Roberto Romano

OPERADORES ANALÍTICOS DEFINIDOS E A VALORES EM CERTOS ESPAÇOS DE FUNÇÕES HOLOMORFAS

São Paulo
1967

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para Doutoramento em Ciências (Matemática)

Dedico êste trabalho a três pessoas:

À Vicente Romano e Gilda Romano,
meus pais, que me indicaram o
caminho com o seu exemplo de
trabalhadores incansáveis.

À Maria dos Anjos, minha
espôsa, pelo estímulo
e dedicação em todos
os momentos

Roberto Romano

Í N D I C E

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

OPERADORES ANALÍTICOS EM ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS E TOPOLOGIA DE $\mathcal{H}(O)$

CAPÍTULO II

FUNCIONAIS ANALÍTICAS DO ESPAÇO $\mathcal{H}(O)$

CAPÍTULO III

OPERADORES ANALÍTICOS DE $\mathcal{H}(O) \mapsto \mathcal{H}(U)$

CAPÍTULO IV

OPERADORES ANALÍTICOS PERMUTÁVEIS

ERRATA

Pagina	Linha	Onde se lê	Leia-se
54	2	numa vizinhança de origem	em $\mathbb{C}$
55	1	numa vizinhança de origem	em $\mathbb{C}$
55	4	em volta de origem	em $\mathbb{C}$
55	5	num aberto equilibrado V de	em
55	6	LF - analítico em V	LF - analítico

* * *

INTRODUÇÃO

Os resultados obtidos neste trabalho são extensões, de um lado, dos trabalhos de L. Fantappiè, J. Sebastião e Silva, A.Grothendieck, C.L. da Silva Dias e D. Pisanelli no estudo dos funcionais e operadores analíticos, e de outro, dos de S. Pincherle e D. Pisanelli no estudo da obtenção, em certos casos, da caracterização mediante uma série, denominada de Pincherle, dos operadores lineares e contínuos que levam funções holomorfas em funções holomorfas.

Antes de passarmos à exposição pròpriamente dita da tese achamos conveniente proceder a uma descrição rápida das questões que ela aborda:

No capítulo I introduzimos vários conceitos e resultados que são necessários à compreensão e ao desenvolvimento do trabalho. Na publicação a que demos o nº [16]* nas referências bibliográficas o Prof. J.S. e Silva dá o conceito de espaço super-indutivo e uma indicação para a mostra de que um E.L.C. metrizável é super-indutivo através da condição de convergência de Mackey estrita. Pensamos então em mostrar este resultado de forma mais simples e o conseguimos utilizando as observações do nº 5 e o teorema 1, do nº 6 que é a reprodução de uma proposição contida em [17], p. 187.

* Os números entre colchetes referem-se à bibliografia colocada no fim do presente trabalho.

O capítulo II é um resumo do artigo [12], indispensável ao desenvolvimento do capítulo III e contém a fórmula de Fantappiè dos funcionais n-lineares definidos no espaço produto $\mathcal{H}(O_1)\times\ldots\times\mathcal{H}(O_n)$ e a fórmula de Fantappiè para os operadores analíticos definidos num aberto estrelado de $\mathcal{H}(O)$.

No capítulo III obtivemos a fórmula de Fantappiè dos operadores n-lineares e contínuos de $\mathcal{H}(O_1)\times\ldots\times\mathcal{H}(O_n) \longmapsto \mathcal{H}(U)$. Depois a fórmula para os operadores analíticos definidos num aberto equilibrado de $\mathcal{H}(O)$, a valores em $\mathcal{H}(U)$. A seguir obtivemos a fórmula que tem a denominação de Pincherle para o caso dos operadores n-lineares e contínuos de $\mathcal{H}(\mathbb{C})^n \longmapsto \mathcal{H}(U)$, e em consequência, a dos analíticos de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ a valores em $\mathcal{H}(U)$.

Com as fórmulas obtidas pudemos caracterizar, no capítulo IV os operadores analíticos definidos num aberto equilibrado de

i) $\mathcal{H}(D)$, a valores em $\mathcal{H}(D)$ (D = disco unitário aberto de centro na orígem de $\mathbb{C}$, que permutam com o subgrupo dos automorfismos de D que deixam o zero fixo;

ii) $\mathcal{H}(P)$, a valores em $\mathcal{H}(P)$ (P = semi-plano positivo de $\mathbb{C} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$), que permutam com o subgrupo dos automorfismos de P. das translações reais;

iii) $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, a valores em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, que permutam em primeiro com o subgrupo dos automorfismos de $\mathbb{C}$ das translações, em segundo com o subgrupo dos automorfismos de $\mathbb{C}$ das homotetias, e em terceiro, com as semelhanças de $\mathbb{C}$, isto é, com o grupo de todos os automorfismos de $\mathbb{C}$.

Queremos deixar aqui expressas algumas palavras de agradecimento. Ao Prof. Dr. Domingos Pisanelli, da Faculdade de Arquitetura e Urbanismo da Universidade de São Paulo que nos sugeriu a realização des te trabalho, o qual fizemos sob sua orientação direta, que conosco discutiu todos os assuntos aqüi tratados, e que muito nos incentivou, o nosso mais profundo reconhecimento. Ao Prof. Dr. Luiz A. Berthet, da Faculdade de Ciências Econômicas e Administrativas da Universidade de São Paulo, pela liberdade, confiança e estímulo que sempre nos proporcionou, a nossa gratidão. A todos aquêles que direta ou indiretamente contribuíram para que pudéssemos realizar esta tese.

São Paulo, 1967

O autor

NOTAÇÕES E ABREVIAÇÕES

ϕ - conjunto vazio

Z_+ - conjunto dos números inteiros não negativos

$\mathbb{R}$ - corpo dos números reais

$\mathbb{C}$ - corpo dos números complexos

S - variedade analítica complexa obtida pe- adjunção a $\mathbb{C}$ do ponto do ∞ = esfera de Riemann

$B(b;R)$ - bola aberta de S de centro $b \in \mathbb{C}$ e raio R; quando $b = \infty$, $B(b;R)$ é a complementar em S da bola fechada de centro zero e raio R.

$\bar{B}(b;R)$ - aderência de $B(b;R)$ = bola fechada de centro b e raio R.

O, O_j, U - abertos de S, $\neq \phi$, e $\neq S (j=1,\ldots,n)$

$F= \complement O$, $F_j = \complement O_j$ - compactos de S, $\neq S$, e $\neq \phi (j=1,\ldots,n)$

Γ - bordo orientado de um compacto

$|\Gamma|$ - comprimento de Γ

$\mathcal{H}(O_1)x\ldots x\mathcal{H}(O_n)$ - produto vetorial topológico dos espaços $\mathcal{H}(O_j)$, $j=1,\ldots,n$

$m=(m_1,\ldots m_n) \in Z_+^n$ - multi-índice de inteiros não negativos

$|m|=m_1+\ldots+m_n$ - ordem do multi-índice $m=(m_1,\ldots m_n)$

E.V.T. - espaço vetorial topológico

E.L.C. - espaço (vetorial topológico) localmente convexo .

<u>Conjunto equilibrado ou estrelado</u>. Um subconjunto A de um espaço vetorial X é equilibrado ou estrelado se $\alpha A \subset A$ para $|\alpha| \leq 1$ ($\alpha \in \mathbb{K}$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

<u>Conjunto convexo</u>. Um subconjunto A de um espaço vetorial X é convexo quando, para quaisquer $x, y \in A$ e $0 \leq \alpha \leq 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), se tem $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$.

<u>Conjunto absolutamente convexo</u>. Uma parte A de um espaço vetorial X é absolutamente convexa se, para quaisquer $x, y \in A$ e α e β escalares com $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, $\alpha x + \beta y \in A$. É fácil ver que $A \subset X$ é absolutamente convexo se, e só se, A é convexo e equilibrado.

<u>Envoltória ou envólucro absolutamente convexo</u>. Seja A uma parte qualquer de um espaço vetorial X. Chama-se envoltória ou envólucro absolutamente convexo de A, e se anota ΓA , ao menor conjunto absolutamente convexo que contém A. Pode-se mostrar que

$$\Gamma A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \;\middle|\; a_k \in A, k=1,\ldots,n\ ,\ \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \leq 1,\ \forall n \geq 1 \right\}$$

<u>Neste trabalho os espaços vetoriais topológicos considerados supomos sôbre o corpo $\mathbb{C}$ (salvo menção explícita sôbre o corpo $\mathbb{K}$ que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e todos, sem exceção, separados</u>.

CAPÍTULO I

OPERADORES ANALÍTICOS EM ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS E TOPOLOGIA DE $\mathcal{H}(\underline{0})$.

1. Operadores G-analíticos

(Para esta parte vide [8] ou [11])

Indiquemos com X e Y dois E.V.T. localmente convexos e separados, e seja f um operador definido num aberto Ω de X a valores em Y.

Definição 1 Diz-se que o operador f: $\Omega \longmapsto Y$ é analítico segundo Gateaux num ponto x de Ω ou, mais simplesmente, G-analítico em x, quando existe

$$\delta f(x;h) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \left[\frac{df(x+\alpha h)}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}, \qquad (1)$$

para todo $h \in X$. Este limite se denomina diferencial de f no ponto x relativa ao incremento h, e é também anotado $\delta_x^h f$. O operador f se diz G-analítico em Ω quando for G-analítico em todo $x \in \Omega$.

Teorema 1. f é G-analítico em $\Omega \Longleftrightarrow$ em todo x, $f(x+\alpha h)$ é função holomorfa de α no subconjunto aberto de $\mathbb{C}$

$$D(x;h) = \left\{\alpha \in \mathbb{C} \mid x+\alpha h \in \Omega\right\}$$

para qualquer h de X.

(Vd [11] p. 24 ou [8] p. 110)

<u>Corolário</u>. f é G-analítico em $\Omega \Longleftrightarrow$ em todo $x \in \Omega$, $f(x+\alpha_1 h_1+\ldots+\alpha_n h_n)$ é holomorfa em $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ no subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$

$$D(x;h_1,\ldots,h_n) = \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n \mid x+\alpha_1 h_1+\ldots+\alpha_n h_n \in \Omega\right\}$$

quaisquer que sejam $n \geq 1$ e $h_1,\ldots,h_n \in X$.

<u>Definição 2</u>. <u>Diferencial de ordem n</u>.

$$\delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n) = \delta_x^{h_n}\, \delta^{n-1} f(x;h_1,\ldots h_{n-1}) \quad (n \geq 2) \qquad (2)$$

$$\delta^1 f(x;h_1) = \delta f(x;h_1)$$

<u>Teorema 2</u>.

$$\delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n) = \left[\frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_n} f(x+\alpha_1 h_1+\ldots+\alpha_n h_n\right]_{\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0}$$

$$\delta^n f(x;h) = \delta^n f(x;\underbrace{h,\ldots,h}_{n}) = \left[\frac{d^n}{d\alpha^n} f(x+\alpha h)\right]_{\alpha=0}$$

(Vd [8] p. 767 ou [11] p. 25)

<u>Teorema 3</u>. $\delta^n f(x;h_1\ldots,h_n)$ é um operador n-linear e simétrico de $X^n \longmapsto Y$.

(Vd [11] p. 27 ou [8] p. 767)

2. Série de Taylor de um operador G-analítico

(Vd [8] p. 111 ou [11] p. 767)

Neste número supomos que Y é quasi-completo (*).

Seja $f\colon \Omega \longmapsto Y$ um operador G-analítico em Ω. Se $x \in \Omega$, seja V uma vizinhança equilibrada de zero em X tal que $x + V \subset \Omega$. Vale então para f o desenvolvimento de Taylor.

$$f(x+h) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \delta^n f(x;h) \qquad (h \in V) \tag{3}$$

onde se convenciona $\delta^0 f(x;h) = f(x)$.

3. Desigualdade de D. Pisanelli

(Vd [11] p. 29)

Seja $f\colon \Omega \longmapsto Y$ um operador G-analítico em Ω. Se $x \in \Omega$ seja V uma vizinhança absolutamente convexa de zero em X tal que $x + V \subset \Omega$. Tem-se

$$\delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n) \in n^n B \qquad (h_j \in V,\ j=1,\ldots,n) \tag{4}$$

onde B é a envoltória absolutamente convexa e fechada do conjunto $f(x+V)$

Teorema. Se $f\colon \Omega \longmapsto Y$ é G-analítico e contínuo, todas as suas diferenciais são contínuas.

(Vd [11] p. 29)

---

* Um espaço vetorial topológico X é quasi-completo quando toda parte limitada e fechada de X é completa para a estrutura uniforme nêle induzida pela de X (Vd [2] p. 9).

4. Operadores LF-analíticos

Definição. O operador $f: \Omega \longmapsto Y$ se diz analítico segundo Fantappiè em Ω ou, mais brevemente, LF-analítico em Ω, quando, para toda função g, holomorfa de variável complexa e com valores em Ω, a função $f \circ g$ é holomorfa.

5. Topologia bornológica associada a um E.L.C.; b-diferenciabilidade (Vd [16])

Seja X um E.L.C. sôbre K.

Definição 1. Sejam V e B partes de X. Diz-se que V absorve B quando existe um número real $\delta > o$ tal que

$$\alpha B \subset V$$

para $|\alpha| \leq \delta$.

Definição 2. Um bornívoro é um conjunto que absorve os limitados de X.

Se B é um limitado qualquer de X, pelo fato dêste ser E.L.C. então ΓB também é limitado. Vamos então restringir nossas considerações à classe L das partes de X que são absolutamente convexas e limitadas. Se $B \in L$ indiquemos por $[B]$ o sub-espaço vetorial de X gerado por B e munido da norma $\| x \|_B$ seguinte

$$\| x \|_B = \inf \left\{ |\lambda| \;\middle|\; x \in \lambda B \right\}$$

Designaremos por T_L' a topologia sôbre X limite indutivo localmente convexa dos espaços $[B]$, para $B \in L$, isto é, a mais fina topologia localmente convexa sôbre X que torna contínua a aplicação idêntica u_B de cada $[B]$ em X. T_L' é denominada topologia bornológica associada ao espaço X.

Designaremos por T_L a topologia sôbre X limite indutivo dos espaços $[B]$, quando B percorre L, isto é, a mais fina topologia sôbre X que torna contínua a aplicação idêntica de cada $[B]$ em X.

Se T é a topologia inicial do E.L.C. X é fácil ver que $T \subset T'_L \subset T_L$.

Por simplicidade vamos indicar com X_L o espaço vetorial X munido da topologia T_L.

<u>Proposição</u>. Uma aplicação f qualquer de X_L num espaço topológico Y (qualquer) é contínua se, e só se, a sua restrição a cada $[B]$ for contínua.

<u>Demonstração</u> Imediata.

<u>Observações</u>

a) Com esta proposição podemos mostrar que a aplicação

$$x \in X_L \longmapsto x_o + x \in X_L \qquad (x_o \in X)$$

é contínua. Para isso basta mostrar que a sua restrição a cada $[B]$ é contínua. Com efeito, sendo x_o um conjunto limitado, o conjunto $C = \Gamma\,[B \cup \{x_o\}]$ é limitado e a aplicação atrás se escreve como composta das aplicações

$$x \in [B] \longmapsto x \in [C] \longmapsto x_o + x \in [C] \xmapsto{u_c} X_L$$

cada uma delas evidentemente contínua. Daqui resulta que as vizinhanças de um ponto x_o qualquer de X_L são obtidas por translações de vizinhanças de zero. Portanto as vizinhanças de zero determinam T_L.

b) Convém notar que, se V é vizinhança de zero em X_L, então V é tal que, para todo $B \in L$, existe um número real $\lambda_B > 0$ de sorte que

$$u_B^{-1}(V) = V \cap [B] \supset \lambda_B \cdot B,$$

isto é, V é um conjunto que absorve os limitados (pois para $|\alpha| < \lambda_B$ se tem $\lambda_B . B \supset \alpha B$). Portanto se V é vizinhança de zero em X_L então V é bornívoro em X.

Sejam X e Y E.L.C. sôbre $\mathbb{K}$ e seja f uma função com valores em Y definida num aberto Ω de X_L.

Definição 3. Dizemos que f é b-diferenciável num ponto x de Ω quando existe uma aplicação linear $A: X \longmapsto Y$ de sorte que, para todo limitado absolutamente convexo B de X existe um limitado absolutamente convexo C de Y tais que

$$\frac{\| f(x+h) - f(x) - A h \|_C}{\| h \|_B} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } \| h \|_B \longrightarrow 0$$

e a restrição de A a $[B]$ é limitada de $[B] \longmapsto [C]$ (portanto contínua). Diz-se que f é b-diferenciável em Ω quando fôr b-diferenciável em todo x de Ω,

6. Espaços indutivos e super-indutivos

Adotemos as notações do número anterior.

Definição 1. Diz-se que o E.L.C. X tem caráter indutivo quando a sua topologia T coincide com a topologia bornológica T_L' associada a êle. Este conceito coincide com o de espaço bornológico da escala Bourbaki.

Definição 2. Diz-se que o espaço X tem caráter super-indutivo quando a sua topologia T coincide com a topologia T_L sôbre êle.

Têm caráter super-indutivo os espaços localmente convexos metrizáveis como veremos a seguir. Antes lembremos que em qualquer espaço vetorial topológico o conjunto formado pelos pontos de uma sequência tendendo a um limite é limitado.

<u>Teorema 1</u>. Num E.L.C. metrizável X todo bornívoro é vizinhança de zero.

<u>Demonstração</u>. Seja d a métrica de X e V um bornívoro. Se V não fosse vizinhança de zero, para todo $n \geq 1$ teríamos $B(0;\frac{1}{n}) \not\subset nV$. Então existiria $a_n \in B(0;\frac{1}{n})$ tal que

$$(a) \qquad a_n \not\subset nV \qquad \text{para todo } n \geq 1$$

Como $a_n \longrightarrow 0$, $\{a_n\}$ é limitado, e não existe número $\delta > 0$ tal que para $|\alpha| \leq \delta$ se tenha $\alpha\{a_n\} \subset V$, pois tomando-se n tal que $\frac{1}{n} \leq \delta$ viria $a_n \in nV$, contra (a). Então V não absorve o conjunto limitado $\{a_n\}$, contra a hipótese. Logo, forçosamente, deve existir n tal que $B(0;\frac{1}{n}) \subset nV$.

<u>Teorema 2</u>. Um E.L.C. metrizável X é super-indutivo.

Demonstração. Já sabemos que $T \subset T_L$ e que as vizinhanças de zero determinam T_L, sendo tôdas elas bornívoros. Ora, pelo teorema anterior todo bornívoro é vizinhança de zero em X, ou seja, $T_L \subset T$.

[Q.E.D.]

Um outro exemplo de espaços localmente convexos super-indutivos são os espaços $\mathcal{L}N^*$, limites indutivos canônicos de sucessões regulares de espaços normados. (Cf. [16] p. 8 e [15] p. 397).

Sejam X e Y E.L.C. sôbre $\mathbb{K}$. Tem-se

<u>Teorema 3</u>. Se X é super-indutivo e $f: \Omega \longmapsto Y$ é b-diferenciável no aberto Ω de X então f é contínua em Ω.

Para a demonstração veja [16] p. 31.

Aqui retornamos aos E.L.C. exclusivamente sôbre $\mathbb{C}$. Temos o seguinte importante resultado

Teorema 4. Para que a classe das funções LF-analíticas no aberto Ω do E.L.C. X coincida com a das funções b-analíticas em Ω é suficiente que X seja quasi-completo.

Cf. [16] p. 57.

7. O espaço $\mathcal{H}(O)$

Indicamos com $\mathcal{H}(O)$ o espaço vetorial sôbre $\mathbb{C}$ das funções holomorfas em O, nulas no ∞ caso este ponto pertença a O, com a topologia da convergência uniforme sôbre as partes compactas. Esta topologia é dada pela família de seminormas

$$p_K(f) = \max_{x \in K} | f(x) | ,$$

com K percorrendo a classe das partes compactas de O, isto é, $\mathcal{H}(O)$ é um espaço localmente convexo. É fácil verificar que ele é sequencialmente completo.

Definição 1. Uma sucessão (K_n) de compactos de O satisfazendo às condições

a) $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup_{n \geq 1} K_n = O$;

b) Dado um compacto K de O existe K_n tal $K \subset K_n$;

denomina-se uma sequência exaustiva de compactos de O.

Lema 1. Existe em O uma sequência exaustiva de compactos.

Para a demonstração vide [3], p. 148.

A partir deste momento passemos a designar p_{K_n} simplesmente por p_n .

Lema 2. As topologias sôbre $\mathcal{H}(0)$ induzidas pela família de seminormas $(p_K)_{K\subset 0}$ e pela sucessão $(p_n)_{n\geq 1}$ coincidem.

Demonstração. Realmente, dado $K\subset 0$ existe K_n tal que $K\subset K_n$, donde, considerando-se

$$V(0;K,\varepsilon) = \{f \in \mathcal{H}(0) \mid p_K(f) < \varepsilon\}$$

e

$$V(0;n,\varepsilon) = \{f \in \mathcal{H}(0) \mid p_n(f) < \varepsilon\},$$

tem-se

$$V(0;n,\varepsilon) \subset V(0;K,\varepsilon)$$

Recìprocamente, dada K_n existe K' tal que $K_n\subset K'$, e daqui

$$V(0;K',\varepsilon) \subset V(0;n,\varepsilon)$$

Definição 2. Seja a aplicação d: $\mathcal{H}(0) \times \mathcal{H}(0) \longmapsto \mathbb{R}$ dada por

$$d(f,g) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \inf(1,p_n(f-g)) \leq \sum_{n\geq 1} 2^{-n}$$

Lema 3. A aplicação d acima definida tem as propriedades

1) $d(f,g) \geq 0$, $d(f,g) = 0 \Longleftrightarrow f = g$

2) $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$

3) $d(f+h,g+h) = d(f,g)$

4) $2^{-n} \inf (1, p_n(f)) \leq d(f,o)$

5) $d(f,o) \leq p_n(f) + 2^{-n}$

Para a demonstração veja [3], p. 149.

As três primeiras propriedades nos mostram que d é uma métrica sôbre $\mathcal{H}(0)$ invariante por translações.

<u>Teorema</u>. $\mathcal{H}(0)$ é métrizável, ou, em outros têrmos, a topologia sôbre $\mathcal{H}(0)$ induzida pela sucessão (p_n) coincide com a topologia deduzida da distância d.

Para a demonstração vide [3], p. 150.

Portanto, por este teorema, $\mathcal{H}(0)$ é um espaço métrizável e, sendo sequencialmente completo, resulta que é um espaço de Frechet. Mais ainda, pelo teorema de Montel é também um espaço de Montel.

Aplicando os conceitos e resultados dos números anteriores ao espaço $\mathcal{H}(0)$ obtemos

1) $\mathcal{H}(0)$ sendo um E.L.C. métrizável completo é quasi-completo

2) Pelos teoremas 2. e 3. do nº 6 um operador b-diferenciável definido num aberto Ω de $\mathcal{H}(0)$, a valores em Y, é contínua em Ω .

3) Pelo teorema 4 do nº 6 a classe das funções LF-analíticas em coincide com a das b-analíticas em Ω.

4) Òbviamente um operador LF-analítico definido num aberto Ω de $\mathcal{H}(0)$, a valores em Y, é contínuo em Ω.

CAPÍTULO II

FUNCIONAIS ANALÍTICOS DO ESPAÇO $\mathcal{H}(\underline{O})$

1. Funcionais lineares e contínuos de $\mathcal{H}(\underline{O})$

Seja $f: \mathcal{H}(O) \longmapsto \mathbb{C}$ linear e contínuo. Da continuidade segue que existe um número $M > o$ e um compacto K de O tal que

$$p_K(h) \leq 1 \Longrightarrow |f(h)| \leq M \qquad (1)$$

Teorema. $f: \mathcal{H}(O) \longmapsto \mathbb{C}$ é linear e contínuo se, e sòmente se, existe uma função $u(s)$ holomorfa no $\complement K$(*), que é um aberto de S que $\supset F$, nula no ∞, e de sorte que

$$f(h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(s)\, h(s)\, ds \qquad \left(h \in \mathcal{H}(O)\right) \qquad (2)$$

que Γ = bordo orientado(**) de um compacto $H \subset O$ tal que $H \supset K$.

---

* Este K é o da relação (1).

** Para este conceito vd [3], p. 64 no caso em que H é compacto de $\mathbb{C}$; podemos extendê-lo de forma análoga para o caso em que H é compacto de S, e $\infty \notin \Gamma$. Portanto a orientação positiva tomada é aquela em que considerando-se $t \longmapsto \Gamma_j(t)$ $(1 \leq j \leq k)$ um arco de Γ, quando se percorre Γ_j no sentido dos t's crescentes tem-se constantemente "a sua esquerda" os pontos do interior de H.

Demonstração

a) Necessidade Veja [4], p.52.

b) Suficiência Deixamos a cargo do leitor(é fácil ver que funcional definido por (2), e satisfazendo às condições do teorema, verifica uma relação do tipo (1) com H em lugar de K).

Os resultados que enunciaremos a seguir foram todos obtidos por D. Pisanelli em [12] , trabalho em que colaboramos na confecção de uma primeira redação.

2. Funcionais n-lineares e contínuos de $\mathcal{H}(O_1)$ x...x $\mathcal{H}(O_n)$.

Seja $f: \mathcal{H}(O_1) \times \ldots \times \mathcal{H}(O_n) \longmapsto \mathbb{C}$ n-linear e contínuo. Da continuidade segue que existe um número $M>o$ e compactos $K_j \subset O_j$, $j = 1,\ldots,n$ (que podemos tomar sempre com interior $\neq \phi$) tais que

$$p_{K_1}(h_1) \leq 1,\ldots,p_{K_n}(h_n) \leq 1 \Longrightarrow |f(h_1,\ldots,h_n)| \leq M \quad (3)$$

Sejam

(4)
$$\begin{cases} R_{j\infty} = \sup\limits_{K_j} |t| \\ R_j = \text{dist. } (F_j, K_j), F_j = \complement O_j \end{cases}$$

Observe-se que, para todo $j = 1,\ldots,n$, pelo menos um dos elementos R_j ou $R_{j\infty}$ é real.

$$R = \min \{R_{j\infty}, R_j \mid j = 1,\ldots,n\}$$

$$(5)\quad \begin{cases} b = (b_1,\dots,b_n) \in F_1 x \dots x F_n \\ \Omega_j = \bigcup_{b_j \in F_j} B(b_j;S_j) \quad \text{onde } S_j = \frac{3}{2} R_{j\infty} \text{ ou } \frac{1}{2} R_j \text{ conforme} \\ \qquad\qquad \text{seja } b_j = \infty \text{ ou } b_j \neq \infty \ (1 \leq j \leq n) \\ \Omega_1 x \dots x\, \Omega_n \supset F_1 x \dots x F_n \end{cases}$$

Seja u a família de funções (u_b^k) onde

$$(6)\quad u_b^k(s) = \sum_{|m| \geq o} \frac{1}{s_1^{m_1+1}} \cdots \frac{1}{s_k^{m_k+1}} \cdot (s_{k+1}-b_{k+1})^{m_{k+1}} \cdots (s_n-b_n)^{m_n}.$$

$$. f\left(t_1^{m_1},\dots,t_k^{m_k}, \frac{1}{(t_{k+1}-b_{k+1})^{m_{k+1}+1}}, \dots, \frac{1}{(t_n-b_n)^{m_n+1}}\right)$$

para $s = (s_1,\dots,s_n) \in B(b_1;S_1)\ x \dots x\ B(b_n;S_n)$, sendo que supomos $b_1 = \dots = b_k = \infty$ $(o \leq k \leq n)$; quando $k=o$ tem-se uma série de potências a expoentes não negativos e quando $k=n$, uma série a expoentes negativos.

<u>Lema</u>. Com as notações adotadas

$$|\, u(s) \,| \leq \left(\frac{2}{R}\right)^n M \tag{7}$$

para todo $s = (s_1,\dots,s_n) \in \Omega_1\ x \dots x\ \Omega_n$

<u>Teorema</u>. f: $\mathcal{H}(O_1)\ x \dots x\ \mathcal{H}(O_n) \longmapsto \mathbb{C}$ é n-linear e contínuo se, e sòmente se, existe uma função $u(s_1,\dots,s_n)$, holomorfa num aberto $\Omega_1\ x \dots x\ \Omega_n$ de S^n que $\supset F_1\ x \dots x\ F_n$, nula nos pontos do ∞, de sorte que

$$(8)\quad f(h_1,\dots,h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 x \dots x \Gamma_n} u(s_1,\dots,s_n) h_1(s_1) \dots h_n(s_n) ds_1 \dots ds_n$$

$$(8)\quad f^{(h)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 x\ldots x\Gamma_n} u(s_1,\ldots s_n)\, h_1(s_1)\ldots h_n(s_n)ds_1\ldots ds_n$$

$$\begin{cases} h=(h_1,\ldots,h_n) \in \mathcal{H}(O_1)x\ldots x\mathcal{H}O_n) \\ j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

onde os Γ_j's são bordos orientados de compactos H_j's tais que $H_j \subset O_j$, $j = 1,\ldots,n$, $K_1 x\ldots xK_n \subset \overset{o}{H}_1 x\ldots x\overset{o}{H}_n$ e $\complement\overset{o}{H}_1 x\ldots x\complement\overset{o}{H}_n \subset \Omega_1 x\ldots x\Omega_n$.

3. <u>Funcionais analíticos de $\mathcal{H}(O)$.</u>

<u>Teorema</u>. Seja $f: V \longmapsto \mathbb{C}$, onde V é um aberto equilibrado de $\mathcal{H}(O)$. Se f é G-analítico e contínuo em V então pode ser desenvolvido segundo a série

$$(9)\quad f(h) = f(o) + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}\, \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} u_n(s_1,\ldots,s_n)h(s_1)\ldots h(s_n)ds_1\ldots ds_n \qquad (h\in V)$$

onde $u_n(s_1,\ldots,s_n)$, denominada indicatriz n-ésima de f, é analítica e simétrica em Ω^n , nula nos pontos do ∞ , sendo Ω um aberto conveniente de $S^{(*)}$, e Γ é o bordo orientado de um compacto $H \subset O$ tal que $\complement\overset{o}{H} \subset \Omega$.

<u>Corolário</u>. Se f é um funcional LF-analítico num aberto equilibrado de $\mathcal{H}(O)$, então vale para f o desenvolvimento (9).

---

* $\Omega = \Omega_1 = \ldots = \Omega_n$

CAPÍTULO III

OPERADORES ANALÍTICOS DE $\mathcal{H}(O) \longmapsto \mathcal{H}(U)$

1. Operadores lineares e contínuos de $\mathcal{H}(O) \longmapsto \mathcal{H}(U)$.

Seja $f: \mathcal{H}(O) \longmapsto \mathcal{H}(U)$ um operador linear e contínuo. Então, dado J compacto de U existe $M > 0$ e K compacto de O tais que

$$p_K(h) \leq 1 \Longrightarrow p_J(f(h)) \leq M \qquad (1)$$

O seguinte resultado se obtém diretamente do teorema do nº1, capítulo II ou conforme A. Grothendieck em [7].

Teorema $f: \mathcal{H}(O) \longmapsto \mathcal{H}(U)$ é linear e contínuo se, e sòmente se, existe uma função $u(z,s)$, holomorfa num aberto A que contém $U \times \complement O$ de S^2, nula nos eventuais pontos do ∞, de modo que o operador f tenha a expressão

$$f(h)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma u(z,s)\, h(s)\, ds \qquad \begin{cases} z \in U \\ h \in \mathcal{H}(O) \end{cases} \qquad (2)$$

onde, considerando-se o corte $A(z)$ (*), Γ é o bordo orientado de um compacto H tal que $\complement \overset{o}{H} \subset A(z)$.

---

* $A(z) = \{ s \in S \mid (z,s) \in A \}$

2. Operadores n-lineares e contínuos de $\mathcal{H}(O_1)x\ldots x\mathcal{H}(O_n) \longmapsto \mathcal{H}(U)$.

Seja $f: \mathcal{H}(O_1)x\ldots x\mathcal{H}(O_n) \longmapsto \mathcal{H}(U)$ n-linear e contínuo. Da continuidade segue que, dado J compacto de U, existe um número $M>0$ e compacto K_j de O_j, $j=1,\ldots,n$, de modo que

$$p_{K_1}(h_1)\leq 1,\ldots,p_{K_n}(h_n)\leq 1 \implies p_J(f(h_1,\ldots,h_n)) \leq M \qquad (3)$$

Teorema. $f: \mathcal{H}(O_1)x\ldots x\mathcal{H}(O_n) \longmapsto (U)$ é n-linear e contínuo se, e sòmente se, existe uma função $u(z,s_1,\ldots,s_n)$ holomorfa num aberto A_n que contém $U X \complement O_1 x\ldots x \complement O_n$ de S^{n+1}, nula nos eventuais pontos do ∞, de sorte que

$$f(h)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 x\ldots x\Gamma_n} u(z,s_1,\ldots,s_n)h_1(s_1)\ldots h_n(s_n)ds_1\ldots ds_n \qquad (4)$$

$$\begin{cases} z \in U \\ h=(h_1,\ldots,h_n) \in \\ \in \mathcal{H}(O_1)x\ldots x\,\mathcal{H}(O_n) \end{cases}$$

onde os Γ_j's são bordos orientados de compactos H_j's tais que $H_j \subset O_j$, $j=1,\ldots,n$, e $\complement \overset{\circ}{H}_1 x\ldots x \complement \overset{\circ}{H}_n \subset A_n(z)$.

Demonstração

a) Necessidade. Da continuidade segue que dado J compacto de U existe $M\geq 0$ e uma n-upla $K = (K_{1J},\ldots,K_{nJ})$ de compactos $K_{jJ} \subset O_j$, $j=1,\ldots,n$ de sorte que (3) é verdadeira. Fixemos $z \in \overset{\circ}{J}$; a aplicação

$$T_z : h \in \mathcal{H}(U) \longmapsto h(z) \in \mathbb{C}$$

é uma forma linear e contínua definida em $\mathcal{H}(U)$. Logo $T_z of$ é uma forma n-linear e contínua definida em $\mathcal{H}(O_1)x\ldots x\,\mathcal{H}(O_n)$. Pelo teorema do nº 2, capítulo II existe $u^z_{K(J)}$ holomorfa num aberto $\Omega_{1J}x\ldots x\Omega_{nJ}$ que $\supset \complement O_1 x\ldots x \complement O_n$, nula nos pontos do ∞, de sorte que, para todo $h=(h_1,\ldots,h_n) \in \mathcal{H}(O_1)x\ldots x\,\mathcal{H}(O_n)$,

(5)

$$(T_z of)(h) = f(h)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 x\ldots x\,\Gamma_n} u^z_{K(J)}(s_1,\ldots,s_n)h_1(s_1)\ldots h_n(s_n)ds_1\ldots ds_n$$

onde os Γ_j's são bordos orientados de compactos H_j's tais que $H_j \subset O_j$, $j=1,\ldots,n$, $K_{1J}x\ldots xK_{nJ} \subset \overset{o}{H}_1 x\ldots x\overset{o}{H}_n$ e $\complement \overset{o}{H}_1 x\ldots x \complement \overset{o}{H}_n \subset \Omega_{1J}x\ldots x\,\Omega_{nJ}$. Convém lembrar aquí que $u^z_{K(J)}$ é dada em volta de $b=(b_1,\ldots,b_n) \in \complement O_1 x\ldots x \complement O_n$, com $b_1=\ldots=b_k=\infty$ $(0 \leq k \leq n)$, por

(6)

$$u^z_{K(J)}(s_1,\ldots,s_n) = \sum_{|m|\geq 0} \frac{1}{s_1^{m_1+1}}\cdots\frac{1}{s_k^{m_k+1}}\cdot(s_{k+1}-b_{k+1})^{m_{k+1}}\ldots(s_n-b_n)^{m_n}.$$

$$.f\left(t_1^{m_1},\ldots,t_k^{m_k},\frac{1}{(t_{k+1}-b_{k+1})^{m_{k+1}+1}},\ldots,\frac{1}{(t_n-b_n)^{m_n+1}}\right)(z)$$

para $s=(s_1,\ldots,s_n) \in B(b_1;S_1)x\ldots xB(b_n;S_n)$ (*). Tomando-se então as

* Vd nº 2 do capítulo II ou [12].

funções $h_j = (t_j/R_{j\infty})^{m_j}$, para $j=1,\dots,k$, e $h_j=(R_j/t_j-b_j)^{m_j}$, para $j = k+1,\dots,n$, temos

$$p_{K_j}(h_j) = \max_{K_j}\left[\frac{|t_j|}{R_{j\infty}}\right]^{m_j} \leq 1 \quad \text{e} \quad p_{K_j}(h_j) = \max_{K_j}\left[\frac{R_j}{|t_j-b_j|}\right]^{m_j} \leq 1,$$

donde se obtém por (3)

$$p_J\left(f\left(t_1^{m_1},\dots,t_k^{m_k}, \frac{1}{(t_{k+1}-b_{k+1})^{m_{k+1}+1}},\dots,\frac{1}{(t_n-b_n)^{m_n+1}}\right)\right) \leq$$

$$\leq M\, R_{1\infty}\dots R_{k\infty}\cdot\frac{1}{R_{k+1}\dots R_n},$$

ou seja, para todo $z\in J$

$$|f\left(t_1^{m_1},\dots,t_k^{m_k},\frac{1}{(t_{k+1}-b_{k+1})^{m_{k+1}+1}},\dots,\frac{1}{(t_n-b_n)^{m_n+1}}\right)(z)| \leq MR_{1\infty}\dots R_{k\infty}\frac{1}{R_{k+1}\dots R_n} \tag{7}$$

Podemos mostrar que $u^z_{K(J)}$, considerada como função de z, é holomorfa em $\overset{o}{J}$ e nula no ∞. De fato, fixado $s=(s_1,\dots,s_n) \in \Omega_{1J}\times\dots\times\Omega_{nJ}$ o desenvolvimento (6) é o mesmo para todo $z\in J$ e por (7) a série é uniformemente convergente em $z\in J$. Porém cada um dos coeficientes $f\left(t_1^{m_1},\dots,t_k^{m_k}, (t_{k+1}-b_{k+1})^{-m_{k+1}-1},\dots,(t_n-b_n)^{-m_n-1}\right)$ da série (6) é elemento de $\mathcal{H}(U)$, isto é, é holomorfa em z para $z\in \overset{o}{U}$, em particular para $z \in \overset{o}{J}$. Logo a soma é uma função holomorfa em $\overset{o}{J}$. Se $z = \infty$ cada um dos coeficientes atrás considerados é nulo (porque as funções de $\mathcal{H}(U)$ são nulas no ∞) e a soma é nula.

Indiquemos com $A_n = \bigcup \overset{\circ}{J} \times \Omega_{1J} \times \dots \times \Omega_{nJ}$, para J percorrendo a classe dos compactos de U. Como cada $\Omega_{1J} \times \dots \times \Omega_{nJ} \supset \complement O_1 \times \dots \times \complement O_n$ segue que

$$A_n \supset (\bigcup \overset{\circ}{J}) \times \complement O_1 \times \dots \times \complement O_n = U \times \complement O_1 \times \dots \times \complement O_n .$$

Seja u a função definida em A_n seguinte

$$u(z,s) = u^z_{K(J)}(s) \qquad (z,s) = (z,s_1,\dots,s_n) \overset{\circ}{J} \times \Omega_{1J} \times \dots \times \Omega_{nJ}$$

Tendo em vista que o desenvolvimento (6) é o mesmo nas partes comuns segue que u está bem definida, se anula nos pontos do ∞ (porque isso ocorre com cada $u^z_{K(J)}$) e é holomorfa em A_n que é um aberto de S^{n+1} que contém $U \times \complement O_1 \times \dots \times \complement O_n$. Portanto levando-a à fórmula (5) e observando que $\overset{\circ}{J} \times \Omega_{1J} \times \dots \times \Omega_{nJ} \subset A_n$ temos, para todo $z \in \overset{\circ}{J}$, que $\Omega_{1J} \times \dots \times \Omega_{nJ} \subset A_n(z)$, e daquí que os Γ_j's são os bordos orientados de compactos H_j's tais que $H_j \subset O_j$, $j=1,\dots,n$ e $\complement \overset{\circ}{H}_1 \times \dots \times \complement \overset{\circ}{H}_n \subset \Omega_{1J} \times \dots \times \Omega_{nJ} \subset A_n(z)$, ou seja, obtemos a fórmula (4) de acôrdo com a tese.

b) Suficiência. Para todo $h \in \mathcal{H}(O_1) \times \dots \times \mathcal{H}(O_n)$ seja f o operador definido pela fórmula (4) satisfazendo às condições requeridas. Em primeiro lugar provemos que $f(h) \in \mathcal{H}(U)$. De fato, seja J compacto de U (com $\overset{\circ}{J} \neq \Phi$) Para todo $z \in J$ o corte $A_n(z) = \{ s \in S^n \mid (z,s) \in A_n \} \supset \complement O_1 \times \dots \times \complement O_n$ é um aberto de S^n.
Temos que

$$A_n(J) = \bigcap_{z \in J} A_n(z) \supset \complement O_1 \times \dots \times \complement O_n$$

é aberto de S^n, portanto $K = \complement A_n(J)$ é um compacto de $O_1 \times \dots \times O_n$.

Escolhamos $\Gamma_j^{'}s$ bordos orientados de compactos $H_j^{'}s$ tais que $H_j \subset O_j$, $j=1,\ldots,n$ e $\complement \overset{o}{H}_1 x \ldots x \complement \overset{o}{H}_n \subset \complement K = A_n(J) \subset A_n(z)$, para todo $z \in J$. A fórmula (4) podendo ser reescrita para todo $z \in J$ com tais $\Gamma_j^{'}s$ nos mostra que $f(h)$ é analítica em z para $z \in \overset{o}{J}$, pois $u(z,s)$ o é. Este raciocínio pode ser repetido para todo $z \in U$. Agora que f é linear é imediato. Para provar que é contínuo, tomando-se J um compacto qualquer de U, e construindo os $\Gamma_j^{'}s$, bordos orientados dos $H_j^{'}s$ $(j=1,\ldots,n)$ como atrás temos a fórmula válida para todo $z \in J$. Designando com $M_o = \max_{LXH_1x\ldots xH_n} | u(z,s) |$, vem

$$p_{H_1}(h_1) \leq 1,\ldots,p_{H_n}(h_n) \leq 1 \implies p_J(f(h)) \leq M,$$

onde $M = \dfrac{M_o \, |\Gamma_1| \ldots |\Gamma_n|}{(2\pi)^n}$, ou seja, f é contínuo. [Q.E.D.]

<u>Nota</u>. Da demonstração acima segue que o aberto A_n é da forma $\overset{o}{U J} \times \Omega_{1J} x \ldots x \, \Omega_{nJ}$, para J percorrendo a classe dos compactos de U, onde Ω_{jJ}, para $z \in J$, é construído como no capítulo II, relações (4) e (5).

3. <u>Operadores analíticos de $\mathcal{H}(O) \longmapsto \mathcal{H}(U)$</u>.

<u>Teorema</u>. Seja $f\colon V \longmapsto \mathcal{H}(U)$, V = aberto equilibrado de $\mathcal{H}(O)$. Se f é G-analítico e contínuo em V então pode ser desenvolvido segundo a série

$$f(h)(z) = f(o)(z) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_n} u_n(z,s_1,\dots s_n) h(s_1) \dots h(s_n) ds_1 \dots ds_n \tag{8}$$

onde $u_n\,(z,s)$ denominada indicatriz n-ésima de f , é holomorfa num aberto $A_n = \bigcup_J^o X\,(\,\Omega_J)^n$ (*), em que $\Omega_J \supset F$ (**), e é função simétrica de s, e Γ é o bordo orientado de um compacto $H \subset O$ tal que $(\mathring{\complement H})^n \subset A_n(z)$.

<u>Demonstração</u>. Se f é um operador G-analítico num aberto equilibrado V de $\mathcal{H}(O)$, pelo nº 3 do capítuloIpode ser desenvolvido em série de Taylor seguinte

$$f(h) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \delta^n f(o;h) \Longleftarrow h \in V \tag{9}$$

onde convencionamos $\delta^o f(o;h) = f(o)$. Como f é contínuo, dado J compacto de U podemos determinar K compacto de O tal que

$$p_K\,(h) \leq \delta \implies p_J\,(f(h)) \leq 1 \tag{10}$$

A desigualdade de D. Pisanelli (nº4, capítulo I) nos permite escrever

$$p_K(h_1) \leq \delta, \dots, p_K(h_n) \leq \delta \implies p_J\,(\,\delta^n f(o;h_1,\dots h_n)) \leq n^n$$

ou

$$p_K(h_1) \leq 1, \dots, p_K(h_n) \leq 1 \implies p_J\,(\,\delta^n f(o;h_1,\dots,h_n)) \leq (\tfrac{n}{\delta})^n, \tag{11}$$

* Onde J percorre a classe dos compactos de U

** $\Omega_J = \Omega_{1J} = \dots = \Omega_{nJ}$, independentemente de n isto é, temos a continuidade das diferenciais - e, note-se, a n-upla de compactos determinada em correspondencia a J é $K = (K,\dots,K)$. Como $\delta^n f(o;h_1,\dots,h_n)$ é n-linear e simétrico de $\mathcal{H}(O)^n \mapsto \mathcal{H}(U)$, o teorema do número anterior nos permite escrever

(12)

$$\delta^n f(o;h_1,\dots,h_n)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_n} u_n(z,s_1,\dots,s_n)h_1(s_1)\dots h_n(s_n)ds_1\dots ds_n$$

com $u_n(z,s_1,\dots,s_n)$ holomorfa num aberto $A_n = \bigcup \overset{o}{J} \times (\Omega_J)^n \supset U \times F^n$, simétrica dos $s's$ em A_n - sendo os compactos determinados em correspondencia a J todos iguais entre si, podemos determinar Γ = bordo orientado de um compacto $H \subset O$ tal que $(\complement \overset{o}{H})^n \subset A_n(z)$. Como $\delta^n f(o;h) = \delta^n f(o;h,\dots,h)$ a fórmula (12) fica

$$\delta^n f(o;h)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_n} u_n(z,s_1,\dots,s_n)h(s_1)\dots h(s_n)ds_1\dots ds_n$$

Levando-se esta expressão a (9) obtem-se (8).

<u>Corolário</u>. Se f é um operador LF-analítico em um aberto equilibrado V de $\mathcal{H}(O)$, a valores em $\mathcal{H}(U)$, então vale para f o desenvolvimento (8).

<u>Demonstração</u>. Como o espaço $\mathcal{H}(O)$ é metrizável e completo tem-se que f LF-analítico em V é b-analítico e contínuo (Veja final do capítulo I). Sendo contínuo e, evidentemente, G-analítico, podemos aplicar a ele o teorema anterior.

Das fórmulas integrais atrás poderíamos obter as fórmulas denominadas de Pincherle para os operadores n-lineares ($n \geq 1$) de $\mathcal{H}(\mathbb{C})^n \longmapsto \mathcal{H}(U)$, e consequentemente, as dos analíticos definidos em um aberto equilibrado de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, a valores em $\mathcal{H}(U)$. Mas, preferímos obtê-las diretamente utilizando como ponto de partida a fórmula de Taylor. É o que faremos no próximo número.

4. <u>Caracterização dos operadores n-lineares e contínuos de $\mathcal{H}(\mathbb{C})^n \longmapsto \mathcal{H}(U)$ através de séries de Pincherle. (Como caso particular, a dos lineares)</u>

<u>Definição 1.</u> Seja $(f_m(z))$, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in Z^n_+$ uma sucessão de funções de $\mathcal{H}(U)$. Diz-se que a série soma $\sum\limits_{|m| \geq 0} f_m$ é <u>normalmente convergente</u> em U quando

$$\sum_{|m| \geq 0} p_J (f_m) < + \infty$$

para todo compacto $J \subset U$. Daí resulta que $\sum f_m(z) = f(z)$ converge (absolutamente) em todo $z \in U$, que a convergência é uniforme sôbre todo compacto $J \subset U$ e que $f \in \mathcal{H}(U)$.

<u>Lema.</u> Seja $(a_{m_1, \ldots, m_n}(z))_{|m| \geq 0}$, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in Z^n_+$, uma sucessão de funções de $\mathcal{H}(U)$. Então a série

$$\sum_{|m| \geq 0} a_{m_1, \ldots, m_n} (z) \quad w_1^{m_1} \ldots w_n^{m_n}$$

converge normalmente num aberto $A \supset U \times \{0\}^n$ se, e sòmente se, para todo compacto J de U existen M e r números reais positivos tais que

$$p_J(a_{m_1,\ldots,m_n}) \leq \frac{M}{r^{|m|}}, \quad \forall m = (m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n$$

Demonstração.

a) Necessidade. Suponhamos que a série convirja normalmente num aberto contendo $U \times \{0\}^n$. Dado J compacto de U, para todo $z \in J$ existe uma bola $B((z,0,\ldots,0); r_z) \subset A$. Estas bolas cobrem o compacto $J \times \{0\}^n$, logo existe um número finito delas, digamos $B((z_1,0,\ldots,0); r_1),\ldots,B((z_k,0,\ldots,0); r_k)$, que já cobrem esse conjunto. Se $(n+1)r = \min\{r_1,\ldots,r_n\}$ temos que $J \times \left[\overline{B(0;r)}^n\right] \subset A$ donde, pela hipótese, a série converge absoluta e uniformemente nesse compacto, isto é,

$$\sum \sup_{J \times \left[\overline{B(0;r)}^n\right]} \left[a_{m_1,\ldots,m_n}(z) w_1^{m_1} \ldots w_n^{m_n}\right] < +\infty$$

Daquí segue que existe $M > 0$ tal que

$$p_J(a_{m_1,\ldots,m_n}(z))\, r^{m_1} \ldots r^{m_n} \leq M,$$

ou seja

$$p_J(a_{m_1,\ldots,m_n}) \leq \frac{M}{r^{|m|}}, \quad \forall m = (m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n$$

b) Suficiência. Se a condição é satisfeita, dado J compacto de U (que podemos tomar com $\overset{o}{J} \neq \emptyset$) temos, para $z \in J$,

$$\sum |a_{m_1,\ldots,m_n}(z)|\,|w_1|^{m_1}\cdots|w_n|^{m_n} \leq \sum p_J(a_{m_1,\ldots,m_n})|w_1|^{m_1}\cdots|w_n|^{m_n} \leq$$

$$\leq M \sum \left|\frac{w_1}{r}\right|^{m_1}\cdots\left|\frac{w_n}{r}\right|^{m_n} < +\infty$$

desde que $(w_1,\ldots,w_n) \in B(o;r_J)^m$ com $0<r_J<r$, ou seja a série converge absoluta e uniformemente em $J X \left[B(o;r_J)^n\right]$. Considerando-se o conjunto $A = \bigcup \overset{o}{J} X \left[B(o;r_J)^n\right]$, para J percorrendo os compactos de U, obtemos um aberto contendo $U X \{0\}^n$, e é fácil ver que a série em questão converge normalmente em A.

[Q.E.D.]

Antes de passarmos ao próximo teorema observemos que um espaço $\mathcal{H}(U)$ com a multiplicação

$$(h_1,h_2) \in \mathcal{H}(U) \times \mathcal{H}(U) \longmapsto h_1.h_2 \in \mathcal{H}(U) \;(*)$$

é uma álgebra topológica.

Estabeleçamos a convenção seguinte: ao escrevermos

$$\sum_{|m|\geq o} a_{m_1,\ldots,m_n} \cdot \frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!},$$

onde os coeficientes são funções $a_{m_1,\ldots,m_n} \in \mathcal{H}(U)$, as funções h's na série são imagens dos mesmos h's, elementos de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, pela aplicação canônica de $\mathcal{H}(\mathbb{C}) \longmapsto \mathcal{H}(U)$ que leva cada elemento de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ na sua restrição a U.

* $(h_1.h_2)(z) = h_1(z) \cdot h_2(z)$

<u>Teorema 1</u>. f: $\mathcal{H}(\mathbb{C})^n \longmapsto \mathcal{H}(U)$, (U aberto de $\mathbb{C}$) é n-linear e contínuo se, e sòmente se, existe uma sucessão $(a_{m_1,\dots m_n}(z))_{|m|\geq o}$ de elementos de $\mathcal{H}(U)$ de sorte que

$$f(h) = \sum_{|m|\geq o} a_{m_1,\dots,m_n} \frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!} \qquad \left\{ h = (h_1,\dots h_n) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})^n \right. \quad (13)$$

e $\sum_{|m|\geq o} a_{m_1,\dots,m_n}(z)\, w_1^{m_1}\dots w_n^{m_n}$ converge normalmente num aberto $A \supset U \times \{0\}^n$.

<u>Demonstração</u>

a) <u>Necessidade</u>. Se $h = (h_1,\dots h_n) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})^n$ todo h_j pode ser desenvolvido em série de Taylor em volta de um ponto z

$$h_j(s_j) = \sum_{m_j\geq o} \frac{h_j^{(m_j)}(z)}{m_j!} (s_j - z)^{m_j}, \quad j=1,\dots,n ,$$

uniformemente sôbre os compactos de $\mathbb{C}$. Da linearidade e continuidade e continuidade de f segue que

$$f(h) = \sum_{|m|\geq o} f\left((s_1-z)^{m_1},\dots,(s_n-z)^{m_n}\right) \frac{h_1^{(m_1)}(z)}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}(z)}{m_n!}$$

Chamemos $a_{m_1,\dots,m_n}(z) = f((s_1-z)^{m_1},\dots,(s_n-z)^{m_n})(z)$. Então $a_{m_1,\dots,m_n} \in \mathcal{H}(U)$ e se obtém

$$f(h) = \sum_{|m|\geq o} a_{m_1,\dots,m_n} \frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!}$$

Mostremos que esta igualdade se processa segundo a topologia de $\mathcal{H}(U)$. De fato, dado J compacto de U, pela continuidade de f existe $M>0$ e compactos $K_{1J},\dots,K_{nJ}$ de $\mathbb{C}$ tais que (3) seja verdadeira. Sendo

$$\max_{K_{jJ}} |s_j - z| = \frac{1}{r_j} \qquad (j=1,\dots,n),$$

tomando-se $r = \min\left\{r_1,\dots,r_n\right\}$ temos

$$\max_{K_{jJ}} |(s_j-z)^{m_j}\, r^{m_j}| \leq 1 \qquad (j=1,\dots,n),$$

donde, por (3),

$$p_J\,(f(\,(s_1-z)^{m_1},\dots,(s_n-z)^{m_n})) \leq \frac{M}{r^{|m|}},$$

ou seja,

$$p_J\,(a_{m_1,\dots,m_n}) \leq \frac{M}{r^{|m|}}, \quad \forall m = (m_1,\dots,m_n) \in Z_+^n. \tag{14}$$

Como $h_1,\dots,h_n$ são funções inteiras tomando-se K = bola fechada de centro $z \in J$, que contenha J em seu interior e tal que $R = \operatorname{dist}(J, \complement \overset{\circ}{K}) > \frac{1}{r}$, tem-se, pela desigualdade de Cauchy

$$p_J\left(\frac{h^{(m_j)}}{m_j!}\right) \leq \frac{M_j}{R^{m_j}} \qquad \begin{cases} M_j = p_K(h_j).(\frac{\rho}{R}) \\ \rho = \text{raio de } K \end{cases} \tag{15}$$

As desigualdades atrás nos permitem escrever

$$p_J\left(\frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!}\cdots\frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!}\; a_{m_1,\dots,m_n}\right) \leq p_J\left(\frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!}\right)\cdots p_J\left(\frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!}\right).$$

$$.\,p_J\,(a_{m_1,\dots,m_n}) \leq M\, M_1\cdots M_n \left(\frac{1}{Rr}\right)^{m_1}\cdots\left(\frac{1}{Rr}\right)^{m_n}$$

Portanto a série $\sum a_{m_1,\dots,m_n} \dfrac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \dfrac{h_n^{(m_n)}}{m_n!}$ é majorada em J série numérica convergente $M\, M_1 \dots M_n \left[\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{Rr}\right)^k\right]^n$, sendo, portanto, uniformemente convergente em J.

Da relação (14) segue, pelo lema, que a série $\sum a_{m_1,\dots,m_n}(z)\, w_1^{m_1} \dots w_n^{m_n}$ converge normalmente num aberto A de $\mathbb{C}^{n+1}$ que contém $U X \{0\}^n$.

b) <u>Suficiência</u>. Dada a sucessão $(a_{m_1,\dots,m_n}(z))_{|m| \geq 0}$, satisfazendo às condições requeridas, construamos para todo $h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})^n$ a série do 2º membro de (13), e mostremos que ela define um elemento de $\mathcal{H}(U)$. Sendo $\sum a_{m_1,\dots,m_n}(z) w_1^{m_1} \dots w_n^{m_n}$, por hipótese, normalmente convergente num aberto A que contém $U X \{0\}^n$ segue do lema que, dado J compacto de U com $\overset{\circ}{J} \neq \emptyset$, existem M e r números reais positivos tais que

$$p_J\,(a_{m_1,\dots,m_n}) \leq \frac{M}{r^{|m|}} \quad , \ \forall\, m = (m_1,\dots,m_n) \in Z_+^n$$

Então, por um raciocínio análogo ao da parte a), $\sum a_{m_1,\dots,m_n} \dfrac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \dfrac{h_n^{(m_n)}}{m_n!}$ é majorada em J por uma série numérica convergente, sendo, portanto, uniformemente convergente em J. Por um teorema de Weierstrass a soma da série é uma função holomorfa em $\overset{\circ}{J}$. Como J é um compacto qualquer de U resulta que $f(h) \in \mathcal{H}(U)$. Que f é n-linear é imediato. Para mostrar a continuidade, dado J compacto de U, tomando-se K compacto de $\mathbb{C}$ como na parte a), e usando as desigualdades anteriores (14) e (15) obtem-se

$$p_J(f(h)) \leq \sum_{|m| \geq 0} p_J\left(\frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!}\right) \cdots p_J\left(\frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!}\right) p_J(a_{m_1,\ldots,m_n}) \leq$$

$$\leq N\, p_K(h_1)\cdots p_K(h_n),$$

em que $N = M\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left[\sum_{k \geq 0}\left(\frac{1}{Rr}\right)^k\right]^n$, donde a continuidade de f.

[Q.E.D.]

Teorema 2. A série

$$(16) \qquad \sum_{|m| \geq 0} a_{m_1,\ldots,m_n} \frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!} \qquad \begin{cases} a_{m_1,\ldots,m_n} \in \mathcal{H}(U), \forall m \in Z_+^n \\ (h_1,\ldots,h_n) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})^n \end{cases}$$

converge para zero em $\mathcal{H}(U)$, qualquer que seja $(h_1,\ldots,h_n) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})^n$, quando, e sòmente quando,

$$a_{m_1,\ldots,m_n} = 0, \forall m = (m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n$$

Demonstração.

a) Necessidade. Com efeito, considerando-se para $z \in U$ as funções

$$h_j(s_j) = (s_j - z)^{q_j} \qquad (j=1,\ldots,n)$$

obtem-se

$$h_j^{(m_j)}(s_j) = \begin{bmatrix} q_j \\ m_j \end{bmatrix} (s_j - z)^{q_j - m_j}$$

onde $\begin{bmatrix} q_j \\ m_j \end{bmatrix} = q_j\,(q_j-1)\,\ldots\,(q_j-m_j+1)$. Levando-se à série (16), vem

$$a_{q_1,\ldots,q_n}(z) = 0$$

Pela arbitrariedade de escolha dos $z's$ e dos $q's$ resulta

$$a_{m_1,\ldots,m_n} = 0$$

$\forall m = (m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n$.

b) Suficiência. Imediata.

Como consequência deste teorema segue que os coeficientes de Pincherle de um operador n-linear e contínuo $\mathcal{H}(\mathbb{C})^n \longmapsto \mathcal{H}(U)$ são unívocamente determinados.

Nota. Sejam

$\mathcal{L}(^n\,\mathcal{H}(\mathbb{C}),\ \mathcal{H}(U))$ = conjunto dos operadores n-lineares e contínuos de $\mathcal{H}(\mathbb{C})^n \longmapsto \mathcal{H}(U)$.

$\mathcal{F}(Z_+^n\ ,\ \mathcal{H}(U))$ = conjunto das aplicações $(a_{m_1,\ldots,m_n})_{|m|\geq 0}$ de $Z_+^n \longmapsto \mathcal{H}(U)$ tais que $\sum_{|m|\geq 0} a_{m_1,\ldots,m_n} w_1^{m_1}\ldots w_n^{m_n}$ seja normalmente convergente num aberto que contém $U X \{0\}^n$.

O teorema 2 mostra que existe uma correspondencia biunívode $\mathcal{L}({}^n\mathcal{H}(\mathbb{C}), \mathcal{H}(U))$ no conjunto das sucessões n-uplas de $\mathcal{H}(U)$. Conjugando os teoremas 1 e 2 temos que existe uma correspondência biunívoca de $\mathcal{L}({}^n\mathcal{H}(\mathbb{C}), \mathcal{H}(U))$ sôbre $\mathcal{F}(Z_+^n, \mathcal{H}(U))$.

Introduzamos a notação

$$\frac{h^{(m)}}{m!} = \frac{h^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{h^{(m_n)}}{m_n!} \Longleftarrow m = (m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n \qquad (17)$$

5. <u>Fórmula de Pincherle para os operadores analíticos de $\mathcal{H}(\mathbb{C}) \longmapsto \mathcal{H}(U)$</u>

<u>Teorema</u>. Seja $f: V \longmapsto \mathcal{H}(U)$, onde V = aberto equilibrado de $\mathcal{H}(C)$. Se f é G-analítico e contínuo em V então se exprime como segue

$$f(h) = \sum_{n \geq o} \frac{1}{n!} \sum_{|m| \geq o} a_m^n \frac{h^{(m)}}{m!} \qquad (18)$$

onde $a_m^n \in \mathcal{H}(U)$, para quaisquer $n \in Z_+$ e $m = (m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n$.

<u>Demonstração</u>. Como já vimos, f sendo G-analítico no aberto equilibrado V de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ pode ser desenvolvido em série de Taylor

$$f(h) = \sum_{n \geq o} \frac{1}{n!} \delta^n f(o;h) \qquad (h \in V) \qquad (19)$$

De outro lado, f sendo contínuo, deduz-se da desigualdade de D. Pisanelli (capítulo I, nº 4), que todas as suas diferenciais $\delta^n f(o;h_1,\ldots h_n)$ são contínuas, e como são operadores lineares simétricos de $\mathcal{H}(\mathbb{C}) \xrightarrow{n} \mathcal{H}(U)$ resulta, pelo teorema do nº 4.

$$\delta^n f(o;h_1,\dots,h_n) = \sum_{|m|\geq o} a^n_{m_1,\dots,m_n} \frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!}$$

onde $a^n_m \in \mathcal{H}(U)$ para todo $m = (m_1,\dots,m_n) \in Z^n_+$ e $n \in Z_+$ - em particular para n=o , $\delta^o f(o;h) = f(o) = a^o_o \in \mathcal{H}(U)$. Sendo $\delta^n f(o;h) = \delta^n f(o;h,\dots h)$ e usando a notação (17) vem

$$\delta^n f(o;h) = \sum_{|m|\geq o} a^n_m \cdot \frac{h^{(m)}}{m!} \tag{20}$$

Levando-se (20) à fórmula (19) obtem-se (18).

[Q.E.D.]

<u>Corolário</u>. Se o operador f, definido num aberto estrelado V de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, a valores em $\mathcal{H}(U)$, é LF-analítico em V então possui um desenvolvimento de Pincherle (18) .

CAPÍTULO IV

OPERADORES ANALÍTICOS PERMUTÁVEIS

1. Automorfismos de um aberto conexo da esfera de Riemann.

Definição. Sejam O e O' dois abertos conexos de S. Um isomorfismo de O sôbre O' é uma aplicação holomorfa injetora de O sôbre O'. Um isomorfismo de O sôbre O é um automorfismo de O.

Seja O aberto conexo da esfera de Riemann e consideremos o operador

$$L : h \in \mathcal{H}(O) \longmapsto h o \alpha \in \mathcal{H}(O) \tag{1}$$

onde α = automorfismo de O. L possui as seguintes propriedades:

a) É linear. Imediato.

b) É contínuo. De fato, dado J compacto de O, considerando-se $K = \alpha(J) \cup J$ que é compacto de O, tem-se

$$p_K(h) \leq 1 \implies p_J(L(h)) \leq 1 \tag{2}$$

c) É uma aplicação sôbre. Pois dado $h' \in \mathcal{H}(O)$, como existe α^{-1}, considerando $h = h' o \alpha^{-1}$, vem

$$L(h) = h' \circ \alpha^{-1} \circ \alpha = h'$$

d) <u>É uma aplicação injetora</u>. Com efeito, se $L(h_1) = L(h_2)$, então

$$h_1 \circ \alpha = h_2 \circ \alpha \ ,$$

donde, compondo-se com α^{-1}, resulta

$$h_1 = h_2 \ .$$

e) <u>É LF-analítico</u>. De fato, se g é uma aplicação analítica definida em $\mathbb{C}$ a valores em $\mathcal{H}(O)$, tem-se

$$L(g(z)) = g(z) \circ \alpha$$

que se reconhece como analítica à vista de a) e b).

Seja

$$L^{-1} : h \in \mathcal{H}(O) \longmapsto h \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{H}(O)$$

Tem-se

$$L\,L^{-1}(h) = L^{-1}\,L(h) = I\,(h)^{(*)} \ , \quad \forall h \in \mathcal{H}(O),$$

e pelo que foi exposto L^{-1} é linear, contínuo e LF-analítico. Logo L é um isomorfismo LF-analítico de $\mathcal{H}(O)$ sôbre $\mathcal{H}(O)$.

---

* I = operador identidade

2. Operadores permutáveis

Seja X um E.V.T.

Definição 1. Se $L : X \longmapsto X$ é um operador linear e contínuo indiquemos por $\mathcal{L}$ o operador de $X^n \longmapsto X^n$ $(n \geq 1)$ definido como segue

$$\begin{cases} \mathcal{L}(h_1, \ldots, h_n) = (L\ (h_1), \ldots, L\ (h_n)), \ \forall h \in X^n \\ \mathcal{L} = L \ \text{ para } n = 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}$ é um operador linear e contínuo.

Definição 2. Se $f: X^n \longmapsto X$ é n-linear e contínuo e $L : X \longmapsto X$ é linear e contínuo dizemos que f permuta com L quando

$$f\ \mathcal{L}(h) = L\ f\ (h) \quad , \forall h \in X^n \tag{3}$$

Definição 3. Seja f um operador definido num aberto equilibrado V de um E.L.C. X, a valores em X, e $L : X \longmapsto X$ linear e contínuo. Eles se dizem permutáveis quando

$$f\ L(h) = Lf\ (h) \tag{4}$$

para todo $h \in L^{-1}(V) \cap V$.

Vamos agora enunciar e demonstrar um resultado de que vamos precisar nos números seguintes.

Teorema. Seja f um operador G-analítico num aberto equilibrado V de um E.L.C. completo e separado X, a valores em X, e $L : X \longmapsto X$ linear e contínuo. Então f e L são permutáveis quando, e sòmente quando

$$L\ \delta^n f(o;h_1,\dots,h_n) = \delta^n f(o;\ L(h_1),\dots,L(h_n)) \quad (5)$$

para todo $h = (h_1,\dots,h_n) \in X^n$.

<u>Demonstração</u>.

a) <u>Necessidade</u> Se f e L são permutáveis

$$f\ L(s_1h_1+\dots+s_nh_n) = L\ f(s_1h_1+\dots+s_1h_n) \quad \begin{cases} \forall h_1,\dots,h_n \in L^{-1}(V) \cap V \\ \forall s_1,\dots,s_n \in D(o;h_1,\dots,h_n) \end{cases}$$

Devido à linearidade de L,

$$f\ (s_1\ L(h_1)+\dots+s_n\ L(h_n)) = L\ f\ (s_1h_1+\dots+s_nh_n)$$

Sendo f G-analítico podemos derivar em relação aos $s's$; tendo em vista a linearidade e continuidade de L tem-se

$$\delta^n f(o;L(h_1),\dots,L(h_n)) = L\ \delta^n f(o;h_1,\dots,h_n)$$

para quaisquer $h_1,\dots,h_n \in L^{-1}(V) \cap V$. Estende-se por linearidade a todos $h = (h_1,\dots,h_n) \in X^n$.

b) <u>Suficiência</u>. Se f é G-analítico em V tem-se

$$f\ (h) = \sum_{n \geq o} \frac{1}{n!}\ \delta^n f(o;h) \qquad (h \in V) \quad (6)$$

Tomando-se em (6) $h \in L^{-1}(V)$, isto é, $L\ (h) \in V$, tem-se

$$f\,(L(h)) = \sum_{n \geq o} \frac{1}{n!}\ \delta^n f(o;L(h)) \quad \{h \in L^{-1}(V) \cap V \qquad (7)$$

Devido à linearidade e continuidade de L podemos aplicá-lo têrmo a têrmo em (6), obtendo

$$L\,(f(h) = \sum_{n \geq o} \frac{1}{n!}\ L\ \ \delta^n f(o;h) \qquad (8)$$

Pela hipótese (5), onde podemos fazer $h_1 = \ldots = h_n = h$, vem

$$L\ \ \delta^n f(o;h) = \delta^n f(o;L(h))$$

Esta igualdade permite igualar os segundos membros de (7) e (8), donde resulta a igualdade dos primeiros,

$$f\,(L\,(h)) = L\,(f\,(h))$$

para todo $h \in L^{-1}$ $(V) \cap V$.

[Q.E.D.]

Estamos interessados em caracterizar os operadores n-lineares definidos em $\mathcal{H}(O)^n$ (ou em abertos equilibrados de $\mathcal{H}(O)$), a valores em $\mathcal{H}(O)$, que satisfaçam (3) (ou (4), respectivamente) sendo L dado por (1). Um tal operador será chamado, com abuso de linguagem, permutável com o automorfismo α de O. Infelizmente não pudemos fazer tal estudo na forma geral em que o enunciamos, pois se a expressão dos automorfismos não for bastante simples não conseguimos resolver o problema. Precisamente vamos mostrar que obtivemos as referidas caracterizações nos casos particulares nos quais os automorfismos são formados:

i) pelo subgrupo de isotropia do zero(*) do disco unitário aberto de centro zero, D, de $\mathbb{C}$,

ii) pelo subgrupo das translações reais do semi-plano $P = \{z=x+iy \in \mathbb{C} \mid y > o\}$ de $\mathbb{C}$,

* Subgrupo que deixa invariante o zero

iii) pelos subgrupos das translações e das homotetias de $\mathbb{C}$, e pelo grupo de todos os automorfismos de $\mathbb{C}$.

3. <u>Operadores analíticos permutáveis com o subgrupo dos automorfismo do disco que deixam o zero fixo</u>.

Inicialmente temos o resultado.

<u>Proposição</u>. O subgrupo dos automorfismos do disco $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ que deixam fixo o zero são da forma

$$z \longmapsto az \quad , \quad \text{com } |a| = 1,$$

ou seja, são rotações.

(Vd. [3] p. 186).

<u>Teorema 1</u>. Seja $f: \mathcal{H}(D)^n \longmapsto \mathcal{H}(D)$ n-linear e contínuo e $L : \mathcal{H}(D) \longmapsto \mathcal{H}(D)$ dado por (1) com $\alpha(z) = az$, $|a| = 1$. Então f é permutável com os L's se, e sòmente se,

$$f(h_1,\dots,h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} \frac{1}{s_1 \dots s_n} v\left(\frac{z}{s_1},\dots,\frac{z}{s_n}\right) . h_1(s_1) \dots h_n(s_n) ds_1 \dots ds_n \tag{9}$$

onde v é holomorfa em D^n.

<u>Demonstração</u>.

a) <u>Necessidade</u>. De fato, pelo teorema do nº 2, capítulo III, f pode ser escrito

$$f(h_1,\ldots,h_n)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 x\ldots x\,\Gamma_n} u(z,s_1,\ldots,s_n)h_1(s_1)\ldots h_n(s_n)ds_1\ldots ds_n$$

onde u é holomorfa num aberto $A_n \supset DX\,(\complement D)^n$ e os $\Gamma_j's$ são os bordos orientados de compactos $H_j's$ de D tais que $\complement \overset{o}{H}_1 x\ldots x\,\complement \overset{o}{H}_n \subset A_n(z)$. Se tomarmos $w_j \in \complement \bar{D}$, isto é, $|w_j| > 1$ tem-se $h_j = \frac{1}{w_j - t_j} \in$ $\in \mathcal{H}(D)$, $j=1,\ldots,n$. Então sendo

$$\left[f\mathcal{L}(h_1,\ldots,h_n)\right](z) = f\,(L(h_1),\ldots,L(h_n))\,(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 x\ldots x\,\Gamma_n} u(z,s_1,\ldots,s_n)\,\frac{1}{w_1-as_1}\ldots\frac{1}{w_n-as_n}ds_1\ldots ds_n =$$

$$= \frac{1}{a^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1' x\ldots x\,\Gamma_n'}^{(*)} u(z,s_1,\ldots,s_n)\frac{1}{s_1-\frac{w_1}{a}}\ldots\frac{1}{s_n-\frac{w_n}{a}}\,ds_1\ldots ds_n =$$

$$= \frac{1}{a^n}\,u\,(z,\frac{w_1}{a},\ldots,\frac{w_n}{a})\,,$$

e

$$\left[L\,f(h_1,\ldots,h_n)\right](z) = f\,(h_1,\ldots,h_n)\,(az) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 x\ldots x\,\Gamma_n} u\,(az,s_1,\ldots,s_n)\frac{1}{w_1-s_1}\ldots\frac{1}{w_n-s_n}ds_1\ldots ds_n =$$

$$= u\,(az,w_1,\ldots,w_n)\,,$$

tem-se, pela hipótese

$$u\,(az,w_1,\ldots,w_n) = \frac{1}{a^n}\,u\,(z,\frac{w_1}{a},\ldots,\frac{w_n}{a}) \qquad (10)$$

---

* Γ_j' é Γ_j com a orientação oposta

Por outro lado a função u é holomorfa num aberto que contém $D \times (\complement D)^n$, logo é holomorfa para $|z|<1$ e $|w_j|>1$, ou seja, para $|z|>1$ e $|\frac{1}{w_j}|>1$; como se anula nos pontos do ∞ pode ser desenvolvida em série de Laurent seguinte

$$u(z,w_1,\dots,w_n) = \sum_{|j|\geq 0} c_{j_1,\dots,j_{n+1}} \cdot \frac{1}{w_1^{j_1+1}} \cdots \frac{1}{w_n^{j_n+1}} z^{j_{n+1}}$$

para $j=(j_1,\dots,j_{n+1}) \in Z_+^{n+1}$. Logo

$$u(az,w_1,\dots,w_n) = \sum_{|j|\geq 0} a^{j_{n+1}} c_{j_1,\dots,j_{n+1}} \cdot \frac{1}{w_1^{j_1+1}} \cdots \frac{1}{w_n^{j_n+1}} z^{j_{n+1}},$$

e

$$\frac{1}{a^n} u(z,\frac{w_1}{a},\dots,\frac{w_n}{a}) = \sum_{|j|\geq 0} a^{|j|-j_{n+1}} c_{j_1,\dots,j_{n+1}} \cdot \frac{1}{w_1^{j_1+1}} \cdots \frac{1}{w_n^{j_n+1}} z^{j_{n+1}},$$

donde, em vista de (10) .

$$a^{j_{n+1}} c_{j_1,\dots,j_{n+1}} = a^{|j|-j_{n+1}} c_{j_1,\dots,j_{n+1}}$$

Como esta relação deve ser verdadeira para todo $a \in \mathbb{C}$ com $|a| = 1$, obtém-se

para $j_1+\dots+j_n \neq j_{n+1}$ $\quad c_{j_1,\dots,j_{n+1}} = 0$

para $j_1+\dots+j_n = j_{n+1}$ $\quad c_{j_1,\dots,j_n,|j|} = d_{j_1,\dots,j_n}$ onde j agora é $(j_1,\dots,j_n)$

Resulta, pois

$$u(z,w_1,\dots,w_n) = \sum_{|j|\geq o} d_{j_1,\dots,j_n} z^{|j|} \cdot \frac{1}{w_1^{j_1+1}} \cdots \frac{1}{w_n^{j_n+1}} \quad j=(j_1,\dots,j_n)\in Z_+^n$$

$$= \frac{1}{w_1\cdots w_n} \cdot \sum_{|j|\geq o} d_{j_1,\dots,j_n} \left(\frac{z}{w_1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{z}{w_n}\right)^{j_n} =$$

$$= \frac{1}{w_1\cdots w_n}\, v\left(\frac{z}{w_1},\dots,\frac{z}{w_n}\right),$$

onde, vê-se fàcilmente, v é holomorfa em D^n.

b) Suficiência. Suponhamos que a indicatriz do operador f tenha a forma

$$\frac{1}{w_1\cdots w_n}\, v\left(\frac{z}{w_1},\dots,\frac{z}{w_n}\right) \tag{11}$$

com v holomorfa em D^n. Então esta função é holomorfa num aberto A que contém $DX(\complement D)^n$. De fato, se $r>o$ tomando-se $|z|<r$ e $|w_j|>r$, $j=1,\dots,n$, tem-se $\left|\frac{z}{w_j}\right|<1$, donde (11) é holomorfa no aberto

$$A = \bigcup_{o<r<1} B(o;r) \times (\complement \bar{B}(o;r))^n \supset \left(\bigcup_{o<r<1} B(o;r)\right) X\, (\complement D)^n =$$

$$= DX\,(\complement D)^n$$

Tem-se

$$\left[Lf(h_1,\dots,h_n)\right](z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 x\dots x\Gamma_n} \frac{1}{s_1\cdots s_n}\, v\left(\frac{az}{s_1},\dots,\frac{az}{s_n}\right) h_1(s_1)\dots h_n(s_n)\,ds_1\dots ds_n$$

Chamando

$$\frac{a}{s_j} = \frac{1}{t_j} \Longrightarrow t_j = \frac{s_j}{a} \quad , \; j = 1,\ldots,n$$

vem

$$\left[Lf(h_1,\ldots,h_n)\right](z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 x\ldots x\,\Gamma_n} \frac{1}{t_1\ldots t_n}\, v(\frac{z}{t_1},\ldots,\frac{z}{t_n})h_1(at_1)\ldots h_n(at_n)dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \left[f\, \mathcal{L}(h_1,\ldots,h_n) \right] (z) \; , \; .$$

ou seja, f permuta com os L's .

[Q.E.D.]

<u>Teorema</u> <u>2</u>. Seja :f: $V \longmapsto \mathcal{H}(D)$, G-analítico e contínuo em V = aberto equilibrado de $\mathcal{H}(D)$ e L: $\mathcal{H}(D) \longmapsto \mathcal{H}(D)$ dado por (1) em que $\alpha(z) = az$, com $|a| = 1$. Então f é permutável com os L's se, e sòmente se,

$$f(h)(z)=f(o)(z)+\sum_{n \geq o} \frac{1}{n!}\, \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_n} \frac{1}{s_1\ldots s_n} v_n(\frac{z}{s_1},\ldots,\frac{z}{s_n})h(s_1)\ldots h(s_n)ds_1\ldots ds_n$$

onde v_n é holomorfa em D^n, para todo $n \geq 1$.

<u>Demonstração</u>.

a) <u>Necessidade</u>. Basta aplicar o teorema anterior às diferenciais $\delta^n f(o;h)$, para todo $n \geq 1$.

b) <u>Suficiência</u>. Se a indicatriz n-ésima é dada pela função $\frac{1}{s_1 \ldots s_n} v_n \left(\frac{z}{s_1}, \ldots, \frac{z}{s_n}\right)$ com v_n holomorfa em D^n, tem-se pelo teorema anterior

$$L \ \delta^n f(o;h) = \delta^n f(o;L(h))$$

donde, pelo teorema do nº 2, f e L são permutáveis.

4. <u>Operadores analíticos permutáveis com o subgrupo dos automorfismos do semi-plano</u> P <u>das translações reais</u>.

Temos o resultado.

<u>Proposição</u>. O grupo dos automorfismos do semi-plano P é constituído pelas **homografias**

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1$$

com a, b, c, d números reais.

Veja o teorema 4 p. 185 de [3].

Vamos considerar o subgrupo do grupo anterior constituído pelos automorfismos da forma

$$\alpha : \ z \longmapsto z+b \tag{12}$$

com $b \in \mathbb{R}$ qualquer.

<u>Teorema 1</u>. Seja $f: \mathcal{H}(P)^n \longmapsto \mathcal{H}(P)$ n-linear e contínuo e $L : \mathcal{H}(P) \longmapsto \mathcal{H}(P)$ dado por (1) em que $\alpha(z)$ é da forma (12). Então f permuta com os L's se, e sòmente se,

$$f(h_1, \ldots, h_n)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} v(s_1 - z, \ldots, s_n - z) h_1(s_1) \ldots h_n(s_n) ds_1 \ldots ds_n \tag{13}$$

onde v é holomorfa em $(\complement \bar{P})^n$ (*) .

Demonstração.

a) Necessidade. Pelo teorema do nº 2, capítulo III f pode ser escrito

$$f(h_1,\ldots,h_n)(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 x\ldots x\,\Gamma_n} u(z,s_1,\ldots,s_n)h_1(s_1)\ldots h_n(s_n)ds_1\ldots ds_n$$

sendo u holomorfa num aberto A que contém $PX(\complement P)^n$ e os $\Gamma_j^{'}s$ são os bordos orientados de compactos $H_j^{'}s$ de P tais que $\complement\overset{o}{H}_1 x\ldots x\complement\overset{o}{H}_n \subset A(z)$. Se tomarmos $w_j \in \complement\bar{P}$ então $h_j = \frac{1}{w_j - t_j} \in \mathcal{H}(P)$, $j = 1,\ldots,n$. Tem-se, para estes $h's$,

$$\left[f\mathcal{L}(h_1,\ldots,h_n)\right](z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 x\ldots x\,\Gamma_n} u(z,s_1,\ldots,s_n)\frac{1}{w_1-(s_1+b)}\cdots\frac{1}{w_n-(s_n+b)}ds_1\ldots ds_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1^{'} x\ldots x\,\Gamma_n^{'}} u(z,s_1,\ldots,s_n)\,\frac{1}{s_1-(w_1-b)}\cdots\frac{1}{s_n-(w_n-b)}ds_1\ldots ds_n =$$

$$= u(z,w_1-b,\ldots,w_n-b) \,,$$

e

$$\left[L\ f(h_1,\ldots,h_n)\right](z) = f(h_1,\ldots,h_n)\ (z+b) =$$

---

* Complementar tomado em relação a $\mathbb{C}$.

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n} u(z+b, s_1, \ldots, s_n) \frac{1}{w_1 - s_1} \cdots \frac{1}{w_n - s_n} ds_1 \ldots ds_n =$$

$$= u(z+b, w_1, \ldots, w_n)$$

Logo, se f e L são permutáveis

$$u(z, w_1 - b, \ldots, w_n - b) = u(z+b, w_1, \ldots, w_n),$$

sendo a igualdade verdadeira para quaisquer $z \in P$, $w_j \in \complement \bar{P}$ $(j=1,\ldots,n)$ e $b \in \mathbb{R}$. Derivando-se em relação ao parâmetro b obtem-se a equação

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial w_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial w_n} = 0, \tag{14}$$

em condição inicial

$$u_o = u(z_o, w_1, \ldots, w_n), \; z_o \in P, \tag{15}$$

holomorfa em $\{z_o\} \times (\complement \bar{P})^n$. A equação (14) é linear e homogenea de 1ª ordem e tem n integrais primeiras, a saber, $w_j - z = c_j$ (Cte.), $j=1,\ldots,n$. Sabemos da teoria das equações a derivadas parciais que

$$u^{z_o}(w_1 - z, \ldots, w_n - z) = u(z_o, w_1 - z + z_o, \ldots, w_n - z + z_o) \tag{16}$$

é solução de (14). Como satisfaz à condição inicial temos, devido à unidade da solução, que (16) é holomorfa num aberto que contém $\{z_o\} \times (\complement \bar{P})^n$. Desejamos agora construir uma solução global v de (14) que tenha a forma $v(w_1 - z, \ldots, w_n - z)$. Para isso vamos provar que, tomando-se dois pontos $(z_o, w_{1o}, \ldots, w_{no})$ e $(z_1, w_{11}, \ldots, w_{n1})$ de $P \times (\complement \bar{P})^n$ tais que

$$w_{jo} - z_o = w_{j1} - z_1 \;, \; j = 1, \ldots, n \;,$$

ou seja, tais que o segmento que os une seja paralelo à diagonal de $\mathbb{C}^{n+1}$, então

$$u^{z_o}(w_{1o}-z_o,\ldots,w_{no}-z_o) = u^{z_1}(w_{11}-z_1,\ldots,w_{n1}-z_1) \qquad (17)$$

Ora, esse segmento está inteiramente contido em $PX(\complement\bar{P})^n$, e sabemos que a solução de (14) é dada numa vizinhança aberta B_o em volta de $(z_o,w_{1o},\ldots,w_{no})$. Tomando-se $(z',w_1',\ldots,w_n')$ ponto do segmento interior a B_o, temos que $u^{z'}$, solução numa vizinhança aberta B' em volta deste ponto, coincide com u^{z_o} em $B_o \cap B'$ e então $u^{z_o}(w_{1o}-z_o,\ldots,w_{no}-t_o) = u^{z'}(w_1'-z',\ldots,w_n'-z')$. Por um raciocínio de compacidade temos (17). Em consequência seja a função v definida em $(\complement\bar{P})^n$ como segue

> para $(t_1,\ldots,t_n) \in (\complement\bar{P})$, tomemos $z \in P$ e $(w_1,\ldots,w_n) \in$
> $\in (\complement\bar{P})^n$ tais que

$$w_1-z = t_1,\ldots,w_n-z=t_n, \qquad (18)$$

> então
>
> $$v(t_1,\ldots,t_n) = u^z(w_1-z,\ldots,w_n-z)$$

Pelo que vimos esta função independe dos pontos $z \in P$ e $(w_1,\ldots,w_n) \in$ $\in (\complement\bar{P})^n$ tais que as igualdades (18) sejam verdadeiras. É claro que v é holomorfa em $(\complement\bar{P})^n$.

b) <u>Suficiência</u>. Seja f um operador satisfazendo às condições e tendo como indicatriz uma função v holomorfa em $(\complement\bar{P})^n$.

A função de $\underline{n+1}$ variáveis $v(w_1-z,\ldots,w_n-z)$ é òbviamente holomorfa num aberto que contém $P X (\overset{\circ}{P})^n$. Provemos que f com tal indicatriz permuta com L. De fato

$$\left[Lf(h_1,\ldots,h_n)\right](z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 x\ldots x\,\Gamma_n} v(s_1-(z+b),\ldots,s_n-(z+b))h_1(s_1)\ldots h_n(s_n)ds_1\ldots ds_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 x\ldots x\,\Gamma_n} v((s_1-b)-z,\ldots,(s_n-b)-z)h_1(s_1)\ldots h_n(s_n)ds_1\ldots ds_n.$$

Fazendo

$$t_j = s_j - b \implies s_j = t_j + b \,,$$

obtem-se

$$\left[Lf(h_1,\ldots,h_n)\right](z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_1 x\ldots x\,\Gamma_n} v(t_1-z,\ldots,t_n-z)h_1(t_1+b)\ldots h_n(t_n+b)dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \left[f\, \mathcal{L}(h_1,\ldots,h_n) \right] (z)$$

[Q.E.D.]

Teorema 2. Seja $f\colon V \longmapsto \mathcal{H}(P)$, G-analítico e contínuo no aberto equilibrado V de $\mathcal{H}(P)$ e $L\colon \mathcal{H}(P) \longmapsto \mathcal{H}(P)$ dado por (1) em que $\alpha(z) = z + b$, $\forall b \in \mathbb{R}$. Então f permuta com os L's se, e só se,

$$f(h)(z)=f(o)(z) + \sum_{n\geq o} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_n} v_n(s_1-z,\ldots s_n-z)h(s_1)\ldots h(s_n)ds_1\ldots ds_n$$

onde v_n é holomorfa em $(\complement \bar{P})^n$.

5. <u>Operadores analíticos permutáveis com os automorfismos do plano complexo.</u>

Começamos este número com o seguinte resultado.

<u>Proposição.</u> O grupo dos automorfismos do plano complexo é constituído pelas transformações lineares

$$z \longmapsto az + b \;, \quad a \neq 0$$

Para a demonstração veja [3], capítulo VI, parágrafo 2, nº 3.

Em particular os automorfismos do plano só podem ser de três tipos

a) Translações $\quad z \longmapsto z + b$

b) Homotetias $\quad z \longmapsto az, \ a \neq 0$

c) Semelhanças $\quad z \longmapsto az+b, a \neq 0$

5.1. <u>Operadores analíticos que permutam com o subgrupo dos automorfismos de $\mathbb{C}$ das translações.</u>

<u>Teorema 1.</u> $f: \mathcal{H}(\mathbb{C})^n \longmapsto \mathcal{H}(\mathbb{C})$ n-linear e contínuo, na forma de Pincherle

$$f(h) = \sum_{|m| \geq 0} a_{m_1,\dots,m_n} \frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!} \qquad h=(h_1,\dots,h_n) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})^n$$

é permutável com as translações de $\mathbb{C}$ se, e só se,

$$a_m(z) = c_m \quad (\text{Cte.})$$

para todo $m = (m_1, \dots, m_n) \in Z_+^n$.

Demonstração.

Necessidade. Tem-se

$$\left[f\,\mathcal{L}(h_1,\dots,h_n)\right](z) = \left[f\,(Lh_1,\dots,Lh_n)\right](z) =$$

$$= \sum_{|m|\geq 0} a_{m_1,\dots,m_n}(z).\frac{(h_1(z+b))^{(m_1)}}{m_1!}\cdots\frac{(h_n(z+b))^{(m_n)}}{m_n!},$$

e

$$\left[Lf(h_1,\dots,h_n)\right](z) = f(h_1,\dots,h_n)(z+b) =$$

$$= \sum_{|m|\geq 0} a_{m_1,\dots,m_n}(z+b)\frac{h_1^{(m_1)}(z+b)}{m_1!}\cdots\frac{h_n^{(m_n)}(z+b)}{m_n!}$$

Como $(h_j(z+b))^{(m_j)} = h_j^{(m_j)}(z+b)$, usando-se a hipótese e o teorema 2 do nº 4, capítulo III obtém-se

$$a_{m_1,\dots,m_n}(z) = a_{m_1,\dots,m_n}(z+b) \begin{cases} \forall b \in \mathbb{C} \\ \forall m = (m_1,\dots,m_n) \in Z_+^n \end{cases}$$

Portanto

$$a_m(z) = c_m \quad (\text{Cte.}) \qquad \forall m = (m_1,\dots,m_n) \in Z_+^n$$

b) Suficiência. Reciprocamente, se as condições são satisfeitas

$$f(h) = \sum_{|m| \geq o} c_{m_1,\ldots,m_n} \frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!}$$

permuta com as translações. De fato ,

$$\left[Lf(h_1,\ldots,h_n)\right](z)=f(h_1,\ldots,h_n)(z+b)=\sum_{|m| \geq o} c_{m_1,\ldots,m_n} \frac{h_1^{(m_1)}(z+b)}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}(z+b)}{m_n!}$$

e

$$\left[f\mathcal{L}(h_1,\ldots,h_n)\right](z) = \sum_{|m| \geq o} c_{m_1,\ldots,m_n} \frac{(Lh_1)^{(m_1)}(z)}{m_1!} \cdots \frac{(Lh_n)^{(m_n)}(z)}{m_n!} =$$

$$= \sum_{|m| \geq o} c_{m_1,\ldots,m_n} \frac{h_1^{(m_1)}(z+b)}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}(z+b)}{m_n!},$$

donde a conclusão esperada.

<u>Teorema 2</u>. $f: V \longmapsto \mathcal{H}(\mathbb{C})$, G-analítico e contínuo no aberto quilibrado V de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, na forma de Pincherle

$$f(h) = \sum_{n \geq o} \frac{1}{n!} \sum_{|m| \geq o} a_m^n \frac{h^{(m)}}{m!}$$

é permutável com as translações de $\mathbb{C}$ quando, e sòmente quando, $a_m^n(z) = c_m^n$ (Cte.), quaisquer que sejam $n \geq o$ e $m=(m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n$.

<u>Demonstração</u>.

a) Necessidade. Pelo teorema do nº 2 é bastante aplicar o teorema anterior as diferenciais $\delta^n f(o;h_1,\ldots,h_n)$.

b) Suficiência. Se a condição é satisfeita, pelo teorema anterior obtém-se

$$L\,\delta^n f(o;h) = \delta^n f(o;Lh)$$

donde, pelo teorema do nº 2, f é permutável com as translações.

5.2. Operadores analíticos que permutam com o subgrupo dos automorfismos de $\mathbb{C}$ das homotetias.

Teorema 1. $f: \mathcal{H}(\mathbb{C})^n \longmapsto \mathcal{H}(\mathbb{C})$ n-linear e contínuo, na forma de Pincherle

$$f(h) = \sum_{|m|\geq o} a_{m_1,\ldots,m_n} \frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!} \qquad \{h = (h_1,\ldots,h_n) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})^n$$

é permutável com as homotetias de $\mathbb{C}$ se, e só se,

$$a_m(z) = c_m\, z^{|m|} \qquad (c_m = \text{Cte.})$$

para todo $m = (m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n$.

Demonstração.

a) Necessidade. Tem-se

$$\left[f\,\mathcal{A}(h_1,\ldots,h_n)\right](z) = \left[f\,(Lh_1,\ldots,Lh_n)\right](z) =$$

$$= \sum_{|m| \geq o} a_{m_1,\ldots,m_n}(z) . \frac{(h_1(az))^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{(h_n(az))^{(m_n)}}{m_n!}$$

$$\left[Lf(h_1,\ldots,h_n)\right](z)=f(h_1,\ldots,h_n)(az)=\sum_{|m| \geq o} a_{m_1,\ldots,m_n} \frac{h_1^{(m_1)}(az)}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}(az)}{m_n!}$$

Como $(h_j(az))^{(m_j)} = a^{m_j} h_j^{(m_j)}(az)$, usando-se a hipótese e o teorema 2 do nº 4, capítulo III obtém-se

$$a_{m_1,\ldots,m_n}(az) = a^{|m|} a_{m_1,\ldots,m_n}(z)$$

$$\begin{cases} \forall a \in \mathbb{C}, \; e \neq 0 \\ \forall m = (m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n \end{cases}$$

Segue-se desta relação que

$$a_m(z) = c_m z^{|m|} \qquad (c_m = \text{Cte.}).$$

para todo $m=(m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n$

b) Suficiência. Se as condições são satisfeitas então

$$f(h) = \sum_{|m| \geq o} c_{m_1,\ldots,m_n} z^{|m|} \frac{h_1^{(m_1)}}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}}{m_n!}$$

permuta com as homotetias. De fato,

$$\left[Lf(h_1,\ldots,h_n)\right](z)=f(h_1,\ldots,h_n)(az)=\sum_{|m| \geq o} c_{m_1,\ldots,m_n} (az)^{|m|} \frac{h_1^{(m_1)}(az)}{m_1!} \cdots$$

$$\ldots \frac{h_n^{(m_n)}(az)}{m_n!}$$

e

$$\left[f\,\mathcal{L}(h_1,\ldots,h_n)\right](z) = \sum_{|m|\geq o} c_{m_1,\ldots,m_n} z^{|m|} \frac{(Lh_1)^{(m_1)}(z)}{m_1!} \cdots \frac{(Lh_n)^{(m_n)}(z)}{m_n!} =$$

$$= \sum_{|m|\geq o} c_{m_1,\ldots,m_n} a^{|m|} z^{|m|} \frac{h_1^{(m_1)}(az)}{m_1!} \cdots \frac{h_n^{(m_n)}(az)}{m_n!},$$

donde resulta que f permuta com as homotetias.

<u>Teorema 2</u>. $f\colon V \longmapsto \mathcal{H}(\mathbb{C})$, G-analítico e contínuo no aberto equilibrado V de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, na forma de Pincherle

$$f(h) = \sum_{n\geq o} \frac{1}{n!} \sum_{|m|\geq o} a_m^n \frac{h^{(m)}}{m!}$$

é permutável com as homotetias de $\mathbb{C}$ quando, e sòmente quando,

$$a_m^n(z) = c_m^n z^{|m|}$$

quaisquer que sejam $n \geq o$ e $m=(m_1,\ldots,m_n)\in Z_+^n$.

5.3. <u>Operadores que permutam com o grupo de todos os automorfismos de</u> $\mathbb{C}$.

<u>Teorema</u>. Uma condição necessária e suficiente para que $f\colon V \longmapsto \mathcal{H}(\mathbb{C})$, com V = aberto equilibrado de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, seja G-analítico e contínuo em V e permutável com as semelhanças é que

$$f\ (h) = u \circ h \tag{19}$$

onde u é holomorfa numa vizinhança da origem

Demonstração.

a) Necessidade. Com as hipóteses f se escreve na forma de Pincherle

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{|m| \geq 0} a_m^n \frac{h^{(m)}}{m!}$$

Sendo permutável com as semelhanças em particular é permutável com as homotetias, obtendo-se por aplicação do teorema 2 do nº 5.2.

$$a_m^n\ (z) = c_m^n\ z^{|m|}$$

Da mesma forma é permutável com as translações obtendo-se então

$$c_m^n\ z^{|m|} = \text{Cte.} \qquad \begin{cases} n \geq 0 \\ m=(m_1,\ldots,m_n) \in Z_+^n \end{cases}$$

o que sòmente é possível se

$$c_m^n = 0 \qquad \text{para} \quad |m| > 0$$

Resulta

$$f\ (h) = \sum_{n \geq 0} c_o^n \frac{h^n}{n!}$$

isto é,

$$f\ (h) = u \circ h$$

em que $u(z) = \sum c_o^n \frac{z^n}{n!}$ é holomorfa numa vizinhança da origem.

b) <u>Suficiência</u>. Reciprocamente, se

$$f(h) = u \circ h$$

com $u(z)$ holomorfa em volta da origem, é fácil mostrar que f é um operador definido num aberto equilibrado V de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, a valores em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, LF-analítico em V. Mostremos que f permuta com as semelhanças. De fato, tem-se

$$\left[Lf(h) \right](z) = (L(uoh))(z) = ((uoh)o\,\alpha)(z) = (uoh)(az+b),$$

e

$$\left[fL(h) \right](z) = (uoL(h))(z) = \left[u(L(h)) \right](z) = u(L(h)(z)) =$$

$$= u(h(az+b)) = (uoh)(az+b),$$

donde o resultado esperado.

[Q.E.D.]

B I B L I O G R A F I A

[1] BOURBAKI, N., Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. I - II, Actualités Scientifiques et Industrielles, nº 1189, Paris, 1953.

[2] _____ Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. III - IV, Actualités Scientifiques et Industrielles, nº 1229, Paris, 1955.

[3] CARTAN, Henri, Théories élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris, 1961.

[4] DIAS, Cândido L. da Silva, Espaços vetoriais topológicos e sua aplicação aos espaços funcionais analíticos, Tese de Concurso, 1951, Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, 1952.

[5] FANTAPPIÈ, Luigi, I funzionali analitici, Memoria Acc. dei Lincei, Vol. III, S.6, fasc. 11, 1930.

[6] _____ Teoria de los funcionales analíticos y sus aplicaciones, Barcelona, 1943.

[7] GROTHENDIECK, Alexandre, Sur certains espaces de fonctions holomorphes, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, Band 192, Heft 1, 1953.

[8] HILLE, Einar, Functional Analysis and Semi-Groups, American Mathematical Society Publications, Vol. XXXI, Providence, R.I., 1957.

[9] NACHBIN, Leopoldo, *Topics on Topological Vector Spaces*, Summer at the University of Rochester, Rochester, 1963.

[10] PINCHERLE, Salvatore, *Le operazione distributive*, Ditta Zanichelli, Bologna, 1901.

[11] PISANELLI, Domingos, *Contribuição ao estudo dos operadores analíticos*, Tese de Livre-Docência, 1961. Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, Vol. 16º, 1961.

[12] _____ *Funzionali Analitici dello Spazio* $\mathcal{H}(0)$, Bolletino della Unione Matematica Italiana, Serie III, Ano XX, nº 4, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1966.

[13] _____ *Operadores analíticos permutáveis e Equações invariantes*, Tese de Concurso, São Paulo, 1966.

[14] SILVA, J. Sebastião e, *Funções analíticas e análise funcional*, Portugaliae Mathematica, Edição de "Gazeta de Matemática Lda.", Vol. 9, Lisboa, 1950.

[15] _____ *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le aplicazioni*, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, Vol. XIV, Fasc. 3, 1955.

[16] _____ *Conceito de função diferenciável em espaços localmente convexos*, Publicações do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, Lisboa, 1957.

[17] WILANSKI, Albert, *Functional Analysis*, Blaisdell Publishing Company, 1964.

* *
* *
*