A conjectura KŁR e 1-afirmações para propriedades anti-Ramsey

Pavlos B. Konstadinidis

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR
EM
CIÊNCIAS

Programa: **MATEMÁTICA**
Orientador: **Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.

– São Paulo, fevereiro de 2010 –

Agradecimentos

Resumo

Seja H um grafo fixado. Para um grafo G, escrevemos $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ para denotar que G tem a propriedade de que em toda coloração própria das arestas de G existe uma cópia de H que é totalmente multicolorida, ou seja, uma cópia de H na qual todas as arestas têm cores distintas. Nessa tese, nós provamos alguns resultados sobre essa propriedade em $\mathbb{G}(n,p)$ que são análogos às 1-afirmações de Rödl e Ruciński para o caso Ramsey. Mais precisamente, nós provamos que, sob certas condições sobre H e p, a probabilidade de $G \in \mathbb{G}(n,p)$ satisfazer $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ tende a 1 quando n tende ao infinito. O resultado principal assume que H satisfaz a conjectura KŁR formulada por Kohayakawa, Łuczak e Rödl. Um segundo resultado é obtido para todos os grafos aplicando-se um teorema de M. Schacht na prova do resultado principal. Nós mostramos ainda como o resultado principal pode ser usado juntamente com a prova de que todos os circuitos satisfazem a conjectura KŁR para verificar um caso importante de uma conjectura de V. Rödl e Zs. Tuza. Finalmente, nós provamos uma 1-afirmação para uma família de grafos que mostra em particular que a função limiar para o caso Ramsey não é uma função limiar para a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$.

Abstract

Let H be a fixed graph. For a graph G, we write $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ to denote that G has the property that in every proper coloring of the edges of G there exists a rainbow copy of H, that is, a copy of H in which all colors are different. In this thesis, we prove a couple of results about this property in $\mathbb{G}(n,p)$ which are analogous to the 1-statements of Rödl and Ruciński for the Ramsey case. More precisely, we prove that, under certain conditions on H and p, the probability that $G \in \mathbb{G}(n,p)$ satisfies $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ tends to 1 when n tends to infinity. The main result assumes that H satisfies the KŁR-conjecture formulated by Kohayakawa, Łuczak and Rödl. A second result is obtained for all graphs by applying a theorem of M. Schacht to the proof of the main result. We also show how the main result can be used together with the proof that all cycles satisfy the KŁR-conjecture in order to verify an important case of a conjecture due to V. Rödl and Zs. Tuza. Finally, we prove a 1-statement for a family of graphs that in particular shows that the threshold function for the Ramsey case is not a threshold function for the property $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$.

Sumário

Introdução

Na teoria de Ramsey clássica, o seguinte problema é estudado [**12**]. Fixe H um grafo finito e r um inteiro positivo. Gostaríamos de saber se existem e quais são os grafos finitos G que têm a seguinte propriedade: para qualquer coloração das arestas de G que usa no máximo r cores, existe uma cópia de H em G que é *monocromática* (isto é, cujas arestas são todas da mesma cor). Nós escrevemos $G \to (H)_r$ para denotar que G tem essa propriedade. Um teorema clássico devido a Ramsey mostra que, para todo inteiro positivo m, existe um inteiro positivo n tal que $K_n \to (K_m)_r$ (K_l denota o grafo completo com l vértices). Desse resultado segue que, dados H e r, sempre existe um grafo finito G tal que $G \to (H)_r$. Assim, o problema da existência de G foi completamente resolvido (observamos que o problema de saber qual é o menor número de vértices (ou de arestas) que um tal grafo pode ter é extremamente difícil em geral e apenas alguns casos são conhecidos).

Voltemos a nossa atenção agora para o problema de dar uma caracterização dos grafos G que satisfazem $G \to (H)_r$. Esse problema é intratável nessa formulação. Uma maneira encontrada por pesquisadores de se dizer alguma coisa sobre essa questão foi a seguinte. Em vez de querermos saber quais são exatamente os grafos G tais que $G \to (H)_r$, podemos nos perguntar se asserções do tipo "a maioria (ou minoria) dos grafos G são tais que $G \to (H)_r$" valem (em algum sentido). Para tornar essa questão mais precisa, seja n um inteiro positivo fixado e considere o intervalo inteiro $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Agora, considere o conjunto de todos os grafos G que têm $[n]$ como conjunto de vértices. Fixe também uma função $p : \mathbb{N} \to [0, 1]$. Para cada par não-ordenado $\{i, j\} \subset [n]$, ponha a aresta $\{i, j\}$ em G com probabilidade $p = p(n)$, independentemente de todos os outros pares não-ordenados. Isso define um espaço de probabilidade que é usualmente denotado por $\mathbb{G}(n, p)$ (veja, por exemplo, [**16**]). Podemos então perguntar como que a probabilidade $\mathbb{P}[G \to (H)_r]$ se comporta quando $n \to \infty$. Esse problema foi solucionado completamente por teoremas devidos a Rödl e Ruciński [**28, 29**]. Observamos que o caso $H = K_3$ fora resolvido num artigo de Łuczak, Ruciński e Voigt [**20**]. Em particular, Rödl e Ruciński mostraram que, se H não contém um circuito, digamos, então existem constantes $\gamma = \gamma(H) > 0$, $c = c(H, r) > 0$ e $C = C(H, r) > 0$ tais que

(0) Se $p \leq cn^{-1/\gamma}$, então $\mathbb{P}[G \to (H)_r] \to 0$, quando $n \to \infty$.

(1) Se $p \geq Cn^{-1/\gamma}$, então $\mathbb{P}[G \to (H)_r] \to 1$, quando $n \to \infty$.

A função $p_0(n) = n^{-1/\gamma}$ é chamada de uma *função limiar* para a propriedade em questão e as asserções (0) e (1) acima são chamadas de 0-*afirmação* e 1-*afirmação*, respectivamente. Observamos que, se H não é uma floresta, então a constante γ não depende de r e que a mesma é dada por

$$\gamma = \gamma(H) = m_2(H) = \max\left\{ d_2(F) = \frac{e_F - 1}{v_F - 2} : F \subset H,\ v_F \geq 3 \right\}.$$

Recentemente, uma outra propriedade tem atraído a atenção dos pesquisadores. Em vez de procurar cópias *homogêneas* (monocromáticas) de H em G, estamos interessados em encontrar cópias *heterogêneas* de H, ou seja, cópias cujas arestas são todas de cores *distintas*. Essas cópias são chamadas de totalmente multicoloridas, ou, mais simplesmente, de TMC. Nessa direção, problemas de caráter determinístico foram estudados, por exemplo, em **[8]**, enquanto que problemas extremais foram investigados em **[1]**. O nosso objetivo geral é tentar encontrar uma função limiar e correspondentes 0-e 1-afirmações para a propriedade de que para toda coloração *própria* das arestas de G (i.e., na qual arestas incidentes recebem cores diferentes), existe uma cópia TMC de H. Quando H é um circuito de tamanho ℓ, grafos G que têm essa propriedade e para os quais o menor circuito contido em G tem tamanho igual a (ou linear em) ℓ foram investigados em **[24, 30]**. Exemplos explícitos de tais grafos foram dados em **[13]**. Nesse trabalho, iremos, entre outras coisas, expor uma prova nossa recente de que se H satisfaz uma conjectura de Kohayakawa, Łuczak e Rödl **[25]** (a chamada conjectura KŁR) e $\gamma \geq 1$, então a 1-afirmação análoga à afirmação (1) acima vale para H. Observamos que essa conjectura já foi verificada para algumas famílias de grafos (incluindo florestas, circuitos de qualquer tamanho e alguns grafos completos pequenos - veja as referências em **[9]**).

Para enunciarmos mais precisamente o resultado mencionado acima, precisamos dar algumas definições. Para um grafo fixado H, seja $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ a classe de grafos que consistem de $|V(H)|$ conjuntos de vértices disjuntos, todos de tamanho n (cada um representando um vértice de H) e existe um grafo (ε)-regular[1] com m arestas entre dois desses conjuntos se os vértices correspondentes são adjacentes em H (caso contrário não colocamos nenhuma aresta entre os dois conjuntos). Agora, por $\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$ denotamos o conjunto de todos os grafos em $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ que *não* contêm uma cópia de H. O que a conjectura KŁR afirma é que $\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$ constitui uma fração "superexponencialmente" pequena de $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$.

[1] Grosso modo, um grafo bipartido é (ε)-regular quando as suas arestas estão distribuídas de maneira "uniforme"; o "grau de uniformidade" é especificado pelo parâmetro ε (quanto menor o ε, maior o grau de uniformidade) - veja a definição no Capítulo 1.

Conjectura KŁR [**25**]. Seja H um grafo fixado. Para todo $\beta > 0$, existem constantes $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$ e $n_0 > 0$ tais que

$$|\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)| \leq \beta^m \binom{n^2}{m}^{|E(H)|}$$

para todos $m \geq Cn^{2-1/\gamma(H)}$, $n \geq n_0$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Escrevemos $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ para denotar que G tem a propriedade de que em toda coloração própria das arestas de G existe uma cópia TMC de H. O nosso resultado principal é a seguinte 1-afirmação.

Teorema 1. Seja H um grafo que satisfaz a conjectura KŁR. Se $\gamma = \gamma(H) \geq 1$, então existe uma constante $C = C(H) > 0$ tal que se $p \geq Cn^{-1/\gamma}$, então a probabilidade de que $G \in \mathbb{G}(n,p)$ satisfaz $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ tende a 1, quando n tende ao infinito.

No caso $H = \mathcal{C}^\ell$, o circuito de tamanho ℓ, temos que a conjectura KŁR vale, conforme foi mostrado em [**9**]. Na verdade, os autores mostram um resultado ligeiramente mais forte. Combinando esse resultado com a prova do Teorema 1 acima, concluiremos que, para certos valores de p, "quase todo" $G \in \mathbb{G}(n,p)$ é tal que em qualquer coloração própria das arestas de G existem $\Omega(n^{1+1/\ell-1})$ cópias TMC de $\mathcal{C}^\ell$. Usando esse fato, nós obteremos uma prova para o caso $H = \mathcal{C}^\ell$ da seguinte conjectura de Rödl e Tuza [**30**].

Conjectura. Se H é um grafo fixado qualquer, então existe um grafo G com a mesma cintura que H tal que $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$.

Agora, podemos nos perguntar que tipo de 1-afirmação seria possível mostrar para todo grafo H. Uma resposta é a seguinte. Na sua dissertação de mestrado [**32**], M. Schacht mostra uma versão mais fraca da conjectura KŁR (cf. também [**26**]). Usando-se essa versão na prova do Teorema 1 acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2. Sejam d um inteiro positivo e H um grafo d-degenerado com $m_2(H) > 1$. Se $p \gg (\log n)^{4/d} n^{-1/d}$, então a probabilidade de que $G \in \mathbb{G}(n,p)$ satisfaz $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ tende a 1, quando n tende ao infinito.

Lembramos que um grafo H é d-degenerado quando todo subgrafo de H tem grau mínimo no máximo d e que todo grafo H é d-degenerado para algum $d = d(H)$ (por exemplo, para d igual ao grau máximo de H).

Vamos considerar agora 0-afirmações. Podemos pensar em colorações próprias das arestas de um grafo como colorações nas quais cada cor aparece no máximo uma vez em cada vértice. Uma generalização da propriedade

$G \xrightarrow{e}_{\mathrm{pr}} H$ portanto é a seguinte. Sejam $R \geq 1$ um inteiro e H um grafo fixados. Para um grafo G, escrevemos $G \xrightarrow{e}_{\mathrm{R}} H$ se, em qualquer coloração das arestas de G onde toda cor aparece no máximo R vezes em cada vértice, existe uma cópia TMC de H. A propriedade $G \xrightarrow{e}_{\mathrm{pr}} H$ é portanto a propriedade $G \xrightarrow{e}_{1} H$. Nós veremos que quase a mesma prova do Teorema 1 acima nos fornece o seguinte resultado.

Teorema 3. Sejam H um grafo com $m_2 = m_2(H) > 1$ e $R \geq 1$ um inteiro fixados. Se a conjectura KŁR vale para H, então existe uma constante $C = C(R, H) > 0$ tal que, para todo $p \geq Cn^{-1/m_2}$, a.q.c. $G \in \mathbb{G}(n,p)$ satisfaz $G \xrightarrow{e}_{\mathrm{R}} H$.

Nós usamos "a.q.c." para abreviar "assintoticamente quase certamente" (isto é, com probabilidade tendendo a 1 quando $n \to \infty$). Agora, em [**5**], os autores mostram um teorema que implica imediatamente o seguinte fato.

Teorema 4. Para todo H com $m_2 = m_2(H) > 1$, existe uma constante $R_0 = R_0(H)$ tal que, para todo $R \geq R_0$, existe $c_0 = c_0(R, H)$ tal que, se $p = c_0 n^{-1/m_2}$, então $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[G \xrightarrow{e}_{\mathrm{R}} H] = 0$.

Combinando-se os Teoremas 3 e 4 acima, concluímos então que a função n^{-1/m_2} é uma função limiar para a propriedade $G \xrightarrow{e}_{\mathrm{R}} H$ para todo H com $m_2 = m_2(H) > 1$ que satisfaz KŁR e todo R suficientemente grande.

Agora, suponha que H é um grafo fixo com $1 < m_2(H) < 2$ satisfazendo KŁR e que F é o grafo obtido de H adicionando-se um vértice novo e unindo-se esse vértice novo a dois vértices adjacentes fixados em H (ou seja, estamos identificando uma aresta fixada em H com uma aresta de um triângulo para obtermos F). Não é difícil ver que $m_2(F) = 2$. O último resultado nosso que iremos enunciar é uma 1-afirmação em $\mathbb{G}(n, p_1)$ para a propriedade $G \xrightarrow{e}_{\mathrm{pr}} F$ para um valor de p_1 que é $\omega\left(n^{-1/m_2(H)}\right)$ e $o(n^{-1/2})$. Esse fato mostra em particular que a função $n^{-1/2}$ não pode ser uma função limiar para a propriedade $G \xrightarrow{e}_{\mathrm{pr}} F$. Tome

$$m_2 = m_2(H) \text{ e } \beta = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{m_2}\right).$$

Observe que nós temos $-1 < -\frac{1}{m_2} < -\beta < -\frac{1}{2}$. Nós provamos o seguinte resultado.

Teorema 5. Nas condições acima, temos que existe uma constante $A > 0$ tal que, se $p_1 = An^{-\beta}$, então a probabilidade de $G \in \mathbb{G}(n, p_1)$ satisfazer $G \xrightarrow{e}_{\mathrm{pr}} F$ tende a 1, quando n tende ao infinito.

No Capítulo 1, iremos mostrar a prova do nosso resultado principal. No Capítulo 2, vamos mostrar a demonstração do Teorema 5 acima. No Capítulo 3, iremos discutir algumas aplicações desses resultados (como por exemplo o caso particular da Conjectura de Rödl e Tuza e o Teorema 2 acima) e fazer considerações sobre alguns resultados na literatura que têm relação com os nossos. Os próximos capítulos consistem nos Apêndices A, B e C, respectivamente. No Capítulo 4, iremos expor a prova de que todos os circuitos satisfazem KLR. No Capítulo 5, vamos expor os resultados sobre quasi-aleatoriedade esparsa de Chung e Graham que foram usados no Capítulo 1. Finalmente, no Capítulo 6, nós iremos expor a demonstração do Teorema 4 acima.

Nós às vezes abreviaremos 'se, e somente se' por 'sse' e o símbolo □ indicará o término (ou ausência) de uma demonstração. Boa leitura!

OBS: Nós gostaríamos de enfatizar que, apesar das exposições das demonstrações nos Apêndices A, B e C constituirem não muito mais do que traduções das provas encontradas nos respectivos artigos (exceto por algumas observações extras e correções dos *typos* encontrados), as suas inclusões no presente trabalho significam *somente* que o autor *selecionou* as partes relevantes a esse trabalho (na tentativa de torná-lo o mais autocontido possível) e *verificou* os passos das provas em questão (para que o mesmo possa de fato aplicá-las na obtenção dos seus resultados).

CAPÍTULO 1

Uma 1-afirmação assumindo-se KŁR

Nesse capítulo, nós iremos mostrar uma 1-afirmação para a propriedade $G \xrightarrow{e}_{\mathrm{pr}} H$ para todos os grafos H (com $\mathrm{m}_2(H) \geq 1$) que satisfazem a conjectura KŁR.

Seja H um grafo fixo. Nós estamos interessados em estudar a seguinte propriedade que um grafo G pode ou não ter: para qualquer coloração *própria* das *arestas* de G, existe uma cópia *totalmente multicolorida (TMC)* de H em G, isto é, um subgrafo de G isomorfo a H no qual todas as arestas têm cores distintas. Escrevemos $G \xrightarrow{e}_{\mathrm{pr}} H$ para denotar que G possui essa propriedade. Nós estamos particularmente interessados em obter resultados sobre $G \in \mathbb{G}(N,p)$. Em outras palavras, seja N um inteiro positivo e considere o intervalo inteiro $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$. Agora, considere o conjunto de todos os grafos G sobre $[N]$. Fixe uma função $p : \mathbb{N} \to [0,1]$ e para cada par não-ordenado $\{i,j\} \subset [N]$, coloque a aresta $\{i,j\}$ em G com probabilidade $p = p(N)$, independentemente de todos os outros pares não-ordenados. Isso define um espaço de probabilidade que é usualmente denotado por $\mathbb{G}(N,p)$ (veja, por exemplo, [**16**]). Podemos então nos perguntar como que a probabilidade $\mathbb{P}[G \xrightarrow{e}_{\mathrm{pr}} H]$ se comporta quando $N \to \infty$ (nós estaremos quase sempre nos referindo a $\mathbb{G}(N,p)$ quando fizermos uma asserção sobre a probabilidade de um grafo satisfazer uma determinada propriedade).

Recordamos que na teoria de Ramsey clássica, a seguinte propriedade é estudada. Seja H um grafo dado e r um inteiro positivo fixo. Nós escrevemos $G \xrightarrow{e} (H)_r$ para denotar que o grafo G tem a seguinte propriedade: em qualquer coloração das arestas de G que usa no máximo r cores, existe uma cópia *monocromática* de H em G, ou seja, um subgrafo de G isomorfo a H no qual todas as arestas têm a mesma cor. Agora, o comportamento de $\mathbb{P}[G \xrightarrow{e} (H)_r]$ quando $N \to \infty$ foi solucionado (para todo H) por resultados devidos a Rödl e Ruciński [**28, 29**]. Em particular, eles provaram que, se H não contém um circuito, digamos, então existem constantes $\gamma = \gamma(H) > 0$, $C_0 = C_0(H,r) > 0$ e $C_1 = C_1(H,r) > 0$ tais que:

[0] Se $p \leq C_0 N^{-1/\gamma}$, então $\mathbb{P}[G \xrightarrow{e} (H)_r] \to 0$, quando $N \to \infty$.

[1] Se $p \geq C_1 N^{-1/\gamma}$, então $\mathbb{P}[G \xrightarrow{e} (H)_r] \to 1$, quando $N \to \infty$.

A função $p_0(N) = N^{-1/\gamma}$ é chamada de uma função *limiar* para a propriedade em questão e as asserções [0] e [1] acima são chamadas de 0-*afirmação* e 1-*afirmação*, respectivamente. Observamos que, se H não é uma floresta, então a constante γ não depende de r e que a mesma é dada por

$$\gamma = \gamma(H) = \max\left\{\frac{|E(F)|-1}{|V(F)|-2} : F \subset H,\ |V(F)| \geq 3\right\}.$$

A respeito da propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$, problemas de natureza determinística foram estudados em [**8**], enquanto que problemas de natureza extremal foram investigados em [**1**]. Quando $H = \mathcal{C}^{\ell}$, o circuito de tamanho ℓ, grafos G que têm essa propriedade e para os quais o menor circuito contido em G tem tamanho linear em ℓ foram investigados em [**24, 30**]. Exemplos explícitos de tais grafos foram dados em [**13**]. Nosso objetivo principal nesse capítulo é mostrar uma 1-afirmação correspondente para $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ para todos os grafos H (com $\gamma(H) \geq 1$) que satisfazem a conjectura KŁR. Essa conjectura foi proposta por Kohayakawa, Łuczak and Rödl em [**25**] e está completamente em aberto na sua formulação mais geral. Entretanto, a conjectura KŁR já foi mostrada para classes importantes de H's (veja as referências em [**9**]). Por exemplo, todos os circuitos satisfazem a conjectura KŁR (cf. a prova desse fato no Capítulo 4).

Para podermos enunciar o nosso resultado mais precisamente, nós precisamos de algumas definições. Para um grafo fixo H, $\mathcal{G}(H,n,m,\varepsilon)$ denota a classe de todos os grafos que consistem de $|V(H)|$ conjuntos disjuntos de vértices, todos de tamanho n (cada conjunto representa um vértice de H) e existe um grafo (ε)-regular com m arestas entre dois desses conjuntos sempre que os vértices correspondentes em H são adjacentes (e nós não colocamos nenhuma aresta entre esses dois conjuntos quando os vértices correspondentes não formam uma aresta de H). Seja $\mathcal{F}(H,n,m,\varepsilon)$ o conjunto de grafos em $\mathcal{G}(H,n,m,\varepsilon)$ que *não* contêm uma cópia de H. A conjectura KLR afirma que $\mathcal{F}(H,n,m,\varepsilon)$ constitui uma parte 'superexponencialmente pequena' de $\mathcal{G}(H,n,m,\varepsilon)$.

Conjectura KŁR [25]. Seja H um grafo fixado. Para todo $\beta > 0$, existem constantes $C_0 > 0$, $n_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que

$$|\mathcal{F}(H,n,m,\varepsilon)| \leq \beta^m \binom{n^2}{m}^{|E(H)|}$$

para todo $m \geq C_0 n^{2-1/\gamma(H)}$, todo $n \geq n_0$ e todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

O nosso resultado central é o seguinte.

TEOREMA 1.1. *Seja H um grafo com $|V(H)| \geq 3$ e $\gamma = \gamma(H) \geq 1$. Se a conjectura KŁR vale para H, então existe $C_1 = C_1(H) > 0$ tal que sempre que $p \geq C_1 N^{-1/\gamma}$, nós temos que $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}[G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H] = 1$.*

Antes de mostarmos o nosso resultado, nós precisamos fixar alguns parâmetros e enunciar alguns lemas. Todos os grafos são finitos, simples e não-dirigidos. Para um grafo G, $V(G)$ denota o seu conjunto de vértices e $E(G)$ o seu conjunto de arestas. Nós escrevemos $v(G) = |V(G)|$ e $e(G) = |E(G)|$. Nós definimos a 2-*densidade* de G sempre que $e(G) \geq 2$. Ela é denotada por $d_2(G)$ e dada por $d_2(G) = (e(G) - 1)/(v(G) - 2)$. Ainda, colocamos $\mathrm{m}_2(G) = \gamma(G) = \max\{d_2(F) : F \subset G,\ e(F) \geq 2\}$. De agora em diante, H é um grafo fixado com $e(H) \geq 2$ e $\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_2(H) \geq 1$. Coloque $L = e(H)$ and $K = v(H)$.

Recordemos agora o conceito de (ε)-regularidade (veja, p. ex., [**9**]). Para um grafo G e subconjuntos $U_1, U_2 \subset V(G)$, nós denotamos por $E_G(U_1, U_2)$ o conjunto das arestas de G que têm uma ponta em U_1 e uma ponta em U_2. Sejam $0 < \varepsilon, p' \leq 1$. Um grafo bipartido $B = (V_1 \cup V_2, E)$ com densidade $d = |E|/(|V_1||V_2|)$ é dito (ε, p')-*regular* se, para todos $V_1' \subset V_1$ and $V_2' \subset V_2$ com $|V_1'| \geq \varepsilon|V_1|$ e $|V_2'| \geq \varepsilon|V_2|$, nós temos que

$$\left| \frac{|E_B(V_1', V_2')|}{|V_1'|\,|V_2'|} - d \right| \leq \varepsilon p'.$$

Um grafo bipartido B é chamado de (ε)-*regular* se ele é (ε, d)-regular. A notação '(ε)-regular' é usada para diferenciá-la do conceito clássico de ε-regularidade (que é o mesmo que $(\varepsilon, 1)$-regularidade).

Note que $\mathrm{m}_2 = 1$ sse H é uma floresta com $\Delta(H) \geq 2$, onde $\Delta(H)$ denota o grau máximo de um vértice em H. Agora, se $\mathrm{m}_2 = 1$, então não é difícil mostrar que se $p \geq N^{-1}$, então $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}[G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H] = 1$. Utilizamos essencialmente um algoritmo guloso para encontrar uma cópia TMC da floresta H em G. Um esboço é dado na prova da Proposição 1.10. Portanto, até menção em contrário, assumimos que $\mathrm{m}_2 > 1$.

Antes de continuarmos, vamos dar uma idéia de estratégia que será usada para mostrarmos o Teorema 1.1. Primeiramente, geramos $G \in \mathbb{G}(N, p)$ e as suas arestas são coloridas propriamente. Digamos que as cores usadas são $C_1, C_2, \ldots, C_q$ (o número de cores claramente satisfaz $\Delta(G) \leq q \leq e(G)$).

Agora, para cada cor C_i, um número em $[L] = \{1, 2, \ldots, L\}$ é aleatoriamente escolhido com probabilidade uniforme e atribuído a C_i (e isso é feito independentemente das outras cores). Se uma aresta $e \in G$ tem cor C_i e C_i recebeu o número $l \in [L]$, então diremos que e tem rótulo l. Agora, para cada $l \in [L]$, seja G_l o subgrafo gerador de G formado por todas as arestas que têm rótulo l e coloque $\mathcal{G} = \{G_l\}$. Um passo importante da nossa prova é mostrar que a.q.c. (assintoticamente quase certamente, ou seja, com probabilidade tendendo a 1 quando $N \to \infty$) G é tal que $\mathcal{G}$ é *fortemente T-quasi-aleatória* no sentido de Chung e Graham [**11**] (veja o Capítulo 5), para um valor de $T = T(H) \geq 3$ que será especificado mais adiante.

Assuma que $V(H) = \{1, 2, \ldots, K\}$. Nós fixamos uma coleção de K subconjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_K \subset V(G)$, todos de tamanho $\lfloor N/K \rfloor$, e pensamos em V_i como um representante do vértice i de H. Assuma também que

$E(H) = \{1, 2, \ldots, L\}$. Para cada aresta $l = \{i, j\}$ em $E(H)$, considere o grafo bipartido $B_l \subset G_l$ cujo conjunto de vértices é $V_i \cup V_j$ e cujo conjunto de arestas é $E_{G_l}(V_i, V_j)$. Nós iremos usar o fato que H satisfaz a conjectura KLR e a propriedade de $\mathcal{G}$ ser fortemente T-quasi-aleatória para concluir que a.q.c. G é tal que o grafo $\mathcal{B}H \subset G$, definido como sendo a união de todos os B_l's, contém uma cópia de um grafo em $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon) \setminus \mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$, para convenientes n, m e ε. Em particular, $\mathcal{B}H$ contém uma cópia de H, que necessariamente é TMC por construção. Teremos concluído portanto que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N, p)$ contém uma cópia TMC de H.

Vamos agora enunciar os lemas que usaremos mais adiante (a prova da versão do Lema 1.2 que usamos se encontra em [**10**]).

LEMA 1.2. *Seja H um grafo fixo com $\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_2(H) > 1$ para o qual a conjectura KLR vale. Dado qualquer $0 < \alpha < 1$, existe $\varepsilon_\alpha > 0$ tal que para todo $\mu > 0$, existe $C_\mu > 0$ tal que, para todo $p \geq C_\mu N^{-1/\mathrm{m}_2}$, temos que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N, p)$ é tal que se $\mathcal{B} \in \mathcal{G}(H, \widetilde{N}, \lfloor \alpha p \widetilde{N}^2 \rfloor, \varepsilon_\alpha)$ é subgrafo de G, então $\mathcal{B}$ contém uma cópia de H, para todo $\widetilde{N} \geq \mu N$.*

DEMONSTRAÇÃO. Nós iremos mostrar o resultado limitando superiormente o valor esperado $\mathbb{E}[X]$ de cópias de grafos de $\mathcal{F}(H, \widetilde{N}, \lfloor \alpha p \widetilde{N}^2 \rfloor, \varepsilon_\alpha)$ em $G \in \mathbb{G}(N, p)$. Pela desigualdade de Markov, basta mostrarmos que esse valor esperado é $o(1)$. Colocando $K = v(H)$ and $L = e(H)$, temos que

$$\mathbb{E}[X] \leq \sum_{\widetilde{N} \geq \mu N} N^{K\widetilde{N}} |\mathcal{F}(H, \widetilde{N}, \lfloor \alpha p \widetilde{N}^2 \rfloor, \varepsilon_\alpha)| \, p^{L\alpha p \widetilde{N}^2}.$$

Agora, aplique a conjectura KLR para $\beta = (\alpha/e^2)^L$. Sejam $C_\alpha = C_0(\beta, H)$, $n_\alpha = n_0(\beta, H)$ e $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_0(\beta, H)$ as constantes dadas pela conjectura KLR. Claramente, temos que $\mu N \geq n_\alpha$, para N suficientemente grande.

Ainda, para $C_\mu = C_\alpha/(\alpha\mu^2)$, temos que

$$\alpha p \widetilde{N}^2 \geq \alpha p (\mu N)^2 \geq \alpha \mu^2 C_\mu N^{2-1/\mathrm{m}_2} \geq C_\alpha N^{2-1/\mathrm{m}_2}.$$

Podemos aplicar a cota superior dada pela conjectura KLR para todo $\widetilde{N} \geq \mu N$ para concluir que, para N suficientemente grande,

$$(\mathcal{E}) \qquad \mathbb{E}[X] \leq \sum_{\widetilde{N} \geq \mu N} N^{K\widetilde{N}} \left(\frac{\alpha}{e^2}\right)^{L\alpha p \widetilde{N}^2} \binom{\widetilde{N}^2}{\alpha p \widetilde{N}^2}^L p^{L\alpha p \widetilde{N}^2}.$$

Usando os fatos $\binom{n}{k} \leq (en/k)^k$ e $\mathrm{m}_2 > 1$, a desigualdade acima implica

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &\leq \sum_{\tilde{N}\geq \mu N} N^{K\tilde{N}}\left(\frac{\alpha}{e^2}\cdot\frac{e\tilde{N}^2}{\alpha p\tilde{N}^2}\cdot p\right)^{L\alpha p\tilde{N}^2}\\ &\leq N.N^{KN}e^{-L\alpha p\mu^2N^2}\\ &\leq N^{\theta(N)}e^{-\Omega(N^{2-1/m_2})}=o(1),\end{aligned}$$

como queríamos. □

Para a conveniência do leitor, vamos recordar as noções sobre quasi-aleatoriedade esparsa que usaremos nesse capítulo (veja o Capítulo 5).

Seja $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ uma família infinita de grafos $\{G(n)\}$ com $v(G(n)) = n$ e $\overline{p} = \overline{p}(n)$ satisfazendo $e(G(n)) = (1+o(1))\overline{p}\binom{n}{2}$ e $\overline{p}n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Por conveniência de notação, escreveremos $G = G(n)$ e $V = V(G)$ (de forma que $|V| = n$). Considere as seguintes propriedades sobre uma tal família.

DISC(1): Para todos $X, Y \subset V$, $\big|\,|E_G(X,Y)| - \overline{p}|X||Y|\,\big| = o(\overline{p}n^2)$.

CIRCUITO(t): O número de t-circuitos C_t em G satisfaz

$$\#_{1-1}\{C_t \subset G\} = (1+o(1))(\overline{p}n)^t,$$

onde $\#_{1-1}\{C_t \subset G\} = |\{\rho : V(C_t) \to V(G) : \{x,y\} \in E(C_t) \Rightarrow \{\rho(x), \rho(y)\} \in E(G)$, e ρ é injetora$\}|$.

CICLO(t): O número de t-ciclos (= passeios fechados com t arestas) C_t^* em G satisfaz

$$\#\{C_t^* \subset G\} = (1+o(1))(\overline{p}n)^t.$$

DEG: Para alguma constante absoluta $c > 0$, todos os vértices v em qualquer $G \in \mathcal{G}_{\overline{p}}$ satisfazem $d(v) < c\overline{p}n$, onde $d(v)$ denota o grau de v em G.

U(t): $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ satisfaz DEG e, para alguma constante absoluta $c_0 > 1$, temos que todos os pares de vértices u, w em qualquer $G \in \mathcal{G}_{\overline{p}}$ satisfazem $e_{t-1}(u,w) < c_0\overline{p}^{t-1}n^{t-2}$, onde $e_{t-1}(u,w)$ denota o número de $(t-1)$-passeios $u_1, u_2, \ldots, u_t$ (passeios com $t-1$ *arestas*) satisfazendo $u_1 = u$ e $u_t = w$.

DEFINIÇÃO 1.3. Suponha que para algum inteiro $t \geq 2$ e alguma constante $c > 0$ temos que $\overline{p} > cn^{-1+1/(t-1)}$ e que $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ satisfaz U(t). Como em **[11]**, diremos que $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ é *fortemente t-quasi-aleatória* quando $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ também satisfaz ou CIRCUITO($2t$) ou DISC(1).

Essa definição faz sentido em virtude do seguinte resultado.

LEMA 1.4. [**11**] *Se, para algum inteiro* $t \geq 2$ *e alguma constante* $c > 0$*, nós temos que* $\overline{p} > cn^{-1+1/(t-1)}$*, então para qualquer família* $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ *que satisfaz* $U(t)$*, as propriedades CIRCUITO(2t) e DISC(1) são equivalentes.* □

Nós vamos provar agora um resultado sobre $\mathbb{G}(N,p)$ para determinados $p = o(1)$.

LEMA 1.5. *Seja* $0 < \lambda < 1$ *dado e seja* $T \geq 3$ *o único inteiro tal que* $1/(T-1) < \lambda \leq 1/(T-2)$*. Se* $p = CN^{-1+\lambda}$ *para alguma constante (grande o suficiente)* $C > 0$*, então existem constantes* $c_1 = c_1(\lambda, C) > 0$ *e* $c_2 = c_2(\lambda, C) > 0$ *tais que a.q.c.* $G \in \mathbb{G}(N,p)$ *tem as seguintes cinco propriedades.*

(P1) *O número* $w_j(x,y)$ *de* j*-passeios ligando quaisquer dois vértices* x *e* y *em* G *satisfaz*

$$c_1 p^j N^{j-1} \leq w_j(x,y) \leq c_2 p^j N^{j-1},$$

para $j \in \{T-1, T, \ldots, 2T-1\}$.

(P2) *O número* $n_j(x,y)$ *de passeios fechados com* j *arestas contendo qualquer aresta* $\{x,y\}$ *em* G *satisfaz*

$$c_1 p^{j-1} N^{j-2} \leq n_j(x,y) \leq c_2 p^{j-1} N^{j-2},$$

para $j \in \{T, T+1, \ldots, 2T\}$.

(P3) *O número de* $2T$*-circuitos em* G *é* $(1+o(1))(pN)^{2T}$.

(P4) $e(G) = (1+o(1))p\binom{N}{2}$.

(P5) $\Delta(G) = (1+o(1))pN$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $pN/\log N \to \infty$ quando $N \to \infty$, (P4) e (P5) seguem de estimativas padrão (desigualdade de Chernoff). Agora, (P2) é um corolário imediato de (P1) e, como circuitos são grafos estritamente balenceados e $p \gg N^{-1}$, (P3) é um caso particular de um teorema em [**6**]. Para terminarmos a prova, precisamos mostrar (P1). Para fazermos isso, iremos aplicar o teorema de Kim-Vu de concentração polinomial [**17**] (uma aplicação semelhante pode ser encontrada em [**33**]). É suficiente mostrarmos que existe uma constante $c_0 = c_0(C,T) > 0$ tal que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N,p)$ tem a seguinte propriedade: dados quaisquer dois vértices x, $y \in G$, temos que $|w_j(x,y) - p^j N^{j-1}| \leq c_0 p^j N^{j-1}$, para $j \in \{T-1, T, \ldots, 2T-1\}$. Dados x, $y \in G$, podemos escrever

$$w_j(x,y) = \sum_{W_j(x,y)} \prod_{e \in W_j(x,y)} t_e,$$

onde $W_j(x,y)$ denota o conjunto de todos os j-passeios de x a y e t_e é a variável indicadora de $e \in G$. Claramente, esse é um polinômio multilinear de grau j. Seja $\frac{\partial}{\partial t_I} w_j(x, y)$ a derivada parcial de $w_j(x, y)$ com relação às variáveis no conjunto I. Usando a notação de [**17**], seja

$$E_i = \max_{|I|=i} \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial t_I} w_j(x, y)\right],$$

$E = \max_{i \geq 0} E_i$ e $E' = \max_{i \geq 1} E_i$. Em particular, E_0 é o valor esperado de $w_j(x, y)$. No nosso caso, $\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial t_I} w_j(x, y)\right]$ pode ser visto como o valor esperado do número de passeios x-y com j arestas nos quais i arestas fixadas têm que aparecer. O teorema de Kim-Vu nos diz que

$$(*) \;\; \mathbb{P}\left[|w_j(x, y) - \mu| > a_j (EE')^{1/2} \delta^j\right] \leq 2e^{2-\delta} \binom{N}{2}^{j-1},$$

para qualquer $\delta > 1$, onde $\mu = E_0 = (1 + o(1)) p^j N^{j-1}$ e $a_j = 8^j j!^{1/2}$. Portanto, vemos que se calcularmos o valor de E e E' e escolhermos valores apropriados de δ para $j \in \{T-1, T, \ldots, 2T-1\}$, podemos usar $(*)$ para mostrar (P1). Agora, claramente temos que $E_i \leq (pN)^{j-i} N^{-1}$, para $i < j$, e que $E_j = 1$. Logo, temos que $E' = \max\{E_1, 1\}$ e que $E = \max\{\mu, E'\}$. Nós temos os seguintes três casos.

(Caso 1) $\lambda = 1/(T-2)$ e $j \in \{T-1, \ldots, 2T-1\}$. Pela hipótese sobre p, temos que $\max\{(pN)^{j-1} N^{-1}, 1\} = (pN)^{j-1} N^{-1}$ (se $C^{T-2} > 1$) e que $\max\{(pN)^j N^{-1}, (pN)^{j-1} N^{-1}\} = (pN)^j N^{-1}$. Logo, $EE' \leq (pN)^{2j-1} N^{-2}$. Vemos então que existe $\tilde{c}_0 > 0$ tal que colocando-se $\delta = (pN)^{1/(2j)}$, temos que $a_j (EE')^{1/2} \delta^j \leq \tilde{c}_0 \mu$ e que $N^2 e^{2-\delta} \binom{N}{2}^{j-1} \to 0$, quando $N \to \infty$.

(Caso 2) $1/(T-2) < \lambda < 1/(T-1)$ e $j = T-1$. Pela hipótese sobre p, temos que $\max\{(pN)^{j-1} N^{-1}, 1\} = 1$ e que $\max\{1, (pN)^j N^{-1}\} = (pN)^j N^{-1}$. Logo, $EE' \leq (pN)^j N^{-1}$. Vemos então que existe $\tilde{c}_0 > 0$ tal que colocando-se $\delta = (pN)^{1/2} N^{-1/(2j)}$, temos que $a_j (EE')^{1/2} \delta^j \leq \tilde{c}_0 \mu$ e que $N^2 e^{2-\delta} \binom{N}{2}^{j-1} \to 0$, quando $N \to \infty$.

(Caso 3) $1/(T-2) < \lambda < 1/(T-1)$ e $j \in \{T, \ldots, 2T-1\}$. Pela hipótese sobre p, temos que $\max\{(pN)^{j-1} N^{-1}, 1\} = (pN)^{j-1} N^{-1}$ e que $\max\{1, (pN)^j N^{-1}\} = (pN)^j N^{-1}$. Logo, $EE' \leq (pN)^{2j-1} N^{-2}$. Vemos então que existe $\tilde{c}_0 > 0$ tal que colocando-se $\delta = (pN)^{1/(2j)}$, temos que $a_j (EE')^{1/2} \delta^j \leq \tilde{c}_0 \mu$ e que $N^2 e^{2-\delta} \binom{N}{2}^{j-1} \to 0$, quando $N \to \infty$.

Consequentemente, podemos usar $(*)$ para ver que existem $c_1, c_2 > 0$ tais que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N, p)$ satisfaz (P1), como queríamos mostrar. □

O próximo lema generaliza a desigualdade de Chernoff para a distribuição binomial.

LEMA 1.6. [**27**] *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_M$ variáveis aleatórias independentes, com X_k tomando valores em um conjunto A_k para cada k. Suponha que a função (mensurável) $f : \prod A_i \to \mathbb{R}$ satisfaz $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}')| \leq c_k$ sempre que os vetores $\underline{x}$ e $\underline{x}'$ diferem somente na k-ésima coordenada. Se Y é a variável aleatória $Y = f(X_1, \ldots, X_M)$, então, para todo $a > 0$,*

$$\mathbb{P}[|Y - \mathbb{E}Y| \geq a] \leq 2\, exp\left\{\frac{-2a^2}{\sum {c_i}^2}\right\}. \quad \square$$

Vamos mostrar agora o resultado principal que, quando combinado com a Proposição 1.10, implica o Teorema 1.1.

TEOREMA 1.7. *Seja H um grafo fixo com $\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_2(H) > 1$. Se a conjectura KLR vale para H, então existe uma constante $C = C(H) > 0$ tal que, se $p = CN^{-1/\mathrm{m}_2}$, então temos que a probabilidade de $G \in \mathbb{G}(N,p)$ satisfazer $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ tende a 1, quando N tende ao infinito.*

DEMONSTRAÇÃO. Coloque $\lambda = 1 - 1/\mathrm{m}_2$ e seja $T \geq 3$ o único inteiro tal que $1/(T-1) < \lambda \leq 1/(T-2)$. Alternativamente, podemos definir T por $T = 3 + \lfloor 1/(m_2 - 1) \rfloor$. Assuma também que $p = CN^{-1/\mathrm{m}_2} = CN^{-1+\lambda}$, onde $C = C(H) > 0$ é uma constante grande o suficiente para que o que segue valha. Coloque $K = v(H)$ e $L = e(H)$.

Antes de continuarmos, precisamos mostrar o seguinte resultado auxiliar.

LEMA 1.8. *Fixe um $G \in \mathbb{G}(N,p)$ e considere uma coloração própria arbitrária das arestas de G que usa, digamos, as cores $C_1, C_2, \ldots, C_q$ (onde $\Delta(G) \leq q \leq e(G)$). Suponha que cada cor C_i é* marcada *com probabilidade $1/L$ (e que isso é feito independentemente de todas as outras cores). Seja G^* o subgrafo gerador de G definido pelas arestas marcadas (isto é, pela arestas cujas cores foram marcadas). Temos que a.q.c. G é tal que G^* tem as seguintes cinco propriedades com probabilidade $1 - o(1)$, onde $\overline{p} = \overline{p}(N) = p/L = CN^{-1/\mathrm{m}_2}/L$.*

(Q1) $e(G^*) = (1 + o(1))\overline{p}\binom{N}{2}$.
(Q2) $\Delta(G^*) = (1 + o(1))\overline{p}N$.
(Q3) *G^* satisfaz DEG para $\overline{p}$.*
(Q4) *G^* satisfaz U(T) para $\overline{p}$.*
(Q5) *G^* satisfaz CIRCUITO(2T) para $\overline{p}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como a coloração é própria, o grau de cada vértice em G^* é uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros $N-1$ and p/L. Como $pN/\log N \to \infty$ quando $N \to \infty$, (Q1) e (Q2) seguem do teorema de Chernoff. De (Q2), existe uma constante absoluta $c > 0$ tal que todos os vértices v em G^* satisfazem $d(v) < c(p/L)N$. Em outras palavras, temos que (Q3) vale. Para mostrar (Q4), nós precisamos provar que, para alguma constante absoluta $c_0 > 1$, o número $e_{T-1}(u,w)$ de passeios com $T-1$ arestas ligando quaisquer dois vértices u, w in G^* satisfaz $e_{T-1}(u,w) < c_0(p/L)^{T-1}N^{T-2} = c_0(C/L)^{T-1}N^{(T-1)\lambda-1}$. Por causa da propriedade (P1) no Lema 1.5, nós temos que o número $w_{T-1}(u,w)$

desses passeios *em* G satisfaz $w_{T-1}(u,w) \leq c_2 N^{(T-1)\lambda-1}$, para alguma constante $c_2 > 0$ (note que c_2 é uma constante absoluta quando λ e C estão fixados). Logo, nós temos que, em G^*, $e_{T-1}(u,w) \leq c_2 N^{(T-1)\lambda-1}$. Portanto, escolhendo-se $c_0 > 1$ tal que $c_0 > c_2(L/C)^{T-1}$, vemos que (Q4) vale. Para terminar a prova, nós precisamos mostrar que (Q5) vale. Vamos primeiro fazer algumas observações sobre os $2T$-circuitos no G colorido que irão nos auxiliar nessa tarefa. Seja $\mathcal{C}_{2T}$ a coleção de todos os $2T$-circuitos em G e $\mathcal{R}_{2T}$ a subcoleção de todos os $2T$-circuitos TMC em G. Coloque $\mathcal{N}_{2T} = \mathcal{C}_{2T} \setminus \mathcal{R}_{2T}$. Suponha por um momento que nós provamos que **(a)** $|\mathcal{N}_{2T}| = o((pN)^{2T})$. Seja Z a variável aleatória que conta o número de $2T$-circuitos *em* $\mathcal{R}_{2T}$ que se tornam $2T$-circuitos *em* G^*. Agora, por causa de (a) e da propriedade (P3) no Lema 1.5, nós temos que $|\mathcal{R}_{2T}| = (1+o(1))|\mathcal{C}_{2T}| = (1+o(1))(pN)^{2T}$. A probabilidade que um dado $2T$-circuito *em* $\mathcal{R}_{2T}$ se torne um $2T$-circuito em G^* é $(1/L)^{2T}$. Consequentemente, o valor esperado de Z satisfaz $\mathbb{E}Z = (1+o(1))((p/L)N)^{2T}$. Nós vemos então que, para provar que G^* satisfaz CIRCUITO($2T$), é suficiente mostrarmos (a) acima e **(b)** $Z = (1+o(1))((p/L)N)^{2T} = (1+o(1))\mathbb{E}Z$. Vamos mostrar essas duas asserções.

Prova de (a) [30]. Vamos estimar por cima o número total de $2T$-circuitos em G que não são TMC. Qualquer $2T$-circuito que não é TMC é dividido em caminhos por duas arestas da mesma cor. Seja k o tamanho do menor caminho entre duas arestas da mesma cor. Claramente, $k \leq T-1$, e portanto existem $O(N^{\lambda+1})$ escolhas para a aresta inicial $\underline{e}$ e menos do que T escolhas para k, o número de diferentes k-caminhos começando em $\underline{e}$ é $O(N^{k\lambda})$, a próxima aresta é única (pois ela tem a mesma cor que $\underline{e}$ e a coloração é própria) e existem $O(N^{(2T-k-2)\lambda-1})$ possibilidades para escolher o caminho restante de comprimento $2T-k-2$, pela propriedade (P1) no Lema 1.5, já que temos $T-1 \leq 2T-k-2 \leq 2T-1$. Logo, vemos que o número de $2T$-circuitos que não são TMC é $O(N^{\lambda+1+K\lambda+(2T-K-2)\lambda-1})$. Concluímos que $|\mathcal{N}_{2T}| = O(N^{(2T-1)\lambda}) = o((pN)^{2T})$. □

Prova de (b). Nós vamos mostrar que $Z = (1+o(1))\mathbb{E}Z$ fazendo uso do Lema 1.6. Para cada $i \in \{1,2,\ldots,q\}$, seja e_i o número de arestas que têm a cor C_i. Nós temos que $\sum e_i = e(G)$ e que $\Delta(G) \leq q \leq e(G)$. Recorde que a.q.c. G satisfaz $\Delta(G) = (1+o(1))pN$ e $e(G) = (1+o(1))p\binom{N}{2}$. Mais ainda, como a coloração é própria, cada cor forma um emparelhamento e, portanto, $e_i \leq N/2$, para todo i. Agora, a propriedade (P2) no Lema 1.5 nos diz que o número de $2T$-circuitos contendo uma dada aresta é no máximo $\tilde{c}N^{(2T-1)\lambda-1}$, para alguma constante $\tilde{c} > 0$. Portanto, para qualquer cor fixada C_k, se o status de C_k é trocado de marcado para não-marcado ou vice-versa, então o número de $2T$-circuitos TMC que serão afetados por essa mudança é no máximo $\tilde{c}_k = \tilde{c}e_k N^{(2T-1)\lambda-1}$. Escrevendo $\underline{x} = (\mathrm{mark}(C_1),\ldots,\mathrm{mark}(C_q))$ para o vetor de q "marcas" e observando que

$Z = Z(\underline{x})$, nós temos que $|Z(\underline{x}) - Z(\underline{x}')| \leq \tilde{c}_k$ sempre que $\underline{x}$ e $\underline{x}'$ diferem na k-ésima coordenada somente. Nós aplicamos agora o Lema 1.6 com $a = \kappa \mathbb{E} Z$, onde $\kappa > 0$ é uma constante arbitrária (mas fixada), para obter que

$$\mathbb{P}[|Z - \mathbb{E}Z| \geq \kappa \mathbb{E}Z] \leq 2 \exp\left\{ \frac{-2(\kappa \mathbb{E}Z)^2}{(\tilde{c}N^{(2T-1)\lambda - 1})^2 \sum {e_i}^2} \right\}.$$

O lado direito da desigualdade acima é o maior possível quando $\sum {e_i}^2$ é máximo. Não é difícil ver que isso ocorre precisamente quendo temos $e_i = N/2$ para todo i. Note que isso implica $q = O(pN)$. Com esses valores na desigualdade acima, temos que $\mathbb{P}[|Z - \mathbb{E}Z| \geq \kappa \mathbb{E}Z] \leq 2\exp\{-\kappa' N^{\lambda}\}$, onde $\kappa' > 0$ é uma constante. Logo, vemos que de fato $Z = (1 + o(1))\mathbb{E}Z$. □

Fixe um $G \in \mathbb{G}(N, p)$ e pinte as suas arestas propriamente, digamos usando as cores $C_1, C_2, \ldots, C_q$, onde $\Delta(G) \leq q \leq e(G)$. Agora, para cada cor C_i, escolha aleatoriamente um número em $[L]$ com probabilidade uniforme e independentemente de todas as outras cores e atribua o número selecionado a C_i. Se uma aresta $e \in G$ tem cor C_i e C_i recebeu o número l, então dizemos que e tem *rótulo l*. Para cada $l \in [L]$, seja G_l o subgrafo gerador de G definido por todas as arestas que tem rótulo l e coloque $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_L\}$. Observe that a.q.c. G é tal que com probabilidade positiva $\mathcal{G}$ é fortemente T-quasi-aleatória para a função $\overline{p}$ dada por $\overline{p} = \overline{p}(N) = p/L$. De fato, *cada* G_l possui as mesmas cinco propriedades que G^* tem no Lema 1.8. Logo, a.q.c. G é tal que cada G_l é fortemente T-quasi-aleatória para $\overline{p}$ com probabilidade $1 - o(1)$. Como temos L grafos no total, pela cota da união temos que a.q.c. G é tal que com probabilidade positiva $\mathcal{G}$ é fortemente T-quasi-aleatória para $\overline{p}$.

Seja $N' = \lfloor N/K \rfloor$, $V(H) = \{1, 2, \ldots, K\}$ e $V_1, V_2, \ldots, V_K \subset V(G)$ dados por $V_i = \{(i-1)N'+1, (i-1)N'+2, \ldots, iN'\}$, $i = 1, 2, \ldots, K$. Note que cada V_i tem tamanho N'. Imagine que V_i representa o vértice i de H e coloque $E(H) = \{1, 2, \ldots, L\}$. Para cada aresta $l = \{i, j\} \in E(H)$, considere o grafo bipartido $B_l \subset G_l$ cujo conjunto de vértices é $V_i \cup V_j$ e cujo conjunto de arestas é $E_{G_l}(V_i, V_j)$. Agora, seja $\mathcal{B}H = \bigcup\{B_l : l \in E(H)\} \subset G$. O nosso objetivo é mostrar que a.q.c. G é tal que $\mathcal{B}H$ contém uma cópia de H (que é necessariamente TMC por construção). Para isso, é claramente suficiente provarmos que a.q.c. G é tal que $\mathcal{B}H$ contém uma cópia de um grafo em $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon) \setminus \mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$, para convenientes n, m e ε.

Seja $l = \{i, j\}$ fixado. Como a.q.c. G é tal que $\mathcal{G}$ satisfaz DISC(1), nós temos que existe algum $0 < \alpha_l < 1$ tal que $e(B_l) \geq \alpha_l p {N'}^2$, para N suficientemente grande. Coloque $\alpha = \min\{\alpha_l : l \in [L]\}$ e $\mu = 1/(2K)$. Ainda, considere $E \subset E_{K_N}(V_i, V_j)$. Não é muito difícil ver que nós temos que $\mathbb{P}[E \subset E(B_l)] \leq p^{|E|}$. Portanto, podemos usar a desigualdade $(\mathcal{E})$ da prova do Lema 1.2 para ver que existem ε_α, $C_\mu > 0$ tais que, para todo $p \geq C_\mu N^{-1/\mathrm{m}_2}$, nós temos que a.q.c. G é tal que se $\mathcal{B}H$ contém uma cópia de um grafo em $\mathcal{G}(H, \widetilde{N}, \lfloor \alpha p \widetilde{N}^2 \rfloor, \varepsilon_\alpha)$, então $\mathcal{B}H$ contém uma cópia de H, para qualquer $\tilde{N} \geq \mu N$. Vamos mostrar agora o último resultado auxiliar que precisamos para completar o nosso argumento.

LEMA 1.9. **[10]** *Para todo $0 < \varepsilon' \leq 1/6$, existe uma constante $C' = C'(\varepsilon') > 0$ tal que qualquer grafo $B = (W_1 \cup W_2, E)$ (ε')-regular contém um subgrafo gerador $B' = (W_1 \cup W_2, E')$ $(2\varepsilon')$-regular com exatamente m' arestas, para todo m' satisfazendo $C'v(B) \leq m' \leq e(B)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Escolha um subconjunto $E' \subset E$ de tamanho m' uniformemente ao acaso. Seja d a densidade de B, isto é, $d = |E|/(|V_1||V_2|)$, e seja d' a densidade de $B' = (V_1 \cup V_2, E')$. Sejam $V_1' \subset V_1$ e $V_2' \subset V_2$ com $|V_1'| \geq 2\varepsilon'|V_1|$ e $|V_2'| \geq 2\varepsilon'|V_2|$. Nós pretendemos usar a desigualdade de Hoeffding para mostrar que com alta probabilidade o conjunto aleatório E' satisfaz a condição de $(2\varepsilon')$-regularidade com relação a V_1' e V_2', ou seja, que E' intersecta $E(V_1', V_2')$ em pelo menos $(1 - 2\varepsilon')d'|V_1'||V_2'|$ e em não mais do que $(1 + 2\varepsilon')d'|V_1'||V_2'|$ arestas.

A desigualdade de Hoeffding afirma que se temos um conjunto E de tamanho M e um subconjunto E'' de tamanho n, então a variável aleatória X que conta $|E' \cap E''|$ para um conjunto aleatório E' com m' elementos satisfaz, para todo $0 < \lambda \leq 3/2$, que

$$\mathbb{P}[|X - nm'/M| \geq \lambda nm'/M] \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{3}\frac{nm'}{M}}$$

(veja, p. ex., **[16]**). Temos $M = |E| = |E(V_1, V_2)|$, $n = |E''| = |E(V_1', V_2')|$ e $m' = |E'|$. Primeiramente, vamos obter estimativas para nm'/M.

Como B é (ε')-regular, temos que

$$(1 - \varepsilon')|V_1'||V_2'|d \leq |E(V_1', V_2')| \leq (1 + \varepsilon')|V_1'||V_2'|.$$

Portanto, temos que

$$nm'/M \geq (1 - \varepsilon')|V_1'||V_2'|d\frac{|E'|}{|E|} = (1 - \varepsilon')|E'|\frac{|V_1'||V_2'|}{|V_1||V_2|} \geq (1 - \varepsilon')4(\varepsilon')^2|E'|$$

e que

$$\frac{nm'}{M} \leq (1 + \varepsilon')|V_1'||V_2'|d\frac{|E'|}{|E|} = (1 + \varepsilon')d'|V_1'||V_2'|.$$

Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\big||E(V_1', V_2')| - d'|V_1'||V_2'|\big| \geq (\lambda(1 + \varepsilon') + \varepsilon')d'|V_1'||V_2'|\right]\\ &\leq \mathbb{P}\left[\left||E(V_1', V_2')| - \frac{nm'}{M}\right| \geq \lambda\frac{nm'}{M}\right] \leq 2e^{-(1-\varepsilon')4(\varepsilon')^2|E'|\frac{\lambda^2}{3}}.\end{aligned}$$

Colocando-se $\lambda = \varepsilon'/2$, vemos que

$$\left|\frac{|E(V_1', V_2')|}{|V_1'||V_2'|} - d'\right| \geq 2\varepsilon' d'$$

implica

$$\big||E(V_1', V_2')| - d'|V_1'||V_2'|\big| \geq (\lambda(1 + \varepsilon') + \varepsilon')d'|V_1'||V_2'|.$$

Logo, a probabilidade que a condição de $(2\varepsilon')$-regularidade não é satisfeita para dois conjuntos fixados V_1' e V_2' com $|V_1'| \geq 2\varepsilon'|V_1|$ e $|V_2'| \geq 2\varepsilon'|V_2|$ é no máximo $2e^{-(1-\varepsilon')(\varepsilon')^4|E'|/3}$. Como existem no máximo $2^{|V_1|+|V_2|}$ escolhas para V_1' e V_2', vemos que

$$\mathbb{P}[B' \text{ não é } (2\varepsilon')\text{-regular}] \leq 2^{|V_1|+|V_2|}2e^{-(1-\varepsilon')(\varepsilon')^4|E'|/3} < 1,$$

se $|E'| > (3\ln 2)(|V_1| + |V_2| + 1)/((1-\varepsilon')(\varepsilon')^4)$. Temos então que nesse caso existe algum subconjunto de E de tamanho m' que forma um grafo $(2\varepsilon')$-regular, como queríamos mostrar (note que da prova acima vemos que a probabilidade de m' arestas escolhidas uniformemente ao acaso formarem um grafo $(2\varepsilon')$-regular tende a 1 quando $|V(B)|$ tende ao infinito). □

Coloque $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_\alpha/6$. Agora, como a.q.c. G é tal que $\mathcal{G}$ satisfaz DISC(1), não é difícil ver que, para N suficientemente grande, B_l é $(\tilde{\varepsilon})$-regular. Podemos aplicar então o Lema 1.9 a cada B_l para obter que a.q.c. G é tal que $\mathcal{B}H$ contém a cópia de um grafo em $\mathcal{G}(H, N', \lfloor \alpha p N'^2 \rfloor, \varepsilon_\alpha)$, já que $2\tilde{\varepsilon} < \varepsilon_\alpha$. Agora, como $N' \geq \mu N$ para todo N suficientemente grande, nós concluímos que a.q.c. G é tal que $\mathcal{B}H$ contém uma cópia de um grafo em $\mathcal{G}(H, N', \lfloor \alpha p N'^2 \rfloor, \varepsilon_\alpha) \setminus \mathcal{F}(H, N', \lfloor \alpha p N'^2 \rfloor, \varepsilon_\alpha)$, como queríamos mostrar. □

A proposição simples a seguir completa a prova do Teorema 1.1 (em [**9**] foi observado que não é difícil ver que a conjectura KŁR vale para florestas).

PROPOSIÇÃO 1.10. *Se H é uma floresta com $\Delta(H) \geq 2$ e $p \geq N^{-1}$, então a probabilidade de $G \in \mathbb{G}(N,p)$ satisfazer $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ tende a 1, quando N tende ao infinito.*

DEMONSTRAÇÃO. Daremos somente um esboço. Não é difícil ver que existe uma árvore $A = A(H)$ com a propriedade que todos os seus vértices que não são folhas têm grau $v(H)+1$ e tal que em qualquer coloração própria das arestas de A existe uma cópia TMC de H. Agora, se $p \gg N^{-1-1/e(A)}$, então a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N,p)$ contém uma cópia de A, de onde concluímos que $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}[G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H] = 1$ sempre que $p \geq N^{-1}$. □

Para terminar esse capítulo, observamos que a função $N^{-1/\mathrm{m}_2(H)}$ não pode ser uma função limiar para a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ para absolutamente todos os grafos H com $\mathrm{m}_2(H) > 1$. Para ver isso, seja F_0 o grafo obtido identificando-se um vértice de um triângulo com a raiz de uma árvore. A máxima 0-densidade de F_0 é 1 e a máxima 2-densidade de F_0 é 2. Portanto, se p satisfaz $N^{-1} \ll p \ll N^{-1/2}$, então praticamente a mesma prova da Proposição 1.10 acima mostra que a probabilidade de $G \in \mathbb{G}(N,p)$ satisfazer $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} F_0$ tende a 1, quando $N \to \infty$. Desse modo, vemos que a função $N^{-1/2}$ não é uma função limiar para a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} F_0$. No próximo capítulo, vamos mostrar uma 1-afirmação para uma classe de exemplos que generalizam F_0 e, no Capítulo 6, iremos expor a prova de uma 0-afirmação envolvendo a função $N^{-1/\mathrm{m}_2(H)}$ para uma propriedade que generaliza a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$.

CAPÍTULO 2

H's com $1 < \mathrm{m}_2(H) < 2$ mais um K_3

Nesse capítulo, iremos mostrar uma 1-afirmação para uma classe de exemplos que generalizam o exemplo F_0 do final do Capítulo 1. De agora em diante, H denota um grafo fixo satisfazendo KLR com $1 < \mathrm{m}_2(H) < 2$ e F o grafo obtido de H adicionando-se um vértice novo e unindo-se esse vértice novo a dois vértices adjacentes fixados em H (ou seja, estamos identificando uma aresta fixada em H com uma aresta de um triângulo para obtermos F). Não é difícil ver que $\mathrm{m}_2(F) = 2$. O resultado que iremos provar é uma 1-afirmação em $\mathbb{G}(N, p_1)$ para a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} F$ para um valor de p_1 que é $\omega\left(N^{-1/\mathrm{m}_2(H)}\right)$ e $o(N^{-1/2})$. Esse fato mostra em particular que a função $N^{-1/2}$ não pode ser uma função limiar para a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} F$. O valor de p_1 que iremos usar e a demonstração que iremos expor são fortemente inspirados em **[23]**, no qual os autores investigam funções limiares para o caso Ramsey assimétrico.

Ponha $K = v(H)$ e $L = e(H)$. Claramente, temos que $v(F) = K + 1$ e que $e(F) = L + 2$. Note também que $1 < d_2(F) < 2$. Ainda, colocamos

$$\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_2(H), \quad \beta = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{m}_2}\right) \quad \text{e} \quad p = N^{-1/\mathrm{m}_2}.$$

Observe que temos

$$-1 < -\frac{1}{\mathrm{m}_2} < -\beta < -\frac{1}{2}.$$

O resultado que iremos provar é o seguinte.

TEOREMA 2.1. *Nas condições acima, temos que existe uma constante $A > 0$ tal que, se $p_1 = AN^{-\beta}$, então $\mathbb{P}[G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} F] \to 1$, quando $N \to \infty$*

DEMONSTRAÇÃO. Antes de prosseguirmos, vamos enunciar os resultados auxiliares que precisaremos mais adiante.

Sejam E um conjunto finito e $(J_e)_{e \in E}$ uma família de variáveis aleatórias 0-1 independentes indexada por E tal que $\mathbb{E}(J_e) = p_1$ para todo $e \in E$. Seja ainda $(E_\alpha)_{a \in \mathcal{A}}$ uma família de subconjuntos de E e ponha $I_\alpha = \prod_{e \in E_\alpha} J_e$ e $S = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$. A variável aleatória S conta então quantos conjuntos E_α ($\alpha \in \mathcal{A}$) são tais que todos os seus elementos $e \in E_\alpha$ satisfazem $J_e = 1$.

Considere
$$\Delta = \sum_{\alpha,\beta} \mathbb{E}(I_\alpha I_\beta),$$
onde a soma se estende sobre todos os pares (α, β) com $\alpha \neq \beta$ e $E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset$.

A desigualdade de Janson **[15]** é a seguinte.

LEMA 2.2. **[15]** *Se $\mu_0 = \mathbb{E}(S)$, então, para todo $0 \leq \varepsilon \leq 1$, temos que*
$$\mathbb{P}\left[S \leq (1-\varepsilon)\mu_0\right] \leq exp\left\{-\frac{1}{2\left(1+\Delta/\mu_0\right)}\varepsilon^2\mu_0\right\}. \quad \square$$

Nós iremos enunciar a seguir um resultado que estende o lema da regularidade de Szemerédi para grafos esparsos, observado independentemente por Kohayakawa e Rödl (veja, p. ex., **[22]**). Antes de continuarmos, precisamos de algumas notações e definições (por simplicidade, enunciaremos somente uma versão para grafos bipartidos do resultado em questão).

Seja $J = (J_1 \cup J_2, E)$ um grafo bipartido fixo. Escrevemos $(U, W) \prec J$ se $U \cap W = \emptyset$ e $U \subset J_i$, $W \subset J_j$ para $i, j \in \{1, 2\}$ com $i \neq j$. Suponha que $0 < \eta \leq 1$, $D \geq 1$ e $0 < p \leq 1$ estejam fixados. Diremos que J é (η, D, p)*-sup-uniforme* se para todos $U, W \subset V(J)$ com $(U, W) \prec J$ e $|U|$, $|W| \geq \eta|V(J)|$, valer que $|E_J(U, W)| \leq Dp|U||W|$. Para quaisquer dois subconjuntos disjuntos e não-vazios U, $W \subset V(J)$, a *p-densidade* de J entre U e W é dada por
$$d_{J,p}(U, W) = |E_J(U, W)|/p|U||W|.$$

Agora, suponha que $0 < \varepsilon \leq 1$ é um número real e que U, $W \subset V(J)$ são dois conjuntos disjuntos e não-vazios de vértices de J. Diremos que o par (U, W) é (ε, J, p)*-regular* se para todos $U' \subset U$ e $W' \subset W$ com $|U'| \geq \varepsilon|U|$ e $|W'| \geq \varepsilon|W|$, valer que
$$|d_{J,p}(U', W') - d_{J,p}(U, W)| \leq \varepsilon.$$

Nós diremos que uma partição $P = (V_i)_{i=0}^k$ de $V(J)$ é (ε, k)*-equitável* se $|V_0| \leq \varepsilon\,|V(J)|$ e $|V_1| = \cdots = |V_k|$ e que uma partição de $V(J)$ $P = (V_i)_{i=0}^k$ (ε, k)-equitável é (ε, J, p)*-regular* quando no máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$ pares (P_i, P_j) com $1 \leq i < j \leq k$ não são (ε, J, p)-regulares. Nós dizemos que V_0 é a classe *excepcional* da partição equitável P. Ainda, diremos que uma partição equitável Q *refina* a bipartição (J_1, J_2) de J se toda classe não-excepcional de Q está contida ou em J_1 ou em J_2.

O resultado mencionado acima é o seguinte.

LEMA 2.3. **[22]** *Para todos $\varepsilon > 0$, $k_0 \geq 2$ e $D \geq 1$, existem constantes $\eta = \eta(\varepsilon, k_0, D) > 0$, $K_0 = K_0(\varepsilon, k_0, D) \geq k_0$ e $N_0 = N_0(\varepsilon, k_0, D)$ tais que qualquer grafo bipartido $J = (J_1 \cup J_2, E)$ com pelo menos N_0 vértices que é (η, D, p)-sup-uniforme admite uma partição (ε, k)-equitável (ε, J, p)-regular que refina (J_1, J_2), com $k_0 \leq k \leq K_0$.* $\square$

Sejam $G \in \mathbb{G}(N, p_1)$ e $\{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_s\}$ o conjunto das cópias de K_3 em G isoladas por arestas. Ainda, seja $\tilde{K}_3 = \tilde{K}_3(G)$ o subgrafo gerador de G cujo conjunto de arestas é a união dos conjuntos de arestas de $\mathcal{T}_i$ $(1 \leq i \leq s)$. Seja p_0 o número esperado de cópias de K_3 em G (não necessariamente isoladas) que contêm um par de vértices fixado. Claramente, o número esperado de cópias de K_3 em G é $(n)_3 {p_1}^3/6$. Portanto,

$$p_0 = (1 + o(1))A^3 N^{-1/m_2} = (1 + o(1))A^3 p.$$

Note que $e(\tilde{K}_3) = 3s$. Agora, para $E \subset E(K_N)$, escrevemos $E \sqsubset E(\tilde{K}_3)$ se $E \subset E(\tilde{K}_3)$ com todas as arestas em E pertencendo a diferentes cópias isoladas de K_3 em G. Os seguintes dois lemas estão provados em [**23**]. O Lema 2.5 mostra em particular que a.q.c. $\tilde{K}_3$ é $(\eta, 9, p_0)$-sup-uniforme, para qualquer $0 < \eta \leq 1$ fixado.

LEMA 2.4. [**23**] *Para qualquer $E \subset E(K_N)$, nós temos que*

$$\mathbb{P}\left[E \sqsubset E(\tilde{K}_3)\right] \leq p_0^{|E|}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $E = \{e_1, \ldots, e_a\}$, com $a = |E|$. Seja $\mathcal{I}$ o conjunto de todas as a-uplas $(K_3^{(1)}, \ldots, K_3^{(a)})$ de cópias de K_3 em K_N com $e_i \in E(K_3^{(i)})$, para todo i. Ainda, seja $\mathcal{J}$ o conjunto de todas as a-uplas $(K_3^{(1)}, \ldots, K_3^{(a)}) \in \mathcal{I}$ com os $K_3^{(i)}$'s dois a dois isolados por arestas. Finalmente, seja $\mathcal{K}_3^{(i)}$ o conjunto das cópias de K_3 em K_N que contêm a aresta e_i, para todo i. Note que $\mathcal{I} = \mathcal{K}_3^{(1)} \times \cdots \times \mathcal{K}_3^{(a)}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[E \sqsubset E(\tilde{K}_3)\right] &\leq \sum_{(K_3^{(1)}, \ldots, K_3^{(a)}) \in \mathcal{J}} \mathbb{P}\left[K_3^{(1)} \subset G, \ldots, K_3^{(a)} \subset G\right] \\
&= \sum_{(K_3^{(1)}, \ldots, K_3^{(a)}) \in \mathcal{J}} \mathbb{P}\left[K_3^{(1)} \subset G\right] \cdots \mathbb{P}\left[K_3^{(a)} \subset G\right] \\
&\leq \sum_{(K_3^{(1)}, \ldots, K_3^{(a)}) \in \mathcal{I}} \mathbb{P}\left[K_3^{(1)} \subset G\right] \cdots \mathbb{P}\left[K_3^{(a)} \subset G\right] \\
&= \sum_{K_3^{(1)} \in \mathcal{K}_3^{(1)}} \mathbb{P}\left[K_3^{(1)} \subset G\right] \cdots \sum_{K_3^{(a)} \in \mathcal{K}_3^{(a)}} \mathbb{P}\left[K_3^{(a)} \subset G\right] \\
&= p_0^a,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

LEMA 2.5. [**23**] *A.q.c. $G \in \mathbb{G}(N, p_1)$ é tal que $\tilde{K}_3 = \tilde{K}_3(G)$ satisfaz o seguinte. Se U, $W \subset V(\tilde{K}_3)$ são disjuntos e $|U||W| \geq \omega N^{1+1/m_2}$, com $\omega = \omega(N) \to \infty$ quando $N \to \infty$, então*

$$|E_{\tilde{K}_3}(U, W)| \leq 9\, p_0 |U||W|.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se um par fixo (U, W) com $u = |U|$ e $w = |W|$ não satisfaz a conclusão do enunciado, então existe um conjunto $E \subset U \times W$ com $E \subset E(\tilde{K}_3)$ e $|E| = \lceil 9p_0uw \rceil$. Portanto, temos que existe um subconjunto $E' \subset U \times W$ com $|E'| = \lceil 3p_0uw \rceil$ tal que todas as arestas em E' pertencem a diferentes cópias isoladas de K_3 em G. Pelo Lema 2.4 acima, a probabilidade desse evento é no máximo

$$\binom{uw}{\lceil 3p_0uw \rceil} p_0^{\lceil 3p_0uw \rceil} \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{3p_0uw}.$$

Como temos no máximo 2^{2N} escolhas para os conjuntos U e W, o resultado segue do fato que $3p_0uw/N \to \infty$, quando $N \to \infty$. □

O próximo resultado mostra a existência de um grande número de cópias isoladas de K_3 em G. Na verdade, precisaremos estimar o número dessas cópias com cada um dos vértices da imagem de K_3 pertencendo a subconjuntos específicos de $V(G)$. Sejam $V(K_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e W_1, W_2 e W_3 subconjuntos dois a dois disjuntos de $V(G)$ e ponha $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3)$. Nós estamos interessados no número $Z = Z_{\mathbf{W}}$ de injeções $\iota : V(K_3) \to V(G)$ que levam v_i em W_i para todo i e tais que $\{\iota(v_i), \iota(v_j)\} \in E(G)$ para todos i, j com $i \neq j$. Dizemos que tais injeções são $\mathbf{W}$-*imersões* de K_3 em G. Seja ainda $Y = Y_{\mathbf{W}}(G)$ o número de tais $\mathbf{W}$-imersões com a imagem de ι sendo uma cópia isolada de K_3 em G.

A seguinte estimativa para $Y = Y_{\mathbf{W}}(G)$ está provada em **[23]** (com hipóteses ligeiramente mais fracas).

LEMA 2.6. **[23]** *Para todo $\bar{\mu} > 0$ fixado, temos que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N, p_1)$ tem a seguinte propriedade. Para qualquer vetor $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3)$ de subconjuntos dois a dois disjuntos de $[N]$ com $|W_i| \geq \bar{\mu}N$, para todo i, $Y = Y_{\mathbf{W}}(G)$ satisfaz $Y \geq (1/2)\mathbb{E}(Z_{\mathbf{W}})$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $M = K_4^-$ o grafo obtido identificando-se uma aresta de uma cópia de K_3 com uma aresta de uma segunda cópia de K_3 (ou seja, M é o grafo K_4 menos uma aresta). Seja $X = X(G)$ o número de cópias de M em G. Primeiramente, vamos dar uma estimativa para $\mathbb{E}(X)$. Seja $\delta' = \beta - 1/\mathrm{m}_2 > 0$. Se $\mathrm{Aut}(M)$ denota o grupo de automorfismos de M, nós temos que

$$\mathbb{E}(X) = (n)_4 p_1^5 |\mathrm{Aut}(M)|^{-1} = O\left(N^{3-3\beta-\delta'}\right) = O\left(N^{2-\beta}\right).$$

Fixe $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3)$ e seja $(K_3^\alpha : \alpha \in \mathcal{A})$ a família de todos os grafos isomorfos a K_3 cujos conjuntos de vértices podem ser escritos como $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$ com $\tilde{v}_i \in W_i$, para todo i. Temos que $|\mathcal{A}| \geq (\bar{\mu}N)^3$ e que a variável aleatória S definida logo antes do Lema 2.2 coincide com $Z_{\mathbf{W}}$. Observe que

$$\mathbb{E}(Z_{\mathbf{W}}) \geq (\bar{\mu}N)^3 A^3 N^{-3\beta} = (\bar{\mu}A)^3 N^{2-1/\mathrm{m}_2}.$$

Portanto, pela desigualdade de Markov, temos que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N,p_1)$ é tal que $X = o(\mathbb{E}(Z_{\mathbf{W}}))$ e portanto também que $\Delta \leq 2X = o(\mathbb{E}(Z_{\mathbf{W}}))$, onde Δ está definido logo antes do Lema 2.2. A desigualdade de Janson (Lema 2.2) implica

$$\mathbb{P}\left[Z_{\mathbf{W}} \leq \frac{3}{4}\mathbb{E}(Z_{\mathbf{W}})\right] \leq \exp\left(-\frac{1}{33}\mathbb{E}(Z_{\mathbf{W}})\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{33}(\bar{\mu}A)^3 N^{2-1/\mathrm{m}_2}\right).$$

Por outro lado, existem no máximo 2^{3N} escolhas para $\mathbf{W}$. Logo, a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N,p_1)$ é tal que $Z_{\mathbf{W}} \geq (3/4)\mathbb{E}(Z_{\mathbf{W}})$ para todo $\mathbf{W}$. Mais ainda, nós também temos que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N,p_1)$ é tal que $X \leq \mathbb{E}(Z_{\mathbf{W}})/8$, e portanto que $Y \geq Z_{\mathbf{W}} - 2X \geq \mathbb{E}(Z_{\mathbf{W}})/2$ para todo $\mathbf{W}$, como queríamos mostrar. $\square$

Seja $V(F) = \{1,2,\ldots,K,K+1\}$. Sem perda de generalidade, vamos considerar que o vértice novo é o vértice 1 e que a aresta do triângulo que foi identificada com a aresta fixada em H é a aresta $\{2,3\}$. Em outras palavras, temos que o (único) triângulo contido em F é o triângulo $\{1,2,3\}$ e que os vértices da cópia de H em F são os vértices $2,3,\ldots,K+1$ de F.

Fixe $G \in \mathbb{G}(N,p_1)$ e pinte as suas arestas propriamente, digamos usando as cores $C_1, C_2, \ldots, C_q$, onde $\Delta(G) \leq q \leq e(G)$. Agora, para cada cor C_i, escolha aleatoriamente um número em $[L]$ com probabilidade uniforme e independentemente de todas as outras cores e atribua o número selecionado a C_i. Se uma aresta $e \in G$ tem cor C_i e C_i recebeu o número l, então dizemos que e tem *rótulo* l. Para cada $l \in [L]$, seja G_l o subgrafo gerador de G definido por todas as arestas que tem rótulo l e coloque $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_L\}$. Agora, note que $1/3 < 1 - \beta < 1/2$ e, logo, temos que a.q.c. G é tal que com probabilidade positiva $\mathcal{G}$ é fortemente 4-quasi-aleatória para a função $\overline{p}_1$ dada por $\overline{p}_1 = \overline{p}_1(N) = p_1/L$. De fato, *cada* G_l possui as mesmas cinco propriedades que G^* tem no Lema 1.8. Logo, a.q.c. G é tal que cada G_l é fortemente 4-quasi-aleatória para $\overline{p}_1$ com probabilidade $1 - o(1)$. Como temos L grafos no total, pela cota da união temos que a.q.c. G é tal que com probabilidade positiva $\mathcal{G}$ é fortemente 4-quasi-aleatória para $\overline{p}_1$.

Sejam $N' = \lfloor N/(K+1) \rfloor$ e $W_1, W_2, \ldots, W_{K+1} \subset V(G)$ subconjuntos dados por $W_i = \{(i-1)N'+1, (i-1)N'+2, \ldots, iN'\}$, $i = 1,2,\ldots,K+1$. Note que cada W_i tem tamanho N'. Pensamos que W_i representa o vértice i de F. Considere o vetor $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3)$ e seja $G_1[\mathbf{W}]$ o subgrafo de G_1 induzido por $W_1 \cup W_2 \cup W_3$. Agora, seja $\tilde{G}_1[\mathbf{W}]$ o subgrafo gerador de $G_1[\mathbf{W}]$ formado pelas cópias de K_3 em $G_1[\mathbf{W}]$ que são isoladas por arestas. Ainda, seja J o subgrafo de $\tilde{G}_1[\mathbf{W}]$ induzido por $W_2 \cup W_3$. Se $Z^1_{\mathbf{W}} = Z^1_{\mathbf{W}}(G)$ denota o número de cópias de K_3 em $G_1[\mathbf{W}]$, então, como todo triângulo no G propriamente colorido é automaticamente TMC, nós temos que

$$\mathbb{E}(Z^1_{\mathbf{W}}) = \mathbb{E}(Z_{\mathbf{W}})/L^3.$$

Portanto, da prova do Lema 2.6, nós vemos que a.q.c. G é tal que

$$e(J) \geq (1/2)(\bar{\mu}A/L)^3 N^{2-1/\mathrm{m}_2} = (1/2)(\bar{\mu}/L)^3 A^3 p N^2,$$

onde $\bar{\mu} = 1/(2K+2)$. Agora, do Lema 2.5, nós temos que a.q.c. G é tal que $\tilde{K}_3$ é $(\eta, 9, p_0)$-sup-uniforme, para qualquer $0 < \eta \leq 1$ fixado. Como J é subgrafo de $\tilde{K}_3$ com $|V(J)| \geq 2\bar{\mu}N$, então também temos que existe $0 < \alpha < 1$ tal que a.q.c. G é tal que J é $(\eta, 1+\alpha, 9A^3p)$-sup-uniforme, para qualquer $0 < \eta \leq 1$ fixado.

Agora, coloque $\tilde{p} = 9A^3p$ e seja $0 < \tilde{\varepsilon} \leq \alpha\,\varepsilon_\alpha/6$ satisfazendo

$$(2\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}^2)(1+\alpha) + \alpha/2 < (\bar{\mu}/L)^3/36,$$

onde ε_α é dado pelo Lema 1.2. Aplique o Lema 2.3 para $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$, $k_0 = 3$ e $D = 1+\alpha$ para obter constantes $\eta = \eta(\varepsilon, 3, 1+\alpha)$, $K_0 = K_0(\varepsilon, 3, 1+\alpha)$ e $N_0 = N_0(\varepsilon, 3, 1+\alpha)$ que satisfazem a conclusão do Lema 2.3. Seja

$$\mu = \min\{\eta,\ \varepsilon,\ (1-\varepsilon)/(2K_0)\}$$

e aplique o Lema 2.3 para o grafo J para obter uma partição (ε, k)-equitável $(\varepsilon, J, \tilde{p})$-regular $(P_i)_{i=0}^k$ de $V(J)$ que refina (W_2, W_3) com $3 \leq k \leq K_0$. Seja $\mathcal{R}$ o grafo que consiste em k vértices que correspondem às classes $P_1, \ldots, P_k$ e existe uma aresta entre dois vértices sempre que as classes correspondentes formam um par $(\varepsilon, \tilde{p})$-regular com pelo menos $\alpha\tilde{p}|P_1|^2$ arestas. Note que, para todo i e todo N suficientemente grande, nós temos

$$2\mu\bar{\mu}N \leq \mu|V(J)| \leq (1-\varepsilon)|V(J)|/(2K_0) \leq |P_i| \leq N/k.$$

Vamos mostrar agora que $e(\mathcal{R}) > 0$. Para isso, iremos estimar quantas arestas de J não estão envolvidas nas arestas de $\mathcal{R}$. Nós temos no máximo:

(a) $\varepsilon(1+\alpha)\tilde{p}N^2$ arestas incidentes a vértices de P_0 (como o grafo J é $(\mu, 1+\alpha, \tilde{p})$-sup-uniforme e $|P_i| \geq \mu|V(J)|$, vemos que para todos $1 \leq i \leq k$ e todos os conjuntos $Q_0 \subset V(J) \setminus P_i$ de tamanho $\varepsilon N \geq \mu N$ contendo P_0, existem no máximo $(1+\alpha)\tilde{p}|Q_0||P_i| \leq (1+\alpha)\tilde{p}\varepsilon N^2$ arestas entre Q_0 e P_i e portanto também entre P_0 e P_i).

(b) $\varepsilon(1+\alpha)\tilde{p}N^2$ arestas entre classes que não formam um par $(\varepsilon, \tilde{p})$-regular (pois existem no máximo εk^2 tais pares e por J ser sup-uniforme existem no máximo $(1+\alpha)\tilde{p}(N/k)^2$ arestas em cada um desses pares).

(c) $\frac{1}{2}\alpha\tilde{p}N^2$ arestas entre classes que formam um grafo bipartido com menos do que $\alpha\tilde{p}(N/k)^2$ arestas (pois cada par contém no máximo $\alpha\tilde{p}(N/k)^2$ arestas e existem no máximo $k^2/2$ tais pares).

(d) $\varepsilon^2(1+\alpha)\tilde{p}N^2$ arestas dentro de P_0 (por J ser sup-uniforme e por termos $|P_0| \leq \varepsilon N$).

Como cada aresta de $\mathcal{R}$ pode representar no máximo $(1+\alpha)\tilde{p}(N/k)^2$ arestas de J, nós temos de (a), (b), (c) e (d) acima que

$$|E(\mathcal{R})| \geq \frac{e(J) - \left((2\varepsilon + \varepsilon^2)(1+\alpha) + \alpha/2\right)\tilde{p}N^2}{(1+\alpha)\tilde{p}(N/k)^2}.$$

Vemos então que $|E(\mathcal{R})| > 0$. Sem perda de generalidade, suponha então que o par (P_2, P_3) com $P_2 \subset W_2$ e $P_3 \subset W_3$ é $(\varepsilon, \tilde{p})$-regular e satisfaz $|E(P_2, P_3)| \geq \alpha\tilde{p}|P_1|^2$. Note que o par (P_2, P_3) também é $(\varepsilon_\alpha/6, \alpha\tilde{p})$-regular.

Aplicamos o Lema 1.9 ao grafo $(P_2 \cup P_3, E_J(P_2, P_3))$ para concluir ele contém um subgrafo gerador $(P_2 \cup P_3, \tilde{E})$ com exatamente $\alpha\tilde{p}|P_1|^2$ arestas que é $(\varepsilon_\alpha/3, \alpha\tilde{p})$-regular. Portanto, vemos que o grafo $(P_2 \cup P_3, \tilde{E})$ é (ε_α)-regular. Seja $\tilde{N} = |P_1| = |P_2| = |P_3| = \cdots = |P_k|$.

Agora, para cada $i \in \{4, \ldots, K+1\}$, fixe um subconjunto $\tilde{W}_i \subset W_i$ com $|\tilde{W}_i| = \tilde{N}$ e ponha $\tilde{W}_2 = P_2$ e $\tilde{W}_3 = P_3$. Seja $V(H) = \{2, 3, \ldots, K+1\}$ e, sem perda de generalidade, digamos que a aresta 1 de H seja a aresta $\{2, 3\}$. Para cada aresta $l \in \{2, 3, \ldots, L\}$ com $l = \{i, j\}$, seja $\tilde{B}_l \subset G_l$ o grafo bipartido cujo conjunto de vértices é $\tilde{W}_i \cup \tilde{W}_j$ e cujo conjunto de arestas é $E_{G_l}(\tilde{W}_i, \tilde{W}_j)$ e tome $\tilde{B}_1 = (\tilde{W}_2 \cup \tilde{W}_3, \tilde{E})$. Como observamos acima, temos que $\tilde{B}_1$ é (ε_α)-regular. Coloque $\bar{\alpha} = 2\mu\bar{\mu}$ e seja $0 < \delta < \bar{\alpha}$ satisfazendo

$$\max\left\{\frac{\delta}{\bar{\alpha}^2}, \frac{2\delta}{\bar{\alpha}(1-\delta/\bar{\alpha})}, \frac{2\delta}{\bar{\alpha}(1-\delta)}, \frac{2(2\delta/(1-\delta))}{1-2\delta/(1-\delta)}\right\} < \varepsilon_\alpha/12.$$

Como a.q.c. G é tal que $\mathcal{G}$ satisfaz DISC(1), não é difícil ver que, para N suficientemente grande, cada grafo bipartido $(W_i \cup W_j, E_{G_l}(W_i, W_j))$ com $1 \neq l = \{i, j\}$ é (δ)-regular. Como $|\tilde{W}_i| \geq \bar{\alpha}|W_i|$ para todo i, aplicando-se o Lema 4.2 (duas vezes) a cada um desses grafos bipartidos, nós vemos pela escolha de δ acima que os grafos $\tilde{B}_l$ com $l \neq 1$ são $(\varepsilon_\alpha/12)$-regulares. Ainda, para cada $\tilde{B}_l$ com $l \neq 1$ e para cada aresta em $E(\tilde{B}_l)$, nós *escolhemos* essa aresta com probabilidade p_0/p_1 (e isso é feito de maneira independente). Ainda, seja B_l o subgrafo gerador de $\tilde{B}_l$ formado pelas arestas escolhidas e coloque $B_1 = (\tilde{W}_2 \cup \tilde{W}_3, E_J(\tilde{W}_2, \tilde{W}_3))$. Observe que temos $\tilde{B}_1 \subset B_1$. Seja $\mathcal{B}H = \bigcup\{B_l : l \in [L]\} \subset G$. Por uma prova análoga à prova do Lema 1.9 (na qual usamos a desigualdade de Chernoff no lugar da desigualdade de Hoeffding) e como a.q.c. G é tal que $\mathcal{G}$ satisfaz DISC(1), nós vemos que existe $\alpha < \alpha' < 1$ tal que a.q.c. G é tal que cada B_l com $l \neq 1$ é $(\varepsilon_\alpha/6)$-regular e contém pelo menos $\lfloor \alpha' p \tilde{N}^2 \rfloor$ arestas. Aplicando o Lema 1.9 a cada B_l com $l \neq 1$, nós concluímos que a.q.c. G é tal que $\mathcal{B}H$ contém uma cópia de um grafo em $\mathcal{G}(H, \tilde{N}, \lfloor \alpha p \tilde{N}^2 \rfloor, \varepsilon_\alpha)$. Agora, nós temos que $E \sqsubset E(\tilde{K}_3)$ para todo $E \subset E(J)$ e que, para $1 \neq l = \{i, j\}$ e $E' \subset E_{K_N}(\tilde{W}_i, \tilde{W}_j)$, $\mathbb{P}[E' \subset E(B_l)] \leq p_1^{|E'|} \times (p_0/p_1)^{|E'|} = p_0^{|E'|}$. Portanto, pelo Lema 2.4 e por essa última observação, nós podemos usar a desigualdade $(\mathcal{E})$ da prova do Lema 1.2 para concluir que a.q.c. G é tal que $\mathcal{B}H$ contém uma cópia de um grafo em $\mathcal{G}(H, \tilde{N}, \lfloor \alpha p \tilde{N}^2 \rfloor, \varepsilon_\alpha) \setminus \mathcal{F}(H, \tilde{N}, \lfloor \alpha p \tilde{N}^2 \rfloor, \varepsilon_\alpha)$, já que $\tilde{N} \geq \bar{\alpha}N$ para todo N suficientemente grande. Concluímos que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N, p_1)$ contém uma cópia de F que é necessariamente TMC (por construção). $\square$

CAPÍTULO 3

Aplicações e comentários finais

Nesse capítulo, iremos dar algumas aplicações importantes dos resultados provados nos Capítulos 1 e 4. Em seguida, faremos algumas observações sobre resultados envolvendo propriedades relacionadas a colorações canônicas e enunciaremos uma conjectura a respeito dessas colorações.

O resultado provado no Capítulo 1 nos dá uma 1-afirmação para a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ para todo H que satisfaz a conjectura KŁR. Podemos então nos perguntar que tipo de 1-afirmação poderia ser mostrada para *todos* os grafos H. Para dar uma resposta a essa pergunta, vamos utilizar um resultado devido a M. Schacht **[26, 32]**. Na sua dissertação de mestrado (orientada por Y. Kohayakawa e V. Rödl), ele mostra que todo grafo H satisfaz uma versão mais fraca da conjectura KŁR. Procedendo da mesma maneira que no Capítulo 1, obtemos então uma 1-afirmação correspondente para todos os grafos H. Para enunciarmos o teorema em questão, precisamos de uma definição.

DEFINIÇÃO 3.1. Sejam d um inteiro positivo e H um grafo d-degenerado com h vértices (lembramos que um grafo é *d-degenerado* se todo subgrafo tem grau mínimo no máximo d). Sejam $t \geq h \geq 2$ inteiros fixados e n suficientemente grande. Sejam α e ε constantes positivas. Suponha ainda que J é um grafo h-partido com classes de vértices $V_1, \ldots, V_h$. Diremos que J é um *blow-up regular* de H se J satisfaz as seguintes quatro condições.

(C1) $|V_i| = m = \lfloor n/t \rfloor$, para todo i.

(C2) $q^d \gg (\log n)^4$.

(C3) Para todo $1 \leq i < j \leq h$, $|E(V_i, V_j)| = pm^2$, se $\{i, j\} \in E(H)$ e $|E(V_i, V_j)| = 0$, se $\{i, j\} \notin E(H)$, onde $1/n \ll p = \alpha q < 1$.

(C4) (V_i, V_j) é (ε, q)-regular, para todo $1 \leq i < j \leq h$.

O teorema em questão é o seguinte.

TEOREMA 3.2. **[26, 32]** *Para todos $\alpha, \sigma > 0$, para todo inteiro positivo d e para todo grafo d-degenerado H com h vértices, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $t \geq h$, a.q.c. $G \in \mathbb{G}(n, q)$ satisfaz a seguinte propriedade. Todo subgrafo $J \subset G$ que é um blow-up regular de H contém pelo menos $(1 - \sigma)p^{e(H)}m^h$ cópias de H.* □

O leitor não terá dificuldade em usar o Teorema 3.2 (em vez do Lema 1.2) na prova do Teorema 1.7 para concluir o seguinte resultado.

TEOREMA 3.3. *Sejam d um inteiro positivo e H um grafo d-degenerado com $m_2(H) > 1$. Se $p \gg (\log N)^{4/d} N^{-1/d}$, então a probabilidade de que $G \in \mathbb{G}(N,p)$ satisfaz $G \xrightarrow{e}_{\mathrm{pr}} H$ tende a 1, quando N tende ao infinito.* □

Como todo grafo H é d-degenerado para algum d (por exemplo, para $d = \Delta(H)$), então o Teorema 3.3 nos dá uma 1-afirmação para todo grafo H com $m_2(H) > 1$ (note que, com as hipóteses do Teorema 3.3, na verdade podemos concluir que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(n,p)$ é tal que, em qualquer coloração própria das arestas de G, existem *várias* cópias TMC de H em G).

Vamos dar agora uma aplicação do resultado mostrado no Capítulo 4. Primeiramente, note que, aplicando o Teorema 4.16 (em vez do Lema 1.2) na prova do Teorema 1.7, obtemos o seguinte resultado.

TEOREMA 3.4. *Sejam $l \geq 3$ um inteiro e $\delta > 0$ fixados. Então existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $p \geq CN^{-1+1/(l-1)}$, temos que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N,p)$ é tal que, em toda coloração própria das arestas de G, existem pelo menos $(1-\delta)^2 CN^{1+1/(l-1)}$ cópias TMC do circuito C_l em G.* □

Agora, o seguinte lema é provado em **[24]**.

LEMA 3.5. **[24]** *Sejam $l \geq 3$ um inteiro fixado e $p = p(N) = \omega N^{-1+1/(l-1)}$ com $\omega = N^{o(1)}$ e $\omega = \omega(N) \to \infty$, quando $N \to \infty$. Então temos que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N,p)$ tem as seguintes quatro propriedades.*

(i) G contém pelo menos $\omega^{l-1} pN^2/(4l)$ cópias de C_l e o grau máximo de G é menor do que $2pN$.

(ii) G contém no máximo $2N^{v(F)} p^{e(F)}$ cópias de qualquer grafo fixo F.

(iii) Existe uma constante $a = a(l)$ tal que quaisquer três vértices de G estão contidos em no máximo a cópias de C_l.

(iv) Existe uma constante $b = b(l)$ tal que qualquer aresta de G pertence a no máximo $b\omega^{l-1} \log N$ cópias de C_l.

DEMONSTRAÇÃO. Os fatos (i) e (ii) são bem conhecidos e seguem de cálculos elementares dos primeiros dois momentos de variáveis aleatórias apropriadas. Agora, dizemos que uma s-upla $(H_1, \ldots, H_s)$ de subgrafos de G é *fracamente independente* se $E(H_i) \setminus \bigcup_{j \neq i} E(H_j) \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq s$. Vamos mostrar primeiramente que a probabilidade de três vértices fixados de G estarem contidos em uma $(l+2)$-upla de l-circuitos C_l fracamente independente tende a 0 quando $N \to \infty$. De fato, note que uma s-upla fracamente independente de l-circuitos contendo três vértices dados formam um subgrafo conexo com $m \leq l + (s-1)(l-3)$ vértices e pelo menos $m+s-1$ arestas. O número esperado de tais subgrafos em G é limitado superiormente por

$$N^m p^{m+s-1} = \omega^{m+s-1} N^{(m+s-1)/(l-1)-s+1} \leq \omega^{l+(s-1)(l-2)} N^{(l-s+1)/(l-1)},$$

que é, para $s = l + 2$, menor do que $\omega^{l^2} N^{-1/(l-1)} = o(1)$. Temos então que (iii) vale para $a = a(l) = \binom{l(l+2)}{l}$. Agora, iremos estimar o número esperado de arestas de G que pertencem a r l-circuitos *independentes*, ou seja, arestas $\{x,y\}$ para as quais existem $C_l^1, \ldots, C_l^r$ tais que $V(C_l^i) \cap \bigcup_{j \neq i} V(C_l^j) = \{x,y\}$ para $1 \leq i \leq r$. Claramente, temos que o número esperado de tais arestas é limitado superiormente por

$$\frac{1}{r!} N^2 \{N^{l-2} p^{l-1}\}^r \leq N^2 \left(\frac{e\omega^{l-1}}{r} \right)^r,$$

que tende a 0 quando $N \to \infty$ se $r > \omega^{l-1} \log N$. Portanto, (iv) segue de (iii) com $b = b(l) = la$. □

Os autores de **[24]** usam o Lema 3.5 acima juntamente com outros resultados para dar uma prova de um caso particular da seguinte conjectura de Rödl e Tuza **[30]** (a saber, o caso em que H é um circuito qualquer).

CONJECTURA 3.6. **[30]** *Se H é um grafo fixado qualquer, então existe um grafo G com a mesma cintura que H tal que $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$.*

Nós vamos usar o Teorema 3.4 e parte do Lema 3.5 para dar uma nova prova de que a Conjectura 3.6 vale para todo circuito.

TEOREMA 3.7. *Para todo $l \geq 3$, existe um grafo G com cintura l tal que $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} C_l$.*

DEMONSTRAÇÃO. A prova segue o mesmo roteiro da prova dada em **[24]**. Sejam $l, r \geq 3$ inteiros fixados. Afirmamos que existe um grafo $G = G(l,r)$ tal que $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} C_l$ e tal que, para todo subgrafo $F \subset G$ com $3 \leq v(F) \leq r$, temos que $d_2(F) \leq (l-1)/(l-2)$. De fato, seja $p = p(N) = \omega N^{-1+1/(l-1)}$ com $\omega = N^{o(1)}$ e $\omega = \omega(N) \to \infty$, quando $N \to \infty$. Geramos $G' \in \mathbb{G}(N,p)$ e destruímos todas as arestas que pertencem a subgrafos $F \subset G'$ que têm no máximo r vértices e com $d_2(F) > (l-1)/(l-2)$, obtendo assim um grafo G. Pelas propriedades (ii) e (iv) no Lema 3.5, temos que destruímos no máximo $o(pN^2)$ cópias de C_l em G'. Logo, pelo Teorema 3.4, vemos que a.q.c. G' é tal que $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} C_l$. O resultado segue observando-se que a função $m_2(C_l) = d_2(C_l) = (l-1)/(l-2)$ é estritamente decrescente em l. □

Vamos discutir agora possíveis generalizações do Teorema 1.7. Uma primeira generalização é a seguinte. Podemos pensar em colorações próprias das arestas de um grafo como colorações nas quais cada cor aparece no máximo uma vez em cada vértice. Sejam então $R \geq 1$ um inteiro e H um grafo fixados. Para um grafo G, escrevemos $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{R}} H$ se, em qualquer coloração das arestas de G onde toda cor aparece no máximo R vezes em cada vértice, existe uma cópia TMC de H. Não é difícil ver que a prova do Teorema 1.7 (com as pequenas modificações necessárias) também mostra o seguinte resultado (veja o Capítulo 6 para mais detalhes).

TEOREMA 3.8. *Sejam H um grafo com $m_2 = m_2(H) > 1$ e $R \geq 1$ um inteiro fixados. Se a conjectura KLR vale para H, então existe uma constante $C = C(R,H) > 0$ tal que, para todo $p \geq CN^{-1/m_2}$, temos que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N,p)$ satisfaz $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{R}} H$.* □

Observamos que uma 1-afirmação para o caso no qual cada cor aparece no máximo r vezes no total, onde r é um inteiro fixado, segue quase que imediatamente da 1-afirmação mostrada por Rödl e Ruciński para a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}} (H)_r$ (veja o início do Capítulo 1). Convidamos o leitor interessado a verificar essa implicação.

Uma outra generalização do Teorema 1.7 está relacionada com o chamado *Teorema Canônico* mostrado por Erdős e Rado [7] (que é uma generalização forte do teorema clássico de F.P. Ramsey). O teorema canônico vale para hipergrafos e sub-hipergrafos uniformes completos quaisquer, mas enunciaremos aqui somente as seguintes versões para vértices e arestas.

TEOREMA 3.9. [7] *Para todo inteiro positivo n, existe um inteiro positivo N_0 tal que, para todo $N \geq N_0$, temos que, em qualquer coloração dos* vértices *de K_N, existe uma cópia de K_n que é canonicamente colorida, ou seja, que é ou monocromática ou TMC.* □

TEOREMA 3.10. [7] *Para todo inteiro positivo m, existe um inteiro positivo M_0 tal que, para todo $M \geq M_0$, temos que, em qualquer coloração das* arestas *de K_M, cujo conjunto de vértices é $\{1,\ldots,M\}$, existe uma cópia de K_m que é canonicamente colorida, ou seja, na qual a coloração é de um dos seguintes quatro tipos.*

(T1) Monocromática - todas as arestas têm a mesma cor.

(T2) TMC - todas as arestas têm cores distintas.

(T3) Lexicográfica Superior - duas arestas têm a mesma cor sse elas têm a mesma ponta superior.

(T4) Lexicográfica Inferior - duas arestas têm a mesma cor sse elas têm a mesma ponta inferior. □

Para um grafo H fixado, coloque

$$m_1(H) = \max\left\{\frac{e(H')}{v(H')-1} : H' \subset H,\ v(H') \geq 2\right\}.$$

Ainda, escrevemos $G \xrightarrow{\mathrm{v}} H^{can}$ se, em qualquer coloração dos vértices de G, existe uma cópia de H que é canonicamente colorida. B. Kreuter mostrou o seguinte resultado para essa propriedade em $\mathbb{G}(N,p)$.

TEOREMA 3.11. [18] *Seja H um grafo com $\Delta(H) \geq 1$ e $H \neq K_2$, $K_1 \cup K_2$ fixado e coloque $m_1 = m_1(H)$. Então existem constantes $b = b(H) > 0$ e $B = B(H) > 0$ tais que:*

(0) Se $p \leq bN^{-1/m_1}$, então $\mathbb{P}[G \xrightarrow{\mathrm{v}} H^{can}] \to 0$, quando $N \to \infty$.

(1) Se $p \geq BN^{-1/m_1}$, então $\mathbb{P}[G \xrightarrow{\mathrm{v}} H^{can}] \to 1$, quando $N \to \infty$. □

Agora, motivados pelo Teorema 3.10, o seguinte conceito foi estudado (veja, p. ex., [**1**]). Dados dois grafos F e H, seja $R^*(F,H)$ o menor inteiro M tal que, em qualquer coloração das arestas de K_M, existe ou uma cópia monocromática de F ou uma cópia TMC de H. Não é difícil ver que, por causa do Teorema 3.10, temos que $R^*(F,H)$ existe sse F é uma estrela ou H é uma floresta (uma prova desse fato se encontra em [**14**]). Temos portanto duas direções naturais para o estudo de $R^*(F,H)$, a saber: (i) F é uma estrela fixada e H é um grafo qualquer e (ii) H é uma floresta fixada e F é um grafo qualquer.

Na direção (i), seja então $F = K_{1,R+1}$, a estrela com $R+1$ arestas. Note que uma coloração das arestas de um grafo G não tem cópias monocromáticas de F sse ela é tal que toda cor aparece no máximo R vezes em cada vértice. Consequentemente, o Teorema 3.8 acima é uma 1-afirmação nessa direção para todo H (com $m_2(H) > 1$).

Na direção (ii), uma escolha é colocar $H = K_{1,k+1}$. Nesse caso, $R^*(F,H)$ é exatamente o menor M tal que, em toda coloração das arestas de K_M com no máximo k cores aparecendo em cada vértice, existe uma cópia monocromática de F. Esse conceito é também conhecido como o *número de Ramsey* k*-local de* F (veja as referências em [**1**]). Escrevemos $G \xrightarrow{\text{k-loc}} (F)$ se, em qualquer coloração das arestas de G com no máximo k cores aparecendo em cada vértice, existe uma cópia *monocromática* de F. O seguinte resultado foi obtido para essa propriedade em $\mathbb{G}(N,p)$.

TEOREMA 3.12. [**31**] *Sejam F um grafo conexo que não é uma estrela e $\mathrm{k} \geq 2$ um inteiro fixados e coloque $m_2 = m_2(F)$. Então existem constantes $c = b(F,\mathrm{k}) > 0$ e $C = C(F,\mathrm{k}) > 0$ tais que:*

{0}Se $p \leq cN^{-1/m_2}$, então $\mathbb{P}[G \xrightarrow{\text{k-loc}} (F)] \to 0$, quando $N \to \infty$.

{1}Se $p \geq CN^{-1/m_2}$, então $\mathbb{P}[G \xrightarrow{\text{k-loc}} (F)] \to 1$, quando $N \to \infty$. □

Em [**1**], o seguinte parâmetro é estudado. Dados $m \geq 2$ um inteiro e H um grafo, seja $M = f(m,H)$ o menor inteiro tal que, em qualquer coloração das arestas de K_M com no máximo m cores aparecendo em cada vértice, existe uma cópia de H que é *propriamente colorida*. Convidamos o leitor interessado a usar o teorema de Vizing (que afirma que todo grafo G possui uma coloração própria de suas arestas que usa no máximo $\Delta(G)+1$ cores) e o Teorema 3.12 acima para obter uma 1-afirmação para a propriedade correspondente em $\mathbb{G}(N,p)$ (o autor agradece o colega Daniel Martin pela sugestão de usar o teorema de Vizing em um passo da implicação em questão).

Com relação à propriedade original $G \xrightarrow{\text{e}}_{\text{pr}} H$, vamos enunciar a seguir os resultados conhecidos para a propriedade correspondente sobre grafos completos e, por fim, enunciar uma conjectura sobre colorações canônicas de arestas. Dado um inteiro positivo n, seja N o menor inteiro positivo tal que, em toda coloração própria das arestas de K_N, existe uma cópia TMC de K_n. L. Babai mostrou o seguinte resultado.

TEOREMA 3.13. [3] *Seja N um inteiro positivo fixado. Então, em toda coloração própria das arestas de K_N, existe uma cópia TMC de K_n para algum $n \geq (2N)^{1/3}$. Mais ainda, para todo N suficientemente grande, existe uma coloração própria das arestas de K_N tal que todos os subgrafos completos TMC contidos em K_N têm tamanho no máximo $8(N \ln N)^{1/3}$.* □

O limitante inferior no resultado acima foi melhorado por Alon, Lefmann e Rödl, que mostraram o seguinte resultado.

TEOREMA 3.14. [2] *Existem constantes $c' > 0$ e N_0 tais que, para todo $N \geq N_0$, temos que, em toda coloração própria das arestas de K_N, existe uma cópia TMC de K_n para algum $n \geq c'(N \ln N)^{1/3}$.* □

Escreva agora $G \xrightarrow{e} H^{can}$ se, em qualquer coloração das arestas de G, existe uma cópia de H que é canonicamente colorida. Tendo-se em vista o Teorema 3.11 acima, a conjectura natural para um resultado sobre essa propriedade em $\mathbb{G}(N,p)$ é a seguinte.

CONJECTURA 3.15. *Seja H um grafo fixado com $\Delta(H) \geq 2$ e coloque $m_2 = m_2(H)$. Temos que existem constantes $A_0 = A_0(H) > 0$ e $A_1 = A_1(H) > 0$ tais que:*

$\langle 0 \rangle$ *Se $p \leq A_0 N^{-1/m_2}$, então $\mathbb{P}[G \xrightarrow{e} H^{can}] \to 0$, quando $N \to \infty$.*

$\langle 1 \rangle$ *Se $p \geq A_1 N^{-1/m_2}$, então $\mathbb{P}[G \xrightarrow{e} H^{can}] \to 1$, quando $N \to \infty$.*

Note que a afirmação $\langle 1 \rangle$ acima claramente implica o nosso Teorema 1.7.

CAPÍTULO 4

Apêndice A: Os circuitos satisfazem KŁR

Nesse apêndice, iremos expor a prova de que os circuitos satisfazem a conjectura KŁR. Essa prova é devida a S. Gerke, Y. Kohayakawa, V. Rödl e A. Steger. Os detalhes completos podem ser encontrados em **[9]**.

Na verdade, os autores provam um resultado ligeiramente mais forte. Esse resultado foi aplicado no Capítulo 3 para darmos uma nova prova de um caso importante de uma conjectura de Rödl e Tuza enunciada em **[30]**.

DEFINIÇÃO 4.1. Dados $0 < \varepsilon, p \leq 1$, dizemos que um grafo bipartido $B = (V_1 \cup V_2, E)$ é *(ε, p)-inf-regular* se para todos $V_1' \subset V_1$ e $V_2' \subset V_2$ com $|V_1'| \geq \varepsilon|V_1|$ e $|V_2'| \geq \varepsilon|V_2|$ valer que

$$\frac{|E_B(V_1', V_2')|}{|V_1'|\,|V_2'|} \geq (1-\varepsilon)p.$$

LEMA 4.2. *Se $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é um grafo (ε)-regular de densidade d, então todo $V_1' \subset V_1$ satisfazendo $|V_1'| \geq \alpha|V_1|$ com $\alpha > \varepsilon > 0$ induz um grafo (α')-regular, onde $\alpha' = \max\{\varepsilon/\alpha,\ 2\varepsilon/(1-\varepsilon)\}$.* □

LEMA 4.3. *Se $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é um grafo (ε, p)-inf-regular e $V_2' \subset V_2$ satisfaz $|V_2'| \geq \varepsilon|V_2|$, então no máximo $\varepsilon|V_1|$ vértices $v \in V_1$ não satisfazem $|\Gamma(v) \cap V_2'| \geq (1-\varepsilon)p|V_2'|$.* □

LEMA 4.4. *Se $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é um grafo (ε)-regular de densidade d e $V_2' \subset V_2$ satisfaz $|V_2'| \geq \varepsilon|V_2|$, então no máximo $2\varepsilon|V_1|$ vértices $v \in V_1$ não satisfazem $(1-\varepsilon)d|V_2'| \leq |\Gamma(v) \cup V_2'| \leq (1+\varepsilon)d|V_2'|$.* □

LEMA 4.5. *Para todos β, $\nu > 0$, existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta, \nu) > 0$ tal que para todos $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $p > 0$ e $\tilde{c} \leq \nu/(3p)$, todo grafo $G = (V_1 \cup V_2, E)$ (ε, p)-inf-regular é tal que, para todo $c \geq \tilde{c}$, o número de subconjuntos $C \subset V_1$ de tamanho c com $|\Gamma(C)| \geq (1-\nu)\tilde{c}p|V_2|$ é pelo menos $(1-\beta^c)\binom{|V_1|}{c}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $C \subset V_1$ com $|C| < (1-\nu)\tilde{c}p|V_2|$. Considere $C' \subset C$ de tamanho máximo satisfazendo $|\Gamma(C')| \geq (1-\nu/2)|C'|p|V_2|$. Claramente, $|C'| \leq (1-\nu/2)\tilde{c}$. Pela escolha de C e como $\tilde{c} \leq \nu/(3p)$, temos $|\Gamma(C')| \leq \nu|V_2|/3$ e , portanto, $|V_2 \setminus \Gamma(C')| \geq (1-\nu/3)|V_2|$. Ponha $\varepsilon < \nu/6$. Pela maximalidade de C', todos os vértices $v \in C \setminus C'$ têm que satisfazer $\Gamma(v) \setminus \Gamma(C')| \leq (1-\nu/2)p|V_2| \leq (1-\varepsilon)p|V_2 \setminus \Gamma(C')|$. Porém, como $|V_2 \setminus \Gamma(C')| \geq \varepsilon|V_2|$, existem no máximo $\varepsilon|V_2|$ tais vértices $v \in V_1$ pelo Lema 4.3. Portanto, existem no máximo

$$\sum_{c' \leq (1-\nu/2)\tilde{c}} \binom{|V_1|}{c'}\binom{\lceil\varepsilon|V_1|\rceil}{c-c'} \leq \sum_{c' \leq (1-\nu/2)\tilde{c}} \binom{|V_1|}{c'}(2\varepsilon)^{c-c'}\binom{|V_1}{c-c'}$$
$$\leq (1-\frac{\nu}{2})c \cdot (2\varepsilon)^{\frac{\nu c}{2}} 4^c \binom{|V_1|}{c} \leq \beta^c \binom{|V_1}{c}$$

conjuntos C de tamanho $c \geq \tilde{c}$ com $|\Gamma(C)| < (1-\nu)\tilde{c}p|V_2|$, para ε suficientemente pequeno. □

DEFINIÇÃO 4.6. Seja $G = (V_1 \cup V_2, E)$ um grafo bipartido. Dados $\nu > 0$ e $D \geq 0$, um subconjunto $C \subset V_1$ é chamado de uma (ν, D)-*cobertura* de V_2 se pelo menos $(1-\nu)|V_2|$ vértices de V_2 têm grau pelo menos $(1-\nu)D$ em C.

LEMA 4.7. *Para todos β, $\nu > 0$, existem $D = D(\nu)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta, \nu) > 0$ tais que para todos $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 < p < 1$, todo grafo (ε, p)-inf-regular $G = (V_1 \cup V_2, E)$ satisfaz que o número de subconjuntos de V_1 de tamanho $c = \lceil D/p \rceil$ que são (ν, cp)-coberturas de V_2 é pelo menos $(1-\beta^c)\binom{|V_1|}{c}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam ε e D satisfazendo $\varepsilon \leq \nu/2$, $D \geq 6/\nu$, $(*)$ e $(**)$. Seja $G = (V_1 \cup V_2, E)$ um grafo (ε, p)-inf-regular. Se $c \geq |V_1|/2$, então, pelo Lema 4.3, pelo menos $(1-\varepsilon)|V_2| \geq (1-\nu)|V_2|$ vértices $v \in V_2$ satisfazem

$$(1-\nu)cp \leq (1-\varepsilon)cp \leq |\Gamma(v) \cap C|.$$

Assuma então que $c < |V_2|$. Nós geramos um conjunto de vértices C de tamanho $c = \lceil D/p \rceil$ escolhendo os seus elementos um por vez de maneira aleatória. A cada passo t, nós declaramos alguns desses vértices *úteis*. Se algum vértice útil é escolhido, nós chamamos esse vértice de *bom* e declaramos algumas das arestas incidentes a ele *relevantes*. Para $t = 1, 2, \ldots, c$ e $i = 0, 1, \ldots, D$, seja $G(t, i) \subset V_2$ o conjunto de todos os vértices que são incidentes a i arestas relevantes após t vértices terem sido escolhidos e ponha $g(t, i) = |G(i, t)|$. Um vértice $v \in V_1$ é *útil* no tempo $t+1$ se ele tem pelo menos $\lceil (1-\varepsilon)pg(t, i) \rceil$ vizinhos em cada $G(t, i)$ com $g(t, i) \geq \varepsilon|V_2|$. Se um vértice útil é selecionado, nós arbitrariamente escolhemos $\lceil (1-\varepsilon)pg(t, i) \rceil$ das suas arestas incidentes a $G(t, i)$ para cada $G(t, i)$ com $g(t, i) \geq \varepsilon|V_2|$ e as declaramos *relevantes*. Observe que no começo todos os vértices de V_1 com grau pelo menos $(1-\varepsilon)p|V_2|$ são úteis e que nós só precisamos nos preocupar com os vértices em V_2 que por ventura tenham menos do que D vértices selecionados nas suas respectivas vizinhanças.

Em qualquer tempo t, nos só consideramos graus em $D+1$ conjuntos para determinar o conjunto dos vértices úteis. Pelo Lema 4.3, para cada $G(t, i)$ com $g(t, i) \geq \varepsilon|V_2|$, existem no máximo $\varepsilon|V_1|$ vértices em V_1 que não têm pelo menos $\lceil (1-\varepsilon)pg(t, i) \rceil$ vizinhos em cada $G(t, i)$. Portanto, em cada passo existem no máximo $(D+1)\varepsilon|V_1|$ vértices que não são úteis. Como nós selecionamos vértices de um conjunto de tamanho pelo menos

$|V_1| - t \geq |V_1|/2$, a probabilidade de C conter pelo menos $\nu c/2$ vértices que não são bons é no máximo

$$\binom{c}{\lceil \nu c/2 \rceil} \left(\frac{(D+1)\varepsilon|V_1|}{|V_1| - c} \right)^{\lceil \frac{\nu c}{2} \rceil} \leq 2^c \left((D+1)2\varepsilon) \right)^{\lceil \frac{\nu c}{2} \rceil} \leq \beta^c. \ (*)$$

Resta mostarmos que se nós selecionarmos $\lfloor (1 - \nu/2)c \rfloor$ vértices bons, então nós temos uma (ν, D)-cobertura. De fato, isso implica que um conunto (não-ordenado) só não é uma (ν, D)-cobertura se todas as suas $c!$ ordenações contêm menos do que $\lfloor (1 - \nu/2)c \rfloor$ vértices bons. Como existem no máximo $\beta^c |V_1|!/(|V_1| - c)!$ tais ordenações, existem no máximo $\beta^c \binom{|V_1|}{c}$ conjuntos que não são (ν, D)-coberturas.

Como vértices selecionados que não são bons não afetam os conjuntos $G(t, i)$ para nenhum t ou i, podemos ignorar esses passos e assumir que temos t vértices bons no tempo t. Para um vértice bom $v \in C$, $\tilde{\Gamma}(v) \subset \Gamma(v)$ denota o conjunto de todos os vértices $u \in V_2$ que são ligados a v por uma aresta relevante. Seja $n = |V_2|$. No tempo $t \geq 1$, nós adicionamos um vértice bom v e, em particular, se $g(t-1, i) \geq \varepsilon n$, então v satisfaz

$\lceil (1-\varepsilon) p g(t-1, i) \rceil = |\tilde{\Gamma}(v) \cap G(t-1, i)|$,

e, se $g(t-1, i) < \varepsilon n$, então v satisfaz

$0 = |\tilde{\Gamma}(v) \cap G(t-1, i)|$.

Logo, as seguintes desigualdades são sempre satisfeitas.

$pg(t-1, i) - \varepsilon pn \leq |\tilde{\Gamma}(v) \cap G(t-1, i)| \leq pg(t-1, i)$.

No passo $t = 0$, temos que $G(0, 0) = V_2$ e $g(0, 0) = n$. No tempo $t \geq 1$, o vértice bom v é adicionado e temos $G(t, 0) = G(t-1, 0) \setminus \tilde{\Gamma}(v)$ e, portanto, $g(t, 0) = g(t-1, 0)(1-p) + f(t, 0)$, onde $|f(t, 0)| \leq \varepsilon pn$. Agora considere $i = 1, \ldots, D$. Se $t < i$, temos $g(t, i) = 0$, então seja $t \geq i$. Observe que quando adicionamos o vértice bom v no tempo t, temos $G(t, i) = \Big(G(t-1, i) \setminus \tilde{\Gamma}(v) \Big) \cup \Big(G(t-1, i-1) \cap \tilde{\Gamma}(v) \Big)$. Portanto, $g(t, i) = g(t-1, i-1)p + g(t-1, i)(1-p) + f(t, i)$, onde $|f(t, i)| \leq 2\varepsilon pn$. Resumindo, nós temos que resolver a seguinte recursão: $g(0, 0) = n$, $g(t, -1) = 0$, para $t \geq 0$, $g(t, i) = 0$, para $i \geq 1$ e $t < i$ e $g(t, i) = g(t-1, i-1)p + g(t-1, i)(1-p) + f(t, i)$, para $t \geq i \geq 1$ e $t \geq 1$, $i = 0$, onde $|f(t, i)| \leq 2\varepsilon pn$ para todos $i = 0, \ldots, D$ e $t \geq i$. Nós afirmamos que

$$|g(t, i) - n\binom{t}{i} p^i (1-p)^{t-i}| \leq 2t\varepsilon pn,$$

para todos $-1 \leq i \leq D$ e $t \geq 0$. Vamos mostrar essa afirmação por indução em t. Não é difícil vermos que ela vale para $g(0, 0)$, para $g(t-1, 0)$ e $t \geq 0$ e para $g(t, i)$ quando $0 \leq t < i \leq D$. Assuma então que ela vale para $t - 1 \geq 0$ e todo $-1 \leq i \leq D$. Note que para, $t \geq i$,

$$n\binom{t-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{t-i} p + n\binom{t-1}{i} p^i (1-p)^{t-i-1} (1-p) = n\binom{t}{i} p^i (1-p)^{t-i}$$

e, portanto, da recursão vemos que

$$\begin{aligned} \left|g(t,i) - n\binom{t}{i}p^i(1-p)^{t-i}\right| &\leq \big|\, |2(t-1)\varepsilon pn|p + |2(t-1)\varepsilon pn|(1-p) + f(t,i)\big| \\ &\leq 2t\varepsilon pn. \end{aligned}$$

Seja $t_0 = \lfloor (1-\nu/2)c \rfloor$. Iremos mostrar agora que

$$\sum_{i=0}^{(1-\nu)cp} g(t_0, i) \leq \nu|V_2|$$

o que implica que C é uma (ν, cp)-cobertura, já que adicionar arestas (como arestas não-relevantes ou arestas incidentes a vértices não-bons) não afeta uma (ν, cp)-cobertura. Como vimos acima, $g(t_0, i)/n$ tem uma distribuição que é muito próxima da binomial. Pretendemos então usar a desigualdade de Chernoff para limitar o número de vértices em V_2 que têm grau no máximo $(1-\nu)cp \leq (1-\nu/3)t_0p$. Para essa última desigualdade, note que

$$t_0 = \left\lfloor \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) c \right\rfloor \geq \left(1 - \frac{\nu}{2} - \frac{1}{c}\right)c \geq \left(1 - \frac{2\nu}{3}\right)c,$$

para $D \geq 6/\nu$. Observe também que

$$t_0p \leq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)cp = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\left\lceil \frac{D}{p} \right\rceil p \leq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)D + p \leq D,$$

para $D \geq 2/\nu$. Portanto, usando a desigualdade de Chernoff (que diz que, para uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p, a probabilidade de ela ser menor do que $(1-\delta)np$ é menor do que $\exp\{-\delta^2 np/2\}$, veja, p. ex., [**16**]), nós obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{(1-\nu)cp} g(t_0, i) &\leq \sum_{i=0}^{(1-\nu/3)t_0p} g(t_0, i) \\ &\leq n\left(\sum_{i=0}^{(1-\nu/3)t_0p} \binom{t_0}{i} p^i (1-p)^{t_0-i}\right) + \left(1 - \frac{\nu}{3}\right)t_0p \cdot 2t_0\varepsilon pn \\ &\leq ne^{-\frac{\nu^2}{18}(1-2\nu/3)D} + 2D^2\varepsilon n \leq \nu n \quad (**), \end{aligned}$$

pelas desigualdades logo acima e pelo fato que $c = \lceil D/p \rceil \geq D/p$. □

DEFINIÇÃO 4.8. Um subconjunto $S \subset V_1$ é chamado de uma (ν, D, c)-*supercobertura* de V_2 se todo subconjunto $S' \subset S$ com $|S'| = c$ for uma (ν, D)-cobertura de V_2.

LEMA 4.9. *Para todos β, $\nu > 0$, existem $D = D(\nu)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta, \nu) > 0$ tais que para todos $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 < p < 1$, todo grafo (ε, p)-inf-regular $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é tal que, para todo $s \leq c/\nu$ onde $c = \lceil D/p \rceil$, o número de (ν, cp, c)-supercoberturas de V_2 de tamanho s é pelo menos $(1 - \beta^s)\binom{|V_1|}{s}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $S \subset V_1$ com $|S| = s$ que não é uma $(\nu, D, \lceil D/p \rceil)$-supercobertura de V_2. Temos que S precisa conter um subconjunto de tamanho $c = \lceil D/p \rceil$ que não é uma (ν, D)-cobertura de V_2. Pelo Lema 4.7 aplicado com ν e $\beta \leftarrow (\beta/4)^{1/\nu}$, existem no máximo

$$\left(\frac{\beta}{4}\right)^{c/\nu} \binom{|V_1|}{c}$$

tais conjuntos, para valores apropriados de $D = D(\nu)$ e $\varepsilon_0(\beta, \nu)$. Portanto, o número de subconjuntos que não são $(\nu, D, \lceil D/p \rceil)$-supercoberturas de V_2 pode ser limitado superiormente por

$$\left(\frac{\beta}{4}\right)^{c/\nu} \binom{|V_1|}{c} \binom{|V_1| - c}{s - c} \leq \left(\frac{\beta}{4}\right)^{s} 4^s \binom{|V_1|}{s},$$

e o resultado segue. □

TEOREMA 4.10. *Para $0 < \beta, \varepsilon' < 1$, existem $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta, \varepsilon') > 0$ e $C = C(\varepsilon')$ tais que, para todos $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 < p < 1$, todo grafo (ε, p)-inf-regular $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é tal que, para todos $q \geq C/p$, o número de subconjuntos de V_1 de tamanho q que juntamente com V_2 formam um grafo (ε', p)-inf-regular é pelo menos $(1 - \beta^q)\binom{|V_1|}{q}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $q \geq |V_1|/2$, então o resultado vale para $\varepsilon \leq \varepsilon'/2$, já que nesse caso o grafo é $(2\varepsilon, p)$-inf-regular. Assuma então que $q < |V_1|/2$ e sejam ν com $0 < \nu \leq (\varepsilon')^3/12$ e $D = D(\nu)$ como no Lema 4.9. Ponha $c = \lceil D/p \rceil$, $s = \lfloor c/\nu \rfloor$ e $t = \lfloor q/s \rfloor$. Iremos provar o resultado para $C = (D+1)/\nu^2$ e para ε_0 que é o mínimo entre $\varepsilon'/2$ e ε_0 como no Lema 4.9 aplicado com ν e $\beta \leftarrow (\beta/2)^{2/\nu}$. Observe que $C = (D+1)/(\nu^2)$ implica $q \geq s/\nu$. Nós queremos mostrar que o número de subconjuntos de V_1 de tamanho q que não contêm pelo menos $\lfloor (1-\nu)t \rfloor = t - \lceil \nu t \rceil$ conjuntos disjuntos de tamanho s que são (ν, cp, c)-supercoberturas de V_2 é bem pequeno. Primeiramente, iremos contar o número de maneiras de selecionar uma $(t+1)$-upla $(T_1, \ldots, T_{t+1})$ de subconjuntos disjuntos com $|T_1| = \cdots = |T_t| = s$, $T_{t+1} = q - ts$ e pelo menos $\lceil \nu t \rceil$ dos conjuntos de tamanho s não sendo (ν, cp, c)-supercoberturas. Como $q < |V_1|/2$, o grafo induzido pelo complemento em V_1 da união dos subconjuntos já escolhidos é $(2\varepsilon, p)$-inf-regular, e portanto, pelo Lema 4.9 aplicado com ν e $\beta \leftarrow (\beta/2)^{2/\nu}$, o número de jeitos de se escolher pelo menos $\lceil \nu t \rceil$ subconjuntos de tamanho s que não são (ν, cp, c)-supercoberturas é

$$\begin{aligned}
&\leq \binom{t}{\lceil \nu t \rceil} \left(\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2s/\nu} \right)^{\lceil \nu t \rceil} \left(\prod_{i=0}^{t-1} \binom{|V_1| - is}{s} \right) \binom{|V_1| - ts}{q - ts} \\
&\leq 2^q \left(\frac{\beta}{2}\right)^q \frac{q!}{(s!)^t (q - st)!} \binom{|V_1|}{q} \\
&= \beta^q \frac{q!}{(s!)^t (q - st)!} \binom{|V_1|}{q}.
\end{aligned}$$

Considere as $q!/(s!)^t(q-st)!$ tuplas $(T_1,\ldots,T_{t+1})$ que provêm do mesmo conjunto base Q. Se uma dessas tuplas têm pelo menos $\lfloor(1-\nu)t\rfloor$ subconjuntos de tamanho s que são (ν,cp,c)-supercoberturas, então Q claramente contém $\lfloor(1-\nu)t\rfloor$ (ν,cp,c)-supercoberturas disjuntas. Logo, todas essas tuplas têm que conter pelo menos $\lceil\nu t\rceil$ subconjuntos de tamanho s que não são (ν,cp,c)-supercoberturas se Q não contém $\lfloor(1-\nu)t\rfloor$ (ν,cp,c)-supercoberturas disjuntas. Consequentemente, existem no máximo $\beta^q\binom{|V_1|}{q}$ conjuntos de tamanho q que não contêm $\lfloor(1-\nu)t\rfloor$ (ν,cp,c)-supercoberturas disjuntas de tamanho s cada.

Falta mostrar então que se Q é particionado em conjuntos $Q=S_0\cup\bigcup S_i$ de forma que as partes S_i, $i\geq 1$, são (ν,cp,c)-supercoberturas duas a duas disjuntas de tamanho $|S_i|=s$ com $|S_0|<\lceil\nu t\rceil s+s\leq\nu q+2s$, então Q induz um grafo (ε',p)-regular. Vamos mostrar esse fato. Note que por termos escolhido $C=(D+1)/(\nu^2)$, temos $q\geq C/p\geq s/\nu$, de onde $|S_0|\leq 3\nu q$.

Sejam $Q'\subset Q$ e $V_2'\subset V_2$ com $|Q'|\geq\varepsilon'|Q|$ e $|V_2'|\geq\varepsilon'|V_2|$. Para cada $i\geq 1$, particione $Q'\cap S_i$ no maior número possível de conjuntos de tamanho c. Mais precisamente, seja $Q'\cap S_i=C_{i,0}\cup\bigcup_{j\geq 1}C_{i,j}$ uma dessas partições com $|C_{i,0}|<c$ e $|C_{i,j}|=c$ para $j\geq 1$. Observe que

$$\left|Q'\setminus\bigcup_{i\geq 1}\bigcup_{j\geq 1}C_{i,j}\right|\leq|S_0|+\sum_{i\geq 1}|C_{i,0}|\leq 3\nu q+\left\lfloor\frac{q}{s}\right\rfloor\cdot c\leq 5\nu|Q|\leq\frac{5\nu}{\varepsilon'}|Q'|,$$

já que $q/s=q/\lfloor c/\nu\rfloor\leq 2q\nu/c$. Portanto,

$$\left|\bigcup_{i\geq 1}\bigcup_{j\geq 1}C_{i,j}\right|\geq\left(1-\frac{5\nu}{\varepsilon'}\right)|Q'|.$$

Pela definiçao de (ν,cp,c)-supercobertura, os conjuntos $C_{i,j}$ são (ν,cp)-coberturas e logo

$$|E(C_{i,j},V_2')|\geq(|V_2'|-\nu|V_2'|)(1-\nu)cp\geq\left(1-\frac{\nu}{\varepsilon'}\right)(1-\nu)cp|V_2'|,$$

para todo $C_{i,j}$ com $i,j\geq 1$. Como $\nu\leq(\varepsilon')^3/12$, concluímos que

$$\begin{aligned}|E(Q',V_2')|&\geq\sum_{i,j\geq 1}|E(C_{i,j},V_2')|\geq\left(1-\frac{5\nu}{\varepsilon'}\right)\frac{|Q'|}{c}\left(1-\frac{\nu}{\varepsilon'}\right)(1-\nu)cp|V_2'|\\&\geq\left(1-\frac{7\nu}{\varepsilon'}-\frac{5\nu^3}{(\varepsilon')^2}\right)p|Q'||V_2'|\geq(1-\varepsilon')p|Q'||V_2'|,\end{aligned}$$

que é o que queríamos mostrar. □

Nós iremos adotar a seguinte estratégia de prova. Primeiramente, mostraremos que, na maioria dos grafos em $\mathcal{G}(C_l,n,m,\varepsilon)$, a maioria dos vértices em V_l estão conectados via $V_{l-1},\ldots,V_2$ a quase todos os vértices em V_1. Isso deve valer porque como existem m arestas entre os conjuntos V_i e V_{i+1}, esperaríamos que um vértice $v \in V_l$ tivesse uma vizinhança $\Gamma_{l-1}(v) = \Gamma(v) \cap V_{l-1}$ de tamanho m/n. Se as vizinhanças dos vértices em $\Gamma_{l-1}(v)$ fossem disjuntas, nós esperaríamos que $\Gamma_{l-2}(\Gamma_{l-1}(v))$ tivesse tamanho $(m/n)^2$. Continuando dessa maneira, nós queremos que $(m/n)^{l-2} \geq n$, e esse é o caso quando $m \geq n^{l/(l-1)}$. É claro que não podemos ter que todo vértice tenha exatamente o grau esperado e que as vizinhanças das vizinhanças sejam todas disjuntas e etc., mas sabemos dos resultados acima que quase todos os conjuntos não muito grandes se comportam como seria esperado.

Na verdade a prova é na outra direção, isto é, nós usamos o Teorema 4.10 para mostarmos que quase todo subconjunto de tamanho pelo menos n^2/m (que é menor do que $(m/n)^{l-2}$ quando $m \geq n^{l/(l-1)}$) de V_{l-1} tem uma vizinhança de tamanho aproximadamente n em V_l. Depois mostramos que quase todo subconjunto de tamanho pelo menos n^3/m^2 de V_{l-2} têm um caminho de comprimento 2 a quase todo vértice de V_l e assim por diante (veja o Lema 4.14). Usamos o Lema 4.11 para passar do nível $k+1$ para o nível k. Por fim, no Teorema 4.16 mostraremos que existem muito poucos grafos que têm muitos caminhos entre V_1 e V_l, mas não contendo nenhum circuito.

LEMA 4.11. *Sejam $c \geq 1$ e β, $\delta > 0$ dados. Existe $\gamma = \gamma(\beta, \delta) > 0$ tal que vale o seguinte. Seja V_1 um conjunto com $|V_1| = n_1$ tal que para todo $q \geq c$ no máximo $\gamma^q\binom{n_1}{q}$ subconjuntos de V_1 de tamanho q estão marcados. Então existem no máximo $\beta^m\binom{n_1 n_2}{m}$ grafos bipartidos $G = (V_1 \cup V_2, E)$ com $|V_2| = n_2$ e $m \geq 2n_2 \log n_1 n_2$ arestas tais que existem conjuntos dois a dois disjuntos $W_1, W_2, \ldots \subset V_2$, com $\sum_i |W_i| > \delta n_2$ e, para cada i, temos que $\Gamma(W_i)$ é um subconjunto marcado de V_1 com $|\Gamma(W_i)| \geq \max\{|W_i| m/(2n_2), c\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos construir todos os grafos que satisfazem as condições do enunciado e mostrar que existem no máximo $\beta^m\binom{n_1 n_2}{m}$ tais grafos. Primeiramente, selecionamos os subconjuntos dois a dois disjuntos $W_1, W_2, \ldots$. Existem no máximo $(n_2+1)^{n_2} \leq 2^m$ maneiras de se fazer isso, já que existem no máximo n_2 tais subconjuntos W_i. Agora, para $i = 1, 2, \ldots$, escolhemos o tamanho $d_i = |\Gamma(W_i)| \geq \max\{|W_i| m/(2n_2), c\}$ da vizinhança de W_i e o número m_i de arestas entre V_1 e W_i. Existem no máximo $n_1^{n_2} m^{n_2} \leq 2^{n_2 \log n_1} 2^{n_2 \log n_1 n_2} \leq 2^m$ jeitos de se fazer isso. Ainda, para cada $i = 1, 2, \ldots$, nós escolhemos um subconjunto marcado de tamanho d_i e as arestas entre W_i e esse conjunto marcado. Existem no máximo $\gamma^{d_i}\binom{n_1}{d_i}\binom{d_i w_i}{m_i}$ maneiras de se fazer isso, onde $w_i = |W_i|$. Finalmente, nós selecionamos as arestas entre vértices em V_1 e vértices em $V_2 \setminus \bigcup W_i$. Existem no máximo $\binom{n_1(n_2-w)}{m-\tilde{m}}$ possibilidades, onde $\tilde{m} = \sum m_i$ e $w = |\bigcup W_i|$. Somando-se tudo, depois de termos fixado os subconjuntos $W_1, W_2, \ldots$, o tamanho das suas vizinhanças e o número de arestas entre W_i e V_1, podemos construir no máximo

$$N = \binom{n_1(n_2 - w)}{m - \tilde{m}} \prod_i \gamma^{d_i} \binom{n_1}{d_i} \binom{d_i w_i}{m_i}$$

grafos bipartidos que satisfazem as condições do enunciado. Resta mostarmos que
$$N \leq 4^{-m} e^{2m} \gamma^{\frac{\delta}{2}m} \binom{n_1 n_2}{m},$$
pois o resultado segue escolhendo-se $\gamma \leq (\beta/(4e^2))^{2/\delta}$, já que, como notamos, existem no máximo 4^m maneiras de se escolher os subconjuntos W_i, o tamanho de suas vizinhanças e o número de arestas entre W_i e V_1. Para verificar que N de fato satisfaz a desigualdade acima, note que
$$\sum_i d_i \geq \sum_i \frac{|W_i|m}{2n_2} \geq \frac{\delta}{2}m.$$
Ainda, para todos $0 \leq k \leq n$, temos $(\frac{n}{k})^k \leq \binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$, e, portanto,
$$\begin{aligned}\binom{n_1}{d_i}\binom{w_i d_i}{m_i} &\leq \left(\frac{en_1}{d_i}\right)^{d_i}\left(\frac{ew_i d_i}{m_i}\right)^{m_i} \\ &= \left(\frac{w_i n_i}{m_i}\right)^{m_i}\frac{e^{m_i+d_i} d_i^{m_i-d_i}}{n_1^{m_i-d_i}} \\ &\leq e^{2m_i}\binom{w_i n_1}{m_i}.\end{aligned}$$
Aplicando-se a identidade de Vandermonde na forma
$$\binom{a}{x}\binom{b}{y} \leq \sum_{i=0}^{x+y}\binom{a}{i}\binom{b}{x+y-i} = \binom{a+b}{x+y},$$
o resultado segue. □

OBSERVAÇÃO 4.12. Observe que se todas as famílias de conjuntos dois a dois disjuntos W_i que satisfazem uma dada propriedade indesejada também satisfazem $\sum_i |W_i| \leq \delta n$, então precisamos remover no máximo δn vértices de forma que *nenhum* subconjunto dos vértices remanescentes tenha essa propriedade indesejada.

DEFINIÇÃO 4.13. $\mathcal{P}_l(n, m, \varepsilon)$ denota a classe de grafos que consistem de l conjuntos dois a dois disjuntos de vértices, todos de tamanho n, de forma que os conjuntos V_i, V_{i+1} formam um grafo $(\varepsilon, m/n^2)$-inf-regular com m arestas, para $i = 1, \ldots, l-1$. Dizemos que um subconjunto $Q \subset V_l$ é $(1-\nu)$-*crescente* se $|\Gamma_1(\Gamma_2(\cdots\Gamma_{l-1}(Q)))| \geq (1-\nu)n$. Um grafo em $\mathcal{P}_l(n, m, \varepsilon)$ é dito *expansor com relação a* γ, δ, ν, C se ele contém um subconjunto $X \subset V_l$ de tamanho no máximo δn tal que para todo $q \geq Cn^l/m^{l-1}$, no máximo $\gamma^q\binom{n}{q}$ subconjuntos de $V_l \setminus X$ de tamanho q não são $(1-\nu)$-crescentes.

LEMA 4.14. *Sejam dados $l \geq 2$ um inteiro e $0 < \beta, \delta, \gamma, \nu < 1/3$. Então existem $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(l, \beta, \delta, \gamma, \nu) > 0$ e uma constante $C = C(l, \nu)$ tais que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, o número de grafos em $\mathcal{P}_l(n, m, \varepsilon)$ que não são expansores com relação a γ, δ, ν, C é no máximo $\beta^m \binom{n^2}{m}^{l-1}$, para todo $m \geq 8n \log n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Nós iremos usar indução em l. Para $l = 2$, o resultado segue do Teorema 4.10 (com os papéis de V_1 e V_2 trocados) aplicado com $\beta \leftarrow \gamma$, $\varepsilon' \leftarrow \nu$ e $p \leftarrow m/n^2$, já que todo grafo $(\nu, m/n^2)$-inf-regular de tamanho pelo menos Cn^2/m, com $C = C(\nu)$ como no Teorema 4.10, é $(1-\nu)$-crescente. Nesse caso, podemos tomar $X = \emptyset$.

Assuma que o enunciado vale para $l - 1 \geq 2$ e sejam $0 < \beta, \delta, \gamma, \nu < 1/3$ dados. A estratégia da prova é a seguinte. Aplicando o lema para $l-1$ e constantes convenientes $\beta', \delta', \gamma', \nu'$, nós deduzimos que existem constantes ε_0', C' e muitos grafos expansores com relação a $\delta', \gamma', \nu', C'$ em $\mathcal{P}_{l-1}(n, m, \varepsilon)$ se $\varepsilon \leq \varepsilon_0'$. Para cada tal grafo expansor em $\mathcal{P}_{l-1}(n, m, \varepsilon)$, nós aplicamos o Lema 4.11 para concluir que existem muito poucas extensões entre V_{l-1} e V_l para as quais o grafo resultante em $\mathcal{P}_l(n, m, \varepsilon)$ não seja expansor com relação a δ, γ, ν, C, onde C é uma constante convenientemente escolhida e ε é suficientemente pequeno.

Para sermos mais precisos, iremos aplicar o Lema 4.11 com $\beta \leftarrow (\beta/4)^2$ e $\delta \leftarrow \delta$. Para essas constantes, o Lema 4.11 nos dá uma constante γ, que de agora em diante denotamos por γ'. Agora sejam $\beta' = \beta/2$, $\delta' = \delta$ e $\nu' = \nu$ e aplique a hipótese de indução para $l-1$ e $\beta', \delta', \gamma', \nu'$ para deduzir que existem ε_0' e uma constante C' tais que todos a menos de

$$(\beta')^m \binom{n^2}{m}^{l-2} = \left(\frac{\beta}{2}\right) \binom{n^2}{m}^{l-2}$$

grafos em $\mathcal{P}_{l-1}(n, m, \varepsilon)$ estão no conjunto $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}_{l-1}(n, m, \varepsilon)$ dos grafos que são expansores com relação a $\delta', \gamma', \nu', C'$, para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0'$. Em particular, para cada grafo em $\mathcal{L}$, existe um subconjunto $X' \subset V_{l-1}$ tal que $|X'| \leq \delta n$ e tal que para todo $q \geq C'n^{l-1}/m^{l-2}$, no máximo $(\gamma')^q \binom{n}{q}$ subconjuntos de $V_{l-1} \setminus X'$ de tamanho q não são $(1-\nu)$-crescentes. Note que podemos assumir que $|X'| = \delta n$. Para cada grafo em $\mathcal{L}$, aplicamos o Lema 4.11 com $\beta \leftarrow \beta'' = (\beta/4)^2$, $\delta \leftarrow \delta$, $c \leftarrow C'n^{l-1}/m^{l-2}$ e com todos os subconjuntos que não são $(1-\nu)$-crescentes marcados para obtermos que existem no máximo $(\beta'')^{\tilde{m}} \binom{(1-\delta)n^2}{\tilde{m}}$ extensões *inúteis*, isto é, grafos bipartidos em $(V_{l-1} \setminus X', V_l)$ com $\tilde{m} \geq 4n \log n$ arestas que não contêm um subconjunto $X \subset V_l$ com $|X| \leq \delta n$ tal que todos os subconjuntos $Q \subset V_l \setminus X$ satisfazendo

$$(+) \quad |\Gamma(Q) \cap (V_{l-1} \setminus X')| \geq \max\left\{|Q|\frac{\tilde{m}}{2n}, \frac{C'n^{l-1}}{m^{l-2}}\right\}$$

são $(1-\nu)$-crescentes. Como queremos construir um grafo $(\varepsilon, m/n^2)$-inf-regular com m arestas entre V_l e V_{l-1}, e podemos assumir que $\varepsilon < 1/4$, existem entre m e $(1-\varepsilon)(m/n^2)(1-\delta)n^2 \geq m/2$ arestas entre V_l e um subconjunto de V_{l-1} de tamanho $(1-\delta)n$. Portanto, só precisamos considerar valores de $\tilde{m}$ com $m \geq \tilde{m} \geq m/2$. Como $m/2 \geq 4n \log n$, segue que podemos construir no máximo

$$\sum_{\tilde{m}=m/2}^{m} (\beta'')^{\tilde{m}} \binom{(1-\delta)n^2}{\tilde{m}} \binom{\delta n^2}{m-\tilde{m}} \leq m \left(\left(\frac{\beta}{4}\right)^2 \right)^{m/2} \binom{n^2}{m} \leq \left(\frac{\beta}{2}\right) \binom{n^2}{m}$$

extensões inúteis entre V_l e V_{l-1} a partir de um grafo em $\mathcal{L}$. Logo, existem no máximo

$$2\left(\frac{\beta}{2}\right)^m \binom{n^2}{m}^{l-1} \leq \beta^m \binom{n^2}{m}^{l-1}$$

grafos em $\mathcal{P}_l(n, m, \varepsilon)$ tais que ou o grafo induzido por $V_1, \ldots, V_{l-1}$ não está em $\mathcal{L}$, ou esse grafo está em $\mathcal{L}$, mas a extensão é inútil (note que aqui usamos que existem no máximo $\binom{n^2}{m}$ maneiras de se construir um grafo $(\varepsilon, m/n^2)$-inf-regular com m arestas entre dois conjuntos de tamanho n). Resta mostarmos que existem ε_0 e uma constante C tais que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ nós já contamos todos os grafos em $\mathcal{P}_l(n, m, \varepsilon)$ que não são expansores.

Para ver isso, tome $C = C'/2$ e observe que só precisamos mostrar que para cada $q \geq Cn^l/m^{l-1}$, existem, no máximo, $\gamma^q\binom{n}{q}$ subconjuntos $Q \subset V_l \setminus X$ com $|Q| = q$ que não satisfazem (+). Agora, isso segue do Lema 4.5 com $\nu \leftarrow (1-2\delta)/(2(1-\delta))$, $\beta \leftarrow \gamma$ e ε suficientemente pequeno, para $Cn^l/m^{l-1} \leq q \leq n^2/(12m)$. Mais precisamente, os conjuntos $V_{l-1} \setminus X'$ e V_l induzem um grafo $(2\varepsilon, m/n^2)$-inf-regular e logo o Lema 4.5 implica

$$\begin{aligned} |\Gamma(Q) \cap (V_{l-1} \setminus X')| &\geq \left(1 - \frac{1-2\delta}{2(1-\delta)}\right) q\frac{m}{n^2} |V_{l-1} \setminus X'| \geq \frac{1}{2} q \frac{m}{n} \\ &\geq \max\left\{\frac{1}{2} q \frac{\tilde{m}}{n},\ C' \frac{n^{l-1}}{m^{l-2}}\right\}, \end{aligned}$$

para todos a menos de $\gamma^q\binom{n}{q}$ subconjuntos de tamanho $q \leq n^2/(12m)$. Para $q > n^2/(12m)$, um subconjunto de tamanho q só não é $(1-\nu)$-crescente se todos os seus subconjuntos de tamanho no máximo $n^2/(12m)$ não são $(1-\nu)$-crescentes. Logo, o número de tais subconjuntos é no máximo $\gamma^q\binom{n}{q}$ (veja, por exemplo, a prova do Teorema 4.10). □

DEFINIÇÃO 4.15. $\tilde{\mathcal{G}}(C_l, n, m, \varepsilon)$ denota a classe de grafos que consistem de l conjuntos dois a dois disjuntos de vértices $V_1, \ldots, V_l$, todos de tamanho n, e existe um grafo $(\varepsilon, m/n^2)$-inf-regular com m arestas entre V_i e V_{i+1}, para $i = 1, \ldots, l$. $\tilde{\mathcal{F}}(C_l, n, m, \varepsilon, \delta) \subset \tilde{\mathcal{G}}(C_l, n, m, \varepsilon)$ denota o subconjunto de grafos que contêm pelo menos δn vértices em V_l que não estão em pelo menos $(1-\delta)m/n$ cópias de C_l cada um. Em particular, todos os grafos em $\tilde{\mathcal{G}}(C_l, n, m, \varepsilon) \setminus \tilde{\mathcal{F}}(C_l, n, m, \varepsilon, \delta)$ contêm pelo menos $(1-\delta)^2 m$ cópias de C_l.

TEOREMA 4.16. *Para todo inteiro $l \geq 3$ e todos $\beta, \delta > 0$, existem constantes $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$ e $n_0 > 0$ tais que*

$$|\tilde{\mathcal{F}}(C_l, n, m, \varepsilon, \delta)| \leq \beta^m \binom{n^2}{m}^l$$

para todos $m \geq Cn^{l/(l-1)}$, $n \geq n_0$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

DEMONSTRAÇÃO. Escolha uma constante ν que satisfaz $32\nu^{\delta^2/4} \leq \beta$. Ponha $\delta' = \delta/4$ e $C = C(l, \nu)$ onde C é definido como no Lema 4.14. Nós queremos mostrar que o número de grafos em $\tilde{\mathcal{F}}(C_l, n, m, \varepsilon, \delta)$ é pequeno para ε suficientemente pequeno. Cada grafo em $\tilde{\mathcal{F}}(C_l, n, m, \varepsilon, \delta)$ ou tem menos do que $(1 - \delta')n$ vértices $(1 - v)$-crescentes em V_l ou tem mais do que $(1 - \delta')n$ tais vértices, mas pelo menos $\delta' n$ desses vértices têm menos do que $(1 - \delta)m/n$ vizinhos em V_1 que estão conectados por um caminho de tamanho $l - 1$ via $V_{l-1}, \ldots, V_2$.

Como o número de grafos $(\varepsilon, m/n^2)$-inf-regulares entre V_1 e V_l com m arestas é no máximo $\binom{n^2}{m}$, podemos aplicar o Lema 4.14 para obter um limite no número de grafos que podemos construir em $V_1, \ldots, V_l$ sem criar $(1 - \delta')n$ vértices $(1 - \nu)$-crescentes e portanto obter um limite no número de grafos em $\tilde{\mathcal{G}}(C_l, n, m, \varepsilon)$ que não têm $(1 - \delta')n$ vértices $(1 - \nu)$-crescentes. Mais precisamente, aplicamos o Lema 4.14 com $\gamma = \delta \leftarrow \delta'/2$, $\beta \leftarrow \beta/2$ e ε suficientemente pequeno para concluir que no máximo $(\beta/2)^m \binom{n^2}{m}^l$ grafos de $\tilde{\mathcal{G}}(C_l, n, m, \varepsilon)$ não satisfazem que o número de subconjuntos de tamanho $1 \geq Cn^l/m^{l-1}$ (isto é, vértices) de V_l que não são $(1 - \nu)$-crescentes é no máximo $\delta' n/2 + (\delta'/2)^1 \binom{n}{1} = \delta' n$.

Agora assuma que existem mais do que $(1-\delta')n$ vértices $(1-\nu)$-crescentes e que $\varepsilon \leq \delta/4$. Para um vértice $v \in V_l$ $(1 - \nu)$-crescente que tenha grau $d(v) \geq (1 - \delta)m/n$ em V_1, existem no máximo

$$\binom{\nu n}{d(v) - (1 - \delta)m/n} \binom{n}{(1 - \delta)m/n} \leq \nu^{d(v)-(1-\delta)\frac{m}{n}} 4^{d(v)} \binom{n}{d(v)}$$

possibilidades de se escolher arestas entre v e V_1 sem criar $(1 - \delta)m/n$ circuitos. Nós queremos construir todos os grafos $(\varepsilon, m/n^2)$-inf-regulares com $(1 - \delta')n$ vértices $(1 - \nu)$-crescentes, mas sem criar muitos circuitos. Primeiramente escolhemos os grafos entre V_i e V_{i+1} para $i = 1, \ldots, l - 1$ de forma que existem pelo menos $(1 - \delta')n$ vértices $(1 - \nu)$-crescentes. Existem no máximo $\binom{n^2}{m}^{l-1}$ maneiras de se fazer isso. Agora, nós construímos os grafos entre V_1 e V_l. Existem no máximo $(n + 1)^n \leq 2^m$ jeitos de se escolher os graus $d(v)$ de vértices $v \in V_l$, dos quais pelo menos $(1 - \varepsilon)n$ têm que ser pelo menos $(1 - \varepsilon)m/n$, já que o grafo é $(\varepsilon, m/n^2)$-inf-regular (veja o Lema 4.3). Agora escolhemos o subconjunto $B \subset V_l$ de tamanho δn dos vértices que não estão em $(1 - \delta)m/n$ circuitos. Existem no máximo $2^n \leq 2^m$ maneiras de se fazer isso. Note que B contém um subconjunto B' de tamanho pelo menos $(\delta - \varepsilon - \delta')n \geq (\delta/2)n$ de vértices v que são $(1 - \nu)$-crescentes e que satisfazem $d(v) \geq (1-\varepsilon)m/n \geq (1-\delta/2)m/n$. Com os graus e o subconjunto B já fixados, existem no máximo

$$\prod_{v \notin B'} \binom{n}{d(v)} \prod_{v \in B'} \binom{\nu n}{d(v) - (1-\delta)m/n} \binom{n}{(1-\delta)m/n}$$
$$\leq 4^m \nu^{\sum_{v \in B'} d(v) - (1-\delta)\frac{m}{n}} \binom{n^2}{m} \leq 4^m \nu^{\frac{\delta}{2} n \frac{\delta}{2} \frac{m}{n}} \binom{n^2}{m} \leq 4^{-m} \binom{\beta}{2} \binom{n^2}{m}$$

maneiras de se escolher as vizinhanças dos vértices de V_1 em V_l. O resultado segue, pois, como foi notado acima, existem no máximo 4^m maneiras de se escolher os graus e o subconjunto B. $\square$

CAPÍTULO 5

Apêndice B: Quasi-aleatoriedade esparsa

Nesse apêndice, iremos expor os resultados sobre quasi-aleatoriedade esparsa que foram efetivamente usados no Capítulo 1. Esses resultados são devidos a F. Chung e R. Graham e se encontram em [**11**].

Seja $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ uma família infinita de grafos $\{G(n)\}$ com $v(G(n)) = n$ e $\overline{p} = \overline{p}(n)$ satisfazendo $e(G(n)) = (1+o(1))\overline{p}\binom{n}{2}$ e $\overline{p}n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Por conveniência de notação, escreveremos $G = G(n)$ e $V = V(G)$ (de forma que $|V| = n$). Considere as seguintes 7 propriedades sobre uma tal família.

CIRCUITO(t): O número de t-circuitos C_t em G satisfaz

$$\#_{1-1}\{C_t \subset G\} = (1+o(1))(\overline{p}n)^t,$$

onde $\#_{1-1}\{C_t \subset G\} = |\{\rho : V(C_t) \to V(G) : \{x, y\} \in E(C_t) \Rightarrow \{\rho(x), \rho(y)\} \in E(G), \text{ e } \rho \text{ é injetora}\}|$.

CICLO(t): O número de t-ciclos (= passeios fechados com t arestas) C_t^* em G satisfaz

$$\#\{C_t^* \subset G\} = (1+o(1))(\overline{p}n)^t.$$

EIG(t): Os autovalores de G, $\lambda_i = \lambda_i(G)$ satisfazem

$$\sum_i |\lambda_i|^t = (1+o(1))(\overline{p}n)^t.$$

EIG: Os autovalores de G, $\lambda_i = \lambda_i(G)$, $\lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ satisfazem $\lambda_1 = (1+o(1))\overline{p}n$ e $\lambda_i = o(\overline{p}n)$, para $i > 1$.

DISC(1): Para todos $X, Y \subset V$, $\big|\,|E_G(X,Y)| - \overline{p}|X||Y|\,\big| = o(\overline{p}n^2)$.

DEG: Para alguma constante absoluta $c > 0$, todos os vértices v em qualquer $G \in \mathcal{G}_{\overline{p}}$ satisfazem $d(v) < c\overline{p}n$, onde $d(v)$ denota o grau de v em G.

U(t): $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ satisfaz DEG e, para alguma constante absoluta $c_0 > 1$, temos que todos os pares de vértices u, w em qualquer $G \in \mathcal{G}_{\overline{p}}$ satisfazem $e_{t-1}(u,w) < c_0\overline{p}^{t-1}n^{t-2}$, onde $e_{t-1}(u,w)$ denota o número de $(t-1)$-passeios $u_1, u_2, \ldots, u_t$ (passeios com $t-1$ *arestas*) satisfazendo $u_1 = u$ e $u_t = w$.

DEFINIÇÃO 5.1. Suponha que para algum inteiro $t \geq 2$ e alguma constante $c > 0$ temos que $\overline{p} > cn^{-1+1/(t-1)}$ e que $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ satisfaz U(t). Como em **[11]**, diremos que $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ é *fortemente t-quasi-aleatória* quando $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ também satisfaz ou CIRCUITO($2t$) ou DISC(1).

Essa definição está correta, pois em **[11]** os autores provam que, para qualquer família $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ que satisfaz as condições da Definição 5.1, as propriedades CIRCUITO($2t$) e DISC(1) são de fato equivalentes. Usaremos o restante desse capítulo para mostrar uma das direções dessa equivalência, a saber, que CIRCUITO($2t$) implica DISC(1). É essa implicação que foi usada no Capítulo 1.

TEOREMA 5.2. *Para qualquer inteiro $t \geq 1$, vale que*

$$CICLO(2t) \Rightarrow EIG(2t) \Rightarrow EIG \Rightarrow DISC(1).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $A = A(G)$ a matriz de adjacência de G. A entrada (k, k) de A^{2t} satisfaz

$$A^{2t}(k,k) = \#\{C_{2t}^* \subset G : C_{2t}^* \text{ começa no vértice } k\},$$

de forma que

$$TrA^{2t} = \sum_k A^{2t}(k,k) = \#\{C_{2t}^* \subset G\}.$$

Portanto,

$$\#\{C_{2t}^* \subset G\} = (1 + o(1))(\overline{p}n)^{2t}$$

se, e somente se,

$$TrA^{2t} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2t} = (1 + o(1))(\overline{p}n)^{2t}.$$

Em outras palavras, temos que CICLO($2t$) e EIG($2t$) são equivalentes.

Agora assuma que EIG($2t$) vale. Como

$$\lambda_1^{2t} \leq \sum_i \lambda_i^{2t} = (1 + o(1))(\overline{p}n)^{2t},$$

temos que

$$\lambda_1 \leq (1 + o(1))\overline{p}n.$$

Não é difícil ver que uma definição equivalente de λ_1 é

$$\lambda_1 = \sup_x \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Logo, pela hipótese sobre $e(G)$, temos que

$$\lambda_1 \geq \langle \tilde{u}, A\tilde{u}\rangle = \frac{2}{n}e(G) = (1 + o(1))\overline{p}n,$$

onde $\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1)^T$. Portanto,

$$\lambda_1 = (1 + o(1))\overline{p}n.$$

Como EIG$(2t)$ implica

$$\sum_i \lambda_i^{2t} = (1+o(1))(\overline{p}n)^{2t},$$

vemos que

$$\lambda_i = o(\overline{p}n),\ i > 1.$$

Vemos então que EIG$(2t)$ implica EIG.

Agora suponha que EIG vale e sejam $X, Y \subset V$. Note que

$$|E_G(X,Y)| = \langle f_X, Af_Y \rangle,$$

onde f_X e f_Y denotam os vetores característicos de X e Y, respectivamente. Escreva $f_X = \sum_j a_j \overline{e}_j$ e $f_Y = \sum_i b_i \overline{e}_i$, onde $\overline{e}_i$ denota o autovetor unitário associado a λ_i. Temos que

$$\begin{aligned}(*)\quad |\langle f_X, Af_Y\rangle - \lambda_1 a_1 b_1| &\leq |\lambda_2| \sum_{j=2}^{n} |a_j b_j| \\ &\leq |\lambda_2|\, \|f_X\|\, \|f_Y\|.\end{aligned}$$

Antes de prosseguirmos, precisamos mostrar os seguintes três fatos.

Fato 1: $\sum_{x\in V} |\deg x - \overline{p}n| = o(\overline{p}n^2)$. Para ver isso, ponha $\tilde{v} = (1,1,\ldots,1)^T$. Note que $\|A\tilde{v}\| \leq \lambda_1 \|\tilde{v}\|$. Logo,

$$\sum_x (\deg x)^2 \leq (1+o(1))\overline{p}^2 n^3.$$

Por outro lado,

$$e(G) = \frac{1}{2}\sum_x \deg x \geq (1+o(1))\overline{p}\binom{n}{2}.$$

Por Cauchy-Schwarz, temos que

$$(1+o(1))\overline{p}^2 n^3 \geq \sum_x (\deg x)^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_x \deg x\right)^2 \geq (1+o(1))\overline{p}^2 n^3,$$

que por sua vez implica

$$(**)\quad \sum_x (\deg x - \overline{p}n)^2 = o(\overline{p}^2 n^3).$$

Aplicando-se Cauchy-Schwarz mais uma vez, temos que

$$\sum_x |\deg x - \overline{p}n| = o(\overline{p}n^2),$$

como queríamos.

Fato 2: Se $\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1)^T$, então $\|\tilde{u} - \bar{e}_1\| = o(1)$. Para ver isso, escreva $\tilde{u} = \sum c_i \bar{e}_i$. Temos que

$$A\tilde{u} = \sum_i c_i \lambda_i \bar{e}_i.$$

Pelo Fato 1 e (**) acima, temos que $A\tilde{u} = pn\tilde{u} + \tilde{w}$, onde $\|\tilde{w}\| = o(pn)$. Consequentemente,

$$\tilde{w} = \sum_i c_i \lambda_i \bar{e}_i - pn\tilde{u} = \sum_i (\lambda_i - pn) c_i \bar{e}_i$$

e, portanto,

$$\sum_i (\lambda_i - pn)^2 {c_i}^2 = o(\bar{p}^2 n^2).$$

Agora, como EIG vale, temos

$$\sum_{i \neq 1} {c_i}^2 = o(1).$$

Como $\tilde{u} = c_1 \bar{e}_1 + \tilde{w}_1$ com $\|\tilde{w}_1\| = \|\bar{e}_1\| = 1$, temos que $|c_1| = 1 + o(1)$. Escolhendo-se o sinal convenientemente, temos que $c_1 = 1 + o(1)$, como queríamos.

Fato 3: Temos que $a_1 = |X|/\sqrt{n} + o(\sqrt{|X|})$ e $b_1 = |Y|/\sqrt{n} + o(\sqrt{|Y|})$. Basta observar que temos

$$\begin{aligned} a_1 = \langle f_X, \bar{e}_1 \rangle &= \langle f_X, \tilde{u} + \tilde{w} \rangle \\ &= \frac{|X|}{\sqrt{n}} + \langle f_X, \tilde{w} \rangle \\ &= \frac{|X|}{\sqrt{n}} + O\left(\|f_X\|\,\|\tilde{w}\|\right) \\ &= \frac{|X|}{\sqrt{n}} + o(\sqrt{|X|}), \end{aligned}$$

pelo Fato 2 acima, como queríamos.

Continuando a prova, vemos, de (*) e do Fato 3 acima, que

$$\big|\, |E_G(X,Y)| - \bar{p}|X|\,|Y| + o(\bar{p}n^2) \,\big| \leq |\lambda_2| \sqrt{|X|\,|Y|}$$

e, consequentemente,

$$\big|\, |E_G(X,Y)| - \bar{p}|X|\,|Y| \,\big| \leq o(\bar{p}n^2).$$

Temos então que DISC(1) vale. □

LEMA 5.3. *Se $\mathcal{G}_{\bar{p}}$ satisfaz DEG, então, para qualquer inteiro $t \geq 1$, temos que todo $G \in \mathcal{G}_{\bar{p}}$ satisfaz*

$$\sum_{u,v} |P_t(u,v)| = (1 + o(1)) \sum_{u,v} e_t(u,v),$$

onde $P_t(u,v)$ denota o conjunto dos t-caminhos (= caminhos com t arestas) que começam em u e terminam em v.

DEMONSTRAÇÃO. O número de t-passeios é pelo menos $(1+o(1))\overline{p}^t n^{t+1}$ (veja [**4, 19, 21**], ou, alternativamente, note que isso segue da propriedade (P1) no Lema 1.5). Seja W um t-passeio $v_0, v_i, \ldots, v_t$ em G que não é um t-caminho. Logo, $v_i = v_j$ para certos $i \leq j-2$ e W pode ser decomposto em 3 passeios $v_i, v_{i-1}, \ldots, v_0$, $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$ e $v_i, v_{j+1}, \ldots, v_t$. Para cada escolha de v_i, existem no máximo $(c\overline{p}n)^i(c\overline{p}n)^{j-i-1}(c\overline{p}n)^{t-j} = (c\overline{p}n)^{t-1} = c'(\overline{p}n)^{t-1}$ escolhas para esses passeios. Portanto, existem no máximo $c''\overline{p}^{t-1}n^t$ escolhas para W. Como $\overline{p}n \gg 1$, esse número de escolhas é $o(\overline{p}^t n^{t+1})$. Concluímos então que o número de t-passeios que não são t-caminhos é $o(\overline{p}^t n^{t+1})$. □

TEOREMA 5.4. *Suponha que para algum inteiro $t \geq 2$ e alguma constante $c > 0$ temos que $\overline{p} > cn^{-1+1/(t-1)}$ e que $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ satisfaz $U(t)$. Nesse caso, temos que as propriedades CIRCUITO(2t) e CICLO(2t) são equivalentes.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere $P' = M^*_{2t} - M_{2t}$, onde M^*_{2t} denota o número de $2t$-ciclos e M_{2t} o número de $2t$-circuitos. É suficiente mostrarmos que $P' = o(\overline{p}^{2t}n^{2t})$. Agora, note que se H é um $2t$-ciclo que não é um $2t$-circuito, então é possível escolhermos dois vértices u e v tais que H é a união de dois t-ciclos ligando u e v e pelo menos um desses dois t-ciclos não é um t-circuito. Observe também que, por causa de DEG, não é difícil ver que U(t) implica U($t+1$). Usando esse fato e o Lema 5.3 acima, temos que

$$\begin{aligned}
P' &\leq 2t\sum_{u,v} e_t(u,v)(e_t(u,v) - |P_t(u,v)|) \\
&\leq 2tc\overline{p}^t n^{t-1}\sum_{u,v}(e_t(u,v) - |P(u,v)|) \\
&\leq 2tc\overline{p}^t n^{t-1} o\left(\sum_{u,v} e_t(u,v)\right) \\
&\leq 2tc\overline{p}^t n^{t-1} o(\overline{p}^t n^{t+1}) \\
&= o(\overline{p}^{2t}n^{2t}),
\end{aligned}$$

que é o que queríamos mostrar. □

TEOREMA 5.5. *Suponha que para algum inteiro $t \geq 2$ e alguma constante $c > 0$ temos que $\overline{p} > cn^{-1+1/(t-1)}$ e que $\mathcal{G}_{\overline{p}}$ satisfaz $U(t)$. Nesse caso, temos que CIRCUITO(2t) implica DISC(1).*

DEMONSTRAÇÃO. Basta combinar os Teoremas 5.2 e 5.4 acima. □

CAPÍTULO 6

Apêndice C: Uma 0-afirmação correspondente

Nesse apêndice, iremos expor a prova de uma 0-afirmação para uma propriedade que generaliza a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$.

No Capítulo 1, nós mostramos uma 1-afirmação para a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ em $\mathbb{G}(N,p)$ para todo H que satisfaz a conjectura KLR. Agora, podemos pensar em colorações próprias das arestas de um grafo como colorações nas quais cada cor aparece no máximo uma vez em cada vértice. Uma generalização da propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ portanto é a seguinte. Sejam $R \geq 1$ um inteiro e H um grafo fixados. Para um grafo G, escrevemos $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{R}} H$ se, em qualquer coloração das arestas de G onde toda cor aparece no máximo R vezes em cada vértice, existe uma cópia TMC de H. A propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{pr}} H$ é portanto a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{1} H$.

Não é difícil ver que praticamente a mesma prova do Teorema 1.7 nos dá o seguinte resultado.

TEOREMA 6.1. *Sejam H um grafo com $m_2 = m_2(H) > 1$ e $R \geq 1$ um inteiro fixados. Se a conjectura KLR vale para H, então existe uma constante $C = C(R,H) > 0$ tal que, para todo $p \geq CN^{-1/m_2}$, temos que a.q.c. $G \in \mathbb{G}(N,p)$ satisfaz $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{R}} H$.* □

Além das modificações óbvias nas quais algumas expressões são multiplicadas por R, os únicos passos ligeiramente diferentes são quando mostramos as propriedades (Q1) e (Q3) para G^* no Lema 1.8. Para a (nova) propriedade (Q1), usamos o Lema 1.6. Já a (nova) propriedade (Q3) segue da mesma propriedade (Q3) para colorações próprias multiplicando-se a constante c por R. Convidamos o leitor interessado a preencher os detalhes.

Agora, em [5], os autores mostram uma 0-afirmação sobre uma propriedade anti-Ramsey para colorações b-limitadas (isto é, colorações nas quais cada cor aparece no máximo b vezes no total, onde b é um inteiro fixo), para todo H (com $m_2(H) > 1$) e todo b que é suficientemente grande. Exatamente a mesma prova nos dá uma 0-afirmação para a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{R}} H$ para todo H e todo R suficientemente grande. Mais precisamente, nós temos o seguinte resultado (note que o limitante inferior é o mesmo que o limitante superior do Teorema 6.1 acima, ou seja, $\Theta\left(N^{-1/m_2(H)}\right)$, e, logo, concluímos que essa função é uma função limiar para a propriedade $G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{R}} H$ para todo H com $m_2(H) > 1$ que satisfaz KLR e todo R suficientemente grande).

TEOREMA 6.2. [5] *Para todo H com $m_2 = m_2(H) > 1$, existe uma constante $R_0 = R_0(H)$ tal que, para todo $R \geq R_0$, existe $c_0 = c_0(R, H)$ tal que, se $p = c_0 N^{-1/m_2}$, então $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}[G \xrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{R}} H] = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja então $p = c_0 N^{-1/m_2}$, onde c_0 é uma constante pequena o suficiente. Coloque $\mathcal{S}(H) = \{H' \subset H : H' \neq H \text{ e } v(H') \geq 3\}$. Note que podemos assumir que

$$d_2(H) > d_2(H'), \text{ para todo } H' \in \mathcal{S}(H).$$

De fato, se esse não é o caso, então $m_2(H) = d_2(H')$ para algum subgrafo próprio H' de H e podemos então mostrar que a.q.c. $G_{N,p} \in \mathbb{G}(N,p)$ é tal que é possível colorirmos G como queremos sem que haja cópias TMC de H', o que claramente implica que não existem cópias TMC de H.

Temos portanto que se $H' \subset H$ com $H' \neq H$ e $v(H') \geq 3$, então

$$\delta_{H'} = \frac{e(H) - e(H')}{d_2(H)} - v(H) + v(H') = (v(H') - 2)\left(1 - \frac{d_2(H')}{d_2(H)}\right) > 0.$$

Defina

$$\delta_H = \min\left\{\delta_{H'} : H' \in \mathcal{S}(H)\right\}.$$

Seja agora Γ_H o grafo cujos vértices são as cópias de H em $G_{N,p}$ e no qual dois vértices H_1 e H_2 são ligados por uma aresta sse H_1 e H_2 têm pelo menos uma aresta em comum. Dada uma componente conexa $C = \{H_1, \ldots, H_l\}$ de Γ_H, o *grafo-base* de C é o subgrafo G_C de $G_{N,p}$ cujo conjunto de vértices é $V_C = \bigcup_{i=1}^{l} V(H_i)$ e cujo conjunto de arestas é $E_C = \bigcup_{i=1}^{l} E(H_i)$.

Dizemos que uma componente conexa C de Γ_H é *segura* se o subgrafo G_C é R_0-degenerado, onde

$$R_0 = R_0(H) = \Delta(H) + d_2(H)v(H) - e(H) + 1.$$

Lembre que G_C é R_0-*degenerado* se existe uma ordenação de $V_C = (v_1, \ldots, v_l)$, $l = |V_C|$, tal que cada v_i tem no máximo R_0 vizinhos em $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$. Antes de prosseguirmos, nós precisamos mostrar o seguinte lema.

LEMA 6.3. [5] *Temos que a.q.c. $G_{N,p} \in \mathbb{G}(N,p)$ é tal que toda componente conexa C de Γ_H é segura.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere o seguinte processo no qual um conjunto de vértices $V_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{v(H)}\}$ é escolhido e seja E_0 o conjunto de arestas induzido por V_0. Se E_0 contém uma cópia de H, nós iremos fazer uma busca que irá gerar um conjunto de arestas E_{final} que contém E_C, onde C é a componente conexa correspondente de Γ_H. Nós geramos conjuntos V_i, E_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ através de uma iteração dos seguintes dois passos até que $V_{k+1} = \emptyset$, depois do passo A abaixo.

A. Para cada conjunto de $v(H)$ vértices que contém algum $z \notin V^{(k)} = \bigcup_{i=0}^{k} V_i$ e algum $e \in E_k$, determine se esse conjunto de vértices forma uma cópia de H. Se esse é o caso, nós adicionamos $V(H) \setminus V^{(k)}$ a V_{k+1}

e $E(H) \setminus E^{(k)}$ a E_{k+1} e prosseguimos ($E^{(k)} = \bigcup_{i=0}^{k} E_i$). É importante ressaltar que uma vez que um vértice z é adicionado a V_{k+1}, nós nunca mais verificamos o status de nenhum outro conjunto de vértices que contém z.

B. Para cada par de vértices consistindo de um vértice z em V_{k+1} e um vértice a em $V^{(k+1)}$, determine se a aresta $\{z, a\}$ pertence a $G_{N,p}$. Se esse é o caso, adicione essa aresta a E_{k+1}.

Note que esta busca impõe um condicionamento especial sobre conjuntos de arestas em $G_{N,p}$. Em qualquer passo, o status de algumas arestas é verificado e ainda mais estamos condicionando sobre o evento que alguns conjuntos de arestas não aparecem. Em qualquer condicionamento desse tipo, temos, pela desigualdade FKG, que a probabilidade que qualquer conjunto de k arestas (cujo status ainda não foi verificado) apareça em $G_{N,p}$ é no máximo p^k. Note também que depois do passo B acima, nós teremos que o status de todas as arestas com pontas em $V^{(k+1)}$ foi verificado. Seja E_{final} o conjunto de arestas gerado quando o processo acima termina.

Nós interpretamos esse processo como um processo de ramificação no qual as arestas são os indivíduos. Aqui temos as seguintes três maneiras pelas quais uma aresta $e \in E_k$ pode gerar filhas.

1. Cópias de H encontradas no passo A tais que $V(H) \cap V^{(k)} = e$.

2. Cópias de H encontradas no passo A tais que $|V(H) \cap V^{(k)}| \geq 3$.

3. Arestas adicionadas no passo B.

Claramente, existe uma ambiguidade em se atribuir paternidade às arestas dos tipos 2 e 3. Isso é feito de maneira arbitrária. Sejam A_i, B_i e C_i o número de arestas dos tipos 1, 2 e 3, respectivamente, que são filhas da i-ésima aresta a ser adicionada a E_{final}. Por simplicidade, as arestas que estão em E_0, mas não na cópia inicial de H, são levadas em conta incrementando-se os C_i's apropriados.

Coloque $K = C_0 \log N$, onde $C_0 = C_0(c_0, H)$ é uma constante grande o suficiente. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ váriáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid), todas do tipo $Bi(N^{v(H)-2}, p^{e(H)-1})$. Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ váriáveis aleatórias iid, todas do tipo

$$\sum_{H' \in S(H)} Bi\left(K^{v(H')-2} N^{V(H)-v(H')},\, p^{e(H)-e(H')}\right).$$

Sejam ainda $Z_1, Z_2, \ldots$ váriáveis aleatórias iid, todas do tipo $Bi(2K, p)$. Vemos que A_i, B_i e C_i são dominadas por $(e(H)-1)X_i$, $(e(H)-1)Y_i$ e Z_i, respectivamente, para $i \leq K$. Temos que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{K}(e(H)-1)X_i\right] = K(e(H)-1)N^{v(H)-2}p^{e(H)-1} = K(e(H)-1)c_o^{e(H)-1}.$$

Logo, se c_0 é suficientemente pequena, a desigualdade de Chernoff implica

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{K}(e(H)-1)X_i \geq K - e(H) - (d_2(H)v(H) - e(H) + 1) - \frac{e(H)-1}{\delta_H}\left(v(H) - \frac{e(H)}{d_2(H)} + 1\right)\right]$$
$$= O\left(N^{e(H)/d_2(H)-v(H)-1}\right).$$

A soma $\sum_{i=1}^{K} Y_i$ tem distribuição

$$\sum_{H' \in \mathcal{S}(H)} Bi\left(K \cdot K^{v(H')-2}N^{v(H)-v(H')}, p^{e(H)-e(H')}\right).$$

Seja $\mathcal{I}$ o conjunto das sequências de inteiros não-negativos $(i_{H'} : H' \in \mathcal{S}(H))$ tais que a soma dos $i_{H'}$'s é $\left\lceil \frac{1}{\delta_H}\left[v(H) - \frac{e(H)}{d_2(H)} + 1\right]\right\rceil$. A probabilidade que $\sum_{i=1}^{K}(e(H)-1)Y_i$ é pelo menos $\frac{e(H)-1}{\delta_H}\left[v(H) - \frac{e(H)}{d_2(H)} + 1\right]$ é limitada superiormente por

$$\sum_{(i_{H'})\in\mathcal{I}} \prod_{H'\in\mathcal{S}(H)} \binom{K \cdot K^{v(H')-2}N^{v(H)-v(H')}}{i_{H'}} \left(p^{e(H)-e(H')}\right)^{i_{H'}}$$
$$< \sum_{(i_{H'})\in\mathcal{I}} \prod_{H'\in\mathcal{S}(H)} K^{v(H)i_{H'}} \left(N^{v(H)-v(H')}p^{e(H)-e(H')}\right)^{i_{H'}}$$
$$< \sum_{(i_{H'})\in\mathcal{I}} \prod_{H'\in\mathcal{S}(H)} K^{v(H)i_{H'}} N^{-\delta_{H'}i_{H'}}$$
$$< K^{O(1)} \sum_{(i_{H'})\in\mathcal{I}} \prod_{H'\in\mathcal{S}(H)} N^{-\delta_{H'}i_{H'}}$$
$$\leq K^{O(1)} \sum_{(i_{H'})\in\mathcal{I}} N^{e(H)/d_2(H)-v(H)-1}.$$

Note que, por definição, temos que $\delta_H \leq \delta_{H'}$. Como existem $|I| = K^{O(1)}$ sequências, vemos que

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{K}(e(H)-1)Y_i \geq \frac{e(H)-1}{\delta_H}\left(v(H) - \frac{e(H)}{d_2(H)} + 1\right)\right] \leq K^{O(1)}N^{e(H)/d_2(H)-v(H)-1}.$$

Finalmente, temos que

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{K} Z_i \geq d_2(H)v(H) - e(H) + 1\right] \leq \binom{2K^2}{d_2(H)v(H) - e(H) + 1} p^{d_2(H)v(H)-e(H)+1}$$
$$= K^{O(1)}N^{e(H)/d_2(H)-v(H)-1/d_2(H)}.$$

Como o número esperado de cópias iniciais de H é no máximo $N^{v(H)}p^{e(H)} = c'N^{v(H)-e(H)/d_2(H)}$, a cota da união aplicada às estimativas superiores acima envolvendo $(e(H)-1)X_i$, $(e(H)-1)Y_i$ e Z_i mostra que, com probabilidade tendendo a 1, toda componente conexa de Γ_H tem no máximo K arestas. A ordenação R_0-degenerada desejada segue da última desigualdade acima. $\square$

Agora, se toda componente conexa de Γ_H é segura e $R \geq R_0$, então podemos colorir as arestas de $G_{N,p}$ de forma que cada cor apareça no máximo R vezes por vértice e de forma que cada cópia de H não é TMC. De fato, para pintar uma componente conexa E_C, nós simplesmente usamos uma nova cor em toda aresta de v_i a $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$, para $1 \leq i \leq |V_C|$. Pelo Lema 6.3, temos que cada cor aparece no máximo R vezes por vértice. Mais ainda, cada cópia H^* de H não é TMC, pois pelo menos duas arestas da mesma cor incidem no último vértice de H^* na ordenação (note que aqui usamos que H tem grau mínimo pelo menos 2, já que estamos assumindo que $d_2(H) = m_2(H) > 1$ e que $d_2(H) > d_2(H')$, para todo $H' \in \mathcal{S}(H)$). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Alon, N.; Jiang, T.; Miller, Z.; Pritkin, D. *Properly colored subgraphs and rainbow subgraphs in edge-colorings with local constraints*. Random Structures and Algorithms **23** (2003), no. 4, 409–433.

[2] Alon, N.; Lefmann, H.; Rödl, V. *On an anti-Ramsey type result.* Colloq. Math. Soc. Janós Bolyai 60: Sets, Graphs and Numbers. Budapest, 1991, 9–22.

[3] Babai, L. *An anti-Ramsey theorem.* Graphs and Combinatorics **1** (1985), 23–28.

[4] Blakley, G.R.; Roy, P. *Hölder type inequality for symmetric matrices with non-negative entries.* Proc. AMS **16** (1965), 1244–1245.

[5] Bohman, T.; Frieze, A.; Pikhurko, O; Smyth, C. *Anti-Ramsey properties of random graphs.* J. Comb. Th. Ser. B, *in press.*

[6] Bollobás, B. *Threshold functions for small subgraphs.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **90** (1981), 197–206.

[7] Erdős, P.; Rado, R. *A combinatorial theorem.* Journal of the London Math. Soc. **25** (1950), 249–255.

[8] Erdős, P.; Tuza, Z. *Rainbow subgraphs in edge-colorings of complete graphs. Quo vadis, graph theory?*, Ann. Discrete Math. **55** (1993), 81–88.

[9] Gerke, S.; Kohayakawa, Y.; Rödl, V.; Steger, A. *Small subsets inherit sparse ε-regularity.* J. Comb. Th. Ser. B **97** (2007), no. 1, 34–56.

[10] Gerke, S.; Steger, A. *The sparse regularity lemma and its applications.* In Surveys in combinatorics, vol. 327 of London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 148–188.

[11] Graham, R.; Chung, F. *Sparse quasi-random graphs.* Combinatorica **22** (2002), no. 2, 217–244.

[12] Graham, R.; Rothschild, B.; Spencer, J. *Ramsey Theory. Second edition.* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, New York, 1990.

[13] Haxell, P.; Kohayakawa, Y. *On an anti-Ramsey property of Ramanujan graphs.* Random Structures and Algorithms **6** (1995), no. 4, 417–431.

[14] Jamison, R.E.; Jiang, T.; Ling, A.C.H. *Constrained Ramsey numbers of graphs.* Journal of Graph Theory **42** (2003), no. 1, 1–16.

[15] Janson, S. *Poisson approximation for large deviations.* Random Structures and Algorithms **1** (1990), no. 2, 107–122.

[16] Janson, S.; Łuczak, T.; Ruciński, A. *Random Graphs.* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 2000.

[17] Kim, J.H.; Vu, V.H. *Concentration of multivariate polynomials and its applications.* Combinatorica **20** (2000), no. 3, 417–434.

[18] Kreuter, B. *Threshold functions for asymmetric Ramsey properties with respect to vertex colorings.* Random Structures and Algorithms **9** (1996), no. 3, 335–348.

[19] London, D. *Inequalities in quadratic forms.* Duke Math. J. **83** (1966), 511–522.

[20] Łuczak, T.; Ruciński, A.; Voigt, B. *Ramsey properties of random graphs.* J. Comb. Th. Ser. B **56** (1992), 55-68.

[21] Mulholland, H.P.; Smith, C.A.B. *An inequality arising in genetical theory.* Amer. Math. Monthly **66** (1969), 673–683.

[22] Kohayakawa, Y.; *Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs.* In Foundations of Computational Mathematics, F. Cucker and M. Schub, Eds., Springer-Verlag, Berlin, 1997, 216–230.

[23] Kohayakawa, Y.; Kreuter, B. *Threshold functions for asymmetric Ramsey properties involving cycles.* Random Structures and Algorithms **11** (1997), 245–276.

[24] Kohayakawa, Y.; Łuczak, T. *Sparse anti-Ramsey graphs.* J. Comb. Th. Ser. B **63** (1995), no. 1, 146–152.

[25] Kohayakawa, Y.; Łuczak, T.; Rödl, V. *On K^4-free subgraphs of random graphs.* Combinatorica **17** (1997), no. 2, 171–213.

[26] Kohayakawa, Y.; Rödl, V.; Schacht, M. *The Turán theorem for random graphs.* Comb. Prob. Comp. **13** (2004), 61–91.

[27] McDiarmid, C. *On the method of bounded differences.* In Surveys in combinatorics. Proceedings, Norwich, vol. 141 of London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989, 148–188.

[28] Rödl, V; Rucinški, A. *Threshold functions for Ramsey properties.* J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 4, 917–942.

[29] Rödl, V; Ruciński, A. *Lower bounds on probability thresholds for Ramsey properties.* Combinatorics, P. Erdős is eighty, vol. 1, Bolyai Soc. Math. Stud., 1993, 317–346.

[30] Rödl, V.; Tuza, Z. *Rainbow subgraphs in properly edge-colored graphs.* Random Structures and Algorithms **3** (1992), no. 2, 175–182.

[31] Ruciński, A.; Truszczyński, M. *A note on local colorings of graphs.* Discrete Mathematics **164** (1997), 251–255.

[32] Schacht, M. *A Turán theorem for random graphs.* Master's Thesis (2002), Department of Mathematics and Computer Science, Emory University.

[33] Sudakov, B.; Vondrák, J. *Nearly optimal embedding of trees.* E-print in arXiv, arXiv:0707.2079v1 (preliminary version, 2007).