OFELIA TERESA ALAS

SEIS PROPOSIÇÕES EQUIVALENTES AO TEOREMA DE ZERMELO

Tese apresentada a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para obtenção do grau de Mestre em Ciências (Matematica)

SÃO PAULO
1967

CAPÍTULO 1

§ 1. Nossas considerações serão baseadas num sistema axiomático da Teoria dos Conjuntos, que indicaremos por (Z) e que, fundamentalmente, é o de Zermelo-Fraenkel, naturalmente sem o Axioma da Escolha (os axiomas de Regularidade e de Substituição podendo, também, ser excluídos), como aparece em [1] (pag. 8-11). As noções primitivas que admitimos são a de conjunto e a relação de pertinência entre dois conjuntos. A partir da noção de inclusão (o conjunto X está contido no conjunto Y, em símbolos $X \subset Y$, se e sòmente se

$$(\forall t)(t \in X \Rightarrow t \in Y)),$$

define-se a igualdade $X = Y$ por: "$X \subset Y$ e $Y \subset X$". Se $X \subset Y$ e $X \neq Y$, então X é parte própria de Y e escrevemos $X \subsetneq Y$. Pôsto isto, os axiomas do sistema a que nos referimos são:

Z_I - Se o conjunto x fôr igual ao conjunto y e êste pertencer ao conjunto A, então x pertencerá ao conjunto A.

Z_{II} - Dados os conjuntos x e y, existe um conjunto A cujos elementos são precisamente x e y.

Z_{III} - Existe um conjunto, $\emptyset$, sem nenhum elemento.

Z_{IV} - Dada uma classe qualquer F, existe um conjunto M cujos elementos são aquêles e sòmente aquêles que pertencem a pelo menos um dos conjuntos de F. (1)

Z_V - Dado um conjunto qualquer A, existe um conjunto B cujos elementos são precisamente os sub conjuntos de A. Indicaremos B pela notação $\mathfrak{P}(A)$.

Z_{VI} - Axioma de Separação Sendo P uma propriedade do elemento genérico x do conjunto E, existe um conjunto A de tal modo que x pertence a A se e sòmente se P. (2).

---

(1) A palavra "classe" é, aqui, sinônimo de "conjunto".

(2) As noções metamatemáticas de frase e propriedade encontram-se definidas em [1] (pag. 9-10) bem como em [3] (paf. 8).

Z_{VII} - Axioma da Infinidade - Existe um conjunto L , ao qual pertence $\emptyset$, e de tal modo se x pertence a L , então $x \cup \{x\} \in L$.

Os conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$; $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ===== que são , respectivamente, os números naturais 0,1,2,3, ===== formam um conjunto, que designaremos por N, contido em L.

§ 2. Neste parágrafo, bem como nos seguintes dêste capítulo nos limitaremos a dar algumas definições e teoremas necessários à nossa exposição. Para os teoremas admitidos sem demonstração, citaremos sempre as fontes onde suas demonstrações podem ser encontradas.

1. Sendo F uma classe de conjuntos, não vazia a intersecção de F, isto é, o conjunto I dos elementos que pertencem a todos os conjuntos da referida classe, existe e é único. O conjunto I será indicado por $\bigcap_{X \in F} X$.

Sendo E um conjunto e A um subconjunto de E, o complementar de A em relação a E, isto é o conjunto I dos elementos de E que não pertencem a A, existe e é único. I será indicado por E - A ou $\complement_E A$.

2. Relação. Dados os conjuntos E e F, chama-se relação entre elementos de E e elementos de F a todo subconjunto $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E \cup F))$ formado por conjuntos do tipo $\{\{x\}, \{x,y\}\}$, com $x \in E$ e $y \in F$. No caso em que E = F dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação sôbre E. Em lugar de $\{\{x\}, \{x,y\}\} \in \mathcal{R}$ escreveremos $x \mathcal{R} y$; a negação de $x \mathcal{R} y$ será indicada por $x \not\mathcal{R} y$.

Função. Dados os conjuntos E e F, chama-se função de E em F a tôda relação, entre elementos de E e elementos de F, tal que para todo $x \in E$ existe um e um só $y \in F$ tal que $x \mathcal{R} y$. O fato de que $x \mathcal{R} y$ será indicado, neste caso, por $y = \mathcal{R}(x)$. E $\mathcal{R} : E \to F$ indicará que $\mathcal{R}$ é uma função de E em F.

Diremos que a função $\mathcal{R}$ é sobrejetora se para todo $y \in F$ existe $x \in E$ tal que $y = \mathcal{R}(x)$. E diremos que a função $\mathcal{R}$ é injetora se, sendo x e z elementos distintos de E, então necessàriamente, tem-se $\mathcal{R}(x) \neq \mathcal{R}(z)$. Finalmente, se a função $\mathcal{R}$ fôr sobrejetora e injetora diremos que $\mathcal{R}$ é bijetora.

3. Relação de equivalência. Uma relação $\mathcal{R}$ sôbre um conjunto E, não vazio, é uma relação de equivalência sôbre E se $\mathcal{R}$ fôr reflexiva, simétrica e transitiva, isto é se

a) $x \mathcal{R} x$ para todo $x \in E$;

b) se $x \mathcal{R} y$, então $y \mathcal{R} x$, quaisquer que sejam x e y de E;

c) se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z$, então $x \mathcal{R} z$ quaisquer que sejam x, y e z de E.

Se $\mathcal{R}$ fôr uma relação de equivalência sôbre o conjunto E, o fato de que $x \mathcal{R} y$ será indicado por $x \equiv y \pmod{\mathcal{R}}$ e lê-se " x é equivalente a y segundo $\mathcal{R}$ ".

Um subconjunto A de E é uma classe de equivalência segundo se $\exists\, x \in E$ tal que A é o conjunto de todos os elementos de E que são equivalentes segundo $\mathcal{R}$ a x. O conjunto das classes de equivalência segundo $\mathcal{R}$ chama-se conjunto quociente de E pela relação de equivalência $\mathcal{R}$ e é denotado por $E/\mathcal{R}$.

4. Família. Sejam E e I dois conjuntos e f uma função de I em E. Para cada $i \in I$, ponhamos $f(i) = x_i$. Neste caso, considerando-se uma variável qualquer, digamos i, f será indicada pelo símbolo $(x_i)_{i \in I}$ e receberá a denominação de família cujo conjunto de índices é I.

No caso particular em que E é uma classe de conjuntos diremos que $(x_i)_{i \in I}$ é uma família de conjuntos.

5. Produto cartesiano de uma família de conjuntos. Seja $(E_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos, chamaremos produto cartesiano da família $(E_i)_{i \in I}$ ao conjunto das famílias $(x_i)_{i \in I}$ tais que $x_i \in E_i$, para

todo $i \in I$. Será denotado por

$$\underset{i \in I}{\pi} E_i$$

No caso particular em que $I = \{1,2\}$ e $(E_i)_{i \in I}$ é tal que E_1 é um certo conjunto A e E_2 é um certo conjunto B, indicaremos $\underset{i \in I}{\pi} E_i$ pelo símbolo $A \times B$; e se $z \in A \times B$, isto é, $z = (x_i)_{i \in \{1,2\}}$, escrevemos $z = (x_1, x_2)$ ao que chamaremos dupla de antecedente x_1 e consequente x_2 .

3. Conjuntos equipotentes. Conjuntos finitos. Teorema de Bernstein-Cantor.

6. Sejam A e B dois conjuntos, diremos que A é equipotente a B se existir uma função bijetora de A em B. Êste fato será indicado por $A \approx B$.

Um conjunto A se dirá finito se a fôr vazio ou, se existir um número natural n maior ou igual a 1 tal que A seja equipotente a $\{1,2,\ldots, n\}$.

No estudo da equipotência entre conjuntos desempenha um papel preponderante o teorema de Bernstein-Cantor. Uma demonstração dêste teorema é encontrada em (1) e (4) . Cumpre notar-se que essa demonstração não depende do Axioma da Escolha.

Teorema de Bernstein-Cantor. - Dados dois conjuntos A e B, se A fôr equipotente a uma parte de B e se B fôr equipotente a uma parte de A, então A é equipotente a B.

Uma consequência dêste Teorema é a seguinte :

(1) $N \times N$ é equipotente a N.

Sendo, agora, X um conjunto qualquer, indicaremos por p (X) o con... nto das partes finitas de X. Pôsto isto, tem-se mais a seguinte conse... ência do Teorema de Bernstein-Cantor :

(2) p(N) é equipotente a N.

Como a consequência (2) será usada muitas vêzes no texto então, de agora em diante, a letra grega φ indicará uma função bijetora de p(N) em N tal que $\varphi(\emptyset) = 0$.

4. Relação de ordem. Conjunto totalmente ordenado. Conjunto bem ordenado .

7. Uma relação $\mathcal{R}$ sôbre um conjunto E é uma relação de ordem sôbre E se fôr reflexiva, antisimétrica e transitiva, isto é, se

a) $x \mathcal{R} x$, para todo $x \in E$;

b) se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x$, então $x = y$, quaisquer que sejam x e y de E ;

c) se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z$, então $x \mathcal{R} z$, quaisquer que sejam x,y e z de E.

Uma relação de ordem, $\mathcal{R}$, sôbre um conjunto E é uma relação de ordem total sôbre E se para todo x e y pertencentes a E tem-se $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$.

Uma relação de ordem $\mathcal{R}$ sôbre um conjunto E é uma relação de boa ordem sôbre E se para todo sub conjunto, não vazio, A de E, existe $z \in A$ tal que $z \mathcal{R} x$ para todo $x \in A$.

Um conjunto no qual está definida uma relação de ordem total $\mathcal{R}$ (de boa ordem) se diz totalmente ordenado (respectivamente, bem ordenado) pela relação de ordem $\mathcal{R}$.

Daqui por diante omitiremos a palavra "relação"; diremos, simplesmente, ordem, ordem total, boa ordem, conjunto totalmente ordenado pela ordem $\mathcal{R}$, etc. Mais ainda, se não houver possibilidade de confusão quanto à ordem $\mathcal{R}$ que estamos considerando, ao invés de conjunto E ordenado pela ordem $\mathcal{R}$ diremos "conjunto E ordenado". Anàlogamente nos outros casos.

Em geral para indicar relações de ordem utilizaremos os símbolos $\leqslant$ e $\leqslant$.

8. Seja E um conjunto ordenado pela ordem $\leqslant$ e F um conjunto ordenado pela ordem $\leqslant$. Diremos que uma função f de E em F é estritamente crescente se para todo x, y ε E, com $x < y$, tem-se $f(x) < f(y)$.

Se E e F são dois conjuntos bem ordenados e f é uma função sobrejetora estritamente crescente de E em F, diremos que E e F são semelhantes.

Segmento. Seja E um conjunto bem ordenado por uma boa ordem que indicaremos por $\leqslant$. Um subconjunto A de E é um segmento de E, relativamente à ordem $\leqslant$, se existe x ε E, verificando $A = \{ y \in E \mid y < x \}$.

Se E e F são dois conjuntos bem ordenados e f é uma aplicação estritamente crescente de E em F, que transforma todo segmento de E num segmento de F, então f, que obviamente é única, será denominada aplicação principal de E em F.

9. Conjuntos bem ordenados

O que diremos agora, nada mais é do que um resumo dos resultados que se encontram no capítulo III de (I) (págs. 39-44). Aqui nos limitaremos a citar um processo de construção de uma boa ordem sôbre um conjunto particular, bem como alguns teoremas, que admitiremos sem demonstração. Como já ficou dito acima, as demonstrações dêsses resultados se encontram em (I) , no capítulo III.

Seja E um conjunto infinito, indiquemos por Ω o conjunto das boas ordens sôbre partes de E. Em Ω consideremos a seguinte relação de equivalência, que indicaremos por $\mathcal{R}$:

sendo E_{ω_1} e $E_{\omega_2} \in \Omega$, $\omega_1 \equiv \omega_2$ (mod $\mathcal{R}$) se e sòmente se E_{ω_1} é semelhante a E_{ω_2} . (Para cada $\omega \in \Omega$, E_ω designa a parte de E sôbre a qual ω é boa ordem).

Seja $\mathcal{H} = \Omega/\mathcal{R}$ o conjunto quociente; em $\mathcal{H}$ introduziremos uma relação de ordem do seguinte modo :

$u \leq v$, onde $u, v \in \mathcal{H}$, se e sòmente se, sendo $\omega_1 \in u$ e $\omega_2 \in v$, existe a aplicação principal de E_{ω_1} em E_{ω_2}. Teremos que $\mathcal{H}$ é bem ordenado pela ordem $\leq$ ((I) , capítulo III, teorema 2, pág.43.)

O conjunto $\mathcal{H}$ não pode ser equipotente a uma parte própria de E. (Veja-se a demonstração de $I_V \Rightarrow P_I$ em (I) , na parte da página 57.)

Além destas considerações, para as nossas demonstrações necessitaremos do seguinte lema ((I) , página 58), devido a T A R S K I :

L E M A - Sejam A e B dois conjuntos sem elementos comuns, o primeiro bem ordenado, verificando $A \cup B \approx A \times B$. Então, ou A é equipotente a uma parte de B ou B é equipotente a uma parte de A.

5. Espaço topológico. Função contínua. Homeomorfismo. Compacidade.

Seja E um conjunto e τ um subconjunto de $\mathfrak{p}(E)$. τ é uma topologia sôbre E se :

1) $\emptyset \in \tau$, $E \in \tau$;

2) reunião qualquer de conjuntos de τ pertence a τ ;

3) intersecção finita de conjuntos de τ pertence a τ.

Nestas condições, à dupla ordenada (E, τ) chamaremos espaço topológico de suporte E e topologia τ . No decorrer dêste trabalho diremos, simplesmente, o "espaço topológico (E , τ)" .

Os conjuntos de τ são chamados abertos em (E,τ) e os conjuntos da forma $E - X$, onde $X \in \tau$, se dizem fechados em (E, τ).

Sejam (E, τ) e (E', τ') dois espaços topológicos e f uma função de E em E'. Diremos que f é uma função contínua do espaço topológico (E,τ) no espaço topológico (E', τ') se e sòmente $f^{-1}(X) \in \tau$, para todo $X \in \tau'$. (1)

(1) - Sendo X e Y dois conjuntos e g uma aplicação de X em Y, para todo A, subconjunto de Y, $g^{-1}(A)$ designa o conjunto dos $x \in X$ tais que $g(x) \in A$.

Sejam (E,τ) e (E',τ') dois espaços topológicos e f uma função bijetora de E em E'. Diremos que f é um homeomorfismo do espaço topológico (E,τ) sôbre o espaço topológico (E',τ') se e sòmente se :

1) $f^{-1}(X) \in \tau$, para todo $X \in \tau'$;

2) $f(Y) \in \tau'$, para todo $Y \in \tau$. (1)

Recobrimento aberto. Seja (E,τ) um espaço topológico e $(\Omega_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos. Diremos que $(\Omega_i)_{i \in I}$ é um recobrimento aberto do espaço topológico (E,τ) se :

1) $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = E$,

2) $\Omega_i \in \tau$, para todo $i \in I$.

Espaço topológico compacto. Um espaço topológico (E,τ) é compacto se todo seu recobrimento aberto admite um sub-recobrimento finito (isto é, para todo recobrimento aberto $(\Omega_i)_{i \in I}$ de (E,τ), existe $J \subset I$, finito, tal que $\bigcup_{i \in J} \Omega_i = E$).

Em virtude de definição acima tem-se a seguinte Proposição :

Se (E,τ) é um espaço topológico compacto e $(F_i)_{i \in I}$ é uma família de conjuntos fechados em (E,τ) tal que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, existe $J \subset I$, finito, verificando $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

Produto de espaços topológicos. Seja $((E_i,\tau_i))_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos; chamaremos espaço topológico produto da família $((E_i,\tau_i))_{i \in I}$ ao espaço topológico (E,τ), onde $E = \prod_{i \in I} E_i$ e τ é a classe dos subconjuntos de E que são reuniões de conjuntos do tipo $\prod_{i \in I} X_i$, onde $X_i \in \tau_i$ para todo $i \in I$ e $X_i = E_i$, exceto para um número finito de índices $i \in I$.

---

(1) Para todo subconjunto B de X, $g(B)$ designa o conjunto dos $g(y)$ quando y percorre B.

C A P Í T U L O II

A partir de agora passaremos a tratar do assunto pròpriamente da tese. É nosso objetivo mostrar que as sete afirmações abaixo, designadas por (1), (2), (3), (4), (5), (6) e (7), são equivalentes.

Com o intuito de simplificar os enunciados vamos introduzir algumas notações. Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer. Então,

$N^{[X]}$ é o conjunto das funções $f: X \to N$, tais que $f^{-1}(N-\{0\})$ é finito;

$N^{[[X]]}$ é o conjunto das funções $f \in N^{[X]}$, tais que se x e y pertencem a X e $f(x) = f(y) \neq 0$, então $x=y$;

$X \sim Y$ indica que "X é equipotente a uma parte de Y ou Y é equipotente a uma parte de X".

(1) Teorema de Zermelo: Todo conjunto não vazio pode ser bem ordenado.

(2) Para todo conjunto A tem-se $N \times A \times A \approx N \times A$.

(3) Quaisquer que sejam os conjuntos infinitos A e B, se $N^{[[A]]} \dot{\approx} N^{[[B]]}$ então $A \approx B$.

(4) Todo conjunto não vazio pode ser totalmente ordenado e, sendo A e B dois conjuntos infinitos quaisquer, se $p(A) \approx p(B)$ e $A \sim B$, então $A \approx B$.

(5) Sejam A e B dois conjuntos infinitos quaisquer. Temos que $p(N^{[A]}) \approx N^{[A]}$ e, se $p(A) \approx p(B)$ e $A \sim B$, então $A \approx B$.

(6) Se A e B são dois conjuntos infinitos, disjuntos, e A é bem ordenado, tem-se $p(A \cup B) \approx p(A) \cup p(B)$.

(7) Se $((E,\tau_i))_{i \in I}$ é uma família de espaços topológicos, mùtuamente homeomorfos, tais que τ_i tem 3 elementos para todo $i \in I$, então o espaço topológico produto dessa família é compacto.

Antes de passarmos à demonstração das equivalências, daremos algumas proposições que serão utilizadas mais adiante. A função φ que aparece nas demonstrações seguintes é a do capítulo I, § 3, n. 6 .

Proposição 1 : Para todo conjunto A, p(NxA) é equipotente a $N^{[A]}$.

Demonstração : Seja A um conjunto qualquer e indiquemos por ψ a ... ção de p(NxA) em $N^{[A]}$ que associa a cada X pertencente a p(NxA) o elemento de $N^{[A]}$ assim definido:

$$\psi(X)\ (y) = \varphi(\{n\varepsilon N \mid (n,y)\ \varepsilon\ X\})$$

A função ψ é bijetora pois φ é bijetora, donde $p(NxA) \simeq N^{[A]}$./

Proposição 2 : Para todo conjunto A, $N^{[[A]]}$ é equipotente a $N^{[[AxA]]}$.

Demonstração: Com efeito, seja A um conjunto qualquer e seja $\psi : N^{[[A]]} \rightarrow N^{[[AxA]]}$ a função que associa a cada f pertencente a $N^{[[A]]}$ o elemento $\psi(f)$ de $N^{[[AxA]]}$ assim definido:

$$\psi(f)\ ((x,y)) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x=y \\ 0 \text{ em caso contrário} \end{cases}.$$

A função ψ é injetora. Por outro lado, vamos definir uma função ... jetora, de $N^{[[AxA]]}$ em $N^{[[A]]}$. Para a definição de θ procederemos por etapas.

1) Tomemos $f\ \varepsilon\ N^{[[AxA]]}$ e ponhamos

$$X_f = \{(f((x,y)),x) \mid (x,y)\ \varepsilon\ f^{-1}(N - \{0\})\} \quad \text{e}$$

$$Y_f = \{(f((x,y)),y) \mid (x,y)\ \varepsilon\ f^{-1}(N - \{0\})\}.$$

2) Indiquemos por f_1 a função de A em N tal que

$$f_1(z) = \varphi(\{r\varepsilon N \mid (r,z)\ \varepsilon X_f\})$$ e por f_2 a função de A em N tal que

$$f_2(t) = \varphi(\{r\varepsilon N \mid (r,t)\ \varepsilon\ Y_f\}).$$

3) Mostremos que f_1 e f_2 pertencem a $N^{[[A]]}$; provemos, por exempl[o] que f_1 pertence a $N^{[[A]]}$.

Ora, como $f \in N^{[[A \times A]]}$, X_f é um conjunto finito, logo, $f_1 \in N^{[A]}$
Sejam x e z pertencentes a A, tais que $f_1(x) = f_1(z) \neq 0$; então $\varphi(\{r \in N \mid (r,x) \in X_f\}) = \varphi(\{r \in N \mid (r,z) \in X_f\})$.
Logo, existe $r \in N$ tal que $(r,x) \in X_f$ e $(r,z) \in X_f$, consequentemente $x = z$.
Anàlogamente se demonstra para f_2. Definimos $\theta(f) = (f_1,f_2)$.
É necessário mostrar que θ é injetora. Para isso, tomemos f e g pertencentes a $N^{[[A \times A]]}$, f diferente de g; então existe $(x,y) \in A \times A$ tal que $f((x,y)) \neq g((x,y))$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $f((x,y)) \neq 0$. Por absurdo, vamos admitir que $\theta(f) = (f_1,f_2) = \theta(g) = (g_1,g_2)$. Ora, $x \in X_f$ e devemos ter
$f_1(x) = \varphi(\{r \in N \mid (r,x) \in X_f\}) = g_1(x) = \varphi(\{r \in N \mid (r,x) \in X_g\})$, donde se conclui que $(f((x,y)),x) \in X_g$, isto é, existe u pertencente a A tal que $f((x,y)) = g((x,u))$.

Por outro lado, procedendo de modo análogo, teremos que existe $v \in A$ tal que $f((x,y)) = g((v,y))$. Como g pertence a $N^{[[A \times A]]}$, segue-se que $x = v$ e $y = u$, donde, $g((x,y)) = f((x,y))$, o que contraria a hipótese inicial. Concluimos, pois, que θ é injetora.
Provamos que existe uma função injetora de $N^{[[A \times A]]}$ em $N^{[[A]]} \times N^{[[A]]}$, o que, juntamente com o fato de que $N \times N \approx N$ (capítulo I, § 3, n. 6), implica que existe uma função injetora de $N^{[[A \times A]]}$ em $N^{[[A]]}$.
Aplicando-se, agora, o teorema de Bernstein-Cantor, fica demonstrada a proposição./

<u>Proposição 3</u>: <u>Se A e B são dois conjuntos disjuntos então</u>

$$p(A \cup B) \approx p(A) \times p(B).$$

<u>Demonstração</u> : Com efeito, consideremos a função

$$\psi : p(A \cup B) \longrightarrow p(A) \times p(B)$$ que associa

a cada X pertencente a $p(A \cup B)$ o elemento $(X \cap A, X \cap B)$.
A função ψ é bijetora, logo, $p(A \cup B)$ é equipotente a $p(A) \times p(B)$./

<u>Proposição 4</u> : <u>Se A é um conjunto totalmente ordenado, então</u>

$$N^{[A\times A]} \text{ é equipotente a } N^{[A]} .$$

<u>Demonstração</u> : É fácil ver-se que se A é um conjunto totalmente ordenado, então existe uma ordem total sôbre $A\times A$. Fixemos uma ordem total sôbre $A\times A$ e indiquemo-la pelo símbolo $\leqslant$. Pôsto isto, se X é um subconjunto finito, não vazio, de $A\times A$, êle admite uma única representação da forma

$(**)$ $X = \{(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_r,y_r)\}$ onde r é um número natural, maior ou igual a 1, tal que $X \approx \{1,2, \dots, r\}$ e

$$(x_1,y_1) < (x_2,y_2) < \dots < (x_r,y_r)$$

Primeiramente vamos definir uma função injetora de

$N^{[A\times A]}$ em $p(N\times N\times N\times A)$. Seja

$\Theta : N^{[A\times A]} \longrightarrow p(N\times N\times N\times A)$ definida do seguinte modo :

1) tomemos $f \in N^{[A\times A]}$; se $X = f^{-1}(N-\{0\})$ é $\emptyset$ então $\Theta(f) = \emptyset$,
2) se $X \neq \emptyset$, suponhamos X representado como em $(**)$; neste caso, $\Theta(f) = \{(1,1,s_1,x_1), (2,1,s_1,y_1), (1,2,s_2,x_2), (2,2,s_2,y_2), \dots, (1,r,s_r,x_r), (2,r,s_r,y_r)\}$

onde $s_j = f((x_j,y_j))$ para todo $1 \leqslant j \leqslant r$.

A função Θ assim definida é injetora; por outro lado, como $N\times N\times N \approx N$ tem-se que $p(N\times N\times N\times A) \approx p(N\times A)$ e, já vimos na proposição 1 que $p(N\times A) \approx N^{[A]}$. Daí segue-se a tese, pois $N^{[A]}$ é equipotente a uma parte de $N^{[A\times A]}$./

Com um raciocínio semelhante é possível provar a

Proposição 5 : Se A é um conjunto não vazio totalmente ordenado então $p(N^{[A]})$ é equipotente a $N^{[A]}$.

Finalmente vamos demonstrar a

Proposição 6 : Se A é um conjunto não vazio bem ordenado, então $p(A)$ pode ser bem ordenado.

Demonstração : Seja A um conjunto, não vazio, bem ordenado por u boa ordem, que indicaremos pelo símbolo $\leq$. Em $p(A)$ vamos defin uma ordem que indicaremos pelo símbolo $\preccurlyeq$. Para simplificar as tações, se X é um subconjunto, não vazio, finito de A equipotent ao conjunto $\{1,2,3,\dots,r\}$ de números naturais, poremos $\bar{X} = r$ Pôsto isto, passemos à definição da ordem $\preccurlyeq$. Sejam X e Y dois elementos de $p(A)$ e ponhamos

$$X \preccurlyeq Y \text{ se } \begin{cases} X = Y \quad \text{ou,} \\ X = \emptyset \quad \text{ou,} \\ \bar{\bar{X}} \text{ é estritamente menor do que } \bar{\bar{Y}} \text{, ou} \\ \bar{\bar{X}} = \bar{\bar{Y}} \text{ e existe } x \varepsilon X \text{ tal que } x \leq y \text{ para todo} \\ y\ \varepsilon (X \cap \complement_A Y) \cup (Y \cap \complement_A X) \text{ e, além disso, } x\ \varepsilon (X \cap \complement_A Y) \\ (Y \cap \complement_A X) \end{cases}$$

É fácil verificar que a ordem $\preccurlyeq$ é uma boa ordem sôbre $p(A)$./

Estamos, agora, em condições de demonstrar as equivalentes menc nadas no início dêste capítulo.

Teorema 1 : (1) é equivalente a (2).

Demonstração : É bem conhecido que (1) implica (2); por isso so nos limitaremos a mostrar que (2) implica (1). Podemos supor d de já que $A \neq \emptyset$. Assim sendo, $N \times A$ é um conjunto infinito. F zendo-se no processo do capítulo I, § 4, n. 9, $E = N \times A$ e chamand[o] $\mathcal{H}'$ ao conjunto $\mathcal{H}$ construído para $E = N \times A$, ponhamos

$$U = \mathcal{H}' \times \{1\} \qquad e \qquad V = (N \times A) \times \{2\} \quad .$$

Por hipótese temos que

$$N \times (U \cup V) \approx N \times (U \cup V) \times (U \cup V) \text{ , isto é,}$$

$$N \times U \cup N \times V \approx N \times U \times U \cup N \times U \times V \cup N \times V \times U \cup N \times V \times V \quad \text{ou,}$$

$$N \times U \cup V \approx N \times U \times U \cup N \times U \times V \cup N \times V \times U \cup N \times V \times V$$

Logo, existe uma aplicação injetora de $N \times U \times V$ em $N \times U \cup V$. Por ou[-]tro lado, como $\mathcal{H}'$ é bem ordenado e N é bem ordenado, verifica-se que $N \times U \cup V$ é equipotente a uma parte de $N \times U \times V$. Logo, em virt[u]de do teorema de Bernstein-Cantor, tem-se $N \times U \cup V \approx (N \times U) \times V$. Em vista do lema do capítulo I, § 4, n. 9 , como $N \times U$ é bem ordenad[o] (introduzimos uma boa ordem em $N \times U$ a partir das boas ordens d[e]finidas em $\mathcal{H}'$ e N) e $N \times U \cap V = \emptyset$, devemos ter que ou, $N \times U$ é . equipotente a uma parte de V ou, V é equipotente a uma parte de $N \times U$. Neste último caso, V (e, portanto E) pode ser bem ordenad[o]. Para mostrar o teorema, é suficiente provar que $N \times U$ não pode se[r] equipotente a uma parte própria de V. Com efeito, se $N \times U$ fôsse a uma parte própria de V, então $N \times \mathcal{H}'$ seria equipotente a um[a par-]te própria de $N \times A$, o que não é possível (capítulo I, § 4, n. 9). Concluimos assim que A pode ser bem ordenado. /

Teorema 2 : (1) é equivalente a (3).

Demonstração : Se (1) é válido, tem-se $N^{[[A]]} \approx A$ para todo conjunt[o] infinito A e, portanto, (1) implica (3) .

Por outro lado, admitindo-se que (3) se verifica, em vista da pro-posição 2, para todo conjunto infinito A tem-se $A \times A \approx A$, donde, $N \times A \times A \approx N \times A$:/

Teorema 3 : (1) é equivalente a (4) .

Demonstração : Admitindo-se que (1) é válido, para todo conjunto infinito A tem-se $p(A) \approx A$, logo, (1) implica (4).
Reciprocamente, suponhamos que (4) é válido. Seja A um conjunto infinito; pelas proposições 1 e 4 concluimos que

$$p(N \times A \times A) \approx p(N \times A) \quad ;$$

ora, daí segue-se que $N \times A \times A \approx N \times A$. Consequentemente, pelo teorema 1, (4) implica (1)./

Teorema 4 : (1) é equivalente a (5) .

Demonstração : Se (1) é válido, então para todo conjunto infinito A, tem-se $p(N^{[A]}) \approx N^{[A]} \approx p(A) \approx A$, donde, (1) implica (5).
Reciprocamente, suponhamos que (5) se verifica. Seja A um conjunto infinito qualquer. Por (5) e pela proposição 1, tem-se

$$p(N^{[A]}) \approx N^{[A]} \approx p(N \times A) \qquad \text{, mas, como } N \times A \sim N^{[A]} \text{ , -}$$

gue-se que $N^{[A]} \approx N \times A$. Logo, $N \times A \times A \approx N \times A$. Como isto se verifica para todo conjunto infinito A, em virtude do teorema 1, temos que (5) implica (1)./

Teorema 5 : (1) é equivalente a (6) .

Demonstração : Se (1) é válido, então para todo conjunto infinito A tem-se $p(A) \approx A$; que mostra que (1) implica (6).
Por outro lado, suponhamos que (6) se verifique. Seja U um conjunto infinito qualquer; mostremos que U pode ser bem ordenado. No processo desenvolvido no capítulo I, § 4, n. 9, façamos $E = p(U)$ e, chamemos $\mathcal{H}'$ ao conjunto $\mathcal{H}$, obtido fazendo-se $E = p(U)$. Ponhamos $A = \mathcal{H}' \times \{1\}$ e $B = U \times \{2\}$. Em vista de (6) e da proposição 3, temos que $p(A \cup B) \approx p(A) \cup p(B) \approx p(A) \times p(B)$. (*)

(*) - Note-se que $p(A) - \{\emptyset\} \approx p(A)$.

Pelo lema do capítulo I,§ 4, n. 9, em virtude da proposição 6, segue-se que ou, p(A) é equipotente a uma parte de p(B) ou, p(B) é equipotente a uma parte de p(A). Se p(A) fôsse equipotente a uma parte própria de p(B), então, em particular, A seria equipotente a uma parte própria de p(U), o que não é possível . Logo , necessàriamente, p(B) é equipotente a uma parte de p(A); donde U é equipotente a uma parte do conjunto bem ordenado $p(\mathcal{A}')$./

<u>Teorema 6</u> : (1) <u>é equivalente a</u> (7) .

<u>Demonstração</u> : O fato de que (1) implica (7) é muito conhecido. Aqui nos limitaremos a mostrar que (7) implica (1). Especificamente vamos mostrar que (7) implica a seguinte proposição:

(E) "Se $(E_i)_{i\in I}$ é uma família, não vazia, de conjuntos não vazios, dois a dois disjuntos, então $\prod_{i\in I} E_i \neq \emptyset$."

Seja $(E_i)_{i\in I}$ uma família, não vazia, de conjuntos não vazios, dois a dois disjuntos. Deixando de lado o caso trivial em que I não possui mais de um elemento, ponhamos $E = \prod_{i\in I} E_i$ e, para cada $i\in I$, seja $\tau_i = \left\{\emptyset ,\ ExN^E,\ (E-E_i)xN^E\right\}$. (*)

Como para quaisquer i e j, pertencentes a I, temos (pelo teorema de Bernstein-Cantor)

$(E-E_i)xN^E \approx (E-E_j)xN^E \approx E_ixN^E \approx E_jxN^E \approx ExN^E$,

em virtude de (7), concluimos que o espaço produto topológico da família $((ExN^E , \tau_i))_{i\in I}$ é compacto.

Para cada $i\in I$, o conjunto $U_i = \prod_{j\in I} X_j$, onde $X_i = E_ixN^E$ e $X_j = ExN^E$ para todo j pertencente a $I-\{i\}$ é fechado no espaço topológico produto. Pelo que foi visto no capítulo I, § 5 ,

---

(*) N^E é o conjunto das funções de E em N.

segue-se que

$$\bigcap_{i\varepsilon I} U_i = \prod_{i\varepsilon I} (E_i x N^E) \neq \emptyset$$. Daí resulta que $\prod_{i\varepsilon I} E_i \neq \emptyset$.

Como (E) é equivalente a (1) ((1) , página 50), temos que (7) implica (1)./

B I B L I O G R A F I A

(1) - Edison Farah - "Algumas Proposições equivalentes ao Axioma da Escolha" - Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo - vol. 10 - fasc. I e II - dezembro 1955.

(2) - N. Bourbaki - Théorie des Ensembles - capítulos 2 e 3 - Hermann Paris - 1960.

(3) - Kurt Gödel - The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypotheses with the axioms of set theory - Princeton University Press - 1940

(4) - Edison Farah - Teoria dos Conjuntos - São Paulo - 1961.

(5) - H. Rubin, J. Rubin - Equivalents of the Axiom of Choice - North-Holland Publishing Company - Amsterdam- 1963

(6) - L. E. Ward, Jr. - "A weak Tychonoff theorem and the axiom of choice" - Proc. Amer. Math. Soc. - vol. 13 - 1962 - pag. 757-758.

(7) - James D. Halpern - "Basis on vector spaces and the axiom of choice" - Proc. Amer. Math. Soc. - vol. 17 - 1966 - junho.

(8) - E. S. Wolk - "On theorems of Tychonoff, Alexander and R. Rado" - Proc. Amer. Math. Soc. - vol. 18 - 1967 - fevereiro.