CARLOS B. DE LYRA

SÔBRE OS ESPAÇOS DE MESMO TIPO DE HOMOTOPIA QUE O DOS POLIEDROS

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para doutoramento em Ciências (Matemática).

São Paulo — 1958

CARLOS B. DE LYRA

SÔBRE OS ESPAÇOS DE MESMO TIPO DE HOMOTOPIA QUE O DOS POLIEDROS

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para doutoramento em Ciências (Matemática).

São Paulo — 1958

INTRODUÇÃO

Êste trabalho trata do problema geral da caracterização dos espaços que têm o mesmo tipo de homotopia dos poledros, e apresenta uma contribuição para a solução dêste problema.

Um dos objetivos originais da Topologia Algébrica foi o de exibir um sistema completo de invariantes topológicos que permitisse a classificação do tipo topológico dos espaços. Diante das enormes dificuldades já constatadas pelos pioneiros, substitui-se gradualmente aquele objetivo por outro mais modesto, embora ainda dificil, de classificar os espaços segundo seu tipo de homotopia. Diz-se que dois espaços X e Y são do mesmo tipo de homotopia, se existirem aplicações contínuas $f: X \dashrightarrow Y$ e $g: Y \dashrightarrow X$ tais que $g \circ f \simeq 1_X$ e $f \circ g \simeq 1_Y$, onde 1_X e 1_Y denotam, respectivamente, as aplicações identicas de X e Y.

Històricamente, os poliedros foram os espaços estudados inicialmente na Topologia Algébrica. Têm êles definição geométrica simples e intuitiva por meio da colagem de simplexos. No entanto, não se conhece uma caracterização topológica intrinseca desta classe de espaços. Doutra parte, teve aplicação ampla na teoria da homotopia a classe dos ANR de K. Borsuk, classe ampla de espaços que tem definição topológica intrínseca e que inclui, como casos particulares, os poliedros localmente finitos. Um dos objetivos dêste trabalho é o de esclarecer precisamente, do ponto de vista da teoria da homotopia, a relação existente entre estas duas classes de espaços. Temos como resultado geral ser todo ANR do mesmo tipo de homotopia que um poliedro localmente finito (veja § 13).

O principal resultado dêste trabalho é a caracterização dos espaços conexos por caminhos, simplesmente conexos, que têm o mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito (veja § 14). Em consequencia, segue-se, por exemplo, que um ANR compacto, simplesmente conexo, é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito.

Antes de passarmos a um breve resumo dos capítulos, julgamos oportunas algumas observações de ordem geral. Exceto no que se refere a teoria dos ANR, para os resultados de Topologia Geral reportamo-nos ao tratado de N. Bourbaki [4][1]. Presupõe-se ainda certa familiaridade com os elementos da Teoria da Homotopia (11) e da teoria da homologia singular [7].

O Capítulo I limita-se a uma exposição sucinta dos resultados da teoria dos ANR, necessários no curso dêste trabalho. Tem isto o intuito de informar o leitor acerca dos resultados principais, de modo a tornar menos penosa a leitura, com inúmeras referências à literatura. Contudo, enviamos o leitor à literatura no que concerne as demonstrações acessíveis e satisfatórias dos resultados recapitulados, especialmente as mais longas. Esta observação aplica-se igualmente aos demais capítulos.

A teoria dos ANR, exposta no Capítulo I, é essencialmente criação de Karol Borsuk, que a desenvolveu (para espaços métricos compactos) numa série de artigos publicados no <u>Fundamenta Mathematicae</u>, durante a década 1930-1940. A generalização para espaços métricos separáveis, não necessàriamente compactos foi elaborada principalmente por C.Kuratokwski, R.H. Fox e O. Hanner. Esta versão revela-se bastante adequada às aplicações na Topologia Algébrica. No sentido de simplificar os enunciados, modificamos ligeiramente a definição usual de ANR, <u>exigindo que o espaço seja conexo</u>.

Uma breve exposição sobre os CW-complexos de J.H.C. Whitehead encontra-se nos §§ 5 e 6 do Capítulo II. Enumeramos, sem demonstrações, os principais resultados para posteriores referências. No § 7 recapitulamos os teoremas fundamentais de Whitehead e Hurewicz, que constituirão o principal instrumento nas demons -

(1) - Os números entre colchetes são referencias à bibliografia.

trações dos resultados dos §§ 13 e 14. No § 8, apresentamos as seguintes aplicações dos resultados do § 7: generalização de alguns resultados conhecidos (Teoremas 8.1 e 8.5); caracterização homotópica do espaço projetivo complexo (Teorema 8.3) e, também a dos ANR compactos asféricos em dimensão $<$ n e acíclicos em dimensão $>$ n, onde n é um inteiro $\geq$ 2 (Teorema 8.8).

Os §§ 10 e 11 do Capítulo III são dedicados a uma breve exposição sôbre os complexo semi-simpliciais, sua realização geométrica e, em particular, às propriedades do politopo singular de um espaço topológico. A aplicação canônica $\varphi_X : |S(X)| \longrightarrow X$ é a ponte que liga espaços quaisquer a CW complexos (o politopo singular $|S(X)|$ é um CW-complexo), permitindo então a introdução de todo o eficiente mecanismo da teoria dos CW-complexos. Certos resultados conhecidos (11.2) e (12.2) cujas demonstrações não encontramos na literatura, tiveram que ser tratados mais detalhadamente. Na medida do possível, simplificamos as demonstrações de outros resultados (por ex.,(11.3)) No §12 são introduzidos os subcomplexos minimais de Eilenberg e Zilber [6] e examinada sua ligação com o problema da realização geométrica. Um resultado essencial para as demonstrações dos teoremas do §13 é nosso Teorema 12.4, que não nos parece ter sido formulado na literatura sobre complexos minimais e politopos singulares.

Os principais resultados dêste trabalho acham-se enunciados e demonstrados no Capítulo IV. No §13, encontra-se a caracterização homotópica dos poliedros localmente finitos. Como corolário, segue-se que todo ANR é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro localmente finito. O §14 ocupa-se da caracterização homotópica dos poliedros finitos simplesmente conexos. Para este fim, tomamos como ponto de partida um resultado importante de J.P.Serre (Teorema 14.1) e como instrumento prinpal nosso Teorema 14.6, cuja demonstração emprega essencialmente a técnica dos CW-complexos. Um dos teoremas preliminares ... ((14.3)) foi demonstrado por Whitehead [25] no caso dos CW-complexos. Fornecemos aqui uma demonstração no caso geral que enquadra-se inteiramente no espírito dos métodos do Capítulo III. A caracterização obtida (Teorema 14.8) pode ser expressa de maneira bem simples, no caso dos ANR quaisquer, em termos de homologia: Um ANR simplesmente conexo é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito se, e somente se, os grupos de homologia forem finitamente gerados e nulos a partir de certa dimensão; em outros termos, se os grupos de homologia do ANR forem, grosso modo, como os de um poliedro finito. Em particular, todo ANR compacto, simplesmente conexo, é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito. Os metodos que empregamos permitiram, ainda, demonstrar a recíproca (Teorema 14.12) do teorema de Serre: Num espaço simplesmente conexo, se os grupos de homotopia forem finitamente gerados, os grupos de homologia também o serão. Ao contrario do teorema de Serre, que impõe condições mais estritas sobre o espaço, a recíproca supõe simplesmente que êle seja conexo por caminhos e simplesmente conexo.

No §15, fazemos algumas aplicações dos resultados dos §§13 e 14. Uma consequencia imediata do Teorema 14.8 é a seguinte: Toda variedade topológica conexa, compacta, simplesmente conexa, é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito. Como aplicação do Teorema 13.2, mostramos que se .... $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$ é uma sequencia qualquer de grupos abelianos enumeráveis, existe um poliedro localmente finito P , que admite estrutura de H-espaço, tal que $\pi_q(P) \approx \pi_p$ para todo $q \geqslant 0$.

Por razões evidentes, desempenhou um papel importante nêste trabalho a classe α de espaços (§7). Esta pode ser descrita como a classe dos espaços conexos por caminhos que são do mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo (§13). Os teoremas de Whitehead (§ 7) e os resultados do Capítulo IV sugerem que os espaços da classe $\mathcal{A}$ são o que poderiamos denominar de "lisos", do ponto de vista da teoria da homotopia. A finalidade do §16 é a de exibir um exemplo de um espaço B, razoavelmente "liso" do ponto de vista homológico (métrico, compacto, localmente contraível) que não pertence a classe α . Para êste espaço B, a aplicação canônica (§ 11) $\varphi : |S(B)| \longrightarrow B$ é uma equivalência de co-homotopia, mas não é uma equivalência de homotopia.

Ao encerrar esta Introdução, desejamos expressar ao prof. Candido Lima da Silva Dias, o nosso reconhecimento pela maneira como incentivou e acompanhou êste trabalho. Lembramos com prazer ter sido um curso seu, ministrado em 1950, que despertou em nós o interesse pela Topologia Algébrica.

Apresentamos também nosso sinceros agradecimentos aos profs. Omar Catunda e Edson Farah pelo estímulo e apoio que nos deram e, particularmente, ao prof. Chaim S.Hönig pelo seu valioso concurso em inúmeras discussões sôbre assuntos tratados nêste trabalho.

O prof. Aziz Simão, num assunto remoto às suas preocupações intelectuais, auxiliou-nos, em partes da redação original, a conseguir que obscuridade de expressão não concorresse para aumentar a dificuldade inerente ao assunto. Êste trabalho não teria sido terminado a tempo sem a colaboração de minha esposa, Leda Lyra, que se incumbiu da execução datilográfica dos originais.

As pesquisas que tiveram por resultados a elaboração dêste trabalho tornaram-se possíveis graças ao apoio financeiro do Conselho Nacional de Pesquisas, de cujo Setor de Matemática o autor é Pesquisador Associado.

Algumas observações sôbre Terminologia e Notação

1. Seja $f:E \dashrightarrow F$ uma função definida num conjunto com valores num conjunto F. Diz-se que f é injectiva se $x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$; surjectiva se $f(E) = F$; e bijectiva se f fôr injectiva e surjectiva.
2. Neste trabalho, entendemos por aplicação $f:X \rightarrow Y$ de um espaço X com valores num espaço Y uma função contínua de X em Y.
3. A teoria da homologia empregada sistematicamente neste trabalho é a teoria da homologia singular (7;Ch VIII). Os grupos de homologia com coeficientes inteiros são denotados por $H_q(X)$, $H_q\ (X,A)$.
4. Se $f:X \rightarrow Y$ é uma aplicação, denotaremos por $f_* : H_q\ (X) \longrightarrow H_q\ (Y)$ o homomorfismo induzido entre os grupos de homologia e por $f_\# : \pi_q(X) \longrightarrow \pi_q(Y)$ o homomorfismo induzido entre os grupos de homotopia.

CAPÍTULO I

Retractos Absolutos de Vizinhaça

Neste capítulo supomos todos os espaços topológicos metrizáveis e separáveis, salvo menção explicita em contrário.

§1 - Definições e propriedades elementares.

Def.1 - Seja A um conjunto, $B \subset A$ um subconjunto. Uma função $f: A \longrightarrow A$ diz-se uma retração sôbre B, se $f(A) \subset B$ e $f(x) = x$ para todo $x \in B$. B é denominado retracto de A. Se A é um espaço topológico, então uma retração será sempre suposta contínua.

Se f é uma retração de A sôbre B, temos $f \mid B$ = identidade de B; donde, uma retração pode ser considerada como um prolongamento ao conjunto A, e relativo a B, da aplicação identica de B. Se A é um espaço e B um retracto de A, é imediato verificar que B é fechado em A.

Def.2 - Seja X um espaço e A um subespaço de X. Dizemos que A é um retracto de vizinhança em X, se existir uma vizinhança U de A em X e uma retração de U sôbre A.

Def.3 - Um espaço conexo X é dito um ANR(1), se para todo espaço Y onde X estiver imerso como subespaço fechado, X fôr retracto de vizinhança em Y.

Def.4 - Dizemos que um espaço conexo é um AR(1), se X fôr retracto de todo espaço Y, onde X estiver imerso como subespaço fechado.

Ser um ANR é evidentemente uma propriedade topológica. Todo AR é um ANR. Os ANR formam uma classe bastante lata de espaços. Veremos adiante que os poliedros e as variedades to

---

(1) - Nomenclatura - Usamos aqui as seguintes abreviações quasi universalmente adotadas: ANR, "absolute neighborhood retract"; e AR, "absolute retract". Os equivalentes em português destas expressões são, respectivamente, retracto absoluto de vizinhança e retracto absoluto.
Os números entre colchetes são referências a bibliografia que se encontra no fim deste trabalho.

pológicas são ANR.

Entendemos por um par de espaços (Y,B), nesta capítulo, um par constituido de um espaço Y e um subespaço fechado $B \subset Y$.

Teorema 1.1 - Um espaço conexo X é um ANR, se, e somente se, para qualquer que seja o par (Y,B), toda aplicação $f: B \longrightarrow X$ admite um prolongamento $f': V \longrightarrow X$ a uma vizinhança V de B em Y.

Teorema 1.1'- Um espaço conexo X é um AR, se, e somente se, para qualquer que seja o par (Y,B), toda aplicação $f: B \longrightarrow X$ admite um prolongamento a Y.

Demonstraremos êstes teoremas conjuntamente. Para demonstrar que as respectivas condições são suficientes, tomemos um espaço Y qualquer contendo X como subespaço fechado. Assim sendo, (Y,B) é um par de espaços. Consdremos a aplicação identica i de X em X. No primeiro caso, i pode ser prolongada a uma vizinhança U de X em Y, relativo a X do que decorre ser X um ANR. No segundo caso, i pode ser prolongada a Y, relativo a X, sendo consequentemente X um AR.

Para demonstrar que a condição é necessária, seja $Q = \prod_{n=1}^{\infty} [0,1/n]$ o paralelotopo de Hilbert. Q é um espaço métrico separável, compacto ("universal" para a imersão de espaços métricos separáveis). Seja $Q_1 = \prod_{n=2}^{\infty} [0,1/n]$; então $Q = [0,1] \times Q_1$, e Q_1 é também paralelotopo de Hilbert. Segundo o teorema de imersão de Urysohn ([18] , ChapI,p.39), X pode ser imerso em Q_1. Seja $Z = \{0\} \times X \cup]0,1] \times Q_1$.

Como Q_1 é fechado, segue-se que $\bar{X} \cap (Z-X) = \emptyset$, onde $\bar{X}$ é a aderência de X em Q. Z é métrico separável e X é fechado em Z; isto é, temos um par (Z,X).

Consideremos um par qualquer (Y,B) e $f: B \longrightarrow X$ uma aplicação qualquer. Como $X \subset Z \subset Q$, a aplicação f pode ser representada $f = (f_0, f_1)$, onde $f_1: B \longrightarrow Q_1$, e $f_0: B \longrightarrow I$ é dada por $f_0(b)=0$

para todo $b \in B$. De acôrdo com o teorema de Tietze ....
([18] , Chap.I, p. 28), f_1 pode ser prolongada a uma aplicação $f_1' : Y \to Q_1$. Façamos $f_0' = d(y,B) / (1+d(y,B))$, onde d é uma métrica para o espaço Y, e $d(y,B)$ denota a distancia do ponto y ao conjunto B. A aplicação f_0' tem as seguintes propriedades: $f_0'(y) > 0$ para $y \in Y-B$, e f_0' prolonga f_0. Fazendo $f' = (f_0', f_1')$, é imediato verificar que
$f'(Y) \subset \{0\} \times X \cup]0,1] \times Q_1 = Z$.

Consideremos, agora, ambos os casos:

(a) Seja X um ANR. Então, existe, por definição uma vizinhança U de X em Z e uma retração $r: U \to X$. A imagem inversa $W = f'^{-1}(U)$ é uma vizinhança de B em Y. Definimos uma aplicação $g: W \to Z$ por meio de $g(y) = f'(y)$ para $y \in W$. Então $f'' = r \circ g : W \to X$ é um prolongamento de f sobre W, relativo a X.

(b) Seja X um AR. Neste caso existe uma retração $r': Z \to X$ e $f'' = r' \circ f'$ prolonga $f: B \to X$ sobre Y, relativo a X.

<u>Observações</u> - (1) Esta demonstração é essencialmente devida a R.H.Fox [8], e apoia-se sobre sua construção do par (Z,X). Veja também S.T.Hu [15].

(2) Os AR compactos se identificam aos retractos do parelelotopo de Hilbert, pois, neste caso, um AR pode ser imerso como subespaço <u>fechado</u> de Q. Analogamente, os ANR compactos se identificam aos retractos de vizinhança em Q.

Teorema 1.2 (Hanner) - <u>Todo subespaço aberto conexo de um ANR é ANR</u>

Sejam X um ANR, U um aberto de X, (Y,B) um par qualquer de espaços e $f: B \to U$ uma aplicação qualquer. Como X é um ANR, f pode ser prolongada sobre uma vizinhança V de B em Y, digamos, $f': V \to X$. Assim sendo, $W = f'^{-1}(U)$ é aberto em V

e contem B, e, portanto, W é uma vizinhança de B em Y. Definimos a aplicação $g: W \to U$ por meio de $g(y) = f'(y)$ para todo $y \in W$. Conforme o Teorema 1.1, U é um ANR.

<u>Teorema</u> 1.3 - <u>Sejam X um ANR e A um subespaço fechado conexo de X. Então A é um ANR se, e somente se, A fôr um retracto de vizinhança em X.</u>

Evidentemente, a condição é necessária. Suponhamos, por outro lado, que A seja retracto de uma vizinhança U de A em X. Sem prejuizo da generalidade, podemos supor U aberto em X. Portanto, conforme o Teorema 1.2, U é um ANR. Sejam (Y,B) um par qualquer e f uma aplicação qualquer de B em A. De acôrdo com o Teorema 1.1, f pode ser prolongada a uma aplicação $f': V \to U$, onde V é uma vizinhança de B em Y. Seja $r: U \to A$ uma retração de U sobre A (que existe por hipótese); então, $g = r \circ f': V \to A$ é um prolongamento de f sobre V, relativo a A. Conforme o Teorema 1.1, A é um ANR.

Segundo o Teorema 1.2, se X é um ANR, todo ponto $x \in X$ tem uma vizinhança que é ANR. É natural indagar se, reciprocamente, um espaço conexo X em que cada ponto tem uma vizinhança ANR, não é ele proprio ANR. O. Hanner respondeu afirmativamente a esta questão. A propriedade de ser um ANR é pois, uma propriedade local.

Teorema 1.4 (Hanner) - <u>Um espaço conexo, no qual todo ponto tem uma vizinhança ANR, é um ANR.</u>

Sua demonstração se encontra em ([12]).

Def.5 - Dizemos que um espaço X é <u>localmente contraível no ponto</u> $x \in X$, se, para toda vizinhança V de x, existir uma vizinhança U de x que é contraível em V para o ponto x. Diz-se que X é <u>localmente contraível</u> quando fôr localmente contraível em cada um dos seus pontos.

Def.6 - Dizemos que um espaço é <u>francamente localmente contraí</u> -

vel no ponto $x \in X$, se, existir uma vizinhança V de x que é contraível em X para o ponto x. Diz-se que X é fracamente localmente contraível, se fôr fracamente localmente contraível em cada um dos seus pontos.

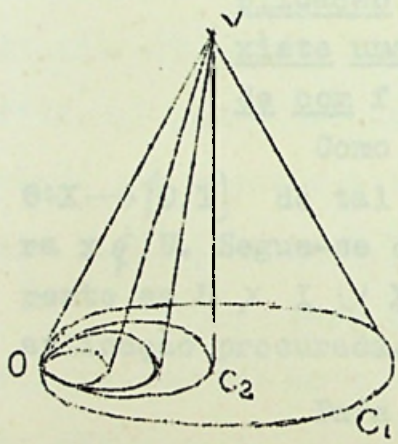
Teorema 1.5 - <u>Todo ANR é localmente contraível. Todo AR é contraível.</u>

Deve-se a K. Borsuk este teorema no caso compacto. Para o presente caso, ver a demonstração de R.Fox ([8]).

Observemos que <u>todo ANR é conexo por caminhos.</u> De fato, um ANR é conexo e localmente conexo por caminhos.

É imediata a inferência de que todo espaço localmente contraível é fracamente localmente contraível. A recíproca, porém, não é verdadeira, como mostra o exemplo seguinte:

<u>Exemplo</u> - Construamos um espaço métrico compacto, fracamente localmente contraível, que pelo menos num ponto não seja localmente contraível. Consideremos o espaço R^3. No plano $x_3 = 0$, seja C_n o círculo de raio $1/n$ e centro $(1/n,0,0)$ Seja X $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$; $v = (1/2,0,1)$; e $\widehat{X}$, o cone constituido de todos os segmentos de reta unindo v aos pontos de X.



O espaço X é compacto, mas não é localmente contraível, como se verifica facilmente considerando o ponto $O = (0,0,0)$. O cone $\widehat{X}$ é, no entanto, fracamente localmente contraível. De fato, num ponto ... $x \in \widehat{X}$ em que $\widehat{X}$ não seja localmente contraível, qualquer vizinhança pode ser contraída ao ponto v, e, em seguida, deformada por um caminho de volta ao ponto x. É claro que $\widehat{X}$, embora fracamente localmente contraível no ponto $O = (0,0,0)$, não é localmente contraível neste ponto. Observemos, finalmente, que o espaço $\widehat{X}$ é contraível ao ponto v.

<u>Teorema 1.6 - Um produto cartesiano finito de espaços é ANR se, e somente se, cada fator é um ANR.</u>

Isto é fàcilmente demonstrável aplicando-se o Teorema 1.1.

Def. 7 - Dizemos que um espaço X satisfaz à propriedade do prolongamento das homotopias, quando para todo par (Y,B) e toda homotopia $f_t:B\longrightarrow X$, $0\leqslant t\leqslant 1$, tal que f_o se prolonga a $f_o^!:Y\rightarrow X$, a homotopia f_t se prolonga a uma homotopia $f_t^!:Y\longrightarrow X$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

<u>Teorema 1.7 - Os ANR satisfazem à propriedade do prolongamento das homotopias.</u>

Para demonstrar este teorema, precisaremos primeiramente de um lema, devido a H. Cartan. Neste lema, os espaços não precisam ser metrizáveis.

<u>Lema 1.8 - Sejam X um espaço normal, $A\subset X$ fechado em X, U uma vizinhança de A em X, e $f:U\times I\cup X\times\{0\}\longrightarrow Z$ uma aplicação com valores num espaço Z qualquer. Então, existe uma aplicação continua $F:X\times I\rightarrow Z$, que coincide com f sôbre $A\times I\cup X\times\{0\}$</u>

Como X é normal, existe uma função contínua ..... $\theta:X\longrightarrow[0,1]$ de tal modo que $\theta(x)=1$ para $x\in A$, e $\theta(x)=0$ para $x\notin U$. Segue-se que $(x,t)\rightarrow(x,t.\theta(x))$ aplica $X\times I$ contínuamente em $U\times I\cup X\times\{0\}$ Portanto, $F(x,t)=f(x,t.\theta(x))$ é a aplicação procurada.

Para demonstrar o Teorema 1.7, tomemos um ANR X e observemos que, dado um par (Y,B), $Y\times I$ é metrizável e ..... $B\times I\cup Y\times\{0\}$ é fechado em $Y\times I$. Uma homotopia $f_t:B\rightarrow X$ e um prolongamento $f_o^!$ de f_o sobre Y dados definem uma aplicação .... $\varphi:B\times I\cup Y\times\{0\}\rightarrow X$. Como X é um ANR, φ pode ser prolongada a uma aplicação φ' definida sobre uma vizinhança W de .... $B\times I\cup Y\times\{0\}$ em $Y\times I$. Agora, mostremos que existe uma vizinhança U de B em Y tal que $U\times I\subset W$. De fato, dados $y\in B$ et $t\in I$ quaisquer, existem vizinhanças TV_t e $V_t^!$ de y em Y e t em I respectivamente, de modo que $V_t\times V_t^!\subset W$. Como I é compacto, ,,,

$\{y\} \times I$ pode ser recoberto por um número finito de tais vizinhanças elementares. Fazendo $V_y = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{t_i}$, temos $V_y \times I \subset W$. Finalmente $U = \bigcup_{y \in B} V_y$ é uma vizinhança de B em Y tal que $U \times I \subset W$. Tomando a restrição de φ a $U \times I \cup Y \times \{0\}$ e aplicando o Lema 1.8, temos uma aplicação $F: Y \times I \longrightarrow X$ que prolonga a aplicação φ. F é precisamente a homotopia prolongada $f_t: Y \longrightarrow X$.

Uma consequencia imediata da propriedade do prolongamento das homotopias é a seguinte: Se $f: B \longrightarrow X$ pode ser prolongada a Y em relação a X, então qualquer $g: B \longrightarrow X$ homotópica a f pode ser igualmente prolongada.

Teorema 1.9 - <u>Se um ANR X é contraível a um ponto, então X é um AR.</u>

De fato, suponhamos que X seja contraível ao ponto $x_0 \in X$. Consideremos um par (Y,B) e uma aplicação qualquer $f: B \longrightarrow X$. Como X é contraível, $f \simeq f': B \longrightarrow X$ de modo que $f'(B) = \{x_0\}$. Ora, f' pode ser prolongada a uma aplicação $f'': Y \longrightarrow X$ satisfazendo à condição $f''(Y) = \{x_0\}$. Conforme a observação que precede este teorema, f pode também ser prolongada sobre Y. Do Teorema 1.1' segue que X é um AR.

Para os espaços métricos, compactos de dimensão finita, Borsuk mostrou que a contractibilidade local caracteriza os ANR.

<u>Teorema</u> 1.10 (Borsuk) - <u>Todo espaço conexo, compacto, de dimensão finita, localmente contraível é um ANR.</u>

Para demonstração, veja ([1] ,p.240).

<u>Observação</u> - Borsuk mostrou, por meio de um exemplo, que a hipótese $\dim X < \infty$ é essencial no Teorema 1.10. Construiu ele um espaço métrico, compacto, de dimensão infinita, localmente contraível, que não é um ANR. (Veja [3]).

§ 2. Poliedros localmente finitos e variedades topológicas.

Uma importante classe de espaços ANR, como veremos abaixo, é constituida de poliedros localmente finitos conexos. Esta classe contém, em particular, os poliedros finitos conexos. Os poliedros localmente finitos são definidos como realizações geométricas de complexos simpliciais abstratos localmente finitos. Topo poliedro finito é um espaço métrico, compacto (e, portanto, separável), localmente contraível.

Quanto aos complexos localmente finitos, lembremos algumas de suas propriedades. Seja (K Φ) um complexo simplicial abstrato localmente finito. Uma realização geométrica $\tilde{K}$ pode ser definida a partir do subconjunto do cubo I^K dado por : $(\lambda_k) \in \tilde{K}$ se, e somente se $\sum_k \lambda_k = 1$ e $\{k \mid \lambda_k > 0\} \in \Phi$. Para cada simplexo $S \in \Phi$, $\tilde{S}$ identifica-se a um simplexo geométrico de $\tilde{K}$. Para $\tilde{K}$, uma métrica pode ser definida por .... $d(\lambda\ \mu)^2 = \sum_k (\lambda_k - \mu_k)^2$. Sobre cada simplexo $\tilde{S}$ de $\tilde{K}$, esta métrica induz a topologia natural de $\tilde{S}$. $\tilde{K}$ é um espaço localmente compacto, pois os $U_k = \{\lambda \mid \lambda_k > 0\}$, k percorrendo os vértices de $\tilde{K}$, constituem um recobrimento de $\tilde{K}$ por abertos relativamente compactos. De fato, $U_k \subset \bigcup_{k \in S} \tilde{S}$, que é compacto, logo $\bar{U}_k$ é compacto. Por outro lado, se $\tilde{K}$ é conexo, é facil mostrar que $\tilde{K}$ tem um conjunto enumerável de vértices e, portanto, de simplexos. O recobrimento aberto (U_k) é enumerável e cada U_k é um espaço separável. Portanto $\tilde{K}$ é um espaço métrico separável.

A topologia fraca em $\tilde{K}$ é definida da seguinte maneira: um conjunto F é fechado em $\tilde{K}$ se, e somente se, para todo simplexo $\tilde{S}$, $F \cap \tilde{S}$ fôr fechado na topologia natural do simplexo $\tilde{S}$. Seja $\varphi_s : \tilde{S} \longrightarrow \tilde{K}$ a inclusão. A topologia fraca é a topologia mais fina sobre $\tilde{K}$ que torna contínuas todas as aplicações φ_s. Sobre um poliédro localmente finito, esta topologia coincide co a topologia metrizável acima referida.

Teorema 2.1 - Todo poliedro conexo finito é um ANR.

De fato, todo poliedro finito é um espaço compacto, de dimensão finita e, claramente, localmente contraível. O resultado decorre do Teorema 1.10.

Teorema 2.2 - Todo poliedro conexo, localmente finito, é um ANR

Um tal poliedro é um espaço metrizável e separável. Como cada ponto tem uma vizinhança que é um poliedro finito e, portanto, um ANR, resulta do Teorema 1.4 que o poliedro é um ANR.

Seja X uma variedade topológica conexa, isto é, um espaço de Hausdorff conexo tal que cada ponto tem uma vizinhança h homeomorfa ao espaço R^n. O espaço X é localmente compacto. Um argumento análogo ao que empregamos acima, no caso do poliedro localmente finito, mostra que X é metrizável e separável se, e sòmente se, a variedade X for paracompacta (ou, equivalentemente, enumerável no infinito). Como cada vizinhança homeomorfa a R^n é um ANR, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3 - Uma variedade topológica, conexa, paracompacta, é um ANR.

§ 3. Relação entre ANR e poliedros.

Def.8 - Sejam X e Y espaços quaisquer (não necessàriamente metrizáveis). Dizemos que X é dominado por Y (ou que Y domina X) se existirem aplicações $f:X \longrightarrow Y$ e $g:Y \longrightarrow X$ tais que $g \circ f \simeq 1_X$ = aplicação identica de X.

Teorema 3.1 (Dower, Hanner) Todo ANR é dominado por um poliedro localmente finito.

Para demonstração veja (Hanner [12]).

Corolario 3.2 - Todo ANR é dominado por um ANR localmente compacto.

Teorema 3.3 ä (Borsuk) - Todo ANR compacto é dominado por um poliedro finito.

Demonstração, veja ([2]).

Seja X um ANR compacto. Conforme o Teorema 3.3, existe um poliedro finito P que domina X; isto é, existem aplicações $f:X \to P$ e $g:P \to X$ tais que $g \circ f \simeq 1_X$. Passando aos homomorfismos induzidos em homologia, temos $g_* \circ f_* = 1$. É fácil verificar, então, que $p = f_* \circ g_*$ é um projetor nos grupos de homologia $H_i(P)$, para $i \geqslant 0$, e que os grupos $H_i(X)$ são isomorficos a fatores diretos dos grupos $H_i(P)$. Portanto os $H_i(X)$ são finitamente gerados e nulos para $i > \dim P$.

Observemos agora que o espaço $\hat{X}$, definido no exemplo do § 1, não é um ANR, pois $\hat{X}$ não é localmente contraível. Empregando a observação acima, poderiamos também demonstrar isto por um argumento de natureza global. De fato, suponhamos que X seja um ANR. Como X é subespaço fechado de $\hat{X}$ e retracto da vizinhança $U = \hat{X} \cap R \times R \times [0,1/3[$ (a retração é dada por projeção a partir do ponto v), segue-se do Teorema 1.3 que X é um ANR (compacto). Isto leva a uma contradição com a observação acima sobre os grupos de homologia de um ANR compacto, pois $H_1(X)$ não é finitamente gerado, como se verifica facilmente. Observemos ainda que $\hat{X}$ é um espaço métrido, compacto, contraível que não é um AR.

Na classe dos espaços conexos por caminhos, a relação "Y domina X" é transitiva e reflexiva. Em geral, porém, não é verdadeiro que X domina Y e Y domina X acarrete que $X \simeq Y$. Veremos no Capítulo IV que isto ocorre, no entanto, para certas classes de espaços.

§ 4. Espaços de laços de um ANR.

Def.9 - Sejam X um espaço conexo por caminhos e x_0 um ponto fixado em X. O <u>espaço</u> $\Omega(X)$ <u>de laços</u> de X, com ponto de base x_0, é o conjunto de todos os caminhos $f:(I,\dot{I}) \to (X,x_0)$, munido da topologia da convergencia compacta.

Se X é um espaço métrico separável, então $\Omega(X)$ é metrizável e separável. Uma métrica para X pode ser definida da seguinte maneira: se $f,g \in \Omega(X)$, $\rho(f,g) = \mathrm{Sup}\, d(f(x),g(x))$, onde d é uma métrica para o espaço X. Se $\pi_1(X) = 0$, $\Omega(X)$ é conexo por caminhos.

<u>Teorema</u> 4.1 - <u>Se</u> X <u>é um ANR simplesmente conexo</u> $\Omega(X)$ <u>é um ANR</u>[1]

Dado um par arbitrário (Y,B), seja $\varphi: B \to \Omega(X)$ uma aplicação qualquer; seja $\varphi^*: B \times I \to X$ a aplicação associada, isto é, $\varphi^*(b,t) = \varphi(b)(t) \in X$. A continuidade de φ^* é equivalente a de φ (Veja [9]). A aplicação φ^* pode ser prolongada continuamente a $B \times I \cup Y \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$, fazendo .... $\varphi^*(y,0) = \varphi^*(y,1) = x_0$, para todo $y \in Y$. Consideremos o par $(Y \times I, B \times I \cup Y \times \{0\} \cup Y \times \{1\})$. Como X é um ANR, φ^* pode ser prolongada a uma aplicação ψ^* de uma vizinhança W de .... $B \times I \cup Y \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ em $Y \times I$, com valores em X. Segundo o argumento já empregado na demonstração do Teorema 1.7, existe uma vizinhança U de B em Y tal que $U \times I \subset W$. Seja .... $\psi_1^* = \psi^* | U \times I$. A sua aplicação associada $\psi_1: U \to \Omega(X)$ é contínua e prolonga φ. Segundo o Teorema 1.1, $\Omega(X)$ é um ANR.

* * * * *

---

(1) - A restrição $\pi_1(X) = 0$ é necessária para assegurar que $\Omega(X)$ seja conexo visto que exigimos conexidade na definição de ANR (Def.3).

CAPÍTULO II

Complexos Celulares

§ 5 - Complexos celulares

A teoria dos CW-complexos de J.H.C.Whitehead, cujas propriedades principais resumiremos nos §§ 5 e 6, constitui a técnica geométrica essencial para a demonstração dos resulta - dos do Cap. IV. Citamos no §7, os teoremas principais de W. Hurewicz e J.H.C.Whitehead, que serão utilizados posteriormente, e apresentamos algumas aplicações no §8. Uma exposição pormenorizada sôbre os CW-complexos encontra-se no artigo [25] de J.H.C.Whitehead. Veja também, Hilton [11], Cap. VII.

Os complexos celulares, abaixo definidos, constituem uma generalização da noção usual de complexo simplicial geométrico, sendo, porém, mais adequados às necessidades da teoria da homotopia.

Por uma n-celula aberta (resp.fechada) entendemos um homeomorfo qualquer do subespaço do R^n definido por .... $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1$(resp. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$).

Def.10 - Um complexo celular K é um espaço de Hausdorff formado pela reunião de celulas abertas, duas a duas disjuntas, satisfazendo às seguintes condições:

(a) A adêrencia $\bar{e}^n$ de cada n celula e^n em K é imagem de um n-ximplexos fechado σ^n (fixamos um simplexo para cada dimensão n) por uma aplicação $f: \sigma^n \to \bar{e}^n$, de tal modo que ... $f \mid (\sigma^n - \dot{\sigma}^n)$ seja um homeomorfismo sobre e^n;

b) Fazendo $\partial e^n = f(\dot{\sigma}^n)$, exige-se que, para cada celula e^n, $\partial e^n \subset K^{n-1}$, onde K^{n-1} é o (n-1)-esqueleto de K, isto é, a reunião das celulas de K de dimensão $\leq$ n-1.

A aplicação $f: \sigma^n \to \bar{e}^n$ é denominada uma aplicação característica para a celula e^n de K. Ao contrário do que ocorre nos complexos simpliciais, da presença de uma n-celula em K não decorre a presença de r-celulas para todo $r < n$.

Se K é um complexo celular, empregaremos, a exemplo do que faz Whitehead [25], o mesmo simbolo K para denotar o espaço do complexo e a coleção das celulas que constituem K. Seu sentido preciso ficará claro, em cada caso, pelo contexto em que ele se inclui. Conforme esta convenção, têm sentido ambas as relações $e^n \in K$ e $e^n \subset K$.

Seja K um complexo celular. A <u>dimensão</u> de K, denotada por dim K, é definida como sendo o menor inteiro que limita superiormente as dimensões das celulas de K. Se a dimensão das celulas não fôr limitada superiormente, definiremos .... $\dim K = \infty$.

<u>Def</u>.11 - Uma parte L de um complexo celular K diz-se um <u>sub - complexo</u>, se L fôr reunião de um subconjunto de celulas de K, satisfazendo à condição $e \subset L \Rightarrow \bar{e} \subset L$.

<u>Exemplo</u> - Seja K um complexo celular. Para cada inteiro $r \geqslant 0$, o r-esqueleto K^r é um subcomplexo de K. Temos, então,....... $\dim K^r \leq r$, mas podemos ter $\dim K^r < r$.

A definição de complexo celular acima, é demasiada - mente lata para ser útil, como se vê no seguinte exemplo. Seja $K = S^2$ e consideremos cada ponto $x \in S^2$ como uma 0-celula. Temos $K^0 = K$ e qualquer subconjunto $L \subset K$ é um subcomplexo. A estrutura celular nada nos diz neste caso. Para aproximar a noção de complexo celular da de poliedro, Whitehead [25] considera duas restrições a mais.

<u>Def</u>.12 - Um complexo celular diz-se de <u>fecho</u> <u>finito</u>, se, para toda celula $e \in K$, $\bar{e}$ estiver contido num subcomplexo finito de K.

<u>Def</u>.13 - Um complexo celular K diz-se munido da topologia <u>fraca</u>[1], se estiver satisfeita a seguinte condição: uma parte

---

(1) - A topologia fraca sôbre K é a topologia <u>mais fina</u> que torna as inclusões $\bar{e} \to K$ continuas para $\forall e \in K$.

X de K é fechada, se, e somente se, $X \cap \bar{e}$ fôr fechada para toda celula e de K.

A interseção de uma família qualquer de subcomplexos de um complexo celular K é, evidentemente, um subcomplexo. Dada uma parte X de K, definimos $K(X)$ como a interseção dos subcomplexos de K que contem X. Em termos desta notação, um complexo celular K é de fecho finito, se $K(e)$ fôr um subcomplexo finito, qualquer que seja a celula $e \in K$. Temos ainda, claramente, $K(\bar{e}) = K(e)$ para toda $e \in K$.

Para um complexo celular K de fecho finito, a definição da topologia fraca pode ser expressa equivalentemente da seguinte maneira: X é fechado em K se, e somente se, $X \cap L$ for fechado para todo subcomplexo finito L de K. (Veja [25], p. 223)

Def. 14 - Um complexo celular K é denominado CW-complexo se fôr de fecho finito e munido da topologia fraca.

Exemplos. (1) Todo complexo celular com um número finito de células é um CW-complexo. De fato, um complexo celular finito K é evidentemente de fecho finito. Por outro lado, sua topologia é a topologia fraca, pois, se $X \cap \bar{e}$ é fechado para toda celula e, $X = \bigcup X \cap \bar{e}$ é fechado, visto se tratar de uma reunião finita.

(2) Todo poliedro finito ou localmente finito é um CW-complexo.

(3) A esfera S^n pode ser decomposta como um CW-complexo constituido de duas celulas, $S^n = e^0 \cup e^n$. De fato, fixemos um ponto $e^0 \in S^n$ e consideremos o complemente $S^n - e^0$, que é uma n-celula aberta e^n. Como aplicação característica, tomemos qualquer aplicação $f:(\sigma^n, \dot{\sigma}^n) \to (\bar{e}^n, e^0)$ tal que $f \mid (\sigma^n - \dot{\sigma}^n)$ seja um homeomorfismo sobre e^n.

(4) Seja K um CW-complexo, $I = [0,1]$ e consideremos a seguinte decomposição do espaço de Hausdorff $K \times I$ em célu

las: para cada celula $e^n \in K$, consideremos as n-celulas $e^n \times \{0\}$, $e^n \times \{1\}$ e a (n+1)-celula $e^n \times]0,1[$. A reunião de todas as celulas destes tipos dá o espaço $K \times I$ e as aplica - ções características são facilmente definiveis em termos das aplicações características das celulas e^n. Por exemplo, se $f: \sigma^n \to \bar{e}^n$ é uma aplicação característica para e^n e $1 : I \to I$ a aplicação identica, $(f,1): \sigma^n \times I \to \overline{e^n \times]0,1[} = \bar{e}^n \times I$ é uma aplicação característica para a celula $e^n \times]0,1[$ de $K \times I$.

<u>Def</u>.15 - Um complexo celular K diz-se <u>localmente</u> <u>finito</u> se cada ponto $p \in K$ tem uma vizinhança contida num subcomplexo <u>finito</u> de K.

Verifica-se fàcilmente que todo complexo celular localmente finito é um CW-complexo. Veja [25] , p. 223.

Se K é um CW-complexo localmente finito conexo , não é dificil verificar que o número de celulas de K é enumerável. Verifica-se igualmente sem dificuldade que um CW-complexo localmente finito conexo K é um espaço localmente compacto, enumerável no infinito e localmente metrisável. Argumento análogo ao que empregamos no caso dos complexos localmente finitos conexos (§2), mostra que um CW-complexo local - mente finito conexo K é um espaço metrisável, separável (lo - calmente compacto).

<u>Def</u>.16 - Sejam K_1 e K_2 CW-complexos. Uma aplicação $f:K_1 \to K_2$ diz-se <u>celular</u> se, $f(K_1^n) \subset K_2^n$ para todo $n \geq 0$.

<u>Exemplo</u> - As aplicações simpliciais entre poliedros são exemplos de aplicações celulares.

Enumeramos a seguir as principais propriedades dos CW-complexos que utilisaremos. Para as demonstrações das propriedades (5.1) a (5.8), veja-se o artigo [25] de J.H.C. Whitehead, pp.224-230.

(5.1) Sejam K um CW-complexo, X uma parte fechada de K, Y um espaço qualquer e $f:X \to Y$ uma função. Então, f é contínua se, e, somente se, $f \mid X \cap \bar{e}$ fôr contínua para toda celula $e \in K$.

Seja K um CW-complexo. Se a reunião de um subconjunto de celulas de K fôr uma parte fechada de K, evidencia-se, a partir da difinição, que esta reunião é um subcomplexo de K. Reciprocamente temos,

(5.2) Um subcomplexo L de um CW-complexo K é um subespaço fechado e a topologia induzida por K em L é a topologia fraca de L.

(5.3) Se um CW-complexo K é conexo, K^n é conexo para todo $n > 0$.

(5.4) Se X é uma parte compacta de um CW-complexo K, K(X) é um subcomplexo finito de K.

(5.5) Se K é um CW-complexo, o espaço K é normal.

(5.6) Seja K um CW-complexo, L um subcomplexo de K, $f'_0:K \to Y$ uma aplicação com valores num espaço Y qualquer. Então, dada uma homotopia $f_t:L \to Y$ tal que $f_0 = f'_0 \mid L$, existe uma homotopia $f'_t:K \to Y$ tal que $f'_t \mid L = f_t$ para $0 \leq t \leq 1$.

(5.7) Sejam K e P CW-complexos, L um subcomplexo de K e $f_0:K \to P$ uma aplicação tal que $f_0 \mid L$ seja celular. Então existe uma homotopia $f_t:K \to P$ rel. L, tal que f'_1 é celular.

(5.8) O espaço de um CW-complexo é localmente contraível.

§6 - Relações entre CW-complexos e poliedros. Cilindro de uma aplicação.

Diz-se que um CW-complexo K é enumerável (respectivamente finito), se fôr constituido de um número enumerável (respectivamente finito) de celulas. J.H.C.Whitehead [25] p.239 demonstra o seguinte resultado.

Teorema 6.1 - Qualquer CW.complexo enumerável (resp.finito) de dimensão p, $p \leq \infty$, é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro localmente finito (resp. finito) de dimensão p.

Os CW complexos enumeráveis desempenham um papel central nas demonstrações do Capítulo IV. A enumerabilidade desempenha um papel importante na caracterização do tipo de homotopia dos poliedros localmente finitos.

Seja K um CW-complexo enumerável, conexo e $p_0 \in K$ um ponto fixado.

<u>Teorema</u> 6.2 - <u>Os grupos de homotopia</u> $\pi_q(K,p_0)$, $q \geq 1$, <u>de um CW-plexo enumerável conexo</u> K <u>têm um número enumerável de elementos</u>.

Segundo o Teorema 6.1, K tem o mesmo tipo de homotopia que um poliedro (conexo) localmente finito P. Como os grupos $\pi_q(K,p_0)$ são invariantes do tipo de homotopia, é suficiente demonstrar o resultado para o poliedro P que, sendo conexo, tem um número enumerável de simplexos. Portanto, o conjunto dos subcomplexos finitos finitos de P é enumerável. Fixemos um vértice $p \in P$, e fixemos um inteiro $q \geq 0$. Os elementos $\alpha \in \pi_q(P,p)$ têm como representantes as aplicações $f:(S^q,x_0) \to (P,p)$, onde podemos supor que a esfera S^q esteja triangulada uma vez por todas e que x_0 seja um vértice desta triangulação. Como a imagem $f(S^q)$ é compacta, está contida num subcomplexo finito $P_1 \subset P$ (propriedade (5.4)). Conforme o teorema de aproximação simplicial [7], existe uma subdivisão baricentrica $(S^q)^{(k)}$ de ordem $k \geq 0$ de S^q e uma aplicação simplicial $f': (S^q)^{(k)} \to P_1$ tal que $f \simeq f'$ (por uma homotopia com valores em P_1). Seja $\mathfrak{A}$ o conjunto (enumerável) dos subpoliedros finitos de P e $\mathfrak{S}_k(P_1)$ o conjunto (finito) das aplicações simpliciais de $(S^q)^{(k)}$ em P_1. O enunciado resultará facilmente do fato de ser $\bigcup_{P_1 \in \mathfrak{A}} (\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k(P_1))$ enumerável, fato este que é claro, pois se trata de uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis. Cada classe de homotopia de aplicações

$f: (S^q,x_0) \to (P,p)$ tem um representante no conjunto prece -

dente (segundo o teorema de aproximação simplicial); portanto $\pi_{g}(P,p)$ é enumerável.

<u>Corolario 6.3</u> - <u>Se um espaco conexo por caminhos X é dominado por um CW-complexo enumerável K, então os grupos $\pi_q(X,a)$ são enumeráveis para todo $q \geqslant 1$.</u>

De fato, seja K um CW-xompleso enumerável dominaodo X; então, $\pi_q(X)$ é isomórfico a um subgrupo de $\pi_q(K)$, grupo este que é enumerável segundo o teorema precedente.

<u>Def 17</u> - Sejam X,Y espaços quaisquer e $f:X \to Y$ uma aplicação. Podemos supor, sem prejuizo da generalidade, que $X \times I \cap Y = \emptyset$. Consideremos a topologia soma em $X \times I \cup Y$ e, neste espaço, identifiquemos $(x,1)$ e $f(x) \in Y$. O espaço quociente $Z = C_f(X,Y)$ é denominado o <u>cilindro</u> da aplicação f.

Seja Z o cilindro da aplicação $f: X \to Y$. O espaço X é identificado ao subespaço fechado $X \times \{0\}$ de Z pela imersão $x \to (x,0)$. Y é identificado ao subespaço fechado de Z, imagem de Y pela aplicação canonica $X \times I \cup Y \to Z$ definida pela identificação. A propriedade fundamental do cilindro da aplicação f é a seguinte: Y <u>é um retracto de deformação de</u> Z (Veja Hilton [11], Ch.VII). Esta propriedade acarreta que a inclusão $j:Y \to Z$ é uma equivalência de homotopia e, portanto, $Y \simeq Z$.

A importância do cilindro da aplicaçã para a teoria da homotopia é permitir a substituição de uma aplicação qualquer $f:X \to Y$ por uma inclusão $i:X \to Z$, onde Z é do mesmo tipo de homotopia que Y (mais precisamente, Z contem Y como retracto de deformação).

<u>Teorema 6.4</u> - <u>Se K_1 e K_2 são CW-complexos e $f:K_1 \to K_2$ é uma aplicação celular de K_1 em K_2, então o cilindro da aplicação f é um CW-complexo.</u>

Para a demonstração, veja [25], p. 238.

Se P é um poliedro finito de dimensão n, no fato de coincidirem sobre P os grupos de homologia singulares com os grupos de homologia simpliciais, segue-se que $H_q(P) = 0$ para $q > n$. O mesmo resultado valerá se P fôr um CW-complexo finito de dimensão n, pois, segundo o Teorema 6.1, P é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito de dimensão n, e os grupos de homologia são invariantes do tipo de homotopia.

Teorema 6.5 - Seja K um CW-complexo qualquer de dimensão n ; então, $H_q(K) = 0$ para $q > n$.

É suficiente mostrar que para todo q-ciclo z de K, existe um CW-complexo finito $K_1 \subset K$ tal que a classe de homologia $\bar{z}$ de z está contida em $i_*(H_q(K_1))$, onde $i: K_1 \to K$ é a inclusão. De fato, $z = \sum_j a_j T_j^q$, onde $a_j \in Z$ e $T_j^q: \Delta_q \to K$ são q-simplexos singulares. Como o suporte $\bigcup_j T_j^q(\Delta_q)$ de Z é um conjunto compacto (reunião finita), êste está contido num subcomplexo finito K_1 de K (propriedade (5.4)). Os simplexos T_j^q podem ser considerados como simplexos singulares de K_1. Seja z' o ciclo z considerado como ciclo de K_1. Então $\bar{z} = i_*(\bar{z}') \in i_*(H_q(K_1))$. Como dim $K_1 \leqslant$ dim K, o resultado segue da observação que precede o teorema.

§ 7 - Principais teoremas a serem utilisados.

Recapitularemos abaixo, para ulterior referência, os conhecidos teoremas de W.Hurewicz (7.1) a (7.4), bem como os teoremas fundamentais de J.H.C.Whitehead, que permitem a passagem de isomorfismos realisados geomètricamente, entre grupos de homotopia, para equivalências de homotopia.

Consideremos um par (X,A), $A \subset X$, de espaços conexos por caminhos. Como é bem conhecido, $\pi_1(X)$ opera sobre os grupos $\pi_n(X)$ para $n \geqslant 1$ e $\pi_1(A)$ opera sôbre os grupos $\pi_n(X,A)$ para $n \geqslant 2$. Dizemos que o espaço X é n-simples (resp. que o par (X,A) é n-simples), se $\pi_1(X)$ operar trivialmente em $\pi_n(X)$ (resp. se $\pi_1(X)$ operar trivialmente em $\pi_n(X,A)$). Utilizaremos adiante os homomorfismos canônicos.

$\phi_n: \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ para $n \geqslant 1$ e $\phi_n: \pi_n(X,A) \rightarrow H_n(X,A)$ para $n \geqslant 2$, dos grupos de homotopia nos grupos de homologia singulares (homomorfismos de Hurewicz); para maiores detalhes, bem como para as demonstrações dos teoremas de Hurewicz (7.1) e (7.3), que seguem, veja [22], Ch.II, §5.

<u>Teorema</u> 7.1 - Se $\pi_q(X) = 0$ para $q<n$, $n \geqslant 2$, então $H_q(X)=0$ para $q<n$ e $\phi_n: \pi_n(X) \approx H_n(X)$. Se $\pi_0(X) = 0$ então $H_1(X) \approx \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$.

<u>Corolario</u> 7.2 - Se $\pi_1(X) = 0$ e $H_q(X) = 0$ para $2 \leq q<n$, então $\pi_q(X) = 0$ para $q < n$, e $\phi_n: \pi_n(X) \approx H_n(X)$.

O corolario segue facilmente aplicando-se repetidas vezes o Teorema 7.1.

<u>Teorema</u> 7.3 - <u>Se</u> $\pi_q(X,A) = 0$ <u>para</u> $1 \leq q<n$ e (X,A) <u>fôr</u> <u>n-simples</u>, <u>então</u> $H_q(X,A) = 0$ <u>para</u> $1 \leq q<n$ <u>e</u> $\phi_n: \pi_n(X,A) \approx H_n(X,A)$.

<u>Corolario</u> 7.4 Se $\pi_1(X) \approx \pi_1(A) = 0$ e $H_q(X,A) = 0$ para $2 \leq q<n$, então $\pi_q(X,A) = 0$ para $q<n$ e $\phi_n: \pi_n(X,A) \approx H_n(X,A)$.

A partir do Teorema 7.3 e do Corolario 7.4, J.H.C.Whitehead chegou ao seguinte importante resultado, cuja demonstração apresentamos abaixo, visto se tratar de um exemplo típico do emprego do cilindro de uma aplicação.

<u>Teorema</u> 7.5 - <u>Sejam</u> X e Y <u>espaços</u> <u>conexos</u> <u>por</u> <u>caminhos</u>, <u>simplesmente</u> <u>conexos</u>, <u>e</u> $f:X \rightarrow Y$ <u>uma</u> <u>aplicação</u> <u>de</u> <u>X</u> <u>em</u> <u>Y</u>. <u>Então</u>, <u>as</u> <u>seguintes</u> <u>proposições</u> <u>são</u> <u>equivalentes</u>:

(a) $f_{\#}: \pi_q(X) \rightarrow \pi_q(Y)$ é $\begin{cases} \text{bijectiva para } q<n \\ \text{surjectiva para } q \leq n \end{cases}$

(b) $f_*: H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ é $\begin{cases} \text{bijectiva para } q<n \\ \text{surjectiva para } q \leq n \end{cases}$

Seja Z o cilindro da aplicação →

: $f:X \to Y$, $i:X \to Z$ a inclusão de X em Z e $r:Z \to Y$ a retração de Z sobre Y (que é uma equivalencia de homotopia). Como $Z \simeq Y$, Z é simplesmente conexo. De acôrdo com a definição do cilindro da aplicação f, temos $f = r \circ i$, donde $f_{\#} = r_{\#} \circ i_{\#}$. Como r é uma equivalencia de homotopia, $r_{\#}$ é bijectiva em todas as dimensões. Para mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b), observemos que as condições sobre $f_{\#}$ acarretam que o homomorfismo $i_{\#}$ é bijectivo para $q < n$ e surjectivo para $q \leq n$. Considerando a sequencia exata de homotopia do par (z,X),

$$\cdots \to \pi_q(X) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_q(Z) \to \pi_q(Z,X) \xrightarrow{\partial} \pi_{q-1}(X) \to \cdots$$

concluimos facilmente que as condições dadas sobre $i_{\#}$ são equivalentes às condições $\pi_q(Z?X) = 0$ para $q \leq n$. Aplicando-se o Teorema 7.3, temos $H_q(Z,X) = 0$ para $q \leq n$. Considerando a sequencia exata de homologia do par (Z,X),

$$\cdots H_q(X) \xrightarrow{i_*} H_q(Z) \to H_q(Z,X) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X) \to \cdots,$$

segue-se facilmente que $i_*:H_q(X) \to H_q(Z)$ é bijectiva para $q < n$ e surjectiva para $q \leq n$. Finalmente, como $f_* = r_* \circ i_*$ e r_* é bijectiva para $q \geq 0$, segue-se a condição (b). O argumento é claramente reversível, empregando-se o Corolario 7.4 para demonstrar (b) $\Rightarrow$ (a).

Precisaremos também, da noção de n-homotopia introduzida por J.H.C.Whitehead [25].

<u>Def.</u> 18 - Sejam X e Y espaços quaisquer e $f,g:X \to Y$, aplicações. Dizemos que f e g são <u>n-homotopicas</u>, denotando esta relação por $f \simeq_n g$, se para todo CW-complexo K de dimensão $\leq n$ e qualquer aplicação $\varphi;K \to X$ tivermos $f \circ \varphi \simeq g \circ \varphi:K \to Y$. Dizemos que $f:X \to Y$ é uma <u>equivalencia de n-homotopia</u> se existir uma aplicação $g:Y \to X$ tal que $gf \simeq_n 1$ e $fg \simeq_n 1$. Usaremos também a notação $X \simeq_n Y$ para este caso.

Seguindo J.H.C.Whitehead, denotamos por α a classe dos espaços topológicos X que gozam das seguintes propriedades: (1) X é conexo por caminhos, (2) X é dominado por um CW-complexo. Se $X \in \alpha$, denotamos por ΔX o menor dos inteiros dim K, onde K é um CW-complexo dominando X.

Caso não haja CW-complexo de dimensão finita dominando X, definiremos $\Delta X = \infty$. Os poliedros localmente finitos e os CW-complexos conexos pertencem, evidentemente, a classe α. De acôrdo com o Teorema 3.1, todo ANR pertence também a classe α.

Os seguintes resultados, devidos a J.C.H.Whitehead, são fundamentais. Para as demonstrações, veja [25] e [24].

<u>Teorema</u> 7.6 - <u>Sejam</u> $X, Y \in \alpha$, $N = \max(\Delta X, \Delta Y)$ <u>e</u> $f: X \to Y$ <u>uma aplicação que induz os isomorfismos</u>,

$f_{\#}: \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para $q \leq N$, <u>então</u> f <u>é uma equivalencia de homotopia</u>.

<u>Corolario</u> 7.7 - <u>Sejam</u> $X, Y \in \alpha$ <u>espaços simplesmente conexos, e</u> $f: X \to Y$ <u>uma aplicação que induz os isomorfismos</u>,

$f_*: H_q(X) \approx H_q(Y)$ <u>para todo</u> $q \geq 0$, <u>então</u> f <u>é uma equivalencia de homotopia</u>.

Empregando-se o Teorema 7.5, a demonstração de (7.7) reduz-se imediatamente a uma aplicação do Teorema 7.6.

<u>Teorema</u> 7.8 - <u>Sejam</u> $X, Y \in \alpha$. <u>Então</u> $f: X \to Y$ <u>é uma equivalencia de n-homotopia se, e somente se</u>,

$f_{\#}: \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ <u>para</u> $q \leq n$.

<u>Observação</u> - Em geral $X \simeq_{\infty} Y$ não acarreta que $X \simeq Y$ (veja § 16). De acordo com o Teorema 7.6, isto ocorre, no entando se $X, Y \in \alpha$.

§8 - <u>Algumas aplicações</u>.

Para ilustrar o alcance dos resultados de J.H.C. Whitehead, resumidos no § precedente, daremos abaixo algumas aplicações. Os Teoremas (8.1) e (8.5) generalizam resultados bem conhecidos.

Def. 19 - Um espaço conexo por caminhos X é denominado uma <u>n-esféra homológica</u> se $H_q(X) \approx H_q(S^n)$ para todo $q \geqslant 0$.

<u>Teorema</u> 8.1 - <u>Seja</u> $X \in \alpha$ <u>um espaço simplesmente conexo. Então</u> $X \simeq S^n$ <u>se, e somente se,</u> X <u>fôr uma n-esfera homológica</u> $(n \geqslant 2)$.

A condição é trivialmente necessária. Suponhamos, por outro lado, que X seja uma n-esféra homológica. Conforme o Corolário 7.2, $\pi_1(X) = 0$ e $H_q(X) = 0$ para $q < n$ acarretam $\pi_q(X) = 0$ para $q < n$ e $\pi_n(X) \approx H_n(X) \approx Z$. Seja Seja $f:(S^n, p_o) \longrightarrow (X, x_o)$ um representante de um dos geradores de $\pi_n(X) \approx Z$. Deduz-se imediatamente que $f_{\#}: \pi_q(S^n) \approx \pi_g(X)$ para $q \leq n$. Como S^n e X são simplesmente conexos, conforme o Teorema 7.5 temos, $f_*: H_q(S^n) \approx H_q(X)$ para $q < n$ e $f_*: H_n(S^n) \longrightarrow H_n(X)$ é surjectiva. De u'a maneira geral, observemos que se HG_1 e G_2 são dois grupos abelianos livres de mesmo posto finito, então todo homomorfismo surjectivo $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ é <u>bijectivo</u>. Em particular, $f_*: H_n(S^n) \approx H_n(X)$. Considerando que $H_q(X) = H_q(S^n) = 0$ para $q > n$, segue-se que f_* é bijectiva para todo $q \geqslant 0$. Segundo o Corolario 7.7, isto implica, finalmente, que f é uma equivalencia de homotopia.

Corolario 8.2 - <u>Um ANR simplesmente conexo é do mesmo tipo de homotopia que uma n-esféra se, e somente se, for uma n-esféra homólogica.</u>

De acordo com o Teorema 3.1, todo ANR pertence à classe α.

<u>Observação</u> - S.T.Hu [13], demonstrou, por outra via, o Corolario 8.2, mas supondo X um ANR compacto de dimensão finita.

Teorema 8.3 - <u>Um espaço conexo por caminhos X é do mesmo tipo de homotopia que o espaço projetivo complexo $P_n(C)$, se, e somente se, estiverem satisfeitas simultaneamente as seguintes condições:</u>

(1) $X \in \alpha$,

(2) $\pi_1(X) = 0$,

(3) $\pi_2(X) \approx Z$,

(4) $\pi_q(X) = 0$ para $3 \leq q \leq 2n$,

(5) $H_{2n}(x) \approx Z$ e $H_q(X) = 0$ para $q > 2n$.

As condições (1) a (5) são evidentemente necessárias. (Veja por exemplo, [11],p.53). Por outro lado, suponhamos satisfeitas as condições (1) a (5). O subespaço $P_1(C)$ de $P_n(C)$ é homeomorfo a S^2, e feita a identificação de P_1 a S^2, a inclusão $i: P_1 \to P_n$ pode ser considerada como representante de um gerador de $\pi_2(P_n) \approx Z$. Seja $f: P_1 \to X$ um representante de um gerador de $\pi_2(X) \approx Z$. Como X satisfaz às condições (2) e (4), é possível, aplicando a teoria da obstrução (veja Apendice I), prolongar $f: P_1 \to X$ a uma aplicação $f': P_n \to X$. É imediato a verificação de que f' induz $f'_{\#}: \pi_q(P_n) \approx \pi_q(X)$ para $q \leq 2n$. Como $H_q(P_n) = H_q(X) = 0$ para $q > 2n$, um raciocíoni, análogo ao empregado na demonstração do Teorema 8.1, mostra que $f'_{*}: H_q(P_n) \approx H_q(x)$ para todo $q \geq 0$, donde $P_n \simeq X$, conforme o Corolario 7.7.

Corolario 8.4 - <u>Um ANR é do mesmo tipo de homotopia que o espaço projetivo complexo se, e somente se, satisfizer às condições (2) a (5) do Teorema 8.2.</u>

<u>Observação</u> - O Corolario 8.4 acarreta a Proposição (1.1) de nossa nota, "On the Homotopy Type of a Factor Space", Anais da Academia Brasileira de Ciências, 30(1958), pp. 37-41.

A única observação que se precisaria adicionar ao §3 da nota para aplicar o Corolario 8.4 é a seguinte: sendo M um

ANR compacto de dim $2n$, $H_q(M) = 0$ para $q > 2n$.

Teorema 8.5 - <u>Um espaço conexo por caminhos X é contraível se e somente se, estiverem satisfeitas as seguintes condições:</u>

(1) $X \in \alpha$,

(2) $\pi_1(X) = 0$

(3) $H_q(X) = 0$ para $q \geq 2$.

Se X é contraível, então X é do mesmo tipo de homotopia que um espaço reduzido a um ponto e, portanto, pertence à classe α . As condições (2) e (3) são consequencias imediatas da contractibilidade. Reciprocamente, suponhamos satisfeitas as condições (1) e (3). As condições (2) e (3) acarretam $\pi_q(X) = 0$ para todo $q \geq 0$, segundo o Corolario 7.2. Seja P o espaço constituido de um único ponto e $f: P \to X$ uma aplicação qualquer. Então é claro que $f_{\#}: \pi_q(P) \approx \pi_q(X)$ para todo $q \geq 0$. Como $P, X \in \alpha$, temos $P \simeq X$ conforme o Teorema 7.6. Segue-se imediatamente que X é contraível.

Corolario 8.6 - <u>Uma condição necessária e suficiente para que um ANR X seja contraível é que $\pi_1(X) = 0$ e $H_q(X) = 0$ para $q \geq 2$. Um ANR que satisfaz a esta condição é um AR.</u>

<u>Observação</u> - De inicio W.Hurewicz demonstrou o seguinte teorema: todo poliedro localmente finito, simplesmente conexo, para o qual $H_q(P) = 0$ se $q \geq 2$, é contraível. Antes dos teoremas (7.6) e (7.7) de Whitehead, S.T.Hu [14] demonstrou o Corolario 8.2 no caso em que X é um ANR de dimensão finita.

Suponhamos uma familia finita de espaços topológicos separados $A_1, \ldots, A_k$, dois a dois disjuntos, e fixemos um ponto $a_i \in A_i$ para $1 \leq i \leq k$. O espaço obtido, identificando os pontos por $A_1, a_2, \ldots, a_k$ no espaço soma $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ é denotado por $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k$. Cada A_i é identificado de maneira evidente a um subespaço de $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k$.

Teorema 8.7 - <u>Seja n um inteiro ≥ 2. Um espaço conexo por caminhos X é do mesmo tipo de homotopia que $S_1^n \vee \dots \vee S_k^n$, $k \geq 1$, se, e somente se, estiverem satisfeitas as seguintes condições:</u>

(1) $X \in \alpha$,

(2) $\pi_q(X) = 0$ para $q < n$,

(3) $\pi_n(X) \approx Z^k$,

(4) $H_q(X) = 0$ para $q > n$.

Para verificar que as condições são necessárias, observemos primeiramente que (1) é uma decorrencia imediata de $X \simeq S_1^n \vee \dots \vee S_k^n$. Façamos $Y = S_1^n \dots S_k^n$. É fávil verificar que $\pi_1(Y) = 0$. Os grupos de homologia de Y são facilmente calculaveis: $H_0(Y) \approx Z$, $H_q(Y) = 0$ para $1 \leq q < n$ e $H_n(Y) \approx Z^k$. Empregando o Corolario 7.2, conclui-se que $\pi_q(X) = 0$ para $1 \leq q < n$ e $\pi_n(X) \approx H_n(X) \approx X^k$. Finalmente, é obvio, por razões de dimensão, que $H_q(Y) = 0$ para $q > n$. Portanto, as condições (2), (3) e (4) são também necessárias.

Suponhamos satisfeitas as condições (1) a (4). Sejam $h_i : S_i^n \to S^n$, $1 \leq i \leq k$, homeomorfismos que levem o ponto fixado de S_i^n num ponto dado $p_0 \in S^n$. Sejam $f_i : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$, $1 \leq i \leq k$, representantes de elementos de uma base de $\pi_n(X) \approx Z^k$. Consideremos $Y = S_1^n \vee \dots \vee S_k^n$ e definamos uma aplicação $f : Y \to X$ por meio das condições $f \mid S_i^n = f_i \circ h_i$, $1 \leq i \leq k$. Vimos acima que $\pi_n(Y) \approx H_n(Y) \approx Z^k$ e não é dificil verificar que $h_i^{-1} : S^n \to S_i^n \subset Y$ são representantes dos elementos de uma base de $\pi_n(Y)$. Portanto, $f_\# : \pi_q(Y) \approx \pi_q(X)$ para $q \leq n$. Como $\pi_1(Y) \approx \pi_1(X) = 0$, temos $f_* : H_q(Y) \approx H_q(X)$ para $q \leq n$; (veja demonstração de (8.1)), como $H_q(Y) \approx H_q(X) = 0$ para $q > n$, f_* é bijectiva para todo $q \geq 0$. Segue-se do Corolario 7.7 que f é uma equivalencia de homotopia.

Consideremos o caso de um ANR compacto X. Sabemos que, neste caso, ΔX é finito. Façamos $\Delta X = n$ e suponhamos $n > 1$. Se puzermos ainda que $\pi_q(X) = 0$ para $q < n$, é facil verificar que X é aciclico em todas as dimensões, com a possível exceção da dimensão n. Nestas condições, o tipo de homotopia de X fica determinado pelos inteiros n,k da seguinte maneira.

Teorema 8.8 - <u>Seja X um ANR compacto</u>; $\Delta X = n > 1$ e $\pi_q(X) = 0$ <u>para</u> $q < n$. <u>Então, ou X é contraível, ou temos</u> $X \simeq S_1^n \vee \dots \vee S_k^n$ <u>para um certo inteiro</u> $k \geq 1$.

Basta mostrar que se X não fôr contraível satisfaz as condições do Teorema 8.7. Como X é ANR, segue-se que $X \in \alpha$. Seja K um CW-complexo de dimensão n dominando X. Existem, portanto, funções $f: X \to K$ e $g: K \to X$ tais que $g \circ f \simeq 1_X$. Como X é compacto, de acordo com a propriedade (5.4), f(X) está contido num subcomplexo finito $K_1 \subset K$. Seja $f': X \to K_1$ a aplicação definida por $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ e façamos $g' = g \mid K_1$. Então $g' \circ f' = g \circ f) = g \circ f \simeq 1_X$, e, portanto K_1 domina X. Como $\dim K_1 \leq \dim K$ e $\dim K_1 \geq \Delta X = n = \dim K$, segue-se que $\dim K_1 = n$. De acordo com o Teorema 6.1, K_1 é do mesmo tipo de homotopia que um certo poliedro finito P de dimensão n. Temos pois, um poliedro finito P, de dimensão n , que domina X. Disto se conclui facilmente que $H_n(X)$ é isomorfico a um fator direto do grupo $H_n(P)$. Como êste grupo é um grupo livre, se for $\neq 0$, segue-se que temos: $H_n(X) = 0$ ou $H_n(X)$ = grupo livre com número finito de geradores.

Se $H_n(X) = 0$, então X é contraível. De fato, $\pi_q(X) = 0$ para $q < n$ acarreta (Teorema 7.1) que $H_q(X) = 0$ para $q < n$. Por outro lado, $H_q(X) = 0$ para $q > n$. Portanto , $\pi_1(X) = 0$ e $H_q(X) = 0$ para todo $q \geq 2$ e X é contraível, de acôrdo com o Corolario 8.6. Se, portanto, supuzermos X não contraível, teremos $H_n(X) \approx Z^k$, onde k é um inteiro $\geqslant 1$. Aplicando o Teorema 7.1, temos $\pi_n(X) \approx H_n(X) \approx Z^k$. Estão pois, satisfeitas as condições (1) a (4) do Teorema 8.7 e consequentemente, $X \simeq S^n_1 \vee \ldots \vee S^n_k$.

Observação - Ao contrário do que possa sugerir os exemplos precedentes, os grupos de homotopia não determinam em geral o tipo de homotopia de um espaço. Não é suficiente que os grupos de homotopia sejam isomórficos, $\pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para todo $q \geqslant 0$. É essencial que os isomorfismos sejam realizados geométricamente, isto é, induzidos por uma aplicação $f: X \to Y$. Deve-se a H.C.Wang o seguinte contra-exemplo, empregando variedades compactas. Sejam $X = P_2(C) \times S^3$ e $Y = S^5 \times S^2$. É fácil verificar que $\pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para todo $q \geqslant 0$. No entanto, empregando-se a fórmula de Künneth, constata-se que $H_3(X) \not\approx H_3(Y)$, o que acarreta que X e Y não tem o mesmo tipo de homotopia. Neste caso, os isomorfismos algébricos entre os grupos de homotopia não podem ser realizados geométricamente.

§9 - Homologia dos CW-complexos (finitos).

Citamos aqui dois resultados sobre a homologia dos CW-complexos, de que precisaremos mais adiante. Como teremos ocasião de empregá-los somente no caso finito, limitar-nos-emos a este caso. Seja K um CW-complexo finito de dimensão n e $A \subset K$ um subcomplexo de K (possivelmente, $A = \emptyset$). Façamos $L^m = A \cup K^m$. Para cada $m \geqslant 0$, L^m é um subcomplexo de K. Para maiores detalhes, bem como as demonstrações dos Teoremas 9.1 e 9.2, veja George Whitehead [22], pp.76-81.

Teorema 9.1 - *Seja $p \leqslant n$. Então $H_q(L^p, L^{p-1}) = 0$ para $q < p$ e $H_p(L^p, L^{p-1}) \approx Z^k$, onde k é o número de p-células em $K - A$.*

Empregando a homologia singular, podemos definir um complexo de cadeias associado ao par (K,A). Seja $C_q(K,A) = H_q(L^q,L^{q-1})$. Segundo o Teorema 9.1, $C_q(K,A)$ é um grupo livre, cujos geradores podem ser identificados às p-celulas contidas em $K - A$. Para definir o operador bordo ∂^*, consideremos a seguinte sequencia de homomorfismos,

$$C_q(K,A) = H_q(L^q,L^{q-1}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(L^{q-1}) \xrightarrow{j_{q-1*}} H_{q-1}(L^{q-1},L^{q-2}) = C_{q-1}(K,A)$$

onde ∂ é o operador bordo da sequencia exata do par (L^q,L^{q-1}) e $j_{q-1*}:H_{q-1}(L^{q-1})\to H_{q-1}(L^{q-1},L^{q-2})$ é induzido pela inclusão $(L^{q-1},\emptyset)\to(L^{q-1},L^{q-2})$. Façamos $\partial^* = j_*\circ\partial$. Calculando diretamente, temos

$$\partial^*\partial^* = (j_{q-2*}\partial_{q-1})\circ(j_{q-1*}\partial_q) = 0, \text{ pois } \partial_{q-1}\circ j_{q-1*} = 0,$$

tendo em vista a sequencia exata do par (L^{q-1},L^{q-2}).

Portanto, $(C_q(K,A), \partial^*)$ é um complexo de cadeias. Os grupos de homologia, calculados a partir deste complexo, serão denotados por $\bar{H}_q(K,A)$. A significação topológica desta construção deriva do seguinte resultado [22],

<u>Teorema</u> 9.2 - $\bar{H}_q(K,A) \approx H_q^{q}(K,A)$ <u>para</u> <u>todo</u> $q \geqslant 0$.

CAPITULO III

O Politopo Singular

§10 - Complexo semi-simpliciais.

O objetivo deste capítulo é apresentar a noção de politopo singular, introduzida por J.B.Giever [10], e de demonstrar certos resultados relativos a subcomplexos minimais. A melhor maneira de situar, na sua devida generalidade, o problema da realização geométrica do complexo singular é considerar, primeiramente, a noção de complexo semi-simplicial de S.Eilenberg e J.A.Zilber [6]. O complexo semi-simplicial é uma generalização da noção de complexo simplicial abstrato, sugerida pelas propriedades do complexo singular de um espaço topológico. Para uma exposição detalhada, veja [6].

Def.20 - Um complexo semi-simplicial A é uma coleção de elementos $\{\sigma\}$, chamados simplexos, e de duas funções. (1) A primeira associa a cada simplexo σ um inteiro dim $\sigma \geq 0$, denominado a dimensão de σ. Um simplexo de dimensão q é denominado um q-simplexo. (2) A segunda função associa a todo q-simplexo σ, $q > 1$, e a cada inteiro i, $0 \leq i \leq q$, um (q-1)-simplexo $\sigma^{(i)}$ de A, denominado a iésima face de σ. Exige-se da correspondencia $\sigma \to \sigma^{(i)}$ que ela satisfaça à seguinte propriedade. Para $q > 1$, $i < j$, $[\sigma^{(j)}]^{(i)} = [\sigma^{(i)}]^{(j-1)}$.

A definição acima não exclui a possibilidade de haver dois q-simplexos distintos $\sigma, \tau \in A$ tais que $\sigma^{(i)} = \tau^{(i)}$ para $0 \leq i \leq q$. Por iteração da operação face, define-se faces de dimensão $< q-1$ de um q-simplexo. Se $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ são inteiros satisfazendo às desigualdades $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_n \leq q$, define-se

$$\sigma^{(i_1, i_2, \ldots i_n)} = [\sigma^{(i_2, \ldots, i_n)}]^{(i_1)}.$$

Seja $\{j_0,\ldots,j_{n-q}\}$, $0\leq j_0<\ldots<j_{n-q}\leq q$, o conjunto de inteiros complementar de $\{i_1,\ldots,i_n\}$ no intervalo (de inteiros) $[0,n]$. Denota-se o (n-q)-simplexo precedente por

$$\sigma(j_0,\ldots,j_{n-q}) = \sigma^{(i_1,\ldots,i_n)}$$

Em particular, $\sigma_{(i)}$, $0\leq i\leq q$, é um 0-simplexo que se denomina o <u>i-ésimo</u> <u>vértice</u> de σ. A ordem natural dos inteiros define, assim uma ordem nos vértices de σ.

De um modo geral, diz-se que um simplexo σ é face de um simplexo $\tau\in A$ se $\sigma=\tau$ ou $\sigma=\tau^{(i_1,\ldots,i_n)}$ para alguma família de inteiros $i_1<i_2<\ldots<i_n$. Denota-se esta relação por $\sigma<\tau$.

Uma parte $B\subset A$ de um complexo semi-simplicial A se diz um subcomplexo de A se, qualquer que seja $\sigma\in B$, $\tau<\sigma$ acarreta $\tau\in B$.

<u>Exemplos</u>. (1) Seja (E,Φ) um complexo simplicial abstrato. Vamos definir, a partir de (E,Φ) um complexo semi-simplicial E^*. Para cada inteiro $q\geqslant 0$, definamos q-simplexo de E^* como uma família $(a_0a_1\ldots a_q)$ de elementos de E, tal que os a_i pertencem a um mesmo conjunto de Φ. A operação face é definida por
$(a_0a_1\ldots a_q)^{(i)} = (a_0\ldots\hat{a}_i\ldots a_q)$.
Vê-se imediatamente que E^* é um complexo semi-simplicial.

(2) Seja S(X) o complexo singular de um espaço X, isto é, o conjunto de todos os simplexos singulares de X. (Ver [7] Chap.VII). Com as noções usuais de dimensão de um simplexo e a operação face da teoria singular, S(X) é um complexo semi-simplicial. Se X fôr, por exemplo, um poliedro, é facil achar dois simplexos singulares distintos $T_1,T_2\colon\Delta_q\to X$, $q\geqslant 1$, tais que $T_1^{(i)}=T_2^{(i)}$ para $0\leq i\leq q$.

<u>Def</u>. 21 - Sejam A_1 e A_2 complexos semi-simpliciais. Diz-se que uma aplicação $\phi\colon A_1\to A_2$ é <u>semi-simplicial</u> se: (1) ϕ leva q -

simplexos em q -simplexos; (2) Para qualquer q-simplexo σ, $\phi(\sigma^{(i)}) = (\phi(\sigma))^{(i)}$ para $0 \leq i \leq q$. Uma aplicação $\phi: A_1 \to A_2$ diz-se um isomorfismo <u>semi-simplicial</u> se ϕ for bijectiva e ambas ϕ e ϕ^{-1} forem aplicações semi-simpliciais.

As seguintes propriedades são evidentes. A aplicação identica de um complexo semi-simplicial é uma aplicação semi-simplicial. Se $\phi: A_1 \to A_2$ e $\psi: A_2 \to A_3$ são aplicações semi-simpliciais, então $\psi\phi: A_1 \to A_3$ é tambem semi-simplicial.

Exemplos. (1) Se (E, Φ) e (E', Φ') são complexos simpliciais abstratos e $\varphi: E \to E'$ é uma aplicação simplicial, isto é $\varphi(S) \in \Phi'$ para todo $S \in \Phi$, então a aplicação $(a_0 a_1 \ldots a_q) \to (\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_q))$ é uma aplicação semi-simplicial de E^* em E'^*.

(2) - Sejam X e Y espaços topológicos, $f: X \to Y$ uma aplicação do X em Y. A aplicação f induz uma função $\bar{f}: S(X) \to S(Y)$, definida por $\bar{f}(T) = f \circ T$ para todo $T \in S(X)$. Verifica-se imediatamente que $\bar{f}$ é uma aplicação semi-simplicial de S(X) em S(Y).

§11 - <u>Realização geométrica de um complexo semi-simplicial</u>.

Correspondendo a cada complexo semi-simplicial A, será definido de maneira canônica um espaço topológico $|A|$, denominado a realização geométrica de A. Veremos adiante que $|A|$ é um CW-complexo de tipo especial, para o qual a aderência de cada celula pode ser munida naturalmente de uma estrutura de simplexo geométrico.

Seja A um complexo semi-simplicial e A^p o seu p-esqueleto (=subcomplexo de A constituido dos simplexos de dimensão $\leq p$). Façamos $A_p = A^p - A^{p-1}$. Então A_p é o conjunto dos p-simplexos de A. No espaço euclideano R^{p+1}, consideremos o p-simplexo padrão Δ_p, cujos vértices são os pontos $d_i = (\delta_{ij})$ $0 \leq j \leq p$, de R^{p+1}, onde δ_{ij} é o simbolo de Kronecker. Introduz-se coordenadas baricentricas em Δ_p em relação aos pontos d_i, $0 \leq i \leq p$. Seja w^p o conjunto dos pontos internos de Δ_p, isto é, o conjunto dos pontos $\xi = \sum_i \lambda_i d_i$ onde $\lambda_i > 0$ e $\sum_i \lambda_i = 1$. O subespaço w^p de Δ_p é uma celula aberta. Se $p = 0$, faz-se $w^0 = \Delta_0 = \{d_0\}$.

Consideremos o conjunto $\bigsqcup_{p=0}^{\infty} A_p \times w^p$ e façamos $w^p_\sigma = \{\sigma\} \times w^p$. Como $p = \dim \sigma$, podemos escrever simplesmente $w^p_\sigma = w_\sigma$. Para cada p-simplexo σ de Am seja $Cl.w_\sigma = \bigsqcup_{\tau \leq \sigma} w_\tau$. Define-se uma função bijectiva $\mu_\sigma : \Delta_p \to Cl.w$ da seguinte maneira: se $\tau = \sigma_{(j_0,\dots,j^q)}$, $j_0 < j_1 < \dots < j_q$, $q \leq p$, seja $\nu_\tau : \langle d_{j_0}\, d_{j_1} \dots d_{j_q} \rangle \to \langle d_0 d_1 \dots d_q \rangle$ a restrição ao simplexo (aberto) $\langle d_{j_0}\, d_{j_1} \dots d_{j_q} \rangle$ de Δ_p da aplicação baricentrica univocamente definida pela correspondencia $d_{j_i} \to d_i$, $0 \leq i \leq q$, entre os vértices. Define-se $\mu_\sigma | \langle d_{j_0}\, d_{j_1} \dots d_{j_q} \rangle$, que aplica $\langle d_{j_0}\, d_{j_1} \dots d_{j_q} \rangle$ sobre w_τ, por $\mu_\sigma(\xi) = (\{\tau\}, \mu_\tau(\xi))$, qualquer que seja $\xi \in \langle d_{j_0}\, d_{j_1} \dots d_{j_q} \rangle$. Verifica-se imediatamente que $\mu_\sigma : \Delta_p \to Cl\ w_\sigma$ é uma aplicação bijectiva. Suponhamos Δ_p munido de sua topologia natural, e para cada $\sigma \in A$, dotemos $Cl\ w_\sigma$ da topologia transportada de Δ_p por μ_σ. Nesta topologia, $F \subset Cl\ w$ é fechado se, somente se, $\mu_\sigma^{-1}(F)$ fôr fechado em Δ_p. Com esta topologia em $Cl w_\sigma$, $\mu_\sigma : \Delta_p \to Cl\ w_\sigma$ é um homeomorfismo e $Cl\ w_\sigma$ é uma p-celula fechada. O conjunto $\bigsqcup_{p=0}^{\infty} A_p \times w^p$ é então munido da <u>topologia fraca</u>, topologia esta na qual uma parte F do conjunto é fechada se, e somente se, $F \cap Cl\ w_\sigma$ fôr fechado em $Cl\ w_\sigma$ para todo $\sigma \in A$. Denota-se por $|A|$ o espaço topologico assim obtido. O espaço $|A|$ denomina-se então <u>realização geométrica</u> do complexo semi-simplicial A.

Não é difícil verificar que o espaço (1) $|A|$ é decomposto pelas celulas w_σ, $\sigma \in A$, num CW-complexo. Temos Cl $w_\sigma = \dot{\bar{w}}$ e $\mu_\sigma : \Delta_p \to \bar{w}_\sigma$ é uma aplicação característica para a p-celula w_σ de $|A|$. Quando necessário, suporemos transportada também para Cl $w_\sigma = \bar{w}_\sigma$ a estrutura afim de Δ_p. Algumas vezes usaremos a notação $\bar{w} = |\sigma|$.

Se $B \subset A$ é um subcomplexo de A, então $B_p \subset A_p$ para todo $p \geqslant 0$, e $\bigcup_{p=0}^{\infty} B_p \times w^p$ se identifica naturalmente a um subespaço de $\bigcup_{p=0}^{\infty} A_p \times w^p$, isto é $|B| \subset |A|$. Como CW-complexo $|B|$ é um subcomplexo de A. Com esta identificação, o p-esqueleto A^p de A tem como realização geométrica o p-esqueleto de CW-complexo $|A|$. Em outras palavras, $|A^p| = |A|^p$.

Sejam A, B complexos semi-simpliciais e $\psi : A \to B$ uma aplicação semi-simplicial de A em B. A aplicação semi-simplicial induz uma aplicação contínua entre as realizações geométricas dos dois complexos (veja [16]).

Teorema 11.1 - <u>Uma aplicação semi-simplicial $\psi : A \to B$ determina univocamente uma aplicação celular $\psi' : |A| \to |B|$, que goza da seguinte propriedade: $\psi' \mid w_\sigma$ aplica w_σ baricentricamente sobre $w_{\psi(\sigma)}$.</u>

A aplicação ψ' é definida por indução sobre o esqueleto $|A^q| = |A|^q$ de $|A|$. Para a dimensão 0, w^0 e $w_\sigma = \{\sigma\} \times w_0$ se reduzem a um ponto. Façamos $\psi'_0(\{\sigma\} \times w^0) = \{\psi(\sigma)\} \times w^0$ para todo $\sigma \in A^0$. Tendo definido $\psi'_0 : |A|^0 \to |B|$, suponhamos definida uma aplicação $\psi'_{q-1} : |A|^{q-1} \to |B|$, satisfazendo à condição do teorema e tal que $\psi'_{q-1} \mid |A|^{q-2} = \psi'_{q-2}$. Para todo q-simplexo $\sigma \in A$, seja $B_\sigma : \{\sigma\} \times w^q \to \{\tau\} \times w^q$ ($\tau = \psi(\sigma)$) a aplicação (baricentrica) $(\{\sigma\}, y) \to (\{\tau\}, y)$ qualquer que seja $y \in w^q$. Define-se

---

(1) - É necessário verificar que o espaço topológico $|A|$ é separado, Veja Apendice B, caso I.

então,

$$\psi'_q(x) = \begin{cases} \psi'_{q-1}(x) & \text{se } x \in |A|^{q-1} \\ B_\sigma(x) & \text{se } x \in w_\sigma . \end{cases}$$

Verifica-se facilmente ([16], pp.587-89) que cada aplicação ψ'_q é contínua para todo $q \geqslant 0$. Portanto a junção $\psi' : |A| \to |B|$, definida por $\psi'\,\big|\,|A|^q = \psi'_q$ é uma aplicação contínua que satisfaz à condição do teorema. É claro que ψ' é univocamente determinada pela aplicação semi-simplicial $\psi : A \to B$.

As seguintes propriedades das aplicações induzidas por aplicações semi-simpliciais são facilmente verificáveis.

(1) Se ψ é a aplicação idêntica do complexo semi-simplicial A, então ψ' é a aplicação identica de $|A|$.

(2) Se $\phi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ são aplicações semi-simpliciais, então $(\psi\phi)' = \psi' \circ \phi' : |A| \to |C|$.

Def.22 - A realização geométrica $|S(X)|$ do complexo singular $S(X)$ de um espaço topológico X, considerado como complexo semi-simplicial, denomina-se <u>politopo singular</u> do espaço X.

Define-se uma <u>aplicação canônica</u> $\varphi_X : |S(X)| \to X$, do politopo singular $|S(X)|$ no espaço X, da seguinte maneira : Seja $T : \Delta_q \to X$ um q-simplexo singular e $w_T \subset |S(X)|$ a celula correspondente do politôpo singular. Seja $\rho_T : \bar{w}_T \to \Delta_q$ a aplicação (baricentrica) definida por $\rho_T = \mu_T^{-1}$, onde $\mu_T : \Delta_q \to \bar{w}_T$ é a aplicação característica definida acima. Façamos então $\varphi_X \,|\, \bar{w}_T = T \circ \rho_T$. É facil verificar que as aplicações $T \circ \rho_T$ definem de fato uma função $\varphi_X : |S(X)| \to X$. Esta sendo contínua sobre cada celula $\bar{w}_T$, é contínua sobre $|S(X)|$.

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e $\bar{f} : S(X) \to S(Y)$ a aplicação semi-simplicial induzida por f. De acôrdo com o Teorema 11.1, f induz, por sua vez, uma aplicação $f': |S(X)| \to |S(Y)|$. A aplicação canônica, definida acima, goza da seguinte propriedade.

__Lema__ 11.2 - __O seguinte diagrama é comutativo.__

$$\begin{tikzcd} {|S(X)|} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & {|S(Y)|} \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

__Isto é__, $\varphi_Y \circ f' = f \circ \varphi_X$.

Observemos primeiramente que a aplicação B_T, definida na demonstração do teorema precedente, satisfaz à seguinte relação: $\rho_T = \rho_{fT} \circ B_T$ para todo $T \in S(X)$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi_Y \circ (f' \mid \bar{w}_T) &= \varphi_Y \circ B_T \\ &= (\varphi_Y \mid \bar{w}_{fT}) \circ B_T \\ &= (f \circ T) \circ \rho_{fT} \circ B_T \quad (\text{definição } \varphi_Y) \\ &= f \circ (T \circ \rho_P) \quad (\text{visto que } \rho_T = \rho_{fT} \circ B_T) \\ &= f \circ (\varphi_X \mid \bar{w}_T). \end{aligned}$$

Portanto $f \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ f'$.

Tratamos, brevemente, a seguir, de duas classes importantes de Cw-complexos: (A) Os __complexos simpliciais__ ou __poliedros__ (não necessáriamente localmente finitos); (B) Os __politopos__.

(A) Um complexo simplicial é usualmente definido como a realização de um complexo simplicial abstrato (não necessáriamente localmente finito). Num complexo simplicial abstrato (E, Φ), a familia Φ de partes __finitas__ de E satisfaz a duas condições: (CS_I) Para todo $k \in E$, $\{k\} \in \Phi$; (CS_{II}) Se $A \in \Phi$ e $B \subset A$, então $B \in \Phi$. A realização geométrica (canônica) de$(E\ \Phi)$ pode ser definida a partir do subconjunto $\widetilde{E}$ de I^E constituido dos pontos $(\lambda_k)_{k \in E}$ tais que o conjunto $\{k \in E \mid \lambda_k \neq 0\}$ pertence a Φ (sendo, portanto, finito) e $\sum_k \lambda_k = 1$. Consideremos os pontos $d_k = (\delta_{kj})_{j \in E}^{j}$ de E. Para cada simplexo $S \in \Phi$, $\tilde{S}$ é o simplexo geométrico gerado pelos vértices d_k, $k \in S$. Cada $\tilde{S}$ é munido de sua topologia natural, sendo o conjunto $E = \bigsqcup_{S \in \Phi} \tilde{S}$ munido da <u>topologia</u> <u>fraca</u>. O espaço topológico $\tilde{E}$ denomina-se <u>realização</u> <u>geométrica</u> (canônica) de (E, Φ).

Suponhamos agora o conjunto E totalmente ordenado. Associemos a (E, Φ) um complexo semi-simplicial A bem determinado. Os q-simplexos de A são as familias $(k_o k_1 \ldots k_q)$ de elementos distintos de E tais que $k_o < k_1 < \ldots < k_q$ e $\{k_o k_1 \ldots k_q\} \in \Phi$. A operação face é definida por $(k_o k_1 \ldots k_q)^{(i)} = (k_o k_1 \ldots \hat{k}_i \ldots k_q$ Verifica-se facilmente que A é um complexo semi-simplicial. Então, a <u>realização</u> <u>geométrica</u> A <u>é</u> <u>canonicamente</u> <u>homeómorfa</u> a E. de Fato, segue-se imediatamente da definição de A que, qualquer que seja $\sigma \in A$, os vértices $\sigma_{(o)}, \ldots, \sigma_{(q)}$ de σ são todos distintos e existe um único σ com eêstes vértices. Para todo k E, seja (k) o 0-simplexo correspondente de A e $|k|$ a 0-celula de A a ele associada. A correspondencia $|k| \to d_k$, prolongada linearmente sobre os simplexos de $|A|$ nos fornece uma aplicação contínua $\theta: |A| \to \tilde{E}$ que goza das seguintes propriedades: (i) θ é bijectiva e contínua; (ii) Se $\sigma \in A$ é associado a $S \in \Phi$, $\theta: |\sigma| \to \tilde{S}$ é um homeomorfismo baricentrico. Como E tem a topologia fraca e θ^{-1} é evidentemente contínua sobre cada simplexo $\tilde{S}$, θ^{-1} é contínua sobre $\tilde{E}$. Concluimos que, feitas as devidas identificações, todo poliedro pode ser obtido como realização geométrica de um complexo semi-simplicia.

(B) - Um CW-complexo se diz um <u>politopo</u> se (i) para toda celula $e \in K$, $\bar{e}$ é um subcomplexo de K; (ii) a aplicação característica $\mu(e): \Delta_q \to \bar{e}$ de cada celula é um homeomorfismo celular, isto é $\mu^{(i)}: \Delta_q^{(i)} \to \bar{e}$, $0 \leq i \leq q$, são aplicações características de celulas do subcomplexo $\bar{e}$ de K.

Todo poliedro é um politopo. De um modo mais geral, a realização geométrica de um complexo semi-simplicial qualquer é um politopo. Reciprocamente, mostraremos a seguir que todo politopo é isomórfico à realização geométrica de um complexo semi-simplicial adequado.

Seja K um politopo, e $\in$ K uma celula qualquer de K . Consideremos a aplicação característica $\mu(e): \Delta_q \to \bar{e}$ da celula e como uma aplicação $\mu(e): \Delta_q \to K$, isto é um q-simplexo singular de K. Então a condição (ii) acima assegura que A $A = \{\mu(e): \Delta_q \to K \mid e \in K\}$ é um subcomplexo do complexo singular S(K). A restrição da aplicação $\varphi_K: |S(K)| \to K$ ao subcomplexo $|A|$ é um homeomorfismo de $|A|$ sobre K. De fato, a cada celula e $\in$ K é associada uma única celula $w_{\mu(e)}$ de $|A|$ e $\varphi_K | \overline{w_{\mu(e)}}$ é um homeomorfismo de $\overline{w_{\mu(e)}}$ sobre $\bar{e}$. Como $\varphi_K | A$ é claramente bijetiva e se trata da topologia fraca em ambos os espaços, segue-se que $\varphi_K | A$ é um homeomorfismo de $|A|$ sobre K.

<u>Lema 11.3</u> - <u>Seja um Q politopo e $f: Q \to X$ uma aplicação de Q em X. Então existe uma, e uma unica, aplicação $f'': Q \to |S(X)|$, baricentrica sobre cada celula de Q e tal que $\varphi_X \circ f'' = f$.</u>

Para cada celula w de Q, consideremos a aplicação característica $\mu_w: \Delta_q \to \bar{w}$ como um q-simplexo singular $\mu_w: \Delta_q \to Q$. Então, $A' = \{\mu_w: \Delta_q \to Q \mid w \in Q\}$ é um subcomplexo de S(Q). Vimos acima que a restrição de φ_Q ao subcomplexo $|A'|$ é um homeomorfismo de $|A'|$ sobre Q. Façamos $h = \varphi_Q \mid A'$. Então o seguinte diagrama é comutativo (Veja Lema 11.2).

$$\begin{array}{ccc} |A'| & \xrightarrow{f'} & |S(X)| \\ h \downarrow & & \downarrow \varphi_X \\ Q & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Define-se $f'' = f' \circ h^{-1} : Q \to |S(X)|$. Então $f'' : Q \to S(X)$ é uma função contínua e a comutatividade do diagrama acarreta $\varphi_X \circ f'' = f$. A unicidade de f'' segue-se da de f'.

Sejam $\lambda, \mu : Q \to |S(X)|$ aplicações de um poliedro Q em $|S(X)|$.

Teorema 11.4 Se $\varphi_X \lambda \simeq \varphi_X \mu$, então $\lambda \simeq \mu$.

Este teorema é devido a J.H.C.Whitehead. Veja-se [28] p. 102, Theorema 21) para demonstração, que é bastante longa e complicada.

Se X um espaço conexo por caminhos, $|S(X)|$ seu politopo singular e $\varphi = \varphi_X : |S(X)| \to X$ a aplicação canônica de $|S(X)|$ em X.

Teorema 11.5 - (Giever) - $\varphi_{\#} \pi_q(|S(X)|) \approx \pi_q(X)$ para todo $q \geq 0$.

Observemos, primeiramente, que $\pi_q(X)$ pode ser definido como classes de homotopia de aplicações $\lambda : (\dot{\Delta}_{q+1}, \Delta_0) \to (X, x_0)$, onde $\Delta_0 = (1,0,\ldots,0) \in R^{q+2}$ e x_0 é um ponto de base em X. O homorfismo $\varphi_{\#}$ é surjectivo. De fato, seja $\lambda : (\dot{\Delta}_{q+1}, \Delta_0) \to (X, x_0)$ um representante de $\alpha \in \pi_q(X)$. Então, $\lambda'' : (\dot{\Delta}_{q+1}, \Delta_0) \to (|S(X)|, p)$ onde $p \in |S(X)|$ é o ponto correspondente ao 0-simplexo $\Delta_0 \to x_0$, é representante de um elemento $\beta \in \pi_q(|S(X)|)$ tal que $\varphi_{\#}\beta = \alpha$, tendo em vista que $\varphi\lambda'' = \lambda$. Por outro lado, seja $g : (\dot{\Delta}_{q+1}, \Delta_0) \to (|S(X)|, p)$ o representante de um elemento $\beta \in \pi_q(|S(X)|)$ tal que $\varphi_{\#}\beta = 0$. Seja $g_1 : \dot{\Delta}_{q+1} \to p$ a aplicação constante. Por hipotese, $\varphi g \simeq \varphi g_1$. Aplicando o Teorema 11.4 $g \simeq g_1$. Seja ω o laço traçado pela imagem de Δ_0 durante a deformação. De acôrdo com a definição da operação de π_1 em π_q, $\{g\} = \{\omega\} * \{g_1\} = \{\omega\} * 0 = 0$. Isto é $\beta = 0$ e $\varphi_{\#}$ é injectiva.

Empregando-se subcomplexos minimais (veja [19] Proposição (1.1) pode-se demonstrar que se uma aplicação f de um espaço A num espaço B induz $f_{\#}: \pi_q(A) \approx \pi_q(B)$ para todo $q \geqslant 0$, então $f_*: H_q(A) \approx H_q(B)$ qualquer que seja $q \geqslant 0$. O seguinte resultado decorre, portanto, do Teorema 11.5.

Teorema 11.6 (Giever)- $\varphi_*: H_q(\,|S(X)|\,) \approx H_q(X)$ para todo $q \geqslant 0$.

§12 - Subcomplexos minimais.

A introdução dos subcomplexos minimais de Eilenberg e Zilber [6], permite passar do complexo singular total a um subcomplexo $M \subset S(X)$, que contem, grosso modo, toda a informação homológica de $S(X)$, mas do qual tudo que é superfluo do ponto de vista da homotopia, foi retirado. Para uma exposição detalhada, veja [6].

Diz-se que dois q-simplexos singulares $T_0, T_1: \Delta_q \to X$ são compativeis se $T_0^{(i)} = T_1^{(i)}$ para $0 \leq i \leq q$. Se, alem de serem compactiveis existir uma homotopia $T_t: T_0 \to T_1$ tal que todos os T_t são compatíveis, diz-se que T_0 e T_1 são homotópicos. Em outras palavras, $T_t: T_0 \simeq T_1$ rel. $\dot{\Delta}_q$.

Def. 23 - Seja X um espaço conexo por caminhos e fixemos um ponto de base $x^* \in X$. Um subcomplexo $M \subset S(X)$ diz-se minimal se:

(1) Para todo $q \geqslant 0$, o q-simplexo constante $T: \Delta_q \to x^*$ pertence a M.

(2) Se $T \in S(X)$ e $T^{(i)} \in M$, $0 \leq i \leq q$, então M contem um único q-simplexo singular T' compatível com T e homotópico a T.

A existencia de um subcomplexo minimal $M \subset S(X)$ é demonstrada por indução sobre a dimensão q ([6], p.502). Dois subcomplexos minimais de S(X), construidos relativamente a pontos de base distintos ou não, são semi-simplicialmente isomórficos. Demonstra-se ainda que a inclusão $M \to S(X)$ induz isomorfismos $H_q(M) \approx H_q(X)$ para todo $q \geqslant 0$.

Um $(q+1)$-prisma singular é uma aplicação $P: \Delta_q \times I \to X$. Se $\theta_t : \Delta_q \to \Delta_q \times I$ é a aplicação $y \to (y,t)$, façamos $P(t) = P \circ \theta_t$. O resultado que se segue é um dos teoremas fundamentais de Eilenberg e Zilber [6] sobre os subcomplexos minimais. Para a demonstração, veja [6], p. 503-4.

Teorema 12.1 - <u>Seja</u> X <u>um espaço conexo por caminhos e</u> M <u>um subcomplexo minimal de</u> $S(X)$, <u>construido relativamente a um ponto de base</u> $x^* \in X$. <u>Então existe uma função</u> $T \to P_T$ <u>que associa a cada</u> q<u>-simplexo</u> $T \in S(X)$ <u>um</u> $(q+1)$<u>-prisma singular</u> P_T <u>satisfazendo às seguintes condições</u>;

(i) $P_{T^{(i)}} = (P_T)^{(i)}$

(ii) $P_T(0) = T$, qualquer que seja $T \in S(X)$,

(iii) $P_T(1) \in M$, qualquer que seja $T \in S(X)$,

(iv) Se $T \in M$, $P_T(t) = T$ para $0 \leq t \leq 1$.

Seja A um complexo semi-simplicial e consideremos o politopo $Q = |A|$. Os vértices dos simplexos (celulas) de Q são ordenados de modo natural, pela operação face. Consideremos o CW-complexo $Q \times I$ (veja §5, Exemplo 4). É possível decompor cada prisma $\bar{w} \times I$ em simplexos sem acrescentar novos vértices. Seja $\mu_\sigma : \Delta_q \to \bar{w}_\sigma$ a aplicação característica da celula w_σ. Se d_i são os vértices de Δ_q, façamos $p_i = \mu_\sigma(d_i)$ para $0 \leq i \leq q$. Sejam $\bar{p}_i = (p_i,0)$ e $\bar{\bar{p}}_i = (p_i,1)$. O prisma $\bar{w}_\sigma \times I$ pode ser então decomposto em $(q+1)$-simplexos (fechados) $|\bar{p}_0 \ldots \bar{p}_i \bar{\bar{p}}_i \ldots \bar{\bar{p}}_q|$, $0 \leq i \leq q$. Os vértices de um tal simplexo são ordenados da seguinte maneira, $\bar{p}_0 < \ldots < \bar{p}_i < \bar{\bar{p}}_i < \ldots < \bar{\bar{p}}_q$. Não é difícil verificar que $Q \times I$, assim decomposto, é um politopo.

Seja X um espaço conexo por caminhos, M um subcomplexo minimal de $S(X)$ e $T \to P_T$ a função cuja existencia é assegurada pelo Teorema 12.1. A construção de Eilenberg e Zilber [6] permite dizer algo mais preciso sobre o par ($|S(X)|$, $|M|$). Veja também [16], (4.2).

Teorema 12.2 - $|M|$ é um retracto de deformação de $|S(X)|$.

Para todo $T \in S(X)$, seja $\rho_T = \mu_T^{-1}: \bar{w}_T \to \Delta_q$, onde μ_T é a aplicação característica da celula w_T de $|S(X)|$. Denotando por 1 a aplicação identica de I, $(\rho_T, 1): \bar{w}_T \times I \to \Delta_q \times I$ é um homeomorfismo. Consderemos a familia de aplicações

$\bar{P}_T = P_T \circ (\rho_T, 1): \bar{w}_T \times I \to X$, onde T percorre S(X). A propriedade (i) do Teorema 12.1, mostra, então que $\bar{P}_T | \bar{w}_{T^{(i)}} \times I = P_{T^{(i)}}$, $0 \leq i \leq q$. Portanto, podemos definir uma função $\Psi: |S(X)| \times I \to X$ fazendo $\Psi | \bar{w}_T \times I = \bar{P}_T$, qualquer que seja $T \in S(X)$. A função Ψ sendo contínua sobre cada celula do politopo $|S(X)| \times I$ (decomposto da maneira indicada em seguida ao Teorema 12.1), é uma aplicação contínua de $|S(X)| \times I$ em X. De acordo com o Lema 11.3, temos o seguinte diagrama comutativo (veja (11.3)).

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{\Psi''}{\nearrow} & |S(X)| \\ & & & & \downarrow \varphi_X \\ |S(X)| & \xrightarrow[i_0, i_1]{} & |S(X)| \times I & \xrightarrow[\Psi]{} & X \end{array}$$

onde $i_0(y) = (y,0)$ e $i_1(y) = (y,1)$. Como $P_T(0) = T$ para todo $T \in S(X)$, é claro que $\Psi'' \circ i_0$ = aplicação identica de $|S(X)|$. Por outro lado, a aplicação semi-simplicial $r: S(X) \to S(X)$, definida por $r(T) = P_T(1)$, é uma retração de S(X) sobre M. Isto é, $r(S(X)) = M$ e $r \circ r = r$. Seja $r': |S(X)| \to |S(X)|$ a retração de $|S(X)|$ sobre $|M|$ induzida por r (Teorema 11.1). Então é facil verificar que $r' = \Psi'' \circ i_1$. A aplicação Ψ'' nos dá, então, uma homotopia $r' \simeq 1$. Definamos a aplicação $r_1': |S(X)| \to |M|$ por $r_1'(y) = r'(y)$ para todo $y \in |S(X)|$. Seja $i: |M| \to |S(X)|$ a inclusão. Por definição, $i \circ r_1' = r'$ e como $r' \simeq 1$, resulta $i_\# \circ r'_{1\#} = r'_\# = 1$. Como

$r_{1\#}: \pi_q(|S(X)|) \to \pi_q(|M|)$ é claramente surjectiva, segue-se que $i_{\#}$ é uma aplicação bijectiva para todo $q \geqslant 0$, ou seja $i_{\#}: \pi_q(|M|) \approx \pi_q(|S(X)|)$ para todo $q \geqslant 0$. Observando que $|M|$ e $|S(X)|$ pertencem a classe α (§7), o Teorema 7.6 assegura que $i : |M| \to |S(X)|$ <u>é uma equivalencia de homotopia</u>. Esta afirmação já seria suficiente para as aplicações que faremos nos §§ 13 e 14. Apezar de aparentemente mais fraca, ela implica o enunciado do teorema.

Considerando a sequencia exata de homotopia do par $(|S(X)|, |M|)$, os isomorfismos $i_{\#}: \pi_q(|M|) \approx \pi_q(|S(X)|)$ acarretam que $\pi_q(|S(X)|, |M|) = 0$ para todo $q \geqslant 1$. Lembrando que $|M|$ e $|S(X)|$ são CW-complexos um resultado bem conhecido [11 , Chapt. VII, Theorem 1.7] nos assegura que, se $\pi_q(|S(X)|, |M|) = 0$ para $q \geqslant 1$, então $|M|$ é um retracto de deformação de $|S(X)|$. Isto é, existe uma aplicação $F(y,t): |S(X)| \times I \to |S(X)|$ tal que: (a) $F(y,0)=y$;
(b) $F(y,1) = r_2(y)$ é uma retração de $|S(X)|$ sobre $|M|$;
c) $f(y,t) = y$ qualquer que sejam $y \in |M|$ e $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Sejam $S^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \}$, $E^n_+ = \{ x \in S^n \mid x_{n+1} \geqslant 0 \}$, $E^n_- = \{ x \in S^n \mid x_{n+1} \leqslant 0 \}$ e $S^{n-1} = E^n_+ \cap E^n_- = \{ x \in S^n \mid x_{n+1} = 0 \}$. E^n_+ e E^n_- definem uma decomposição da esfera S^n em dois hemisférios cuja interseção é a $(n-1)$-esféra "equatorial" S^{n-1}. Duas aplicações $f: E^n_+ \to X$ e $g: E^n_- \to X$ tais que $f \mid S^{n-1} = g \mid S^{n-1}$ definem, de maneira evidente, uma aplicação $(f,g): S^n \to X$.

<u>Lema</u> 12.3 - <u>Sejam</u> $f, f' : E^n_+ \to X$ <u>aplicações tais que</u> $f \mid S^{n-1} = f' \mid S^{n-1}$. <u>Então</u>, $(f,g) \simeq (f',g)$ rel. S^{n-1} <u>se, e somente se</u>, $f \simeq f'$ rel S^{n-1}.

Suponhamos $f \simeq f'$ rel S^{n-1} seja dada por $F: E^n_+ \times I \to X$. Então, definamos $\Phi(x,t): S^n \times I \to X$ pelas condições.

$$\Phi(x,t) : \begin{cases} g(x) & \text{se } (x,t) \in E^n_- \times I \\ F(x,t) & \text{se } (x,t) \in E^n_+ \times I. \end{cases}$$

Φ é uma aplicação contínua, pois se $x \in E^n_+ \cap E^n_- = S^{n-1}$, temos $\Phi(x,t) = f(x) = g(x)$, para $0 \leq t \leq 1$, $\Phi(x,0) = (f,g)(x)$ e $\Phi(x,1) = (f',g)(x)$. Reciprocamente, dada Φ, $\Phi | E^n_+ \times I$ define $f \simeq f'$ rel S^{n-1}. Análogamente, se $g,g' : E^n_- \to X$ coincidem sôbre S^{n-1}, então $g \simeq g'$ rel S^{n-1} se, e somente se, $(f,g) \simeq (f',g)$ rel S^{n-1}.

<u>Teorema</u> 12.4 - <u>Seja X um espaço conexo por caminhos e suponhamos que os grupos</u> $\pi_q(X)$ <u>sejam enumeráveis para todo</u> $q \geq 1$. <u>Então, se M é um subcomplexo minimal de</u> $S(X)$, <u>M é enumerável.</u>

A demonstração se faz por indução sobre a dimensão dos simplexos de M. De acôrdo com a notação do § 11, M_q denota o conjunto dos q-simplexos de M. Aplicando a condição (2) da definição de subcomplexo minimal a 0-simplexos (operação face é vazia), concluimos que ha um único 0-simplexo $\Delta_o \to x^*$ no subcomplexo M, onde x^* indica o ponto de base que se adota na construção do subcomplexo M e na definição dos grupos $\pi_q(X)$. Consideremos um 1-simplexo $T \in M_1$. Então $T^{(o)} = T^{(1)} : \Delta_o \to x^*$. Como $\pi_1(X)$ é enumerável, por hipótese, o conjunto M_1 dos 1-simplexos de M é enumerável, tendo em vista a condição (2) na definição de subcomplexo minimal. Suponhamos que M_{n-1} seja enumerável, onde $n > 1$. Consideremos dois simplexos compativeis $T_1, T_2 \in M_n$, isto é, $T_1^{(i)} = T_2^{(i)}$ para $0 \leq i \leq n$. Sejam $h_1 : (E^n_+, S^{n-1}) \to (\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ e $h_2 : (E^n_-, S^{n-1}) \to (\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ homeomorfismos que coincidem sobre S^{n-1}. Suponhamos que os grupos de homotopia $\pi_n(X)$ sejam definidos por classes de aplicações $(S^n, p_o) \to (X, x^*)$. Então $(T_1 \circ h_1, T_2 \circ h_2) : (S^n, p_o) \to (X, x^*)$ define um elemento de $\pi_n(X)$. De acôrdo com o Lema 12.3 se

$T_1, T_1' \in S(X)$ são homotópicos, então $(T_1 \circ h_1, T_2 \circ h_2) \simeq (T_1' \circ h_1, T_2 \circ h_2)$ rel S^{n-1}. Por outro lado, dados $T_1 \in M_n$ e $\alpha \in \pi_n(X)$, segue-se imediatamente de uma propriedade elementar da teoria da obstrução ([5], propriedade (8.4)) que existe um n-simplexo $T_2 \in S(X)$, compatível com T_1, tal que $(T_1 \circ h_1, T_2 \circ h_2)$ seja um representante de α. De acordo com a definição de subcomplexo minimal, existe um único simplexo $T_2' \in M_n$ homotópico a T_2. Portanto, $(T_1 \circ h_1, T_2 \circ h_2) \simeq (T_1 \circ h_1, T_2' \circ h_2)$ rel S^{n-1} e $(T_1 \circ h_1, T_2' \circ h_2) \in \alpha$. Como, por hipótese, $\pi_n(X)$ é enumerável, acabamos de mostrar que o conjunto dos simplexos de M_n com faces $T_1^{(i)}$, $0 \leq i \leq n$, é enumerável. É claro que o conjunto das familias de (n-1)-simplexos de M_{n-1} provenientes de faces de um n-simplexo é um subconjunto do produto $M_{n-1} \times \ldots \times M_{n-1}$ (n+1 vezes), conjunto este que é enumerável. Portanto M_n, como reunião enumerável de conjuntos enumeráveis, é enumerável. Segue-se que o subcomplexo minimal $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ é enumerável.

Corolário 12.5 - Nas condições do Teorema 12.4, se M é um subcomplexo minimal de S(X), então, o CW-complexo |M| é enumerável.

CAPITULO IV

Resultados Principais

§13 - Caracterização dos espaços que são do mesmo tipo de homotopia que poliedros localmente finitos.

Seja X um espaço conexo por caminhos e $|S(X)|$ seu politopo singular. De acôrdo com o Teorema 11.5, a aplicação canônica $\varphi: |S(X)| \to X$ induz, para todas as dimensões, isomorfismos entre os grupos de homotopia. Como $|S(X)|$ é um CW-complexo, pertence a classe α que foi definida no §7, isto é, a classe dos espaços conexos por caminhos que são dominados por CW-complexos. Portanto, o Teorema 7.6 assegura que, se $X \in \alpha$, então φ é uma equivalência de homotopia. Recìprocamente, se φ é uma equivalência de homotopia, é evidente que $X \in \alpha$. Fica assim demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 13.1 (Whitehead) - Seja X um espaço conexo por caminhos então $\varphi: |S(X)| \to X$ é uma equivalência de homotopia se, e somente se $X \in \alpha$.

Como consequência imedita deste Teorema, a classe α pode ser descrita como a classe dos espaços conexos por caminhos que são do mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo.

Os CW-complexos não são em geral localmente finitos. Interessa-nos agora caracterizar a subclasse de α constituida dos espaços do mesmo tipo de homotopia que poliedros localmente finitos.

Teorema 13.2 - Seja X um espaço conexo por caminhos. Então as seguintes condições são equivalentes:

(a) X é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro localmente finito;

(b) $X \in \alpha$, e $\pi_q(X)$ são grupos enumeráveis para todo $q \geq 0$;

(c) *X é dominado por um CW-complexo enumerável.*

A implicação (a)$\Rightarrow$(c) é imediata e (c)$\Rightarrow$(b) segue-se do Teorema 6.3. Demonstremos que (b)$\Rightarrow$(a). Seja M um subcomplexo minimal de $S(X)$. De acôrdo com o Corolario 12.5, $|M|$ é um CW-complexo enumerável. A inclusão $|M| \to |S(X)|$ é uma equivalência de homotopia (Teorema 12.2) e $\varphi: |S(X)| \to X$ também, visto que $X \in \alpha$. Segue-se que a restrição $\varphi' : |M| \to X$ é uma equivalência de homotopia. Como $|M|$ é um CW-complexo enumerável, o Teorema 6.1 assegura que $|M|$ é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro (conexo) localmente finito P. Conclui-se que $P \simeq X$.

Observações - (1) A equivalência (a)$\Leftrightarrow$(c) foi demonstrada por J.H.Whitehead [28]. Conclui Whitehead deste resultado que, se X é um ANR compacto, então X é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro localmente finito. Veremos abaixo que se pode generalizar e precisar êste resultado.

(2) A subclasse α' de α constituida dos espaços, que são do mesmo tipo de homotopia que um poliedro localmente finito, pode ser especificada por meio de uma condição sobre os grupos de homotopia: α' é a classe dos espaços $X \in \alpha$ tais que $\pi_q(X)$ são grupos enumeráveis para todo $q \geqslant 0$.

Os ANR são dominados por poliedros localmente finitos, de acordo com o Teorema 3.1. Da condição (c) do Teorema 13.2 segue-se o seguinte corolario.

Corolario 13.3 - *Todo ANR é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro localmente finito.*

Precisaremos, posteriormente, do seguinte lema.

Lema 13.4 - *Se um espaço $X \in \alpha$ é compacto, então X é dominado por um CW-complexo finito. Segue-se, em particular que $\Delta X < \infty$.*

De fato, seja K um CW-complexo que domina X. Existem aplicações $f: X \to K$ e $g: K \to X$ tais que $g \circ f \simeq 1_X$. Como

$f(X)$ é compacto, a propriedade (5.4) assegura que existe um subcomplexo finito $K_1 \subset K$ tal que $f(X) \subset K_1$. Definimos $f_1 : X \to K_1$ por meio da condição $f_1(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, e $g_1 = g|K_1$. Então, as relações $g_1 \circ f_1 = g \circ f \simeq 1_X$ mostram que X é dominado pelo CW-complexo finito K_1.

Corolário 13.5 - <u>Se $X \in \alpha$ é compacto, então X é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro localmente finito.</u>

O Corolário é consequencia imediata do Lema 13.4 e da condição (c) do Teorema 13.2. Em particular, todo ANR compacto é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro localmente finito.

§14 - <u>Caracterização dos espaços simplesmente conexos que são do mesmo tipo de homotopia que poliedros finitos.</u>

As construções empregadas para demonstrar os teoremas principais deste § apoiam-se de maneira essencial num importante resultado de J.P.Serre ([21], Chap. V, Proposition 1). Para a utilização que faremos dêste resultado é suficiente enuncia-lo quando o espaço X é um ANR.

Teorema 14.1 - <u>Seja X um ANR simplesmente conexo tal que os grupos $H_q(X)$ sejam finitamente gerados para $q \geqslant 2$. Então os grupos de homotopia $\pi_q(X)$ são finitamente gerados para $q \geqslant 2$.</u>

Corolario 14.2 - <u>Se X é um ANR compacto simplesmente conexo, então $\pi_q(X)$ é finitamente gerado para $q \geqslant 2$.</u>

É suficiente lembrar que, para um ANR compacto, os grupos de homologia $H_q(X)$ são finitamente gerados para $q \geqslant 0$. O Corolario 14.2 mostra, em particular, que os grupos de homotopia de um poliedro finito, simplesmente conexo, são finitamente gerados.

Seja $\phi : \pi_q(X) \to H_q(X)$ o homomorfismo de Hurewicz e façamos $\Sigma_q(X) = \phi(\pi_q(X)) \subset H_q(X)$. $\Sigma_q(X)$ é denominado sub grupo das classes de homologia "esféricas". Consideremos uma aplicação $f:X \to Y$. Uma das propriedades de "naturalidade" do homomorfismo de Hurewicz é expressa pela comutatividade do diagrama,

$$\begin{tikzcd} \pi_q(X) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "f_\#"] & H_q(X) \arrow[d, "f^*"] \\ \pi_q(Y) \arrow[r, "\Phi"] & H_q(Y) \end{tikzcd}$$

Segue-se que $f_*(\Sigma_q(X)) \subset \Sigma_q(Y)$. Por passagem ao quociente, f_* define um homomorfismo (que designaremos pelo mesmo simbolo f_*) de $G_q(X) = H_q(X)/\Sigma_q(X)$ em $G_q(Y) = H_q(Y)/\Sigma_q(Y)$. Observemos que $G_q(X) = 0$ é equivalente ao enunciado de que o homomorfismo $\Phi_q: \pi_q(X) \to H_q(X)$ é surjectivo.

O teorema abaixo foi demonstrado por J.H.C.Whitehead no caso em que os espaços X e Y são CW-complexos. Veja [25], pp. 217-218 e [29], pp.49-51. O teorema especifica a maneira pela qual o n-tipo de homotopia influencia o grupo de homologia em dimensão n+1.

Teorema 14.3 - Sejam X e Y espaços conexos por caminhos tais que $X \simeq_n Y$, $f:X \to Y$ uma equivalência de n-homotopia. Então, $f_*: G_{n+1}(X) \approx G_{n+1}(Y)$.

De fato, seja $f:X \to Y$ uma equivalência de n-homotopia. A aplicação f define uma aplicação semi-simplicial $\bar{f}: S(X) \to S(Y)$ da maneira usual. De acordo com o Teorema 11.1 $\bar{f}$ induz uma aplicação continua $f': |S(X)| \to |S(Y)|$ e o seguinte diagrama é comutativo (Lema 11.2):

$$\begin{tikzcd} {|S(X)|} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\psi_X"'] & {|S(Y)|} \arrow[d, "\psi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Como $\varphi_{X\#}$ e $\varphi_{Y\#}$ são bijectivas para todo $q \geqslant 0$ (Teorema 11.5) e $f_{\#}: \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para $q \leqslant n$, de acôrdo com a hipótese de ser f uma equivalência de n-homotopia e aplicando o Teorema 7.8, segue-se que $f'_{\#}: \pi_q(|S(X)|) \approx \pi_q(|S(Y)|)$ para $q \leqslant n$. Em outras palavras (Teorema 7.8), $|S(X)| \simeq_n |S(Y)|$. Como o teorema é valido para CW-complexos [25], segue-se que temos um isomorfismo $f_*: G_{n+1}(|S(X)|) \approx G_{n+1}(|S(Y)|)$. Por outro lado as aplicações φ_{X*} e φ_{Y*} são bijectivas para todas as dimensões (Teorema 11.6) Não é dificil verificar que $\varphi_{X*}: G_q(|S(X)|) \approx G_q(X)$ e $\varphi_{Y*}: G_q(|S(Y)|) \approx G_q(Y)$ para todo $q \geqslant 0$. Do diagrama precedente, deduzimos então o seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc}
G_{n+1}(|S(X)|) & \xrightarrow{f'_*} & G_{n+1}(|S(Y)|) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_X^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_Y^*} \\
G_{n+1}(X) & \xrightarrow{f_*} & G_{n+1}(Y)
\end{array}$$

A comutatividade do diagrama acarreta, finalmente, que $f_*: G_{n+1}(X) \approx G_{n+1}(Y)$, terminando, assim, a demonstração.

Nas construções que se seguem, precisaremos da operação de juntar ou colar uma celula a um CW-complexo de maneira a obter um CW-complexo. Damos uma breve descrição deste processo de colagem, devido a J.H.C.Whitehead (Veja, por exemplo, [27], p.57). Seja K um CW-complexo, E^n uma n-celula fechada sem pontos em comum com K e $\dot{E}^n$ sua fronteira. Seja $f: \dot{E}^n \to K$ uma aplicação qualquer tal que $f(\dot{E}^n) \subset K^{n-1}$. Seja $e^n = E^n - \dot{E}^n$ e $K \cup E^n$ o espaço topológico soma de K e E^n. Consideremos a função $\varphi: K \cup E^n \to K \cup e^n$ definida da seguinte maneira: $\varphi | K \cup e^n$ = identidade e $\varphi(p) = f(p)$ para $p \in \dot{E}^n$. Seja $K \cup e^n$ munido da topologia da "identificação" por φ, isto é, a topologia mais fina sobre $K \cup e^n$ que torna φ contínua. Nesta topologia, $A \subset K \cup e^n$ é fechado se, e somente se $\varphi^{-1}(A)$ fôr fechado em $K \cup E^n$. Não é dificil verificar que $K \cup e^n$, com esta topologia, é um CW-complexo(1), e^n é uma celula aberta e K um subespaço fechado de $K \cup e^n$. Diz-se que $K \cup e^n$ é formado <u>colando-se a celula aberta</u> e^n <u>ao complexo</u> K <u>por meio da aplicação</u> $f: \dot{E}^n \to K$.

Seja K um CW-complexo finito, simplesmente conexo, de dimensão $\leq n$, onde n é um inteiro > 1. Consideremos uma familia de elementos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \pi_n(K)$. Consideremos k (n+1)-celulas E_i^{n+1}, duas a duas disjuntas e disjuntas de K. Sejam $\theta_i : \dot{E}^{n+1} \to S^n$ homeomorfismos, $1 \leq i \leq k$. De acordo com a descrição acima, consideremos a colagem das celulas $e_i^{n+1} = E_i^{n+1} - \dot{E}_i^{n+1}$ ao complexo K por meio das aplicações $g_i = f_i \cdot \theta_i : \dot{E}_i^{n+1} \to K$, onde $f_i : S^n \to K$ são representantes dos elementos α_i, respectivamente. Define-se assim um CW-complexo $K^* = K \cup \bigcup_{i=1} e_i^{n+1}$ de dimensão n+1. Seja $i: K \to K^*$ a inclusão e $Z(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ o subgrupo de $\pi_n(K)$ gerado pelos elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Verifica-se imediatamente que a seguinte sequencia, constituida de um trecho da sequencia exata de homotopia seguida de um zero a direita, é uma sequencia exata:

$$\cdots \to \pi_{n+1}(K^*, K) \xrightarrow{\partial} \pi_n(K) \xrightarrow{i} \pi_n(K^*) \to (0).$$

Lema 14.4 - <u>Nucleo de</u> $i_{\#} = Z(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

Observemos, inicialmente, que $\pi_1(K^*) = \pi_1(K) = 0$ e $K^{*n+1} = K^*$, $K^{*n} = K$. Aplicando-se o Teorema 9.1, vemos que $H_q(K^*, K) = 0$ para $q \leq n$, e do Corolario 7.4 segue-se que $\pi_q(K^*, K) = 0$ para $q \leq n$. Concluimos que o homomorfismo de Hurewicz em dimensão n+1 é um isomorfismo,

---

(1) - Veja Apendice B, Lema do Caso II.

$\phi_{n+1} : \pi_{n+1}(K^*,K) \approx H_{n+1}(K^*,K)$. Seja $g_i^! : \sigma^{n+1} \to \bar{e}_i^{n+1}$ ... plicação característica da celula e_i^{n+1}, $1 \leq i \leq k$. Considerando os $g_i^!$ como aplicações $g_i^! : (\sigma^{n+1}, \dot{\sigma}^{n+1}) \to (K^*,K)$, definem os $g_i^!$ elementos $\gamma_i = \{g_i^!\} \in \pi_{n+1}(K^*,K)$ tais que $\partial\gamma_i = \alpha_i$. Escolhendo um gerador $\omega \in H_{n+1}(\sigma^{n+1}, \dot{\sigma}^{n+1})$ de maneira adequada, teremos $g_{i*}^!(\omega) = \phi_{n+1}(\gamma_i)$ para $1 \leq i \leq k$. Por outro lado, os $g_{i*}^!(\omega) \in H_{n+1}(K^*,K)$, $1 \leq i \leq k$, formam um sistema de geradores de $H_{n+1}(K^*,K)$ (Veja [22], p. 78). Portanto sendo ϕ_{n+1} bijectiva, os γ_i formam um sistema de geradores do $\pi_{n+1}(K^*,K)$. Temos finalmente,

$$\begin{aligned} \text{Nucl. } i_{\#} &= \partial\, \pi_{n+1}(K^*,K) \\ &= Z(\partial\gamma_1, \ldots, \partial\gamma_k) \\ &= Z(\alpha_1, \ldots, \alpha_k). \end{aligned}$$

Seja K um CW.complexo simplesmente conexo e e^0 uma 0-celula fixada em K. Suponhamos que sejam coladas a K, m n-celulas disjuntas $e_i^n (n \geq 2)$, $1 \leq i \leq m$, por meio de aplicações constantes $g_i : \dot{E}_i^n \to \{e^0\}$. No CW-complexo $L = K \cup \bigcup_{i=1}^m e_i^n$, $\bar{e}_i^n$ é uma n-esfera S_i^n contendo o ponto e^0 de K, isto é, $L = K \cup \bigcup_{i=1}^m S_i^n$.

Lema 14.5 - $\pi_n(L) \approx \pi_n(K) + G$ (soma direta), <u>onde</u> G <u>é</u> <u>um</u> <u>grupo</u> <u>abeliano</u> <u>livre</u> <u>com</u> <u>m</u> <u>geradores</u>. <u>Podemos</u> <u>tomar</u>, <u>como</u> <u>geradores</u> <u>de</u> G, <u>as</u> <u>classes</u> <u>de</u> <u>homotopia</u> <u>de</u> <u>aplicações</u> $\xi_i : S^n \to S_i^n$ <u>de</u> <u>grau</u> ± 1.

Este Lema é um caso particular de ([23]), (Theorem 19).

Seja X um espaço conexo por caminhos, simplesmente conexo, tal que os grupos $\pi_q(X)$ sejam finitamente gerados para $q \geq 2$. Empregando os lemas acima, construiremos, a seguir, um CW-complexo K tal que K^n é finito para todo $n \geq 0$, e uma aplicação f : $K \to X$, que é uma equivalência de co-homo -

topia.

Teorema 14.6 - Seja X um espaço conexo por caminhos, simplesmente conexo, tal que os grupos $\pi_q(X)$ sejam finitamente gerados para $q \geqslant 2$. Então, existe um CW-complexo K, uma aplicação $f:K \to X$ e uma sequencia (K_n) de subcomplexos finitos de K satisfazendo às seguintes condições:
(1) $K_n \subset K_{n+1}$, $K^n \subset K_n$ para todo $n \geqslant 0$ e $\dim K_n \leq n+1$; (2) $f_{\#}:\pi_q(K) \approx \pi_q(X)$ para todo $q \geqslant 0$; (3) $f \mid K_n : K_n \to X$ é uma equivalência de n-homotopia para todo $n \geqslant 0$.

Observemos, inicialmente, que a propriedade (1) acarreta que K^n é um subcomplexo finito para todo $n \geqslant 0$ e que $\bigcup_{n=0}^{\infty} K^n = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = K$.

A demonstração é inspirada na construção de Whitehead [26], para a realização de espaços com grupos de homotopia dados. O CW-complexo K e a aplicação f serão definidos por indução. Seja X um espaço satisfazendo à condição do teorema e fixemos um ponto $x_0 \in X$. Façamos $K_0 =$ uma única 0-celula e^0, definindo $f_0 : K_0 \to X$ pela condição $f_0(e^0) = x_0$. Suponhamos, para $r > 1$, construido um CW-complexo finito K_{r-1}, de dimensão $\leq r$, e uma aplicação $f_{r-1}:K_{r-1} \to X$ tal que $f_{r-1\#}:\pi_q(K_{r-1}) \approx \pi_q(X)$ para $q \leq r-1$ e $f_{r-1} \mid K_{r-2} = f_{r-2}$.

Por hipótese, $\pi_r(X)$ é finitamente gerado. Escolhamos um sistema finito de geradores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de $\pi_r(X)$. Sejam $g_i:(S^r,p) \to (X,x_0)$ representantes dos α_i respectivamente. Consideremos o CW-complexo (finito) $L_r = K_{r-1} \cup \bigcup_{i=1}^{k} e_i^r$, onde as celulas e_i^r, supostas duas a duas disjuntas e disjuntas de K_{r-1}, são coladas pela fronteira ao ponto $e^0 \in K_{r-1}$. Para cada i, $\bar{e}^r$ é uma r-esfera. Sejam

$h_i:(S^r,p)\to(\bar{e}^r,e^0)$ homeomorfismos, $1\leq i\leq k$. Prolonguemos f_{r-1} a uma aplicação $f_r':L_r\to X$ fazendo $f_r' \mid e^{-r} = g_i \circ h_i^{-1}$. De acordo com o Lema 14.5, $\pi_r(L_r)=\pi_r(K_{r-1})+\sum_{i=1}^{k} Z\{h_i\}$ (soma direta), onde $\{h_i\}$ é a classe de homotopia de $h_i:(S^r,p)\to(L_r,e^0)$. Portanto o homomorfismo $f'_{r\#}:\pi_r(L_r)\to\pi_r(X)$ é surjectivo. Uma verificação simples mostra que a inclusão induz isomorfismos $\pi_q(K_{r-1})\approx\pi_q(L_r)$ para $q\leq r-1$. Considerando que a composição de $K_{r-1}\to L_r$ e $f_r':L_r\to X$ dá f_{r-1}, a hipotese de indução acarreta que $f'_{r\#}:\pi_q(L_r)\approx\pi_q(X)$ para $q\leq r-1$. Vimos acima que $f'_{r\#}:\pi_r(L_r)\to\pi_r(X)$ é surjectiva. Observemos que $\pi_1(L_r)=0$.

Sendo L_r um CW-complexo finito, é um ANR compacto. O Corolario 14.2 assegura, portanto, que $\pi_r(L_r)$ é finitamente gerado. Seja $\beta_1,\dots,\beta_n$ um sistema de geradores do núcleo do homomorfismo $f'_{r\#}:\pi_r(L_r)\to\pi_r(X)$. Para cada $i=1,\dots,m$, escolhamos um representante $\varphi_i:(S^r,p)\to(L_r,e^0)$ do elemento β_i. Sejam E_i^{r+1} celulas fechadas, duas a duas disjuntas e disjuntas de L_r, $h_i':\dot{E}_i^{r+1}\to S^r$ homeomorfismos e $K_r=L_r\cup\bigsqcup_{i=1} e_i^{r+1}$ o CW-complexo obtido colando-se as celulas $e_i^{r+1}=E_i^{r+1}-\dot{E}_i^{r+1}$ por meio das aplicações $\varphi_i\circ h_i':\dot{E}_i^{r+1}\to L_r$.

Por hipotese, $f'_{r\#}(\beta_i)=0$, isto é, $f_r'\circ\varphi_i\simeq 0$. Portanto, $f_r'\varphi_i\circ h_i':\dot{E}_i^{r+1}\to X$ é homotópica a uma aplicação constante, podendo, pois, ser prolongada a uma aplicação $g_i':E_i^{r+1}\to X$. Definamos $f_r\mid L_r=f'_r$ e $f_r\mid e_i^{r+1}=g_i'\mid E_i^{r+1}-\dot{E}_i^{r+1}$. A função $f_r:K_r\to X$ é claramente contínua sobre cada $\bar{e}_i^{r+1}$ e tambem sobre L_r. Trata-se, portanto, de uma aplicação f_r de K_r em X. Seja $j_r:L_r\to K_r$ a inclusão. De acordo com o Lema 14.4, Nucl. $j_{r\#} = Z(\beta_1,\dots,\beta_n)$.

Por construção, temos

$Z(\beta_1,\dots,\beta_n) = \text{Nucl.} f'_{r\#}$.

$$\begin{tikzcd} \pi_r(K_r) \arrow[r, "f_{r\#}"] & \pi_r(X) \\ \pi_r(L_r) \arrow[u, "j_{r\#}"] \arrow[ur, "f'_{r\#}"'] & \end{tikzcd}$$

Por outro lado, a igualdade $f'_r = f_r \circ j_r$ acarreta $f'_{r\#} = f_{r\#}\, j$. Uma verificação simples mostra que a inclusão $L_r \to K_r$ induz os isomorfismos $j_{r\#}: \pi_q(L_r) \approx \pi_q(K_r)$ para $q \leq r-1$. Concluimos daí que $f_{r\#}: \pi_q(K_r) \approx \pi_q(X)$ para $q \leq r-1$. Como $f'_{r\#}: \pi_r(L_r) \to \pi_r(X)$ é surjectiva e Nucl. $f'_{r\#}$ = Nucl. $j_{r\#}$, a relação $f'_{r\#} = f_{r\#} \circ j_{r\#}$ acarreta que $f_{r\#}: \pi_r(K_r) \approx \pi_r(X)$. Como K_{r-1} foi suposto um CW-complexo finito e só colamos um número finito de celulas para obter K_r, segue-se que este é também um CW-complexo finito. A dimensão de K_r é $\leq r+1$, $K_{r-1} \subset K_r$ e $f_r \mid K_{r-1} = f_{r-1}$. O raciocinio que precede mostra que f_r induz isomorfismos $f_{r\#}: \pi_q(K_r) \approx \pi_q(X)$ para $q \leq r$.

Seja $K = \bigcup_{r=0}^{\infty} K_r$ munido da topologia mais fina que torna as inclusões $K_r \to K$ contínuas. Nesta topologia F é fechado em K se, e somente se, $F \cap K_r$ fôr fechado em K_r para todo $r \geq 0$. É facil verificar que K é um CW-complexo[1] simplesmente conexo. Como $K^n = K^n_n = L_n$, segue-se que $K^n \subset K_n$ para todo $n \geq 0$, donde, os K^n são subcomplexos finitos para todo n 0. Define-se a aplicação $f: K \to X$ fazendo-se $f \mid K_r = f_r$. Verifica-se facilmente que a inclusão $K_r \to K$ induz isomorfismos $\pi_q(K_r) \approx \pi_q(K)$ para $q \leq r$. Portanto $f_\#: \pi_q(K) \approx \pi_q(X)$ para todo $q \geq 0$, conluindo-se assim a demonstração do Teorema 14.6

Teorema 14.7 - <u>Seja $X \in \mathcal{X}'$ (§13,Obs.(2)) um espaço simplesmente conexo. Então, X é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro FINITO se, e somente se, estiverem satisfeitas as seguintes condições:</u>

(1) - Veja Apendice B, Caso II.

(1) $H_q(X)$ <u>é finitamente gerado para todo</u> $q \geqslant 0$.

(2) <u>Existe um inteiro</u> $n \geqslant 0$ <u>tal que</u> $H_q(X) = 0$ <u>para</u> $q > n$.

As condições são evidentemente necessárias. Resta, pois, mostrar que são suficientes. Como $X \in {}'$, de acôrdo com o Teorema 13.2, X é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro (conexo) P localmente finito. Portanto $\pi_1(P) = 0$ e $H_q(P)$ são finitamente gerados para todo $q \geqslant 0$. O poliedro P sendo um ANR, segue-se do Teorema 14.1 que os grupos $\pi_q(P)$ são finitamente gerados para todo $q \geqslant 0$. Portanto, os $\pi_q(X) \approx \pi_q(P)$ são finitamente gerados, qualquer que seja $q \geqslant 0$.

O Teorema 14.6 assegura a existencia de um CW-complexo K tal que K^n é finito para todo $n \geqslant 0$ e uma aplicação $\bar{g}: K \to X$ que induz isomorfismos $\bar{g}_*: \pi_q(K) \approx \pi_q(X)$ para todo $q \geqslant 0$. Seja $f: K^{n+1} \to X$ dada por $f = \bar{g} \mid K^{n+1}$. Reportando-nos à demonstração do Teorema 14.6, vemos que $K^{n+1} = L_{n+1}$ e que $f_*: \pi_q(K^{n+1}) \to \pi_q(X)$ é injectiva para $q \leqslant n$ e surjectiva para $q \leqslant n+1$. Como K^{n+1} e X são simplesmente conexos, de acôrdo com o Teorema 7.5, temos $f_*: H_q(K^{n+1}) \to H_q(X)$ injectiva para $q \leqslant n$ e surjectiva para $q \leqslant n+1$. Vamos mostrar que modificando, se necessário fôr, o CW-complexo K^{n+1} pela colagem de um número finito de celulas, obteremos um CW-complexo A do mesmo tipo de homotopia que o espaço X.

Existe (Teorema 6.1) um poliedro finito Q da mesma dimensão que K^{n+1}, tal que $K^{n+1} \simeq Q$. Portanto, $H_{n+1}(K^{n+1}) \approx H_{n+1}(Q)$ é um grupo livre de posto finito se fôr $\neq (0)$, visto que $\dim Q = \operatorname{Dim} K_{n+1} \leqslant n+1$.

Examinemos, primeiramente o caso $H_{n+1}(K^{n+1}) = 0$. Vimos acima que $f_*: H_q(K^{n+1}) \approx H_q(X)$ para $q \leq n$. Como $H_q(X) = 0$

para $q \geq n$ por hipótese, e $H_q(K^{n+1}) = 0$ para $q > n+2$ por razões de dimensão, a hipótese $H_{n+1}(K^{n+1}) = 0$ acarreta que f_* é bijectiva em todas as dimensões. Como K^{n+1} e X são simplesmente conexos, segue-se do Corolario 7.7 que $f \cdot$ $f: K^{n+1} \to X$ é uma equivalência de homotopia.

Suponhamos agora que $H_{n+1}(K^{n+1}) \neq (0)$. De acôrdo com a observação acima, $H_{n+1}(K^{n+1})$ é um grupo livre de posto $k > 0$. Como $f_{\#} : \pi_q(K^{n+1}) \approx \pi_q(X)$ para $q \leq n$, segue-se do Teorema 7.8 que $K^{n+1} \simeq_n X$. O Teorema 14.3 afirma que, neste caso, $G_{n+1}(K^{n+1}) \approx G_{n+1}(X)$. Por hipótese, $H_{n+1}(X) = 0$ logo $G_{n+1}(X) = 0$ e, portanto, $G_{n+1}(K^{n+1}) = 0$. Ísto significa que o homomorfismo de Hurewicz em dimensão n+1 é surjectivo. Sendo $\phi : \pi_{n+1}(K^{n+1}) \to H_{n+1}(K^{n+1})$ surjectivo e a imagem de ϕ um Z-modulo livre, segue-se que $\pi_{n+1}(K^{n+1}) = M + \phi^{-1}(0)$ (soma direta), onde $M \approx H_{n+1}(K^{n+1}) \approx Z^k$.

Consideremos uma familia de aplicações $g_i : (S^{n+1}, p) \to (K^{n+1}, e^0)$ $1 \leq i \leq k$, tal que $(\{g_i\})_{1 \leq i \leq k}$, constitua uma base de M. Sejam $h_i : \dot{E}^{n+2} \to S^{n+1}$ homeomorfismos e consideremos o CW-complexo $A = K^{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k} e_i^{n+2}$ obtido colando-se as celulas disjuntas e_i^{n+2} a K^{n+1} por meio das aplicações $g_i \circ h_i : \dot{E}^{n+2} \to K^{n+1}$ Seja $i: K^{n+1} \to A$ a inclusão. Observemos que, de acordo com o Lema 14.4, Nucl. $i_{\pi} = Z(\{g_1\}, \ldots, \{g_k\}) \approx M$.

Façamos $\tilde{A}^p = K^{n+1} \cup A^p$ e calculemos, pelo método do §9, os grupos de homologia relativos $H_q(A, K^{n+1})$. Observemos que $\tilde{A}^p = K^{n+1}$ para $p \leq n+1$. Por definição, $C_q(A, K^{n+1}) = H_q(\tilde{A}^q, \tilde{A}^{q-1}) = 0$ para $q \leq n+1$. Portanto $H_q(A, K^{n+1}) \approx \bar{H}_q(A, K^{n+1}) = 0$ para $q \leq n+1$. Usando a sequancia exata de homologia do par (A, K^{n+1}), vemos que isto acarreta que $i_* : H_q(K^{n+1}) \to H_q(A)$ é injectivo para $q \leq n$ e surjectivo para $q \leq n+1$. Ambos os espaços sendo simplesmente conexos, se -

gue-se conforme o Teorema 7.5 que $i_{\#}: \pi_q(K^{n+1}) \to \pi_q(A)$ é infectiva para $q \leq n$ e surjectiva para $q \leq n+1$.

Demonstraremos, a seguir, que: (i) $H_{n+1}(A) = 0$; (ii) $H_{n+2}(A) = 0$. (i) Consideremos o diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(K^{n+1}) & \xrightarrow{\phi} & H_{n+1}(K^{n+1}) \\ \downarrow i_{\#} & & \downarrow i_* \\ \pi_{n+1}(A) & \xrightarrow{\phi} & H_{n+1}(A) \end{array}$$

Como $i_{\#}: \pi_q(K^{n+1}) \approx \pi_q(A)$ para $q \leq n$, segue-se que $K^{n+1} \simeq_n A$ e, aplicando o Teorema 14.3, $G_{n+1}(K^{n+1}) \approx G_{n+1}(A)$. Vimos acima que $G_{n+1}(K^{n+1}) \approx G_{n+1}(X) = 0$, logo $G_{n+1}(A) = 0$ e o homomorfismo $\phi: \pi_{n+1}(A) \to H_{n+1}(A)$ é surjectivo. Usando a comutatividade do diagrama acima, temos

$$\begin{aligned} H_{n+1}(A) &= \phi \cdot i_{\#}(\pi_{n+1}(K^{n+1})) \quad (i_{\#} \text{ surjectivo em dim } n+1) \\ &= i_* \phi(\pi_{n+1}(K^{n+1})) \\ &= i_* \phi(M) \\ &= \phi\, i_{\#}(M) = 0, \end{aligned}$$

visto que $M = \text{Nucl. } i_{\#}$.

(ii) Como A é um CW-complexo finito de dimensão n+2, o grupo $H_{n+2}(A)$ é um grupo livre de posto finito, se for $\neq (0)$. Seja $\tilde{A}^p = K^{n+1} \cup A^p$ e observemos que $\tilde{A}^p = K^{n+1}$ para $p \leq n+1$. De acordo com o Teorema 9.1, $C_{n+2}(A, K^{n+1}) = H_{n+2}(\tilde{A}^{n+2}, \tilde{A}^{n+1}) \approx Z^k$, sendo k o número de (n+2)-celulas de A. Vimos acima que $H_{n+1}(A, K^{n+1}) = 0$ e observemos ainda que $H_{n+2}(K^{n+1}) = 0$ visto que $\dim K^{n+1} \leq n+1$. O seguinte trecho da sequencia exata de homologia do par (A, K^{n+1}) é, portanto, exato:

$$0 \to H_{n+2}(A) \to H_{n+2}(A, K^{n+1}) \to H_{n+1}(K^{n+1}) \to 0.$$

Por hipotese, $H_{n+1}(K^{n+1}) = Z^k$ e acabamos de ver acima que $H_{n+2}(\tilde{A}^{n+2}, \tilde{A}^{n+1}) = H_{n+2}(A, K^{n+1}) \approx Z^k$. O trecho a sequencia exata se reduz a,

$$0 \to H_{n+2}(A) \to Z^k \to Z^k \to 0,$$

donde $H_{n+2}(A) = 0$.

Acabamos de demonstrar que $H_{n+1}(A)$ $H_{n+2}(A) = 0$ e, por razões de dimensão, $H_2(A) = 0$ para $q > n+2$. Portanto $H_q(A) = 0$ para $q > n$. Como $f: K^{n+1} \to X$ é uma equivalencia de n-homotopia, existe uma aplicação $g: X \to K^{n+1}$ que induz ismorfismos $g_\#: \pi_q(X) \approx \pi_q(K^{n+1})$ para $q \leq n$. Aplicando o Teorema 7.5, segue-se que $g_*: H_q(X) \to H_q(K^{n+1})$ é injectiva se $q < n$ e surjectiva se $q \leq n$. Como $i_*: H_q(K^{n+1}) \approx H_q(A)$ para $q \leq n$, segue-se que, fazendo $g' = i \circ g: X \to A$, temos g'_* ismorfismo para $q < n$ e $g'_*: H_n(X) \to H_n(A)$ é surjectiva. Mas, $H_n(A) \approx H_n(K^{n+1}) \approx H_n(X)$. Portanto $g'_*: H_n(X) \to H_n(A)$ é um homomorfismo surjectivo de $H_n(X)$ sobre um grupo isomorfico a êle. Como os grupos são finitamente gerados, não é dificil verificar que

$g'_*: H_n(X) \approx H_n(A)$. Levando em conta que, $H_q(X) = H_q(A) = 0$ para $q > n$, vemos que $g'_*: H_q(X) \approx H_q(A)$ para todo $q \geq 0$. O Corolario 7.7 nos assegura que g' é uma equivalencia de homotopia. O Teorema 6.1 afirma, finalmente, que o CW-complexo finito A é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito Q, completando assim a demonstração do Teoremas 14.7

O teorema seguinte enuncia três condições equivalentes para que um espaço simplesmente conexo seja do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito.

Teorema 14.8 - <u>Seja X um espaço conexo por caminhos e simplesmente conexo. Então, as seguintes condições são equivalentes:</u>

(a) <u>X é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito;</u>

(b) - $X \in \alpha'$ <u>os grupos</u> $H_q(X)$ <u>são finitamente gerados e nulos a partir de certa dimensão</u>;

(c) -$X \in \alpha'$, <u>os grupos</u> $\pi_q(X)$ <u>são finitamente gerados</u> e $\Delta X < \infty$;

(d)-X <u>é dominado por um poliedro finito</u>.

São verificações simples que (a) implica (b) , (c) e (d). O Teorema 14.7 afirma que (b) implica (a). A implicação (d) $\Rightarrow$ (b) segue do fato de serem os $H_q(X)$ isomórficos a fatores diretos dos grupos de homologia de um poliedro finito. Resta mostrar que (c) implica (a). De fato, seja $\Delta X = n$. Então $H_q(X) = 0$ para $q > n$. Como os $\pi_q(X)$ são finitamente gerados, a demonstração do Teorema 14.7 pode se aplicar, donde concluimos (a). As restantes implicações seguem-se por transitividade.

<u>Observação</u> Se X é um ANR, a exigencia $X \in \alpha'$ nas condições (b) e (c), do teorema precedente, está automaticamente satisfeita.

Corolário 14.9 - <u>Se</u> X <u>é um ANR simplesmente conexo, as seguintes condições são equivalentes</u>:

(1) $X \simeq$ <u>poliedro finito</u>;

(2) $H_q(X)$ <u>são finitamente gerados e nulos a partir de certa dimensão</u>;

(3) X <u>é dominado por um poliedro finito</u>.

Teorema 14.10 - <u>Se um espaço</u> $X \in \alpha$, <u>simplesmente conexo, é compacto, então</u> X <u>é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito</u>.

O espaço X sendo compacto e dominado por um CW-complexo, segue-se do Lema 13.4 que X é dominado por um CW - complexo finito e, portanto, por um poliedro finito. Basta observar que X satisfaz a condição (d) do Teorema 14.8.

Como todo ANR pertence a classe α', o seguinte corolário é consequencia imediata do Teorema 14.10.

Corolário 14.11 - Todo ANR compacto, simplesmente conexo, é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito.

Partindo do Teorema 14.6, podemos demonstrar a seguinte recíproca do teorema de Serre, enunciado em (14.1)

Teorema 14.12 - Seja X um espaço conexo por caminhos, simplesmente conexo, tal que os grupos $\pi_q(X)$ sejam finitamente gerados para $q \geqslant 2$. Então os grupos de homologia $H_q(X)$ são finitamente gerados para $q \geqslant 0$.

Segundo o Teorema 14.6, existe um CW-complexo K tal que K^n é finito para todo $n \geqslant 0$, e uma aplicação $f: K \to X$ que induz $f_{\#}: \pi_q(K) \approx \pi_q(X)$ para todo $q > 0$. Portanto $f_*: H_q(K) \approx H_q(X)$ para todo $q \geqslant 0$ (Teorema 7.5). Empregando-se o complexo de cadeias introduzido no § 9, vê-se que $C_q(K) = H_q(K^q, K^{q-1}) \approx Z^{k_q}$, onde k_q é o número de q-células de K. Como K^q é finito para todo $q \geqslant 0$, segue-se que os grupos de cadeias $C_q(K)$ são de posto finito para todo $q \geqslant 0$. Logo $H_q(X) \approx H_q(K)$ são finitamente gerados para todo $q \geqslant 0$.

Observação - Consideremos as seguintes classes de espaços conexos: CW, PLF, PF, denotando, respectivamente, CW-complexos, poliedros localmente finitos e poliedros finitos. São validas as inclusões $PF \subset PLF \subset CW$. Os Teoremas 13.1, 13.2 e 14.8 implicam as seguintes afirmações:

(1) Se X é dominado por um $Y \in CW$, existe $Z \in CW$ tal que $X \simeq Z$,

(2) Se X é dominado por um $Y \in PLF$, existe $Z \in PLF$ tal que $X \simeq Z$;

(3) Se $\pi_1(X) = 0$ e X é dominado por um $Y \in PF$, existe $Z \in PF$ tal que $X \simeq Z$.

Se P é o espaço constituido de um único ponto, podemos ainda afirmar,

(4) Se X é dominado por P, então $X \simeq P$.

Vemos que, para as classes acima, a relação de dominação delimita, por assim dizer, o tipo de homotopia de um espaço. A condição $\pi_1(X) = 0$ no terceiro enunciado não é necessária. É plausível que (3) possa valer sem a restrição $\pi_1(X) = 0$. Observemos, porém, que, sem a restrição $\pi_1(X) = 0$ podem valer as condições (a), (b) e (d) do Teorema 14.8 e ser falsa a condição (c). Basta para isso considerar $X = S^1 \vee S^2$, isto é, o espaço constituido de um circulo e de uma 2-esfera com um único ponto em comum. É fácil verificar que $\pi_2(X)$ não é finitamente gerado.

§15 - <u>Algumas aplicações</u>.

(I) - <u>Variedades topológicas</u> - As variedades topológicas conexas paracompáctas são ANR (Teorema 2.3) Do Teorema 13.2 e do Corolário 14.11 decorrem os seguinte resultados:

<u>Teorema</u> 15.1 - <u>Toda variedade topológica conexa, paracompacta é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro localmente finito</u>.

<u>Teorema</u> 15.2 - <u>Toda variedade topológica conexa, simplesmente conexa e compacta é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito</u>.

Observação - O teorema de triangulação de uma variedade topológica só foi demonstrado, até o presente momento, para dim ≤ 3. Para a dimensão 2, é um resultado clássico. Em dimensão 3, foi demonstrado por métodos extremamente laboriosos por E. Moise no início da presente década. Os resultados mais fracos, acima guardam ainda seu interesse.

(II) <u>H-espaços e realisabilidade de grupos de homotopia</u>.

Um espaço topológico X diz-se um H-espaço se fôr definida uma composição contínua $X \times X \to X$, que será denotada por $(x,y) \to x \vee y$ gozando da seguinte propriedade: existe um elemento $e \in X$ para qual as aplicações $x \to e \vee x$ e $x \to x \vee e$ são homotópicas à aplicação identica de X. São exemplos de H-espaços : (1) os grupos topológicos; (2) o espaço de laços de um espaço conexo por caminhos Y (veja §4), munido da lei de composição usual

$\mu, \lambda \in \Omega(Y) \to \lambda * \mu \in \Omega(Y)$, onde

$$\lambda * \mu(t) = \begin{cases} \lambda(2t) & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \mu(2t-1) & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

O elemento e pode ser tomado como o caminho constante $I \to \{y_0\}$, onde y_0 é o ponto de base escolhido em Y.

Existe um espaço fibrado (no sentido de Serre [21]) de base Y, contraível, tal que a fibra sobre o ponto y_0 seja precisamente o espaço de laços de Y relativo ao ponto base y_0. De fato, seja E o espaço de todos os caminhos de Y com origem em y_0 munido da topologia da convergencia compacta. A função $q: E \to Y$ que aplica o caminho $\lambda \in E$ sobre o ponto $\lambda(1)$ é uma aplicação contínua de E sobre Y. O triplo (E,q,Y) é um espaço fibrado no sentido de Serre, isto é, goza da propriedade do levantamento das homotopias para poliedros finitos (veja [21] p. 481). Temos $q^{-1}(y_0) = \Omega(Y)$. O espaço E é contraível. De fato, a aplicação $I \times E \to E$, definida por $(\theta, \lambda) \to \lambda_\theta$ onde $\lambda_\theta(t) = \lambda(\theta t)$ é a deformação desejada. Portanto, $\pi_q(E) = 0$ para todo $q \geq 0$. A sequencia exata de homotopia do espaço fibrado,

$$\ldots \to \pi_q(E) \to \pi_q(Y) \to \pi_{q-1}(\Omega(Y)) \to \pi_{q-1}(E) \to \ldots$$

fornece, então, os isomorfismos $\pi_q(Y) \approx \pi_{q-1}(\Omega(Y))$ para $q \geq 1$.

A existência de uma estrutura de H-espaço sobre um espaço, introduz algumas limitações sobre os grupos de ho -

motopia. Por exemplo, o grupo $\pi_1(X)$ é abeliano. É natural interrogar se, dada uma sequência qualquer de grupos abelianos $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$, existe um H-espaço X tal que $\pi_q(X) \approx \pi_q$ para $q \geqslant 1$. Se nos limitassemos, por exempo, a grupos de Lie, a resposta seria negativa, pois $\pi_2(G) = 0$ para todo grupo de Lie. S.T.Hu [16] deu uma resposta afirmativa no caso dos espaços H quaisquer, empregando na sua construção os $K(\pi, n)$. Mostraremos a seguir que, se os grupos abelianos forem enumeráveis, é possível enunciar algo mais preciso.

Teorema 15.3 - <u>Dada uma sequência</u> $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$ <u>de grupos abelianos enumeráveis, existe um poliedro localmente finito</u> (conexo) Q, <u>que admite uma estrutura de H-espaço, tal que</u> $\pi_q(Q) \approx \pi_q$ <u>para todo</u> $q \geqslant 1$.

De fato, os grupos π_q sendo enumeráveis, existe, conforme o teorema de realisabilidade de Whitehead [26], um poliedro localmente finito P com os seguintes grupos de homotopia: $\pi_1(P) = 0$ e $\pi_{q+1}(P) \approx \pi_q$ para $q \geqslant 1$. Como P é um ANR simplesmente conexo, o espaço de laços $\Omega(P)$ de P é um ANR (Teorema 4.1). Portanto, segundo o Corolário 13.3, $\Omega(P)$ é do mesmo tipo de homotopia que um poliedro (conexo) localmente finito Q. Temos os seguintes isomorfismos:

$$\pi_q(Q) \approx \pi_q(\Omega(P)) \approx \pi_{q+1}(P) \approx \pi_q \text{ para } q \geqslant 1.$$

Sejam $f: \Omega(P) \to Q$ e $g: Q \to \Omega(P)$ aplicações tais que $f \circ g \simeq 1$ e $g \circ f \simeq 1$. Não é difícil verificar que a lei de composição $Q \times Q \to Q$ definida por $(z_1, z_2) \to z_1 \vee z_2 = f(g(z_1) * g(z_2))$, onde $*$ indica a composição em $\Omega(P)$, define uma estrutura de H-espaço em Q. O elemento <u>e</u> para esta estrutura pode ser tomado como a imagem por f do laço constante de $\Omega(P)$. Portanto, Q é um H-espaço com os grupos de homotopia desejados.

<u>Observação</u> - A construção de S.T.Hu [16] não dá, em geral, um espaço localmente compacto, mesmo quando os π_q são finitamente gerados. A construção acima realisa o H-espaço como poliedro localmente finito, realização esta que é um ANR localmente compacto.

(III) <u>A relação de dominação</u>. Observamos, no Capítulo I, que a relação "Y domina X" é transitiva e reflexiva. A relação precedente é compativel com a relação de mesmo tipo de homotopia, $X \simeq Y$. Isto é, $X' \simeq X$ e Y domina X acarretam Y domina X' e por outro lado, $Y' \simeq Y$ e Y domina X acarretam Y' domina X. Assim, a relação "Y domina X" define uma relação transitiva e reflexiva nas classes de equivalência da relação $X \simeq Y$.

Seja α'' a subclasse de α definida pelas condições: (1) $X \in \alpha$; (2) $\pi_1(X) = 0$; (3) os grupos $\pi_q(X)$ são finitamente gerados para $q \geqslant 2$. São válidas as inclusões $\alpha'' \subset \alpha' \subset \alpha$. Mostraremos a seguir que para a classe α'', X domina Y e Y domina X acarretam $X \simeq Y$.

Lema 15.4 - <u>Se F e G são grupos abelianos finitamente gerados e cada um é isomorfico a um fator direto do outro, então, $F \approx G$.</u>

Por hipótese, existem grupos abelianos finitamente gerados M e N tais que $G \approx F \oplus M$ e $F \approx G \oplus N$. Seja $\theta : G \to F \oplus M$ o homormorfismo bijectivo em questão, 1: o automorfismo identico de N. Então,

$(\theta,1): G \oplus N \to (F \oplus M) \oplus N \approx F \oplus (M \oplus N)$. Seja $\theta' : F \to G \oplus N$ o homomorfismo bijetivo. Então $\theta' \circ (\theta, 1)$ é um homomorfismo bijectivo de F sobre $F \oplus (M \oplus N)$, Aplicando o teorema de estrutura dos grupos abelianos finitamente gerados, $M \oplus N = (0)$. Logo $M \approx N \approx (0)$ e $\theta : G \to F \oplus (0)$ é bijectivo; logo $G \approx F$.

Teorema 15.5 - Sejam $X, Y \in \alpha''$. Então, X domina Y e Y domina X acarretam $X \simeq Y$.

As hipóteses acarretam que, para todo $q \geqslant 0$, os grupos $\pi_q(X)$ e $\pi_q(Y)$ são isomorficos a fatores diretos um do outro. Como eles são finitamente gerados, o Lema precedente acarreta que $\pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para todo $q \geqslant 0$. Como Y domina X, existem aplicações $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ tais que $g \circ f \simeq 1_X$. Portanto $f_{\#} \circ g_{\#} = 1$ e o homomorfismo $f_{\#}: \pi_q(X) \rightarrow \pi_q(Y)$ aplica $\pi_q(X)$ biunivocamente sobre um fator direto de $\pi_q(Y)$. Levando em conta que $\pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ (isomorfismo algébrico) e recorrente ao teorema de estrutura dos grupos abelianos finitamente gerados, concluimos que $f_{\#}: \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ é bijectiva para todo $q \geqslant 0$. Finalmente, aplicando o Teorema 7.6, concluimos que f é uma equivalência de homotopia.

Corolário 15.6 - Se X e Y são ANR compactos, simplesmente conexos, então, Y domina X e X domina Y acarretam $X \simeq Y$.

Observação - No caso em consideração ($X, Y \in \alpha''$), a relação definida por "X domina Y" nas classes de equivalência da relação $X \simeq Y$ é uma relação de ordem.

§16 - Algumas observações sobre a classe α de espaços.

A classe α (espaços conexos por caminhos que são dominados por CW-complexos) foi introduzida por J.H.C.Whitehead [25] em conexão com o Teorema 7.6. De acôrdo com o Teorema 13.1, α pode ser descrita, alternativamente, como a classe dos espaços conexos por caminhos que são do mesmo tipo de homotopia que CW-complexos. A classe α inclui, em particular os CW-complexos. Na classe dos espaços conexos por caminhos, a subclasse α é saturada para a relação de equivalência $X \simeq Y$. Isto é, se $X \simeq Y$ e $Y \in \alpha$, então $X \in \alpha$.

Seja β uma classe de espaços conexos por caminhos. Seja (P) a seguinte propriedade: "Se $X, Y \in \beta$ e uma aplicação $f: X \to Y$ induz $f_{\#}: \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para todo $q \geq 0$, então f é uma equivalência de homotopia". A classe α goza desta propriedade (Teorema 7.6) Por outro lado, se uma classe β de espaços conexos por caminhos contem α e goza da propriedade (P então $\beta = \alpha$. Em outras palavras, <u>a classe α é maximal relativa à propriedade</u> (P).

De fato, seja $X \in \beta$ e consideremos o politopo singular $|S(X)|$ do espaço X. Como $|S(X)|$ é um CW-complexo, pertence a α e, portanto a β. A aplicação canônica $\varphi: |S(X)| \to$ induz isomorfismos $\varphi_{\#}: \pi_q(|S(X)|) \approx \pi_q(X)$ para todo $q \geq 0$. Como $|S(X)|$, $X \in \beta$, a propriedade (P) acarreta $|S(X)| \simeq X$. Logo $X \in \alpha$ e $\beta = \alpha$.

A classe α inclui, como já vimos, os poliedros localmente finitos, os ANR, os CW-complexos quaisquer. Um exemplo simples de um espaço de α que não pertence a nenhuma destas classes é o espaço $\hat{X}$ dado no §1 (Exemplo). $\hat{X}$ pertence à classe α por ser contraível, mas não pertence à nenhuma das três classes mencionadas acima por não ser localmente contraível.

Consideremos o seguinte exemplo, devido a K. Borsuk [3], de um espaço métrico, compacto, localmente contraível que não é um ANR (sua dimensão é, portanto, infinita). Seja Q o paralelotopo de Hilbert. A métrica $\rho((x_i),(y_i)) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$ torna Q um espaço métrico, compacto. Seja $A_0 = \{x \in Q \mid x_1 = 0\}$. A_0 é um subespaço fechado de Q homeomórfo a Q. Seja

$$A_k^{\bullet} = \left\{x \in Q \mid \frac{1}{k+1} \leq x_1 \leq \frac{1}{k} \text{ e } x_i = 0 \text{ para } i > k\right\}.$$

A_k é um hiperparalelepipedo e sua fronteira $B_k = \dot{A}_k$ é homeomórfa a uma $(k-1)$-esféra. Façamos $B = A_0 \cup \bigsqcup_{k=2}^{\infty} B_k$. B é um subespaço fechado e conexo de Q. Borsuk [3] demonstra as seguintes propriedades de B: (1) B é localmente contraível; (2) Para todo $k \geqslant 2$, existe uma retração $r_k : B \to B_k$. A propriedade (2) acarreta $H_q(B) \neq 0$ para todo $q \geqslant 0$. De fato, a existência da retração r_k acarreta que $H_{k-1}(B_k) \approx Z$ é isomórfico a um fator direto de $H_{k-1}(B)$ para $k \geqslant 2$.

O espaço métrico compacto, localmente contraível B não pertence à classe α. De fato, suponhamos $B \in \alpha$. Neste caso, a aplicação canônica $\varphi_B : |S(B)| \to B$ seria uma equivalência de homotopia, de acordo como o Teorema 13.1. Mas $B \simeq |S(B)|$ e B compacto acarretam (Lema 13.4) que B é dominado por um subcomplexo finito de $|S(B)|$, contradizendo a propriedade $H_q(B) \neq 0$ para todo $q \geqslant 0$. Portanto $B \notin \alpha$.

Segue-se em particular, que $\varphi_B : |S(B)| \to B$ constitui um <u>exemplo de uma equivalência de ∞-homotopia que não é uma equivalência de homotopia</u>. (Veja a observação final de §7).

P. Olum [20] demonstrou que, para complexos simpliciais geométricos, um subcomplexo minimal determina o tipo de homotopia do espaço. É fácil generalizar o resultado de Olum para a classe α.

<u>Teorema</u> 16.1 - <u>Sejam</u> $X, Y \in \alpha$, $M(X)$ <u>e</u> $M(Y)$ <u>subcomplexos minimais de</u> $S(X)$ <u>e</u> $S(Y)$ <u>respectivamente</u>. <u>Então</u>, $X \simeq Y$ <u>se, e somente se</u>, $M(X)$ <u>e</u> $M(Y)$ <u>são semi-simplicialmente isomórficos</u>.

De fato, se $f : X \to Y$ é uma aplicação induzindo isomorfismos $f_{\#} : \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para todo $q \geqslant 0$, então, dado u[m] subcomplexo minimal $M(X)$ de $S(X)$, existe um subcompleso minimal $M'(Y)$ de $S(Y)$ gozando da seguinte propriedade. A restrição a $M(X)$ de aplicação semi-simplicial $F:S(X) \to S(Y)$, definida por f, é um isomorfismo semi-simplicial de $M(X)$ sobre $M'(Y)$ (Veja [19] ou [20]). Vê-se que a condição é necessária, observando, agora, que $M(Y)$ e $M'(Y)$ são semi-simplicialmente isomórficos.

Reciprocamente, seja $\psi: M(X) \to M(Y)$ um isomorfismo semi-simplicial de $M(X)$ sobre $M(Y)$. Então, a aplicação $\psi': |M(X)| \to |M(Y)|$ induzida por ψ é um homeomorfismo (Veja §11) Consideremos o seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd}
{|M(X)|} \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & {|M(Y)|} \arrow[d, "\varphi_Y"] \\
X & Y.
\end{tikzcd}$$

Como $X \in \alpha$, $\varphi_X: |M(X)| \to X$ é uma equivalência de homotopia. Seja $g:X \to |M(X)|$ um inverso de homotopia de φ_X. Então, verifica-se imediatamente que $\theta = \varphi_Y \circ \psi' \circ g: X \to Y$ induz isomorfismos $\theta_{\#}: \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para todo $q \geqslant 0$. A hipótese $X, Y \in \alpha$ e o Teorema 7.6 asseguram, finalmente, que $\theta: X \to Y$ é uma equivalência de homotopia.

Voltando ao exemplo da aplicação $\varphi_B: |S(B)| \to B$, observemos que como $\varphi_{B\#}$ é bijectiva em todas as dimensões, um subcomplexo minimal $M(|S(B)|)$ é semi-simplicialmente isomórfico a um subcomplexo minimal $M(B)$. No entanto, B e $|S(B)|$ <u>não</u> têm o mesmo tipo de homotopia. Esta observação mostra, igualmente, que os espaços da classe α não podem ser caracterizados pelos invariantes algébricos usuais da homotopia e da homologia.

APENDICE A

Lema - *Seja P_n, $n \geq 2$, o espaço projetivo complexo de dimensão n, $P_1 \subset P_n$ uma reta projetiva complexa, Y um espaço topológico tal que $\pi_q(Y) \approx \pi_q(P_n)$, para $q \leq 2n$. Então, toda aplicação $f: P_1 \to Y$ pode ser prolongada a uma aplicação $\bar{f}: P_n \to Y$.*

Podemos supor P_n triangulado segundo um complexo simplicial K, de tal modo que P_1 corresponda a um subcomplexo $L \subset K$. Desta maneira (P_n, P_1) torna-se um par trignaulado (K,L). Consideremos uma aplicação $f: P_1 \to Y$. Como $\pi_1(Y) = 0$, um argumento simples mostra que f é homotópica a uma aplicação $f_1: L \to Y$ tal que $f_1(L^1) = \{y_0\}$, onde y_0 é um ponto fixado de Y. Prolonguemos f_1 a uma aplicação contínua $f_1^!: L \cup K^1 \to Y$ fazendo $f_1^!(K^1) = \{y_0\}$. Como $Z^2(K,L: \pi_1(Y)) = 0$, o cociclo de obstrução $c^2(f_1^!)$ é nulo e $f_1^!$ pode, portanto, ser prolongada a uma aplicação $f_2^!: L \vee K^2 \to Y$. Da sequencia exata de cohomologia do par (K,L) tiramos facilmente que $H^3(K,L: \pi_2(Y)) = 0$. Segue-se que o cociclo de obstrução $c^3(f_2^!)$ é cohomólogo a zero. Segundo [5; Extension Theorem I], existe uma aplicação $f_3^!: L \cup K^3 \to Y$ tal que $f_3^! | L = f_2^! | L$. Como $\pi_j(Y) = 0$ para $3 \leq j \leq 2n$, segue-se que $H^{j+1}(K,L; \pi_j(Y)) = 0$, $3 \leq j \leq 2n$. Aplicando-se sucessivas vezes o teorema citado, chegamos a uma aplicação $f': K \to Y$ tal que $f' | L = f_1$. O teorema da extensão das homotopias assegura, finalmente, a possibilidade de prolongar f a uma aplicação $\bar{f}: K \to Y$.

* * * * *

APENDICE B

Seja X um espaço topológico, (A_α) um recobrimento fechado de X. Diz-se que X tem a *topologia fraca no sentido de Morita* relativa a familia (A_α), se estiverem sa -

tisfeitas as seguintes condições: (M.1) A reunião de qualquer subfamília de (A_α) é um conjunto fechado de X; (M.2) Toda parte Y de X tal que $Y \cap A_\alpha$ é fechado para todo α, é fechada em X.

K. Morita (Proc. Japan Acad. 29 (1953), 537 - 43, Theorem 2) demonstra o seguinte teorema.

Teorema - Seja X um espaço topológico com a topologia fraca no sentido de Morita relativa a um recobrimento fechado (A_α) de X. Se cada A_α satisfizer ao axioma (O_v) de Bourbaki([4], Ch. IX), então o espaço X satisfará ao axioma (O_v).

O teorema acima serve para estabelecer, em dois casos que precisamos no texto, que complexos construidos pela colagem de celulas são espaços de Hausforff.

Caso I - Construção da realização geométrica $|A|$ de um complexo semi-simplicial A (veja §11; empregaremos as notações daquele §). Para estabelecer que $|A|$ é um espaço separado, basta mostrar que o recobrimento fechado $(\bar{w}_\sigma)_{\sigma \in A}$ de $|A|$ satisfaz às condições (M.1) e (M.2) de Morita. De fato, os $\bar{w}_\sigma$ sendo compactos, são normais. Aplicando-se o teorema acima, vê-se que $|A|$ satisfaz ao axioma (O_v) de Bourbaki. Por outro lado, é evidente que $|A|$ satisfaz ao axioma (T_1): todo conjunto reduzido a um ponto é fechado. Os axiomas (T_1) e (O_v) implicam o axioma de Hausforff. Portanto, $|A|$ é separado e normal.

Basta verificar que $(\bar{w}_\sigma)_{\sigma \in A}$ satisfaz à condição (M.1), visto que a topologia definida em $|A|$ satisfaz à condição (M.2). Observemos, primeiramente, que para quaisquer que seja $\sigma, \sigma' \in A$, se $\bar{w}_\sigma \cap \bar{w}_{\sigma'} \neq \emptyset$, temos

$$\bar{w}_\sigma \cap \bar{w}_{\sigma'} = \Big(\bigsqcup_{\tau < \sigma} w_\tau\Big) \cap \Big(\bigsqcup_{\tau' < \sigma'} w_{\tau'}\Big) = \bigsqcup_{\tau < \sigma, \sigma'} w_\tau = \bigsqcup_{\tau < \sigma, \sigma'} \bar{w}_\tau .$$

O número de faces de um simplexo sendo finito, a reunião a di-

reita é fechada em $\bar{w}_\sigma$ e $\bar{w}_{\sigma'}$. Seja $(\bar{w}_{\sigma_\iota})_{\iota \in J}$ uma subfamilia qualquer de $(\bar{w}_\sigma)_{\sigma \in A}$ e façamos $B = \bigcup_{\iota \in J} w_{\sigma_\iota}$. Então, $B \cap \bar{w}_\sigma = \bigcup_{\iota \in J} (\bar{w}_{\sigma_\iota} \cap \bar{w}_\sigma) = \bigcup_{\iota \in J} (\bigcup_{\tau < \sigma, \sigma_\iota} \bar{w}_\tau)$.
O conjunto a direita sendo uma reunião de faces (fechadas) de $\bar{w}_\sigma$, é fechado em $\bar{w}_\sigma$. Como $B \cap \bar{w}_\sigma$ é fechado em $\bar{w}_\sigma$ para todo $\sigma \in A$, segue-se que B é fechado em $|A|$.

<u>Caso</u> II - Construção empregada na demonstração do Teorema 14.6. Observemos, primeiramente, que um complexo finito obtido pela colagem sucessiva de celulas (veja §14) é um espaço separado (compacto). Para estabelecer êste fato, emprega-se um argumento por indução sôbre o número de celulas, que depende do seguinte lema.

<u>Lema</u> - <u>Seja K um CW-complexo finito, E^n uma celula fechada disjunta de K e $K' = E^n \cup_\varphi K$ o espaço obtido pela colagem da celula E^n a K segundo uma aplicação $\varphi : \dot{E}^n \longrightarrow K$ tal que $\varphi(\dot{E}^n) \subset K^{n-1}$. Então K' é um espaço separado.</u>

Basta mostrar que a relação de equivalência $\mathcal{R}$ que define a colagem no espaço soma $E^n \cup K$ é fechado; $E^n \cup K$ sendo compacto, segue-se que o espaço quociente será separado. A relação $\mathcal{R}$ tem as seguintes classes de equivalência: se $x \in (E^n - \dot{E}^n) \cup (K - \varphi(\dot{E}^n))$, $C_x = \{x\}$; se $x \in \dot{E}^n$, $C_x = \{\varphi(x)\} \cup \varphi^{-1}(\varphi(x))$; e se $x \in \varphi(\dot{E}^n)$, $C_x = \{x\} \cup \varphi^{-1}(x)$. Verifica-se facilmente que (C_x) é uma partição de $E^n \cup K$. Seja F um conjunto fechado qualquer de $E^n \cup K$. O saturado de F segundo a relação $\mathcal{R}$ e $F \cup \varphi(\dot{E}^n \cap F) \cup \varphi^{-1}(\varphi(\dot{E}^n) \cap F)$. Como $\dot{E}^n$ é fechado em E^n e $\varphi(\dot{E}^n)$ é fechado em K, segue-se que o saturado de F é fechado. O espaço $E^n \cup_\varphi K = (E^n \cup K)/\mathcal{R}$ é <u>separado</u> e, portanto, <u>compacto</u>. A condição $\varphi(\dot{E}^n) \subset K^{n-1}$ assegura que K' seja um CW-complexo.

Voltando a construção empregada na demonstração do Teorema 14.6, vemos que os K_n são CW-complexos fini - tos (de acordo com o Lema precedente). Para todo $n \geqslant 0$, $K_n \subset K_{n+1}$ e se $m < n$, K_m é fechado em K_n (Propriedade (5.2)). A reunião $K = \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m$ é munida da topologia fraca (isto é, A fechado em $K \Leftrightarrow A \cap K_m$ fechado em K_m para todo $m \geqslant 0$). Segue-se facilmente que todo K_n é fechado em K. Basta verificar que a condição (M.1) de Morita está satisfeita, para poder apli - car o Teorema. Seka (K_{m_i}) uma subfamilia qualquer de (K_n). Então, $\bigcup_{i \in J} K_{m_i} = K$ ou K_n para algum $n \geqslant 0$, portanto fechada em ambos casos. Um argumento análogo ao que empregamos no Caso I mostra que K é <u>separado</u> e, portanto, <u>normal</u>.

BIBLIOGRAFIA

1) - K.Borsuk: "Uber eine Klasse vom lokal susammenhängenden Räumen", Fund.Math. 19 (1932), 220-242.

2) - K.Bursuk: "Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte", Fund.Math.21 (1933), 91-98.

3) - K. Borsuk - "Sur un espace compact localement contractile qui n'est pas um rétracte absolu de voisinage", Fund-Math. 35 (1948),175-180.

4) - N. Bourbaki: "Topologie Générale," Hermann (Paris.

5) - S.Eilenberg: "Cohomology and continuous mappings". Annals of Mat. 41 (1940), 231-251.

6) - S.Eilenberg & J.A.Zilber: "Semi-simplicial complexes and singular homology", Annals of Mat. 51 (1950, 499-51

7) - S.Eilenberg & N. Steenrod: "Foundations of Algebraic Topology", Princeton, (1952).

8) - R.H.Fox: "A characterization of ANR's", Bull. Amer.Math. Soc. 48 (1942), 271-275.

9) - R.H.Fox: "On topologies for functions spaces", Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 429-432.

10) - J.B.Giever: "On the equivalence of two singular homology theories", Annals of Mat. 51 (1950), 178-191.

11) - P.J.Hilton: "An Introduction to Homotopy Theory", Cambridge Univ. Press (1953).

12) - O.Hanner: "Some theorems on absolute neighborhood retracts". Arkiv för Matematik Bd.1 (1951) 389-408.

13) - S.T.Hu: "Mappings of a normal space into an ANR", Trans. Amer. Math.Soc. 64 (1948), 336-358.

14) - S.T.Hu: "Cohomology and deformation retracts", Proc. Lond.Math.Soc. (2nd.S) 52 (1951), 191-219.

15) - S.T.Hu: "Homotopy Theory" (mimeo.notes) (1950)

16) - S.T.Hu : "On the realizability of homotopy groups and their operations", Pacific Jour. Math.1 (1951), 583-602

17) - S.Lefschtz- "Topics in Topology", Princeton (1942).

18) - S.Lefschtz:: "Algebraic Topology", AMSCP (1942).

19) - C.B.de Lyra; "Minimal complexes and maps", Boletim.Soc. de Mat.de S.Paulo, 7 (1954), 85-98.

20) - P.Olum: "Homotopy type and singular homotopy type", Annals of Math. 60 (1954), 317-325.

21) - J.P.Serre: "Homologie singulière des espaces fibrés", Annals of Math. 54 (1951), 425-505.

22) - G.W.Whitehead: "Homotopy Theory" (lecture notes) Mass. Inst. of Techonology (1953).

23) - J.H.C.Whitehead: "Simplicial spaces, nuclei and m-groups Proc.Lond.Math.Soc.(2nd.S) 45 (1939),243-327.

24) - ----------------: "On the homotopy type of ANR's", Bull. Amer.Math.Soc.54 (1948), 1133-1145.

25) - ----------------: "Combinatorial Homotopy I", Bull.Amer. Math.Soc. 55 (1949), 213-245.

26) - ----------------: "On the realizability of homotopy groups", Annals of Math. 50 (1949), 261-263.

27) - ----------------: "On simply connected 4-dimensional polihedra", Comm.Math.Hevet.22 (1949),48-92.

28) - ----------------: "A certain exact sequence", Annals of Math. 52 (1950), 51-110.

29) - ----------------: "Simple homotopy types", Amer.Jour.of Math. 72 (1950), 1-57.

INDICE

E R R A T A.

Nota: m,n significa: página m, linha n.

1,2 : poledros; leia-se poliedros
4,28 : $\pi_q(P) \approx \pi_p$; leia-se: $\pi_q(P) \approx \pi_q$
5,4 : leia-se: os espaços da classe α^q são
5,17 : nosso; leia-se: nossos
8,15 : (Y,B); leia-se: (Y,X)
8,15 : Consdremos; leia-se: Consideremos
8,26 : leia-se $Z = \{0\} \times X \cup]0,1] \times Q_1$.
10, última: francamente; leia-se fracamente
12,32: TV_t: leia-se V_t
13,15: f-B ---> X; leia-se f:B ---> X
14,7 : Topo; leia-se: Todo
15,25: Dower; leia-se: Dowker
16,26: Espaços; leia-se: Espaço
18,23: n-ximplexos; leia-se: n-simplexo
20,26: complemente; leia-se: complemento
24,2 : $\pi_g(P,p)$; leia-se: $\pi_q(P,p)$
24,6 : CW-xomplexo; leia-se: CW-complexo
25,23: bom; leia-se: bem
27,9 : (z,X); leia-se: (Z,X)
27,12: $\pi_q(Z?X)$; leia-se: $\pi_q(Z,X)$
27,14: exate; leia-se: exata
27,17: leia-se: como $f_* = r_* \circ i_*$ e r_* é bijectiva
27,28: $gf \simeq_{n} 1$; leia-se $gf \simeq_n 1$
29,11: cortar última palavra.
29,13: leia-se: $\pi_q(S^n) \approx \pi_q(X)$
29,17: HG_1 e G_2; leia-se: G_1 e G_2
30, : No Teorema 8,3 todos X são maiúsculos
30,17: (veja Apêndice I); leia-se: (veja Apêndice A)
32,11: leia-se: $Y = S_1^n \vee \dots \vee S_k^n$
32, linhas 26-30, leia-se: Portanto $f_\#: \pi_q(Y) \approx \pi_q(X)$ para $q \leqslant n$. Como $\pi_1(Y) = \pi_1(X) = 0$, temos $f_*: H_q(Y) \approx H_q(X)$ para $q \leqslant n$ (veja demonstração de 8.1); e como $H_q(X) \approx H_q(Y) = 0$ para $q > n$, f_* é bijectiva para todos $q \geqslant 0$. Segue-se do Corolário 7.7 que f é uma equivalência de homotopia.

33,3 : puzermos; leia-se: supuzermos

33,17: leia-se: $g' \circ f' = g \circ f' = g \circ f \simeq 1_X$

34,5 : Ab; leia-se: Ao

35,18: leia-se: $\bar{H}_q(K,A) \approx H_q(K,A)$ <u>para</u> <u>todo</u> $q \geqslant 0$.

37,20: leia-se: $(a_0 a_1 \ldots a_q)^{(i)} = (a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots a_q)$

39,12: leia-se: $\mu_\sigma : \Delta_p \longrightarrow Cl\ w_\sigma$

39,18: leia-se: $\mu_\sigma(\xi) = (\{\tau\}, \sqrt{}_\tau(\xi))$,

40,12: leia-se: $|A^p| = |A|^p$

41,18: leia-se: $\varphi_X : |S(X)| \longrightarrow X$

41,25: leia-se: $\varphi_X : |S(X)| \longrightarrow X$

42, linhas 12-15, leia-se:

$= (\varphi_Y | \bar{w}_{fT}) \circ B_T$

$= (f \circ T) \circ \rho_{fT} \circ B_T$, (definição de φ_Y)

$= f \circ (T \circ \rho_T)$, (visto que $\rho_T = \rho_{fT} \circ B_T$)

$= f \circ (\varphi_X | \bar{w}_T)$

43,12: leia-se: <u>realização</u> <u>geométrica</u> $|A|$ <u>é</u> <u>canônicamente</u> <u>homeomorfa</u> <u>a</u> $\widetilde{E}$.

43,16: leia-se: $k \in E$,

43,17: leia-se: de $|A|$ a êle associada.

44,14: leia-se: $\varphi_K \,||A|$

44,16: leia-se: $\varphi_K | \,|A|$

44,25: leia-se: $\varphi_Q | \,|A'|$

45,1 : leia-se: Então $f'' : Q \longrightarrow |S(X)|$

45,13: leia-se: $\varphi_\# : \pi_q(|S(X)|) \approx \pi_q(X)$ <u>para</u> <u>todo</u> $q \geqslant 0$.

46,14: <u>compactíveis</u>; leia-se: <u>compatíveis</u>

48,10: leia-se: $\bar{P}_T | w_{T(i)} \times I = \bar{P}_{T(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant q$.

48,20: leia-se: $\psi' \circ i_0$ = aplicação idêntica de $|S(X)|$.

49,18: leia-se: (c) $F(y,t) = y$

49,21: leia-se: $S^{n-1} = E^n_+ \cap E^n_- = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$.

49,27: leia-se: $f \mid S^{n-1} = f' \mid S^{n-1}$

51,16: leia-se: $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$

52,19: imedita; leia-se: imediata

53, última: leia-se: $g \circ f \simeq 1_X$.

57,11: leia-se: $\theta_i : E_i^{n+1} \longrightarrow S^n$

58,1 : adicionar ao fim da linha: a a-

59,25: leia-se: geradores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$

60,14: leia-se: $\beta_1, \ldots, \beta_m$

60,25: leia-se: $f_r \mid e_i^{r+1} = g_i' \mid E_i^{r+1} - \dot{E}_i^{r+1}$

61,4 : leia-se: $f'_{r\#} = f_{r\#} \circ j_{r\#}$

61,14: leia-se: $f_{r\#} : \pi_q(K_r) \approx \pi_q(X)$ para $q \leqslant r$.

61,21: leia-se: $n \geqslant 0$.

61,23: leia-se: $\pi_q(K_r) \approx \pi_q(K)$ para $q \leqslant r$. Portanto,

$f_{\#} : \pi_q(K) \approx \pi_q(X)$ para

62,5 : leia-se: Como $X \in \alpha'$

63,1 : leia-se: para $q > n$ por hipótese

63,última: leia-se: $q \leqslant n+1$

64,última: leia-se: O trecho da sequência

65,5 : leia-se: $H_{n+1}(A) = H_{n+2}(A) = 0$

65,6 : leia-se: $H_q(A) = 0$ para $q > n+2$.

69,23: leia-se: $(\theta, \lambda) \longrightarrow \lambda_\theta$

71,27: $\theta' \circ (\theta,1)$; leia-se: $(\theta,1) \circ \theta'$

73,11: leia-se: $\varphi : |S(X)| \longrightarrow X$

73,27: eubespaço; leia-se: subespaço

76,9 : trignaulado; leia-se: triangulado

78,18: fechado; leia-se: fechada

C O R R I G E N D A.

p. 28 - No lugar do enunciado do Teorema 7.8, leia-se

Teorema 7.8 - Sejam $X, Y \in \alpha$ e $N = \max(\Delta X, \Delta Y)$. Então $f: X \longrightarrow Y$ é uma equivalência de $(N-1)$-homotopia se, e sòmente se $f_{\#}: \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para $q \leqslant N-1$.

p. 28 - Omitir a observação final do §7.

p. 55 - No Teorema 14.3, adicionar as hipóteses $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = 0$.

p. 56 - Linhas 1-5, substituir por:

Observemos agora que, como X e Y são simplesmente conexos, se $f \simeq_n f': X \longrightarrow Y$, então $f_{\#} = f'_{\#}: \pi_q(X) \longrightarrow \pi_q(Y)$ para $q \leqslant n$. De fato, sejam $q \leqslant n$, $\alpha \in \pi_q(X)$ um elemento qualquer e $\varphi: S^q \longrightarrow X$ um representante de α. Como $f \simeq_n f'$, segue-se por definição que $f\varphi \simeq f'\varphi$, isto é $f_{\#}\alpha = f'_{\#}\alpha$. Como $f: X \longrightarrow Y$ é, por hipótese uma equivalência de n-homotopia, existe uma aplicação $g: Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq_n 1_Y$ e $g \circ f \simeq_n 1_X$. Da propriedade que acabamos de demonstrar, segue-se, então que $f_{\#} \circ g_{\#} = 1$, $g_{\#} \circ f_{\#} = 1$ em dimensões $q \leqslant n$. Logo, da hipótese de ser f uma equivalência de n-homotopia, segue-se que $f_{\#}: \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para $q \leqslant n$.

Por outro lado, é sabido (Veja: Postnikov, Amer. Math. Soc. Transls., Ser. 2, vol. 7, p. 124) que os politopos singulares $|S(X)|$ e $|S(Y)|$ podem, mediante duas subdivisões baricêntricas, serem decompostos como complexos simpliciais (poliedros). P. Olum (Veja [20], theorem I) mostrou que, para poliedros, as noções de "tipo de n-homotopia" e "tipo de n-homotopia singular" coincidem e demonstrou também ([20], (4.4)) que se uma aplicação $f: X \longrightarrow Y$ induz os isomorfismos $f_{\#}: \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para $q \leqslant n$, então X e Y têm o mesmo tipo de n-homotopia singular.

Como $\varphi_{X\#}$ e $\varphi_{Y\#}$ são bijectivas em tôdas as dimensões (Teorema 11.5), a comutatividade do diagrama precedente e a condição $f_{\#}: \pi_q(X) \approx \pi_q(Y)$ para $q \leqslant n$ acarretam que $f'_{\#}: \pi_q(|S(X)|) \approx$ $\approx \pi_q(|S(Y)|)$ para $q \leqslant n$. Como observamos acima, nestas condições $|S(X)|$ e $|S(Y)|$ têm o mesmo tipo de n-homotopia singular, donde, aplicando ([20], Theorem I) $|S(X)| \simeq_n |S(Y)|$.

p. 58 - Última linha; em vez de "é uma equivalência de co-homotopia", leia-se: induz isomorfismos $f_{\#}: \pi_q(K) \approx \pi_q(X)$ para todo $q \geqslant 0$.

p. 59 - Teorema 14.6, condição (3), leia-se:

(3) $f|K_n : K_n \longrightarrow X$ induz isomorfismos entre os grupos de homotopia nas dimensões $q \leqslant n$.

p. 62, linha 2, leia-se:

(2) Existe um inteiro $n \geqslant 0$ tal que $\Delta X = n$ (com o que $H_q(X) = 0$ para $q > n$, usando o Teorema 6,5).

p.64, linhas 7-10; substituir por:

De acôrdo com o que vimos acima, no diagrama que precede as flechas verticais e a flecha horizontal de cima são homomorfismos surjectivos. Tendo em vista a comutatividade do diagrama, segue-se que o homomorfismo $\phi: \pi_{n+1}(A) \longrightarrow H_{n+1}(A)$ é surjectivo.

p.66, linhas 1-2; substituir por:

(b) $X \in \alpha'$, os grupos $H_q(X)$ são finitamente gerados e $\Delta X < \infty$.

p. 66 - Condição (2) do Corolário 14.9; leia-se:

(2) $H_q(X)$ são finitamente gerados e $\Delta X < \infty$.

p.74 - linhas 16-18; substituir por:

Segue-se em particular que $\varphi_B: |S(B)| \longrightarrow B$ constitui um exemplo de uma equivalência de homotopia singular (Veja [20]) que não é uma equivalência de homotopia.