)+1}^-$ são pré-imagens, respectivamente, de $z_{2n_1}^-$ e $z_{2n_1+1}^-$ por ψ_1 . Seus respectivos tempos de corte à esquerda são

$$S_{2(n_1+1)}^- = (n_1 + 1)r_1, \quad \text{e} \quad S_{2(n_1+1)+1}^- = (n_1 + 1)r_1 + 1.$$

Observamos que $S_{2(n_1+1)+1}^-$ não é um tempo de duplicação à esquerda e nem à direita. A pré-imagem de $z_{2n_1+1}^-$ deve ser tomada por ϕ_1 e dá origem ao ponto z_4^+ , um ponto crítico mais próximo à direita com tempo de corte à direita $S_4^+ = (n_1 + 1)r_1 + 1$.

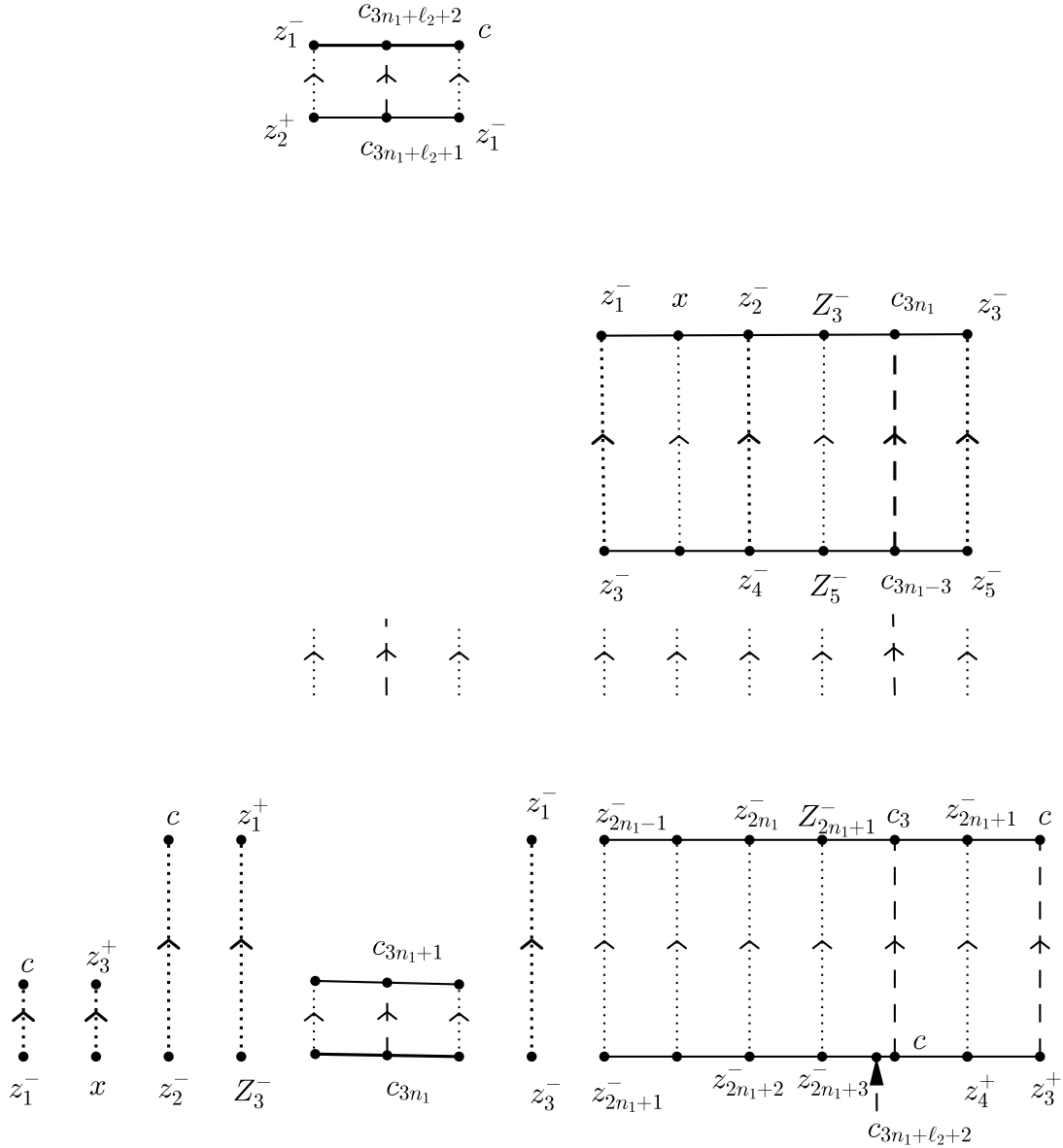


Figura 4.4: cascata de retornos de ψ_1

Para $i > \ell_1 + 1 = 2$, existem os pontos pré-críticos $a_i, b_i \in (Z_3^-, z_3^-)$ tais que $f^{i-1}(f^2(a_i)) = z_1^+$ e $f^{i-1}(f^2(b_i)) = z_1^-$. Observamos que $a_2 = z_3^-$ e que $b_2 = Z_3^-$. Estes pontos são pontos pré-críticos, mas ainda não são pontos pré-críticos mais próximos. Como $b_{\ell_2+1} < \psi_1^{n_1}(c) < b_{\ell_2}$, concluímos que o intervalo $[z_{2n_1+3}^-, c]$ contém as pré-imagens por $\psi_1^{n_1}$ dos pontos a_i , para todo $i > \ell_1 = 1$. Destas pré-imagens, aquelas que correspondem a $1 = \ell_1 < i \leq \ell_2$, dão origem aos pontos pré-críticos mais próximos à esquerda

$$z_{2(n_1+1)+1}^- < \dots < z_{2(n_1+1)+\ell_2-1}^-$$

com os seus respectivos tempos de corte que são

$$S_{2(n_1+1)+1}^- = (n_1 + 1)r_1 + 1 < \dots < S_{2(n_1+1)+\ell_2-1}^- = (n_1 + 1)r_1 + \ell_2 - 1.$$

Analogamente, o intervalo $[c, z_4^+]$ contém as pré-imagens por $\phi_1^{n_1}$ dos pontos b_i , para $1 = \ell_1 < i \leq \ell_2$. Estas pré-imagens são os pontos pré-críticos mais próximos à direita

$$z_4^+ > \dots > z_{\ell_2+2}^+,$$

com os seus respectivos tempos de corte que são

$$S_4^+ = (n_1 + 1)r_1 + 1 < \dots < S_{\ell_2+2}^+ = (n_1 + 1)r_1 + \ell_2 - 1.$$

Ainda precisamos considerar as pré-imagens de a_{ℓ_2+1} e b_{ℓ_2+1} por $\psi_1^{n_1}$, estas pré-imagens são os pontos pré-críticos

$$Z_{2(n_1+1)+\ell_2}^- \quad \text{e} \quad z_{2(n_1+1)+\ell_2}^-,$$

cujos tempos de corte,

$$S_{2(n_1+1)+\ell_2}^- = (n_1 + 1)r_1 + \ell_2,$$

é um tempo de duplicação à esquerda. Estes pontos pré-críticos duplos, $z_{2(n_1+1)+\ell_2}^-$ e $Z_{2(n_1+1)+\ell_2}^-$, são muito importantes, eles definem um intervalo a ser visitado por $\psi_2(c)$ e gerar o próximo retorno mais próximo de c , que será $\psi_3(c)$. O tempo $S_2^+ = 2$ é o único tempo de duplicação à direita até esta etapa.

A Tabela 4.1 exhibe de forma mais concisa, os tempos de corte gerados por ϕ_1 e ψ_1 a partir dos tempos iniciais.

Vamos passar para um próximo passo, passo este que pode ser considerado como um passo de indução. Relembramos que $V_3^- \subset V_1^-$ é o intervalo máximo tal que $\phi_1^i(V_3^-) \subset V_2^-$, para $0 \leq i < n_1$, e $\phi_1^{n_1}(\partial V_3^-) \cap \partial V_1^- = \{z_1^-\}$. De outro modo, podemos ver que $V_3^- = [z_{2n_1+1}^-, c]$. A união do intervalo V_3^- com $V_3^+ = [c, z_3^+]$ é uma vizinhança de c . Como antes, ϕ_2 e ψ_2 são ramos de primeiro retorno a união $V_3^+ \cup V_3^-$. Estes ramos estão definidos, respectivamente, em V_4^+ e V_4^- e devido ao tipo combinatório de f , eles tem imagem em V_3^- e são restrições de f^{r_2} , onde $r_2 = n_1 r_1 + \ell_2 + 2$. Vale que $V_4^+ = [c, z_{\ell_2+2}^+]$ e, para construir V_4^- , notamos que o intervalo $[z_{2(n_1+1)+\ell_2}^-, c)$ é aplicado difeomorficamente por f^{r_2} sobre o intervalo $[z_1^-, \psi_2(c))$. Como $\psi_2(c) \in (z_{2n_1+1}^-, c)$ concluímos que existe $y \in (z_{2(n_1+1)+\ell_2}^-, c)$ tal que $f^{r_2}(y) = Z_{2n_1+1}^-$, então, definindo $z_{2(n_1+1)+\ell_2+1}^- = y$, temos que $V_4^- = [z_{2(n_1+1)+\ell_2+1}^-, c]$. A Figura 4.5 mostra uma torre com o comportamento de ϕ_2 e ψ_2 .

Para $1 \leq i < n_2$, temos que $\phi_2^i(c) = \psi_2^i(c) = c_{ir_2} \in V_4^-$, enquanto que $\phi_2^{n_2}(c) = \psi_2^{n_2}(c) = c_{r_2 n_2} \in V_3^- \setminus V_4^-$. Mais precisamente, temos que

$$\psi_2^{n_2}(c) \in (z_{2n_1+\ell_2+2}^-, Z_{2n_1+\ell_2+2}^-) \subset (z_{2n_1+1}^-, c).$$

Os pontos pré-críticos mais próximos, considerados os pontos iniciais desta segunda etapa, $z_{2n_1+1}^-, \dots, z_{2n_1+1+\ell_2+2}^-$, estão em $[z_{2n_1+1}^-, z_{2n_1+\ell_2+2}^-] \subset V_3^- \setminus V_4^-$. Então, tomando pré-imagens destes pontos iniciais por ψ_2^i , com $1 \leq i < n_2$ obtemos os pontos pré-críticos mais próximos

$$z_{2n_1+i(\ell_2+2)+1}^-, \dots, z_{2n_1+(i+1)(\ell_2+2)}^-,$$

com os seus respectivos tempos de corte

$$S_{2n_1+i(\ell_2+2)+1}^- = ir_2 + S_{2n_1+1}^-, \dots, S_{2n_1+(i+1)(\ell_2+2)}^- = ir_2 + S_{2n_1+\ell_2+2}^-.$$

Veja a ilustração dada na Figura 4.5.

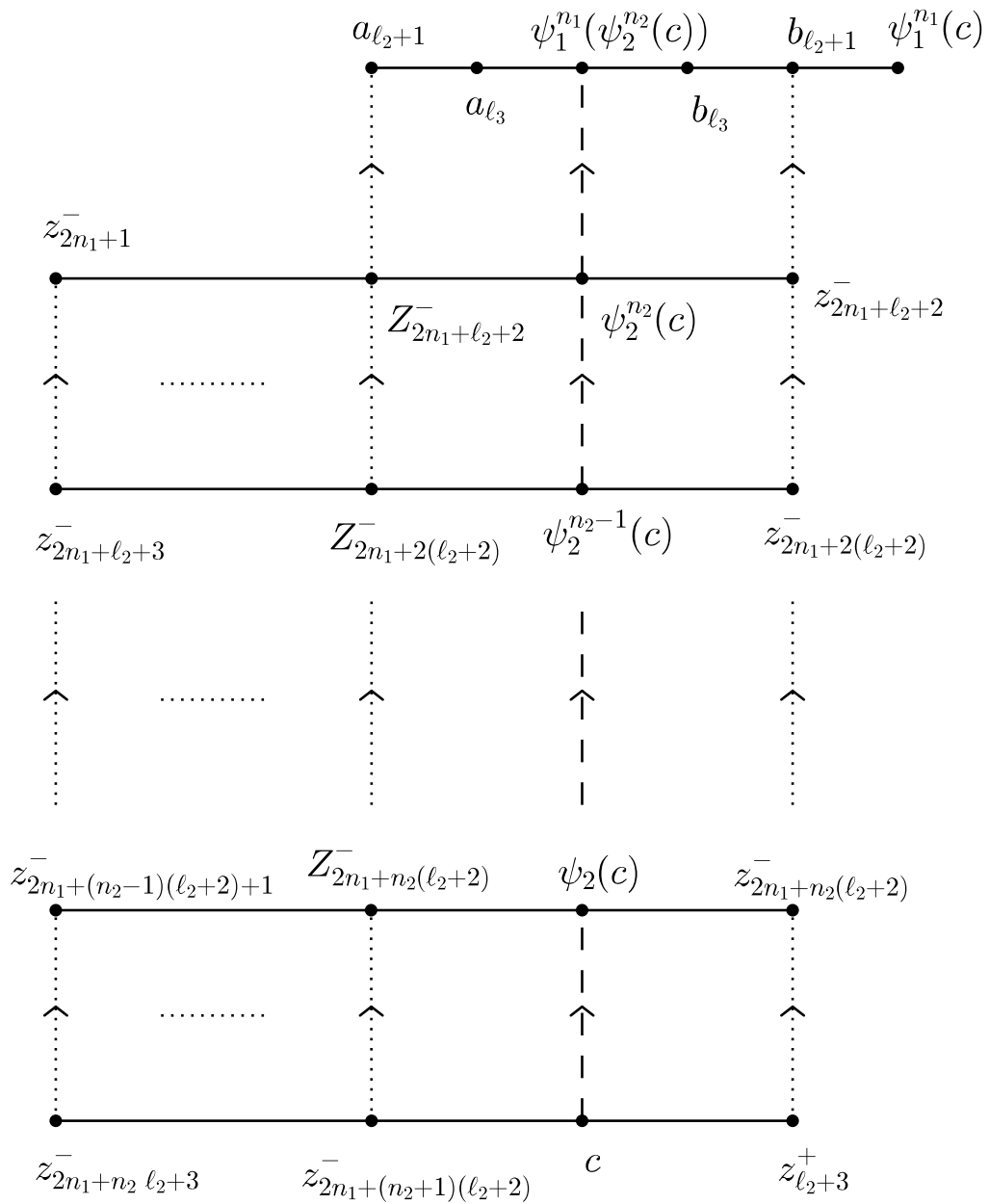


Figura 4.5: cascata de retornos de ψ_2

Quando a cascata de retornos centrais de ψ_2 termina, outros pontos pré-críticos mais próximos são obtidos como pré-imagens, por $\psi_1^{n_1} \circ \psi_2^{n_2}$, de pontos pré-críticos que limitam domínios fundamentais do ponto fixo. Para isto precisamos da localização mais precisa de

$\psi_1^{n_1}(\psi_2^{n_2}(c))$. Primeiro notamos que

$$\psi_2^{n_2}(c) \in (Z_{2(n_1+1)+\ell_2}^-, z_{2(n_1+1)+\ell_2}^-).$$

Então, aplicando $\psi_1^{n_1}$ obtemos que

$$\psi_1^{n_1}(\psi_2^{n_2}(c)) \in (b_{\ell_3+1}, b_{\ell_3}) \subset (Z_3^-, z_3^-).$$

Disto resulta que o intervalo $(z_{2n_1+(n_2+1)(\ell_2+2)}^-, c]$ contém as pré-imagens por $\psi_1^{n_1} \circ \psi_2^{n_2}$ dos pontos a_i , para todo $i > \ell_2 + 1$. Destas pré-imagens, aquelas que correspondem a $\ell_2 + 1 < i \leq \ell_3$, são os pontos pré-críticos mais próximos à esquerda, $z_{2n_1+(n_2+1)(\ell_2+2)+j}^-$, para $1 \leq j < \ell_3 - \ell_2$. Os seus respectivos tempos de corte que são

$$S_{2n_1+(n_2+1)(\ell_2+2)+j}^- = S_{2n_1+(n_2+1)(\ell_2+2)}^- + j.$$

Ainda temos as pré-imagens de a_{ℓ_3+1} e b_{ℓ_3+1} por $\psi_1^{n_1} \circ \psi_2^{n_2}$, estas são os pontos pré-críticos mais próximos duplos

$$Z_{2n_1+(n_2+1)(\ell_2+2)+\ell_3-\ell_2}^- \quad \text{e} \quad z_{2n_1+(n_2+1)(\ell_2+2)+\ell_3-\ell_2}^-,$$

com tempo de corte igual a

$$S_{2n_1+(n_2+1)(\ell_2+2)+\ell_3-\ell_2}^- = S_{2n_1+(n_2+1)(\ell_2+2)}^- + \ell_3 - \ell_2.$$

Estes pontos duplos são de crucial importância para o tipo combinatório que estamos considerando, pois eles definem o intervalo que contém $\psi_3^{n_3}(c)$ e será usada na próxima etapa.

O intervalo $[c, z_{\ell_2+2}^+)$ contém as pré-imagens por $\psi_1^{n_1} \circ \psi_2^{n_2}$ dos pontos b_i , para $\ell_2 < i \leq \ell_3$. Estas pré-imagens dão origem aos pontos pré-críticos mais próximos à direita $z_{\ell_2+3}^+ > \dots > z_{\ell_3+2}^+$, com os seus respectivos tempos de corte que são

$$S_{\ell_2+3}^+ = r_2 + S_{2n_1+(n_2+1)(\ell_2+2)}^- < S_{\ell_3+2}^+ = \ell_3 - \ell_2 - 1 + r_2 + S_{2n_1+(n_2+1)(\ell_2+2)}^-.$$

As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 exibem, concisamente os tempos de corte gerados por ψ_1 e ψ_2 .

Tempos de corte à esquerda		Tempos de corte à direita
Tempos iniciais		
$S_1^- = 1$		$S_1^+ = 1$
$S_2^- = 3 = r_1$	$S_3^- = 4$, duplo	$S_2^+ = 2$
		$S_3^+ = 3 = r_1$
Cascata ψ_1^i , $1 \leq i < n_1$		
$S_{2i}^- = (i+1)r_1$	$S_{2i+1}^- = (i+1)r_1 + 1$, duplo	não há cortes à direita
Fim da cascata, pré-imagem por $\psi_1^{n_1}$		
$S_{2(n_1+1)}^- = (n_1+1)r_1$	$S_{2(n_1+1)+1}^- = (n_1+1)r_1 + 1$	$S_{r_1+1}^+ = (n_1+1)r_1 + 1$
$b_{\ell_2} < \psi_1^{n_1}(c) < b_{\ell_2+1}$, $1 < j < \ell_2$		
$S_{2(n_1+1)+j}^- = (n_1+1)r_1 + j$,		$S_{r_1+j}^+ = (n_1+1)r_1 + j$,
$S_{2(n_1+1)+\ell_2}^- = (n_1+1)r_1 + \ell_2$, duplo		

Tabela 4.1: tempos de corte gerados por ψ_1

Tempos de corte à esquerda
Tempos iniciais, pré-críticos z_j^- em $[z_{2n_1+1}^-, z_{2n_1+\ell_2+2}^-] \subset V_3^- \setminus V_4^-$
$S_{2n_1+j}^- = (n_1 + 1)r_1 + j, \quad 1 \leq j \leq \ell_2 + 2$
Cascata $\psi_2^i, \quad 1 \leq i < n_2$
$S_{2n_1+i(\ell_2+2)+j}^- = ir_2 + S_{2n_1+j}^-$, duplo
Fim da cascata
$S_{2n_1+n_2(\ell_2+2)+j}^- = n_2r_2 + S_{2n_1+j}^-$
$b_{\ell_3+1} < \psi_1^{n_1} \circ \psi_2^{n_2}(c) < b_{\ell_3}$
$S_{2n_1+n_2(\ell_2+2)+\ell_2+2+i}^- = i + n_2r_2 + S_{2n_1+\ell_2+2}^-$, $1 \leq i < \ell_3 - \ell_2$
$S_{2n_1+n_2(\ell_2+2)+\ell_3+2}^- = \ell_3 - \ell_2 + n_2r_2 + S_{2n_1+\ell_2+2}^-$, duplo

Tabela 4.2: tempos de corte à esquerda, gerados por ψ_2

Tempos de corte à direita
Tempos existentes
$S_1^+ = 1, S_2^+ = 2, S_3^+ = 3$ e $S_{3+j}^+ = j - 1 + (n_1 + 1)r_1, \quad 1 \leq j \leq \ell_2 - \ell_1$
Cascata $\psi_2^i, \quad 1 \leq i < n_2$
Não há criação de pré-críticos à direita
Fim da cascata
$S_{\ell_2+3}^+ = n_2r_2 + S_{2n_1+\ell_2+2}^-$
$b_{\ell_3+1} < \psi_1^{n_1} \circ \psi_2^{n_2}(c) < b_{\ell_3}$
$S_{\ell_2+2+j}^+ = j - 1 + n_2r_2 + S_{2n_1+\ell_2+2}^-$, $1 < j < \ell_3 - \ell_2$

Tabela 4.3: tempos de corte à direita, gerados por ψ_2

Lema 4.2.1 Na palavra \wp_k para todo $k \geq 1$ apenas as posições dos símbolos B e C geram cortes à esquerda cujo valor é dado pela posição mais 1.

Demonstração:

Este lema pode ser reescrito da seguinte maneira:

Se $e_k = B$ ou C para $k \geq 2$ então existe $S_{j_k}^- = k + 1$. Além disto, se $e_k = A$ então $k + 1$ não é corte à esquerda.

A prova será feita por indução em k .

Passo Inicial

Para $k=2$ observe que $f^2(z_1^-, c) = (c_1, c_2) \ni z_1^+$ logo $S_2^+ = 3$. Defina $j_2 = 2$

Hipótese de Indução

Suponha por hipótese de indução $e_i = B$ ou C então existe $S_{j_i}^- = i + 1$ com $i \leq k$.

Passo de Indução

Se $e_k = B$ então $e_{k-1} = B$ ou $e_{k-1} = A$.

Caso $e_{k-1} = B$

Aplicando a hipótese de indução existe $j_{k-1} \geq 1$ tal que $S_{j_{k-1}}^- = k$, conseqüentemente $f^k(z_{j_{k-1}}^-, c) = (c, c_k) \ni z_1^+, z_1^-$, logo existe $S_{j_{k-1}+1}^- = k + 1$. Neste caso, defina $j_k = j_{k-1} + 1$ então construímos $z_{j_k}^-$ e $S_{j_k}^-$.

Caso $e_{k-1} = A$

Como $e_{k-1} = A$ então $e_{k-2} = C$ logo pela hipótese de indução existe $j_{k-2} \geq 1$ tal que $S_{j_{k-2}}^- = k - 1$ conseqüentemente $f^{k-1}(z_{j_{k-2}}^-, c) = (c, c_{k-1})$ logo $f^k(z_{j_{k-2}}^-, c) = (c_1, c_k) \ni z_1^+$ pois $e_k = B$. Portanto $S_{j_{k-2}+1}^- = k + 1$ e $j_k = j_{k-2} + 1$.

Por outro lado se $e_k = C$ podemos aplicar o caso $e_{k-1} = B$.

Para finalizar a demonstração suponha que para algum k temos $e_k = A$ então provaremos que $k+1$ não é corte à esquerda. De fato, como $e_k = A$ então $e_{k-1} = C$ logo pelo que provamos anteriormente existe $j_{k-1} \in \mathbb{N}$ tal que $S_{j_{k-1}}^- = k$ conseqüentemente $f^k(z_{j_{k-1}}^-, c) = (c, c_k)$ como $e_k = A$ temos que $c \notin f^{k+1}(z_{j_{k-1}}^-, c) = (c_1, c_{k+1})$ ou seja, $k + 1$ não é corte à esquerda. \square

Observe que como os tempos de cortes formam uma seqüência crescente então pelo lema acima o problema de determinação dos cortes à esquerda passou a ser uma simples contagem dos símbolos B 's e C 's.

Definição 4.2.2 Seja d_k a quantidade de símbolos B e C da palavra \wp_k

Lema 4.2.3 Seja $d_1 = 2$. Para todo $k \geq 1$ temos que

$$d_k = n_{k-1}d_{k-1} + n_{k-2}d_{k-2} + \dots + n_1d_1 + l_k + 1$$

Demonstração:

Esta prova será feita por indução em k .

Passo Inicial

Para $k=1$ temos claramente que $d_1 = 2$, pois a palavra $\wp_1 = ABC$. Já para $k=1$ observe que em $\wp_2 = (ABC)^{n_1} AB^{l_2} C$ possui $2n_1$ B 's e C 's para o bloco $(ABC)^{n_1}$ e $l_2 + 1$ para o bloco $AB^{l_2} C$ implicando $d_2 = 2n_1 + l_2 + 1 = d_1 n_1 + l_2 + 1$. Para finalizar o passo inicial faremos o caso $k = 2$ pois a palavra $\wp_3 = \wp_2^{n_2} \wp_1^{n_1} AB^{l_3} C = ((ABC)^{n_1} AB^{l_2} C)^{n_2} (ABC)^{n_1} AB^{l_3} C$ tem o aspecto geral da palavra \wp_k . Como vimos que \wp_2 e \wp_1 tem d_2 e d_1 símbolos B e C respectivamente então o bloco tem $\wp_2^{n_2} \wp_1^{n_1}$ tem $n_2 d_2 + n_1 d_1$ símbolos B e C ao acrescentar o bloco $AB^{l_3} C$ agregamos mais $l_3 + 1$ símbolos. Portanto a palavra \wp_3 tem $d_3 = n_2 d_2 + n_1 d_1 + l_3 + 1$ símbolos B e C .

Hipótese de Indução

Seja $k > 2$ temos que para todo $2 \leq i \leq k$, $d_i = n_{i-1} d_{i-1} + n_{i-2} d_{i-2} + \dots + n_1 d_1 + l_i + 1$ é a quantidade de B 's e C 's para palavra \wp_k .

Passo de Indução

Queremos agora determinar a quantidade de B 's e C 's para palavra

$$\wp_{k+1} = \wp_k^{n_k} \dots \wp_1^{n_1} AB^{l_{k+1}} C$$

Pela hipótese de indução temos que os blocos $\wp_k, \wp_{k-1}, \dots, \wp_1$ tem respectivamente d_k, d_{k-1}, \dots, d_1 cortes à esquerda logo

$\wp_k^{n_k}, \wp_{k-1}^{n_{k-1}}, \dots, \wp_1^{n_1}$ terão respectivamente $n_k d_k, n_{k-1} d_{k-1}, \dots, n_1 d_1$ B 's e C 's. Já o bloco $AB^{l_{k+1}} C$ possui $l_{k+1} + 1$ B 's e C 's. Consequentemente a palavra \wp_{k+1} possui $n_k d_k + n_{k-1} d_{k-1} + \dots + n_1 d_1 + l_{k+1} + 1$ B 's e C 's, ou seja,

$$d_{k+1} = n_k d_k + n_{k-1} d_{k-1} + \dots + n_1 d_1 + l_{k+1} + 1$$

□

Corolário 4.2.4 *A palavra \wp_k possui $d_k + 1$ tempos de corte à esquerda.*

Demonstração:

Segue do fato que $S_1^- = 1$ e dos dois lemas anteriores.

□

A próxima proposição vai determinar como calcular os tempos de corte. Perceba que isto será feito através de uma contagem de símbolos B e C .

Lema 4.2.5 *Os $d_1 + 2$ primeiros cortes à esquerda são dados por $1, 3, 4, 6, 7, \dots, r_1 n_1, r_1 n_1 + 1$.*

Demonstração:

Seja $S_1^- = 1$. Observe que temos que $e_2 = B$ e $e_3 = C$ logo $S_2^- = 3$ e $S_3^- = 4$. Como os blocos BC 's geram 2 cortes e estão separados por A 's e estes não geram cortes então valores de cortes são $3, 4, 6, 7, 9, 10, \dots$ cujos índices são $2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$. Consequentemente, $j = 2i$

acarreta $S_j^- = 3i$ e $j = 2i + 1$ acarreta $S_j^- = 3i + 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n_1$. Resultando que o último tempo de corte à esquerda associado ao bloco $(ABC)^{n_1}$ é $S_{2n_1+1}^- = 3n_1 + 1$, isto é, $S_{d_1n_1+1}^- = n_1r_1 + 1$ então o próximo tempo de corte estará associado ao próximo B o qual está na posição $n_1r_1 + 2$, ou seja, $S_{d_1n_1+2}^- = n_1r_1 + 3$. Como temos uma sequência de B 's consecutivos também obteremos uma sequência de tempos de corte à esquerda consecutiva dados por:

$$S_{d_1n_1+2}^- = n_1r_1 + 3, S_{d_1n_1+3}^- = n_1r_1 + 4, \dots, S_{d_1n_1+l_2+1}^- = S_{d_2}^- = n_1r_1 + l_2 + 2 = r_2.$$

Como temos um C na posição r_2 então ainda há um corte associado a palavra \wp_2 dado por $S_{d_1n_1+l_2+2}^- = n_1r_1 + l_2 + 3 = r_2 + 1$. Sendo assim construímos os $d_2 + 1 = d_1n_1 + l_2 + 2$ cortes à esquerda associados a palavra \wp_2

□

Dando continuidade as contagem de símbolos provaremos os seguintes resultados:

Proposição 4.2.6 *Suponha que para a palavra \wp_k com $k \geq 2$ os $d_k + 1$ cortes à esquerda já foram construídos. Então cortes associados a palavra $\wp_{k+1} = \wp_k^{n_k} \dots \wp_1^{n_1} AB^{l_{k+1}}C$ são computados da seguinte maneira:*

- (i) Se $s_k d_k + 2 \leq j \leq (s_k + 1)d_k + 1$ então $S_j^- = s_k r_k + S_{j-s_k d_k}^-$, para $s_k = 1, 2, \dots, (n_k - 1)$.
- (ii) Se $n_k d_k + 2 \leq j \leq n_k d_k + \dots + n_1 d_1 + l_k + 2$ então $S_j^- = n_k r_k + S_{j-n_k d_k}^-$.
- (iii) Se $n_k d_k + \dots + n_1 d_1 + l_k + 3 \leq j \leq n_k d_k + \dots + n_1 d_1 + l_{k+1} + 2 = d_{k+1} + 1$ então $S_j^- = n_k r_k + \dots + n_1 r_1 + (j - n_k d_k - \dots - n_1 d_1)$

Além disto, a palavra \wp_{k+1} agrega $l_{k+1} - l_k$ cortes independentes dos cortes anteriores.

Demonstração:

Passo Inicial

Vamos provar o lema para o caso $k=2$. Continuaremos fazendo o caso $k = 2$ pois a palavra $\wp_3 = \wp_2^{n_2} \wp_1^{n_1} AB^{l_3}C$ tem o mesmo formato da palavra \wp_k . Para analisar a palavra $\wp_3 = \wp_2^{n_2} \wp_1^{n_1} AB^{l_3}C$ começaremos com o bloco $\wp_2^2 = ((ABC)^{n_1} AB^{l_2+2}C)^2$. O último tempo de corte foi dado por $S_{d_2+1}^- = n_1r_1 + l_2 + 3 = r_2 + 1$ como o próximo B está na posição $r_2 + 2$ temos o próximo corte $S_{d_2+2}^- = S_{d_2}^- + S_2^- = r_2 + 3$ e os seguintes dados por $S_{d_2+3}^- = S_{d_2}^- + S_3^- = r_2 + 4, \dots, S_{d_2+n_1d_1+1}^- = S_{d_2}^- + S_{n_1d_1+1}^- = r_2 + n_1r_1 + 1$. Continuando a contagem percebemos que todos os cortes novos são criados apenas somando os anteriores. Temos que $S_{d_2+n_1d_1+2}^- = S_{d_2}^- + S_{n_1d_1+2}^- = r_2 + n_1r_1 + 3, \dots, S_{d_2+n_1d_1+l_2+1}^- = S_{d_2}^- + S_{n_1d_1+l_2+1}^- = S_{2d_2}^- = 2r_2, S_{2d_2+1}^- = 2r_2 + 1$. Concluimos assim a construção dos cortes associados ao bloco \wp_2^2 . Continuando da mesma maneira provamos que $s_2 d_2 + 2 \leq j \leq (s_2 + 1)d_2 + 1$ então $S_j^- = s_2 r_2 + S_{j-s_2 d_2}^-$, para $s_2 = 1, 2, \dots, (n_2 - 1)$. ou seja determinamos todos os cortes do bloco $\wp_2^{n_2}$. Temos neste bloco $n_2 d_2 + 1$ cortes cujo último é dado por $S_{n_2 d_2+1}^- = n_2 r_2 + 1$ logo o próximo corte ocorre quando ocorre o próximo B da posição $n_2 r_2 + 2$ sendo assim $S_{n_2 d_2+2}^- = n_2 r_2 + 3 = S_{n_2 d_2}^- + S_2^-$ até que o último corte associado ao bloco $\wp_2^{n_2} \wp_1^{n_1}$ das cascatas de retorno central é dado por $S_{n_2 d_2+n_1 d_1+1}^- = S_{n_2 d_2}^- + S_{n_1 d_1+1}^-$ continuando de tal modo que $S_{n_2 d_2+n_1 d_1+l_2+2}^- = S_{n_2 d_2}^- + S_{n_1 d_1+l_2+2}^-$. Com isto mostramos que só temos cortes à esquerda que não dependem dos anteriores a partir daí e estes são consecutivos pois os blocos de B

também o são resultando no último corte dado por $S_{n_2d_2+n_1d_1+l_3+2}^- = n_2r_2 + n_1r_1 + l_3 + 2 = S_{n_2d_2+n_1d_1+l_2+2}^- + ((l_3 + 2) - (l_2 + 2))$. Podemos resumir o exposto acima da seguinte maneira:

Pelo que percebemos ao analisar este caso podemos dividir os índices dos tempos de corte à esquerda com seus respectivos cortes da seguinte maneira:

- (i) Se $s_2d_2 + 2 \leq j \leq (s_2 + 1)d_2 + 1$ então $S_j^- = s_2r_2 + S_{j-s_2d_2}^-$, para $s_2 = 1, 2, \dots, (n_2 - 1)$.
- (ii) Se $n_2d_2 + 2 \leq j \leq n_2d_2 + n_1d_1 + l_2 + 2$ então $S_j^- = n_2r_2 + S_{j-n_2d_2}^-$.
- (iii) Se $n_2d_2 + n_1d_1 + l_2 + 3 \leq j \leq n_2d_2 + n_1d_1 + l_3 + 2 = d_3 + 1$ então $S_j^- = n_2r_2 + n_1r_1 + (j - n_2d_2 - n_1d_1)$

Perceba que a palavra \wp_3 agregou $l_3 - l_2$ novos cortes à esquerda.

Hipótese de Indução

Suponha por hipótese de indução que para a palavra \wp_{k-1} os $d_{k-1} + 1$ tempos de corte à esquerda estão já construídos. Então para a palavra $\wp_k = \wp_k^{n_{k-1}} \dots \wp_1^{n_1} AB^{l_k}$ os próximos $d_k - d_{k-1}$ cortes são computados da seguinte maneira:

- (i) Se $s_{k-1}d_{k-1} + 2 \leq j \leq (s_{k-1} + 1)d_{k-1} + 1$ então $S_j^- = s_{k-1}r_{k-1} + S_{j-s_{k-1}d_{k-1}}^-$, para $s_{k-1} = 1, 2, \dots, (n_{k-1} - 1)$.
- (ii) Se $n_{k-1}d_{k-1} + 2 \leq j \leq n_{k-1}d_{k-1} + \dots + n_1d_1 + l_{k-1} + 2$ então $S_j^- = n_{k-1}r_{k-1} + S_{j-n_{k-1}d_{k-1}}^-$.
- (iii) Se $n_{k-1}d_{k-1} + \dots + n_1d_1 + l_{k-1} + 3 \leq j \leq n_{k-1}d_{k-1} + \dots + n_1d_1 + l_k + 2 = d_k + 1$ então $S_j^- = n_{k-1}r_{k-1} + \dots + n_1r_1 + (j - n_{k-1}d_{k-1} - \dots - n_1d_1)$

Então a palavra \wp_k agregou $l_k = l_{k-1}$ cortes à esquerda independentes dos anteriores.

Passo de Indução

Como passo de indução teremos que construir os cortes associados a palavra \wp_{k+1} a partir dos $d_k + 1$ cortes já conhecidos da palavra \wp_k . Isto será feito novamente a partir de uma contagem de símbolos B e C. Teremos que demonstrar a seguinte afirmação:

- (i) Se $s_kd_k + 2 \leq j \leq (s_k + 1)d_k + 1$ então $S_j^- = s_kr_k + S_{j-s_kd_k}^-$, para $s_k = 1, 2, \dots, (n_k - 1)$.
- (ii) Se $n_kd_k + 2 \leq j \leq n_kd_k + \dots + n_1d_1 + l_k + 2$ então $S_j^- = n_kr_k + S_{j-n_kd_k}^-$.
- (iii) Se $n_kd_k + \dots + n_1d_1 + l_k + 3 \leq j \leq n_kd_k + \dots + n_1d_1 + l_{k+1} + 2 = d_{k+1} + 1$ então $S_j^- = n_kr_k + \dots + n_1r_1 + (j - n_kd_k - \dots - n_1d_1)$

Veja que a palavra $\wp_k^{n_k}$ possui $d_k + 1$ cortes à esquerda cujo último valor é $S_{d_k+1}^- = r_k + 1$. O próximo corte será originado com um B da posição $r_k + 2$ logo $S_{d_k+2}^- = r_k + 3 = S_{d_k}^- + S_2^-$. Seguindo esta lógica de contagem temos todos os cortes associados aos blocos $\wp_k^{n_k}$ cujo último corte será dado por $S_{n_kd_k+1}^- = n_kr_k + 1$ agora observe que todos os próximos cortes provenientes do bloco $\wp_{k-1}^{n_{k-1}} \dots \wp_1^{n_1} AB^{l_k}$ dependem do passado cujo último é dado por $S_{\leq n_kd_k + \dots + n_1d_1 + l_k + 2}^- = S_{\leq n_kd_k}^- + S_{\leq n_{k+1}d_{k+1} + \dots + n_1d_1 + l_k + 2}^-$. A partir de agora, temos cortes consecutivos que não dependem do passado. O último dele é dado por $S_{n_kd_k + \dots + n_1d_1 + l_{k+1} + 2}^- = S_{d_{k+1}+1}^- = r_{k+1} + 1$ além disto agregamos $l_{k+1} - l_k$ novos cortes que independem do passado. \square

Lema 4.2.7 *Seja $k \geq 2$. Na palavra \wp_2 as únicas posições, a menos de uma, que geram cortes à direita são as posições dos blocos de B 's após as cascatas de retornos centrais. Além disto, ela agrega $l_k - l_{k-1}$ novos cortes à direita para $k \geq 3$.*

Demonstração:

Sabemos que $S_1^+ = 1$. Por outro lado, temos que $f(c, z_1^+) = (c_1, c) \ni z_1^+, z_1^-$ logo existe $z_2^+ \in (c, z_1^+)$ tal que $f^2(z_2^+) = c$ e $S_2^+ = 2$. Fazendo $f^2(c, z_2^+) = (c_2, c) \ni z_1^-$ logo existe $z_3^+ \in (c, z_2^+)$ tal que $f^3(z_3^+) = c$ e $S_3^+ = 3$. Com isto, concluímos os tempos de cortes associados a palavra \wp_1 . A partir de agora começar a indução em k .

Passo Inicial

Observe que o intervalo (c_3, c) não contém z_1^+ nem z_1^- além disto ao iterarmos ele obtemos (c_4, c_1) , como c_4 e c_1 e possuem o mesmo símbolo e suas órbitas futuras possuem o mesmo símbolo até os iterados c_{3n_1+2} e c_{3n_1-1} isto é,

$$e_4 = e_1 = A, e_5 = e_2 = B, \dots, e_{3n_1+2} = e_{3n_1-1} = B, e_{3n_1+3} = B \neq e_{3n_1} = C$$

Conseqüentemente o quarto corte é $S_4^+ = 3n_1 + 4$, ou seja, $S_{l_1+3}^+ = n_1r_1 + l_1 + 3$. Depois disto temos que todos os símbolos são B 's gerando assim cortes consecutivos e dados por $S_{l_1+4}^+ = 3n_1 + l_1 + 4, \dots, S_{l_2+2}^+ = n_1r_1 + l_2 + 2 = r_2$. Observe que a palavra \wp_2 agregou $(n_1r_1 + l_2 + 2) - (n_1r_1 + l_1 + 3) + 1 = l_2 - l_1$.

Hipótese de Indução Suponha por hipótese de indução que para a palavra \wp_k com $k \geq 2$ já foram construídos os $l_k + 2$ cortes à direita e estes são calculados da seguinte maneira:

Se $l_{k-1} + 3 \leq j \leq l_k + 2$ então $S_j^+ = n_{k-1}r_{k-1} + j$ para todo $k \geq 2$ Além disto com a palavra \wp_k agregamos $l_k - l_{k-1}$ cortes à direita

Passo de Indução

Observe que o último corte foi $S_{l_k+2}^+ = n_{k-1}r_{k-1} + l_k + 2 = r_k$ e como sabemos que $e_{r_k} = C$ então o intervalo (c_{r_k}, c) não contém pré-críticos conseqüentemente pode ser iterado então $f(c_{r_k}, c) = (c_{r_k+1}, c_1)$. Observe que os iterado de c_{r_k+1} e c_1 coincidem até $c_{n_k r_k + \dots + n_1 r_1 + l_k + 1}$ e $c_{(n_k-1)r_k + \dots + n_1 r_1 + l_k + 1}$ pois $e_{n_k r_k + \dots + n_1 r_1 + l_k + 2} = B \neq e_{(n_k-1)r_k + \dots + n_1 r_1 + l_k + 2} = C$ Logo o próximo corte é $S_{l_k+3}^+ = n_k r_k + \dots + n_1 r_1 + l_k + 3$ como temos consecutivos B 's temos consecutivos cortes. Logo tais cortes podem ser computados da seguinte maneira

Se $l_k + 3 \leq j \leq l_{k+1} + 2$ então $S_j^+ = n_k r_k + j$ para todo $k \geq 2$ Além disto com a palavra $\wp_k + 1$ agregamos $l_{k+1} - l_k$ cortes à direita

□

Após este lema os cortes à direita podem ser computados apenas pela contagem destes blocos B 's após as cascatas. Como consequência direta do lema temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2.8 *A palavra \wp_k possui $l_k + 2$ tempos de corte à direita e estes são calculados da seguinte maneira: $S_1^+ = 1, S_2^+ = 2, S_3^+ = 3$ e para todo $k \geq 1$ Se $l_{k-1} + 3 \leq j \leq l_k + 2$ então $S_j^+ = n_{k-1}r_{k-1} + j$ para todo $k \geq 2$. Além disto, com a palavra \wp_k agregamos $l_k - l_{k-1}$ cortes à direita.*

Demonstração:

Imediata da demonstração anterior.

□

Após construirmos os cortes à esquerda e à direita determinaremos suas respectivas aplicações kneading.

Definição 4.2.9 *Seja $D_k \leq r_k$ a quantidade de índices j 's na palavra wp_k tais que $S_j^- - S_{j-1}^- = 2$. Ou seja, D_k mede a quantidade de saltos à esquerda maiores que 1 na palavra \wp_k*

Proposição 4.2.10 *A aplicação kneading à esquerda associada a palavra \wp_k é dada por:*

$$Q^-(j) = \begin{cases} 2 & , \text{ se } j = s_{k-1}d_{k-1} + \dots + s_1d_1 \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

onde

Demonstração:

A ideia básica para provar esta proposição será identificar as posições nas quais existe uma diferença de corte igual a 2. Pelos lemas visto anteriormente sabemos apenas que os símbolos B e C geram cortes consecutivos. Logo tais saltos ocorrerão dos índices C para um B pois terá um A entre eles.

Passo Inicial

Na palavra \wp_2 devemos localizar todos os índices j tal que $e_{S_j^- - 2} = C$ e $e_{S_j^- - 1} = B$. Estes índices são os índice pares ou seja $j = s_1d_1$ com $s_1 = 1, 2, \dots, n_1 + 1$. Logo para estes j 's temos $S_j^- - S_{j-1}^- = 2$ consequentemente $Q^-(j) = 2$ para estes j 's e 1 para os outros. Além disto $D_2 = (n_1 + 1) = (n_1 + 1)^{2-1}$

Hipótese de Indução

Seja \wp_k com $k \geq 2$. Suponha por hipótese de indução que se $j = s_kd_k + \dots + s_1d_1$ com $s_1 = 1, 2, \dots, n_1 + 1$ e $s_i = 1, 2, \dots, n_i$ para $i = 2, 3, \dots, n_k$ então $S_j^- - S_{j-1}^- = 2$ Não verdade descrevemos todos os cortes que possuem salto maior que 1. Portanto, $Q^-(j) = 2$ para estes j 's e 1 para os outros. Além disto, $D_k = (n_{k-1} + 1)D_{k-1} \leq (n_{k-1} + 1)^{n_{k-1}}$

Passo de Indução

Vamos agora analisar a palavra $\wp_{k+1} = \wp_k^{n_k} \dots \wp_1^{n_1} AB^{l_{k+1}}C$. Pela hipótese de indução sabemos todos os índices dos saltos das palavras \wp_1, \dots, \wp_k consequentemente também sabemos todos os índices dos bloco $\wp_k^{n_k}, \wp_k^{n_k} \wp_{k-1}^{n_{k-1}}, \dots, \wp_k^{n_k} \dots \wp_1^{n_1}, \wp_k^{n_k} \dots \wp_1^{n_1} AB$ pois eles são obtidos apenas por uma translação dos índices. Portanto, se $j = s_{k+1}d_{k+1} + \dots + s_1d_1$ com $s_1 = 1, 2, \dots, n_1 + 1$ e $s_i = 1, 2, \dots, n_i$ para $i = 2, 3, \dots, n_{k+1}$ então $S_j^- - S_{j-1}^- = 2$ logo $Q^-(j) = 2$ para estes j 's e 1 para os outros. Além disto, $D_{k+1} = n_k D_k + n_{k-1} D_{k-1} \dots n_1 D_1 + 1 = n_k D_k + D_k = (n_k + 1)D_k$ ma spela hipótese de indução $D_k = (n_{k-1} + 1)D_{k-1} \leq (n_{k-1} + 1)^{n_{k-1}} \leq (n_k + 1)^{n_{k-1}+1} \leq (n_k + 1)^{n_k}$

□

Corolário 4.2.11 *Para a palavra \wp_{k+1} temos que $D_{k+1} = (n_k + 1)D_k$ e $D_{k+1} \leq (n_k + 1)^{n_k}$*

Demonstração:

Segue diretamente da demonstração acima. □

Proposição 4.2.12 *A aplicação kneading à direita associadas a palavra \wp_k é dada por:*

$$Q^+(j) = \begin{cases} d_{k-1}n_{k-1} + 1 & , \text{ se } j = l_k + 3 \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

para todo $j \geq 2$

Demonstração:

Sabemos que $S_1^+ = 1, S_2^+ = 2$ e $S_3^+ = 3$ logo $S_3^+ - S_2^+ = S_2^+ - S_1^+ = 1 = S_1^-$ consequentemente $Q^+(3) = Q^+(2) = 1$ Observe que os cortes a direita deixam de ser sucessivos apenas na passagem do corte $l_{k-1} + 2$ -ésimo para o seguinte em todo $k \geq 2$, isto é

$$S_{l_{k-1}+3}^+ - S_{l_{k-1}+2}^+ = (n_{k-1}r_{k-1} + \dots + n_1r_1 + l_{k-1} + 3) - (n_{k-2}r_{k-2} + \dots + n_1r_1 + l_{k-1} + 2)$$

$$S_{l_{k-1}+3}^+ - S_{l_{k-1}+2}^+ = n_{k-1}r_{k-1} + 1 = S_{n_{k-1}d_{k-1}+1}^-$$

Para todos os outros índices tempos cortes sucessivos resultando no valor 1 para a aplicação kneading. □

Proposição 4.2.13 *Sejam Q^+, Q^- as aplicações kneading acima. Mostraremos que elas satisfazem a condição de admissibilidade, ou seja, $Q^+(Q^-(Q^+)(j) + l) \leq Q^+(j + l)$ onde \leq representa a ordem lexicográfica e o mesmo vale trocando o sinal $+$ por $-$.*

Demonstração:

Faremos primeiro a prova de que $Q^+(Q^-(Q^+)(j) + l) \leq Q^+(j + l)$. Observe que $Q^-(Q^+)(1) = 1$ logo $Q^+(Q^-(Q^+)(1) + l) = Q^+(1 + l)$ para todo $l \geq 1$ Agora analisando $j = 2$ temos $Q^-(Q^+)(2) = 1$ logo $Q^+(Q^-(Q^+)(2) + l) = Q^+(1 + l)$. Temos que comparar esta quantidade com Q^{2+l} , mas observe que elas coincidem em $l = 1$ mas para $l = 2$ temos que $Q^+(Q^-(Q^+)(2) + 2) = 1 < Q^+(4) = d_1n_1 + 1$, pois $4 = 3 + l_1$. Como temos a ordem lexicográfica finalizamos a prova deste caso. Agora provaremos o caso $Q^-(Q^+(Q^-)(j) + l) \leq Q^-(j + l)$ será feita da mesma maneira. Se $j = 1$ temos a igualdade isto é $Q^-(Q^+(Q^-)(1) + l) = Q^-(1 + l)$. Agora para $j=2$ observe que $Q^+(Q^-)(2) = Q^+(2) = 1$ logo $Q^-(Q^+(Q^-)(2) + l) = Q^-(1 + l)$ devemos agora comparar esta quantidade com $Q^-(2 + l)$. Para $l = 1$ temos que $Q^-(Q^+(Q^-)(2) + 1) = Q^-(2) = 2 > Q^-(2) = 1$. Nesta combinatória apenas a aplicação Q^+ é admissível. □

Vimos anteriormente que todas as posições B e C geram cortes. Destas posições, as relativas a C são pontos que geram tempo de duplicação à esquerda, isto é, temos 2 pré-críticos com o mesmo corte. Como veremos no lema a seguir:

Lema 4.2.14 *Na palavra \wp_k para todo $k \geq 1$. As posições referentes ao símbolo C geram tempos de duplicação à esquerda.*

Demonstração:

Sabemos que as posições B e C geram cortes além disto o símbolo C sempre vem depois do símbolo B . Então seja i tal que $e_i = B$ e $e_{i+1} = C$ logo existe j_i tal que $S_{j_i}^- = i + 1$ logo $f^{S_{j_i}^-}(z_{j_i-1}^-, c) \ni c$ então existe $z_{j_i}^- \in (z_{j_i-1}^-, c)$ tal que $f^{S_{j_i}^-}(z_{j_i}^-) = c$. Agora ao analisar o intervalo $f^{S_{j_i}^-}(z_{j_i}^-, c) = (c, c_{S_{j_i}^-}) = (c, c_{i+1})$ como $e_{i+1} = C$ temos que $(c, c_{i+1}) \ni z_1^+, z_1^-$ consequentemente existem $z_{j_i+1}^-$ e $z_{j_i+2}^-$ tais que $f^{S_{j_i}^-+1}(z_{j_i+1}^-) = f^{S_{j_i}^-}(z_{j_i+2}^-) = c$ ou seja $f^{i+2}(z_{j_i+1}^-) = f^{i+2}(z_{j_i+2}^-) = c$, ou seja, o símbolo C da posição $i + 1$ gerou pontos de duplicação. □

Capítulo 5

Kneading, admissibilidade e atratores

Neste capítulo vamos discutir critérios de admissibilidade para aplicações kneading e procurar uma caracterização, em termos destas aplicações, para a existência de atratores periódicos e outros comportamentos.

5.1 Critério de admissibilidade

Dadas as sequências $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ definimos o itinerário φ_{∞} que, pelo Teorema 4.1.1, é admissível. Usamos o que chamamos de “construção by hand”, esta pode ser considerada um método bem rudimentar de provar admissibilidade. É tão rudimentar que a cada combinatória dada o método precisa ser repetido e, dependendo da combinatória, pode ser bem difícil. Seria então desejável ter um critério em termos da sequência \mathcal{I} -kneading ou \mathcal{E} -kneading, ou em termos das aplicações kneading Q^+ e Q^- .

A admissibilidade de um itinerário $\underline{\theta} = (\theta_1 \ \theta_2, \ \theta_3, \ \dots)$, para uma aplicação unimodal, é uma questão bem mais simples de ser resolvida. Primeiro temos a condição de que, se $\theta_i = c$, para algum $i \geq 1$, então $\underline{\theta}$ deve ser periódica pelo shift σ . Se este caso não ocorre, então $\sigma^i(\underline{\theta})$ deve ser lexicograficamente menor do que $\underline{\theta}$. Outra maneira de decidir pela admissibilidade de $\underline{\theta}$, no caso unimodal é computando os tempos de corte e a aplicação kneading Q . Enfatizamos aqui que, no caso unimodal existe apenas uma aplicação kneading. A condição de admissibilidade se reduz às condições $Q(j) < j$, para todo $j \geq 1$ e que $\{Q(Q(Q(k)) + j)\}_{j=1}^{\infty}$ é lexicograficamente menor do que $\{Q(k + j)\}_{j=1}^{\infty}$, para todo $k \geq 1$.

Para o caso de recobrimentos críticos, se consideramos a partição do círculo em dois arcos, definidos pelo ponto fixo e sua pré-imagem, temos dois símbolos e todos os itinerários $\underline{\theta} = (\theta_1 \ \theta_2, \ \theta_3, \ \dots)$ em Σ_2 são admissíveis. O inconveniente desta partição e dos itinerários em dois símbolos vem do fato de que eles não tem uma relação simples com os tempos de corte. Isto é uma característica importante do recobrimento crítico e exerce uma grande influência na existência ou não de uma medida invariante piac. Sendo assim, passamos a considerar uma partição do círculo definida pelo ponto crítico e suas duas pré-imagens. No caso bem mais importante em que o ponto crítico não é periódico, isto nos dá três arcos no círculo. O problema é que com esta partição, não é todo itinerário com três símbolos que é admissível. Então precisamos desenvolver um critério prático que nos permita decidir em que condições um itinerário $\underline{\theta}$, periódico ou não, é admissível. Uma vez que a ordem no círculo é mais complexa do que a ordem em \mathbb{R} , a existência de uma relação entre $\sigma^i(\underline{\theta})$ e $\underline{\theta}$ não é clara. Por outro lado podemos calcular os tempos de corte e aplicações \mathcal{E} -kneading, a partir de $\underline{\theta}$. Então, devemos estabelecer critérios de admissibilidade para as aplicações kneading Q^+ e Q^- . Para isto consideramos a sequência dos pontos pré-críticos mais próximos à direita, $\{z_k^+\}_{k=1}^{\infty}$ e seus respectivos tempos de corte à direita, $\{S_k^+\}_{k=1}^{\infty}$. Também consideramos

a sequência dos pontos pré-críticos mais próximos à esquerda, $\{z_k^-\}_{k=1}^\infty$ e seus respectivos tempos de corte à esquerda, $\{S_k^-\}_{k=1}^\infty$. Veja a Seção 3.2, o Lema 3.2.1 para relembrar propriedades destes pontos pré-críticos, dos seus respectivos tempos de corte, bem como a definição das aplicações kneading Q^+ e Q^- .

Passamos a usar a notação $c_i = f^i(c)$ e consideramos os arcos

$$A_k^+ = (z_k^+, z_{k-1}^+) \quad \text{e} \quad A_k^- = (z_{k-1}^-, z_k^-).$$

Chamamos a atenção para o fato de que

$$A_1^+ = (z_1^+, z_0^+) = (z_1^-, c) \quad \text{e} \quad A_1^- = (z_0^-, z_1^-) = (c, z_1^+).$$

Para $k \geq 1$, as aplicações kneading Q^+ e Q^- são definidas pelas igualdades:

$$S_k^+ - S_{k-1}^+ = S_{Q^+(k)}^- \quad \text{e} \quad S_k^- - S_{k-1}^- = S_{Q^-(k)}^+.$$

Um critério para determinar se duas aplicações em \mathbb{N} podem ser realizadas como aplicações kneading de um recobrimento crítico está relacionado com a posição de certos pontos da órbita positiva do ponto crítico em relação aos pontos pré-críticos mais próximos z_k^+ e z_k^- . Porém, no caso de recobrimentos críticos, surge uma dificuldade em decorrência do espaço de fase ser o círculo e os lados direito e esquerdo do ponto crítico não ser distinguidos globalmente. Isto trás dificuldades, que inexitem no caso das aplicações unimodais, e faz com que leis de admissibilidade sejam mais difíceis de ser detectadas ou são incompletas. Os próximos lemas são passos importantes para uma determinação mais definitiva de condições de admissibilidade.

Lema 5.1.1 *Sejam Q^+ e Q^- as aplicações kneading de um recobrimento crítico $f \in \mathcal{R}$ que não possui atrator periódico. Então, para todo $k \geq 1$, temos que $Q^+(k) \geq 1$, $Q^-(k) \geq 1$ e valem que:*

$$c_{S_k^+} \in A_{Q^+(k+1)}^- \quad \text{e} \quad c_{S_k^-} \in A_{Q^-(k+1)}^+.$$

Demonstração:

Vamos demonstrar apenas que $c_{S_k^+} \in A_{Q^+(k+1)}^-$, para todo $k \geq 1$, pois o outro caso é semelhante. Temos que $Q^+(k+1) \geq 1$ e $f^{S_{Q^+(k+1)}^-}$ é um difeomorfismo em $(c_{S_k^+}, c)$. Por outro lado, o intervalo $(z_{Q^+(k+1)-1}^-, c)$ é um intervalo máximo no qual $f^{S_{Q^+(k+1)}^-}$ é um difeomorfismo. Disto resulta que $(c_{S_k^+}, c) \subset (z_{Q^+(k+1)-1}^-, c)$. Como o intervalo (c, z_k^+) contém z_{k+1}^+ e Z_{k+1}^+ , concluímos que a sua imagem por $f^{S_k^+}$, que é o intervalo $(c_{S_k^+}, c)$, contém $z_{Q^+(k+1)}^-$. Observamos que pode ocorrer que $z_{k+1}^+ = Z_{k+1}^+$ e que $Z_{Q^+(k+1)}^- < z_{Q^+(k+1)}^-$. Nesta situação pode ser que $(c_{S_k^+}, c)$, não contenha $Z_{Q^+(k+1)}^-$. De qualquer modo resulta que

$$z_{Q^+(k+1)-1}^- < c_{S_k^+} < Z_{Q^+(k+1)}^- \leq z_{Q^+(k+1)}^-, \quad (5.1)$$

ou que

$$z_{Q^+(k+1)-1}^- < Z_{Q^+(k+1)}^- < c_{S_k^+} < z_{Q^+(k+1)}^-. \quad (5.2)$$

As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram as duas possibilidades. Observamos que a Desigualdade 5.2 ocorre se, e somente se, $S_{Q^+(k+1)}^-$ é um tempo de duplicação e S_{k+1}^+ não é tempo de duplicação. Em qualquer um destas situações a demonstração está concluída.

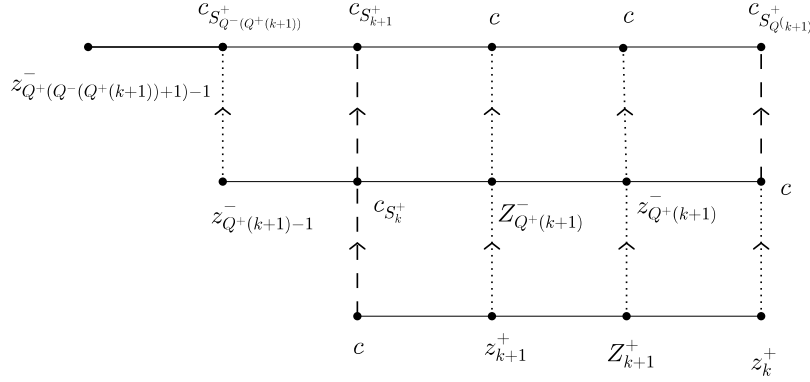


Figura 5.1: o caso $z_{Q^+(k+1)-1}^- < c_{S_k^+} < Z_{Q^+(k+1)}^-$

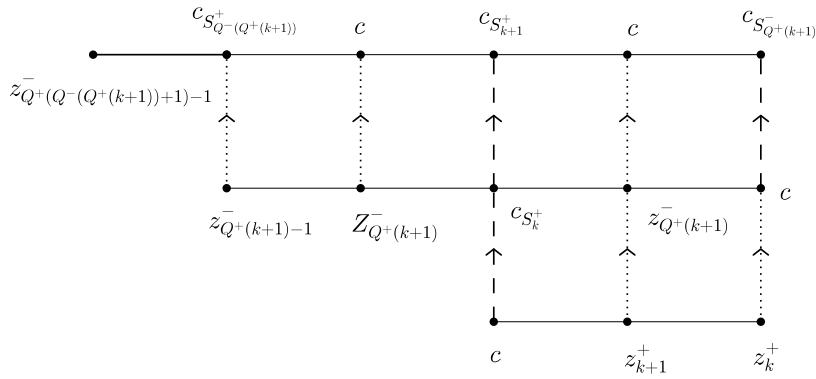


Figura 5.2: o caso $Z_{Q^+(k+1)}^- < c_{S_k^+} < z_{Q^+(k+1)}^-$

□

Lema 5.1.2 *Sejam Q^+ e Q^- as aplicações kneading de um recobrimento crítico $f \in \mathcal{R}$ que não possui atrator periódico. Então $c_{S_{Q^-(Q^+(k))}^+} < c_{S_k^+}$ e $c_{S_k^-} < c_{S_{Q^+(Q^-(k))}^-}$.*

Demonstração:

O Lema 3.2.2 garante que $S_{Q^+(k)}^- - S_{Q^+(k)-1}^- = S_{Q^-(Q^+(k))}^+$. Pelo Lema 5.1.1, vale que $z_{Q^+(k)-1}^- < c_{S_{k-1}^+} < z_{Q^+(k)}^-$. Veja as Figuras 5.1 e 5.2. Então, aplicando $f^{S_{Q^+(k)}^-}$ nesta primeira desigualdade concluímos que $c_{S_{Q^-(Q^+(k))}^+} < c_{S_k^+}$, como queremos.

□

Vamos introduzir um conceito que usaremos no próximo lema e será útil para estabelecermos condições de admissibilidade.

Definição 5.1.3 Dizemos que um tempo de corte à direita S_k^+ , é um tempo de separação à direita, se o mesmo for um tempo de duplicação à direita e valer que $c_{S_{Q^-(Q^+(k))}^+} < Z_{Q^+(k+1)}^- < c_{S_k^+}$. O conceito de tempo de separação à esquerda é análogo.

Observe que se S_k^+ é um tempo de separação à direita, então $c_{S_{Q^-(Q^+(k+1))}^+} < c < c_{S_{k+1}^+}$. Neste caso em que os pontos $c_{S_{k+1}^+}$ e $c_{S_{Q^-(Q^+(k+1))}^+}$ estão livres um do outro para escolher suas localizações no círculo.

Lema 5.1.4 Sejam Q^+ e Q^- as aplicações kneading de um recobrimento crítico $f \in \mathcal{R}$ que não possui atrator periódico. Considere $k \geq 1$, $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e a ordem lexicográfica denotada por \preceq . Valem as seguintes propriedades:

(a) Se S_{k+j}^+ não é um tempo de separação à direita, para todo $0 \leq j \leq l$, então

$$\{Q^+(Q^-(Q^+(k)) + j)\}_{j=1}^{l+1} \preceq \{Q^+(k + j)\}_{j=1}^{l+1}.$$

(b) Se S_{k+j}^- não é um tempo de separação à esquerda, para todo $0 \leq j \leq l$, então

$$\{Q^-(Q^+(Q^-(k)) + j)\}_{j=1}^{l+1} \preceq \{Q^-(k + j)\}_{j=1}^{l+1}.$$

Demonstração:

Vamos demonstrar apenas o Ítem (a). As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram alguns argumentos abaixo. De acordo com o Lema 5.1.1, para $k \geq 1$, vale que

$$z_{Q^+(k+1)-1}^- < c_{S_k^+} < z_{Q^+(k+1)}^-,$$

e também que

$$z_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+1)-1}^- < c_{S_{Q^-(Q^+(k))}^+} < z_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+1)}^-.$$

Pelo Lema 5.1.2, vale que

$$c_{S_{Q^-(Q^+(k))}^+} < c_{S_k^+}.$$

Assumindo que S_k^+ não é tempo de separação à direita, isto implica que

$$z_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+1)}^- \leq z_{Q^+(k+1)}^-,$$

e portanto resulta que

$$Q^+(Q^-(Q^+(k)) + 1) \leq Q^+(k + 1).$$

Se a desigualdade estrita ocorre, a demonstração termina. Vamos assumir que vale a igualdade, consequentemente temos que

$$z_{Q^+(k+1)-1}^- = z_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+1)-1}^- < c_{S_{Q^-(Q^+(k))}^+} < c_{S_k^+} < z_{Q^+(k+1)}^-.$$

Portanto

$$c_{S_k^+} \in (c_{S_{Q^-(Q^+(k))}^+}, z_{Q^+(k+1)}^-),$$

e aplicando $f^{S_{Q^+(k+1)}^-}$ neste intervalo obtemos que

$$c_{S_{k+1}^+} \in (f^{S_{Q^+(k+1)}^-}(c_{S_{Q^-(Q^+(k))}^+}), c) = (f^{S_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+1)}^-}(c_{S_{Q^-(Q^+(k))}^+}), c).$$

Isto implica que

$$c_{S_{Q^-(Q^+(k))+1}^+} < c_{S_{k+1}^+}.$$

Sabemos que

$$z_{Q^+(k+2)-1}^- < c_{S_{k+1}^+} < z_{Q^+(k+2)}^-,$$

e que

$$z_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+2)-1}^- < c_{S_{Q^-(Q^+(k))+1}^+} < z_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+2)}^-.$$

Como acima, assumindo que S_{k+1}^+ não é tempo de separação à direita, pelo Lema 5.1.2, vale que

$$Q^+(Q^-(Q^+(k)) + 2) \leq Q^+(k + 2).$$

Então, se vale a desigualdade estrita, a demonstração está concluída. Se vale a igualdade repetimos o mesmo argumento e temos que

$$z_{Q^+(k+2)-1}^- = z_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+2)-1}^- < c_{S_{Q^-(Q^+(k))+1}^+} < c_{S_{k+1}^+} < z_{Q^+(k+2)}^-.$$

Logo,

$$c_{S_{k+1}^+} \in (c_{S_{Q^-(Q^+(k))+1}^+}, z_{Q^+(k+2)}^-).$$

Aplicando $f^{S_{Q^+(k+2)}^-}$ neste intervalo e usando a igualdade, obtemos que

$$c_{S_{k+2}^+} \in (f^{S_{Q^+(k+2)}^-}(c_{S_{Q^-(Q^+(k))+1}^+}), c) = (f^{S_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+2)}^-}(c_{S_{Q^-(Q^+(k))+1}^+}), c).$$

Isto implica que

$$c_{S_{Q^-(Q^+(k))+2}^+} < c_{S_{k+2}^+}.$$

Sabemos que

$$z_{Q^+(k+3)-1}^- < c_{S_{k+2}^+} < z_{Q^+(k+3)}^-,$$

e que

$$z_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+3)-1}^- < c_{S_{Q^-(Q^+(k))+2}^+} < z_{Q^+(Q^-(Q^+(k))+3)}^-.$$

Novamente, se S_{k+2}^+ não é tempo de separação à direita, concluímos que

$$Q^+(Q^-(Q^+(k)) + 3) \leq Q^+(k + 3).$$

Então, se vale a desigualdade estrita, a demonstração está concluída. Se vale a igualdade repetimos o mesmo argumento e então, depois de repetirmos este argumento no máximo l vezes, teremos o enunciado no lema. □

5.2 Kneading e atratores periódicos

Uma das questões mais relevantes em sistemas dinâmicos diz respeito à existência de pontos periódicos e, em especial, existência de atratores periódicos. De acordo com o próximo lema, as aplicações kneading Q^+ e Q^- de um recobrimento crítico $f\mathcal{R}$ permite-nos decidir se o mesmo possui um atrator periódico ou não.

Lema 5.2.1 *Sejam Q^+ e Q^- as aplicações kneading de um recobrimento crítico $f \in \mathcal{R}$. Então f possui uma órbita periódica atratora se, e somente se, as aplicações kneading Q^+ e Q^- de f são limitadas;*

Demonstração:

Vamos assumir que f possui uma órbita periódica atratora $T(p)$. Como f tem derivada de Schwarz negativa resulta que a bacia imediata desta órbita contém o ponto crítico c . Cada componente conexa desta bacia é limitada por pontos periódicos, digamos x e y . Podemos escolher x , y e p de modo que: (i) $x < p < c < y$, (ii) $x < c < p < y$ ou (iii) $x < p = c < y$. Vamos analisar esta primeira situação. Se n é o período de p , então f^n é homeomorfismo do intervalo $[x, y]$ sobre ele mesmo e a sequência $\{f^{jn}(c)\}_{j=0}^{\infty}$ tende para p , quando j tende para infinito. Existe o ponto pré-crítico mais próximo à direita, $z_k^+ \in [c, y]$ tal que $f^n(z_k^+) = c$, em particular os tempos de corte à direita são limitados e $S_k^+ = n$ é o maior destes tempos. Resulta $Q^+(j)$ está definida apenas para $1 \leq j \leq k$. Considere $(a, b]$ um domínio fundamental de x . Se $a < b < x$ estão suficientemente próximos de x , então existem apenas uma quantidade finita de pontos pré-críticos mais próximos a esquerda z_j^- fora do intervalo (a, x) . Excetuando estes finitos pontos pré-críticos, todos os outros pontos pré-críticos mais próximos à esquerda estão em (a, x) e são pré-imagens por f^{nj} de pontos pré-críticos em $(a, b]$. Neste caso existem infinitos tempos de corte à esquerda S_k^- mas $Q^-(j)$ assume apenas uma quantidade finita de valores. O Caso (ii) é análogo ao Caso (i) e portanto vamos passar ao Caso (iii). Neste caso existem infinitos tempos de corte à direita e à esquerda mas pelo mesmo argumento usado no Caso (i), agora trabalhando com dois domínios fundamentais, um para x e outro para y , podemos concluir que Q^+ e Q^- assumem apenas uma quantidade finita de valores.

Reciprocamente, se f não possui órbita periódica atratora, então: (i) o ponto crítico c não é recorrente ou (ii) o ponto crítico c é recorrente e existem uma sequência de intervalos

$$[z_1^-, z_1^+] = W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \dots \supset \{c\},$$

tais que, para $j \geq 1$, o intervalo W_{j+1} é o domínio de primeiro retorno a W_j .

No Caso (i), a sequência de intervalos W_j é finita. A saber, existe o menor $k \geq 1$ tal que $W_k \cap T(c) = \emptyset$. A transformação de primeiro retorno de $W = W_k$ está definida em uma união enumerável de intervalos com medida de Lebesgue total. A restrição desta transformação a cada um destes intervalos é um difeomorfismo crescente sobre W . Estas restrições, chamadas ramos de primeiro retorno, denotadas por ρ_j , são tais que $\rho_j = f^{s_j}$. Enumeramos ρ_j de modo que s_j seja crescente. Temos que s_{j+1}/s_j tende para infinito quando j tende para infinito. No Caso (ii), consideramos os ramos de primeiro retorno $\rho_j : W_{j+1} \rightarrow W_j$ e o tempo de primeiro retorno s_j definido por $\rho_j = f^{s_j}$. Neste caso também temos que s_{j+1}/s_j também tende para infinito quando j tende para infinito. Em ambos os casos, concluímos que, tanto Q^+ quanto Q^- assumem infinitos valores.

□

5.3 Frequência da órbita crítica

Lema 5.3.1 *Seja b_k a quantidade de símbolos B 's da palavra φ_k . Para todo $k \geq 1$ temos que $b_k = n_{k-1}b_{k-1} \dots n_1b_1$.*

Demonstração:

Observe que $\varphi_1 = ABC$ logo $b_1 = 1$.

□

Passo de Inicial

Por outro lado na palavra $\varphi_2 = \varphi_1^{n_1} AB^{l_2}C$ temos n_1 símbolos B 's referente ao bloco $\varphi_1^{n_1}$ e l_2 B 's referente ao bloco $AB^{l_2}C$ totalizando $n_1 + l_2 = n_1b_1 + l_2$.

Hipótese de Indução

Suponha por hipótese de indução que para $k \geq 2$ temos $b_k = n_{k-1}b_{k-1} \dots n_1b_1$.

Passo de Indução

Para a palavra

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k^{n_k} \dots \varphi_1^{n_1} AB^{l_{k+1}}C$$

temos pela hipótese de indução que os blocos $\varphi_k, \dots, \varphi_1$ tem respectivamente $b_k \dots b_1$ símbolos B 's consequentemente $\varphi_k^{n_k}, \dots, \varphi_1^{n_1}$ tem respectivamente $n_k b_k \dots n_1 b_1$. Além disto o bloco $AB^{l_{k+1}}C$ agrega l_{k+1} símbolos B 's totalizando $n_k b_k \dots n_1 b_1 + l_{k+1}$ ou seja $b_{k+1} = n_k b_k \dots n_1 b_1 + l_{k+1}$.

□

A ideia do próximo resultado será a construção de uma quantidade não-enumerável de recobrimentos críticos de modo que frequência dos símbolos B 's. convirja a 1.

Lema 5.3.2 *Sejam a, b, c e d números reais positivos. Se $b < d$ então $\frac{a+b}{c+b} < \frac{a+d}{c+d}$.*

Demonstração:

$$\frac{a+b}{c+b} < \frac{a+d}{c+d} \Leftrightarrow (a+b)(c+d) < (c+b)(a+d) \Leftrightarrow ac + ad + bc + bd < ca + cd + ba + bd.$$

$$\frac{a+b}{c+b} < \frac{a+d}{c+d} \Leftrightarrow ad + bc < cd + ba \Leftrightarrow 0 < (c-a)d + b(a-c) \Leftrightarrow 0 < (c-a)(d-b)$$

Como a, b, c e d são números reais positivos e $b < d$ então $0 < (c-a)(d-b)$. Portanto $\frac{a+b}{c+b} < \frac{a+d}{c+d}$.

□

Com o lema anterior garantimos que crescer o valor de d as frações do tipo $\frac{a+d}{c+d}$ também aumentam o valor.

Lema 5.3.3 *Seja $F(1) = \frac{1}{3}$. Para todo $k \geq 1$ temos*

$$F(k+1) = \frac{(n_k+1)b_k + l_{k+1} - l_k}{(n_k+1)r_k + l_{k+1} - l_k}$$

Demonstração:

Observe que $F(1) = \frac{1}{3}$. A frequência da palavra B é dada por:

$$F(2) = \frac{n_1 + l_2}{3n_1 + l_2 + 2} = \frac{n_1 b_1 + b_1 + l_2 - l_1}{n_1 r_1 + r_1 + l_2 - l_1} = \frac{(n_1+1)b_1 + l_2 - l_1}{(n_1+1)r_1 + l_2 - l_1}$$

Como as palavras

$$\wp_{k+1} = \wp_k^{n_k} \wp_{k-1}^{n_{k-1}} \dots \wp_1^{n_1} AB^{l_{k+1}}C$$

e

$$\wp_k = \wp_{k-1}^{n_{k-1}} \dots \wp_1^{n_1} AB^{l_k}C$$

temos para todo $k \geq 1$

$$F(k+1) = \frac{n_k b_k + b_k + l_{k+1} - l_k}{n_k r_k + r_k + l_{k+1} - l_k} = \frac{(n_k+1)b_k + l_{k+1} - l_k}{(n_k+1)r_k + l_{k+1} - l_k}$$

□

Lema 5.3.4 *Para todo $k \geq 1$ dado $\epsilon > 0$ existe l_k tal que $|F(k) - 1| < \epsilon$*

Demonstração:

$$F(k) = \frac{(n_{k-1}+1)b_{k-1} + l_k - l_k}{(n_{k-1}+1)r_{k-1} + l_k - l_{k-1}} = \frac{(n_{k-1}+1)b_{k-1}}{(n_{k-1}+1)r_{k-1} + l_k - l_{k-1}} + \frac{l_k - l_k}{(n_{k-1}+1)r_{k-1} + l_k - l_{k-1}}$$

$$F(k) = \frac{1}{\frac{(n_{k-1}+1)r_{k-1}}{(n_{k-1}+1)b_{k-1}} + l_k - l_{k-1}} + \frac{1}{\frac{(n_{k-1}+1)r_{k-1}}{l_k - l_k} + 1} = \frac{1}{\frac{r_{k-1}}{b_{k-1}} + l_k - l_{k-1}} + \frac{1}{\frac{(n_{k-1}+1)r_{k-1}}{l_k - l_k} + 1}$$

Como as quantidade r_{k-1} , b_{k-1} e l_{k-1} estão fixadas fazendo l_k suficientemente grande temos que

$$\frac{1}{\frac{(n_{k-1}+1)r_{k-1}}{(n_{k-1}+1)b_{k-1}} + l_k - l_{k-1}} \approx 0$$

e

$$\frac{1}{\frac{(n_{k-1}+1)r_{k-1}}{l_k - l_k} + 1} \approx 1.$$

Em outras, palavras para tal l_k obtemos $|F(k) - 1| < \epsilon$. Além disto, pelo lema anterior sabemos que para todo $l_{k'} > l_k$ valerá $|F(k') - 1| < \epsilon$.

□

Lema 5.3.5 *Existe uma quantidade não-enumerável de recobrimentos críticos f tal que*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \delta_{f^i(c)} = \delta_{p_f}$$

Demonstração:

Seguem diretamente dos lemas anteriores e observando em cada etapa da escolha do expoente l_k havia uma quantidade enumerável de possibilidades totalizando $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ escolhas. \square

Capítulo 6

A família de Arnold

6.1 Combinatórias especiais na família de Arnold

Teorema 6.1.1 *Seja f_α , $\alpha \in [0, 1]$, a família de Arnold. Considere duas seqüências $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ e $\{\ell_i\}_{i=1}^\infty$ tais que $\ell_1 \geq 1$ e $\ell_{i+1} > \ell_i$. Considere os conjuntos \mathcal{P}_i que se iniciam com a palavra \wp_i , $i \geq 1$. Então valem:*

- (a) *Existem intervalos $(\alpha_i, \hat{\alpha}_i)$ tais que $\alpha \in (\alpha_i, \hat{\alpha}_i)$ se, e somente se, a seqüência \mathcal{E} -kneading de f_α pertence ao conjunto \mathcal{P}_i .*
- (b) *$(\alpha_i, \hat{\alpha}_i) \subset [0, 1]$ é uma seqüência encaixante, $\bigcap_{i=1}^\infty (\alpha_i, \hat{\alpha}_i)$ é um único parâmetro α_∞ e a seqüência \mathcal{E} -kneading de f_{α_∞} é $\wp_\infty = \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{P}_i$.*

Capítulo 7

Propriedades métricas

7.1 Conjunto limite

Nessa seção estudamos o conjunto $\omega(c)$, conjunto ω -limite do ponto crítico c , de um recobrimento crítico $f \in \mathcal{R}$ dado pelo Teorema 4.1.1. Notamos inicialmente que, de acordo com a construção indutiva de f , se para cada $i \geq 1$, $r_i = |\wp_i|$ e $t_i = n_{i-1}|\wp_{i-1}| + \dots + n_2|\wp_2| + n_1|\wp_1| + \ell_i + 2$, a união finita de intervalos dada por

$$\mathcal{C}_i = \left(\bigcup_{j=0}^{r_i-1} f^j(V_{2i}^-) \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=0}^{t_i-1} f^j(E_i^{\ell_i}) \right),$$

cobre o trecho de órbita $\{c, f(c), \dots, f^{r_{i+1}}(c)\}$. No entanto, pelo fato de $\ell_i < \ell_{i+1}$, a união \mathcal{C}_i não é uma cobertura do trecho de órbita $\{c, f(c), \dots, f^{r_{i+2}}(c)\}$. Deste modo, \mathcal{C}_i não é uma cobertura para o conjunto $\omega(c)$. Do fato de que a sequência $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$ é estritamente crescente resulta que o conjunto $\omega(c)$ não é um conjunto minimal. Vê-se facilmente que o ponto fixo $p \in \omega(c)$. Mesmo assim, de acordo com o teorema a seguir, $\omega(c)$ é um conjunto de Cantor com medida de Lebesgue nula.

Teorema 7.1.1 *Dadas as sequências $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$ tais que $\ell_1 \geq 1$ e $\ell_{i+1} > \ell_i$ e a correspondente sequência de palavras $\{\wp_i\}_{i=1}^{\infty}$, consideramos o um recobrimento crítico $f \in \mathcal{R}$ cuja sequência \mathcal{E} -kneading é o itinerário $\wp_{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i$. Então o conjunto ω -limite $\omega(c)$ é um conjunto de Cantor com medida de Lebesgue nula.*

Visando uma melhor compreensão do conjunto $\omega(c)$ e a demonstração do Teorema 7.1.1, observamos que o itinerário \wp_{∞} não contém palavras do tipo AA e BA . Isto significa que a órbita positiva de c não visita certos arcos de círculo. Como consequência teremos que $\omega(c)$ é um conjunto de Cantor. Um estudo mais refinado sobre o tamanho relativo desses arcos que não são visitados nos permitirá provar que a medida de Lebesgue de $\omega(c)$ é nula e então a demonstração do Teorema 7.1.1 estará concluída. Nesta etapa vamos precisar de usar alguns Princípios de Koebe, a nossa principal ferramenta para controlar distorção de iterados de uma função.

Consideramos a função $G : \bigcup_{i=0}^{\infty} W_i \rightarrow W$, onde $W = J_0 = [z_1^-, c]$, $W_0 = J_1$ (corresponde aos itinerários que se iniciam com a palavra ABC) e $W_i \subset W$, para $i \geq 1$, é o intervalo constituído dos pontos cujos itinerários se iniciam com a palavra $(ABC)AB^iC$. Definimos G em $x \in W_i$ pondo $G(x) = f^{i+5}(x)$, se $i \geq 1$ e $G(x) = f^3(x)$, para $i = 0$. A restrição de G a W_0 coincide com o ramo de primeiro retorno $\psi_1 : V_2^- \rightarrow V_1^-$.

Lema 7.1.2 *Considere a função $G : \cup_{i=0}^{\infty} W_i \rightarrow W$ associada a um recobrimento crítico $f \in \mathcal{R}$ cuja sequência \mathcal{E} -kneading seja do tipo \wp_{∞} . Considere também o conjunto Ω constituído dos pontos $x \in W$ tais que $G^i(x)$ está bem definido, para todo $i \geq 1$. Então a medida de Lebesgue de Ω é nula.*

Demonstração:

Vamos usar aqui o Princípio de Koebe 3.4 para controlar a distorção dos iterados da função G . Denotamos por G_i o ramo de G que corresponde a sua restrição ao intervalo W_i e começamos listando algumas propriedades sobre a extendibilidade destes ramos:

- (a) Para $i \geq 0$, verifica-se que $W_{i+1} \subset [W_{i+2}, W_i] \subset W$;
- (b) O extremo direito de W_0 é o ponto crítico c , G_0 é restrição de f^3 e representa um ramo de primeiro retorno a W . Existe um intervalo \hat{W}_0 tal que $W_0 \subset \hat{W}_0 \subset W$ e \hat{G}_0 , restrição de f^3 , aplica o interior de \hat{W}_0 difeomorficamente sobre o intervalo $(c, f^3(c))$;
- (c) Para $i \geq 1$, G_i é restrição de f^{i+5} e aplica o intervalo W_i difeomorficamente sobre W . Existe um intervalo \hat{W}_i tal que $W_i \subset \hat{W}_i \subset W$ e \hat{G}_i , restrição de f^{i+5} , aplica o interior de \hat{W}_i difeomorficamente sobre o intervalo $(c, f(c))$.
- (d) Sejam $p^+ \in [c, z_1^+]$ e $p^- \in [z_1^-, c]$, pontos tais que $f(p^+) = f(p) = p$ e $f(p^-) = p^+$, então os intervalos $[c, p^+]$, $[z_1^+, p]$ e $[z_1^-, p^-]$ não contem pontos da órbita positiva de c .

Vamos substituir a função G , que possui um ponto crítico em c , por uma outra função \mathcal{G} , induzida por G e que não possui ponto crítico. Esta função induzida é obtida através de um processo indutivo que gera uma sequência $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de funções \mathcal{G}_i que possuem um ramo crítico (com um ponto crítico em c) definido em um intervalo que decresce para $\{c\}$ a medida que $i \geq 1$ cresce. Esta sequência possui uma função limite \mathcal{G} que possui infinitos ramos que aplicam os seus respectivos domínios difeomorficamente sobre W . No primeiro passo dessa indução colocamos $\mathcal{G}_1 = G$. Esta função \mathcal{G}_1 possui infinitos ramos que são difeomorfismos dos seus respectivos domínios sobre W e um único ramo com um ponto crítico em c e definido em $\mathcal{W}_1 = W_0$. Então fazemos a composição desse ramo crítico com os ramos que são difeomorfismos. Assim obtemos novos ramos que são difeomorfismos sobre W e um novo ramo com um ponto crítico em c e definido em um intervalo $\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_1$. Continuando desse modo obtemos a sequência $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^{\infty}$ e uma sequência $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de intervalos fechados e encaixantes tais que: (i) $\cap_{i=1}^{\infty} \mathcal{W}_i = \{c\}$, (ii) \mathcal{G}_i possui ramos difeomorficos, com exceção de um ramo com um ponto crítico em c e definido em \mathcal{W}_i , (iii) fora do intervalo \mathcal{W}_i verifica-se que $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i$ e (iv) a sequência $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^{\infty}$ possui uma função limite sem pontos críticos que é, por definição, a função \mathcal{G} mencionada mais acima. A Figura 7.1 é um esboço dos gráficos de G e \mathcal{G} .

Todos os ramos de \mathcal{G} são difeomorfismos que se estendem para difeomorfismos sobre o intervalo \hat{W} , definido como sendo o menor intervalo que contém W e tal que o comprimento de cada componente conexa de $\hat{W} \setminus W$ é pelo menos $\epsilon > 0$, onde ϵ é o mínimo entre as distâncias $|z_1^- - p|$ e $|p^+ - c|$.

Pelo Princípio de Koebe 3.4, os ramos dos iterados de \mathcal{G} são difeomorfismos sobre W e possuem distorção limitada. Por isso, e pelo fato de que o complementar do domínio de \mathcal{G} em W é uma união enumerável de intervalos, podemos concluir que o conjunto dos pontos $x \in W$ tais que $\mathcal{G}^i(x)$ está definido, para todo $i \geq 1$, tem medida de Lebesgue nula. Este conjunto contém o conjunto Ω do enunciado do lema e então a demonstração está encerrada. \square

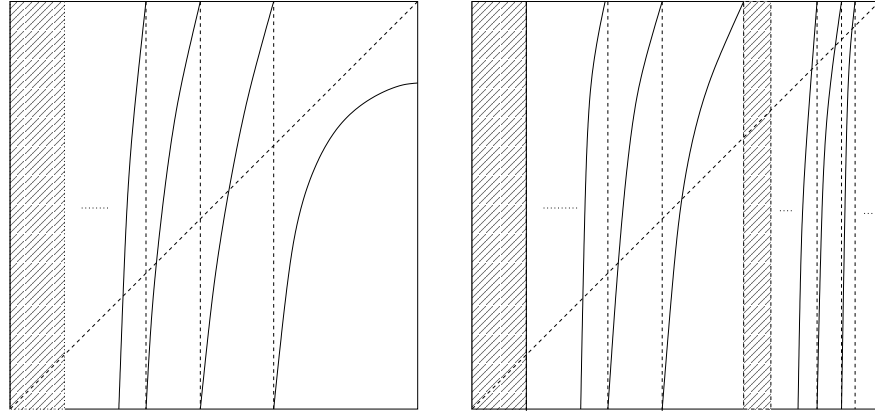


Figura 7.1: as funções G e \mathcal{G}

Demonstração do Teorema 7.1.1.

É claro que $\omega(c)$ é um conjunto fechado e totalmente desconexo. Como c é recorrente também temos que $\omega(c)$ é perfeito e portanto é um conjunto de Cantor.

Para concluir que a medida de Lebesgue de $\omega(c)$ é nula observamos que $[c, p^-] \cap \omega(c) = \emptyset$. Aqui $p^+ \in [c, z_1^+]$ é o ponto tal que $f(p^+) = f(p) = p$. Observamos também que $f^3(c) \in \Omega$ e a medida de Lebesgue de $W \cap \omega(c)$ é igual a medida de Lebesgue de $\Omega \cap \omega(c)$ a qual, pelo Lema 7.1.2, é nula. Isto nos permite concluir que a densidade de $\omega(c)$ em c é nula. Então decorre de [vSV04] que a medida de Lebesgue de $\omega(c)$ é nula como afirma o teorema. \square

7.2 Medida invariante

Como já observamos, um recobrimento crítico $f \in \mathcal{R}$ possui muitas medidas invariantes e nesta seção estamos interessados em uma destas medidas. Sabemos que sob as nossas hipóteses, f é topologicamente conjugado com L_2 por um homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ de modo que temos a equação $h \circ f = L_2 \circ h$. Como L_2 preserva a medida de Lebesgue do círculo, denotada por λ , podemos definir a medida $h^*\lambda$ pondo $h^*\lambda(\mathcal{B}) = \lambda(h(\mathcal{B}))$, para todo boreliano do círculo. Então $h^*\lambda$ é uma medida invariante para f .

No caso em que a sequência \mathcal{E} -kneading de f é \wp_∞ , gostaríamos de saber se $h^*\lambda$ é uma medida piac. Relembramos que a definição de \wp_∞ envolve as sequências de inteiros positivos, $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ e $\{\ell_i\}_{i=1}^\infty$, como antes. Relembramos que \wp_∞ é definida como

$$\wp_\infty = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_i,$$

onde \mathcal{P}_i é o conjunto constituído de todos os itinerários que tem a palavra \wp_i no seu início. Para definirmos a palavra \wp_i começamos com $\wp_1 = AB^{\ell_1}C$ e continuamos por indução pondo

$$\wp_{i+1} = \wp_i^{n_i} \dots \wp_2^{n_2} \wp_1^{n_1} AB^{\ell_{i+1}}C.$$

O recobrimento crítico f é dado pelo Teorema 4.1.1 e estamos interessados em aumentar lexicograficamente as sequências $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ e $\{\ell_i\}_{i=1}^\infty$ e analisar os efeitos que isto acarreta sobre

as propriedades métricas do recobrimento crítico resultante e em especial sobre a medida $h^*\lambda$. De início observamos que usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 4.1.1 é possível provarmos o seguinte lema. Em particular, decorre deste lema que o itinerário periódico φ_i^∞ pode ser realizado por uma órbita periódica de período $r_i = |\varphi_i|$.

Lema 7.2.1 *Sejam $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ e $\{\ell_i\}_{i=1}^\infty$ duas seqüências de inteiros, φ_s como acima e $f \in \mathcal{R}$, um recobrimento crítico com seqüência \mathcal{E} -kneading igual a φ_∞ . Seja $\psi_s : V_{2s}^- \rightarrow V_{2s-1}^-$ o ramo de primeiro retorno associado à palavra φ_s .*

- (a) *Se ℓ_s tende a infinito, então $|V_{2s}|$ tende a zero.*
- (b) *Existem recobrimentos críticos do círculo $f \in \mathcal{R}$, cuja seqüência \mathcal{E} -kneading é igual a $\varphi_{s-1}^{n_{s-1}} \dots \varphi_1^{n_1} AB^\infty$. Neste caso f é eventualmente periódico.*
- (c) *Existem recobrimentos críticos $f \in \mathcal{R}$, cuja seqüência \mathcal{E} -kneading é φ_s^∞ . Neste caso f possui uma órbita periódica atratora de período $r_s = |\varphi_s|$.*
- (d) *Seja $[a, b] \ni c$ uma componente da bacia de atração da órbita periódica atratora do Ítem (c). Se n_s tende a infinito, então V_{2s}^- decresce para $[a, c]$.*

Demonstração:

Os Ítems (a) e (b) são imediatos e vamos passar para a prova do Ítem (c) que é o principal. O Ítem (d) decorre do Ítem (c). Para provarmos este ítem basta tomarmos uma seqüência $\{n_{i,j}\}_{i,j=1}^\infty$ de seqüências de modo que $\lim_{j \rightarrow \infty} n_{i,j} = \infty$. Então a seqüência de recobrimentos críticos $\{f_j\}_{j=1}^\infty$, dados pelo Teorema 4.1.1, converge para um recobrimento crítico como no lema. De fato, o inteiro $n_{i,j}$ é o número de iterados do ponto crítico por ψ_i (ou por ϕ_i) que estão no intervalo V_{2i}^- . Para o recobrimento crítico limite este número é infinito que garante que todos os iterados positivos do ponto crítico por ψ_i estão em V_{2i}^- . Isto só é possível se ψ_i possui um ponto periódico atrator em V_{2i}^- e este ponto atrai o ponto crítico. \square

Vamos examinar um pouco mais a coleção de intervalos $V_{2s}^-, f(V_{2s}^-), \dots, f^{r_s-1}(V_{2s}^-)$, onde $r_s = |\varphi_s|$. Estamos interessados na medida de Lebesgue da união destes intervalos.

Lema 7.2.2 *Nas condições acima temos que a medida de Lebesgue da união $\cup_{i=0}^{r_s-1} f^i(V_{2s}^-)$ é nula.*

Demonstração:

A união que aparece no enunciado do lema cobre o trecho de órbita $\{c, \dots, f^{r_s}(c)\}$ e o conjunto ω -limite $\omega(c)$ é um conjunto de Cantor. Porém, quando variamos s , a correspondente seqüência dessas uniões não é encaixante. Mais precisamente, podemos ver que a união

$$\cup_{i=0}^{r_s-1} f^i(V_{2s}^-)$$

não é um subconjunto de

$$\cup_{i=0}^{r_{s-1}-1} f^i(V_{2s-2}^-).$$

Então não temos uma seqüência encaixante e decrescente. Mas esta união pode ser dividida como união de dois subconjuntos. Um subconjunto que não encaixa, mas que corresponde a uma série geométrica multiplicada por um fator que tende a zero, quando s

tende a infinito. Um outro subconjunto que encaixa e que ocupa uma proporção uniformemente menor do que 1 do subconjunto anterior. Nesta parte, para garantir a uniformidade desta proporção, precisamos usar o Princípio Macroscópico. Começamos considerando as sequências

$$\sigma_{s,\ell_s} : E_s^{\ell_s} \rightarrow V_{2s-1}^+ \cup V_{2s-1}^-$$

e

$$\psi_s : V_{2s}^- \rightarrow V_{2s-1}^+ \cup V_{2s-1}^-.$$

Relembramos que σ_{s,ℓ_s} e ψ_s são ramos de primeiro retorno à união $V_{2s-1}^+ \cup V_{2s-1}^-$, no entanto as imagens desses ramos são subconjuntos apenas de V_{2s-1}^- . Temos a inclusão

$$\psi_s^{n_{s-1}}(V_{2s}^-) \subset V_{2s-3}^- \subset V_{2s-4}^-,$$

da qual resulta que

$$\psi_1^{n_1} \circ \dots \circ \psi_{s-1}^{n_{s-1}}(V_{2s}^-) \subset V_1^- \setminus V_2^-.$$

Então afirmamos que a medida de Lebesgue do conjunto

$$\bigcup_{j=1}^{\ell_s+2} f^j(\psi_1^{n_1} \circ \dots \circ \psi_{s-1}^{n_{s-1}}(V_{2s}^-)),$$

tende a zero quando s tende a infinito. A razão disto vem do fato que o trecho de órbita nesta união corresponde à palavra $AB^{\ell_s}C$. Esta é uma parte que está em $E_s^{\ell_s}$ e a partir do primeiro iterado, que corresponde a $j = 1$, os intervalos dessa união estão em domínios fundamentais do único ponto fixo de f . Estes domínios fundamentais decrescem exponencialmente em tempo negativo com uma razão dada pelo inverso da derivada no ponto fixo. Então os referidos intervalos dessa união estão em uma série geométrica. Mas como o último intervalo desta união,

$$f^{\ell_s+2}(\psi_1^{n_1} \circ \dots \circ \psi_{s-1}^{n_{s-1}}(V_{2s}^-)),$$

está contido em V_{2s-1}^- , resulta que esta série geométrica está multiplicada pelo fator $|V_{2s-1}^-|$. Este fator tende a zero quando s tende a infinito e assim concluímos que a afirmação feita é verdadeira.

A parte encaixante vem da inclusão

$$\bigcup_{i=0}^{n_{s-1}} \psi_{s-1}^i(V_{2s}^-) \subset V_{2s-2}^-,$$

para todo $s \geq 2$. Isto implica que

$$\bigcup_{j=0}^{n_{s-2}} \psi_{s-2}^j \left(\bigcup_{i=0}^{n_{s-1}} \psi_{s-1}^i(V_{2s}^-) \right) \subset \bigcup_{j=0}^{n_{s-2}} \psi_{s-2}^j(V_{2s-2}^-) \subset V_{2s-4}^-$$

e de fato corresponde a uma parte encaixante da união $\bigcup_{i=0}^{r_{s-1}} f^i(V_{2s}^-)$, quando s cresce. Agora, afirmamos que existe $0 < \alpha < 1$ tal que

$$\left| \bigcup_{i=0}^{n_{s-1}} \psi_{s-1}^i(V_{2s}^-) \right| \leq \alpha |V_{2s-2}^-|$$

Vamos usar o Princípio Macroscópico para demonstrar esta afirmação. Relembramos que

$p^+ \in [c, z_1^+]$ e $p^- \in [z_1^-, c]$, são os pontos tais que $f(p^+) = f(p) = p$ e $f(p^-) = p^+$. Também relembramos que os intervalos $[c, p^+]$ e $[z_1^-, p^-]$ não contêm pontos da órbita positiva de c . Isto é consequência do fato que estes intervalos correspondem, respectivamente, às palavras AA e CAA que são proibidas. Pensando em pré-órbitas, consideramos $1 \leq i \leq r_s$ e

$$U_s^i \supset f^i(V_{2s}^-),$$

a pré-imagem de $[z_1^-, 1 + p^+]$ ao longo do trecho de órbita

$$\{f^i(c), \dots, f^{r_s}(c)\}.$$

O iterado $f^{r_s-i} : U_i \rightarrow [z_1^-, 1 + p^+]$ é um difeomorfismo, e como $[z_1^-, 1 + p^+]$ é uma ϵ -vizinhança de $f^{r_s}(V_{2s}^-) \subset V_{2s-1}^-$ e estamos assumindo que f tem derivada de Schwarz negativa, concluímos que U_s^i é uma ϵ -vizinhança de $f^i(V_{2s}^-)$. Observamos aqui que ϵ pode ser tomado arbitrariamente grande, uma vez que $|V_{2s-1}^-|$ tende a zero, quando s tende a infinito. De fato, se ℓ_s cresce (para s fixado), temos que V_{2s}^- decresce dentro de V_{2s-1}^- . Neste caso podemos considerar a ϵ -vizinhança dentro de $V_{2s-1}^- \cup [1, 1 + p^+]$, para ϵ arbitrariamente grande.

Para cada $0 \leq i \leq r_s - \ell_s - 2$, consideramos a componente conexa de $U_i \setminus f^i(V_{2s}^-)$ que está à direita de $f^i(V_{2s}^-)$. Esta componente não intersepta a união

$$\cup_{i=0}^{r_s-1} f^i(V_{2s}^-)$$

mas está contida em $f^j(V_{2s-2}^-)$, se $f^i(V_{2s}^-) \subset f^j(V_{2s-2}^-)$. O comprimento desta componente é comparável ao comprimento de $f^i(V_{2s}^-)$ e, de fato pode ser feito arbitrariamente grande, se fizermos ℓ_s crescer, mantendo s fixo. Em qualquer caso podemos concluir que existe $0 < \alpha < 1$ como na afirmação feita acima e isto conclui a demonstração deste lema. \square

Como enunciado no Lema 7.2.2, a medida de Lebesgue da união $A_s = \cup_{i=0}^{r_s-1} f^i(V_{2s}^-)$ tende a zero quando s tende a infinito. Por outro lado, usando o Teorema de Mañé, veja [Mañ85] e [dMvS93], é fácil concluir que, para cada s fixado, a medida de Lebesgue de $\cup_{j=0}^N f^{-j}(A_s)$ tende a 1, quando N tende a infinito. Trata-se então de conjunto arbitrariamente pequeno que é visitado por um conjunto arbitrariamente grande. Mas ainda gostaríamos de ter a propriedade de que o conjunto dos pontos de A_s que saem de A_s em pelo menos N iterados pode ser feito arbitrariamente pequeno desde que aumentemos n_s . Para que isto seja verdade, vamos substituir o intervalo V_{2s}^- pelo intervalo W_{2s} . Primeiro consideramos o ponto $\gamma_s \in V_{2s}^-$ tal que a derivada $\psi'_s(\gamma_s)$ seja igual a 1. Então definimos $W_{2s} = [\gamma_s, 1]$.

Lema 7.2.3 *Nas condições acima temos as seguintes propriedades:*

- (a) *A medida de Lebesgue da união $\mathcal{A}_s = \cup_{i=0}^{r_s-1} f^i(W_{2s})$ tende a zero, quando s tende a infinito;*
- (b) *A medida de Lebesgue da união $\cup_{j=0}^N f^{-j}(W_{2s})$ tende a 1, quando mantemos s fixo e fazemos N tender a infinito;*
- (c) *Para $\varepsilon > 0$ e s dados, existe $N_{\varepsilon s}$ tal que, para todo $n_s, N \geq N_{\varepsilon s}$, a medida de Lebesgue do conjunto*

$$E_{sN} = \{x \in \cup_{j=0}^N f^{-j}(W_{2s}) : f^N(x) \notin \cup_{i=0}^{r_s-1} f^i(W_{2s})\}$$

é menor ou igual a ε .

Demonstração:

O Ítem (a) deste lema é consequência direta do Lema 7.2.2, simplesmente porque $W_{2s} \subset V_{2s}^-$. Uma vez que $V_{2s}^+ \cup V_{2s}^-$ é uma vizinhança do ponto crítico e $\psi_s(V_{2s}^+) \subset V_{2s}^-$ concluimos o Ítem (b) usando o Teorema de Mañé, vejam [Mañ85] e [dMvS93]. Tendo em vista o Ítem (b), para demonstramos o Ítem (c), usamos o Lema 7.2.1, de acordo com este lema podemos tomar N suficientemente grande, para que a medida de Lebesgue de $\cup_{j=0}^N f^{-j}(\mathcal{A}_s)$ seja pelo menos $1 - \varepsilon/2$. Observamos que se n_s fosse infinito, então existiria um atrator periódico de período $r_s = |\varphi_s|$. Então fazendo n_s suficientemente grande de modo $|\psi_s(V_{2s}^-) \setminus V_{2s}^-|$ seja suficientemente pequeno, concluimos a demonstração do Ítem (c). \square

Teorema 7.2.4 *Seja $\{\ell_i\}_{i=1}^\infty$ uma seqüência estritamente crescente. Se a seqüência $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ cresce suficientemente rápido e $f \in \mathcal{R}$ é um recobrimento crítico com seqüência \mathcal{E} -kneading igual a φ_∞ , então f não possui uma medida invariante absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.*

Demonstração:

Na demonstração deste teorema seguimos algumas ideias devidas a Johnson em [Joh87]. Consideramos os conjuntos W_{2s} , \mathcal{A}_s e E_{sN} como no Lema 7.2.3. De acordo com este lema e o Lema 7.2.2, dado $\varepsilon > 0$, existe s_ε tal que para cada $s \geq s_\varepsilon$, existe $N = N_{\varepsilon s}$, tomando n_s suficientemente grande e definindo o conjunto

$$P_{\varepsilon s} = \cup_{j=0}^N f^{-j}(W_{2s}) \setminus E_{sN}$$

ocorre que

$$|P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s| \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^s}.$$

Ainda temos que f^N aplica o conjunto $P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s$ no seu complementar $(P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s)^c = P_{\varepsilon s}^c \cup \mathcal{A}_s$, ou seja,

$$P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s \subset f^{-N}((P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s)^c).$$

Então, se μ é uma medida de probabilidade invariante por f , temos que

$$\mu(P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s) \leq \mu((P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s)^c).$$

Resulta que $\mu((P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s)^c) \geq 1/2$, mas já temos que $|(P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s)^c| < \varepsilon/2^s$.

Consideramos então o conjunto

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^\infty \bigcup_{s=j}^\infty (P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s)^c\right) \geq \frac{1}{2},$$

mas por outro lado a medida de Lebesgue

$$\left| \bigcap_{j=1}^\infty \bigcup_{s=j}^\infty (P_{\varepsilon s} \setminus \mathcal{A}_s)^c \right| = 0.$$

Sendo assim, toda medida de probabilidade μ , invariante por f , não é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, como queríamos mostrar.

□

Referências Bibliográficas

- [ALdM03] Artur Avila, Mikhail Lyubich e Welington de Melo. Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps. *Invent. Math.*, 154(3):451–550, 2003. 3
- [BB04] Henk Bruin e Karen Brucks. *Topics from One-dimensional dynamics*, volume 62. London Mathematical Society, 2004. 1
- [BKNvS96] H. Bruin, G. Keller, T. Nowicki e S. van Strien. Wild Cantor attractors exist. *Ann. of Math. (2)*, 143(1):97–130, 1996. 3, 10
- [BL87] A. M. Blokh e M. Yu. Lyubich. Attractors of the transformations of the interval. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 21(2):70–71, 1987. 3
- [BRLSvS08] H. Bruin, J. Rivera-Letelier, W. Shen e S. van Strien. Large derivatives, backward contraction and invariant densities for interval maps. *Invent. Math.*, 172(3):509–533, 2008. 3
- [Bru94] H. Bruin. *Invariant Measures for interval maps*. Tese de Doutorado, Universidade de Delft, Holanda, Junho 1994. 3
- [CE83] P. Collet e J.-P. Eckmann. Positive Liapunov exponents and absolute continuity for maps of the interval. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(1):13–46, 1983. 1, 3, 17
- [Dev89] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, second edição, 1989. 1
- [dMvS93] W. de Melo e S. van Strien. *One-dimensional dynamics*. Springer Verlag, 1993. 1, 3, 17, 54, 55
- [GJ90] J. Guckenheimer e S. Johnson. Distortion of s-unimodal maps. *Annals of Mathematics*, 132:71–130, 1990. 3
- [GSŚ04] Jacek Graczyk, Duncan Sands e Grzegorz Świątek. Metric attractors for smooth unimodal maps. *Ann. of Math. (2)*, 159(2):725–740, 2004. 3
- [Guc79] J. Guckenheimer. Sensitive dependence on initial conditions for unimodal maps. *Commun. Math. Phys.*, 70:133–160, 1979. 3
- [HK90] Franz Hofbauer e Gerhard Keller. Quadratic maps without asymptotic measure. *Comm. Math. Phys.*, 127(2):319–337, 1990. 3, 8
- [Jak81] M. V. Jakobson. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.*, 81(1):39–88, 1981. 3

- [Joh87] Stewart D. Johnson. Singular measures without restrictive intervals. *Comm. Math. Phys.*, 110:173–348, 1987. 3, 8, 55
- [LB86] M. Lyubich e A. M. Blokh. Attractors of the interval. *Banach Center Publ.*, 23:427–442, 1986. 3
- [Lyu02] Mikhail Lyubich. Almost every real quadratic map is either regular or stochastic. *Ann. of Math. (2)*, 156(1):1–78, 2002. 3
- [Mañ85] Ricardo Mañé. Hyperbolicity, sinks and measure in one-dimensional dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 100(4):495–524, 1985. 2, 54, 55
- [Mis81] Michal Misiurewicz. Absolutely continuous measures for certain maps of an interval. *Publications Mathematiques de l’IHES*, 53:17–51, 1981. 3
- [MT88] John Milnor e William Thurston. On iterated maps of the interval. Em *Dynamical systems (College Park, MD, 1986–87)*, volume 1342 of *Lecture Notes in Math.*, páginas 465–563. Springer, Berlin, 1988. 2
- [NvS88] T. Nowicki e S. van Strien. Absolutely continuous invariant measures for C^2 unimodal maps satisfying the Collet-Eckmann conditions. *Invent. Math.*, 93(3):619–635, 1988. 3
- [Sin78] David Singer. Stable orbits and bifurcation of maps of the interval. *SIAM J. Appl. Math.*, 35(2):260–267, 1978. 3, 17
- [vSV04] Sebastian van Strien e Edson Vargas. Real bounds, ergodicity and negative Schwarzian for multimodal maps. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(4):749–782 (electronic), 2004. 51