O FORCING DE FRAÏSSÉ

(UM ESTUDO COMPARATIVO)

A. M. SETTE

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, para a obtenção do Grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Newton Carneiro Afonso da Costa

Durante o programa de Doutoramento o autor recebeu suporte financeiro dos convênios Finep - UFPe e Capes.

Outubro de 1977.

SÃO PAULO

À Neide
Jan
Lara e Fabiana.

ABSTRACT

Forcing was created by P. Cohen to prove some independence results in set theory. Recently A. Robinson (1969) and R. Fraïssé (1970) applied this method to model theory.

We shall study Fraïssé's forcing and compare it to Robinson's.

In Chapter III we give sufficient conditions on a multirelation (relational system) M for the completness and χ_o-categoricity of the theory M^s forced by M. We also give a charaterization of the relations general to M (this was simultaneously obtained by B. Poizat) and end the chapter with a condition on M_o and M_1 for the equality of M_o^s and M_1^s.

In Chapter IV we show first that Fraïssé's forcing may be obtained by means of Robinson's and then define a new forcing containing the forcing of Fraïssé and the forcing of Robinson as particular and extreme cases.

INTRODUÇÃO

O método de "forcing" foi introduzido por P. Cohen com a finalidade explícita de obter certos resultados de independência na teoria dos conjuntos. Esta técnica se mostrou muito eficiente e foi largamente usada por outros matemáticos com a mesma finalidade. Recentemente A. Robinson (1970) e R. Fraïssé (1971) retomaram o estudo deste método, no contexto da teoria dos modelos. Com relação ao "forcing" de Robinson verificou-se que este é, em certo sentido, uma extensão do operador companheiro semântico que a certas teorias T associa uma outra teoria T^*. No que diz respeito ao "forcing" de Fraïssé a situação difere bastante. Fraïssé define o "forcing" de tal modo que a cada estrutura $M = <|M|, R_1, \ldots, R_k>$ fica associada uma teoria M^S, sendo S um predicado previamente acrescentado à linguagem. Muito embora saiba-se pouco a respeito da teoria M^S pode-se afirmar que esta liga-se bem mais à estrutura M, que à sua teoria Th(M). Tudo indica ser M^S "uma certa medida" de algum invariante de estrutura, no entanto, o problema de precisar tal invariante resta ainda a resolver.

O propósito deste trabalho é de estudar o "forcing" de Fraïssé e de o comparar com o de Robinson. Para tanto in troduzimos no Capítulo I as notações e noções necessárias da Teoria dos Modelos e no Capítulo II definimos o "forcing" de Robinson enunciando os resultados mais importantes conhecidos a respeito.

Iniciamos o Capítulo III definindo o "forcing" de Fraïssé, em seguida estabelecemos os resultados do parágrafo 3.2 e 3.3, devidos à Fraïssé. A demonstração da Proposição 3.2.5 difere da originalmente dada (por Fraïssé; cf [5]), válida apenas no caso de ser M enumerável. Procurando conhecer melhor a teoria M^S, em alguns casos particulares, obtemos, ainda neste Capítulo, parágrafo 3.4, condições sobre M afim de que M^S seja completa ou χ_o-categórica e damos uma caracterização ("a la Robinson - Barwise") dos modelos gerais de M^S. Este último resultado foi também obtido por B. Poizat (ver [20]). Finalizamos o Capítulo III estabelecendo (parágrafo 3.5) uma relação que uma vez satisfeita por duas estruturas M_o e M_1 acarreta a igualdade das teorias (forçadas) M_o^S e M_1^S.

No Capítulo IV mostramos primeiramente que o "forcing" de Fraïssé pode ser obtido através do "forcing" de Robinson. Em seguida definimos um novo "forcing" que contém a ambos como casos particulares e estremos. Finalizamos por generalizar a Proposição (2.2.3).

Observemos que em [20] B. Poizat chama atenção sobre o fato de ser possível obter-se o forcing de Robinson através do forcing de Fraïssé. Não é, contudo, apresentada nenhuma demonstração.

Queremos agradecer aos Professores Newton C. A. da Costa e Roland Fraïssé pela orientação e incentivo que nos deram durante a realização deste trabalho; aos Professores Rolando Chuaqui e Jacob Zimbarg pelas sugestões dadas e, finalmente, a todos aqueles que colaboraram conosco direta ou indiretamente.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 1

§1.1 - Preliminares e Notações - Por $\mathcal{L}$ (ou $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$,...) denotaremos uma linguagem de 1ª ordem com igualdade, contendo $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ como símbolos lógicos, um número finito $R_1^{n_1}, \ldots, R_k^{n_k}$ de (símbolos) de predicados, podendo conter constantes e sem símbolos funcionais. Supõe-se a noção de fórmula em $\mathcal{L}$ dada de modo usual (com utilização de parênteses) e estas serão notadas pelas letras gregas minúsculas ϕ e ψ com ou sem índice.

Seja ϕ uma fórmula. Diremos que ϕ é *básica* se ela é atômica ou a negação de uma fórmula atômica. ϕ será dita *livre* (ou *livre de quantificadores*) se nela não ocorre nenhum dos símbolos lógicos $\forall$ e $\exists$. Suponhamos agora que ϕ é uma fórmula em forma normal prenex. Por um *bloco de quantificadores* de ϕ entenderemos uma sequência maximal de quantificadores de mesma espécie que nela ocorre. ϕ será denominada uma $\exists_n$*-fórmula* ($\forall_n$*-fórmula*) se contém m blocos de quantificadores, com $m \leq n$, sendo o 1º quantificador existencial (universal). No caso de n ser "pequeno" usaremos a notação $\exists$-fórmula, $\exists\forall$-fórmula, $\exists\forall\exists$-fórmula em lugar de $\exists_1$-fórmula, $\exists_2$-fórmula e $\exists_3$-fórmula. (o mesmo se dando para as $\forall_n$-fórmulas).

ϕ será dita *existencial* se for básica ou construída de fórmulas básicas por utilização sucessiva da conjunção $\wedge$, disjunção $\vee$, e do quantificador existencial $\exists$. Se ϕ for da forma $\neg\psi$ com ψ existencial diremos que ϕ é *universal*. Demonstra-se que toda fórmula existencial (universal) é logicamente equivalente a uma $\exists$-fórmula ($\forall$-fórmula).

A *complexidade* de uma fórmula ϕ é definida como sendo o número de ocorrências dos símbolos lógicos em ϕ.

No que se segue, a notação *see* abrevia a expressão "se e somente se".

§1.2 - Teorias e estruturas - Por uma *teoria* T (em $\mathcal{L}$) entenderemos um subconjunto consistente de sentenças de $\mathcal{L}$. Usaremos a notação $T \vdash \phi$ para significar que ϕ é um teorema de T. O conjunto de todas as $\forall_n$-fórmulas ($\exists_n$-fórmulas) dedutíveis de T será denotado por $T_{\forall_n}$ ($T_{\exists_n}$).

Uma *estrutura ou multirelação* M é uma $(\ell+1)$-upla $<|M|, S_1^{m_1}, \ldots, S_\ell^{m_\ell}>$ onde $|M|$ é um conjunto não vazio e $S_i^{m_i}$ são relações m_i-arias definidas em $|M|$; $i=1,\ldots,\ell$, i.é., $S_i^{m_i}$ são funções do produto cartesiano $|M|^{m_i}$ em

$\{0,1\}$. É claro que para cada i, $S_i^{m_i}$ é canonicamente identificável com um subconjunto do produto cartesiano $|M|^{m_i}$ do qual é a função característica. A ℓ-upla $\tau=<m_1,\ldots,m_\ell>$ designa o *tipo de* M.

Seja $R_1^{n_1},\ldots,R_k^{n_k}$ os predicados de $\mathcal{L}$. Diremos que $M = <|M|,S_1^{m_1},\ldots,S_\ell^{m_\ell}>$ *é adequada para* $\mathcal{L}$ (ou que $\mathcal{L}$ *é adequada para* M) se existe uma bijeção $f : \{1,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,\ldots,\ell\}$ tal que $n_i=m_{f(i)}$; $i=1,\ldots,k$. Dada uma multirelação M e uma linguagem adequada para M as noções de interpretação, satisfatibilidade, validade, modelo, etc., são as usuais. Usaremos, freqüentemente, os mesmos símbolos $R_i^{n_i}$; $i=1,\ldots,k$ para denotar os predicados de $\mathcal{L}$ e as relações que os interpretam em M.

Uma classe Σ de estruturas adequadas para $\mathcal{L}$ é dita *indutiva* se para toda cadeia crescente $\{M_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ de elementos de Σ (i.é., $M_\alpha \subsetneq M_\beta$ sempre que $\alpha<\beta<\gamma$; α,β,γ designam ordinais) tem-se que $\bigcup_{\alpha<\gamma} M_\alpha$ é ainda uma estrutura de Σ, onde $\bigcup_{\alpha<\gamma} M_\alpha$ designa o limite indutivo de $\{M_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$. Uma *teoria* T *é indutiva* se a classe de seus modelos é uma classe indutiva. É um fato bem conhecido que uma teoria T é indutiva see pode ser axiomatizada por

$\forall\exists$-fórmulas (ver, por exemplo, [3]).

Em tudo que se segue utilizaremos, de modo implícito, os resultados clássicos da teoria dos modelos, em particular os seguintes:

Teorema da completude - Um conjunto T de sentenças é consistente see admite modelo.

Teorema da compacidade - Um conjunto T de sentenças tem modelo see cada um de seus subconjuntos finitos possui modelo.

Como consequência destes dois resultados deduz - se facilmente que: Um conjunto T de sentenças é consistente see cada um de seus subconjuntos finitos é consistente.

Dadas as linguagens $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ diremos que $\mathcal{L}'$ é uma *expansão de* $\mathcal{L}$ se $\mathcal{L}'$ for obtida acrescentando-se a $\mathcal{L}$ novas constantes e novos predicados. Seja $\mathcal{L}'$ uma expansão de $\mathcal{L}$ que se obtém pela adjunção do conjunto A de constantes e dos predicados $S_1^{m_1},\ldots,S_r^{n_r}$. Neste caso $\mathcal{L}'$ será denotada por $\mathcal{L}(A,S_1^{n_1},\ldots,S_r^{n_r})$. Se $A=\Phi$ ou $r=0$, usaremos ainda as notações $\mathcal{L}(S_1^{n_1},\ldots,S_r^{n_r})$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente. Uma expansão $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ é dita *normal* se o conjunto A for infinito. Esta noção foi in -

troduzida por Robinson-Barwise em [1] e justifica-se devido a Proposição 2.2.3.

Finalizaremos este parágrafo com duas noções dadas por Fraïssé que nos serão úteis no Capítulo III.

Seja M uma multirelação. Diremos que M é *homogênea* se todo automorfismo (local) definido sobre um conjunto finito de $|M|$ pode ser extendido a um automorfismo de M. Se M é enumerável (i.é., $|M|$ é enumerável) diremos que M é *rica* se qualquer outra multirelação enumerável (do mesmo tipo) é isomorfa a uma subestrutura de M.

<ins>Proposição</ins>-(Fraïssé) Se M e M' são multirelações enumeráveis, ricas e homogêneas, M e M' são isomorfas (ver [6]).

§1.3 - <ins>Completamento semântico e companheiro semântico</ins> - As noções que passaremos a definir foram, em sua maioria, originalmente tratadas por A. Robinson e motivadas pelo estudo (metamatemático) da relação existente entre a teoria dos corpos e a teoria de seus fechos algébricos.

Diremos que a fórmula ϕ *de* $\mathcal{L}$ *está definida* (ou *tem sentido*) na estrutura M adequada para ϕ se toda constante de $\mathcal{L}$ que ocorre em ϕ é um nome de um elemento de $|M|$. Em particular se $\mathcal{L}$ não tem constantes toda fórmula de $\mathcal{L}(|M|)$ tem sentido em M (tomando-se a interpretação óbvia das constantes).

Definição 1.4.1 - Sejam M e M' estruturas adequadas para $\mathcal{L}$ e M subestrutura de M'. Diremos que M é *existencialmente completa em* M' se toda sentença existencial ϕ definida em M e verdadeira em M' é verdadeira em M. Seja agora Σ uma classe de estruturas adequadas para $\mathcal{L}$ e $M \in \Sigma$. M será dita *existencialmente completa em* Σ se M for existencialmente completa em M' qualquer que seja M' extensão de M em Σ.

Se Σ é a classe dos corpos, a classe das estruturas existencialmente completas correspondente é precisamente a dos corpos algebricamente fechados. Dada uma classe qualquer Σ nem sempre existe uma estrutura de Σ existencialmente completa (em Σ). Por exemplo se Σ é a classe constituída pelos corpos da forma $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$, com $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, Σ não admite estrutura existencialmente completa. O resultado seguinte dá condições sobre Σ a fim de nos assegurar a existência de estruturas existencialmente completas.

Proposição 1.4.2 - Se Σ é uma classe indutiva, então cada estrutura $M \in \Sigma$ é subestrutura de uma estrutura $M' \in \Sigma$ existencialmente completa.

Definição 1.4.3 - Seja T uma teoria em $\mathcal{L}$ e M uma estrutura adequada para $\mathcal{L}$. Dizemos que M é *existencialmente completa relativamente a* T (ou em T) se:

(i) M é subestrutura de um modelo de T;

(ii) M é existencialmente completa em todo modelo M' de T que estende M.

É fácil verificar que M é existencialmente completa em T see é existencialmente completa na classe dos modelos de $T_\forall$, visto que M é subestrutura de um modelo de T see M é modelo de $T_\forall$ ou seja a classe dos modelos de $T_\forall$ é a classe das subestruturas de modelos de T.

Definição 1.4.4 - Sejam T e T^* teorias em $\mathcal{L}$. Dizemos que T^* é *semanticamente consistente* (ou *modelo consistente*) relativamente a T se todo modelo de T pode ser estendido a um modelo de T^*, i.é., see para cada modelo M de T, $T^* \cup D(M)$ é consistente (D(M) denota o diagrama de M) ou, ainda, se $T_\forall \supset (T^*)_\forall$.

Definição 1.4.5-(A. Robinson) Sejam T e T^* duas teorias em $\mathcal{L}$. T^* é dita *semanticamente completa relativamente a* T se dado um modelo M de T subestrutura dos modelos M' e M'' de T^*, então toda sentença ϕ definida em M é satisfeita em M' see é satisfeita em M". De forma equivalente se para todo modelo M de T a teoria $T^* \cup D(M)$ é completa (em $\mathcal{L}(|M|)$). T^* será dita *semanticamente completa* (ou *modelo completa*) see T^* for semanticamente completa relativamente a si mesma. Finalmente, se $T^* \supset T$ é modelo consistente relativamente a T e modelo completa, então T^* é denominada um *completamento semântico* de T.

Exemplo: Se T é um conjunto de axiomas para a classe dos corpos e $T^* \supset T$ uma axiomática para a classe dos corpos algebricamente fechados, então T^* é um completamento semântico de T. O resultado seguinte nos permite afirmar que o completamento semântico de uma teoria é único, i.é., dois completamentos semânticos de uma mesma teoria são logicamente equivalentes.

Proposição 1.4.6 - Se T' e T" são completamentos semânticos da mesma teoria T, então o fecho lógico de T' e T" são os mesmos.

Proposição 1.4.7 - Uma teoria T é semanticamente completa see dados dois modelos de T, M e M' tais que M é subestrutura de M', então M é existencialmente completo em M'.

<u>Proposição 1.4.8</u> - Se T é semanticamente completa, T é axiomatizável por $\forall\exists$-sentenças e, portanto, indutiva.

A teoria dos corpos formalmente reais (ver [2]) não admite completamento semântico. Motivado por este exemplo Eli Bers introduziu o seguinte conceito:

<u>Definição 1.4.9</u> - Sejam T e T^* teorias em $\mathcal{L}$. Diremos que T^* é um *companheiro semântico* (ou *modelo-companheiro*) de T se:

(i) T e T^* são modelo-consistentes uma relativamente à outra.

(ii) T^* é semanticamente completa.

Todo completamento semântico T^* é um companheiro semântico. A teoria dos corpos formalmente reais mostra que a noção de companheiro semântico é uma generalização própria da noção de completamento semântico.

Os resultados mais importantes sobre esse conceito são os seguintes:

<u>Proposição 1.4.10</u> - Seja T uma teoria em $\mathcal{L}$. Tem se que:

(i) Se T^* é um companheiro semântico de T, en tão M é modelo de T^* see M é existencialmente completo em T.

(ii) Se T^* e T' são companheiros semânticos de T, então T^* e T' têm o mesmo fecho lógico.

(iii) Se a classe das estruturas existencialmente completas de T for uma classe de 1ª ordem generalizada (elementarmente generalizada segundo [2]), então $\bigcap_M Th(M)$ é o companhei- semântico de T, onde M percorre a classe das estruturas existencialmente completas de T.

Proposição 1.4.11 - Sejam T e V teorias em $\mathcal{L}$; T^* e V^* seus respectivos companheiros semânticos. Tem-se, então que:

(i) $T^*=(T_\forall)^*$

(ii) $(T^*)_\forall=T_\forall$

(iii) $T^{**}=T^*$

(iv) $T_\forall=V_\forall$ see $T^*=V^*$

(v) $T^* \supset \bigcap_M Th(M)$, onde M percorre a classe das estruturas existencialmente completas de T.

(vi) T tem a propriedade da imersão see T^* é completa (uma teoria T tem a propriedade da imersão se dados dois modelos M_o, M_1 de T existe um outro M_2 no qual ambos se imergem).

As demonstrações das Proposições enunciadas nesse parágrafo encontram-se, por exemplo, em [9].

Algumas teorias importantes como a dos grupos, dos anéis de divisão, dos números e outras não admitem companheiro semântico (ver [10], [19], [11] e [1]). Este fato, em vista da Proposição 1.4.10, implica ser a classe das estruturas existencialmente completas destas teorias não axiomatizáveis em 1ª ordem. Desta forma não existe uma situação (formal) análoga à dos corpos e seus fechos algébricos. O forcing, a ser estudado no próximo Capítulo, fornece um método que nos permite obter, em alguns casos, uma classe de estruturas, construída a partir de T que representa, de certa forma, para os modelos de T o mesmo papel que a classe dos corpos algebricamente fechados representa para a classe dos corpos.

\- * -

CAPÍTULO 2

FORCING SEGUNDO ROBINSON

§2.1 - Introdução - O estudo do forcing de Robinson teve início em 1970, com os trabalhos: "Forcing in Model Theory" [12], "Infinite forcing in Model Theory" [13] e "Completing Theory by forcing" [1].

Muito embora o forcing infinito tenha sua importância, sobretudo no estudo da metamatemática da álgebra, estaremos, contudo, devido aos nossos propósitos, interessados apenas no forcing finito. Assim, trataremos somente deste caso e a palavra "forcing" significará em tudo que se segue, a menos de menção explícita em contrário, "forcing finito".

Robinson, escolhendo um caminho puramente sintático, definiu o forcing como sendo uma relação (meta-relação) entre conjuntos finitos de sentenças básicas (daí, forcing finito) e sentenças quaisquer. Com isto, associa à cada teoria T uma teoria T^f denominada forcing-companheiro de T que, inesperadamente, coincide com a teoria T^*, modelo-companheiro de T, quando esta última existe. Este fato deu maior objetividade ao estudo deste forcing, uma vez que se tornou possível obter, por este método, completamentos semânticos de certas teorias.

§2.2 - O forcing de Robinson

Definição 2.2.1 - Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem, T uma teoria em $\mathcal{L}$ e A um conjunto de constantes distintas das de $\mathcal{L}$. Uma *condição em* $\mathcal{L}(A)$ *relativa a* T é um conjunto finito P de sentenças básicas tal que $T \cup P$ seja consistente. O conjunto das condições de $\mathcal{L}(A)$ relativas a T será denotado por C(T,A) ou, simplesmente, C(T) se $A=\Phi$. Seja $P \in C(T,A)$; definimos a meta relação "P *força* ϕ" entre condições e sentenças ϕ de $\mathcal{L}(A)$ (em símbolos $P \Vdash_{T,A} \phi$ ou $P \Vdash \phi$, quando não houver margem a dúvidas) por indução sobre a complexidade de ϕ, do seguinte modo:

R_1 - Se ϕ é atômica, $P \Vdash \phi$ see $\phi \in P$;

R_2 - Se ϕ é da forma $\phi_1 \wedge \phi_2$, $P \Vdash \phi$ see $P \Vdash \phi_1$ e $P \Vdash \phi_2$;

R_3 - Se ϕ é da forma $\phi_1 \vee \phi_2$, $P \Vdash \phi$ see $P \Vdash \phi_1$ ou $P \Vdash \phi_2$;

R_4 - Se ϕ é da forma $\exists x\, \phi_1(x)$, $P \Vdash \phi$ see existe uma constante c de $\mathcal{L}(A)$ tal que $P \Vdash \phi_1(c)$;

R_5 - Se ϕ é da forma $\forall x\ \phi_1(x)$, $P \Vdash \phi$ see para todo $Q \in C(T,A)$ tal que $Q \supset P$ e para toda constante c de $\mathcal{L}(A)$, existe $Q' \in C(T,A)$ com $Q' \supset Q$ e $Q' \Vdash \phi_1(c)$;

R_6 - Se ϕ é da forma $\neg\phi_1$, $P \Vdash \phi$ see não existe $Q \in C(T,A)$ tal que $Q \supset P$ e $Q \Vdash \phi_1$.

Observação - Embora não haja restrições sobre o conjunto A na definição de forcing dada em [1] é, no entanto, habitual considerar-se apenas expansões $\mathcal{L}(A)$ de $\mathcal{L}$ onde A é infinito, isto é, expansões normais. Tal fato é essencial na demonstração de várias Proposições como por exemplo, nas Proposições 2.2.9. e 2.3.3., e indispensável nas principais aplicações do forcing. Contudo, afim de obtermos a Proposição 4.1.1., que nos fornece uma primeira comparação entre este forcing e o forcing de Fraïssé, somos levados a tratar o caso (não excluido na definição dada em [1], como já dissemos) em que $A=\Phi$. Assumiremos, neste caso, que $\mathcal{L}$ possui um conjunto não vazio de constantes.

No que se segue, introduziremos alguns conceitos importantes relativos ao forcing (de Robinson) e enunciaremos (sem demonstrações) os resultados mais relevantes concernentes a tais conceitos.

As correspondentes demonstrações podem ser encontradas em [1] ou em [9] e [12].

Proposição 2.2.2 - (i) Se $P \in C(T,A)$ e ϕ é uma sentença, P não força (simultaneamente) ϕ e $\neg\phi$.

(ii) Se P e Q são condições, $P \subset Q$ e P força a sentença ϕ então $Q \Vdash \phi$.

(iii) Se $P \in C(T,A)$ e ϕ uma sentença básica tal que $P \Vdash \phi$, então $P \cup \{\phi\}$ é uma condição.

Proposição 2.2.3 - Sejam $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{L}(A')$ extensões normais de $\mathcal{L}$, com $A \subset A'$. Se T for uma teoria de $\mathcal{L}$, ϕ uma sentença de $\mathcal{L}(A)$ e $P \in C(T,A)$ então : $P \Vdash_{T,A} \phi$ see $P \Vdash_{T,A'} \phi$.

A hipótese "$\mathcal{L}(A)$ normal" no resultado acima é essencial. Verifica-se facilmente que no caso de ser A (ou A') finito, $A \subset A'$, o teorema não é verdadeiro.

Decorre da Proposição 2.2.3. que se A é infinito, é indiferente qual a sua cardinalidade (para efeito do forcing) e que podemos, portanto, supor A (convenientemente) grande. Neste sentido a Proposição 2.2.3 estabelece uma certa uniformidade da relação $\Vdash$ com respeito ao conjunto A. Esta uniformidade vai se fazer sentir mais acentuadamente no parágrafo seguinte quando introduzirmos a noção de modelo genérico. No Capítulo IV daremos a demonstração de um resultado bem mais geral que engloba aquele enunciado em 2.2.3.

Se por um lado a Proposição 2.2.3 nos fornece informações sobre o comportamento do forcing relativamente ao conjunto A, a Proposição seguinte trata do comportamento de $\Vdash$ com respeito à teoria T.

Proposição 2.2.4 - Seja T uma teoria em $\mathcal{L}$ e P um conjunto finito de sentenças básicas da extensão normal $\mathcal{L}(A)$. Tem-se então que $P \in C(T,A)$ see $P \in C(T_\forall, A)$ e, portanto, $P \Vdash_{T,A} \phi$ see $P \Vdash_{T_\forall A} \phi$, qualquer que seja a sentença ϕ de $\mathcal{L}(A)$.

Definição 2.2.5 - Diremos que uma condição P *força fracamente a sentença* ϕ de $\mathcal{L}(A)$ - em símbolos, $P \Vdash^* \phi$ - se $P \Vdash \neg\neg\phi$.

Com relação ao forcing fraco vale a seguinte

Proposição 2.2.6 - Se $P \in C(T,A)$ e ϕ é uma sentença de $\mathcal{L}(A)$, então:

(i) não se tem $P \Vdash^* \phi$ e $P \Vdash^* \neg\phi$;

(ii) se $P \Vdash^* \phi$ e Q é uma condição tal que $Q \supset P$, vem que $Q \Vdash^* \phi$;

(iii) $P \Vdash \phi$ implica $P \Vdash^* \phi$;

(iv) $P \Vdash^* \neg\phi$ implica $P \Vdash \neg\phi$.

Definição 2.2.7 - Seja $P \in C(T,A)$. Notaremos por $T^f(P)$ o conjunto das sentenças de $\mathcal{L}$ que são fracamente forçadas por P i.e.,

$$T^f(P) = \{\phi : \phi \text{ é uma sentença de } \mathcal{L} \text{ e } P \Vdash^* \phi\}.$$

No caso em que $P=\Phi$, $T^f(P)$ será notado, simplesmente, por T^f e denominado de *forcing-companheiro de* T.

Proposição 2.2.8 - Se P é uma condição, $T^f(P)$ é um conjunto fechado, relativamente à dedução, e consistente.

Proposição 2.2.9 - Se $P \in C(T,A)$ e ϕ é uma sentença universal de $\mathcal{L}(A)$, então:

$$P \Vdash \phi \quad \text{see} \quad T \cup P \vdash \phi$$

(i.e. para as sentenças universais o forcing "coincide" com a dedução).

Proposição 2.2.10 - Seja $P(a_1,\ldots,a_n)$ uma condi -

ção e ϕ $(a_1,\ldots,a_n)$ uma sentença de $\mathcal{L}(A)$ onde $a_1,\ldots,a_n$ são constantes de $\mathcal{L}(A)$ que não pertencem a $\mathcal{L}$ e que ocorrem em P ou em ϕ. Nestas condições, se $P \mid\!\vdash^* \phi$ então T^f contém a sentença

$$\forall x_1,\ldots,x_n(\wedge P(x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow \phi(x_1,\ldots,x_n)),$$

onde $P(x_1,\ldots,x_n)$ e $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ são obtidas de $P(a_1,\ldots,a_n)$ e $\phi(a_1,\ldots,a_n)$ por substituições óbvias e $\wedge P(x_1,\ldots,x_n)$ denota a conjunção de todas as fórmulas (básicas) de $P(x_1,\ldots,x_n)$.

A Proposição acima enunciada é de grande importância para o que se segue. Intuitivamente, ela diz que T^f contém axiomas (da forma explicitada) que traduzem em cada caso, ou seja, para cada condição P e sentença ϕ, o fato de se ter $P \mid\!\vdash^* \phi$.

Como pode ser verificado, utiliza-se em sua demonstração a hipótese de ser $\mathcal{L}(A)$ uma expansão normal. Esta mesma hipótese repercute ainda fundamentalmente sobre outros conceitos relativos ao forcing, como já frisamos, e dá origem a diferenças essenciais entre o forcing de Robinson e o de Fraïssé.

Seja T uma teoria em $\mathcal{L}$, M uma estrutura tal que $M \models T_\forall$ e $\mathcal{L}(A)$ uma extensão de $\mathcal{L}$ com $\mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(M)$.

Note-se que $M \models T_\forall$ se e somente se todo subconjunto finito P de $D(M)$ é consistente com T.

Definição 2.2.11 - Diremos que a estrutura M *força a sentença* ϕ de $\mathcal{L}(A)$ — em símbolos $M \Vdash \phi$ — se existe um subconjunto $P \subseteq D(M)$ finito, tal que $P \Vdash \phi$.

A relação $\Vdash$, acima definida, entre estruturas e sentenças de $\mathcal{L}(A)$, independe da extensão normal $\mathcal{L}(A)$ e da eventual interpretação de $\mathcal{L}(A)$ em M (ver por exemplo [1]).

Definição 2.2.12 - Diremos que a estrutura M *é genérica relativamente à* T se:

1 - $M \models T_\forall$

2 - Dada uma sentença ϕ, definida em M, tem-se que $M \models \phi$ see $M \Vdash \phi$. Em outras palavras M é genérica see é uma estrutura consistente com T para a qual os conceitos de verdade e forcing coincidem.

Dada uma teoria T nem sempre existe uma multirelação M genérica relativamente à T (ver [18]). No entanto, se T é uma teoria em uma linguagem $\mathcal{L}$ enumerável, vale o seguinte resultado:

Proposição 2.2.13 - Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem enumerá -

vel, T uma teoria em $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}(A)$ uma extensão de $\mathcal{L}$ com A enumerável e $P \in C(T,A)$. Existe, então, uma estrutura genérica M, relativamente a T, cujos elementos (ou mais precisamente, cujos nomes de seus elementos) estão em $\mathcal{L}(A)$ e tal que $P \subset D(M)$.

Introduzimos neste Capítulo dois conceitos de destacada importância, a saber, o de forcing-companheiro T^f de uma teoria T e o de estrutura genérica relativa a T. A seguir explicitaremos alguns resultados que nos permitirão relacionar tais noções com algumas daquelas dadas no Capítulo anterior.

<u>Proposição 2.2.14</u> - Toda estrutura genérica, relativa a T, é existencialmente completa relativamente a T_V.

<u>Proposição 2.2.15</u> - A classe das estruturas genéricas, relativamente a T, é indutiva.

<u>Proposição 2.2.16</u> - Toda estrutura genérica, relativamente a T, é modelo de T^f.

<u>Proposição 2.2.17</u> - Uma estrutura M é genérica, relativamente a T, see $M \models T^f$ e $T^f \cup D(M)$ é completa (i.e M completa T^f).

<u>Proposição 2.2.18</u> - Se T é uma teoria em uma lin-

guagem enumerável, $T^f = \bigcap_M Th(M)$, onde M percorre a classe das estruturas genéricas, com relação a T.

Proposição 2.2.19 - Se T, T_1 e T_2 são teorias de uma mesma linguagem $\mathcal{L}$, tem-se que:

(i) $T^f = (T_\forall)^f$;

(ii) $(T^f)_\forall = T_\forall$;

(iii) $T^{ff} = T^f$

(iv) $(T_1)_\forall = (T_2)_\forall$ acarreta $T_1^f = T_2^f$;

(v) T^f é completa see T tem a propriedade da imersão;

(vi) $T^f_{\forall\exists} = (\bigcap_M Th(M))_{\forall\exists} \supset T_{\forall\exists}$, onde M percorre a classe das estruturas existencialmente completas.

(vii) Se T admite um companheiro semântico T^*, então T^f é o fecho lógico de T^*.

Proposição 2.2.20 - Uma teoria T é semanticamente completa see todo modelo de T é genérico, com relação a T.

O ítem (vii) da Proposição 2.2.19 diz exatamente que no caso em que a teoria T admite um companheiro seman tico, este é essencialmente T^f; em outras palavras, os operadores $* : T \longrightarrow T^*$ e $f : T \longmapsto T^f$ coincidem na parte onde ambos estão definidos. Por outro lado, a Proposição 2.2.20 nos diz que nestes casos, os modelos genéricos, com respeito a T, são precisamente os existencialmente completos.

Quando T não admite completamento semântico, as estruturas genéricas, relativamente a T, constituem uma classe de multirelações "modelo-completa" (podendo ser vazia) cuja teoria é consistente com T, possuindo seus elementos o caráter construtivo dos corpos algebricamente fechados ou seja, a propriedade de nos corpos algebricamente fechados "ser a verdade ou falsidade de uma sentença, determinada por um conjunto finito de informações". Do ponto de vista formal, sabe-se apenas que nestes casos, a teoria T^f goza (segundo a Proposição 2.2.19) de propriedades análogas àquelas satisfeitas por T^*. (Proposição 1.4.11) O significado preciso de T^f, nestes casos, resta ainda por ser esclarecido.

– * –

CAPÍTULO 3

FORCING SEGUNDO FRAÏSSÉ

§3.1 - Introdução - Fraïssé introduz a noção de forcing na teoria dos modelos no seu "Cours de Logique Mathématique", em 1971. Tendo, como Robinson, por motivação o método criado por P. Cohen, Fraïssé define, no entanto, o forcing dando mais ênfase ao aspecto semântico deste conceito. Considerando as meta-relações "P força (+) ϕ" e "P força (-) ϕ" (que se introduz indutivamente) entre conjuntos finitos P, de fórmulas básicas, e sentenças ϕ quaisquer de uma linguagem $\mathcal{L}'$, associa a cada relação M uma teoria M^S (forçada por M e S).

Neste Capítulo daremos a definição rigorosa de tal noção e estabeleceremos alguns resultados relevantes a respeito da mesma.

§3.2 - Forcing de Fraïssé - Seja $M = \langle |M|, R_1^{n_1}, \ldots, R_k^{n_k} \rangle$ uma multirelação, $\mathcal{L}$ uma linguagem adequada para M e $\mathcal{L}'$ a extensão $\mathcal{L}(|M|, S^m)$. Por uma *condição* P *para* S^m (em $\mathcal{L}'$) entenderemos um conjunto finito e consistente de sentenças básicas de uma das formas $S^m(a_1, \ldots, a_m)$ ou

$\neg S^m(a_1,\ldots,a_m)$ onde $a_1,\ldots,a_m \in |M|$. É óbvio que P pode ser canonicamente identificado com uma função definida em um subconjunto finito de $|M|^m$ e tomando valores em $\{0,1\}$. Tal função será denotada pela mesma letra P.

Seja ϕ uma sentença de $\mathcal{L}'$ e P uma condição. Diremos que P *força* (+) ou P *força* (-) ϕ — em símbolos $P \mid\mid\!\!-_{+} \phi$ ou $P \mid\mid\!\!-_{-} \phi$ — ou ainda, que (+), ou (-), é o *valor de* ϕ *forçado por* P, se as seguintes condições forem satisfeitas:

F_1 - Seja ϕ livre e S_p uma extensão da função P ao conjunto $|M|^m$, então:

(i) $P \mid\mid\!\!- \phi$ se ϕ é verdadeira em $MS_p = \langle |M|, R_1^{n_1},\ldots, R_k^{n_k}, S_p\rangle$ qualquer que seja a extensão S_p de P, ou seja, $MS_p \models \phi$ qualquer que seja S_p.

(ii) $P \mid\mid\!\!-_{-} \phi$ se $MS_p \models \neg\phi$ qualquer que seja S_p, extensão de P.

(iii) Se existem extensões S_p e S_p' de P tais que $MS_p \models \phi$ e $MS_p' \models \neg\phi$ diremos que P não força ϕ.

F_2 - Seja ϕ da forma $\phi_1 \wedge \phi_2$ ou $\phi_1 \vee \phi_2$.

(i) $P \Vdash_+ \phi_1 \wedge \phi_2$ se $P \Vdash_+ \phi_1$ e $P \Vdash_+ \phi_2$

$P \Vdash_- \phi_1 \wedge \phi_2$ se $P \Vdash_- \phi_1$ ou $P \Vdash_- \phi_2$

(ii) Em caso contrário diremos que P não força $\phi_1 \wedge \phi_2$.

(iii) $P \Vdash_+ \phi_1 \vee \phi_2$ se $P \Vdash_+ \phi_1$ ou $P \Vdash_+ \phi_2$

$P \Vdash_- \phi_1 \vee \phi_2$ se $P \Vdash_- \phi_1$ e $P \Vdash_- \phi_2$

(iv) Em caso contrário diremos que P não força $\phi_1 \vee \phi_2$.

F_3 - Se ϕ é da forma $\neg\phi_1$, diremos que $P \Vdash_+ \phi$ se $P \Vdash_- \phi_1$ e que $P \Vdash_- \phi$ se $P \Vdash_+ \phi_1$. Se P não força ϕ_1, P não forçará ϕ.

F_4 - Seja ϕ a sentença $\exists x\ \phi_1(x)$. Diremos que $P \Vdash_+ \phi$ se existe $c \in |M|$ tal que $P \Vdash_+ \phi_1(c)$; $P \Vdash_- \phi$ se para todo $c \in |M|$ e toda condição $Q \supset P$, tem-se que Q não força (+) $\phi_1(c)$.

F_5 - Seja, finalmente, ϕ da forma $\forall x\ \phi_1(x)$. Diremos que $P \Vdash_+ \phi$ se para todo $c \in |M|$ e toda condição $Q \supset P$, Q não força (-) $\phi_1(c)$. $P \Vdash_- \phi$ se existe $c \in |M|$

tal que $P \mid\vdash_{+} \phi_1(c)$.

<u>Observações</u>: A definição dada acima admite óbvias simplificações, por exemplo é fácil ver que $P \mid\vdash_{+(-)} \forall x\ \phi_1(x)$ see $P \mid\vdash_{+(-)} \neg\exists x\ \phi_1(x)$. Não nos preocuparemos contudo, com este tipo de problema. Adotaremos a referida definição que é em essência aquela dada por Fraïssé em [5].

O forcing que acabamos de descrever pode ser ainda considerado de um modo mais geral, tomando-se a extensão $\mathcal{L}(|M|, S_1^{n_1}, \ldots, S_\ell^{n_\ell})$ em lugar de $\mathcal{L}'$. As definições correspondentes são adaptadas a este contexto de modo evidente.

Finalmente, notemos que no forcing de Robinson iniciamos por considerar uma extensão $\mathcal{L}(A)$ de $\mathcal{L}$, enquanto que aqui tomamos a extensão, $\mathcal{L}(|M|, S^m)$, acrescentando, além das constantes de $|M|$, um predicado m-ario, S^m. Por outro lado, as condições segundo Robinson são conjuntos finitos de fórmulas básicas de $\mathcal{L}(A)$, consistentes com T, ao passo que para Fraïssé, uma condição é um conjunto finito de fórmulas básicas da forma $S^m(a_1, \ldots, a_m)$ ou $\neg S^m(a_1, \ldots, a_m)$, com $a_1, \ldots, a_m \in |M|$, consistente (em si mesmo).

No que diz respeito às relações entre os dois conceitos de forcing aqui tratados, limitamo-nos a ressaltar algumas de suas diferenças; adiante voltaremos ao assunto analisando o problema com mais profundidade.

Proposição 3.2.1 (Fraïssé) - Nenhuma condição pode forçar (+) e forçar (-) à mesma sentença.

Demonstração - Seja P uma condição e ϕ a sentença $\exists x\ \phi_1(x)$. Suponhamos que $P \Vdash_{+} \phi$ e $P \Vdash_{-} \phi$. Tem-se, portanto: para toda condição $Q \supset P$ e todo $c \in |M|$ $Q \nVdash_{+} \phi_1(c)$. O que contradiz $P \Vdash_{+} \phi$ (devido a hipótese da indução).

Nos demais casos a demonstração se faz trivialmente.

Proposição 3.2.2 (Fraïssé) - Se uma condição P força a sentença ϕ e $Q \supset P$, então Q força ϕ ao mesmo valor que P.

Demonstração - Suponhamos que $P \Vdash_{-} \phi$ com ϕ da forma $\exists x\ \phi_1(x)$, i.e., para toda condição $P' \supset P$ e todo $c \in |M|$, $P' \nVdash_{+} \phi_1(c)$. Por outro lado se $Q \Vdash_{+} \phi$, tem-se $Q \Vdash_{+} \phi_1(c)$ para algum $c \in |M|$, o que é absurdo devido a hipótese da indução.

Os demais casos são imediatos.

<u>Proposição 3.2.3</u> (Fraïssé) - Dada uma condição P e uma sentença ϕ existe uma condição $Q \supset P$ tal que $Q \Vdash_{+} \phi$ ou $Q \Vdash_{-} \phi$

<u>Demonstração</u> - Seja P uma condição e ϕ a sentença $\exists x\, \phi_1(x)$. Tem-se, então, que existe $Q \supset P$ e $c \in |M|$ tais que $Q \Vdash_{+} \phi_1(c)$, ou, para todo $c \in |M|$ e toda condição $Q \supset P$, $Q \nVdash_{+} \phi_1(c)$. Na primeira das duas possibilidades, $Q \Vdash_{+} \phi$, na segunda, $Q \Vdash_{-} \phi$.

Os demais casos são de simples verificação.

<u>Definição 3.2.4</u> - Seja M uma multirelação, $\mathcal{L}$ uma linguagem adequada para M e P uma condição. Denotaremos por $M^S(P)$ (por $\overline{M^S}(P)$) o conjunto das sentenças de $\mathcal{L}(S)$ (de $\mathcal{L}(|M|,S)$) que não são forçadas (-) por nenhuma condição $Q \supset P$. $M^S(P)$ e $M^S(P)$ serão denominadas de *teorias forçadas por* M, S *e* P. No caso de ser $P=\Phi$, poremos $M^S(\Phi) = M^S$; $\overline{M^S}(\Phi) = \overline{M^S}$ e as denominaremos, simplesmente , de teorias forçadas por M e S.

<u>Proposição 3.2.5</u> (Fraïssé) - $M^S(P)$ e $\overline{M^S}(P)$ são conjuntos de sentenças fechadas pela dedução e consistentes. (Ficando,portanto,justificada a denominação de teorias).

<u>Demonstração</u> - (Mostraremos, por indução sobre o com

primento das demonstrações, que se $\overline{M^S}(P) \vdash \phi(x_1,\ldots,x_n)$, onde $x_1,\ldots,x_n$ são as variáveis livres de ϕ e $c_1,\ldots,c_n \in |M|$ então $\phi(c_1,\ldots,c_n) \in \overline{M^S}(P))$. Consideremos a seguinte axiomática para o cálculo de predicado de 1ª ordem $\mathcal{L}(|M|,S)$:

Grupo I - (axiomas do cálculo proposicional) Toda fórmula de $\mathcal{L}(|M|,S)$ obtida de uma tautologia substituindo-se (adequadamente) os símbolos proposicionais por fórmulas de $\mathcal{L}(|M|,S)$ é um axioma.

Grupo II - Se ϕ e ψ são fórmulas de $\mathcal{L}(|M|,S)$ então

1 - $(\forall x\ \phi(x)) \longrightarrow \phi(y)$,

2 - $(\forall x\ (\phi \longrightarrow \psi)) \longrightarrow (\phi \longrightarrow \forall x\ \psi)$

3 - $\phi(y) \longrightarrow \exists x\ \phi(x)$

4 - $(\phi \longrightarrow \exists x\ \psi(x)) \longrightarrow \exists x(\phi \longrightarrow \psi)$

com as convenções e restrições usuais.

Grupo III - Seja ϕ uma fórmula atômica e ϕ' obtida de ϕ substituindo-se algumas das ocorrências de x por y. As seguintes fórmulas são axiomas:

5 - $\forall x\ (x=x)$

6 - $\forall x\ \forall y((x=y) \longrightarrow (\phi \longrightarrow \phi'))$.

Para regras de dedução em $\mathcal{L}(|M|,s)$ tomemos

$$\phi \quad \phi \longrightarrow \psi \Big/ \psi \qquad \text{(modus ponens)}$$

$$\phi \Big/ \forall x\ \phi(x) \qquad \text{(generalização)}$$

Suponhamos que a demonstração de ϕ tem comprimento 1. Neste caso $\phi \in \overline{M^s}(P)$ ou ϕ é um axioma. Se ϕ é do grupo I a demonstração é imediata, visto que neste caso o forcing (de Fraïssé) coincide com o valor de verdade. Admitamos então, ser ϕ um axioma do grupo II.

Caso 1 - ϕ da forma $\forall x\ \phi_1(x,x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow \phi_1(y,x_1,\ldots,x_n)$. Mostremos que $\forall x\ \phi_1(x,c_1,\ldots,c_n) \longrightarrow \phi_1(c,c_1,\ldots,c_n) \in \overline{M^s}(P)$, onde $c,c_1,\ldots,c_n \in |M|$. Com efeito, se $\phi(c,c_1,\ldots,c_n) \notin \overline{M^s}(P)$, existe $Q \supset P$ tal que $Q \mid\mid\!\!-_{-} \phi(c,c_1,\ldots,c_n)$ i.e., $Q \mid\mid\!\!-_{+} \forall x\ \phi_1(x,c_1,\ldots,c_n)$ e $Q \mid\mid\!\!-_{-} \phi_1(c,c_1,\ldots,c_n)$.

Tem-se, portanto, que para todo $Q' \supset Q$ e todo $c' \in |M|$, $Q' \mid\mid\!\!\not-_{-} \phi(c',c_1,\ldots,c_n)$, o que é obviamente contraditório.

Caso 2 - ϕ da forma $\forall x(\phi_1(x,x_2,\ldots,x_n) \longrightarrow \psi(x,x_1,\ldots,x_n)) \longrightarrow (\phi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \longrightarrow \forall x\ \psi(x,x_1,\ldots,x_n))$. Admitamos que $\phi(x,x_1,\ldots,x_n) \notin$

$\notin \overline{M^S}(P)$, i.e., que existe $Q \supset P$ tal que $Q \mid\vdash_+ \forall x\ (\phi_1(c_1,\ldots,c_n) \longrightarrow \psi\ (x,c_1,\ldots,c_n))$ e $Q \mid\vdash_- \psi(c_1,\ldots,c_n) \longrightarrow \forall x\ \psi(x,c_1,\ldots,c_n)$, onde $c_1,\ldots,c_n \in |M|$. Assim, para todo $Q' \supset Q$ e todo $c' \in |M|$, $Q' \mid\not\vdash_+ \phi_1(c_1,\ldots,c_n)$ ou $Q' \mid\not\vdash_- \psi(c',c,\ldots,c_n)$.

Por outro lado, $Q \mid\vdash_+ \phi_1(c_1,\ldots,c_n)$ e $Q \mid\vdash_- \forall x\ \psi(x,c_1,\ldots,c_n)$; logo, existe $Q' \supset Q$ e $c' \in |M|$ tal que $Q' \mid\vdash_+ \phi_1(c_1,\ldots,c_n)$ e $Q' \mid\vdash_- \psi(c',c_1,\ldots,c_n)$ o que é contraditório. Os casos em que ϕ é de uma das formas 3 ou 4 se demonstram facilmente. Analisemos, portanto, os axiomas do Grupo III.

Caso 5 - ϕ da forma $\forall x\ (x=x)$. Com efeito se $\phi \notin \overline{M^S}(P)$, existe $Q \supset P$ tal que $Q \mid\vdash_- \forall x\ (x=x)$, i.e., $Q \mid\vdash_- c=c$ para algum $c \in |M|$. O que é absurdo visto ser $c=c$ verdadeiro independentemente da condição Q.

Caso 6 - Se ϕ é a fórmula $\forall x\ \forall y((x=y) \longrightarrow$ $\longrightarrow (R_i^{n_i}(x_1,\ldots,x_{n_i}) \longrightarrow (R_i^{n_i}(x_1,\ldots,x_{n_i}))'))$ o teorema se demonstra com um argumento análogo ao dado no caso 5.

Na hipótese de ser ϕ a fórmula $\forall x\ \forall y((x=y) \longrightarrow$ $\longrightarrow (s(x_1,\ldots,x_m) \longrightarrow (s(x_1,\ldots,x_m)'))$ tem-se que se existe $Q \supset P$ tal que $Q \mid\vdash_- a=b \longrightarrow (s(c_1,\ldots,c_m) \longrightarrow$

$\longrightarrow (s(c_1,\ldots,c_m))')$ para a, b, $c_1,\ldots, c_m \in |M|$ então $Q \,||\!\!\vdash_+ a=b$, $Q \,||\!\!\vdash_+ s(c_1,\ldots,c_m)$ e $Q \,||\!\!\vdash_- (s(c_1,\ldots,c_m))'$ o que é absurdo, visto ser o predicado = interpretado em M pela identidade.

Isto completa nossa prova no caso de ter a demonstração de ϕ comprimento 1.

Suponhamos o teorema válido para as demonstrações de comprimento n, e consideremos a demonstração $\phi_1, \phi_2,\ldots, \phi_n, \phi_{n+1}$. No caso de ser ϕ_{n+1} um axioma ou uma fórmula de $\overline{M^S}(P)$ nada há a provar. Admitamos que ϕ_{n+1} é obtida de fórmulas anteriores ϕ_i e $\phi_i \longrightarrow \phi_{n+1}$, por modus ponens. Pela hipótese da indução $\phi_i(c_1,\ldots,c_n)$ e $\phi_i(c_1,\ldots,c_n) \longrightarrow \phi_{n+1}(c_1,\ldots,c_n)$ pertencem a $\overline{M^S}(P)$; logo, nenhum $Q \supset P$ força (-) qualquer dessas duas fórmulas. Por outro lado, se $\phi_{n+1}(c_1,\ldots,c_n) \notin M^S(P)$, existe $Q' \supset P$ tal que $Q' \,||\!\!\vdash_- \phi_{n+1}(c_1,\ldots,c_n)$; como nenhum $Q'' \supset Q'$ pode forçar (-) $\phi_i(c_1,\ldots,c_n) \longrightarrow \phi_{n+1}(c_1,\ldots,c_n)$ existe $Q'' \supset Q'$ tal que $Q'' \,||\!\!\vdash_+ \phi_i(c_1,\ldots,c_n) \rightarrow \phi_{n+1}(c_1,\ldots,c_n)$ ou seja $Q'' \,||\!\!\vdash_- \phi_i(c_1,\ldots,c_n)$; absurdo.

Suponhamos por fim, que ϕ_{n+1} é da forma $\forall x\, \phi_i(x)$ e obtida da fórmula anterior $\phi_i(x)$ pela regra de generalização. Pela hipótese da indução $\phi_i(c, c_1,\ldots,c_n) \in \overline{M^S}(P)$ qualquer que seja $c, c_1,\ldots, c_n \in |M|$. Se

$\forall x\ \phi_i(x,c_1,\ldots,c_n) \notin \overline{M^S}(P)$ existe $Q \supset P$ tal que $Q \Vdash_- \forall x\ \phi_i(x,c_1,\ldots,c_n)$, ou seja, $Q \Vdash_- \phi_i(c',c_1,\ldots,c_n)$ para algum $c' \in |M|$, e, portanto, $\phi_i(c',c_1,\ldots,c_n) \notin \overline{M^S}(P)$ o que é absurdo.

Fica assim demonstrado que $\overline{M^S}(P)$ é fechado pela dedução.

Admitamos agora, que ϕ é uma sentença de $\mathcal{L}(s)$ tal que $M^S(P) \vdash \phi$. Como $M^S(P) \subset \overline{M^S}(P)$ vem, pelo que acabamos de mostrar, $\phi \in \overline{M^S}(P)$; logo, $\phi \in M^S(P)$.

O fato de ser $\overline{M^S}(P)$ consistente segue-se da Proposição 3.1.1 e de ser $\overline{M^S}(P)$ fechado pela dedução.

<u>Proposição 3.2.6</u> (Fraïssé) - Se $P \Vdash_+ \psi$ e $\vdash \psi \longrightarrow \phi$, então existe uma condição $Q \supset P$ tal que $Q \Vdash_+ \phi$.

<u>Demonstração</u> - Consequência das Proposições 3.2.3 e 3.2.5.

<u>Observação</u> - Como corolário da Proposição 3.1.5, tem-se que se $\vdash \phi \longleftrightarrow \psi$ e P é uma condição, P não pode forçar ϕ e ψ a valores distintos. No entanto, note-se que uma condição dada pode forçar uma delas sem forçar a outra, como é fácil de se constatar no seguinte exemplo: Seja $M = \langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$ e S um predicado unário. Se $P = \{S(0)\}$,

tem-se que $P \,||\!\!-_{+} S(0) \vee \neg S(0)$; no entanto, P não força a sentença $\forall x\ S(x) \vee \exists x \neg S(x)$.

Esta circunstância faz com que o conjunto das sentenças (de $\mathcal{L}(S)$ ou $\mathcal{L}(|M|,S)$) que são forçadas (+) (ou que são forçadas (-)) por uma condição P, não seja em geral fechado pela dedução.

Proposição 2.2.7 (Fraïssé) - Seja ϕ uma fórmula de $\mathcal{L}(|M|, S^m)$ na qual não ocorre o predicado S^m. Então, dada a condição P, $P \,||\!\!-_{+} \phi$ (ou $P \,||\!\!-_{-} \phi$) see $M \models \phi$ (ou $M \models \neg\phi$ respectivamente).

Demonstração - Suponhamos que $P \,||\!\!-_{-} \exists x\ \phi_1(x)$, isto é, que $Q \,||\!\!\not-_{+} \phi_1(a)$ qualquer que seja $Q \supset P$ e $a \in |M|$. Em particular $P \,||\!\!\not-_{+} \phi_1(a)$. Pela hipótese da indução vem que $M \not\models \phi_1(a)$, portanto, $M \models \neg\phi_1(a)$, qualquer que seja $a \in |M|$, assim, $M \models \forall x \neg\phi_1(x)$ ou seja $M \models \neg\exists x\ \phi_1(x)$. Reciprocamente se $M \models \neg\exists x\ \phi_1(x)$, $M \models \neg\phi_1(a)$ qualquer que seja $a \in |M|$. Pela hipótese da indução $\Phi \,||\!\!-_{+} \neg\phi_1(a)$ para todo $a \in |M|$ ou seja $\Phi \,||\!\!-_{-} \phi_1(a)$, logo dado $a \in |M|$ e Q, $Q \,||\!\!\not-_{+} \phi_1(a)$ i.e., existe $P \subset D(S)$, $(P = \Phi)$, tal que $P \,||\!\!-_{-} \exists x\ \phi_1(x)$.

Nos demais casos a demonstração é imediata.

Corolário 2.2.8 - $M^S = Th(M) \sqcup C_s$; $\overline{M^S} = Th(M) \sqcup C_s$;

onde C_S é o conjunto das fórmulas de $\mathcal{L}(S)$ (de $\mathcal{L}|M|,S)$) nas quais S ocorre e Th(M) a teoria de M em $\mathcal{L}$ (em $\mathcal{L}(|M|)$).

§3.3 - Relação geral

Definição 3.3.1 - Seja M uma multirelação e S uma relação m-aria definida sobre $|M|$ (identificaremos frequentemente S com $<|M|,S>$). Diremos que S *é geral relativamente a* M (ou geral para M) se dada uma sentença ϕ de $\mathcal{L}(|M|,S)$ existe uma condição $P \subset D(s)$ tal que $P \mid\vdash_+ \phi$ ou $P \mid\vdash_- \phi$.

Notemos que dadas duas condições P, Q contidas em D(S) $P \cup Q$ é ainda uma condição. Segue-se das Proposições 3.2.1 e 3.2.2 que o valor forçado de ϕ é sempre o mesmo. Usaremos a notação $MS \mid\vdash_+ \phi$, $MS \mid\vdash_- \phi$ para dizer que o valor forçado de ϕ em MS é (+) respectivamente (-).

Proposição 3.3.2 (Fraïssé) - Dada a multirelação enumerável M e a condição P, existe uma relação geral S definida sobre $|M|$ tal que $P \subset D(S)$.

Demonstração - Seja $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ uma enumeração de todas as sentenças de $\mathcal{L}(|M|,S^m)$. Ponhamos $P_o = P$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_{n-1}$ se P_{n-1} força ϕ_n. Em caso contrário, existe $Q \supset P_{n-1}$ (Proposição 3.2.3) tal que Q força ϕ_n. Neste caso, $P_n = Q$.

Fica assim definida uma sequência $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. A estrutura $\bigcup_n P_n$ (limite indutivo do sistema $<\{P_n\}_n, \subsetneq>$) é a multirelação desejada.

<u>Proposição 3.3.3</u> (Fraïssé) - Seja M uma multirelação e S uma relação geral relativamente a M. Dada uma sentença ϕ de $\mathcal{L}(|M|, S^m)$, tem-se que: $MS \mid\mid\!\!-_+ \phi$ ou $MS \mid\mid\!\!-_- \phi$ see $MS \models \phi$ ou $MS \models \neg\phi$ respectivamente.

<u>Demonstração</u> - Seja ϕ a fórmula $\exists x\, \phi_1(x)$ e suponhamos que $MS \mid\mid\!\!-_- \phi$, ou seja, que existe $P \subset D(s)$ tal que dados $Q \supset P$ e $a \in |M|$, $Q \mid\mid\!\!\not-_+ \phi_1(a)$. Como S é geral vem que, para cada $a \in |M|$ existe uma condição P_a, contida no diagrama de S que força $\phi_1(a)$ a um determinado valor. Tal valor, não podendo ser (+) é necessariamente (-). Pela hipótese da indução, $MS \models \neg\phi(a)$ qualquer que seja $a \in |M|$ e por conseguinte $M \models \neg\phi$.

Os demais casos são de demonstração imediata.

<u>Observação</u> - A hipótese de ser M enumerável no enunciado da Proposição 3.3.2 é essencial, como evidencia o seguinte contra-exemplo dado por B. Poizat: Seja $M = <\mathcal{P}(N), N, R>$

onde N é a relação unária tal que $N(X)=1$ see $X = \{n\}$ com $n \in \mathbb{N}$ e $R(X,Y) = 1$ (ou XRY) see $N(X)$ e $X \in Y$.

Nestas condições nenhuma relação S unária definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é geral para M.

Com efeito, a fórmula $\exists y \forall x((N(x) \wedge S(x)) \longleftrightarrow xRy)$ é verdadeira em MS qualquer que seja a relação unária S. Para verificar tal fato basta considerar $y = N \cap S$, Assim, se S é geral tal fórmula não pode (segundo a Proposição 3.3.3) ser forçada (-). Vejamos que, por outro lado, nenhuma condição P, contida no diagrama de S força (+) a referida fórmula, ou seja, que para todo $P \subset D(M)$ e $a \in |M|$ existem $Q \supset P$ e $b \in |M|$ tais que $Q \Vdash_{-} (N(b) \wedge S(b)) \longleftrightarrow bRa$. Suponhamos primeiramente que o conjunto $p_1(R_a) = \{X : X \in a\}$ seja infinito. Neste caso, consideremos $b \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $b \notin Dom(P)$ e $b \in p_1(R_a)$. A condição $Q = P \cup \{\neg S(b)\}$ força (-) a fórmula $(N(b) \wedge S(b)) \longleftrightarrow bRa$.

Se $p_1(R_a)$ é finito tomemos $b \notin p_1(R_a)$, $N(b) = 1$, $b \notin Dom(P)$ e $Q = P \cup \{S(b)\}$. Novamente Q força (-) $(N(b) \wedge S(b)) \longleftrightarrow bRa$.

<u>Proposição 3.3.4</u> (Fraïssé) - Se M é uma multirelação enumerável e P uma condição, $\overline{M^S}(P) = \bigcap_S Th(MS)$ onde S percorre a classe das relações gerais relativamente a M

tais que $P \subset D(M)$ e $Th(MS)$ a teoria de MS em $\mathcal{L}(|M|, S)$.

<u>Demonstração</u> - Suponhamos que $\phi \notin \overline{M^S}(P)$; tem-se então, que existe $Q \supset P$ tal que $Q \Vdash_{-} \phi$. Da Proposição 3.3.2 concluimos que existe uma relação $S_Q \supset Q$, geral para M e, pela Proposição 3.3.3, que $MS_Q \models \neg \phi$; portanto $\phi \notin \bigcap_S Th(MS)$.

Reciprocamente, se $\phi \notin \bigcap_S Th(MS)$, existe uma relação $S_P \supset P$ geral para M tal que $MS_P \models \neg \phi$. Como S_P é geral vem que existe uma condição $S_P \supset Q \supset P$ tal que $Q \Vdash_{-} \phi$; logo, $\phi \notin \overline{M^S}(P)$.

<u>Corolário 3.3.5</u> - $M^S(P) = \bigcap_S Th(MS)$ onde S percorre a classe das estruturas gerais para M tais que $P \subset D(S)$ e $Th(MS)$ é a teoria de MS em $\mathcal{L}(s)$.

Note-se que, com base na Proposição 3.3.4 pode-se redemonstrar a Proposição 3.2.5 de modo imediato, no entanto, devido ao contra-exemplo de B. Poizat, dado acima, tal demonstração vale apenas para o caso em que M é enumerável.

De um modo geral vale o seguinte: $\overline{M^S}(P) \subset \bigcap_S Th(MS)$.

§3.4 - <u>Completude e χ_0-categoricidade de</u> M^S - De um modo geral não é fácil dar-se exemplos de relações S gerais pa ra M. Este fato está intimamente ligado, como veremos adiante, à dificuldade que existe de conhecermos explicitamente a teoria M^S. Neste parágrafo procuraremos abordar esta questão via a completude e a χ_o-categoricidade de M^S.

Proposição 3.4.1 - Sejam M_o e M_1 multirelações adequadas a uma mesma linguagem $\mathcal{L}$, S um novo predicado e $\mathcal{L}(|M_o|,S)$, $\mathcal{L}(|M_1|,S)$ as extensões correspondentes. Nestas condições, se $f: M_o \longrightarrow M_1$ é um isomorfismo, tem-se que: $P \mid\vdash_{+(-)} \phi$ see $f(P) \mid\vdash_{+(-)} f(\phi)$, onde P é uma condição, ϕ uma fórmula de $\mathcal{L}(|M_o|,S)$ e $f(P)$, $f(\phi)$ têm significados óbvios (vd. [5]).

Demonstração - Os casos em que ϕ é livre ou é de uma das formas $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$, $\neg\phi_1$ não oferecem dificuldades. Suponhamos ϕ da forma $\exists x\ \phi(x)$:

(i) $P \mid\vdash_{+} \phi$ see $P \mid\vdash_{+} \phi_1(a)$ para algum $a \in |M_o|$, pela hipótese da indução isto ocorre see $f(P) \mid\vdash_{+} f(\phi_1(a))$, ou seja, see $f(P) \mid\vdash_{+} f(\phi_1)(f(a))$, ou ainda, see $f(P) \mid\vdash_{+} \exists x(f(\phi_1)(f(a)))$, e finalmente, see $f(P) \mid\vdash_{+} f(\phi)$.

(ii) Admitamos que existem $Q' \supset f(P)$ e $f(a) = b \in |M_1|$ tais que $Q' \mid\vdash_{+} f(\phi_1)(b)$, da hipótese da indu ção decorre que $f^{-1}(Q') \Vdash_{+} f^{-1}(f(\phi_1)(b))$, i.e., $f^{-1}(Q') \Vdash_{+} \phi_1(a)$; como $Q' \supset f(P)$, $P \subset f^{-1}(Q')$ e, portanto, $P \nVdash_{-} \phi$. Fica demonstrado que se $P \Vdash_{-} \phi$, $f(P) \Vdash_{-} f(\phi)$.

<u>Definição 3.4.2</u> - Seja M uma multirelação. Diremos que M é *sortida* se para toda parte finita $A \subset |M|$, existe um automorfismo $f: M \longrightarrow M$, tal que $f(A) \cap A = \phi$.

<u>Proposição 3.4.3</u> - Se a multirelação M é sortida então as teorias M^S e $\overline{M}^S$ são completas.

<u>Demonstração</u> - Mostremos que se ψ é uma sentença de $\mathcal{L}(S)$ então ψ ou $\neg\psi$ pertence a M^S. Admitamos que não; neste caso, existem condições P e Q tais que $P \Vdash_{-} \psi$ e $Q \Vdash_{-} \neg\psi$. Seja f um automorfismo de M satisfazendo a condição $f(Q) \cap P = \Phi$; assim, da Proposição 3.2.2 vem que $P \cup f(Q) \Vdash_{-} \psi$ e $P \cup f(Q) \Vdash_{-} \neg\psi$, portanto, $P \cup f(Q) \Vdash_{+} \psi$, o que obviamente é contraditório.

No caso da teoria $\overline{M}^S$ a demonstração se faz de modo análogo considerando-se ψ em $\mathcal{L}(|M|, S)$.

<u>Corolário 3.4.4</u> - Se M é uma multirelação reduzida à base (i.e., $M=|M|$) ou M é a cadeia $\mathbb{Z}$ dos inteiros ou, ainda, a cadeia Q dos racionais, M^S é completa.

<u>Demonstração</u> - Nestes casos M é sortida.

A situação em que M é a multirelação enumerável reduzida à base foi tratada anteriormente por Boffa (cf. [5]) que mostrou ser M^S, neste caso, a teoria das relações ricas e homogêneas. Usando o mesmo método mostraremos que dada uma multirelação M e S geral para M, S é necessariamente rica e homogênea (a recíproca é falsa). Como consequência tem-se o resultado de Boffa.

<u>Definição 3.4.5</u> - Seja $\{p_i | i=1,2,\ldots,\ell\}$ o conjunto das fórmulas atômicas construídas a partir de todos os predicados $R_1,\ldots,R_k$, de $\mathcal{L}$ e das variáveis $x_1,\ldots,x_n$. Uma *configuração* $c(x_1,\ldots,x_n)$ é uma conjunção $(\bigwedge_i \dot{p}_i) \wedge p$ onde $\dot{p}_i = p_i$ ou $\dot{p}_i = \neg p_i$ e p é a sentença que "diz" serem todos os x_i diferentes. Dada a configuração $c(x_1,\ldots,x_n)$ notaremos por $c'(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+p})$ a configuração extensão de $c(x_1,\ldots,x_n)$ (tal que se $\dot{p}_i$ ocorre em $c(x_1,\ldots,x_n)$, $\dot{p}_i$ ocorre também em $c'(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+p})$).

<u>Proposição 3.4.6</u> - Seja M uma multirelação enumerável e S geral para M. Tem-se que S é rica e homogênea.

<u>Demonstração</u> - Considere a relação dada $S=<|M|,S>$ e $\mathcal{L}'$ a sublinguagem de $\mathcal{L}$ adequada para S, mais precisa-

mente, a sublinguagem de $\mathcal{L}$ constituida por todos os símbolos de $\mathcal{L}$ outros que os predicados $R_1,\ldots,R_k$. É fácil verificar que S é rica e homogênea see valem em S as seguintes fórmulas:

$$\forall x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+p}(C(x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C'(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+p}))$$

onde $C(x_1,\ldots,x_n)$ é uma configuração qualquer de $\mathcal{L}'$.

Mostremos que nenhuma de tais fórmulas é forçada (-), ou seja, que dada a condição P e $a_1,\ldots,a_n \in |M|$ existem $a_{n+1},\ldots,a_{n+p} \in |M|$ e $Q \supset P$ tais que $Q \Vdash_+ C(a_1,\ldots,a_n) \longrightarrow C'(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1},\ldots,a_{n+p})$. Ora, se $P \not\Vdash_+ C(a_1,\ldots,a_n)$ nada há que demonstrar, se no entanto $P \Vdash_+ C(a_1,\ldots,a_n)$, considere-se $a_{n+1},\ldots,a_{n+p} \in |M|$ e $P \subset Q$ tais que:

(i) para $j = n+1,\ldots,n+p$, a_j não ocorre em nenhum dos p_i de $C(a_1,\ldots,a_n)$ nem em fórmulas que pertençam a P,

(ii) $Q \Vdash_+ C'(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1},\ldots,a_{n+p})$; o que é sempre possível.

Um outro caso que também pode ser esclarecido é aque le em que M é uma multirelação finita. Aqui, toda relação S definida sobre $|M|$ é geral para M.

Antes de abordarmos a questão da χ_0-categoricidade de M^S, vejamos um resultado negativo relativo à completude.

Definição 3.4.7 - Seja M uma multirelação, $\mathcal{L}$ uma linguagem adequada para M e $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ tendo como variáveis livres $x_1,\ldots,x_n$. Diremos que $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ é *indiscernente* (i.e. não discernente) em M se o conjunto $V(\phi)=\{(a_1,\ldots,a_n)\in|M|^n \mid M\models\phi(a_1,\ldots,a_n)\}$ é vazio ou infinito. M *será dita indiscernente* se $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ é indiscernente em M qualquer que seja $\phi(x_1,\ldots,x_n)$.

Proposição 3.4.8 - Seja M uma multirelação enumerável. Se M^S for completa, M é indiscernente.

Demonstração - Se M não for indiscernente, existe uma fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ para a qual $V(\phi)\neq\Phi$ e $V(\phi)$ é finito i.e. $V(\phi)=\{(a_1^1,a_2^1,\ldots,a_n),\ldots,(a_1^m,a_2^m,\ldots,a_n^m)\}$. Admitamos ser $\ell\geq n$ a aridade de S. Neste caso, consideremos as ℓ-uplas $(a_1^j,\ldots,a_n^j,a_{n+1}^j,\ldots,a_\ell^j)$ com $a_n^j=a_{n+1}^j= \ldots = a_\ell^j$; $j=1,2,\ldots,m$ e as relações gerais S_1, S_2 tais que $S_1(a_1^j,\ldots,a_n^j,a_{n+1}^j,\ldots,a_\ell^j)=1$ e $S_2(a_1^j,\ldots,a_n^j,a_{n+1}^j,$ ...

$\ldots,a_\ell^j) = 0$ para $j=1,\ldots,m$.

Então, a fórmula ψ seguinte:

$$\exists x_1,\ldots,x_\ell(\phi(x_1,\ldots,x_\ell) \wedge S(x_1,\ldots,x_\ell) \wedge (\bigwedge_{i=n}^{\ell} x_i = x_n))$$

é tal que $MS_1 \models \psi$ e $MS_2 \models \neg\psi$.

No caso de $\ell<n$, considere-se as relações S_1 e S_2 tais que:

$$S_1(a_1^j,\ldots,a_\ell^j) = 1 \quad \text{e} \quad S_2(a_1^j,\ldots,a_\ell^j) = 0 \ ; \ j=1,\ldots,m.$$

Corolário 3.4.9 - Se M possui um elemento ou uma n-upla distinguível (definível por uma fórmula sem constantes) M^s não é completa, como é o caso por exemplo de um Grupo, de um modelo da aritimética de Peano, de um modelo de ZF, etc...

Consideremos agora a χ_o-categoricidade de M^s.

Definição 3.4.10 - Seja M uma multirelação enumerável. Diremos que M é *fortemente homogênea* se para todo conjunto finito $F \subset |M|$, todo $a \in |M|$ e todo automorfismo local $f\colon F \longrightarrow |M|$, existe uma infinidade de automorfismos locais $g\colon F \cup \{a\} \longrightarrow |M|$ que estendem f.

Com base no resultado 7.1.1, p 77 de [6], vê-se facilmente que se M é fortemente homogênea, M é homogê - nea.

Proposição 3.4.11 - Se $M = <|M|, R_1, \ldots, R_k>$ é uma multirelação fortemente homogênea e enumerável, todo modelo de M^S (de $\overline{M^S}$) é homogêneo.

Demonstração - É fácil verificar que um modelo de M^S é homogêneo see satisfaz todas as sentenças ϕ da forma

$$\forall x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \ \forall y_1, \ldots, y_n \ \exists y_{n+1} ((C'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \wedge$$

$$\wedge C(y_1, \ldots, y_n)) \longrightarrow C'(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})),$$

onde $C(x_1, \ldots, x_n)$ é uma configuração, $C'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ uma extensão de $C(x_1, \ldots, x_n)$ e $C(y_1, \ldots, y_n)$, $C'(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ são obtidas de $C(x_1, \ldots, x_n)$, $C'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ substituindo-se x_i por y_i $i = 1, \ldots, n, n+1$, respectivamente.

Vejamos que as fórmulas ϕ não são forçadas (-), i.e., que $\phi \in M^S$ qualquer que seja ϕ da forma explicitada.

Seja M uma multirelação fortemente homogênea e P uma condição. $P \Vdash_{-} \phi$ see existem $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, b_1, \ldots, b_n$ em $|M|$ tais que

$$P \Vdash_{-} \exists y_{n+1}((C'(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) \wedge C(b_1,\ldots,b_n)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C'(b_1,\ldots,b_n,y_{n+1})),$$

isto é, see existem $a_1,\ldots,a_n,a_{n+1},b_1,\ldots,b_n \in |M|$ tais que para todo $Q \supset P$ e $b_{n+1} \in |M|$,

$$Q \not\Vdash_{+} (C'(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) \wedge C(b_1,\ldots,b_n)) \longrightarrow C'(b_1,\ldots,b_n,b_{n+1})$$

o que é falso,pois:

se $P \not\Vdash_{+} C'(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) \wedge C(b_1,\ldots,b_n)$, nada há a demonstrar;

se $P \Vdash_{+} C'(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) \wedge C(b_1,\ldots,b_n)$, considere-se $b_{n+1} \in |M|$ e $Q \supset P$ tais que b_{n+1} não ocorre em $C'(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) \wedge C(b_1,\ldots,b_n)$ nem em P, b_{n+1} satisfaz todas as fórmulas de $C(b_1,\ldots,b_n,y_{n+1})$ nas quais ocorrem y_{n+1} e um dos R_i, $i=1,\ldots,k$ (isto é possível visto ser M fortemente homogênea) e finalmente $Q \Vdash_{+} C(b_1,\ldots$ $\ldots,b_n,b_{n+1})$.

No caso da teoria $\overline{M^S}$, é suficiente notar que $M^S \subset \overline{M^S}$.

<u>Proposição 3.4.12</u> - Se M é uma multirelação enumerável, M é fortemente homogênea see MR é homogênea qual

quer que seja R geral para M.

<u>Demonstração</u> - Da Proposição anterior resulta que MR é homogênea visto que se R é geral para M, MR $\models M^s$.

Suponhamos M não fortemente homogênea, isto é, que existe $F \subset |M|$ finito e $a \in |M|$ (que sem perda de generalidade podemos supor não pertencente a F) para os quais existe apenas um número finito n de automorfismos locais $g_i : F \cup \{a\} \longrightarrow |M|$ que estendem f. Seja $m \in \mathbb{N}$ e definamos uma condição P, m-aria, do seguinte modo:

$$P(a_1,\ldots,a_m) = P(f(a_1),\ldots,f(a_m)), \text{ para todo } a_1,\ldots,a_m \in F;$$

$$P(a,\ldots,a) = 1;$$

$$P(g_1(a),\ldots,g_1(a)) = \ldots = P(g_n(a),\ldots,g_n(a)) = 0.$$

Como M é enumerável, existe uma relação geral R definida em $|M|$ que estende P. É óbvio, no entanto, que a aplicação $f: F \longrightarrow |M|$ é um automorfismo local de MR que não pode ser estendido a $F \cup \{a\}$. Logo, MR não é homogênea.

<u>Proposição 3.4.13</u> - Se M é uma multirelação enumerável e fortemente homogênea então M^s é $\aleph_0$-categórica.

Demonstração - Se M é fortemente homogênea, M é sortida, visto que dado $A = \{a_1,\ldots,a_n\} \subset |M|$, o automorfismo local (vazio) $\Phi : \Phi \subset |M| \longrightarrow |M|$ e $a_1 \in A$ existe uma infinidade de automorfismos locais $f: \{a\} \longrightarrow |M|$. Seja f_1 um desses automorfismos tal que $f_1(a_1) \notin A$. Novamente f_1 pode ser estendido a um automorfismo $f_2: \{a_1,a_2\} \longrightarrow |M|$ tal que $f_2(a_2) \notin |A|$. Continuando tal processo obtemos um automorfismo $f_n: A \longrightarrow |M|$ tal que $f_n(A) \cap A = \Phi$. Como M é, em particular, homogênea, tal automorfismo se estende a automorfismo $\overline{f}_n: M \longrightarrow M$ com a propriedade desejada. (o que demonstra ser M sortida).

Pela Proposição 3.4.3, M^s é completa, portanto todos os seus modelos, sendo logicamente equivalentes, têm as mesmas restrições finitas (a menos de isomorfismos). Como são, segundo a Proposição 3.4.12, homogêneos , decorre que (cf. [6]) são isomorfos.

Como consequência da Proposição 3.4.3, vimos que se M é a multirelação reduzida à base ou à cadeia $\mathbb{Z}$ dos inteiros ou ainda à cadeia Q dos racionais, M^s é completa. O resultado acima nos permite ser mais preciso com relação a Q^s, pois sendo Q fortemente homogênea podemos afirmar:

<u>Corolário 3.4.14</u> - Q^S é $\aleph_0$-categórica.

No que segue explicitaremos, a menos de isomorfismos, os modelos QS de Q^S com S unária e geral para Q.

Seja S (unária) geral para Q, S é isomorfa à relação (unária) R, definida em Q, satisfazendo a seguinte propriedade: dados $q_1, q_2 \in Q$ existem $p_1, p_2 \in Q$, com $q_1 < p_1 < p_2 < q_2$ e $R(p_1) = 1$, $R(p_2) = 0$.

Com efeito, é fácil verificar que QS e QR são ambas homogêneas e têm as mesmas restrições finitas, sendo, portanto, isomorfas.

Analisaremos agora o caso $M = < \mathbb{Z} , \leq >$ e mostraremos que M^S não é $\aleph_0$-categórica.

<u>Proposição 3.4.15</u> - Se M^S é completa e não admite modelos finitos, M^S $\aleph_0$-categórica implica Th(M) $\aleph_0$-categórica.

<u>Demonstração</u> - Se Th(M) não é $\aleph_0$-categórica existe $n \in \mathbb{N}$ tal que o conjunto $S_n(Th(M))$ dos tipos relativos às variáveis $x_1,\ldots,x_n$ é infinito (Teorema de Ryll-Nardjewski, ver por exemplo [15]). Logo $S_n(M^S)$ é infinito e, portanto, M^S não é $\aleph_0$-categórica.

<u>Corolário 3.4.16</u> - $\mathbb{Z}^S$ não é $\aleph_0$-categórica.

Finalizando o parágrafo, daremos uma caracterização das relações gerais segundo o método de [1].

<u>Proposição 3.4.17</u> - Sejam M uma multirelação e ϕ uma sentença de $\mathcal{L}(|M|,S)$. Se existir uma condição P tal que $P \Vdash_{+} \phi$, $(\wedge P \longrightarrow \phi) \in M^{S}$, onde $\wedge P$ é a conjunção de todas as fórmulas básicas de P. (Obtido também por B. Poizat).

<u>Demonstração</u> - Mostraremos que nenhum Q força (-) $\wedge P \longrightarrow \phi$.

Com efeito, $Q \Vdash_{-} \wedge P \longrightarrow \phi$ see $Q \Vdash_{+} \wedge P$ e $Q \Vdash_{-} \phi$. Seja $\wedge P = \dot{p}_1 \wedge \ldots \wedge \dot{p}_n$ onde $\dot{p}_i$, $i=1,\ldots,n$, são as fórmulas básicas de P. Assim, $Q \Vdash_{+} \dot{p}_i$ para todo i. Se $\dot{p}_i$ é atômica $\dot{p}_i \in Q$; se $\dot{p}_i = \neg p_i$, com p_i atômica, $Q \Vdash_{+} \dot{p}_i$ see $Q \Vdash_{-} p_i$; logo, $p_i \notin Q$ e, portanto, $Q \cup P$ é uma condição. Mas, neste caso, $Q \cup P \Vdash_{+} \phi$ e $Q \cup P \Vdash_{-} \phi$. Absurdo.

<u>Proposição 3.4.18</u> - Seja $M = \langle |M|, R_1, \ldots, R_k \rangle$ uma multirelação enumerável. Se MR é modelo de M^{S}, R é geral para M see $R = \langle |M|, R \rangle$ completa M^{S} (i.e $\overline{M^{S}} \cup D(R)$ é completa).

<u>Demonstração</u> - Suponhamos R geral para M e seja ϕ uma sentença de $\mathcal{L}(|M|,s)$. Temos $MR \models \phi$ ou $MR \models \neg\phi$.

Se $MR \models \phi$ existe $P \subset D(R)$ tal que $P \Vdash_{+} \phi$ e, por conseguinte, $(\wedge P \longrightarrow \phi) \in M^S$. Como $P \subset D(R)$ segue-se que $\phi \in \overline{M^S} \cup D(R)$.

Se $MR \models \neg\phi$, procedemos do mesmo modo e mostramos que $\neg\phi \in \overline{M^S} \cup D(R)$, ou seja, que R completa $\overline{M^S}$

Reciprocamente, admitamos que R completa $\overline{M^S}$. Procederemos por indução sobre a complexidade de ϕ afim de mostrar que R é geral para M.

Seja ϕ da forma $\exists x\, \phi_1(x)$ tal que $MR \models \neg\phi$. Tem-se que $\overline{M^S} \cup D(R) \vdash \neg\phi$, visto ser $\overline{M^S} \cup D(R)$ completa. Existe, portanto, um conjunto finito $P \subset D(R)$ tal que $\overline{M^S} \cup P \vdash \neg\phi$. Se $P \not\Vdash_{-} \exists x\, \phi_1(x)$, existe $Q \supset P$ e $c \in |M|$ tal que $Q \Vdash_{+} \phi_1(c)$ e por conseguinte uma relação R_Q geral para M, com $Q \subset D(R_Q)$ (dado que M é enumerável) tal que $MR_Q \models \exists x\, \phi_1(x)$. Isto é contraditório, uma vez que $P \subset Q \subset D(R_Q)$ e MR_Q é modelo de $\overline{M^S}$, logo, de $\overline{M^S} \cup P$.

Os demais casos são imediatos.

Corolário 3.4.19 - Se M^S é semanticamente completa e MR é modelo de M^S, R é geral para M. (Ignoramos se a recíproca é verdadeira).

§3.5 - Equivalência lógica e teoria forçada - Vimos, Proposição 3.4.1, que se M_o e M_1 são multirelações isomor -

fas, então $P \mid\Vdash_{+(-)} \phi$ see $f(P) \mid\Vdash_{+(-)} f(\phi)$, onde f é a aplicação que realiza tal isomorfismo. Segue-se daí que $M_o^S = M_1^S$.

Uma questão que surge de modo natural é a de se saber se $M_o \equiv M_1$ implica $M_o^S = M_1^S$. Tal questão foi posta pela primeira vez por Fraïssé em 1971 e solucionada por B.Poizat em 1976. A resposta a esta questão é negativa e o contra-exemplo dado o seguinte:

<u>Contra-exemplo 3.5.1</u> - Sejam $M_o = \langle \mathbb{N},+\rangle$, onde $+$ é a relação ternária, soma usual em $\mathbb{N}$; $M_1 = \langle \mathbb{N}^*,\oplus\rangle$ uma extensão (própria) de M_o e ϕ a fórmula $\exists x \forall y \exists z (y>x \longrightarrow (y \leq z \leq y+y \wedge S(y)))$, com S um predicado unário.

Observe-se que as relações $<$ e $\leq$ são expressas pela relação $+$ em M_o e por $\oplus$ em M_1.

Vejamos, então, que a condição vazia Φ força (-) ϕ em $\mathcal{L}(|M_o|,S)$ (i.e., relativamente a M_o). Ou seja, que dados P e $a \in \mathbb{N}$, existem $Q \supset P$ e $b \in \mathbb{N}$ tais que para todo $Q' \supset Q \supset P$ e $c \in \mathbb{N}$, $Q' \mid\not\Vdash_{+} (b>a) \longrightarrow ((b \leq c \leq b+b) \wedge S(c))$, o que evidentemente é verdade se tomarmos $b>a$, $b>d$ para todo $d \in Dom(P)$ e Q' tal que $Q' \supset P$ e $Q'(t) = 0$ para todo $b \leq t \leq b+b$.

Por outro lado, a condição vazia Φ força (+) ϕ em $\mathcal{L}(|M_1|,S)$ (i.e relativamente a M_1). Ou seja, existe

$a \in \mathbb{N}^*$, tal que, dados P e $b \in \mathbb{N}^*$, existem $Q \supset P$ e $c \in \mathbb{N}^*$ tais que $Q \mid\vdash_{+} (b>a) \longrightarrow ((b<c<b+b) \wedge S(c))$ o que certamente se verifica se tomarmos $a \in \mathbb{N}^*$ infinito i.e., $a>t$ para todo $t \in \mathbb{N}$. Com efeito, nestas condições, se $b>a$, o intervalo $[b,b+b]$ tem uma infinidade de elementos, o que nos permite escolher Q e c convenientemente.

O contra-exemplo acima nos leva à seguinte questão: $M_0^S = M_1^S$ implica serem M_0 e M_1 isomorfas? No resultado que estabeleceremos a seguir resolvemos esta questão, dando uma condição suficiente, para que M_0^S seja igual a M_1^S mais fraca que o isomorfismo. Antes, contudo, definiremos n-isomorfismo.

Definição 3.5.2 - Sejam M_0 e M_1 multirelações adequadas à $\mathcal{L}$.

(i) todo isomorfismo local $f: F_0 \subset |M_0| \longrightarrow F_1 \subset |M_1|$ é um 0-*isomorfismo*.

(ii) $f: F_0 \subset |M_0| \longrightarrow F_1 \subset |M_1|$ é um n-*isomorfismo* $(n \in \mathbb{N})$ se dados os conjuntos finitos $E_0 \subset |M_0|$, $E_1 \subset |M_1|$, existem extensões $\overline{f}: F_0 \cup E_0 \longrightarrow |M_1|$ e $\overline{f^{-1}}: F_1 \cup E_1 \longrightarrow |M_0|$ de f e f^{-1} respectivamente, tais que $\overline{f}$ e $\overline{f^{-1}}$ são ainda (n-1)-isomorfismos.

Diremos que a multirelação M_o é *w-equivalente* à M, se a aplicação vazia é um n-isomorfismo qualquer que seja $u \in \mathbb{N}$. Em símbolos $M_o \cong_w M_1$.

<u>Proposição 3.5.3</u> - A relação $\cong_w$ é uma equivalência.

A demonstração se faz de modo óbvio.

<u>Proposição 3.5.4</u> - Sejam $M_o = <|M_o|, R_1, \ldots, R_k>$ e $M_1 = <|M_1|, H_1, \ldots, H_k>$ multirelações adequadas à $\mathcal{L}$, S um (novo) predicado, ϕ uma sentença de $\mathcal{L}(|M_o|, S)$ em forma normal prenex com p blocos de quantificadores, P uma condição em $\mathcal{L}(|M_o|, S)$ e, finalmente, $f: M_o \longrightarrow M_1$ um p'-isomorfismo com p'>p e tal que Dom(f) contém todas as constantes que ocorrem em ϕ ou em P. Nestas condições, tem-se que: $P \Vdash_{+(-)} \phi$ see $f(P) \Vdash_{+(-)} f(\phi)$.

<u>Demonstração</u> - (Indução sobre a complexidade de ϕ).

1 - Se ϕ é livre de quantificadores, o valor de ϕ, forçado por P, depende apenas das sentenças básicas de ϕ nas quais ocorrem predicados R_i, e das extensões finitas de P. Em virtude de ser p'>p, tem-se que, em ambos os casos, o valor do forcing é preservado por f, i.e., f(P) força $f(\phi)$ ao mesmo valor que P força ϕ. De modo aná-

logo vê-se que o valor de $f(\phi)$ forçado por $f(P)$ é preservado por f^{-1}.

2 - Os casos em que ϕ é de uma das formas $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$, $\neg \phi_1$, podem ser tratados sem dificuldades.

3 - Seja ϕ da forma $\exists x_1,\ldots,x_n \; \phi_1(x_1,x_n)$ onde $\exists x_1,\ldots,x_n$ é o primeiro bloco de quantificadores.

(i) $P \mid\mid\!\!-_{+} \phi$. Neste caso, existem $a_1,\ldots,a_n \in |M_o|$ tais que $P \mid\mid\!\!-_{+} \phi_1(a_1,\ldots,a_n)$. Seja, então, $\overline{f}$ extensão de f a $Dom(f) \cup \{a_1,\ldots,a_n\}$. $\overline{f}$ é um $(p'-1)$-isomorfismo como $\phi_1(a_1,\ldots,a_n)$ tem $k-1$ blocos de quantificadores vem, da hipótese da indução, que $f(P) \mid\mid\!\!-_{+} f(\phi_1)\,(\overline{f}(a_1),\ldots$ $\ldots,\overline{f}(a_n))$. Logo, $f(P) \mid\mid\!\!-_{+} f(\phi)$. De modo análogo, com f^{-1} no lugar de f, mostra-se que vale a recíproca.

(ii) $f(P) \mid\mid\!\!\not-_{-} f(\phi)$. Logo, existe $Q \supset f(P)$ e $b_1,\ldots,b_n \in |M_1|$ tais que $Q \mid\mid\!\!-_{+} f(\phi_1)(b_1,\ldots,b_n)$. Consideremos a extensão $\overline{f^{-1}}$ de f^{-1} ao conjunto $Dom(f^{-1}) \cup F$, onde, $F = \{t : t$ ocorre em $Q\} \cup \{b_1,\ldots,b_n\}$. $\overline{f^{-1}}$ é um $(p'-1)$-isomorfismo. Como $f(\phi_1)(b_1,\ldots,b_n)$ tem $p-1$ blocos de quantificadores vem, da hipótese da indução, que $\overline{f^{-1}}(Q) \Vdash_{+} \phi_1(\overline{f^{-1}}(b_1),\ldots,\overline{f^{-1}}(b_n))$, ou seja, existem $a_1 = \overline{f^{-1}}(b_1),\ldots,a_n = \overline{f^{-1}}(b_n)$ e $Q' = \overline{f^{-1}}(Q) \supset P$, tais que $Q' \Vdash_{+} \phi_1(a_1,\ldots,a_n)$, i.e., $P \not\Vdash_{-} \phi$.

Reciprocamente, se $P \not\Vdash_{-} \phi$, existem $a_1,\ldots,a_n \in |M_o|$ e $Q \supset P$ tais que $Q \Vdash_{+} \phi_1(a_1,\ldots,a_n)$. Seja $\overline{f}$ uma extensão de f ao conjunto $Dom(f) \cup F$, onde, $F = \{t : t$ ocorre em $Q\} \cup \{a_1,\ldots,a_n\}$. $\overline{f}$ é um $(p'-1)$-isomorfismo e $\phi_1(a_1,\ldots$ $\ldots,a_n)$ tem $p-1$ blocos de quantificadores. Logo, da hipótese **da** indução, vem que $\overline{f}(Q) \Vdash_{+} f(\phi_1)(\overline{f}(a_1),\ldots,\overline{f}(a_n))$, i.e., existem $b_1 = \overline{f}(a_1),\ldots,b_n = \overline{f}(a_n) \in |M_1|$ e $Q' = \overline{f}(Q) \supset f(P)$ tais que $Q' \Vdash_{+} f(\phi_1)(b_1,\ldots,b_n)$, ou seja, $f(P) \not\Vdash_{-} f(\phi)$.

Em consequência da Proposição 3.5.4, que acabamos de demonstrar, segue-se que:

<u>Proposição 3.5.5</u> - $M_o \cong_w M_1$ implica $M_o^S = M_1^S$.

<u>Demonstração</u> - Seja ϕ uma sentença de $\mathcal{L}|M_o|,s)$ em forma normal prenex com k blocos de quantificadores. Por hipótese, existe um p'-isomorfismo com $p' > p$ e pela Proposição anterior se $P \Vdash_{-} \phi$, $f(P) \Vdash_{-} f(\phi)$.

Inversamente, se ϕ é uma sentença de $\mathcal{L}(|M_1|,s)$ em forma normal prenex com p blocos de quantificadores vem, por motivos análogos, que se

$$P \mid\models_{-} \phi, \; g(P) \mid\models_{-} g(\phi).$$

Logo, tem-se que $M_o^S = M_1^S$.

\- * -

CAPÍTULO 4

§4.1 - Introdução - Nos Capítulos II e III, estudamos as noções de forcing dadas por Robinson e por Fraïssé respectivamente. Muito embora haja inicialmente resultados paralelos nas citadas teorias, as diferenças entre elas vão se acentuando na medida em que as desenvolvemos. Neste Capítulo procuraremos fazer um estudo comparativo destas duas noções e estudá-las em conjunto, ao contrário do que fizemos nos Capítulos anteriores, quando as tratamos isoladamente.

Nosso segundo resultado deste Capítulo apresenta o forcing de Fraïssé como caso especialíssimo do forcing de Robinson. Para tanto, faremos uso deste último no caso em que $A = \Phi$.

Dando continuidade à tentativa de comparar estes dois conceitos, definimos um novo forcing que, como se mostrará, tem como casos particulares e extremos o forcing de Fraïssé e o forcing de Robinson.

§4.2 - O Forcing de Fraïssé via forcing de Robinson

Proposição 4.2.1 - Seja $M = <|M|, R_1, \ldots, R_k>$ uma multirelação, $\mathcal{L}$ a linguagem adequada a M, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(|M|, S)$ e ϕ uma sentença de $\mathcal{L}'$ em forma normal prenex. Nestas condições tem-se que:

(i) Dado $P \in C(Th(M))$, se $P \,||\!\!- \phi$, $\hat{P} \,||\!\!-_{+} \phi$, onde $\hat{P}$ é a condição (segundo Fraïssé) constituída pelas sentenças (básicas) de P nas quais S ocorre.

(ii) Se Q é uma condição no sentido de Fraïssé e $Q \,||\!\!-_{+} \phi$, existe $P \in C(Th(M))$ tal que $\hat{P} = Q$ e $P \,||\!\!- \phi$.

<u>Demonstração</u> - 1 - Seja ϕ básica. Há dois casos a considerar:

(a) ϕ é uma sentença na qual S ocorre.

(b) ϕ é uma sentença na qual ocorre um dos R_i; $i=1,\ldots,k$.

Dando-se (a), $P \,||\!\!- \phi$ see $\phi \in P$; assim, $\phi \in \hat{P}$ e, portanto, $\hat{P} \,||\!\!-_{+} \phi$.

Se ocorre (b), $P \,||\!\!- \phi$ see $\phi \in D(M)$; logo, $||\!\!-_{+} \phi$ e consequentemente $\hat{P} \,||\!\!-_{+} \phi$.

2 - Se ϕ é da forma $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$ ou $\exists x\ \phi_1(x)$, a demonstração se faz sem dificuldades.

3 - Seja ϕ da forma $\forall x\ \phi_1(x)$. Assim, $P \in C(Th(M))$

é tal que $P \Vdash \phi$ see para todo $P' \in C(Th(M))$, $P' \supset P$ e todo $c \in |M|$, existe $P'' \in C(Th(M))$, $P'' \supset P'$ e $P'' \Vdash \phi_1(c)$. Deste modo, em particular, se $\hat{P}' \supset \hat{P}$, existe $\hat{P}'' \supset \hat{P}'$ tal que $P'' \Vdash \phi_1(c)$; pela hipótese da indução $\hat{P}'' \Vdash_+ \phi_1(c)$ e, portanto, $\hat{P} \Vdash_+ \phi$, pois não existe $\hat{P}'$ nem $c \in |M|$ tais que $\hat{P}' \supset \hat{P}$ e $\hat{P}' \Vdash_- \phi_1(c)$.

Fica assim demonstrada a parte (i) da Proposição. Vejamos em seguida a demonstração de (ii).

1 - Seja ϕ básica. Consideremos os casos seguintes:

(a) ϕ é uma sentença na qual S ocorre.

(b) ϕ é uma sentença na qual ocorre um dos R_i; $i=1,\ldots,k$.

Dando-se (a), $Q \Vdash_+ \phi$ see $\phi \in Q$. Neste caso, se $P = \hat{P} = Q$, tem-se $P \in C(Th(M))$ e $P \Vdash \phi$.

Se ocorre (b), $Q \Vdash_+ \phi$ see $\phi \in D(M)$; assim, se $P = Q \cup \{\phi\}$, $P \in C(Th(M))$ e $P \Vdash \phi$.

2 - ϕ é da forma $\phi_1 \wedge \phi_2$, com ϕ_1 e ϕ_2 básicas. Neste caso tem-se:

(a) S ocorre em ϕ_1 e em ϕ_2.

(b) S não ocorre em ϕ_1 nem em ϕ_2.

(c) S ocorre em uma das sentenças ϕ_i; $i=1,2$, mas não na outra.

Em todos os casos ((a),(b) e (c)) se $Q \mid\vdash_+ \phi$, $P = Q \cup \{\phi_1, \phi_2\} \in C(Th(M))$ e $P \mid\vdash \phi$.

De modo análogo verifica-se que a Proposição é válida se ϕ é da forma $\phi_1 \vee \phi_2$ com ϕ_1 e ϕ_2 básicas.

3 - Seja ϕ da forma $\exists x\, \phi_1(x)$. $Q \mid\vdash_+ \phi$ see existe $a \in |M|$ tal que $Q \mid\vdash_+ \phi_1(a)$. Pela hipótese da indução, existe $P \in C(Th(M))$ com $\hat{P} = Q$ e tal que $P \mid\vdash \phi_1(a)$, portanto, $P \mid\vdash \exists x\, \phi_1(x)$.

4 - ϕ é da forma $\forall x\, \phi_1(x)$. Tem-se que $Q \mid\vdash_+ \phi$ see qualquer que seja $Q' \supset Q$ e $a \in |M|$, $Q' \mid\not\vdash_- \phi_1(a)$. Assim, dado $Q' \supset Q$ e $a \in |M|$ existe sem $Q'' \supset Q' \supset Q$ tal que $Q'' \mid\vdash_+ \phi_1(a)$.

Suponhamos pois, que $P' \in C(Th(M))$ é tal que $\hat{P}' \supset Q$ e $a \in |M|$. Existe, portanto, uma condição Q', no sentido de Fraïssé, tal que $Q' \supset \hat{P}'$ e $Q' \mid\vdash_+ \phi_1(a)$. Pela hipótese da indução, existe $P'' \in C(Th(M))$ tal que $\hat{P}'' = Q'$ e $P'' \mid\vdash \phi_1(a)$. É claro, que $P = P'' \cup P'$ é uma condição no sentido de Robinson pois, $\hat{P}'' \supset \hat{P}'$ e as sentenças de P nas quais ocorrem um dos R_i; $i=1,\ldots,k$, pertencem a $D(M)$. A condição P resolve nosso problema, uma vez que $P \supset P'$ e $P \Vdash \phi_1(a)$, ou seja $Q \Vdash \forall x\, \phi_1(x)$.

Com base na Proposição que acabamos de demonstrar, estabeleceremos o resultado seguinte:

<u>Proposição 4.2.2</u> - Seja $M = \langle |M|, R_1, \ldots, R_k \rangle$ uma multirelação, $\mathcal{L}$ uma linguagem adequada para M e $\mathcal{L}(|M|,S)$ uma extensão de $\mathcal{L}$. Nestas condições tem-se que $\overline{M^S} = (Th(M))^f$ onde $(Th(M))^f$ é o forcing companheiro de Th(M) relativamente à linguagem $\mathcal{L}(|M|,S)$ e ao conjunto $A = \Phi$.

<u>Demonstração</u> - Se $\phi \in (Th(M))^f$, $\Phi \Vdash^* \phi$, ou seja, $\Phi \Vdash \neg\neg\phi$. Assim, para todo $P \subset C(Th(M))$, $P \not\Vdash \neg\phi$. Isto significa que para todo $P \in C(Th(M))$ existe $P' \in C(Th(M))$ tal que $P' \supset P$ e $P' \Vdash \phi$. Em particular, se tomarmos uma condição Q, no sentido de Fraïssé, existe $P' \in C(Th(M))$ tal que $P' \supset Q$ e $P' \Vdash \phi$. Pela Proposição anterior $\hat{P'} \Vdash_+ \phi$. Assim, nenhuma condição no sentido de Fraïssé, força (-) ϕ, i.e., $\phi \in \overline{M^S}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\phi \in \overline{M^S}$; isto é, que não exista condição P, no sentido de Fraïssé tal que $P \Vdash_- \phi$. Logo, para todo P existe $P' \supset P$ tal que $P' \Vdash_+ \phi$. Seja, então, $Q \in C(Th(M))$. Sabemos que existe uma condição, segundo Fraïssé, P', tal que $P' \supset \hat{Q}$ e $P' \Vdash_+ \phi$.

Da Proposição anterior decorre que existe $P'' \in C(Th(M))$ tal que $P'' \supset P'$ e $P'' \,||\!\!-\, \phi$. Assim, se tomarmos $P = P'' \cup Q$, temos que $P \in C(Th(M))$, $P \supset Q$ e $P \,||\!\!-\, \phi$; portanto, $\Phi \,||\!\!-^{*}\, \phi$, ou seja $\phi \in (Th(M))^{f}$.

§4.3 - Uma generalização comum do forcing de Robinson e do forcing de Fraïssé.

Definição 4.3.1 - Sejam $M = \langle |M|, R_1, \ldots, R_k \rangle$ uma multirelação, $\mathcal{L}$ uma linguagem (sem constantes) adequada a M, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(|M|, S_1, \ldots, S_\ell)$ e $\mathcal{L}''$ a sublinguagem de $\mathcal{L}(S_1, \ldots, S_\ell)$ na qual ocorrem apenas predicados $S_1, \ldots, S_\ell$. Considere-se uma teoria T em $\mathcal{L}''$. *Uma condição em* $\mathcal{L}'$ *relativa a* T é um conjunto finito P de sentenças básicas de $\mathcal{L}'$ nas quais ocorrem apenas predicados $S_1, \ldots, S_\ell$ (i.e., sentenças básicas de $\mathcal{L}''(|M|)$) tais que $T \cup P$ seja consistente. O conjunto das condições será denotado por $C(M,T)$. Se ϕ é uma sentença de $\mathcal{L}'$ e $P \in C(M,T)$, definimos as meta-relações $P \,||\!\!-_{+}\, \phi$ e $P \,||\!\!-_{-}\, \phi$ do mesmo modo que Fraïssé, i.e., pelas condições F_1-F_5 do parágrafo 3.2 (Levando-se obviamente em conta que $P \in C(M,T)$).

Definição 4.3.2 - Seja $P \in C(M,T)$. Denotaremos por $M_{(P)}^{\overline{S_1, \ldots, S_\ell}}$ o conjunto das sentenças de $\mathcal{L}'$ que não são forçadas (-) por nenhuma condição $Q \in C(M,T)$ com $Q \supset P$. $\overline{M_{(P)}^{S_1,\ldots,S_\ell}}$ será denominado de *teoria forçada por* $M, S_1, \ldots$ $\ldots, S_\ell$, T *e* P. No caso de ser $P = \Phi$, poremos $\overline{M_{(P)}^{S_1,\ldots,S_\ell}} = \overline{M^{S_1,\ldots,S_\ell}}$.

Pode-se verificar que as propriedades básicas estabelecidas para o forcing de Fraïssé (e as correspondentes para o forcing de Robinson) permanecem ainda válidas. Mais precisamente, valem para este forcing as Proposições 3.2.1 - 3.2.7. Pode-se também definir multirelação $<|M|, S_1, \ldots, S_\ell>$ geral para M de modo análogo ao que se fez no Capítulo III, permanecendo também válidos os resultados básicos correspondentes. Isto, contudo, não será feito aqui com detalhes. No que se segue, estaremos interessados em relacionar o forcing de Fraïssé com o de Robinson através deste novo forcing.

Definição 4.3.3 - Denotaremos por:

(i) T^f o forcing companheiro de T relativamente à sublinguagem $\mathcal{L}''$ e ao cojunto $A = |M|$.

(ii) Th(M) a teoria completa de M em $\mathcal{L}(|M|)$. (Observe-se que $\mathcal{L}''$ e $\mathcal{L}(|M|$ são sublin guagens de $\mathcal{L}'$).

Isto posto, estabeleceremos o seguinte:

Proposição 4.3.4 - $\overline{M^{S_1,\ldots,S_\ell}} = Th(M) \sqcup T^f \sqcup C_{M,T}$, onde $C_{M,T}$ é o conjunto de fórmulas ϕ de $\mathcal{L}'$ nas quais ocorrem (simultâneamente) um dos predicados R_i, $i = 1,\ldots,k$ e um dos predicados S_j, $j=1,\ldots,\ell$. (C_{MT} será denominado de conjunto contato). Para tanto, necessitamos dos seguintes resultados:

Proposição 4.3.5 - Dado $P \in C(M,T)$ e uma sentença ϕ, em forma normal prenex em $\mathcal{L}''(|M|)$, tem-se que:

1 - $P \Vdash_+ \phi$, então $P \Vdash \phi$,

2 - Se $P \Vdash \phi$, existe $\overline{P} \supset P$, $\overline{P} \in C(M,T)$ tal que $\overline{P} \Vdash_+ \phi$; onde $\Vdash$ é o forcing de Robinson relativo à $\mathcal{L}''$ e $A=|M|$.

Demonstração - 1 - (i) Se ϕ é básica, $P \Vdash_+ \phi$ see $\phi \in P$; logo, $P \Vdash \phi$.

(ii) Se ϕ é de uma das formas $\phi_1 \wedge \phi_2, \phi_1 \vee \phi_2, \neg\phi_1$ ou $\exists x\ \phi_1(x)$ a demonstração é imediata.

(iii) Suponhamos ϕ da forma $\forall x\ \phi_1(x)$. Tem-se que $P \Vdash_+ \phi$ see dado $Q \in C(M,T)$, $Q \supset P$ e $a \in |M|, Q \nVdash_- \phi_1(a)$.

Logo, dado $Q \in C(M,T)$, $Q \supset P$ e $a \in |M|$, existe $Q' \in C(M,T)$, $Q' \supset Q$ tal que $Q' \Vdash_+ \phi_1(a)$. Isto significa que $P \Vdash \phi$.

2 - (i) Se ϕ é atômica, $P \Vdash \phi$ see $\phi \in P$ e, portanto, $\overline{P} = P$ é tal que $\overline{P} \Vdash_+ \phi$.

(ii) Se ϕ é da forma $\neg S_i(a_1,\ldots,a_{n_i})$ $i=1,\ldots,\ell$, temos dois casos a considerar:

(a) $\neg S_i(a_1,\ldots,a_{n_i}) \in P$,

(b) $\neg S_i(a_1,\ldots,a_{n_i}) \notin P$.

Ocorrendo (a), $\overline{P} = P$ é tal que $\overline{P} \Vdash_+ \phi$.

Verificando-se (b), tem-se que, para todo $Q \in C(M,T)$ com $Q \supset P$, $Q \not\Vdash S_i(a_1,\ldots,a_{n_i})$, ou seja, $Q \cup \{S_i(a_1,\ldots$ $\ldots,a_{n_i})\}$ é inconsistente com T qualquer que seja $Q \in C(M,T)$ e $Q \supset P$. Em particular $P \cup \{S_i(a_1,\ldots,a_{n_i})\}$ é inconsistente com T. Logo, $\overline{P} = P \cup \{\neg S_i(a_1,\ldots,a_{n_i})\}$ é consistente com T e tal que $\overline{P} \Vdash_+ \phi$.

(iii) Seja ϕ da forma $\phi_1 \wedge \phi_2$, onde ϕ_1 e ϕ_2 são fórmulas básicas. $P \Vdash \phi$ see $P \Vdash \phi_1$ e $P \Vdash \phi_2$. É claro que (Proposição 2.2.2) $\overline{P}_1 = P \cup \{\phi_1\} \in C(M,T)$ e $\overline{P}_1 \Vdash \phi_2$ visto que $P \subset \overline{P}_1$. Assim, segue-se ainda da Proposição 2.2.2, que $\overline{P} = \overline{P}_1 \cup \{\phi_2\} \in C(M,T)$. $\overline{P} \Vdash_+ \phi$.

(iv) Suponhamos ϕ da forma $\phi_1 \vee \phi_2$. Nestas condições $P \Vdash \phi$ see $P \Vdash \phi_1$ ou $P \Vdash \phi_2$; pela hipótese da indução, existe $\overline{P}_1 \supset P$ tal que $\overline{P}_1 \Vdash_+ \phi_1$ ou existe $\overline{P}_2 \supset P$ tal que $\overline{P}_2 \Vdash_+ \phi_2$. Tomando-se $\overline{P} = \overline{P}_i$ $(i=1,2)$ conforme se verifique a primeira ou segunda dessas hipóteses, vem que $\overline{P} \supset P$ e $\overline{P} \Vdash_+ \phi$.

(v) Seja ϕ da forma $\exists x\ \phi_1(x)$. $P \Vdash \exists x\ \phi_1(x)$ see existe $a \in |M|$ tal que $P \Vdash \phi_1(a)$; pela hipótese da indução, existe $\overline{P} \supset P$ tal que $\overline{P} \Vdash_+ \phi_1(a)$ com $\overline{P} \in C(M,T)$. i.e., $\overline{P} \Vdash_+ \exists x\ \phi_1(x)$.

(vi) Finalmente, consideremos ϕ da forma $\forall x\ \phi_1(x)$. $P \Vdash \phi$ see dado $Q \in C(M,T)$ e $a \in |M|$, existe $Q' \in C(M,T)$ com $Q' \supset Q$ tal que $Q' \Vdash \phi_1(a)$. Pela hipótese da indução, existe $\overline{Q} \in C(M,T)$ com $\overline{Q} \supset Q'$, tal que $\overline{Q} \Vdash_+ \phi_1(a)$. Assim, nenhuma condição $Q \supset P$ é tal que $Q \Vdash_- \phi_1(a)$, com $a \in |M|$; portanto, $P \Vdash_+ \phi$.

<u>Proposição 4.3.5</u> - O conjunto das sentenças de $M^{\overline{S_1,\ldots,S_k}}$ nas quais não ocorrem predicados R_i; $i=1,\ldots,k$ (i.e sentenças de $\mathcal{L}''(|M|)$) é precisamente T^f.

<u>Demonstração</u> - Tal conjunto é fechado pela dedução (em $\mathcal{L}''(|M|)$) e, pela Proposição anterior, para tais sen -

tenças, tem-se que $\phi \in M^{S_1,\ldots,S_k}$ see $\phi \in T^f$.

Proposição 4.3.4 - $M^{\overline{S_1,\ldots,S_\ell}} = Th(M) \sqcup T^f \sqcup C_{M,T}$.

Demonstração - Consequência da Proposição anterior.

Proposição 4.3.6 - Se $M = |M|$, ou seja, se M é uma multirelação reduzida à base, $M^{S_1,\ldots,S_\ell} = T^f$; obtendo-se assim o forcing de Robinson.

Se $T = \Phi$, i.e., se T é a teoria sem axiomas não lógicos, $M^{S_1,\ldots,S_\ell}$ é a teoria forçada por M e $S_1,\ldots,S_\ell$ obtendo-se, portanto, o forcing de Fraïssé.

Demonstração - Consequência da Proposição anterior.

Proposição 4.3.7 - Sejam M_o e M_1 multirelações de mesmo tipo, $\mathcal{L}$ uma linguagem adequada a M_o (e a M_1), $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(|M_o|, S_1,\ldots,S_\ell)$, $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}(|M_1|, S_1,\ldots,S_\ell)$ e T uma teoria em $\mathcal{L}(S_1,\ldots,S_\ell)$ na qual ocorrem apenas predicados S_i; $i=1,\ldots,\ell$. Nestas condições tem-se que:

(i) Se $f: M_o \longrightarrow M_1$ é um n-isomorfismo, $P \in C(M_o,T)$ e $P \in Dom(f)$, então $f(P) \in C(M_1,T)$.

(ii) Se $M_o \simeq_w M_1$ então $M_o^{\overline{S_1,\ldots,S_\ell}} = M_1^{\overline{S_1,\ldots,S_\ell}}$.

Demonstração - Como f é um isomorfismo local tem-se que $T \cup P$ consistente implica $T \cup f(P)$ consistente, portanto, se $P \in C(M_0 T)$, $f(P) \in C(M_1, T)$.

Levando-se em conta (i) e procedendo-se de modo análogo ao que se fez na demonstração da Proposição 3.5.5, demonstra-se (ii).

– * –

APÊNDICE

Relacionamos a seguir alguns problemas em aberto concernentes ao "forcing" de Fraïssé.

1 - No Capítulo II, vimos que a noção de forcing segundo Robinson, relaciona-se, de certo modo, com as noções de companheiro-semântico e de estrutura existencialmente completa. É possível se obter noções análogas a estas últimas para o forcing de Fraïssé? (Relativisando-se talvez as noções mencionadas à estrutura M).

2 - P. Henrard [8], mostra ser possível reduzir a noção de forcing segundo Robinson à noções usuais da teoria dos modelos, i.e., ser o conceito de forcing de Robinson não essencial para se definir o forcing-companheiro T^f de uma teoria T. Seria possível um resultado análogo para a teoria M^s?

3 - As Proposições 3.4.3 e 3.4.13 estabelecem condições suficientes a fim de que M^s seja completa e χ_0-categórica, respectivamente. Tais condições são também necessárias? Caso contrário, seria interessante determinar condições necessárias e suficientes para que M^s seja completa ou χ_0-categórica.

4 - Determinar qual o invariante de M dado por M^S, i.e., qual a classe das estruturas M que têm a mesma teoria forçada M^S, ou ainda, que relações devem satisfazer as estruturas M_o e M_1 para que $M_o^S = M_1^S$?

5 - Estudar o forcing introduzido em IV nos casos intermediários, mais precisamente, caracterizar o conjunto $C_{M,T}$.

BIBLIOGRAFIA

1 - *Barwise,J.* and *Robinson,A.* - Completing theories by forcing, Annals of Mathematical logic,vol.2 (1970).

2 - *Bell,J.* and *Slomson,A.* - Models and ultraproducts, North-Holland Publishing company (1969) Amsterdan.

3 - *Chang,C.* and *Keisler,H.* - Model theory, North - Holland publishing company (1973) Amsterdan.

4 - *Ehrenfencht,A.* - An aplication of games to the completeness problem for formalized theories - Fundamenta mathematical XLIX (1961).

5 - *Fraïssé,R.* - Course of Mathematical logic, vol. 1 e 2, D. Reidel publishing company (1974) Dordrecht - Holland; Boston-U.S.A.

6 - *Fraïssé,R.* - Théorie des relations, policopiado, Université de Provence, Marseille.

7 - *Henrard,P.* - Une théorie sans modèle générique,C.R. Acad. Sc. Paris, vol. 272 A (1971).

8 - *Henrard, P.* - Le forcing compagnon sans forcing, C.R. Acad. Sc. Paris vol. 276 A (1973).

9 - *Hirschfeld, J.* and *Wheeler, W.* - Forcing arithmetic, division ring, Lecture notes nº 454, Springer Verlag (1975).

10 - *Macintyre, A.* - On algebraically closed division rings (preprint).

11 - *Macintyre, A.* - On algebraically closed groups, Annals of mathematics vol. 96 (1972).

12 - *Robinson, A.* - Forcing in model theory, Symposia mathematica, vol. 5 (1970).

13 - *Robinson, A.* - Infinite forcing in model theory, Proceedings of the second Scandinavian logic symposium, (1970) Amsterdan.

14 - *Robinson, A.* - Introduction to model theory, North-Holland publishing company (1975) Amsterdan.

15 - *Ryll-Nardzewski* - On categoricity in power $\leqslant \chi_0$, Bull. Acad Polonaise Sc. vol. 7 (1959).

16 - *Sette,A.M.* - A propos d'une condition conduisant à une théorie forcée saturée, C.R. Acad. Sc. Paris 277 A (1973).

17 - *Sette,A.M.* - Multirelations fortement homogènes et ses rapports avec les théories forcées M^S. C.R. Acad. Sc. Paris, 280 A (1975).

18 - *Shelah,S.* - A note on model complete models and generic models. Proceedings of the Americam Mathe - matical Society, vol. 54, (1972).

19 - *Sabbagh,G.* and *Eklof,P.* - Model completions and modules, Annals of mathematical logic,vol.2, (1970).

20 - *B.Poizat* - Remarques sur le "forcing" en théorie des modèles, C.R. Acad, Sc. Paris 283 (1976).

21 - *B.Poizat* - Forcing et relations générales sur une structure χ_0-catégorique. C.R. Acad. Sc. Paris 283 (1976).