OFELIA TERESA ALAS

SÔBRE UMA EXTENSÃO DO CONCEITO DE COMPACIDADE E SUAS APLICAÇÕES

SÃO PAULO — 1968

OFELIA TERESA ALAS

SÔBRE UMA EXTENSÃO DO CONCEITO DE COMPACIDADE E SUAS APLICAÇÕES

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para obtenção do grau de Doutor em Ciências (Matemática).

- 1 9 6 8 -

A G R A D E C I M E N T O S

Ficamos profundamente reconhecida ao Professor Edison Farah, orientador desta tese, que sempre nos incentivou, demonstrando constante interêsse por nossos estudos . Aliás, êste nosso trabalho teve, essencialmente, origem numa questão que nos foi proposta pelo Professor Farah .

Agradecemos a todos aquêles que contribuiram para a realização dêste trabalho e, em especial, ao prof. Chaim Samuel Hönig .

Estendemos o nosso agradecimento aos professôres Candido Lima da Silva Dias, Lindolpho de Carvalho Dias e Carlos B. de Lyra, por sua contribuição indireta à execução desta tese, bem como à sra. Namy da Silva Zombini, que gentilmente se prontificou a datilografá-la .

NOTA HISTÓRICA

Em 1944, Dieudonné introduziu o conceito de paracompacidade, generalizando, assim, a noção de compacidade. Anos mais tarde, em 1948, A.H. Stone mostrou a estreita relação que havia entre os espaços topológicos paracompostos e os totalmente normais, que J.W. Tukey definira em 1940. O estudo dêstes conceitos levou, em 1951, aos resultados de Bing, Smirnov e Nagata sôbre a metrização dos espaços topológicos. Durante a década de 50 , E. A. Michel mostrou que, sob certas condições, várias propriedades, aparentemente mais fracas que a paracompacidade, lhe eram equivalentes.

Os resultados que se obtiveram a partir da noção de espaço topológico paracompacto, justificaram a afirmação de Alexandroff (1960) de que "a classe dos espaços paracompactos era a classe de espaços topológicos mais importante definida nos últimos anos".

Várias extensões do conceito de Dieudonné foram introduzidas a partir de 1950. Assim, C. W. Dowker definiu, em 1951, espaço $\aleph_0$-paracomposto. Motivado por esta definição, dez anos depois, Morita introduziu os espaços m-paracompactos.(1) Êstes últimos estão relacionados com os espaços "quase m-totalmente normais" ("almost m-fully normal"), apresentados por Mansfield em 1957. Ponomarev, em 1961, definiu os espaços $\mathcal{U}$-compactos.

Além destas já citadas, outras noções relacionadas com a paracomacidade (de modo menos direto que as anteriores) foram definidas, como, por exemplo, os espaços "collectionwise normal", introduzidos por Bing em 1951 e os espaços "realcompact" (Q-espaços) apresentados por Hewitt.

Finalmente, em 1962, Kennison definiu os espaços m-pseudocompactos.

Por outro lado, no seu livro General Topology, editado em 1955, J.L. Kelley apresentou a seguinte conjetura :

---

(1) - G.Aquaro afirmou que êle já utilizara essa noção em data anterior a 1961.

" um espaço topológico X é paracompacto se e sòmente se o conjunto $\left\{ \bigcup_{Y \in G} Y \times Y \;\middle|\; G \text{ é recobrimento aberto de } X \right\}$ é base de uma uniformidade para X, e nessa uniformidade X é completo " .

Em 1959, H. H. Corson mostrou, através de um contra-exemplo, que a conjetura acima era falsa.(1) Entretanto, no ano anterior, o próprio Corson dera uma condição necessária e suficiente para que um espaço topológico fôsse paracompacto, utilizando as estruturas uniformes e os filtros "fracamente de Cauchy" ("weakly Cauchy") relativamente a uma estrutura uniforme. Êste último conceito foi definido por Corson em 1958.

(1) - H. Tamano afirma, em [23] , que Namioka mostrou a falsidade dessa conjetura.

I N T R O D U Ç Ã O

Em vista das várias extensões da noção de compacidade que são conhecidas, tivemos a idéia de que talvez fôsse possível estender o conceito de compacidade de forma a englobar os casos indicados na nota histórica e, eventualmente, outros.

Ora, tendo em mente a definição de espaço $\mathcal{U}$-compacto, introduzida por Ponomarev, conclui-se que para todo espaço topológico (X,τ) existe um $\mathcal{U}$ conveniente (por exemplo, $\mathcal{U}$ = conjunto dos recobrimentos abertos de X), tal que (X,τ) é $\mathcal{U}$-compacto. Assim sendo, parece supérfluo definir um novo conceito, estendendo a noção de compacidade, pois que os espaços topológicos que satisfizessem tal conceito, seriam particulares espaços $\mathcal{U}$-compactos. Entretanto, motivada pela definição dada por Ponomarev, nos pareceu possível uma definição que caracterizasse mais fàcilmente as propriedades dos espaços topológicos em questão. Exemplifiquemos com a análise das duas afirmações abaixo :

1) "um espaço topológico (X,τ) é paracompacto se e sòmente se é $\mathcal{U}$-compacto, onde $\mathcal{U}$ é o conjunto dos recobrimentos abertos de X , localmente finitos" ;
2) "um espaço topológico (X,τ) é compacto se e sòmente se é $\mathcal{U}$-compacto, onde $\mathcal{U}$ é o conjunto dos recobrimentos abertos de X , finitos".

Em 1) , o fato de que os elementos de $\mathcal{U}$ são <u>localmente finitos</u> caracteriza a propriedade de ser (X,τ) paracompacto; já , em 2) , é o fato de serem os elementos de $\mathcal{U}$ <u>finitos</u> , que caracteriza a compacidade do espaço (X,τ). Assim, em ambos os casos a caracterização é dada em função da natureza dos elementos de $\mathcal{U}$. Por outro lado, em se tratando de espaços topológicos (X,τ) m-paracompactos, "realcompacts", etc. , a caracterização da natureza dos elementos de $\mathcal{U}$, não dependendo especìficamente dos elementos de τ , para cada espaço topológico (X,τ) em consideração, se nos afigura bastante complicada.

Por estas razões, a partir dos conceitos definidos por Morita e Ponomarev, introduzimos a noção de espaço $\not{/}\not{/}$ - $\underline{///}$ - compacto.

No capítulo 0 damos algumas noções preliminares necessárias ao desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Além disso, tentamos justificar a definição de <u>normalidade</u> aqui utilizada.

Certas propriedades dos recobrimentos abertos, em particular dos localmente finitos, são analisadas no capítulo 1 .

O capítulo 2 trata especìficamente dos espaços $\not{/}\not{/}$-$\underline{///}$-compactos, sua definição e propriedades. Estudamos o seu comportamento, relativamente às estruturas uniformes compatíveis com a topologia, através da análise dos seus $\not{/}\not{/}$-filtros.

Finalmente, o capítulo 3 encerra umas aplicções dos resultados anteriores. Para tal estudamos alguns particulares espaços $\not{/}\not{/}$-$\underline{///}$-compactos, bem como certas propriedades dêsses espaços. Em particular , no n.4 , estudamos um problema que nos foi proposto pelo prof. Edison Farah e de cujo estudo resultou êste trabalho. Por último, citamos dois exemplos de espaços topológicos completamente regulares, que servem para mostrar o porquê da hipótese de normalidade que aparece no teorema 5 do capítulo 2 .

CAPÍTULO O

- Noções preliminares -

Neste trabalho utilizaremos a definição de "espaço topológico" que aparece no Bourbaki ([1]) . As notações utilizadas aquí (por exemplo, para denotar o interior de um conjunto, a aderência de um conjunto,etc.) são as que aparecem em [1] .

Cumpre notar-se que os espaços topológicos que consideraremos não são, em geral, de Hausdorff. Nos casos em que a hipótese de que o espaço topológico considerado seja de Hausdorff se faça necessária, ela será explícitamente mencionada.

Para outras definições referentes à Topologia nos baeamos nos livros [1] , [2] , [3] , [4] , [6] , [8] e [9] , sempre tendo em mente o que afirmamos no parágrafo anterior.

Quanto ao que concerne à Teoria dos Conjuntos, tomamos por base o que se encontra em [5] , [7] e [8] .

A seguir daremos algumas definições e proposições necessárias aos capítulos subsequentes.

1. Normalidade

Definição : Um espaço topológico X é normal se satisfaz aos seguintes axiomas :

T_3) para todo subconjunto fechado, F , de X, e todo ponto $x \in X-F$, existem subconjuntos abertos de X, V_1 e V_2 , disjuntos, verificando $F \subset V_1$ e $x \in V_2$;

T_4) quaisquer que sejam os subconjuntos de X, F_1 e F_2 , fechados, disjuntos, existem dois subconjuntos de X, abertos, disjuntos, V_1 e V_2 , tais que $F_1 \subset V_1$ e $F_2 \subset V_2$.

Em geral, a definição de espaço topológico normal que aparece nos livros exige que o espaço seja de Hausdorff e verifique T_4 ou, então, que satisfaça apenas ao axioma T_4. Preferimos aqui esta definição, de certo modo intermediária, porque, se bem que os espaços não sejam separados, admitem uma estrutura uniforme compatível com a topologia. ([3], teorema 2 - pag. 17). Por outro lado, a partir de um espaço topológico que satisfaz ao axioma T_4 e não satisfaz ao T_3 é possível obter um espaço topológico normal associado a êle, conservando a continuidade de certas funções, como vemos a seguir :

Seja (X,τ) um espaço topológico que satisfaz T_4 e não T_3. Ponhamos

$$\tau_1 = \left\{ Y \varepsilon \tau \;\middle|\; Y = \bigcup_{y \varepsilon Y} \overline{\{y\}} \right\}.$$

τ_1 é uma topologia sôbre X. Além disso, (X,τ_1) é normal. Por outro lado, se τ_2 é uma topologia menos fina do que τ, tal que (X, τ_2) satisfaz T_3, então $\tau_2 \subset \tau_1$. Verifica-se, também, a seguinte

<u>Proposição</u> : <u>Seja</u> (Z, τ') <u>um espaço topológico que satisfaz</u> T_3 <u>e</u> f <u>uma função de</u> X <u>em</u> Z. <u>Então</u> f, <u>como aplicação de</u> (X,τ) <u>em</u> (Z, τ'), <u>é contínua se e sòmente se</u> f, <u>como aplicação de</u> (X, τ_1) <u>em</u> (Z, τ'), <u>é contínua</u>.

(A verificação é imediata.)

2. <u>Recobrimentos</u>

Na literatura matemática são usuais as duas definições de <u>recobrimento de um espaço topológico</u>, que daremos a seguir .

Seja X um espaço topológico.

<u>Definição 1</u> : Um recobrimento do espaço topológico X é um <u>subconjunto</u> de $p(X)$ tal que a reunião de seus elementos é igual a X .

<u>Definição 2</u> : Um recobrimento do espaço topológico X é uma <u>família</u> cujos têrmos pertencem a $p(X)$ e tal que a reunião de seus têrmos é igual a X.

No decorrer dêste trabalho quando nos referirmos a um recobrimento de um espaço topológico usaremos ora a definição 1, ora a definição 2, dependendo de qual das duas se mostra preferível no caso.

Pôsto isto, os conceitos de "recobrimento aberto", "recobrimento localmente finito", etc. são os que decorrem naturalmente do que acabamos de convencionar.

Vamos introduzir, agora, algumas notações e nomenclaturas.

Seja X um espaço topológico e S um recobrimento de X. Permitimo-nos a impropriedade de linguagem " $Y \varepsilon S$ " (Y pertence a S), onde S é um recobrimento de X segundo a definição 2, para exprimir que Y é um têrmo da família S.

Sendo S e S_1 dois recobrimentos de X, diremos que S_1 é um <u>refinamento</u> de S, em símbolos " $S_1 > S$ ", se para todo $Y \varepsilon S_1$, existe $Z \varepsilon S$, verificando $Y \subset Z$.

Sendo S um recobrimento de X e y um ponto de X, a notação $(y;S)$ indica a reunião dos $Y \varepsilon S$, tais que $y \varepsilon Y$. Analogamente, se A é um subconjunto de X, $(A;S)$ denota a reunião dos $Y \varepsilon S$, tais que $Y \cap A \neq \emptyset$.

Finalmente, se S e S_1 são recobrimentos de X, diremos que S_1 é um Δ-refinamento de S se $\left\{ (y;S_1) \mid y \varepsilon X \right\} > S$.

A fim de simplificar o texto, vamos impor que, se X é um espaço topológico, então

$\mathcal{U}_*$ = conjunto dos recobrimentos abertos de X, localmente finitos ;

$\mathcal{U}_{**}$ = conjunto dos recobrimentos abertos de X, localmente finitos, que são finitos ou formados por "cozero-sets";(1)

(1) - $A \subset X$ é cozero-set $\Longleftrightarrow \exists f: X \longrightarrow R$, contínua, tal que $f^{-1}(R - \{0\}) = A$.

$\mathcal{U}_m$ = conjunto dos recobrimentos abertos de X, localmente finitos, de cardinalidade estritamente menor do que m (onde m é um cardinal infinito).

3. Espaços uniformes

Neste número nos referiremos a algumas propriedades dos espaços uniformes, tomando por base os conceitos introduzidos em [1], capít. 2.*

Exatamente da mesma forma que fazemos com os espaços topológicos, nos referiremos ao "espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$" como o "espaço uniforme X" desde que, no caso em questão, não haja possibilidades de confundir qual a estrutura uniforme sôbre X que estamos considerando.

Definição. Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $\mathcal{U}$ é uma estrutura uniforme sôbre X, tal que $\mathcal{T}$ é a topologia deduzida da estrutura uniforme $\mathcal{U}$ ([1], cap. 2, pag. 186), diremos que $\mathcal{U}$ é uma estrutura uniforme compatível com a topologia $\mathcal{T}$, ou ainda, que $\mathcal{U}$ é uma uniformidade para $(X, \mathcal{T})$.

A proposição que enunciaremos em seguida é uma formulação diferente do corolário 2 ([1], cap. 2, pag. 186). Esta formulação é mais útil para nós.

Proposição. Seja $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme. O conjunto $\left\{ \bigcup_{y\in X} \overset{\circ}{V}(y)\times\overset{\circ}{V}(y) \;\middle|\; V \in \mathcal{U},\ V \text{ é simétrica} \right\}$ é base de entôrnos de $\mathcal{U}$.(1)

Seja $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme. Em vista da proposição anterior, a êle podemos associar o conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ (\overset{\circ}{V}(y))_{y\in X} \;\middle|\; V \in \mathcal{U} \right\},$$ obtendo-se a seguinte

Proposição. Se S pertence a $\mathcal{S}$, existe $S_1 \in \mathcal{S}$, tal que S_1 é Δ-refinamento de S.

---

(1) - Sendo $V \in \mathcal{U}$ e $y\in X$, com $\overset{\circ}{V}(y)$ denotamos o interior do conjunto $V(y)$, relativamente à topologia deduzida de $\mathcal{U}$, onde
$$V(y) = \left\{ t\in X \;\middle|\; (y,t) \in V \right\}.$$

<u>Demonstração</u> : Basta notar-se se $U \in \mathcal{U}$, simétrica, existe $V \in \mathcal{U}$, simétrica tal que $V \circ V \subset U$ ./

<u>Proposição</u> . <u>Se</u> $S \in \mathcal{S}$, <u>existe uma sequência</u> $(S_n)_{n \geqslant 1}$, <u>de elementos de</u> $\mathcal{S}$, <u>tal que</u>

1) S_1 <u>é</u> Δ-<u>refinamento de</u> S ;

2) S_n <u>é</u> Δ-<u>refinamento de</u> S_{n-1} , $\forall\ n \geqslant 2$.

Quanto ao que se refere a espaços completos necessitaremos o que se encontra em [1] , capítulo 2 , §3 .

No que concerne aos <u>espaços uniformizáveis</u> ([1] , cap. 2 , pag.217), devemos lembrar a

<u>Proposição</u> ([3], pag. 17) . <u>Para que um espaço topológico</u> X <u>seja uniformizável é necessário e suficiente que verifique o axioma</u> :

" <u>para todo ponto</u> $x \in X$ <u>e tôda vizinhança</u> V <u>de</u> x , <u>existe uma função contínua</u> f , <u>de</u> X <u>em</u> $[0,1]$, <u>tal que</u>

$$f(x) = 0 \quad e \quad f(X-V) = \{1\} \text{ ".}$$

Sabe-se que se X é um espaço topológico completamente regular , existe uma uniformidade, $\mathcal{U}$, para X , tal que, sendo $(Y, \mathcal{U}')$ um espaço uniforme e $f: X \longrightarrow Y$, contínua, então f é uniformemente contínua de $(X, \mathcal{U})$ em $(Y, \mathcal{U}')$. A esta uniformidade $\mathcal{U}$ chamaremos <u>uniformidade universal para</u> X . Daqui por diante, sempre que considerarmos um espaço topológico X , completamente regular, indicaremos por $\mathcal{U}_X$ a uniformidade universal para X .

<u>Notação</u> . Se X é um espaço topológico e $\mathcal{W}$ é uma classe de recobrimentos abertos de X , indicaremos por $[\mathcal{W}]$ o conjunto

$$\left\{ \bigcup_{T \in \alpha} T \times T \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{W} \right\} .$$

CAPÍTULO 1

- Recobrimentos abertos -

Neste capítulo vamos dar, sob a forma de lemas, algumas propriedades dos recobrimentos abertos . Êsses lemas serão utilizados nos capítulos seguintes .

Lema 1 . *Seja* X *um espaço topológico e* S *um recobrimento aberto de* X *, que não admite refinamento pertencente a* $///_*$ *. Então, se* $S_1 \varepsilon ///_*$ *, existe* $V \varepsilon S_1$ *, tal que* V *não está contido em nenhuma reunião finita de elementos de* S *.*

Demonstração . Por absurdo, suponhamos que existe $S_1 \varepsilon ///_*$, tal que todo $V \varepsilon S_1$ está contido numa reunião finita de elementos de S . Para cada $V \varepsilon S_1$, indiquemos por Y_V um subconjunto finito de S , que recobre V . Ponhamos $S'' = \{ V \cap H \mid V \varepsilon S_1 \text{ e } H \varepsilon Y_V \}$. Por construção, S'' é refinamento de S e recobre X . Por outro lado, S'' é localmente finita, o que é absurdo. E está demonstrado o lema. /

Nota. Pela demonstração acima, conclui-se que se o cardinal de S_1 é infinito, então o cardinal de S'' seria menor ou igual ao cardinal de S_1 .

Lema 2 . *Seja* X *um espaço topológico normal e* S *um recobrimento aberto de* X *, localmente finito . Nestas condições, existe* $S_1 \varepsilon ///_*$ *tal que* S_1 *é* Δ *-refinamento de* S *.*

Demonstração . Dieudonné ([13]) mostrou que, sendo X um espaço topológico normal e S um recobrimento aberto de X , localmente finito , existe $S_2 \in \mathcal{U}_*$ tal que

$$\{ \overline{Y} \mid Y \in S_2 \} > S \quad .$$

Para cada $\overline{Y}$, com $Y \in S_2$, indiquemos por $G_{\overline{Y}}$ um elemento de S, satisfazendo $\overline{Y} \subset G_{\overline{Y}}$.

Pôsto isto, pondo-se para cada $x \in X$,

$$E_X = \bigcap_{x \in \overline{Y}} G_{\overline{Y}} \cap (X - \bigcup_{\substack{x \notin \overline{Y} \\ Y \in S_2}} \overline{Y}) \text{ , então o conjunto } E_x \text{ é aberto ,}$$

$\forall x \in X$.

Para cada $x \in X$, indiquemos por P_x, o conjunto $\{ G_{\overline{Y}} \mid x \in \overline{Y} \}$. (Note-se que P_x é finito, $\forall\ x \in X$.)

Seja $P'' = \{ P_x \mid x \in X \}$. Para cada $P \in P''$, ponhamos

$M_P = \bigcup_{P_x = P} E_x$. Ora, M_P é aberto para todo $P \in P''$ e

$(M_P)_{P \in P''}$ é recobrimento de X.

Mostremos que $(M_P)_{P \in P''}$ é localmente finita.

Seja $z \in X$ e V uma vizinhança de z que só encontra um número finito de elementos de S, digamos $G_1,\ldots,G_r$. Então $V \cap M_P \neq \emptyset$ implica $P \subset \{G_1,\ldots,G_r\}$.

Além disso, $(M_P)_{P \in P''}$ é Δ-refinamento de S. Com efeito, tomemos $y \in X$ e consideremos o conjunto

$$(y\ ;\ (M_P)_{P \in P''}) = \bigcup_{\substack{y \in M_P \\ P \in P''}} M_P \quad .$$

Suponhamos que $y \in \overline{Y}$, com $Y \in S_2$. Ora, se $y \in M_P$, para um certo $P \in P''$, existe $x_1 \in X$, tal que $y \in E_{x_1}$ e $P_{x_1} = P$. Então, pela construção de E_{x_1}, $x_1 \in \overline{Y}$, donde $G_{\overline{Y}} \in P$. Logo, $M_P \subset G_{\overline{Y}}$, para todo $P \in P''$ tal que $y \in M_P$. Concluímos, assim, a demonstração. /

Nota. Desta demonstração resulta que se o cardinal de S é infinito , então o cardinal de P'' é menor ou igual ao cardinal de S .

Como consequência do lema 2 e da nota acima , obtém-se uma proposição referente a certas estruturas uniformes para os espaços topológicos normais . Antes de enunciarmos a proposição, vamos introduzir algumas notações que serão utilizadas no decorrer do trabalho .

Seja X um espaço topológico .

$$\mathcal{U}_{\aleph_0} = \left\{ Y \subset X \times X \;\middle|\; \exists\, \alpha \in \mathcal{W}_{\aleph_0} \text{ tal que } Y \supset \bigcup_{Z \in \alpha} Z \times Z \right\} ;$$

$$\mathcal{U}_{*} = \left\{ Y \subset X \times X \;\middle|\; \exists\, \alpha \in \mathcal{W}_{*} \text{ tal que } Y \supset \bigcup_{Z \in \alpha} Z \times Z \right\} ;$$

$$\mathcal{U}_{m} = \left\{ Y \subset X \times X \;\middle|\; \exists\, \alpha \in \mathcal{W}_{m} \text{ tal que } Y \supset \bigcup_{Z \in \alpha} Z \times Z \right\} ,$$

onde m é um cardinal maior do que $\aleph_0$.

<u>Proposição</u> . <u>Seja</u> X <u>um espaço topológico normal</u> . <u>Para todo cardinal infinito</u> m , $\mathcal{U}_m$ <u>é uma uniformidade para</u> X . <u>Além disso,</u> $\mathcal{U}_*$ <u>é</u> , <u>também</u> , <u>uma uniformidade para</u> X .

O resultado que daremos a seguir não foi explìcitamente enunciado , mas foi provado (de forma distinta da que daremos) por A. H. Stone , em 1948 , no decorrer da demonstração de um teorema ([22]) .

<u>Lema 3</u> . <u>Seja</u> X <u>um espaço topológico</u> , $(W_i)_{i \in I}$ <u>um recobrimento aberto de</u> X <u>e</u> ($\mathcal{V}_n$) <u>uma sequência de recobrimentos abertos de</u> X , <u>tais que</u>

1) $\mathcal{V}_1$ <u>é</u> Δ-<u>refinamento de</u> $(W_i)_{i \in I}$;

2) $\mathcal{V}_n$ <u>é</u> Δ-<u>refinamento de</u> $\mathcal{V}_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

<u>Nestas condições, existe um recobrimento aberto de</u> X , <u>localmente finito, que refina</u> $(W_i)_{i \in I}$.

<u>Demonstração</u> . Aqui daremos apenas um esboço da demonstração, sendo que as notações utilizadas, bem como maiores detalhes, são encontrados em [29].

Supomos $X \neq \emptyset$.

Para cada $i \in I$, ponhamos

$$V_i^1 = (W_i\ ;\ -1)\ ,\ V_i^n = (V_i^{n-1}\ ;\ n)\ ,\ \forall\, n \geqslant 2 \quad \text{e} \quad V_i = \bigcup_n V_i^n\ .$$

Ora, $\bigcup_{i \in I} V_i^1 = X$ e se $x \in V_i$, então $x \in V_i^m$ (para um m conveniente) e $(\{x\}\ ;\ m) \subset V_i \subset W_i$.

Indiquemos por $\mathcal{C}$ a classe das famílias abertas $H = (H_{ni})$, tais que, sendo

$$J_H = \{\, i \in I \mid (\exists\ n \geqslant 1)\ (H_{ni} \neq V_i)\,\}\ ,\ \text{verificam}$$

1) $(H_{ni}\ ;\ n+1) \subset V_i$, $\forall\, n \geqslant 1$, $\forall\, i \in J_H$;

2) $\displaystyle\bigcup_{i \in J_H} V_i = \bigcup_{\substack{n \geqslant 1 \\ i \in J_H}} H_{ni}$;

3) $\forall\, n \geqslant 1$, $\forall\, U_{n+3} \in \mathcal{U}_{n+3}$, U_{n+3} encontra, no máximo, um conjunto H_{ni}, com $i \in J_H$.

$\mathcal{C}$ é não vazia e seus elementos são recobrimentos de X. Ordenemos do seguinte modo, sendo $H = (H_{ni})$ e $H' = (H'_{ni})$ pertencentes a $\mathcal{C}$, $H \leqslant H' \Longleftrightarrow J_H \subset J_{H'}$ e $H_{ni} = H'_{ni}$, $\forall\, i \in J_H$, $\forall\, n \geqslant 1$.

$(\mathcal{C}, \leqslant)$ é indutivo e, pelo teorema de Zorn, admite elemento maximal, que denotaremos por $H^* = (H^*_{ni})$. H^* é tal que $\bigcup_{i \in J_{H^*}} V_i = X$.

Para todo $(n,i) \in N \times J_{H^*}$ pomos

$$G_{ni} = (H^*_{ni}\ ;\ n+5) - \bigcup_{\substack{j \in J_{H^*} \\ 1 \leqslant m \leqslant n-1}} \overline{H^*_{mj}}\ .$$

A família (G_{ni}), assim construída, é refinamento aberto, localmente finito, de $(W_i)_{i \in I}$ e é recobrimento de X. /

Como consequencia do lema 3 e da proposição do n.3 do capítulo 0, tem-se a

Proposição : Seja $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme e seja $U \in \mathcal{U}$. Então $(\overset{\circ}{U}(x))_{x \in X}$ admite um recobrimento aberto de X, localmente finito, que a refina .

Corolário : Se X é um espaço topológico normal, $\mathcal{U}_*$ é a uniformidade universal para X .

Lema 4 : Seja X um espaço topológico e S um recobrimento aberto de X , tal que se S_1 é um subconjunto de S , com card.S_1 menor do que card.S , então S_1 não é recobrimento de X . Então, existe um subconjunto A de X, com card.A = card.S , verificando

$$\text{card.}\,(Z \cap A) < \text{card.}A \ , \ \forall\, Z \in S \ .$$

Demonstração . O caso em que o cardinal de S é finito é trivial. Suponhamos que o cardinal de S é infinito. Indiquemos por k o cardinal de S e seja K um conjunto bem ordenado, de cardinalidade k , e tal que o conjunto dos predecessores de cada um de seus elementos tenha cardinalidade menor do que K (1). Seja f uma função bijetora de K em S .

Consideremos o mínimo , a'' , de K e fixemos um elemento $x_{a''}$ de X . Tomando-se $b \in K$, $b \neq a''$, temos que $\bigcup_{a<b} f(a)$ não contém X e o seu complementar em relação a X tem cardinalidade maior ou igual a k , portanto, existirá $x_b \in X - \bigcup_{a<b} f(a)$, com $x_b \neq x_a$, $\forall\, a \in K$, $a < b$. Chamemos A ao conjunto $\{ x_a \mid a \in K \}$. Ora, k = card.A e card.$(Z \cap A)$ < card. A , $\forall$ $Z \in S$. Fica, pois, demonstrado o lema./

Nota . Se no caso anterior, S fôsse localmente finito, o conjunto A poderia ser construído de tal forma que fôsse fechado. (Para $b \in K, b \neq a''$,

---

(1) - A boa ordem sôbre K erá denotada com $\leqslant$.

bastaria tomar $x_b \in X - (\bigcup_{a<b} f(a) \cup \bigcup_{\substack{x_a \in Y \in S \\ a<b}} Y))$.

Vamos provar, agora um lema que relaciona os recobrimentos abertos localmente finitos e as funções reais contínuas.

Lema 5 : *Se X é um espaço topológico completamente regular e S, um recobrimento aberto de X, localmente finito, que não admite sub-recobrimento finito, então existe uma função de X em R, contínua e não limitada.*

Demonstração. Seja S um recobrimento de X nas condições do lema. Tomemos um ponto $x_1 \in X$ e um elemento $M_1 \in S$, ao qual x_1 pertence. Então, existe um aberto V_1, verificando

$$\{x_1\} \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset M_1 .$$

Tomemos $x_2 \in X-(x_1 ; S)$ e um elemento $M_2 \in S$, ao qual x_2 pertence. Então, existe um aberto V_2, verificando

$$\{x_2\} \subset V_2 \subset \overline{V}_2 \subset M_2 \qquad \text{e} \qquad \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \emptyset .$$

Procedendo dessa forma é possível construir uma sequencia infinita de pontos de X, (x_n), e uma sequencia infinita de abertos, (V_n), satisfazendo as condições :

1) $x_n \in X- \bigcup_{i=1}^{n-1} (x_i;S)$, $\forall n \geqslant 2$;

2) $x_n \in V_n$, $\forall n \geqslant 1$;

3) o conjunto $\{ \overline{V}_n \mid n \geqslant 1 \}$ refina S e os seus elementos são dois a dois disjuntos.

Como X é completamente regular, para cada $n \geqslant 1$, existe uma função f_n de X em $[0,n]$, contínua, tal que $f_n(x_n) = n$ e $f(X-V_n) = \{0\}$. Consideremos a função g de X em R, definida do seguinte modo :

$$g(x) = 0 \ , \ \forall x \in X - \bigcup_n V_n$$

e

$$g(x) = f_n(x) \ , \ \forall x \in V_n \ , \ \forall n \geqslant 1 \ .$$

A função g é contínua, pois (V_n) é localmente finita, já que refina S.

Está, assim, provado o lema ./

Finalmente, daremos um lema sôbre recobrimentos abertos, a respeito da cardinalidade dos mesmos.

<u>Lema 6</u> : <u>Seja</u> X <u>um espaço topológico completamente regular e</u> $(M_i)_{i\in I}$ <u>um recobrimento aberto de</u> X, <u>localmente finito, que não admite sub-recobrimento de cardinalidade menor do que</u> m (cardinal infinito). <u>Então, existe</u> $(V_j)_{j\in J}$, <u>família de abertos em</u> X, <u>tal que</u> $J \subset I$, $\emptyset \neq \overline{V}_j \subset M_j$, $\forall j \in J$ <u>e</u> $\overline{V}_j \cap \overline{V}_k = \emptyset$, $\forall j, k \in J$, $j \neq k$. <u>Além disso</u>, card.$J \geqslant m$.

<u>Demonstração</u> . Seja $\mathcal{C}$ a classe das famílias $(V_j)_{j\in J}$ tais que

1) V_j é aberto, não vazio, $\forall j \in J$;
2) $J \subset I$ e $\overline{V}_j \subset M_j$, $\forall j \in J$;
3) $\overline{V}_j \cap \overline{V}_k = \emptyset$, $\forall j, k \in J$, $j \neq k$.

ordenemos $\mathcal{C}$ do seguinte modo, sendo $V = (V_j)_{j\in J}$ e $V' = (V'_j)_{j\in J'}$, pomos

$$V \leqslant V' \iff J \subset J' \quad \text{e} \quad V'_j = V_j \ , \ \forall j \in J \ .$$

O conjunto $\mathcal{C}$ não é vazio, $(\mathcal{C}, \leqslant)$ é indutivo e, pelo teorema de Zorn, admite um elemento maximal que indicaremos por

$$V^* = (V^*_j)_{j\in J^*} \ .$$

E como se tem, òbviamente, card.$J^* \geqslant m$, fica demonstrado o lema ./

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS $\nparallel$ - $\underline{///}$ - COMPACTOS

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de espaço $\nparallel$-$\underline{///}$-compacto. Como já foi dito na introdução, este conceito, bem como aquêle que o motivou (introduzido por Ponomarev ([21])), é muito amplo, no sentido de que todo espaço topológico pode ser descrito como um particular espaço $\nparallel$-$\underline{///}$-compacto. Entretanto, no decorrer do capítulo, imporemos condições adicionais aos elementos de $\underline{///}$, que justificarão a afirmação de que êsse conceito é uma extensão da noção de compacidade. A seguir daremos algumas definições, sendo que as definições 1 e 2 foram motivadas por Ponomarev ([21]) e que a definição 4 foi dada, originalmente, por Corson ([11]) . Seja (X,τ) um espaço topológico, $\nparallel$ uma classe de recobrimentos abertos de X e $\underline{///}$ uma classe de recobrimentos de X.(1)

<u>Definição 1</u> : O espaço topológico (X,τ) é $\nparallel$-$\underline{///}$-<u>compacto</u> se para todo $\beta \in \nparallel$, existe $\alpha \in \underline{///}$, tal que α é refinamento de β (isto é, em símbolos, $\alpha > \beta$).

<u>Definição 2</u> : Uma classe σ de subconjuntos fechados de X é $\nparallel$-$\underline{///}$-<u>tangente</u> se ao menos uma das seguintes condições é verificada:

$$1^{\underline{a}})\quad \bigcap_{Y\in\sigma} Y \neq \emptyset \quad ; \quad 2^{\underline{a}})\quad \bigcap_{Y\in\sigma} Y = \emptyset \quad \text{e}$$

existe $\beta \in \nparallel$, tal que $\beta > \{X - Y \mid Y \in \sigma\}$ e, para cada $\alpha \in \underline{///}$, existe $V \in \alpha$, verificando $V \cap Y \neq \emptyset$, $\forall Y \in \sigma$.

<u>Definição 3</u> : Seja $\mathcal{F}$ um filtro sôbre X. $\mathcal{F}$ é um $\nparallel$-<u>filtro</u> se $\bigcap_{Y\in\mathcal{F}} \overline{Y} \neq \emptyset$, ou se, sendo $\bigcap_{Y\in\mathcal{F}} \overline{Y} = \emptyset$, existe B, base de

---

(1)- Daqui por diante, sempre que tivermos um espaço topológico (X,τ) e aparecerem as letras $\nparallel$ e $\underline{///}$, afetadas ou não de sinais, estaremos supondo (X,τ), $\nparallel$ e $\underline{///}$ satisfazem esta condição.

filtro de $\mathcal{F}$, fechada, tal que $\{X - \overline{Z} \mid \overline{Z} \in B\}$ pertence a $\hat{\mathcal{A}}$. (2)

Definição 4 : Seja $\mathcal{U}$ uma estrutura uniforme sôbre X, e $\mathcal{F}$ um filtro sôbre X . $\mathcal{F}$ é "fracamente de Cauchy", relativamente a $\mathcal{U}$, se para todo $U \in \mathcal{U}$, existe um filtro $\mathcal{H}$ sôbre X, mais fino do que $\mathcal{F}$, e um elemento $H \in \mathcal{H}$, verificando

$$H \times H \subset U \, .$$

Antes de passarmos à demonstração de teoremas gerais a respeito de espaços $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-compactos, vamos mostrar como as noções de paracompacidade, m-compacidade, m-paracompacidade e $\mathcal{U}$-compacidade são descritas a partir da definição 1 .

Seja X um espaço topológico e m um número cardinal infinito. Verificam-se, então, as seguintes equivalências :

I) X é paracompacto se e sòmente se X é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_*$-compacto, onde $\mathcal{A}$ é o conjunto dos recobrimentos abertos de X e $\mathcal{B}_*$ é o conjunto dos recobrimentos abertos de X , localmente finitos ;

II) X é m-paracompacto se e sòmente se X é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_*$-compacto, onde $\mathcal{A}$ é o conjunto dos recobrimentos abertos de X , de cardinalidade menor ou igual a m e $\mathcal{B}_*$ é o conjunto dos recobrimentos abertos de X , localmente finitos;

III) X é m-compacto se e sòmente se X é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\aleph_0}$-compacto , onde $\mathcal{A}$ é o conjunto dos recobrimentos abertos de X , de cardinalidade menor ou igual a m e $\mathcal{B}_{\aleph_0}$ é o conjunto dos recobrimentos abertos de X de cardinalidade menor do que $\aleph_0$;

IV) X é $\mathcal{U}$-compacto se e sòmente se X é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-compacto , onde $\mathcal{A}$ é o conjunto dos recobrimentos abertos de X e $\mathcal{B} = \mathcal{U}$.

---

(2)- $G' \in \hat{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow$ (G' é recobrimento de X e existe $G \in \mathcal{A}$, $G > G'$, tal que todo elemento de G' é reunião finita de elementos de G).

Nota : Seja (X,τ) um espaço topológico, $\mathcal{H}$ uma classe de recobrimentos abertos de X e $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ duas classes de recobrimentos de X. É evidente que se X é $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-compacto e $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$, então X é $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}'$-compacto. Além disso, se os elementos de $\mathcal{M}$ são abertos, X é $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-compacto e $\mathcal{M}$-$\mathcal{M}'$-compacto (mesmo que $\mathcal{M}'$ não contenha $\mathcal{M}$), então X é $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}'$-compacto.

Daremos agora, um teorema que relaciona as definições 1 e 2 ; entretanto, no que se seguirá, preferimos caracterizar os espaços $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-compactos, quando possível, a partir de suas estruturas uniformes, utilizando as definições 3 e 4.

Teorema 1 : Um espaço topológico X é $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-compacto se e sòmente se todo $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-tangente tem intersecção não vazia.

Demonstração : Seja σ um $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-tangente e suponhamos, por absurdo, que $\bigcap_{Y \in \sigma} Y = \emptyset$ logo, existe $\beta \in \mathcal{H}$ tal que

$$\beta > \{X - Y \mid Y \in \sigma\}.$$

Como, por hipótese, X é $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-compacto, existe $\alpha \in \mathcal{M}$, com $\alpha > \beta$. Portanto, se $V \in \alpha$, existe $Y \in \sigma$, verificando $V \subset X - Y$, donde $V \cap Y = \emptyset$, o que é absurdo, pois σ é $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-tangente.

Seja $\beta \in \mathcal{H}$. Então, $\sigma = \{X - Y \mid Y \in \beta\}$ é uma classe de subconjuntos fechados de X, cuja intersecção é vazia. Logo, σ não é $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-tangente, donde, existe $\alpha \in \mathcal{M}$ tal que, para todo $V \in \alpha$, tem-se $V \cap (X - Y) = \emptyset$, para algum $Y \in \beta$ conveniente, isto é, $\alpha > \beta$. Conclui-se, assim, que X é $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-compacto ./

Lembrando os resultados de Corson ([11]), procuraremos caracterizar os espaços $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}$-compactos, que são completamente regulares, através de suas estruturas uniformes.

Teorema 2 : Seja X um espaço topológico completamente regular, $\mathcal{F}$ um filtro sôbre X e $\mathcal{U}$ uma uniformidade para X. Então, verifica-se uma das três alternativas :

1) $\mathcal{F}$ tem um ponto aderente ;

2) $\{ X - \overline{Y} \mid Y \in \mathcal{F} \}$ é recobrimento aberto de X e admite um recobrimento aberto de X, localmente finito, que o refina ;

3) $\mathcal{F}$ é "fracamente de Cauchy" relativamente a $\mathcal{U}$.

Demonstração : Com efeito, basta supor que $\mathcal{F}$ não satisfaz a condição 2. Seja $U \in \mathcal{U}$; então, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subset U$. Por outro lado, seja α um recobrimento aberto de X, localmente finito, que refina $\{W(x) \mid x \in X\}$ (existe em virtude do lema 3).

Ora, se $\mathcal{F}$ não satisfaz a condição 1, então, existe $V \in \alpha$ tal que V intercepta todos os elementos de $\mathcal{F}$. Indiquemos por $\mathcal{H}$ o filtro sôbre X, gerado por $\mathcal{F} \cup \{V\}$. Note-se que $\mathcal{H}$ é mais fino do que $\mathcal{F}$ e, além disso, $V \times V \subset U$. Mostramos dêsse modo que se $\mathcal{F}$ não satisfaz as condições 1 e 2 então necessàriamente deve satisfazer a condição 3. /

Corolário : Nas mesmas condições do teorema 2, se $\mathcal{F}$ for um ultrafiltro sôbre X, a condição 3) toma a seguinte forma

3') $\mathcal{F}$ é filtro de Cauchy relativamente a $\mathcal{U}$.

Com uma demonstração semelhante a do teorema 2, daremos, a seguir, uma condição necessária para que o resultado de Corson se estenda ao nosso caso.

Teorema 3 : Seja X um espaço topológico completamente regular e $\mathcal{H}$ uma classe de recobrimentos abertos de X . Se existe uma uniformidade $\mathcal{U}$ para X , tal que todo $\mathcal{H}$-filtro "fracamente de Cauchy" , relativamente a $\mathcal{U}$, tem um ponto aderente, então X é $\mathcal{H}$-$\mathcal{W}_*$ -compacto .

Demonstração : Por absurdo, suponhamos que existe um $\beta \in \mathcal{H}$ não admitindo refinamento pertencente a $\mathcal{W}_*$. Indiquemos por $\mathcal{F}$ o filtro sôbre X , gerado pela classe dos conjuntos da forma $X - T$, onde T é reunião finita de elementos de β. $\mathcal{F}$ é um $\mathcal{H}$-filtro e, além disso, pelo lema 1 , se $\alpha \in \mathcal{W}_*$, existe $V \in \alpha$ que encontra todos os elementos de $\mathcal{F}$. Isto nos leva a um absurdo, pois $\mathcal{F}$ é "fracamente de Cauchy" relativamente a $\mathcal{U}$ e não tem ponto aderente . Então, X é necessàriamente $\mathcal{H}$-$\mathcal{W}_*$-compacto . /

Teorema 4 : Seja X um espaço topológico completamente regular . As seguintes condições são equivalentes :

1) para tôda classe $\mathcal{H}$ tal que X é $\mathcal{H}$-$\mathcal{W}_*$-compacto, todo $\mathcal{H}$-filtro "fracamente de Cauchy" , relativamente a $\underline{\mathcal{U}}_X$, tem um ponto aderente ;

2) se $\alpha \in \mathcal{W}_*$ e α não admite sub-recobrimento finito , existe $U \in \underline{\mathcal{U}}_X$, tal que $\{U(x) \mid x \in X\}$ refina o conjunto das reuniões finitas de elementos de α .

Demonstração : 1 $\Longrightarrow$ 2 . Suponhamos, por absurdo, que existe $\alpha \in \mathcal{W}_*$, não admitindo sub-recobrimento finito e tal que, $\forall\, U \in \underline{\mathcal{U}}_X$, $\{U(x) \mid x \in X\}$ não refina a classe das reuniões finitas de conjuntos de α . Ora , X é $\{\alpha\}$ - $\mathcal{W}_*$-compacto . Indiquemos então, por $\mathcal{F}$ o filtro sôbre X , gerado pelo conjunto dos elementos da forma

$X - T$, onde T é reunião finita de conjuntos de α . Nestas condições, $\mathcal{F}$ é um $\{\alpha\}$-filtro sôbre X sem ponto aderente. Mas isto contraria a hipótese, pois $\mathcal{F}$ é "fracamente de Cauchy" relativamente a $\underline{\mathcal{U}}_X$.

$2 \Longrightarrow 1$. Seja $\mathcal{M}$ tal que X é $\mathcal{M}$-$\underline{\mathcal{W}}_*$-compacto e seja $\mathcal{F}$ um $\mathcal{M}$-filtro "fracamente de Cauchy" , relativamente a $\underline{\mathcal{U}}_X$. Mostraremos que $\mathcal{F}$ tem um ponto aderente . Suponhamos, por absurdo , que $\bigcap_{Y \varepsilon \mathcal{F}} \overline{Y} = \emptyset$, então existe B , base de filtro de $\mathcal{F}$, e $\beta \varepsilon \mathcal{M}$, verificando

$$\beta > \{ X - \overline{Z} \mid Z \varepsilon B \} .$$

Por outro lado, como X é $\mathcal{M}$-$\underline{\mathcal{W}}_*$-compacto, existe $\alpha \varepsilon \underline{\mathcal{W}}_*$, com $\alpha > \beta$. Então, α não admite sub-recobrimento finito (pois , caso contrário, B não seria base de filtro) .

Tomemos $U \varepsilon \underline{\mathcal{U}}_X$, verificando a condição 2) para o recobrimento α. Por hipótese, existe $\mathcal{H}$, filtro sôbre X , mais fino do que $\mathcal{F}$, e um elemento $H \varepsilon \mathcal{H}$ tal que

$$H \times H \subset U ,$$

mas, isto é absurdo, pois H estaria contido numa reunião finita de conjuntos de α . Logo, $2 \Longrightarrow 1$. /

Do que já foi visto decorre que o teorema de Corson ([11]) - referente aos paracompactos) pode ser estendido da forma abaixo .

<u>Teorema 5</u> : <u>Seja</u> X <u>um espaço topológico normal</u> . <u>As seguintes condições são equivalentes</u> :

1) X <u>é</u> $\mathcal{M}$-$\underline{\mathcal{W}}_{**}$-<u>compacto</u> ;

2) X <u>é</u> $\mathcal{M}$-$\underline{\mathcal{W}}_*$-<u>compacto</u> ;

3) $\underline{\mathcal{U}}_X$ <u>é uma uniformidade para</u> X <u>tal que todo</u> $\mathcal{M}$-<u>filtro "fracamente de Cauchy"</u> , <u>relativamente a</u> $\underline{\mathcal{U}}_X$, <u>tem um ponto aderente</u> ;

4) existe uma uniformidade para X , tal que todo $\mathcal{F}$-filtro "fracamente de Cauchy" , relativamente a ela , admite um ponto aderente ;

5) se $\mathfrak{F}$ é um $\mathcal{F}$-filtro tal que a imagem de $\mathfrak{F}$ tem um ponto aderente em todo espaço métrico no qual X é aplicado continuamente , então $\mathfrak{F}$ tem um ponto aderente em X .

Demonstração : $1 \Longleftrightarrow 2$. É consequência imediata de que X é normal.

$2 \Longrightarrow 3$. Decorre do teorema 4 .

$3 \Longleftrightarrow 4$. Segue do fato de que $\underline{\mathcal{U}}_X$ é a uniformidade universal para X .

$4 \Longrightarrow 5$. Pelo teorema 3 , X é $\mathcal{F}$-$\underline{\mathcal{W}}_*$-compacto . Seja $\mathfrak{F}$ um $\mathcal{F}$-filtro tal que a sua imagem tem um ponto aderente em todo espaço métrico no qual X é aplicado continuamente . Mostraremos que $\mathfrak{F}$ tem um ponto aderente em X . Suponhamos , por absurdo, que $\bigcap_{Y \varepsilon \mathfrak{F}} \overline{Y} = \emptyset$, então existe B , base de filtro de $\mathfrak{F}$, $\beta \varepsilon \mathcal{F}$ e $\alpha \varepsilon \underline{\mathcal{W}}_*$, verificando

$$\alpha > \beta > \left\{ X - \overline{Z} \mid Z \varepsilon B \right\} .$$

Suponhamos α dada sob a forma $(M_i)_{i \varepsilon I}$.

Como X é normal, existe $(V_i)_{i \varepsilon I}$, recobrimento aberto de X , localmente finito, tal que $\overline{V}_i \subset M_i$, $\forall\ i \varepsilon I$.

Para cada $i \varepsilon I$, indiquemos por f_i uma função contínua de X em $[0,1]$, tal que $f_i(\overline{V}_i) = \{1\}$ e $f_i(\complement M_i) = \{0\}$. Ponhamos $E = [0,1]^I$ e consideremos sôbre E a distância d , definida como segue :

$$d\left((x_i)_{i \varepsilon I}, (y_i)_{i \varepsilon I} \right) = \sup_{i \varepsilon I} \left| x_i - y_i \right| , \quad \forall\ (x_i)_{i \varepsilon I} , (y_i)_{i \varepsilon I} \varepsilon E$$

Vamos definir, agora, uma função contínua g (de X em (E,d)).

$$g : X \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto (f_i(x))_{i \in I}$$

Consideremos $g(X)$ como subespaço métrico de (E,d) .

Em $g(X)$, $g(\mathfrak{F})$ admite um ponto aderente; indiquemô-lo por $g(y)$, onde $y \in X$. Ponhamos $g(y) = (z_i)_{i \in I}$, $J = \{ i \in I \mid z_i > 0 \}$ e $\varepsilon = \frac{1}{2}$ mínimo de $\{ z_i \mid z_i > 0 \}$.

Consideremos a bola aberta $B_d(g(y) , \varepsilon)$ e suponhamos $y \in V_j$, para $j \in I$ conveniente. Ora, existe $Z \in B$, tal que $M_j \subset X - \overline{Z}$, donde $B_d(g(y) , \varepsilon) \cap g(Z) = \emptyset$, o que contraria o fato de que $g(y)$ é ponto aderente a $g(\mathfrak{F})$.

$5 \Longrightarrow 2$. Suponhamos, por absurdo, que existe $\beta \in \not{\!\!/}$ que não admite refinamento pertencente a $\mathcal{U}_*$. Seja $\mathfrak{F}$, filtro sôbre X , gerado pela classe dos conjuntos da forma $X - T$, onde T é reunião finita de conjuntos de β . Ora, $\mathfrak{F}$ é um $\not{\!\!/}$-filtro sem ponto aderente, donde existe um espaço métrico (Y , d) e uma função contínua f de X sôbre Y , tal que $f(\mathfrak{F})$ não tem ponto aderente . Então, para cada $y \in Y$, existe um aberto, M_y, tal que $y \in M_y$ e $M_y \cap f(X - T) = \emptyset$, para algum T , reunião finita de conjuntos de β . Como Y é paracompacto , existe G , recobrimento aberto de Y , localmente finito, que refina $(M_y)_{y \in Y}$. Recordando o lema 1 e utilizando o recobrimento aberto de X , $(f^{-1}(Z))_{Z \in G}$, chegamos a um absurdo, pois supuzemos que β não admitia refinamento pertencente a $\mathcal{U}_*$ ./

<u>Nota</u> . - A hipótese de que X é normal não pode ser substituída pela hipótese de ser completamente regular . Entretanto, com esta última hipótese é possível mostrar que $4 \Longrightarrow 5$.

Teorema 6 : Seja X um espaço topológico normal, $\mathcal{A}$-$\mathcal{M}$-compacto, onde $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_*$. Então, se $\mathcal{U}$ é uma uniformidade X, tal que $\mathcal{U} \supset [\mathcal{M}]$, tem-se que todo $\mathcal{A}$-filtro "fracamente de Cauchy", relativamente a $\mathcal{U}$, admite um ponto aderente.

Demonstração : Seja $\mathcal{F}$ um $\mathcal{A}$-filtro "fracamente de Cauchy", relativamente a $\mathcal{U}$, e suponhamos, por absurdo, que $\bigcap_{Y\in\mathcal{F}} \overline{Y} = \emptyset$. Então, existe B, base de filtro de $\mathcal{F}$, $\beta \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathcal{M}$, verificando

$$\alpha > \beta > \left\{ X - \overline{Z} \mid Z \in B \right\} .$$

Como $\bigcup_{T\in\alpha} T \times T$ é elemento de $\mathcal{U}$, existe $\mathcal{H}$, filtro sôbre X, mais do que $\mathcal{F}$, e $H \in \mathcal{H}$, tal que

$$H \times H \subset \bigcup_{T\in\alpha} T\times T .$$

Mas, isto é absurdo, pois H estaria contido numa reunião finita de conjuntos de β. Conclui-se, assim, que $\mathcal{F}$ tem um ponto aderente./

A partir dêste teorema, obtemos, para o caso em que m é um cardinal infinito, os seguintes corolários.

Corolário : Seja X um espaço topológico normal, $\mathcal{A}$-$\mathcal{M}_m$-compacto. Então, todo $\mathcal{A}$-filtro "fracamente de Cauchy", relativamente a $\mathcal{U}_m$, admite um ponto aderente.

Corolário : Seja X um espaço topológico normal, $\mathcal{A}$-$\mathcal{M}_m$-compacto e p um número cardinal maior do que m. Então, todo $\mathcal{A}$-filtro "fracamente de Cauchy", relativamente a $\mathcal{U}_p$, admite um ponto aderente.

Para simplificar o enunciado do próximo teorema vamos introduzir uma nova definição. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{A}$ uma classe de recobrimentos abertos de X .

Definição 5 . X é ⫽-regular se para todo $\beta \in$ ⫽ , existe $\xi \in$ ⫽ , tal que $\{\overline{Y} \mid Y \in \xi\} > \beta$.

Desta definição segue imediatamente o seguinte

Lema : Seja X um espaço topológico normal e ⫽-regular , então , X é ⫽-///-compacto, onde /// é o conjunto dos recobrimentos abertos de X , formado por "cozero-sets" .

Seja X um espaço topológico normal e ⫽-regular . Indiquemos por $⫽_r$ a uma classe dos recobrimentos abertos de X , formados por "cozero-sets" , tais que admitem um refinamento pertencente a ⫽ . (Nestas condições temos, em particular, que X é $⫽_r$ - ⫽-compacto). Pôsto isto, verifica-se o

Teorema 7 : X é ⫽-///-compacto se e sòmente se X é $⫽_r$ -///-compacto .

Demonstração : A demonstração é imediata, visto que X é ⫽-regular e normal . /

A seguir daremos alguns teoremas relativos aos espaços ⫽-$///_{\aleph_0}$-compactos. Como seria de esperar, por analogia com o que se dá com os espaços compactos, tem-se o

Teorema 8 : Um espaço topológico X é ⫽-$///_{\aleph_0}$-compacto se e sòmente se todo ⫽-filtro tem um ponto aderente .

Teorema 9 : Se X é ⫽-$///_{\aleph_0}$-compacto e A é um subconjunto infinito de X , então para todo $\beta \in$ ⫽ , existe $Z \in \beta$, tal que card.$(Z \cap A)$ = card. A .

Demonstração : A demonstração por absurdo é imediata . /

Teorema 10 : Seja X um espaço topológico e $\not/\not/$ uma classe hereditária de recobrimentos abertos de X .[1] Se para todo subconjunto infinito, A de X e todo $\beta \in \not/\not/$, existe $Z \in \beta$ tal que $\text{card.}(Z \cap A) = \text{card.}\, A$, então X é $\not/\not/$-$\underline{///}_{\aleph_0}$-compacto .

Demonstração : Por absurdo, suponhamos que X não é $\not/\not/$-$\underline{///}_{\aleph_0}$-compacto. Então, existe $\beta \in \not/\not/$ que não admite sub-recobrimento finito. Sem perda de generalidade, podemos supor que cardinal β é mínimo , no sentido de que se $\beta' \subset \beta$ e o cardinal de β' é estritamente menor do que o cardinal de β , então β' não recobre X . Em vista do lema 4 , existe A , subconjunto infinito de X , tal que

$$\text{card.}(Z \cap A) < \text{card.}\, A \ , \ \forall \ Z \in \beta \ .$$

Mas isto é um absurdo. Logo, X é $\not/\not/$-$\underline{///}_{\aleph_0}$-compacto ./

---

(1) - A classe $\not/\not/$ é tal que se $\beta \in \not/\not/$ e β' é recobrimento aberto de X com $\beta' \subset \beta$, então $\beta' \in \not/\not/$.

C A P Í T U L O 3

- Aplicações e contra-exemplos -

Neste capítulo daremos algumas aplicações dos resultados expostos nos capítulos anteriores, bem como dois contra-exemplos, mostrando a necessidade ou não de certas hipóteses que aparecem no enunciado do teorema 5 do capítulo 2 .

1. Em primeiro lugar consideraremos os espaços m-paracompactos e normais. Introduziremos, em seguida, a noção de espaço uniformemente localmente m-compacto, estudando a relação que existe entre êstes últimos e os espaços m-paracompactos. Veremos que assim se obtém um resultado semelhante a aqêle que se verifica para os espaços uniformemente localmente compactos e paracompactos (Kelley [8] - pag. 246).

Seja m um número cardinal infinito, X um espaço topológico normal e $\mathcal{H}$ a classe dos recobrimentos abertos de X de cardinalidade menor ou igual a m . É fácil ver-se que um filtro sôbre X é um $\mathcal{H}$-filtro se e sòmente se admite uma base de filtro, fechada, de cardinalidade menor ou igual a m , ou , admite um ponto aderente . Indiquemos por m' o cardinal sucessor de m , então, verifica-se o

<u>Teorema 11</u> : <u>As seguintes condições são equivalentes</u> :

1) $X \times [0,1]^{m'}$ <u>é normal</u> ;

2) <u>todo filtro sôbre</u> X <u>que admite uma base fechada de cardinalidade menor ou igual a</u> m <u>e que é "fracamente de Cauchy" , relativamente à uniformidade</u> $\mathcal{U}_{m'}$, <u>tem um ponto aderente</u> .

<u>Demonstração</u> : Basta recordar que se $X \times [0,1]^{m'}$ é normal, então X é m-paracompacto . (Morita [20]) ./

Seja m um cardinal infinito.

__Definição__. Um espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ é __uniformemente localmente m-compacto__ se existe um recobrimento aberto de X, S, tal que

1) $\text{card.}\, S \leqslant m$;

2) existe $U \in \mathcal{U}$ com $U \supset \bigcup_{Z\in S} Z\times Z$ e $(U\circ U)(x)$ está contido num subconjunto de X, m-compacto, para todo $x \in X$.

É simples demonstrar o lema abaixo.

__Lema__. __Se__ $(X,\mathcal{U})$ __é um espaço uniforme e__ $U \in \mathcal{U}$, __ponhamos__ $U_0 = U$ __e__ $U_n = U\circ U_{n-1}$, $\forall\, n \geqslant 1$. __Então para todo subconjunto__ A __de__ X, __tem-se que o conjunto__

$$\bigcup_{n=1} U_n(A) \quad \text{é aberto e fechado}.$$

Por outro lado, demonstra-se o

__Teorema 12__ : __Seja__ $(X,\mathcal{U})$ __um espaço uniforme e__ $U \in \mathcal{U}$, __tal que__ $U \supset \bigcup_{Y\in S} Y\times Y$, __onde__ S __é um recobrimento aberto de__ X __de cardinalidade menor ou igual a__ m. __Se__ A __está contido num subconjunto m-compacto de__ X, __então__ $U(A)$ __está contido num subconjunto m-compacto de__ X, __desde que__ $(U\circ U)(x)$ __esteja contido num subconjunto m-compacto de__ X, $\forall\, x\in X$.

__Demonstração__. Por definição, $U(A) = \bigcup_{x\in A} U(x)$. Existe um número finito de conjuntos de S cuja reunião contém A ; suponhamos que

$$Y_1 \cup \dots \cup Y_r \supset A, \text{ onde } Y_i \in S,\ \forall\, i,\ 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Tomemos $a_i \in Y_i$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Como

$U(A) \subset \bigcup_{i=1}^{r} (U\circ U)(a_i)$, fica demonstrado o teorema. /

Como consequencia do lema e do teorema 12 obtemos o

__Teorema 13__ : __Se__ $(X,\mathcal{U})$ __é uniformemente localmente m-compacto e conexo, então__ X __é reunião de uma classe enumerável de subespaços de__ X, __m-compactos__.

Demonstração . Tomemos $U \in \mathcal{U}$ nas condições da definição dada no início dêste número e fixemos $x \in X$. Pôsto isto, basta considerar o conjunto

$$H = \bigcup_{n\geq 1} U_n(x) .$$

(As notações são as mesmas do teorema 12.)

Pelo lema , H é aberto e fechado, donde $H=X$.

Por outro lado, $U_n(x) \subset U(U_{n-1}(x))$, $\forall\, n \geq 1$. Além disso , $U_n(x)$ está contido num subconjunto de X , m-compacto , para todo $n \geq 1$. /

Por fim, demonstraremos o

Teorema 14 : Seja $(X,\mathcal{U})$ uniformemente localmente m-compacto. Então X é reunião de uma classe de abertos em X , dois a dois disjuntos, sendo que cada aberto da classe é reunião enumerável de subespaços de X , m-compactos .

Demonstração . Tomemos $U \in \mathcal{U}$ nas condições da definição do início dêste número . Para cada $x \in X$, ponhamos

$$H_x = \bigcup_{n\geq 1} U_n(x) .$$

H_x é aberto e fechado, para todo $x \in X$.

Consideremos uma boa ordem sôbre X que indicaremos pelo símbolo $\preccurlyeq$.

Para cada $x \in X$, ponhamos

$$E_x = H_x \cap (X - \bigcup_{y \prec x} H_y) .$$

E_x é aberto e fechado, para todo $x \in X$, pois $\bigcup_{y \prec x} H_y$ é fechado. (É evidente que é aberto.)

A classe mencionada no enunciado do teorema é

$S = \{ E_x \mid x \in X \}$. Para todo $x \in X$, E_x é reunião enumerável de subespaços m-compactos, pois H_x é reunião enumerável de subespaços m-compactos. Dêste modo fica demonstrado o teorema . /

Corolário. Nas condições do teorema 14, se X é $\aleph_0$-paracompacto, então cada E_x é m-paracompacto e, portanto, X é m-paracompacto.

2. Quando do estudo dos espaços $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-compactos, partimos de duas classes dadas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, e analisamos a possibilidade do espaço ser ou não $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-compacto. Poderámos, entretanto, propor um problema distinto, por exemplo: " dado o espaço topológico X e sendo $\mathcal{B}$ uma classe de recobrimentos de X, existe $\mathcal{A}$, classe de recobrimentos abertos de X, tal que X é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-compacto ? "
Sem ulteriores restrições sôbre os elementos de $\mathcal{A}$, o problema resulta trivial, pois êste admite sempre a solução $\mathcal{A} = \{ \{X\} \}$. Estudemos, então, os seguintes problemas (onde m denota um cardinal infinito):

(P): " Dado X, espaço topológico normal e sendo $\mathcal{B}^*$ a classe dos recobrimentos de X, localmente finitos, existe $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_*$, tal que X é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}^*$-compacto, e, além disso, para todo $\alpha \in \mathcal{B}^*$, existe $\beta \in \mathcal{A}$, verificando $\alpha > \beta$ e card. α = card. β ? "

(Pm): " Dado X, espaço topológico normal e, sendo $\mathcal{B}^*_{m'}$ a classe dos recobrimentos de X, localmente finitos, de cardinalidade menor do que m', existe $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_*$, tal que X é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}^*_{m'}$-compacto e, além disso, para todo $\alpha \in \mathcal{B}^*_{m'}$, existe $\beta \in \mathcal{A}$, verificando $\alpha > \beta$ e card. α = card. β ? "

Antes de mais nada vamos introduzir algumas notações que simplificarão o enunciado dos teoremas que se seguirão.

Seja m um cardinal infinito (m', o sucessor de m), E um conjunto de cardinalidade igual a m e w um elemento não pertencente a E. Indiquemos com Y_m o compactificado de Alexandroff do espaço discreto de suporte E . ($Y_m = E \cup \{w\}$.) Consideremos o axioma

$$(\not{\ })m) : " X \times Y_m \text{ é normal } ".$$

Pôsto isto , verifica-se o

Teorema 15 : Se X é um espaço topológico que satisfaz ao axioma ($\not{\ }$)m) e $(F_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos de X , localmente finita, com card.I $\leq m$, existe $(M_i)_{i \in I}$, família de abertos, localmente finita, tal que $M_i \supset F_i$, $\forall\ i \in I$. Além disso, X é $\aleph_0$-paracompacto .

Demonstração . Seja $f : I \longrightarrow E$, uma aplicação injetora . Consideremos os conjuntos $F = \bigcup_{i \in I} \bar{F}_i \times \{f(i)\}$ e $F' = X \times \{w\}$, que são fechados em $X \times Y_m$ e disjuntos. Então existem abertos em $X \times Y_m$, M e M' , disjuntos, verificando $M \supset F$ e $M' \supset F'$. Para cada $i \in I$, ponhamos

$M_i = \{x \in X \mid (x, f(i)) \in M\}$. Ora, $M_i \supset F_i$, $\forall\ i \in I$ e $(M_i)_{i \in I}$ é localmente finita .

Para mostrar que X é $\aleph_0$-paracompacto, basta recordar que se X satisfaz ao axioma ($\not{\ }$)m) , onde $m \geq \aleph_0$, então, verifica, também, o axioma ($\not{\ }$)$_{\aleph_0}$) , isto é, X é $\aleph_0$-paracompacto ./

Teorema 16 : Se X é um espaço topológico normal, $\aleph_0$-paracompacto , tal que para tôda família, $(F_i)_{i \in I}$, de subconjuntos de X , localmente finita, com card.I $\leq m$, existe uma família , $(M_i)_{i \in I}$, de abertos, localmente finita, tal que $M_i \supset F_i$, $\forall\ i \in I$, então X satisfaz ao axioma ($\not{\ }$)m) .

Demonstração . Sejam F e F' dois subconjuntos de $X \times Y_m$, fechados, não vazios e disjuntos . Podemos escrever

$$F = \bigcup_{t\varepsilon E} F_t \times \{t\} \cup F_w \times \{w\} \quad \text{e} \quad F' = \bigcup_{t\varepsilon E} Q_t \times \{t\} \cup Q_w \times \{w\},$$

onde F_w e Q_w são fechados em X e disjuntos e, para todo $t \varepsilon E$, F_t e Q_t são fechados em X e disjuntos.

Como X é normal , existem abertos em X , disjuntos, L_1 e L_2 , verificando $L_1 \supset F_w$ e $L_2 \supset Q_w$.

Para cada $t \varepsilon E$, ponhamos $S_t = F_t \cap Q_w$. A família $(S_t)_{t\varepsilon E}$ é localmente finita, donde, por hipótese , existe $(M_t)_{t\varepsilon E}$, família de abertos, localmente finita, tal que $M_t \supset S_t$, $\forall\, t \varepsilon E$.

Em vista disso, consideremos a família $(F_t - (M_t \cup L_1))_{t\varepsilon E}$, que é localmente finita. Por hipótese, existe $(W_t)_{t\varepsilon E}$, família de abertos localmente finita, tal que

$$W_t \supset F_t - (M_t \cup L_1) , \quad \forall\, t \varepsilon E .$$

Por outro lado, todo ponto $y \varepsilon Q_w$ admite uma vizinhança, contida em L_2 , que só encontra um número finito de M_t e W_t , com $t \varepsilon E$. Indiquemo-la por V_y e ponhamos

$$K_y = \{t \mid V_y \cap M_t \neq \emptyset\} \cup \{t \mid V_y \cap W_t \neq \emptyset\}.$$

Ora, $\bigcup_{y\varepsilon Q_w} V_y \times (Y_m - K_y) \supset Q_w \times \{w\}$ e

$$\bigcup_{t\varepsilon E} W_t \times \{t\} \cup \bigcup_{t\varepsilon E} M_t \times \{t\} \cup L_1 \times E \supset \bigcup_{t\varepsilon E} F_t \times \{t\} .$$

Procedendo de forma análoga com os conjuntos $\bigcup_{t\varepsilon E} Q_t \times \{t\}$ e $F_w \times \{w\}$, mostramos a existência de dois abertos em $X \times Y_m$, disjuntos, contendo F e F' . Assim sendo, fica demonstrado o teorema ./

Dos teoremas 15 e 16 se obtém os seguintes corolários .

<u>Corolário</u> . <u>As seguintes condições são equivalentes</u> :

1) <u>o problema</u> (Pm) <u>tem solução</u> ;

2) X satisfaz ao axioma ($\not$)m) .

Corolário . As seguintes condições são equivalentes :

1) o problema (P) tem solução ;

2) X satisfaz ao axioma ($\not\!{}$)m) , onde $m = \text{card}.X$.

Devido ao resultado de M.Katetov (citado por Morita em [20]), dizer-se que o problema (P) tem solução equivale a afirmar que X é $\aleph_0$-paracompacto e " collectionwise normal " .

Teorema 17 : Se X é um espaço topológico que satisfaz ao axioma ($\not\!{}$)m) , Z é compacto e XxZ é normal, então XxZ satisfaz ao axioma ($\not\!{}$)m) .

Demonstração . Por Dowker , XxZ é $\aleph_0$-paracompacto . Pôsto isto, basta recordar que a projeção de XxZ sôbre X é contínua e fechada, ficando , assim demonstrado o teorema ./

Teorema 18 : Seja X um espaço topológico que satisfaz ao axioma ($\not\!{}$)m) e Z um espaço topológico tal que $Z = \bigcup_n Z_n$, onde Z_n é fechado e compacto, $\forall\, n \geq 1$. Se (Z_n) é localmente finita e XxZ verifica o axioma ($\not\!{}$)$\aleph_0$) , então XxZ verifica o axioma ($\not\!{}$)m) .

Demonstração . Seja $(F_i)_{i \in I}$ uma família de fechados em XxZ , localmente finita com $\text{card}.I \leq m$. Como Z é paracompacto, existe (M_n), família de abertos em Z , localmente finita, tal que $M_n \supset Z_n$, $\forall\, n \geq 1$. Para cada $i \in I$ e $n \geq 1$, ponhamos

$$Q_{in} = F_i \cap (XxZ_n) .$$

A família $(Q_{in})_{i \in I}$ é localmente finita, para todo $n \geq 1$. Sendo pr a projeção de XxZ sôbre X , temos que $(pr(Q_{in}))_{i \in I}$ é localmente finita para todo $n \geq 1$. Por hipótese, para cada $n \geq 1$, existe

$(W_{in})_{i \in I}$, família de abertos em X, localmente finita, tal que

$$W_{in} \supset pr(Q_{in}) \ , \ \forall \ i \in I \ .$$

Para cada $i \in I$, temos que

$$T_i = \bigcup_n W_{in} \times M_n \supset F_i \ .$$

Além disso, $(T_i)_{i \in I}$ é localmente finita em $X \times Z$. Fica, pois , demonstrado o teorema ./

3. Em seguida estudaremos algumas propriedades dos espaços topológicos, considerando-os como particulares espaços $\mathscr{H}$-$\mathscr{M}$-compactos onde $\mathscr{H}$ é o conjunto dos recobrimentos abertos, localmente finitos . A cada espaço topológico X associaremos um número cardinal infinito, que indicaremos por p_X , e analisaremos certas propriedades do mesmo.

Seja X um espaço topológico e indiquemos por p_X um número cardinal tal que

1) $\aleph_0 \leq p_X \leq \sup \left\{ 2^{|X|} , \aleph_0 \right\}$;
2) todo recobrimento aberto de X , localmente finito , admite um sub-recobrimento de cardinalidade menor do que p_X ;
3) se q é um número cardinal tal que $\aleph_0 \leq q < p_X$, existe um recobrimento aberto de X , localmente finito, que não admite sub-recobrimento de cardinalidade menor do que q .

Pôsto isto, temos que

1) Um espaço topológico X , completamente regular, é pseudo-compacto se e sòmente se $p_X = \aleph_0$.
2) Se o espaço topológico X é discreto e infinito, então $p_X = |X|'$ (= sucessor do cardinal de X).
3) Se o espaço topológico X é σ-compacto, então

$$p_X \leq \aleph_1 \ .$$

Quando o espaço topológico X , em questão, é normal podemos relacionar p_X e a uniformidade universal de X , obtendo o

<u>Teorema 19</u> : <u>Se X é um espaço topológico normal, então</u>

$$\underline{\mathcal{U}}_X = \mathcal{U}_{p_X} .$$

<u>Nota</u> . Com as notações utilizadas nos capítulos anteriores, é fácil provar que, sendo X um espaço topológico e p um número cardinal infinito, $p_X = p$ se é $\mathcal{W}_* - \mathcal{W}_p$ -compacto . Além disso, se X é $\mathcal{W}_* - \mathcal{W}_p$ -compacto , então $p_X \leqslant p$.

Agora, procuraremos caracterizar êstes espaços por meio das funções contínuas . (Por analogia com a caracterização dos espaços pseudo-compactos por meio das funções reais contínuas.) Para isso vamos introduzir uma nova notação . Seja R o conjunto dos números reais e p um número cardinal infinito ; tomemos P um conjunto de cardinalidade igual a p . Em R^p consideremos a distância d_p definida abaixo :

$$d_p\left((x_i)_{i\varepsilon P} , (y_i)_{i\varepsilon P} \right) = \sup_{i\varepsilon P} \frac{|x_i - y_i|}{1+ |x_i - y_i|} , \quad \forall\ (x_i)_{i\varepsilon P} ,$$

$(y_i)_{i\varepsilon P} \ \varepsilon\ R^P$.

Obtemos assim o espaço métrico (R^P , d_p) ; se tomarmos outro conjunto P' de cardinalidade igual a p e considerarmos o espaço métrico $(R^{P'} , d_{p'})$ definido de forma semelhante à anterior, temos que (R^P , d_p) e $(R^{P'} , d_{p'})$ são isométricos . Em vista disso, indicaremos por R^p qualquer dos espaços métricos (R^P , d_p) construidos da forma acima. Pôsto isto, temos o

<u>Teorema 20</u> : <u>Seja X um espaço topológico e</u> $p_X = p$. <u>Se</u> $f: X \longrightarrow R^p$ <u>é contínua, então</u> $f(X)$ <u>é</u> $\mathcal{H}$-$\mathcal{W}_p$ <u>-compacto , onde $\mathcal{H}$ é o conjunto de todos os recobrimentos abertos de</u> $f(X)$.

Demonstração. É evidente que estamos considerando $f(X)$ como subespaço de R^p, donde $f(X)$ é paracompacto do que se conclui, fàcilmente, a tese./

Teorema 21 : *Seja X um espaço topológico completamente regular e p um número cardinal infinito. Se para tôda $f: X \longrightarrow R^p$, contínua, temos que $f(X)$ é $\mathcal{U}$-$\mathcal{U}_p$-compacto, onde $\mathcal{U}$ é o conjunto dos recobrimentos abertos de $f(X)$, então $p_X \leq p$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $p_X > p$. Então, existe um recobrimento aberto de X, localmente finito, digamos $G = (G_i)_{i \in I}$, onde $|I| \geq p$, que não admite sub-recobrimento de cardinalidade menor do que p.

Pelo lema 6, existe uma família de abertos, não vazios, $(V_j)_{j \in J}$, onde $|J| \geq p$ e $J \subset I$, verificando

$$1) \quad \bar{V}_j \subset G_j, \quad \forall\, j \in J ;$$

$$2) \quad \bar{V}_j \cap \bar{V}_k = \emptyset \quad ; \quad \forall\, j, k \in J, \; j \neq k .$$

Para cada $j \in J$ tomemos $x_j \in V_j$ e uma função contínua de X em $[0,1]$, f_j, tal que $f_j(x_j) = 1$ e $f_j(X - V_j) = \{0\}$. Seja P um subconjunto de J com $|P| = p$ e consideremos a função

$$g: X \longrightarrow R^P$$
$$x \longmapsto (f_j(x))_{j \in P}$$

A função g é contínua de X em (R^P, d_P). O conjunto $F = g(x_j) \mid j \in P$ é fechado em (R^P, d_P). Para cada $j \in P$, ponhamos $M_j = \prod_{i \in P} T_i$, onde $T_i = R, \forall\, i \in P - \{j\}$ e $T_j =]\,3/4, 5/4\,[$. Agora basta considerar o recobrimento aberto

$$C = \{M_j \cap g(X) \mid j \in P\} \cup \{g(X) \cap \complement F\}. \text{ C não admite sub-}$$

recobrimento de cardinalidade menor do que p ; o que contraria a hipótese . Fica pois demonstrado o teorema ./

Os teoremas que daremos a seguir visam relacionar as propriedades topológicas dos espaços X e os números cardinais p_X . Para simplificar o enunciado dos teoremas, escreveremos simplesmente "X" e "Y" para indicar o "espaço topológico X" e o "espaço topológico Y" .

Teorema 22 : Se $f: X \longrightarrow Y$ é contínua e sobrejetora, então $p_Y \leq p_X$.

Teorema 23 : O espaço topológico produto $X \times Y$ verifica $p_{X \times Y} \geq p_X \cdot p_Y$.

Nota. No teorema 23 o sinal de desigualdade não pode ser substituido pelo de igualdade pois é possível dar-se um exemplo de um espaço pseudo-compacto X tal que $X \times X$ não é pseudo-compacto. (Gillman-Jerson [6] - pag. 135) . Entretanto, em seguida daremos alguns casos em que se verifica a igualdade.

Teorema 24 : Se Y é compacto, então $p_{X \times Y} = p_X \cdot p_Y$; para todo espaço topológico X .

Demonstração . Temos que $p_Y = \aleph_0$. Seja G um recobrimento aberto de $X \times Y$, localmente finito . Logo, para cada $x \in X$, existe V_x , vizinhança de x , tal que $V_x \times Y$ encontra apenas um número finito de elementos de G . Para cada $x \in X$ ponhamos

$$G_x = \{ W \in G \mid (\{x\} \times Y) \cap W \neq \emptyset \} .$$

Indiquemos por M^* o conjunto $\{ G_x \mid x \in X \}$.

Para cada $M \in M^*$ ponhamos

$$T_M = \{ z \mid \{z\} \times Y \subset \bigcup_{Z \in M} Z \} \cap (\bigcap_{Z \in M} pr\, Z) ,$$ onde

$pr : X \times Y \longrightarrow X$ é a projeção.

Temos que $(T_M)_{M \in M^*}$ é um recobrimento aberto de X, localmente finito ; então, existe $M_o \subset M^*$, com $|M_o| < p_X$, tal que $(T_M)_{M \in M_o}$ recobre X.

Ora, o conjunto

$\bigcup_{M \in M_o} \{ T_M \times Y \cap Z \mid Z \in M \}$ tem cardinalidade menor do que p_X se $p_X \geq \aleph_o$ e é recobrimento de $X \times Y$.

Fica pois demonstrado o teorema ./

Teorema 25 : *Se alguma das condições abaixo se verifica então* $p_{X \times Y} = p_X \cdot p_Y$:

a) X *e* Y *são discretos* ;

b) X *é infinito, discreto e* $p_X \geq p_Y$;

c) X *é infinito, discreto*, $p_X < p_Y$ *e* p_Y *admite antecessor* ;

d) X *é* σ*-compacto e não existe um conjunto infinito enumerável*, C, *de cardinais infinitos, tal que* $p_Y \notin C$ e $p_Y = \sup C$.

Demonstração. A demonstração é imediata ./

Antes de prosseguirmos com os teoremas vamos mostrar que para todo cardinal infinito m, existe um espaço topológico X, paracompacto e separado, tal que $p_X = m$.

Com efeito, seja m um cardinal infinito e E um conjunto de cardinalidade m. Tomemos $w \notin E$ e em $Y = E \cup \{w\}$ consideremos a topologia τ definida a seguir :

a) $\{x\} \in \tau$, $\forall\ x \in E$;

b) se $V \in \mathcal{T}$ e $w \in V$, então $|E - V| < m$.

O espaço topológico $(Y, \mathcal{T})$ é paracompacto, separado e $p_Y = m$.
Em vista disso, é possível provar o

<u>Teorema 26</u> : <u>Se</u> X <u>é um espaço topológico tal que</u> $p_X > \aleph_0$, <u>existe um espaço topológico</u> Y, <u>paracompacto e separado</u>, <u>tal que</u> $p_{X \times Y} > p_Y \cdot p_X$.

<u>Demonstração</u>. Com efeito, seja Y o espaço topológico paracompacto e separado construido do modo acima para $m = \sup\{ y_n \mid n \geq 1 \}$, onde $y_1 = 2^{p_X}$ e $y_n = 2^{y_{n-1}}$, $\forall n \geq 2$. Para cada $n \geq 1$ seja G_n um recobrimento aberto de Y, localmente finito, que não admite sub-recobrimento de cardinalidade menor do que y_n (1). Seja $H = \{ S_1, \ldots, S_n, \ldots \}$ um recobrimento aberto de X, localmente finito, que não admite sub-recobrimento finito.
Ponhamos

$$G = \bigcup_{n \geq 1} \{ S_n \times T \mid T \in G_n \}$$

; temos que G é recobrimento aberto de $X \times Y$ e é localmente finito.
Suponhamos, por absurdo, que G admite um sub-recobrimento G' de cardinalidade menor do que m. Fixemos $n \geq 1$; existe $x \in X$ tal que $x \notin S_1 \cup \ldots \cup S_n$.
Seja $G'' = \{ P \in G' \mid P \cap (\{x\} \times Y) \neq \emptyset \}$; temos que $|G''| \leq |G'|$ e, por outro lado, $|G''| > y_n$. Conclui-se, finalmente, que $|G'| \geq y_n$, $\forall n \geq 1$, donde $|G'| \geq m$ o que contraria a hipótese.
Fica, pois, demonstrado que $p_{X \times Y} > p_X \cdot p_Y$ ./

Combinando os resultados dos teoremas 24 e 26, obtemos a seguinte caracterização.

<u>Teorema 27</u> : <u>Seja</u> X <u>um espaço topológico paracompacto</u> ; <u>as</u>

---

(1) - Além disso, supomos que G_{n+1} é refinamento de G_n, $\forall n \geq 1$.

<u>duas condições abaixo equivalentes</u> :

a) X <u>é compacto</u> ;

b) <u>para todo espaço topológico</u> Y, <u>paracompacto e separado, tem-se</u> $p_{X \times Y} = p_X \cdot p_Y$.

No caso de espaços metrizáveis é possível provar o

<u>Teorema 28</u> : <u>Se</u> X <u>é um espaço topológico metrizável e</u> $|X| \geq \aleph_0$ <u>então</u> $2^{p_X} \geq |X|$.

Finalmente, como consequência do teorema 14, segue-se o

<u>Teorema 29</u> : <u>Se</u> X <u>é um grupo topológico localmente compacto, então</u> $p_X = \aleph_0$ <u>ou</u> $p_X = p'$, <u>onde</u> p <u>é um número cardinal infinito. Além disso, neste último caso</u>, X <u>é reunião de</u> p <u>subconjuntos compactos</u>.

<u>Nota</u>. Antes de encerrar êste número fazemos notar que o conhecido resultado : " um espaço topológico completamente regular é pseudo-compacto e completo se e sòmente se é compacto " decorre, imediatamente, do teorema 2 e de seu corolário. (Esta proposição será utilizada no próximo número).

4. Neste ítem estudaremos algumas relações que existem entre os espaços $\mathcal{H}$-$\mathcal{U}$-compactos e os grupos topológicos. Primeiramente introduziremos algumas notações. As definições, bem como as notações em geral, são as que aparecem no Bourbaki ([2] - capítulo 3).

Seja G um grupo topológico, e o seu elemento neutro e denotemos multiplicativamente a operação de G. Em G consideramos duas estruturas uniformes ([2] -cap. 3- pag. 37) que indicaremos por $\mathcal{U}'_d$ e $\mathcal{U}'_g$. $\mathcal{U}'_d$ tem por base de entornos o conjunto

$\{\{(x,y) \mid yx^{-1} \varepsilon V\} \mid V$ é vizinhança de $\underline{e}\}$ e

$\mathcal{U}'_g$ tem por base de entornos o conjunto

$\{\{(x,y) \mid x^{-1}y \varepsilon V\} \mid V$ é vizinhança de $\underline{e}\}$.

Além disso, suporemos que G satisfaz a seguinte condição :

(*) "existe uma sequència infinita de vizinhanças de $\underline{e}$, (M_n) , tal que $\bigcap_n M_n$ não é vizinhança de $\underline{e}$ ".

O problema que analisaremos em seguida nos foi proposto pelo prof. Edison Farah . Consiste em estudar qual a relação que existe entre o fato de que "tôda função real, contínua, definida em G , é uniformemente contínua de (G , $\mathcal{U}'_d$) em R" e as propriedades topológicas do grupo G . êste problema tem origem numa conjetura do prof. Farah (1945) a respeito de se era ou não necessário que o grupo fôsse compacto ou discreto para que se verificasse a proposição da frase anterior . Há muitos anos o prof. Leopoldo Nachbin mostrou que se o grupo é metrizável , então uma condição necessária e suficiente para que a proposição se verifique é que êle seja compacto ou discreto .

É fácil ver-se que existem grupos topológicos, que não são discretos ou compactos e que , entretanto, satisfazem a condição sôbre a continuidade uniforme das funções reais contínuas .

Por exemplo, Zx $\{0,1\}$, onde Z é o grupo dos números inteiros com a topologia discreta e $\{0,1\}$ é o grupo aditivo módulo 2 com a topologia caótica . Outros exemplos de tais grupos foram dados por Kister ([28]) , apresentando ainda a particularidade de serem de Hausdorff .

Aqui estudaremos êsse problema, supondo que o grupo G , em questão, satisfaz a condição (*) . Pôsto isto, indiquemos por W o conjunto das vizinhanças abertas do elemento $\underline{e}$. Denotemos por (K) a condição de que "tôda função real, contínua , definida em G , é uniformemente contínua de (G , $\mathcal{U}'_d$) em R " . Nestas condições, temos o

Teorema 30 : Uma condição necessária para que se verifique (K) é que G seja $\mathcal{U}$-$\mathcal{W}_{\aleph_0}$-compacto , onde

$$\mathcal{U} = \{ \{ Vx \mid x \in G \} \mid V \in W \} .$$

Demonstração . Com efeito, suponhamos, por absurdo, que G não é $\mathcal{U}$-$\mathcal{W}_{\aleph_0}$-compacto, isto é, existe $V \in W$, simétrica, tal que $\{ Vx \mid x \in G \}$ não admite refinamento pertencente a $\mathcal{W}_{\aleph_0}$.
Seja S um refinamento aberto, localmente finito, de $\{ Vx \mid x \in G \}$, que não admite sub-recobrimento finito . Tomemos V' , vizinhança simétrica de e , tal que $V' . V' \subset V$. Procedendo do mesmo modo e usando as mesmas notações da demonstração do lema 5 do capítulo 1 , podemos supor que

$$V_n \subset (M_n \cap V'). x_n \quad , \text{ para todo } n \geq 1 \text{ e, além disso ,}$$

que

$$x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} Vx_i \; , \; \forall \; n \geq 2 .$$

Para cada $n \geq 1$, existe uma função contínua de G em $[0,1]$, h_n , verificando

$$h_n(x_n) = 1 \quad \text{e} \quad h_n(G-V_n) = \{0\} .$$

Consideremos a função h de G em R definida abaixo :

$$h(y) = 0 \quad \text{se} \quad y \in G - \bigcup_n V_n$$

$$h(y) = h_n(y) \quad \text{se} \quad y \in V_n \; , \; n \geq 1 .$$

A função h é contínua e, portanto, uniformemente contínua de $(G, \mathcal{Z}_d')$ em R . Logo, existe V'' , vizinhança aberta de e , simétrica, contida em V' , tal que se x e y pertencem a G e $y \in V'' x$, então $| h(x) - h(y) | < 1/4$. Fixemos $n \geq 1$ e tomemos $z \in V'' x_n$, então $| h(z) - h(x_n) | < 1/4$, donde $z \in \bigcup_n V_n$. É fácil mostrar que $z \in V_n$.
Concluímos, assim, que

$$V'' x_n \subset M_n x_n \; , \; \forall \; n \geq 1 \text{ , ou ainda , que}$$

$V'' \subset \bigcap_n M_n$, o que contraria a condição (*) .

Fica, pois, demonstrado o teorema ./

De forma semelhante é possível provar o

Teorema 31 : Uma condição necessária para que tôda função real, contínua, definida em G , seja uniformemente contínua de $(G, \mathcal{U}'_g)$ em R , é que G seja $\mathcal{H}$-$\mathcal{M}_{\aleph_0}$-compacto , onde

$$\mathcal{H} = \{ \{ xV \mid x \in G \} \mid V \in W \} .$$

Em consequencia do teorema 30 e o lema 5 , segue-se o

Teorema 32 : Uma condição necessária para que se verifique (K) é que G seja $\mathcal{M}_*$-$\mathcal{M}_{\aleph_0}$-compacto .

Demonstração . Pelo teorema 30 , tôda função real e contínua é limitada e, portanto, pelo lema 5 , G é $\mathcal{M}_*$-$\mathcal{M}_{\aleph_0}$-compacto ./

Nota. Se G fôr normal, então se se verifica a condição (K) , $\mathcal{U}'_d$ é a uniformidade universal para G .

Finalmente, no caso em que o grupo G é completo, isto é, existe $\mathcal{U}$, uniformidade para G , tal que $(G,\mathcal{U})$ é completo, obtemos o seguinte

Teorema 33 : Seja G um grupo topológico completo, satisfazendo a condição (*) . As seguintes condições equivalentes :

1 - G é compacto ;

2 - G satisfaz a condição (K) ;

3 - tôda função real , contínua, definida em G , é uniformente contínua de $(G,\mathcal{U}'_g)$ em R ;

4 - tôda função real, contínua, limitada , definida em G , uniformemente contí -

nua de $(G,\mathcal{U}'_d)$ em R ;

5 - tôda função real, contínua, limitada, definida em G , é uniformemente contínua de $(G,\mathcal{U}'_g)$ em R .

Observação : Em vista dos resultados anteriores podemos responder, em parte, à questão proposta por Kister ([28]) a respeito de ser o grupo , necessàriamente, pseudo-compacto . Se o grupo topológico em questão satisfizer a condição (*) , então, necessàriamente, o grupo deve ser pseudo-compacto . (Por outro lado, se existir um grupo topológico G , não discreto, de Hausdorff , verificando a condição (K) e não verificando a condição (*) , então o grupo topológico ZxG , Z com a topologia discreta, também satisfará a condição (K) e não será pseudo-compacto.)

5. Neste número procuraremos justificar porque impusemos certas hipóteses no enunciado do teorema 5 do capítulo 2 . Para isso daremos dois exemplos de espaços topológicos completamente regulares e não normais, estudando-lhes , a seguir, algumas propriedades . (Recordemos que no teorema 5 do capítulo 2 o espaço topológico em questão é normal.)

I - Seja X um espaço topológico discreto, verificando card.X > 2^{c} e Y , outro espaço topológico discreto, satisfazendo card.Y > 2^{c}. Tomemos um elemento $a \notin X$ e um elemento $b \notin Y$, e indiquemos por $X^* = X \cup \{a\}$ e por $Y^* = Y \cup \{b\}$, os compactificados de Alexandroff de X e Y ,respectivamente. Chamemos Z' ao subespaço topológico $X^* x Y^* - \{(a,b)\}$. Z' é completamente regular e não é normal ([9] - pag. 93) .
Fazendo-se uma demonstração por absurdo, é fácil provar que todo recobrimento de Z', aberto e localmente finito, admite um sub-recobrimento finito, de $X \times \{b\} \cup \{a\} \times Y$ ~~isto é , que Z' é pseudo-compacto~~ .

II - Usando as mesmas notações do exemplo 1 , consideremos o espaço topológico produto $N \times Z'$, onde $N = \{1, 2, \ldots\}$ com a topologia discreta. $N \times Z'$ satisfaz as condições 2, 3, 4 e 5 e não verifica a condição 1 do teorema 5 do capítulo 2, para $H = \mathcal{U}_*$.

B I B L I O G R A F I A

[1] - N. Bourbaki - Élementes de Mathématiques - livro 3 - cap. 1 e 2 - 1965 - 4ª edição - Hermann - Paris .

[2] - N. Bourbaki - Éléments de Mathématiques - livro 3 - cap. 3 e 4 - 1960 - 3ª edição - Hermann - Paris .

[3] - N. Bourbaki - Éléments de Mathématiques - livro 3 - cap. 9 - 1958 - 2ª edição - Hermann - Paris .

[4] - Eduard Cech - Topological Spaces - 1966 - Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences of Prague - John Wiley Sons - Praga .

[5] - Edison Farah - Teoria dos Conjuntos - 1961 - São Paulo ,

[6] - L. Gillmann, M. Jerison - Rings of Continous Functions - 1960 - D. Van Nostrand Co., Inc. - New York .

[7] - E. Kamke - Théorie des Ensembles - 1964 - Dunod - Paris .

[8] - J. L. Kelley - Topología General - 1962 - EUDEBA - Buenos Aires .

[9] - W. J. Pervin - Foundations of General Topology - 1964 - Academic Press - New York .

[10] - R. H. Bing - Metrization of topological spaces - Canadian Journal of Mathematics - vol. 3 , n. 2 - 1951 - pag. 175 - 186 .

[11] - H. H. Corson - The determination of paracompactness by uniformities - American Journal of Mathematics - vol. 80 - 1958 - pag. 185 - 190 .

[12] - H. H. Corson - Normality in subsets of product spaces - American Journal of Mathematics - vol. 81 - 1959 - pag. 785 - 796 .

[13] - J. Dieudonné - Une géneralization des spaces compacts - J. Math. Pures Appl. - vol. 23 - 1944 - pag. 65 - 76 .

[14] - Raouf Doss - On uniform spaces with a unique structure - Amer. J. Math. - vol. 71 - n. 1 - 1949 - pag. 19 - 23 .

[15] - C. H. Dowker - On countably paracompact spaces - Canadian J. Math. - vol. 3 - n. 2 - 1951 .

[16] - A. M. Gleason - Projective topological spaces - Illinois J. Math. - dezembro, 1958 .

[17] - C. S. Hönig - Sôbre um método de refinamento de topologias - Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo - vol. 6 - fasc. 1 e 2 - dezembro, 1951 .

[18] - J. F. Kennison - m-pseudocompactness - Transactions Amer. Math. Soc. - vol. 104 - n. 3 - setembro, 1962 .

[19] - E. A. Michael - A note on paracompact spaces - Proc. Amer. Math. Soc. - vol. 4 - 1953 - pag. 831-838 .

[20] - K. Morita - Paracompactness and product spaces - Fundaments Mathematicae - vol. 50 - 1961 - pag. 223 - 236 .

[21] - V. Ponomarev - On paracompact spaces and related questions - "General Topology and its relations to modern analysis" - Proceedings of the Symposium held in Prague in september,1961 - Academic Press .

[22] - A. H. Stone - Paracompactness and product spaces - Bull. Amer. Math. Soc. - vol. 54 - 1948 - pag. 977 - 982 .

[23] - H. Tamano - On paracompactness - Pacific J. Math. - vol. 10 - n. 3 - 1960 - pag. 1043 - 1047 .

[24] - T. Shirota - On systems of structures of a completely regular space - Osaka Math. J. - vol. 2 - 1950 - pag. 131 - 143 .

[25] - H. Tamano - Paracompactness of strong products - Notices Amer. Math. Soc. - vol. 15 - n. 2 - fevereiro, 1968 .

[26] - H. Tamano - Linearly cushioned refinements - Notices Amer. Math. Soc. - vol. 15 - n. 1 - janeiro, 1968 .

[27] - P. Kenderov - On Q-spaces - Soviet Mathematics - vol. 8 - n. 4 - julho-agôsto, 1967 .

[28] - J. M. Kister - Uniform continuity and compactness in topological groups - Proc. Amer. Math. Soc.- vol. 13 - n. 1 - fevereiro, 1962 .

[29] - O. T. Alas - Outra demonstração de um teorema de A. H. Stone - Gazeta de Matemática -(Lisboa)- vol. 103 -104 - julho-dezembro, 1966 .