João Batista Castanho
Licenciado em Matemática

SÔBRE O TEOREMA DE PASCAL NA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo para doutoramento em Ciências (Matemática)

São Paulo
1950

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS

São Paulo (Brasil) 20 de novembro de 1950

N. 2487

S-277
onm

Senhor Professor,

Em nome do Senhor Diretor, tenho a satisfação de comunicar-lhe haver sido V.Excia. escolhido pela Congregação desta Faculdade para integrar a comissão examinadora do doutoramento doLLicenciado João Batista Castanho.

Cumpre-me comunicar-lhe que a sessão pública de defesa de tese deverá realizar-se no próximo dia 30, às 14 horas, bem como encaminhar-lhe um exemplar da tese apresentada.

Agradecendo mais esta valiosa colaboração com que V.Excia. distingue esta Faculdade, subscrevo-me com apreço e consideração.

Odilon Nogueira de Matos

Odilon Nogueira de Matos
Secretário

Ao Exmo. Snr. Prof. Dr. Omar Catunda

Cod 2/143

Preâmbulo

~~Afirma Hilbert~~ que tôda a Geometria Hiperbólica é consequên-do "Cálculo dos Extremos", por êle introduzido, sem o uso do postulado da continuidade (1). Liebmann e Gerretsen, entre outros, após as necessárias pesquisas, chegaram, cada um de per si, à conclusão de que era verdadeira a afirmativa, muito embora, segundo Gerretsen, os trabalhos de Liebmann não tenham sido coroados de êxito, porquanto, em lugar decisivo, se utilizara, Liebmann, do axioma da continuidade (2). Aliás já Fr. Schur pusera em dúvida a afirmação de Hilbert (3). Para Gerretsen, porém, era infundado o ceticismo de Schur, pois que, efetivamente, tôda a Geometria de Lobatschewsky pode ser construida, tendo como base exclusiva, os postulados dos quatro primeiros grupos: o da pertinência, o da congruência, o da ordem e o das paralelas.

Propusemo-nos, também, construir a Geometria Hiperbólica, a partir daqueles quatro grupos de postulados. Em uma primeira etapa, conseguimos a demonstração, por processos elementares, por meio de uma como que Geometria Analítica, no plano hiperbólico, a demonstração do teorema de Pascal, o qual é enunciado em sua forma clássica, e que constitui, no fundo, a tese ora apresentada.

Os postulados dos três primeiros grupos a que nos referimos, juntamente com as consequências dêles advindas, constituem o que se convencionou chamar de Geometria Plana Absoluta. Em nosso trabalho, que é dividido em sete capítulos, admitimos essa Geometria, com exceção da parte referente a movimentos.

No primeiro capítulo, intitulado "Extremos de uma reta", damos as definições de semi-retas paralelas e o postulado das paralelas, sob a forma que lhes deu Gerretsen: existência e unicidade da semi-reta paralela a uma semi-reta dada, por um ponto dado, fora da reta suporte, e unicidade da reta que passa por dois extremos. A enunciação dêsse postulado, porém, é precedida dos teoremas que se referem à conservação do paralelismo ao longo de uma reta, à reciprocidade e à transitividade do paralelismo. As demonstrações dos teoremas I.02 e I.07 não diferem, em substância, das que se encontram nos livros de Gino Fano e David Hilbert, respetivamente (4).

Em seguida, no capítulo II, estudamos os movimentos, que são definidos como particulares correspondências biunívocas entre os pontos de um plano, figurando, então, as simetrias (em relação a uma reta) como particulares movimentos. É de notar-se que tôdas as proposições dessa parte pertencem à Geometria Plana Absoluta, com exceção dos teoremas II.23 e II.24, os quais, aliás, já constituem aplicação da teoria dos movimentos, e pertencem à Geometria Hiperbólica. As demonstrações dos teoremas II.24 e II.21, respetivamente, encontramo-las em Y.Why Tschen e Hilbert, respetivamente (5).

---

(1) D.Hilbert - Grundlagen der Geometrie - Anhang III - (1930, 7a. edição). Traduzimos "end", do alemão, por extremo.

(2) Gerretsen - Die Begründung der Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene - Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 45, 479-483(1942).

(3) Fr.Schur - Zur Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie - Math. Ann. Bd.59 (1904) pp.314-320.

(4) Gino Fano - Geometria Non Euclidea - Zanichelli, Bologna, 1935. D.Hilbert, obra já citada.

(5) Y.Why Tschen, in American Journal of Mathematics, vol. LXVII, num. 3 July, 1945. D.Hilbert, obra já citada.

No capítulo III, iniciado com as operações de adição e multiplicação dos extremos, mostramos que o conjunto dos extremos constitui um corpo ordenado. Seguidamente, já no capítulo IV, mostramos que a cada movimento no plano se pode associar uma transformação linear, fracionária, dos extremos. Ambos êsses capítulos não são mais do que uma tradução livre de parte do trabalho de Gerretsen, já citado.

No capítulo V estabelecemos as relações que devem existir entre os extremos das retas, a fim de que elas sejam secantes, paralelas ou não secantes e estabelecemos uma condição necessária e suficiente, analiticamente, para que duas retas tenham uma perpendicular comum.

No capítulo VI, mostramos, essencialmente, que é condição necessária e suficiente, para que três retas pertençam a um ponto (próprio, impróprio ou ideal) que o produto e a semi-soma dos extremos de cada uma satisfaçam a uma equação linear, cujos coeficientes são elementos daquele corpo. Finalmente, vem o último capítulo que consta, precisamente, da demonstração analítica, ou como diria Gino Fano, "algebrizada" do teorema de Pascal (1).

Queremos externar os nossos agradecimentos, ao Prof. Fernando Furquim de Almeida, pelas inúmeras sugestões e pelo grande incentivo prestados durante tôda a elaboração dêste trabalho.

São Paulo, 30 de abril de 1950.

João Batista Castanho

---

(1) Gino Fano, obra citada, p. 89.

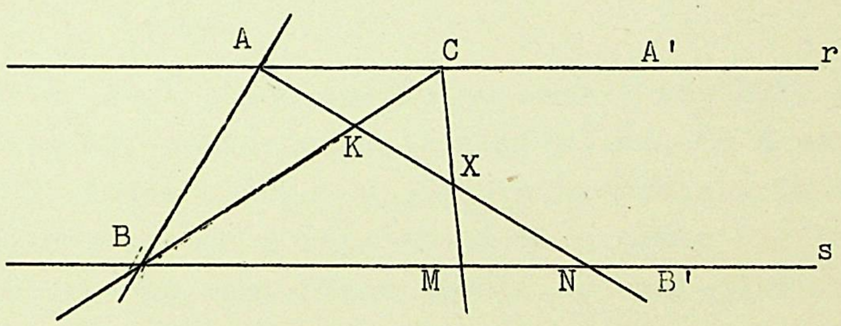
I. OS EXTREMOS DE UMA RETA

I.01. Semi-retas paralelas: Dadas duas semi-retas, AA' e BB', dizemos que AA' é paralela à BB', quando e sòmente quando:

a) AA' e BB' pertencem à mesma reta, e, ou todos os pontos de AA' pertencem à BB', ou todos os pontos de BB' pertencem à AA'.

b) AA' e BB' pertencem às retas r e s, respetivamente, as quais não têm ponto em comum, e, tôda semi-reta de origem A, interna ao ângulo BAA', encontra a semi-reta BB'.

I.02. Teorema: Se AA' é paralela à BB', as retas r e s a que pertencem AA' e BB' são distintas, e C é um ponto qualquer da reta r, a semi-reta CA', paralela à AA', também é paralela à semi-reta BB'.



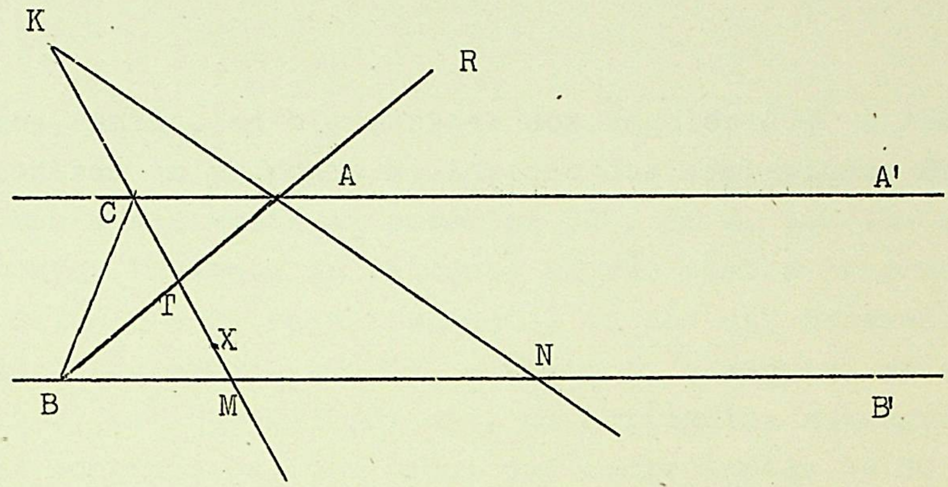
Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que C pertence à semi-reta AA'. Tomemos, então, um ponto qualquer, X, interno ao ângulo BCA', e demonstremos que a semi-reta CX corta a semi-reta BB'. Se X estiver no semi-plano oposto ao semi-plano BB'C (1), é imediato que o segmento CX cortará o contôrno BB' dêsse semi-plano. Suponhamos, então, que X esteja no semi-plano BB'C. Ora, todo ponto dêsse semi-plano, interno ao ângulo BCA' é, também interno ao ângulo BAA', e, pois, AX é interna a êsse último ângulo. Essa semi-reta cortará, portanto, BB' em um ponto N. Como, por outro lado, os pontos internos do segmento BC são, também, internos do ângulo BAA', AX cortará BC em um ponto K. Considerando

---

(1) Indicaremos sempre um semi-plano com três letras, as duas primeiras das quais indicarão a reta contôrno (ou origem) e a terceira indicará um ponto qualquer do semi-plano, não pertencente, porém, ao contôrno.

o triângulo BKN, vemos que a reta CX corta o lado KN no ponto X e, como passa por um ponto externo ao lado BK, segue-se, pelo postulado de Pasch, que CX cortará o outro lado, isto é, BN, e, portanto, a semi-reta BB'.

Consideremos, agora, o caso em que C pertence à semi-reta oposta à AA'. Tomemos um ponto X, qualquer, interno ao ângulo BCA'.



Se X estiver no semi-plano oposto ao semi-plano BB'C, é imediato que CX cortará BB', contôrno dêsse semi-plano. Se X estiver no semi-plano BB'C, tomemos sôbre a semi-reta oposta à CX um ponto qualquer, K, e tracemos a reta KA. Como o ponto K é externo ao ângulo BAA' e está no semi-plano oposto ao semi-plano AA'B, a semi-reta AK é externa àquele ângulo BAA' e a semi-reta a ela oposta, AN, é interna e, portanto, corta a semi-reta BB' em um ponto N. Como no caso anterior, CX corta o segmento AB, em um ponto T. Vemos, então, que a reta CX corta o lado AB do triângulo ABN em T e, como passa por um ponto externo ao lado AN, segue-se (1) que corta o outro lado, BN e, portanto, a semi-reta BB'. E o teorema está completamente demonstrado.

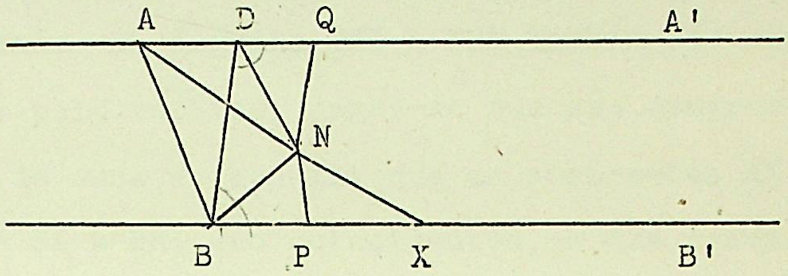
I.03. <u>Teorema</u>: Se a semi-reta AA' é paralela à semi-reta BB', esta semi-reta é paralela àquela, AA'.

Se as semi-retas pertencerem à mesma reta, o teorema decorre da própria definição de semi-retas paralelas. Se pertencerem a retas distintas, basta demonstrar que tôda semi-reta interna ao ângulo ABB' corta a semi-reta AA'.

Começaremos por demonstrar que existe uma reta por B, que encontra AA' no ponto D e forma os ângulos BDA' e DBB', congruentes.

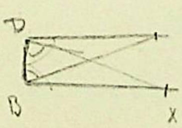
---

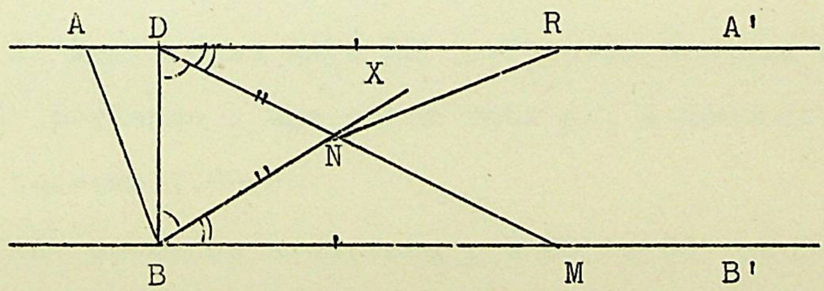
(1) Postulado de Pasch.



Tracemos, então, as bissetrizes dos ângulos A'AB e ABB', as quais se encontram em um ponto N, interno dos semi-planos BB'A e AA'B, porquanto a semi-reta AN encontra BB', em X, por lhe ser paralela, e os pontos internos do segmento AX são pontos internos do ângulo ABB'. Sejam Q e P, respetivamente, os pés das perpendiculares pelo ponto N às retas AA' e BB', e tomemos, a seguir, na semi-reta QA o ponto D, tal que DQ≡BP. Ora, os triângulos retângulos DNQ e NBP são congruentes, por causa das congruências de NQ e NP, de um lado, e de DQ e BP, de outro, e, consequentemente, são congruentes os ângulos NDQ e NBP, o mesmo acontecendo com os segmentos DN e BN. A congruência dos ângulos BDA' e DBB' segue-se, então, como consequência da propriedade uniforme da adição de ângulos.

Tomemos, agora, uma semi-reta BX, qualquer, interna ao ângulo ABB'. Construamos, a seguir, a semi-reta DN, no semi-plano AA'B,





Supérfluo

de modo que os ângulos XBB' e NDA' sejam congruentes, em que o ponto D é tal que a reta BD forma os ângulos BDA' e DBB', congruentes. Indicando com N o ponto comum às semi-retas BX e DN, vê-se que são congruentes os ângulos NBD e NDB, pela propriedade uniforme da subtração de ângulos. Indicando, agora, com M o ponto comum às semi-retas BB' e DN, e tomando, sôbre AA' o ponto R tal que BM≡DR, vê-se, então, que são congruentes os triângulos BNM e DNR, do que resulta a congruência dos ângulos BNM e DNR. Como, por outro lado, os ângulos DNX e BNM também são congruentes, porque opostos pelo vértice, segue-se que são congruentes os ângulos DNX e DNR, de onde se conclui que as semi-retas NX e NR, e consequentemente BX e BR, são coincidentes, o que prova que qualquer semi-reta de orígem B, interna ao ângulo ABB' encontra a semi-reta AA', e, pois, que a semi-reta BB' é paralela à semi-reta AA'.

Observação: De ora em diante, poderemos dizer que "duas semi-retas são paralelas entre si", tôda vez que uma delas for paralela à outra, pois aquela expressão é um modo abreviado de dizer que uma das semi-retas, digamos a primeira, é paralela à segunda e esta, por sua vez, é paralela à primeira.

I.04. Teorema: Se AA' é uma semi-reta paralela à BB', e esta semi-reta é paralela à semi-reta CC', a semi-reta AA' é paralela à semi-reta CC'.

Examinemos os diversos casos que se podem apresentar:

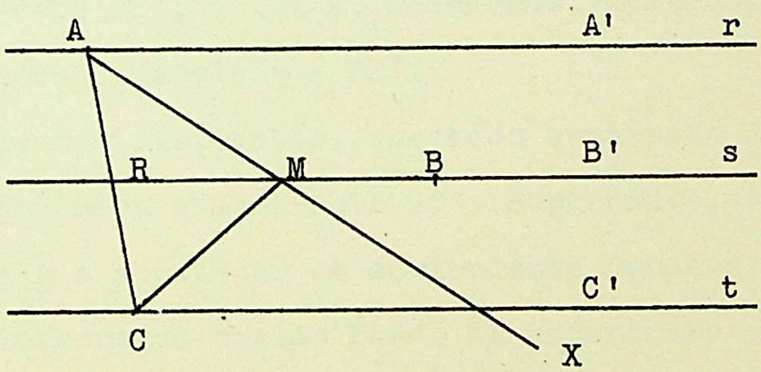
a) As três semi-retas pertencem à mesma reta: é imediata a demonstração, que decorre da própria definição de semi-retas paralelas.

b) As semi-retas AA' e BB' pertencem à mesma reta r e a semi-reta CC' pertence a uma outra reta s . A demonstração decorre, então, do teorema I.02.

c) AA' pertence a um reta r e BB' e CC' pertencem a outra reta s. A demonstração poderia fazer-se como uma aplicação dos teoremas I.02 e I.03. Pode-se, porém, deixar de recorrer à reciprocidade do paralelismo de duas semi-retas. Com efeito, para demonstrar que AA' é paralela à CC', basta demonstrar que tôda semi-reta de origem A e interna ao ângulo CAA' encontra a semi-reta CC'. Seja CX uma tal semi-reta. Se o ponto C for interno à semi-reta BB', CX encontrará CC', pois que então CX será interna ao ângulo BAA'. Se o ponto C for externo à semi-reta BB', a semi-reta CX se Para Sta.?

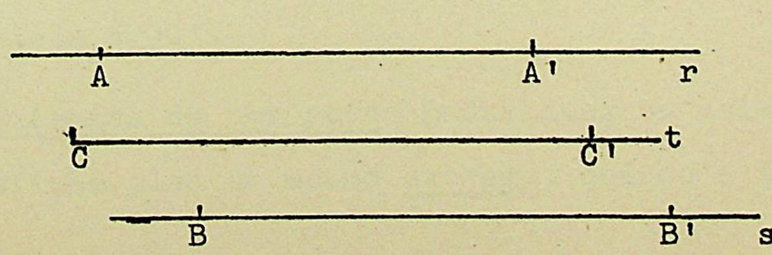
rá interna ao ângulo CAB e, como os pontos internos do segmento CB são internos ao ângulo CAB, segue-se que CX encontra êsse segmento em um ponto interno.

d) As três semi-retas pertencem a três retas, r, s e t, distintas entre si e r e s estão em semi-planos opostos em relação à reta s (contôrno). Com essa hipótese exclui-se que r e t tenham um ponto comum. Tomemos uma semi-reta AX, qualquer, interna ao ângulo CAA'. Se AX for interna ao ângulo BAA', AX encontra a semi-reta BB' em um ponto M, porquanto AA' é paralela à BB'.



Se AX for externa ao ângulo BAA', seja R o ponto em que o segmento CA encontra a reta s. Como a semi-reta AX é interna ao ângulo CAA' (ou ângulo RAA'), segue-se, pelo caso c), que AX encontra a reta s em um ponto M. Segundo o teorema I.02, MB' é uma semi-reta paralela à CC', e, uma vez que MX é semi-reta interna ao ângulo CMB'(porque a semi-reta a ela oposta está no semi-plano MB'A e é externa ao ângulo CMB'), MX, e portanto AX, encontram a semi-reta CC'.

e) AA' pertence à r, BB' à s, CC' à t, e r e t estão em um mesmo semi-plano em relação à s .



Demonstraremos, primeiramente, que as retas r e t não podem encontrar-se. Suponhamos, então, para a redução ao absurdo, que o ponto P pertença à r e à t. De acôrdo com os teoremas I.02 e I.03 e a parte c dêste teorema, são paralelas as semi-retas PA' e BB', PC' e BB'. Em relação ao ângulo BPA', a semi-reta PC' será interna ou externa. Se for interna, como PA' é paralela à BB', PC' encontrará BB', o que é absurdo, porque t e s não têm ponto em comum. Se for externa, ou PA' será interna ao ângulo BPC', e a semi-reta PA' cortará BB', o que é absurdo, ou todos os pontos de PC' pertencerão ao semi-plano oposto ao semi-plano PBB' e, pois, haverá semi-retas internas ao ângulo C'PB que não encontrarão a semi-reta BB', o que é, novamente, absurdo, porquanto PC' é uma semi-reta paralela à BB'.

Resta demonstrar, então, que tôda semi-reta AX, interna ao ângulo CAA', encontra a semi-reta CC'. Suponhamos, como na última figura, que r e s estejam em semi-planos opostos em relação à t. Se AX for interna ao ângulo BAA', AX encontrará a semi-reta BB', em um ponto N, e como A e N estarão em semi-planos opostos em relação à t, o segmento AN cortará a reta t, em um ponto Y, o qual, certamente, pertencerá à semi-reta CC'. Se AX for externa ao ângulo BAA', AX será interna ao ângulo CAB, e, como A e B estão em semi-planos opostos em relação à t, o segmento AB corta a reta t, em um ponto R. Ora, como todos os pontos do segmento CR são pontos do ângulo CAB, segue-se que AX encontrará êsse segmento, e, portanto, a semi-reta CC'.

Se as retas s e t estiverem em semi-planos opostos em relação à r, demonstrar-se-á, como no parágrafo anterior, que a semi-reta CC' é paralela à AA' e, pela aplicação do teorema I.03, que AA' é paralela à CC'.

I.05. Extremos de uma reta: Dadas duas ou mais semi-retas, dizemos que definem elas um mesmo extremo, quando e sòmente quan

JULHO

D	S	T	Q	Q	S	S
—	—	—	—	—	—	1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	—	—	—	—	—

Mês atual

JULHO
11
TERÇA-FEIRA
1950

AGÔSTO

D	S	T	Q	Q	S	S
—	—	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	—	—

Mês próximo

Prolixo — II.2, II.7,
Ordem — dada a dif. de movt.º é nat.al
das imediat.es te a dif de identidade
e de movt.º inverso.

Abuso de dem. por absurdo, ex: II.8
Teor II.18, pg II.11

do são paralelas entre si. Consequentemente, semi-retas não paralelas definem extremos diferentes.

Designaremos os extremos por meio de letras minúsculas do alfabeto grego (1) e das letras u e v.

Dizemos que as semi-retas que definem um mesmo extremo α, passam por α, ou que elas pertencem a α, ou que α pertence a essas semi-retas.

Dizemos, ainda, que uma reta r passa por um extremo α, ou que pertence a êsse extremo, ou que êsse extremo pertence à reta, quando e sòmente quando uma semi-reta de r pertence a α. Por semi-reta (A, α) dever-se-á entender a semi-reta de origem A, que passa por α; por reta (A, α) a reta que passa por A e à qual pertence a semi-reta (A, α).

I.06. *Postulado das paralelas:* Dada uma semi-reta (A, α) e um ponto P, fora da reta (A, α), existe uma e *uma só semi-reta* de origem P, que passa por α. Dados dois extremos α e β, uma e uma só reta pode passar por êsses extremos. A unicidade é evidente

Segue-se, imediatamente, dêsse postulado, que tôda reta possui dois extremos. No capítulo II, em o número II.24, demonstraremos que por dois extremos (distintos) passa sempre uma reta.

I.07. *Teorema:* Se CC' e DD' são duas semi-retas paralelas, a a reta a que pertence CC', c a reta a que pertence DD', B um ponto da faixa ac (2), B_1 e B' os simétricos de B em relação à a e c, respetivamente, e A o ponto médio do segmento B_1B', a semi-reta (A, α), em que α é o extremo a que pertencem CC' e DD', é perpendi

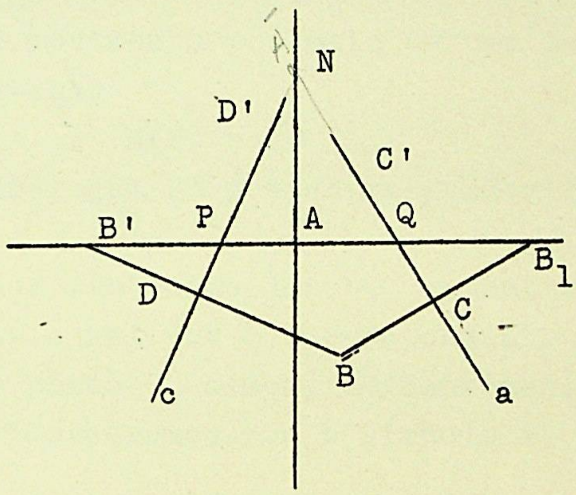
---

(1) Quatro extremos, porém, serão representados por meio de outros símbolos: 0, ∞, -1 e 1, respetivamente. (Capítulo III e seguintes).

(2) Vide números II.08 e II.21.

cular à reta B_1B'.

Com efeito, tracemos a reta perpendicular à B_1B', pelo ponto A., e, para a redução ao absurdo, suponhamos que essa perpendicular não passe por α. Seja AN uma semi-reta daquela perpendicular, pertencente ao semi-plano B_1BC'. Sejam P e Q as intersecções da reta B_1B' com as retas c e a, respetivamente.



Ora, como

$$PB < PQ + BQ$$

segue-se que

$$PB' < PB_1$$

e, igualmente

$$QB_1 < QB' \quad ,$$

e, portanto, A é um ponto da faixa ac. Então, se AN não passa por α, AN corta a semi-reta CC', ou a semi-reta DD'. Se cortar a semi-reta CC', no ponto $\bar{A}$, por exemplo,

$$\bar{A}B' \equiv \bar{A}B$$

$$\bar{A}B' \equiv \bar{A}B_1$$

e, pois, $$\bar{A}B \equiv \bar{A}B_1 \quad ,$$

isto é, $\bar{A}$ será um ponto da reta c, o que é absurdo, pois CC' e DD' são semi-retas paralelas.

----------X----------

II. MOVIMENTOS .

II.01. Definição de movimento : Dados dois planos π e π' , distintos ou coincidentes, sejam C e C', respetivamente, o conjunto dos pontos de π e π'. Estabeleçamos entre C e C' uma correspondência biunívoca tal que, se A e B forem dois pontos quaisquer do conjunto C, e A' e B' os pontos respetivamente correspondentes de C', os segmentos AB e A'B' sejam congruentes. Diremos, então, que essa correspondência é um movimento.

Designaremos um movimento por meio de uma letra maiúscula do alfabeto latino e a notação

$$M(P) = P'$$

indicará, precisamente, que P' é o correspondente de P, no movimento M.

Se os dois planos são coincidentes, e, entre os pontos de C e C', a correspondência é tal que o correspondente de um ponto qualquer, P, é o próprio ponto P, temos, evidentemente, um movimento. A êsse movimento, que indicaremos com o símbolo 1, daremos o nome de identidade.

Se, no movimento M, um ponto P tiver como correspondente êle próprio, isto é, se

$$M(P) = P,$$

diremos que M conserva o ponto P. A identidade, pois, é um movimento que conserva todos os pontos.

II.02. Igualdade: - Dados dois movimentos, M_1 e M_2, se, qualquer que seja o ponto P,

$$M_1(P) = M_2(P),$$

diremos que M_1 é igual a M_2, e escreveremos $M_1 = M_2$.

II.03. Produto de dois movimentos : Dados dois movimentos, M_1 e M_2, sejam

$$M_1(P) = P' \ , \quad M_2(P') = P''$$

$$M_1(Q) = Q' \ , \quad M_2(Q') = Q''$$

em que P e Q são dois pontos quaisquer do plano. Como

$$PQ \equiv P'Q' \quad \text{e} \quad P'Q' \equiv P''Q'',$$

segue-se que,

$$PQ \equiv P''Q'',$$

e, como as correspondências entre os pontos P e P', de um lado, e entre P' e P'', de outro, são biunívocas, o mesmo acontece com os pontos P e P'', de maneira que existe um movimento M que transforma P em P'', e Q em Q''. A êsse movimento daremos o nome de produto do movimento M_1 pelo movimento M_2, e escreveremos

$$M = M_2 M_1 .$$

II.04. <u>Propriedade uniforme</u> : Se $M_1 = M_2$ e $M_3 = M_4$, $M_1 M_3 = M_2 M_4$.

Com efeito, se $M_4(P) = P'$ e $M_4 = M_3$,

$$M_3(P) = P'$$

e se, $\quad M_2(P') = P''$ e $M_1 = M_2$,

$$M_1(P') = P''$$

e, portanto,

$$M_1 M_3(P) = P''$$

e

$$M_2 M_4(P) = P''$$

e, como P é um ponto qualquer, $M_1 M_3 = M_2 M_4$.

II.05. A definição de produto estende-se fàcilmente ao caso de mais de dois movimentos, e, se

$$(M_3 M_2) M_1$$

é o produto do movimento

$$M_1$$

pelo movimento

$$M_3 M_2$$

e

$$M_3 (M_2 M_1)$$

o produto do movimento

$$M_2 M_1$$

pelo movimento

$$M_3,$$

vê-se imediatamente, que

$$M_3 (M_2 M_1) = (M_3 M_2) M_1,$$

isto é, é válida a prpriedade associativa e, na indicação do produto de 3 ou mais movimentos, é perfeitamente supérfluo o uso de parênteses.

II.06. <u>Teorema</u> : Se A, B e C são 3 pontos de uma reta <u>r</u> e

$$M(A) = A' , M(B) = B' , M(C) = C',$$

os pontos A', B' e C' pertencem também a uma reta r' e, se o ponto C estiver entre A e B, C' estará entre A' e B'.

Para a demonstração pela redução ao absurdo, suponhamos que C' não pertença à reta $r' \equiv A'B'$. Nesse caso, A', B' e C' determinam um triângulo e

$$A'B' < A'C' + C'B'.$$

Como, porém,

$$A'B' \equiv AB, \quad A'C' \equiv AC \quad \text{e} \quad C'B' \equiv CB\ ,$$

segue-se que

$$AB < AC + CB,$$

o que é absurdo, pois, desde que C está entre A e B,

$$AB \equiv AC + CB.$$

Das congruências

$$A'C' + C'B' \equiv AC + CB\ , \quad \text{e} \quad AB \equiv A'B',$$

segue-se que C' está entre A' e B'.

A reta r' denomina-se correspondente da reta r, e escreve-se

$$M(r) = r'.$$

II.07. Teorema : Se r e s são duas retas perpendiculares entre si e r' e s' as retas respetivamente correspondentes de r e s, em um qualquer movimento M, r' e s' também são perpendiculares entre si.

Com efeito, tomemos 3 pontos A,B e C, sendo B a intersecção das retas r e s e A um ponto de r, C de s. Sejam A', B' e C' os 3 pontos respetivamente correspondentes, e que, de acôrdo com o teorema anterior pertencem, respetivamente, à intersecção r's', à r' e à s'. Da congruência dos triângulos ABC e A'B'C' segue-se a congruência dos ângulos ABC e A'B'C' e, como o ângulo ABC é reto, A'B'C' também é reto e, pois, r' e s' são perpendiculares entre si.

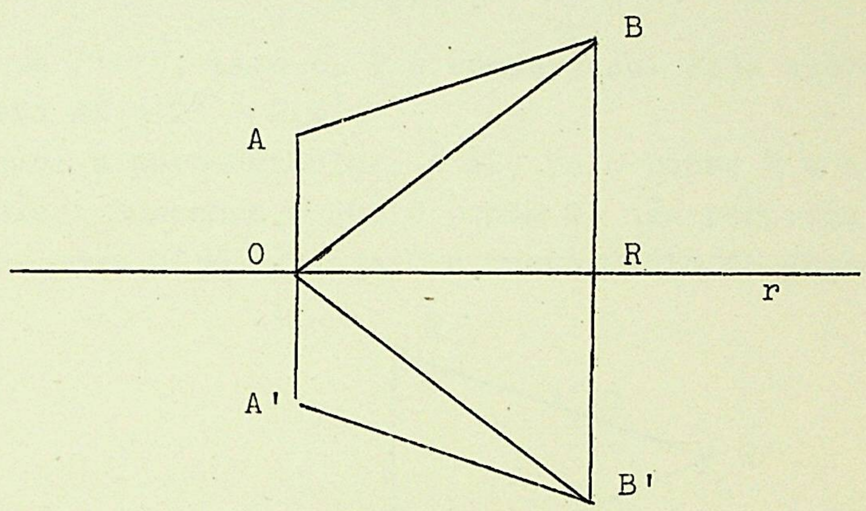
II.08. Definição de simetria : Fixada uma reta r de um plano, estabeleçamos, entre os pontos do plano e êles próprios, uma correspondência da seguinte maneira : se o ponto P pertence à r, P', o correspondente de P, coincide com P e se P não pertence à r, P' é um ponto da perpendicular PQ à reta r, está na semi-reta oposta à QP, $QP \equiv QP'$, e Q é o pé daquela perpendicular.

Chamaremos, a essa correspondência, de simetria em relação à reta r. A esta reta daremos o nome de eixo de simetria e P' denominar-se-á o simétrico de P em relação à reta r.

II.09. Teorema : Tôda simetria é um movimento.

Com efeito, tôda simetria estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e êles próprios, como se segue fàcilmente da unicidade da perpendicular por um ponto a uma reta e do postulado do transporte de segmentos. Demonstraremos, então, que, sendo A eB dois pontos quaisquer e A' e B' os simétricos de A e B, respetivamente, em relação a uma reta r,

$$AB \equiv A'B'$$



Sejam O e R as intersecções de AA' e BB' com o eixo de simetria. Como se vê imediatamente, são congruentes os triângulos OBR e ORB', de onde se segue a congruência dos ângulos B'OR e ROB, e consequentemente, a dos ângulos B'OA' e AOB, uma vez que êstes são complementares de B'OR e ROB, respetivamente. aí a congruência de AB com A'B'.

II.10. Teorema : Se um movimento M conserva três pontos não em linha reta, M é a identidade.

Sejam A, B e C três pontos não em linha reta e

$$M(A) = A,\ M(B) = B,\ M(C) = C.$$

Suponhamos, para a demonstração pela redução ao absurdo, que $M(X) = X'$, em que X' não coincide com X. Seja D o ponto médio do segmento XX'. Como

$$AX = AX',$$

segue-se que a reta AD é a mediatriz do segmento XX'. Se o ponto B pertencer a essa mediatriz, o ponto C não pertencerá, uma vez que A, B e C não estão em linha reta. Como

$$CX = CX'$$

CD é a mediatriz do segmento XX' o que é absurdo, pois que $CD \neq AD$, e a mediatriz de um segmento é única.

II.11. <u>Teorema</u> : Se M é um movimento que conserva dois pontos A e B, e nenhum outro ponto fora da reta AB, M é uma simetria e precisamente a que tem como eixo a reta AB.

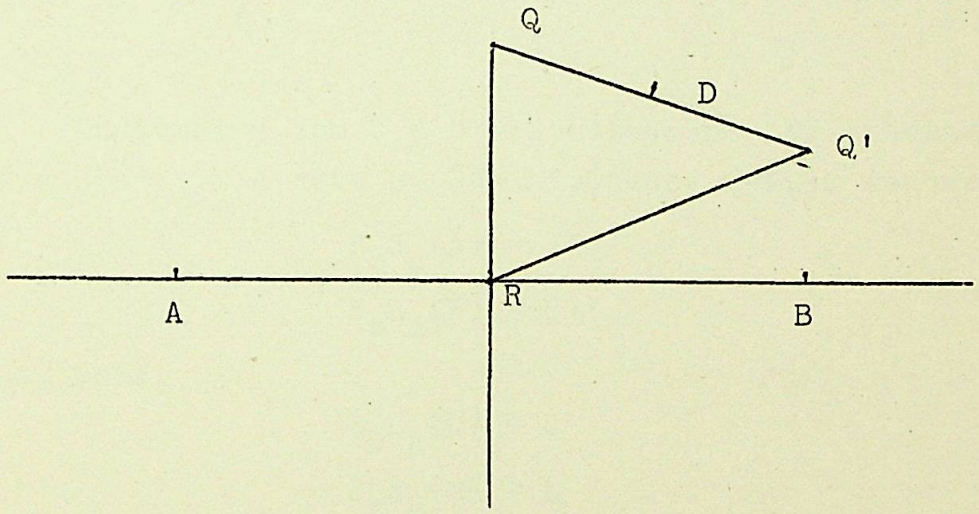
Demonstremos, primeiramente, que êsse movimento conserva todos os pontos da reta AB.

Seja P um ponto dessa reta que, sem perda de generalidade, podemos supor esteja entre A e B. De acôrdo com o teorema II.06, P' estará entre A e B e como

$$AP \equiv AP',$$

segue-se que $P' \equiv P$, isto é, P é conservado. Seja agora Q um ponto fora da reta AB e $Q' = M(Q)$.

Tracemos a perpendicular, à AB, pelo ponto Q e seja R o pé da perpendicular. Suponhamos que o ponto Q' não pertença à perpendicular. Então, como $Q' \not\equiv Q$, seja D o ponto médio do segmento QQ'.



Seja X um ponto qualquer da reta AB. Como $X = M(X)$, segue-se que

$$XQ \equiv XQ'$$

e, pois, a reta DX é a mediatriz do segmento QQ' o que é absurdo, pois X é um ponto qualquer de AB. Aliás, para demonstrar que o ponto Q' pertence à reta QR bastaria aplicar o teorema II.06, e, lembrar que a perpendicular a uma reta, por um ponto, é única. Da congruência $QR \equiv Q'R$, segue-se, então, que o ponto Q' está na semi-reta oposta à semi-reta RQ e, pois, Q' é o simétrico de Q, em relação à reta AB.

II.12. <u>Teorema</u> : O produto de duas simetrias é um movimento que não é uma simetria.

Sejam <u>a</u> e <u>b</u> os eixos de simetria e indiquemos com S_a e S_b essas simetrias. Suponhamos, para a demonstração pela redução ao absurdo, que o movimento produto seja uma simetria. Tomemos, inicialmente, dois pontos sôbre a reta <u>a</u>: A e B, e sejam

<u>Teor.</u> O prod. de 2 sim. distintas, conserva no max um pt. que é a intersec. dos eixos.

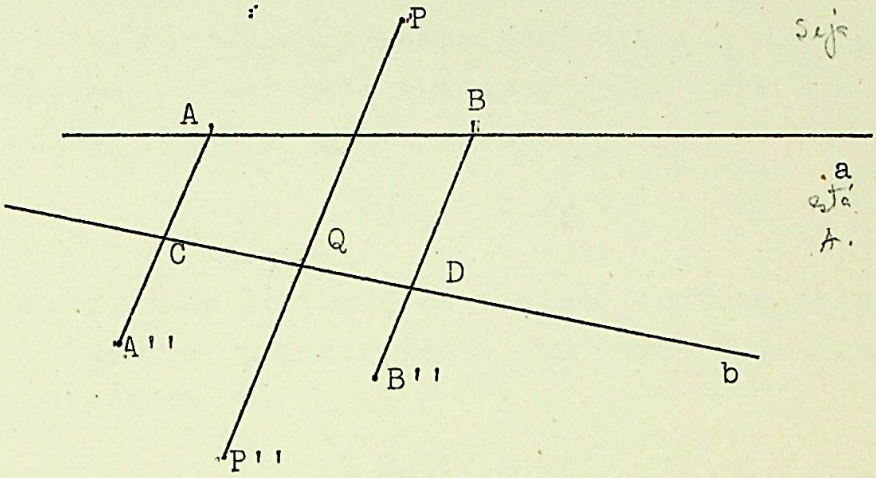
$$S_a(A) = A$$

$$S_b(A) = A''$$

$$S_a(A) = B$$

$$S_b(B) = B''$$

Em 1 simetria o ponto médio do segm. q une 2 pontos corresp, é unido. Seja $A \in a$ fora de b $S_b(A) = A''$. $S_b S_a(A) = A'' \neq A$ Seja C meio de AA''. C está em B e não coincide com A. $S_a(C) = C'$, $S_b(C'') =$



Indiquemos com C e D respetivamente as intersecções de AA'' e BB'' com a reta **b**. Das hipóteses feitas segue-se que

$$S_b S_a(A) = A''$$

$$S_b S_a(B) = B''$$

e que, pois,

$$S_b S_a(C) = C$$

$$S_b S_a(D) = D$$

?

isto é, os pontos C e D são conservados pelo movimento produto e, pois, todo ponto da reta b é conservado. Por um ponto P, qualquer, fora da reta a, tiremos a perpendicular à reta b e seja Q o pé dessa perpendicular. A reta PQ tem, como correspondente, no movimento produto, ela própria, pois b, é uma reta que se conserva nesse movimento e, de acôrdo com o teorema II.07, QP'' é perpendicular à b, em que o ponto P'' é o correspondente de P, isto é,

$$S_b S_a(P) = P''.$$

Como, por outro lado, P não pertence à a,

$$S_a(P) = P' \quad P$$

e, sendo, como se vê fàcilmente

$$S_a(P') = P,$$

$$S_b S_a(P') = P'',$$

o que é absurdo, pois S_bS_a é um movimento e, portanto, correspondência biunívoca.

II.13. <u>Definição de rotação</u>: Chama-se rotação ao produto de duas simetrias.

II.14. <u>Teorema</u>: Dadas duas retas <u>a</u> e <u>b</u> perpendiculares entre si, se <u>c</u> é uma reta qualquer pelo ponto $O \equiv a.b$, e <u>d</u> a perpendicular por êsse ponto à reta <u>c</u>,

$$S_aS_b = S_cS_d \ ,$$

em que, como de costume, os índices indicam os eixos das simetrias.

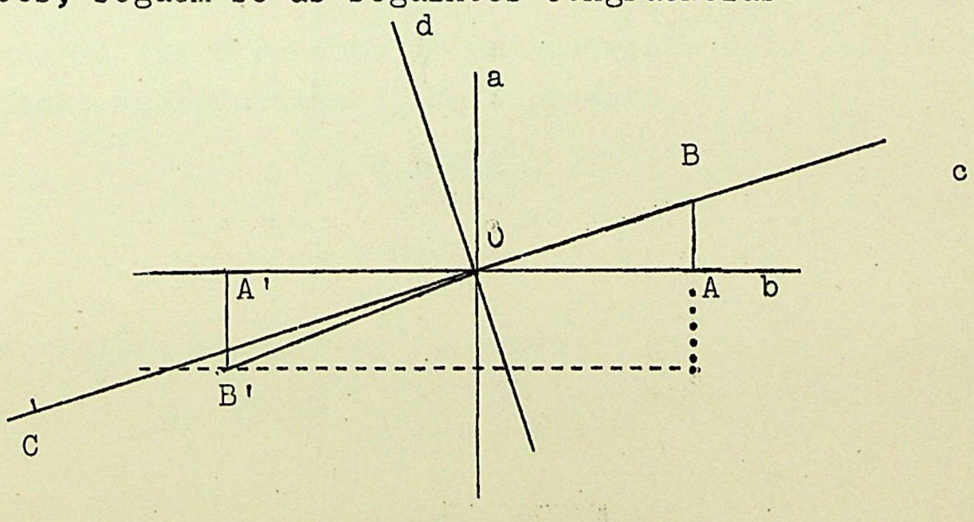
Tomemos, primeiramente, um ponto B qualquer, sôbre a reta <u>c</u> e escrevamos

$$S_aS_b(A) = A'$$

$$S_cS_d(B) = B' \ .$$

Tracemos, em seguida, a perpendicular por B à reta <u>b</u> e indiquemos com A o pé dessa perpendicular.

Como o ponto O se conserva por qualquer um dos dois movimentos, seguem-se as seguintes congruências:



não era mais fácil demonstrar que se pode construir $S_a S_b(A) = A'$ tomando por O um segmento igual e oposto a OA?

$$AB \equiv A'B'$$

$$OA \equiv OA'$$

$$OB \equiv OB'$$

e, pois, são congruentes os triângulos OAB e OA'B', de onde se segue que são congruentes os ângulos BOA e B'OA'. Por outro lado, os ângulos OBA e COA' também são congruentes (opostos pelo vértice) e, pois, são congruentes os ângulos COA' e BOA, em que C é um ponto da semi-reta oposta à OB. Daqui se conclue que coincidem as semi-retas OC e OB' e, pois, podemos concluir que $S_cS_d(B) = B'$. Analogamente se poderia demonstrar que qualquer ponto D da reta d tem como correspondente, em ambos os movimentos, o mesmo ponto D' (da reta d). Para demonstrar que qualquer ponto P do plano tem como correspondente o mesmo ponto P' em ambos os movimentos, basta traçar as perpendiculares m e n por êsse ponto às retas c, e d e, aplicando o teorema II.07, concluir que, se

$$S_aS_b(m) = m'$$

e

$$S_cS_d(n) = n' ,$$

$$S_aS_b(P) = S_cS_d(P) .$$

II.15. <u>Definição de movimento inverso</u>: Dado um movimento M, chama-se movimento inverso de M e indica-se com M^{-1} ao movimento tal que, se $M(P)=P'$, $M^{-1}(P')=P$, qualquer que seja o ponto P.

Como

$$M^{-1}\, M(P) = P ,$$

segue-se que o produto de um movimento pelo seu inverso é a identidade. Reciprocamente, se o produto

$$M_1M_2 = 1 ,$$

$$M_1 = M_2^{-1} .$$

Com efeito, se $M_1 \neq M_2^{-1}$, sendo

$$M_2(P) = P'$$

e

$$M_1(P') = P'' ,$$

$$P'' \neq P ,$$

e, pois,

$$M_1\, M_2(P) = P'' ,$$

o que é absurdo.

Da própria definição se segue que o movimento inverso de M^{-1} é o próprio movimento M, e, pois,

$$MM^{-1} = 1 .$$

Observe-se, finalmente, que se M é uma simetria, isto é, se

$$M = S_a$$

$$M^{-1} = S_a .$$

II.16. <u>Teorema</u>: Se um movimento M conserva ùnicamente um ponto êsse movimento é uma rotação.

Seja A um ponto qualquer e O o ponto conservado, isto é,

$$M(A) = A' \not\equiv A \quad \text{e} \quad M(O) = O .$$

Chamemos de <u>b</u> à mediatriz do segmento AA', a qual certamente passará por O, visto que

$$OA \equiv OA' .$$

Consideremos o movimento

Consideremos MS_b. Conserva O e A, logo OA = a, e $MS_b = S_a$ $M = S_a S_b$

$$M^{-1} S_b S_a ,$$

em que <u>b</u> é o eixo da simetria S_b e a AA' o eixo da simetria S_a .

Se êsse movimento conservar outro ponto fora da reta OA, isto é, se

$$M^{-1} S_b S_a = 1 ,$$

$$MM^{-1} S_b S_a = M$$

ou

$$S_b S_a = M$$

e está demonstrado o teorema. Se

$$M^{-1} S_b S_a \neq 1 ,$$

de acôrdo com o teorema II.11,

$$M^{-1} S_b S_a = S_a ,$$

porque justamente S_a?

?

pois que $M^{-1} S_b S_a(A) = A$ e $M^{-1} S_b S_a(O) = O$, de onde

$$M^{-1} S_b S_a S_a = S_a S_a ,$$

ou, como o movimento inverso de uma simetria é a própria simetria,

$$M^{-1} S_b = 1$$

ou
$$M^{-1} = S_b$$

ou
$$M = S_b$$

o que é absurdo, pois M conserva unicamente um ponto.

II.17. Teorema: Se M (a) = a', e S_a é a simetria de eixo a, o produto

$$M\ S_a\ M^{-1}$$

é uma simetria, $S_{a'}$, de que a' é o eixo,

Tomemos um ponto P qualquer sôbre a reta a e seja

$$M\ (P) = P' ,$$

em que P' é um ponto de a' (teorema II.06).

Ora, porque P está em a,

$$S_a\ (P) = P ,$$

e, pois,

$$M\ S_a M^{-1}\ (P') = P' ,$$

isto é, o movimento

$$MS_aM^{-1}$$

conserva todos os pontos da reta a' . Demonstraremos, agora, que qualquer ponto que não esteja sôbre a' não é conservado por êsse movimento.

Seja R' um ponto fora da reta a' e

$$R' = M(R)$$

ou
$$R = M^{-1}\ (R').$$

Suponhamos, para a redução ao absurdo, que

$$MS_aM^{-1}\ (R') = R'.$$

isto é, que êsse movimento conserve R'.

Ora, de acôrdo com o teorema II.06, podemos dizer que $S_a(R) = X$ não está em a, pois que se estivesse, R' estaria em a'. Portando $X \not\equiv R$ e $M(X) = Z \not\equiv R'$. Então,

$$M S_a M^{-1} (R') = Z \quad ,$$

o que é absurdo, pois, movimento é correspondência biunívoca. Segue-se, do teorema II.11, que

$$M S_a M^{-1} = S_{a'} \quad .$$

II.18. Teorema: Se uma rotação $S_a\, S_b$ conserva um ponto, êsse ponto pertence às retas a e b, eixos, respetivamente, de S_a e S_b.

Com efeito, supondo que o ponto O seja conservado por

$$S_a\, S_b \quad ,$$

demonstremos que êle pertence a ambas as retas a e b. Suponhamos, para a redução ao absurdo, que O não pertença à reta a. Tomemos um ponto P sôbre a reta b e seja

$$S_a(P) = P'' \; .$$

Então, como $S_b\,(P) = P$,

$$S_a S_b(P) = P'' \; .$$

Devemos ter

$$P'' \not\equiv P \; ,$$

pois $S_a S_b$ conservaria dois pontos (supomos $P \not\equiv O$) e seria uma simetria o que é absurdo, ou seria a identidade, o que exigiria ser $a \equiv b$. Seja D, então, o ponto médio do segmento PP''. Como

$$OP \equiv OP'' \quad ,$$

OD é a mediatriz dêsse segmento e teriamos, então, pelo ponto D, duas perpendiculares, OD e b à mesma reta PP'', o que é absurdo, e prova, pois, que o ponto O pertence à reta a. Se O não pertencesse à reta b,

$$S_b(O) = O' \not\equiv O$$

e, pois,

$$S_a S_b(O') = O \ ,$$

o que seria novamente absurdo, pois deixaria de haver correspondência biunívoca.

II.19. <u>Teorema</u>: Se $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ são três retas que passam por um mesmo ponto O e S_a, S_b e S_c são as simetrias que têm aquelas três retas como eixos, respetivamente, o produto

$$S_a S_b S_c$$

também é uma simetria, cujo eixo passa pelo ponto O.

Tomemos um ponto B sôbre $\underline{b}$ e sejam

$$S_a(B) = B' \ , \quad S_b(B) = B \quad , \quad S_c(B) = B_1 \ .$$

Como o ponto O se conserva por qualquer uma das simetrias,

$$OB' \equiv OB_1 \quad ,$$

e, como $a \not\equiv c$, (1)

$$B_1 \not\equiv B' \ .$$

Seja D o ponto médio da segmento B_1B'; então a reta $m \equiv OD$ é a mediatriz dêsse segmento, de modo que

$$S_m(B') = B_1 \quad .$$

Devemos ter, então,

$$S_m S_a S_b S_c(O) = O \ ,$$

$$S_m S_a S_b S_c(B_1) = B_1 \ ,$$

de modo que êsse produto ou é a identidade, se conservar algum outro ponto fora da reta OB_1, ou é a simetria $S_{a'}$, em que $a' \equiv OB_1$.

Se for a identidade,

$$S_m S_a S_b S_c = 1 \ ,$$

---

(1) Por hipótese, $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ são três retas distintas, mas o teorema é válido, como se verifica fàcilmente, nos casos em que duas das retas ou mesmo três delas são coincidentes.

vem:

$$S_aS_bS_c = S_m \quad ,$$

e o teorema está demonstrado.

Demonstremos, então, que

$$S_mS_aS_bS_c$$

não pode ser igual a $S_{a'}$.

Suponhamos, por absurdo, que

$$S_mS_aS_bS_c = S_{a'} .$$

Ora,

$$S_mS_aS_bS_c = S_mS_aS_cS_cS_bS_c \quad .$$

Mas, pelo teorema II.17,

$$S_cS_bS_c = S_{a'} \quad ,$$

de modo que

$$S_mS_aS_bS_c = S_mS_aS_cS_{a'} = S_{a'}$$

de onde,

$$S_mS_mS_aS_cS_{a'}S_{a'} = S_mS_{a'}S_{a'}$$

ou

$$S_aS_c = S_m \quad ,$$

o que é absurdo porque vai de encontro ao teorema II.12.

II.20. Teorema: Se a, b e c são três retas perpendiculares a uma reta r , o produto

$$S_aS_bS_c$$

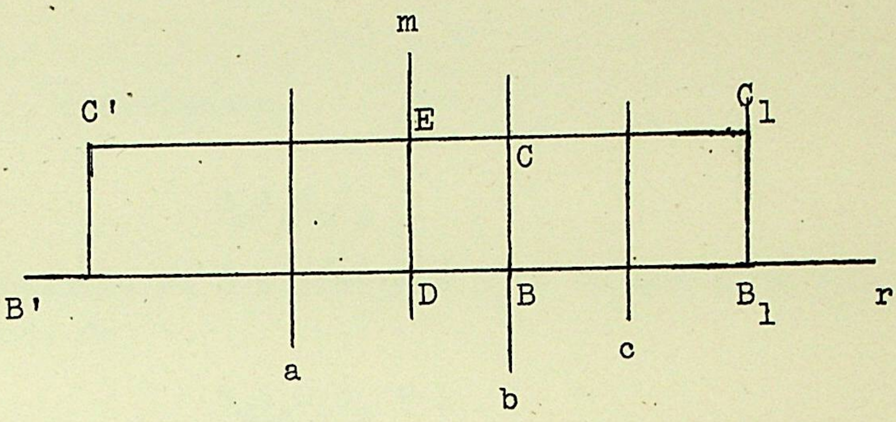
é também uma simetria, cujo eixo é uma reta perpendicular à reta r .

Seja B o pé da perpendicular b a r , sejam

$$S_c\ (B) = B_1 \ ,$$

$$S_a\ (B) = B' \ ,$$

$$S_b\ (B) = B \ .$$



Tomemos um ponto C, qualquer sôbre a reta b e façamos

$$S_c(C) = C_1$$

$$S_a(C) = C'$$

$$S_b(C) = C \ .$$

Como CB é perpendicular à r, C'B' e C_1B_1 também são perpendiculares a essa reta, como se deduz do teorema II.07, e, pois, o quadrângulo $B'B_1C'C_1$ é bi-retângulo e, das congruências

$$C'B' \equiv CB$$

$$C_1B_1 \equiv CB \ ,$$

se conclui que é isósceles. Indiquemos com D o ponto médio do segmento B_1B', que certamente existe, pois que, se $a \not\equiv c$, (1) $B_1 \neq B'$. Indiquemos com m a mediatriz do referido segmento. Segundo o teorema de P.Saccheri (2), essa reta m encontra o lado $C'C_1$, no ponto médio E, e é perpendicular à reta $C'C_1$.
Consequentemente, podemos escrever:

$$S_m(C') = C_1$$

e, pois,

$$S_mS_aS_bS_c\ (C_1) = C_1 \ ,$$

$$S_mS_aS_bS_c\ (B_1) = B_1 \ ,$$

---

(1) Veja a nota de rodapé da página II.12.

(2) Se, no quadrângulo ABCD, os lados AC e BC são congruentes e os ângulos CAB e DBA são retas, a mediatriz do segmento AB também é mediatriz do segmento CD.

e, portanto, o movimento

$$S_m S_a S_b S_c$$

ou é a identidade ou é a simetria $S_{a'}$, em que $a' \equiv B_1C_1$. Se for a identidade, de

$$S_m S_a S_b S_c = 1$$

vêm, sucessivamente

$$S_m S_m S_a S_b S_c = S_m$$

$$S_a S_b S_c = S_m$$

e o teorema está demonstrado. Do mesmo modo que no teorema anterior, se demonstra que aquêle produto

$$S_m S_a S_b S_c$$

não pode ser uma simetria.

Se é uma simetria, $M = M^{-1}$

Observação: É fácil verificar que

$$S_a S_b S_c = S_c S_b S_a .$$

Com efeito,

$$(S_a S_b S_c) . (S_c S_b S_a) = S_a S_b S_b S_a = S_a S_a = 1$$

e, pois, de acôrdo com o número II.15,

$$S_a S_b S_c = S_c S_b S_a .$$

II.21. Teorema: Se <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c</u> são três retas que passam por um mesmo extremo α e S_a , S_b , S_c são as simetrias que têm, respetivamente, essas três retas como eixos, o movimento

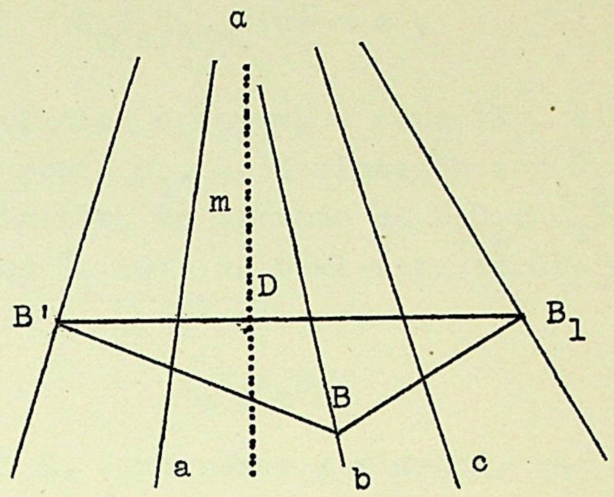
$$S_a S_b S_c$$

é, também uma simetria, que tem como eixo uma reta que passa por α.

Suponhamos, primeiramente, que a reta <u>b</u> pertença à faixa ac do plano (1). Seja B um ponto da reta <u>b</u> e escrevamos:

---

(1) Com faixa ac queremos dizer o conjunto dos pontos comuns aos semiplanos de origem <u>a</u> e que contém <u>c</u> e de origem <u>c</u> que contém <u>a</u> , respetivamente.



$$S_c(B) = B_1$$

$$S_a(B) = B'$$

$$S_b(B) = B \quad .$$

Como se vê imediatamente, $B' \neq B_1$; chamemos, então, de D, ao ponto médio do segmento $B'B_1$ e de m a reta que liga D com α. De acôrdo com o teorema I.07 , m é perpendicular à reta $B'B_1$, e pois,

$$S_m(B') = B_1$$

Aplicando, então, o movimento

$$S_m S_a S_b S_c$$

ao ponto B_1 , temos

$$S_m S_a S_b S_c (B_1) = B_1 \; ,$$

o que prova que êsse movimento conserva o ponto B_1 .

Vejamos, agora, que êsse movimento conserva qualquer outro ponto, isto é, que

$$S_m S_a S_b S_c = 1 \; .$$

Observemos em primeiro lugar, que se AR e BS são duas semi-retas paralelas, e A'R' e B'S' a semi-retas correspondentes de AR e BS, respetivamente, em qualquer movimento M, A'R' e B'S' são semi-retas paralelas, isto é, M faz corresponder a todo extremo um extremo (biunìvocamente, é claro), o que decorre da definição de semi-retas paralelas e da aplicação do teorema II.06. Depois disso podemos dizer que

$$S_m S_a S_b S_c\ (\alpha) = \alpha\ ,$$

com o que êste movimento conserva a reta $(B_1,\ \alpha)$. Tomado, sôbre essa reta, um outro ponto C_1, e, designando por $\overline{C}_1$ o correspondente de C_1 naquele movimento, em virtude de $B_1C_1 \equiv B_1\overline{C}_1$, ou $\overline{C}_1 \equiv C_1$, e C_1 é conservado, ou $\overline{C}_1$ está na semi-reta oposta à B_1C_1. Isto poderia acontecer, se

$$S_m S_a S_b S_c$$

fôsse uma rotação. E, como nesse movimento, que suporemos por um momento, uma rotação, à reta (B_1,α) corresponde ela própria e ao ponto B_1 corresponde êle próprio, segue-se que à perpendicular r por B_1 à (B_1,α) corresponde a própria reta r. Com isso,fazendo $(B_1,\alpha) \equiv t$, vem

$$S_m S_a S_b S_c = S_r S_t\ .$$

Ora,

$$S_t(\alpha) = \alpha\ ,$$

e como à semi-reta (B_1,α) pela simetria S_r, corresponde uma semi-reta em semi-plano oposto ao em que está a semi-reta (B_1,α) em relação, à reta r, segue-se que

$$S_r(\alpha) = \beta \neq \alpha$$

e, pois,

$$S_r S_t\ (\alpha) = \beta\ ,$$

o que está em contradição com o fato de êsse movimento

$$S_m S_a S_b S_c \neq S_r S_t$$

conservar o extremo α. Portanto êsse movimento conserva, também C_1 e, ou é a identidade

$$S_m S_a S_b S_c = 1\ ,$$

de onde

$$S_a S_b S_c = S_m\ ,$$

e o teorema está demonstrado; ou

$$S_m S_a S_b S_c = S_t\ .$$

Mas, do mesmo modo que no teorema II.19, se demonstra que êsse movimento não pode ser uma simetria.

Suponhamos, agora, que a reta c esteja na faixa ab do plano. Pelo que acabámos de demonstrar, existe uma reta d', por α, tal que

$$S_a S_c S_b = S_{d'} .$$

Seja

$$d' = S_a(d)$$

e, portanto, uma reta que passa por α.

Então, de acôrdo com os teoremas II.17 e II.06,

$$S_a S_{d'} S_a = S_d .$$

Como

$$S_c S_b S_a = S_a S_a S_c S_b S_a = S_a S_{d'} S_a = S_d ,$$

e (II.20, observação),

$$S_a S_b S_c = S_c S_b S_a ,$$

vem finalmente,

$$S_a S_b S_c = S_d ,$$

e o teorema fica, assim, demonstrado.

Observação: É fácil demonstrar: 1º a validade do teorema para os casos em que $a \equiv b \not\equiv c$, e em que $a \equiv b \equiv c$; 2º que, se $S_a S_b S_c = S_d$, e duas das retas a, b, c, passam por α, a restante e a reta d também passam por α.

II.22. Teorema: Todo movimento ou é uma simetria ou é um produto de simetrias.

Examinemos os seguintes casos:

a) O movimento M conserva apenas um ponto O.

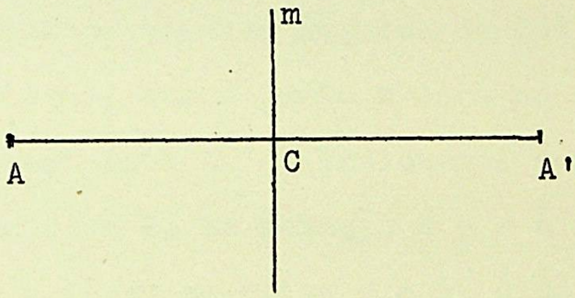
b) O movimento M conserva os pontos A e B e nenhum outro ponto fora da reta AB.

c) O movimento M conserva 3 pontos não em linha reta.

d) O movimento M não conserva ponto algum.

No caso a), pelo teorema II.16, M é uma rotação e, pois, produto de duas simetrias; no caso b) M é a simetria cujo eixo é a reta AB (teorema II.11); no caso c) M é a identidade, e, pois, $M = S_a S_a$, em que <u>a</u> é uma reta qualquer.

No caso d), tomemos um ponto qualquer, A, e seja A'



o ponto correspondente que não pode coincidir com A. Chamemos de C o ponto médio dêsse segmento e de <u>m</u> a mediatriz. Ora

$$S_m M(A) = A$$

e, pois, o movimento

$$S_m M$$

conserva o ponto A.

De acôrdo com o que demonstramos (a, b, c, d), podemos concluir que

$$S_m M = M_1 ,$$

em que M_1 é um produto de simetrias ou uma simetria. E, dessa última igualdade ,

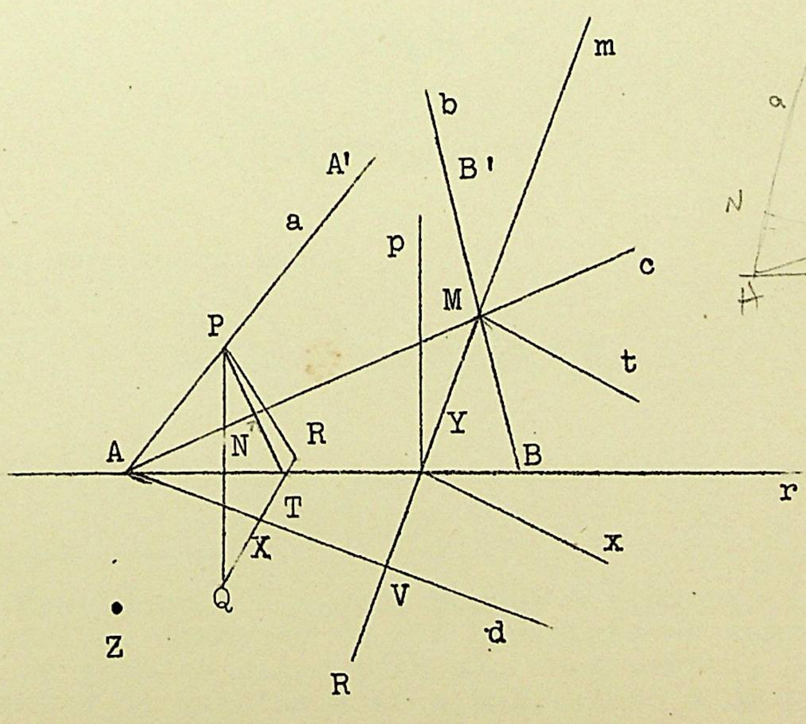
$$M = S_m M_1 ,$$

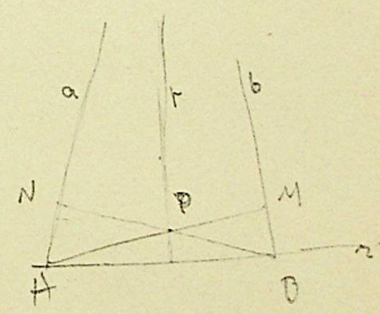
isto é, M é um produto de simetrias, ou, em particular, uma simetria.

II.23. <u>Teorema</u>: Dados um extremo α e uma reta <u>r</u>, que não se pertencem, existe uma e uma só reta que passa por α e é perpendicular à r.

Sejam AA' e BB' duas semi-retas que passam por α, em que A e B são dois pontos de r, a e b as retas a que pertencem, respetivamente, aquelas semi-retas. Indiquemos com M o pé da perpendicular, c , à reta b , pelo ponto A. Como se verifica fàcilmente, os ângulos A'BA e B'BA não podem ser, simultaneamente obtusos: um é agudo e outro obtuso, ou ambos são agudos. Dividamos a demonstração em duas partes, segundo essas alternativas.

a) Supondo ambos aquêles ângulos agudos, segue-se, do teorema do ângulo externo, que o ponto M está no semi-plano ABB'. Seja P um ponto da semi-reta AA' e indiquemos com Q e R, respetivamente, os simétricos de P, em relação à r e à c, os quais são distintos, desde que o sejam as retas r e c. O ponto médio, X, do segmento QR, pertence ao semi-plano ABZ oposto ao semi-plano ABB', pois, no caso em que R pertence ao semi-plano ABB', indicando com T o ponto comum às retas r e QR, e com N a interseção de TP com a reta c (1), devemos ter: QT = TP = TN + NP = TN + NR > TR; e, no





(1) Os pontos R e Q estão em semi-planos opostos em relação à reta r e portanto o segmento QR encontra a reta r.

caso em que o ponto R já pertence ao semi-plano ABZ todo o segmento QR pertence ao semi-plano ABZ. Segundo o número II.19, podemos escrever, designando pela letra d a reta AX :

$$S_cS_aS_r = S_d$$

ou

$$S_aS_r = S_cS_d \; .$$

Tracemos, então, a perpendicular, m , à reta d , pelo ponto M. O pé, V, dessa perpendicular, está no semi-plano A'AB, pois, do contrário, segundo o teorema do ângulo externo, o ângulo MAX seria obtuso, o que é absurdo (1). Se V e M pertencem a semi-planos opostos em relação à reta r, segue-se que a reta VM encontra a reta r. Seja Y o ponto de encontro e tiremos a perpendicular, p, por Y, à reta r. Essa perpendicular passa por a. De fato, designando por t a perpendicular, por M à reta m, e por x a perpendicular à m, pelo ponto Y, devemos ter, (II.14),

$$S_bS_c = S_mS_t \; ,$$

$$S_rS_p = S_xS_m \; .$$

Como, por outro lado,

$$S_bS_aS_p = S_bS_cS_cS_aS_rS_rS_p \; ,$$

substituindo S_bS_c e S_rS_p pelos seus valores, vem

---

(1) Êsse ângulo é agudo, porque é congruente ao ângulo A'AB. Com efeito, chamando de n a bissetriz do ângulo BAM, para provar que os ângulos MAX e A'AB são congruentes, basta provar que são congruentes os ângulos A'AS e SAX, sendo S um ponto daquela bissetriz. Ora, $S_aS_r = S_cS_d$, $S_rS_n = S_nS_c$, e

$S_aS_nS_dS_n = S_aS_rS_rS_nS_dS_n$. Logo, $S_aS_nS_dS_n = S_cS_dS_nS_cS_dS_n = 1$, e, portanto $S_aS_n = S_nS_d$ ou $S_nS_aS_n = S_d$, o que demonstra o asserto.

$$S_bS_aS_p = S_mS_tS_cS_aS_rS_xS_m \quad .$$

Mas, como vimos há pouco,

$$S_cS_aS_r = S_d$$

e, pois,

$$S_bS_aS_p = S_mS_tS_dS_xS_m$$

Como, porém, (II.20)

$$S_tS_dS_x = S_y$$

em que y é uma perpendicular à reta m, substituindo, vem

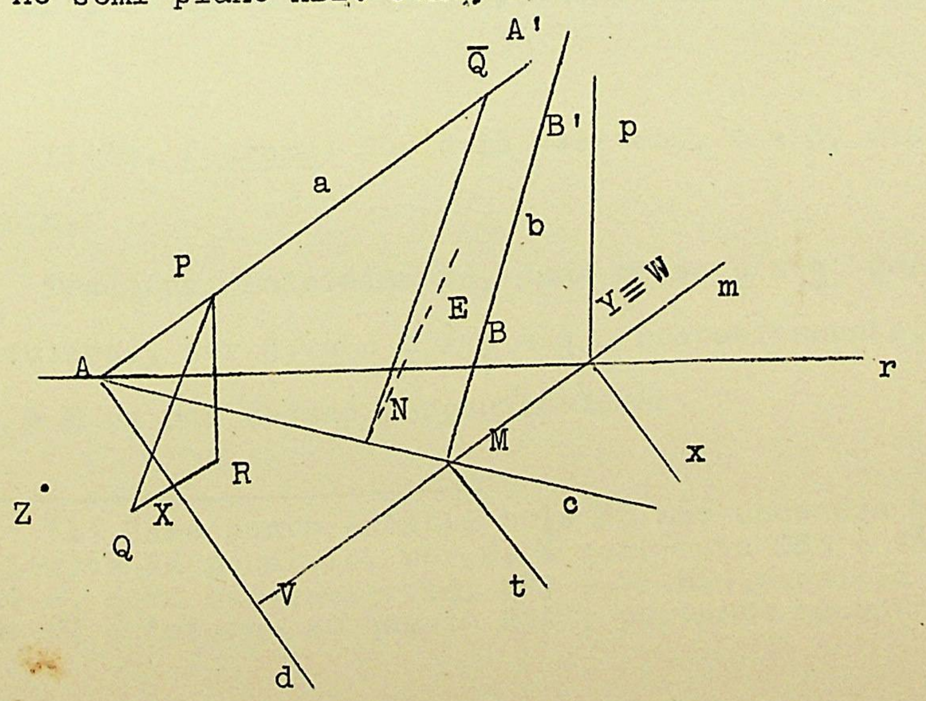
$$S_bS_aS_p = S_mS_yS_m \; ,$$

igualdade que demonstra,(II.17), ser o produto

$$S_bS_aS_p$$

uma simetria e, como b e a passam por α, segue-se (II.21, observação) que p também passa por α.

b) Supondo que o ângulo ABB' seja é obtuso, segue-se, ainda do teorema do ângulo externo, usando as mesmas notações, que o ponto M está no semi-plano ABZ. Como, no caso anterior,se demonstra que



o ponto médio, X, do segmento QR está no semi-plano oposto ao semi-plano AMB, e os ângulos XAM e A'AB são congruentes.

Demonstremos, então, que a perpendicular MV, à reta $\underline{d}$, encontra a reta $\underline{r}$. Notemos, antes de tudo, que AM $>$ AV, de modo que, tomando sôbre a semi-reta AM, o ponto N tal que AN $\equiv$ AV, N é interno ao segmento AN. Seja $N\overline{Q}$ a perpendicular, por N, à reta AM e $\overline{Q}$ o ponto comum (1) às retas $\underline{a}$ e $N\overline{Q}$. Tomemos, sôbre a semi-reta AB o ponto W, de modo que os segmentos AW e $A\overline{Q}$ sejam congruentes. Como os segmentos AV e AN são congruentes, o mesmo acontecendo com os ângulos VAW e $NA\overline{Q}$, segue-se que são congruentes os triângulos AVW e $NA\overline{Q}$ e portanto são, também, congruentes os ângulos $\overline{Q}NA$ e WVA. Como o primeiro dêles é reto, segue-se que VW é perpendicular à AV e, pois, a reta VW coincide com a reta VM, isto é, VM encontra a reta r, no ponto W. Completa-se, então, a demonstração da existência da perpendicular por α, à reta $\underline{r}$, como no caso $\underline{a}$.

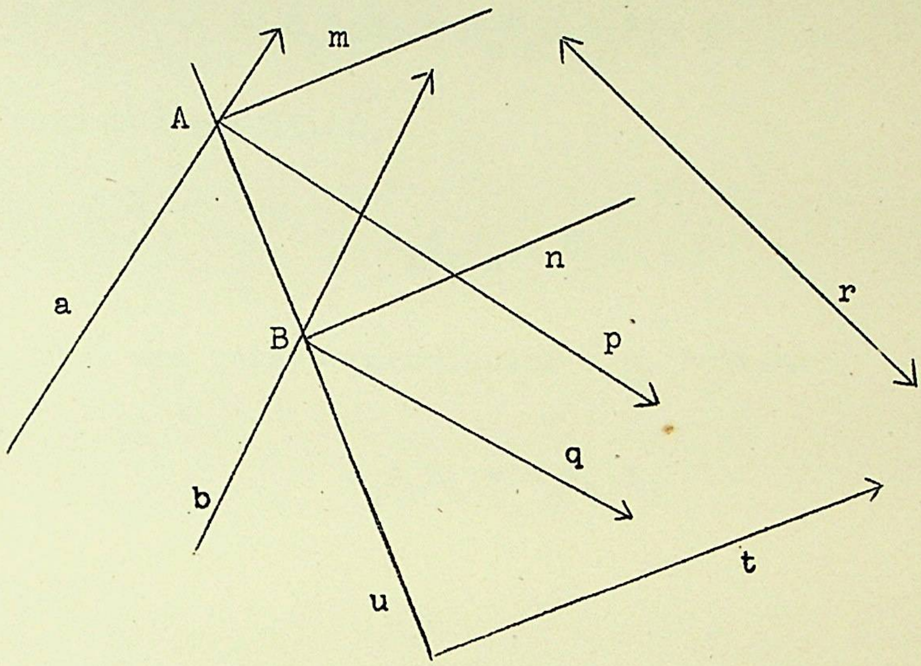
Suponhamos, finalmente, que haja duas perpendiculares $t \equiv (C, \alpha)$ e $s \equiv (D, \alpha)$ à reta $\underline{r}$. Sejam $C'' = S_t(C')$ e $D'' = S_s(D')$, em que C' é um ponto da semi-reta (C, α) e D' da semi-reta (D, α). CC'' e DD'' são duas semi-retas paralelas, determinam um extremo $\beta \neq \alpha$ e, assim, temos, pelos extremos α e β as retas (distintas) CC' e DD', e que vai de encontro ao postulado das paralelas (I.06).

II.24. <u>Teorema</u>: Por dois extremos, α e β, distintos, passa uma reta.

Tracemos, inicialmente, duas retas $\underline{p}$ e $\underline{q}$ por α e as perpendiculares, por β, $\underline{a}$ e $\underline{b}$ à $\underline{p}$ e $\underline{q}$, respetivamente. Designemos com A e B os pés dessas perpendiculares.

---

(1) Esse ponto existe, pois $N\overline{Q}$ não encontra $\underline{b}$ e, portanto, a semi-reta NE paralela, por N, à semi-reta BB', é interna ao ângulo MNQ e, como tal semi-reta, NE, é, (I.04), paralela à AA', segue-se que $N\overline{Q}$ é interna ao ângulo NAA', portanto encontra AA'.



Tracemos, em seguida, a reta **t**, perpendicular, por α, à reta $u \equiv AB$. De acôrdo com o teorema II.21, existe uma reta r, por α, tal que

$$S_p S_t S_q = S_r$$

ou

$$S_t = S_p S_r S_q \quad .$$

Mas, pelo teorema II.14, podemos escrever:

$$S_a S_p = S_u S_m \quad , \quad S_q S_b = S_n S_u \quad ,$$

em que m é a perpendicular, por A, à reta u e n a perpendicular, por B, à reta u .

Consideremos, agora, o produto $S_a S_r S_b$. Podemos escrever:

$$S_a S_r S_b = S_a S_p S_p S_r S_q S_q S_b \quad ,$$

ou, substituindo $S_a S_p$, $S_q S_b$ e $S_p S_r S_q$, respetivamente por $S_u S_m$, $S_n S_u$, S_t ,

$$S_a S_r S_b = S_u S_m S_t S_n S_u \quad .$$

Pelo teorema II.20,

$$S_m S_t S_n = S_{t'} \quad ,$$

em que t' é uma reta perpendicular à u. Portanto,

$$S_a S_r S_b = S_u S_{t'} S_u$$

ou, (II.17)

$$S_a S_r S_b = S_{t''}$$

em que $t'' = S_u(t')$. Do nº II.21, observação, segue-se que r passa por β e o teorema está demonstrado.

---------X---------

III. CÁLCULO DOS EXTREMOS

III.01. Adição: Vamos chamar de H ao conjunto de todos os extremos diferentes do extremo ∞ e indicar com S_ξ a simetria de que a reta (ξ, ∞) é o eixo e ξ um elemento qualquer de H. Dados dois elementos quaisquer de H, α e β, chamaremos de soma de α com β, $\alpha + \beta$, ao elemento σ tal que

?? S_o

$$S_\sigma = S_\alpha S_o S_\beta$$

De acôrdo com o teorema II.24, existe sempre e é único êsse elemento.

Para a soma assim definida valem as propriedades comutativa e associativa, como demonstraremos a seguir.

III.02. Propriedade comutativa: Decorre do teorema II.21 , pois

$$S_{\alpha+\beta} = S_\alpha S_o S_\beta$$

e

$$S_{\beta+\alpha} = S_\beta S_o S_\alpha \quad \text{e assim:} \quad \alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

III.03. Propriedade associativa: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
Com efeito,

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_\alpha S_o S_{\beta+\gamma} = S_\alpha S_o S_\beta S_o S_\gamma =$$

$$= S_{(\alpha+\beta)} S_o S_\gamma = S_{(\alpha+\beta)+\gamma}.$$

III.04. Existência do elemento neutro, do zero: Existe, qualquer que seja o elemento α, um elemento neutro, que designaremos por 0 tal que

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

Ora

$$S_{\alpha+0} = S_\alpha S_o S_o$$

E, como $S_o S_o = 1$, $S_{\alpha+o} = S_\alpha$, e, pois, $\alpha+o=\alpha$.
Como vale a propriedade comutativa, $0+\alpha=\alpha$.

III.05. <u>Oposto de um elemento</u>: Sendo α um elemento qualquer de H, chamaremos de oposto de α ao elemento $-\alpha$, tal que $-\alpha=S_o(\alpha)$. Segue-se que o oposto de $-\alpha$ é o próprio α.

III.06. A soma de um elemento qualquer de H, α, com o seu oposto é zero.

Devemos demonstrar que

$$S_{\alpha+(-\alpha)} = S_o$$

Ora,

$$S_{\alpha+(-\alpha)} = S_\alpha S_o S_{-\alpha} = S_{-\alpha} S_o S_\alpha .$$

Portanto, por essa simetria, ao extremo α corresponde o extremo $-\alpha$ e ao extremo $-\alpha$ corresponde o extremo α, isto é, α e $-\alpha$ são permutáveis entre si, isto é, $S_{\alpha+(-\alpha)} = S_o$.

III.07. Seguem-se, das proposições demonstradas e das definições, que os elementos de H, em relação à adição, constituem um grupo abeliano e, consequentemente, se α e β são dois elementos quaisquer de H, existe sempre um e um só elemento σ , também de H, que satisfaz à equação

$$\alpha + \sigma = \beta.$$

Indicaremos essa solução σ por $\beta - \alpha$ e, como se vê fàcilmente,

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha).$$

Chamaremos ao elemento $\beta - \alpha$ de diferença entre β e α .

III.08. <u>Teorema</u>: Se α é um elemento qualquer de H, pela rotação $S_\alpha S_o$, ao extremo ξ, arbitrário, de H, corresponde o extremo $\bar{\xi}$ tal que

$$\bar{\xi} = \xi + 2\alpha.$$

Chamemos $\bar{\xi}$ de $S_\alpha(\xi)$. O movimento $S_\alpha S_o S_\xi S_o S_\alpha = S_{\xi+2\alpha}$ é, por um lado, uma simetria de que é eixo a reta $(\xi + 2\alpha, \infty)$ e por outro, Aplicado à reta $(\bar{\xi}, \infty)$ dá como resultado a própria reta $(\bar{\xi}, \infty)$, isto é, conserva a reta $(\bar{\xi}, \infty)$. Como esta reta é a correspondente de (ξ, ∞), pelo movimento $S_\alpha S_0$, segue-se que

$$\bar{\xi} = \xi + 2\alpha \text{ (1)}$$

Observação: O teorema pode estender-se ao caso em que $\xi = \infty$, desde que definamos $\alpha + \infty = \infty$, qualquer que seja o extremo α, de H.

III.09. Elementos positivos e negativos: Tomemos um ponto O na reta $(0, \infty)$ e tracemos a perpendicular a essa reta pelo ponto O. De acôrdo com o número III.05, os extremos dessa perpendicular têm por soma o zero.

Chamemos de -1 e 1 a êsses extremos. Diremos que um extremo α, de H, é positivo ou negativo, respectivamente, segundo esteja α no mesmo semi-plano, de que $(0, \infty)$ é a origem. em que está o extremo 1, ou o extremo -1.

III.10. Multiplicação dos extremos: Dado um extremo qualquer, ξ, tiremos a perpendicular à reta $(0, \infty)$. O outro extremo dessa perpendicular é, evidentemente, $-\xi$. Indiquemos com

$$P_\xi$$

a simetria de que é eixo a reta $(-\xi, \xi)$. (2)

De acôrdo com o teorema II.22, podemos afirmar que, dados 2 extremos quaisquer de H, α e β, diferentes de zero, existe uma e uma só reta $(-\pi, \pi)$, tal que

$$P_\pi = P_\alpha P_1 P_\beta \quad .$$

Definiremos como produto de α por β, $\alpha\beta$, ao extremo positivo da reta $(-\pi, \pi)$, se α e β forem ambos positivos, ou ao extremo

(1) $2\alpha = \alpha + \alpha$

(2) É fácil verificar que $P_{-\xi} = P_\xi$.

negativo dessa reta, se α e β forem, um positivo e outro negativo.

Definiremos, qualquer que seja α, de H,

$$\alpha.0 = 0.\alpha = 0.$$

III.11. <u>Propriedade comutativa</u>:

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

É equivalente à

$$P_\alpha P_1 P_\beta = P_\beta P_1 P_\alpha ,$$

e esta igualdade se verifica, de acôrdo com o teorema II.20.

<u>Observação</u>: Naturalmente supusemos α e β diferentes de zero. Para o caso em que um dêsses elementos, fatôres do produto, é nulo, a propriedade decorre da própria definição de produto nulo.

III.12. <u>Propriedade associativa</u>:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

Ora, $P_\alpha P_1 P_{\beta\gamma} = P_\alpha P_1 P_\beta P_1 P_\gamma = P_{\alpha\beta} P_1 P_\gamma$,

de onde se segue o teorema.

<u>Observação:</u> Também aqui supusemos os fatôres diferentes de zero. No caso em que um dos fatôres é zero, verifica-se fàcilmente, tanto $\alpha(\beta\gamma)$, quanto $(\alpha\beta)\gamma$ são nulos.

III.13. <u>Existência do elemento neutro, a unidade:</u> Demonstremos que existe um elemento, que representaremos por 1, tal que, qualquer que seja α de H, $\alpha.1 = \alpha$.

Com efeito,

$$P_\alpha P_1 P_1 = P_\alpha ,$$

pois que $P_1 P_1 = 1$ (a identidade). Quando $\alpha = 0$, pela própria definição, $0.1 = 0$.

III.14. <u>Elemento inverso ou recíproco</u>: Dado um elemento α diferente de 0, qualquer de H, chamaremos de recíproco ou inverso de α, ao elemento correspondente de α na simetria P_1, isto é, $P_1(\alpha)$. Designaremos êsse elemento com o símbolo α^{-1}. É claro que o inverso de α^{-1} é o próprio α.

III.15. <u>Teorema</u>: Sendo $\alpha \neq 0$ um elemento qualquer de H,

$$\alpha\alpha^{-1} = 1 .$$

Basta demonstrar que

$$P_\alpha P_1 P_{\alpha^{-1}} = P_1 \quad .$$

Segundo o teorema II.20, o produto, primeiro membro da igualdade acima, é uma simetria, cujo eixo é perpendicular à reta $(0, \infty)$, e, pelo que vimos na demonstração daquele teorema, passa pelo ponto médio do segmento $X'X_1$, em que $X' = P_\alpha(X)$, $X_1 = P_{\alpha^{-1}}(X)$ e X é um ponto qualquer da reta $(-1,1)$. Se fizermos X coincidir com o ponto 0, intersecção das retas (-1.1) e $(0, \infty)$, verificaremos imediatamente que o ponto médio daquele segmento é o próprio ponto 0, e, pois, está demonstrado o teorema.

III.16. <u>Quociente</u>: As proposições demonstradas e as definições dadas permitem concluir que os elementos de H, em relação à operação de multiplicação, formam um grupo abeliano, e consequentemente, se α e β são dois elementos quaisquer de H, e $\beta \neq 0$, existe, sempre, e é único, um elemento ξ de H, solução da equação

$$\beta\xi = \alpha ,$$

que indicaremos com α/β e a que chamaremos de quociente de α por β. Como se verifica fàcilmente,

$$\alpha/\beta = \alpha.\beta^{-1} \quad .$$

III.17. Teorema: Se α é um elemento de H, diferente de zero, o movimento $P_\alpha P_1$, faz corresponder ao extremo ξ, qualquer, de H, o extremo $\xi\alpha^2$ (1).

Seja ξ um elemento qualquer de H, e

$$\overline{\xi} = P_\alpha(1/\xi).$$

Ora, o movimento $P_\alpha P_1 P_\xi P_1 P_\alpha = P_{\alpha^2\xi}$ faz corresponder à reta (ξ, ∞) ela própria. Por outro lado, como é uma simetria, deixa fixa a reta $(\alpha^2\xi, \infty)$, de modo que

$$\overline{\xi} = \xi\alpha^2.$$

Observação - O teorema pode estender-se ao caso em que $\xi = \infty$, desde que definamos: $\infty \cdot \alpha = \infty$, qualquer que seja o elemento α, de H.

III.18. Teorema: Se α é um elemento positivo de H, existe sempre e é único, um elemento positivo β de H, tal que $\beta^2 = \alpha$.

Seja A o ponto de encontro de $(-\alpha, \alpha)$ com $(0, \infty)$ e chamemos de M ao ponto médio do segmento OA, o qual existe (2), certamente, se $(-\alpha, \alpha)$ não coincidir com $(-1,1)$. Seja $(-\beta, \beta)$, com β positivo, a perpendicular, em M, à reta $(0, \infty)$. O movimento $P_\beta P_1$ leva o extremo 1 ao extremo α, de modo que, pelo teorema anterior,

$$\alpha = \beta^2 .$$

III.19. Definição: Ao elemento positivo β tal que $\beta^2 = \alpha$, damos o nome da raiz quadrada de α e representamos por $\sqrt{\alpha}$.

III.20. Definição: $\sqrt{0} = 0$.

III.21. Propriedade distributiva do produto em relação à soma:

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma .$$

---

(1) $\alpha^2 = \alpha . \alpha$.
(2) Se $\alpha = 1$, fazemos $M = 0$.

Suponhamos que α seja um elemento positivo. Como os movimentos $P_{\sqrt{\alpha}} P_1$ e $P_1 P_{\sqrt{\alpha}}$ são inversos entre si, aplicando o teorema II.17, podemos escrever

$$P_{\sqrt{\alpha}} P_1 S_\xi P_1 P_{\sqrt{\alpha}} = S_{\alpha\xi}$$

em que $(\alpha\xi, \infty)$ é a reta transformada de (ξ, ∞) pelo movimento $P_{\sqrt{\alpha}} P_1$.

Substituindo, na última igualdade, ξ por $\beta + \gamma$, devemos ter:

$$S_{\alpha(\beta+\gamma)} = P_{\sqrt{\alpha}} P_1 S_{\beta+\gamma} P_1 P_{\sqrt{\alpha}} .$$

Mas o movimento expresso pelo segundo membro dessa igualdade pode escrever-se sob a forma

$$P_{\sqrt{\alpha}} P_1 S_\beta P_1 P_{\sqrt{\alpha}} \cdot P_{\sqrt{\alpha}} P_1 S_o P_1 P_{\sqrt{\alpha}} \cdot P_{\sqrt{\alpha}} P_1 S_\gamma P_{\sqrt{\alpha}} ,$$

ou aplicando os teoremas II.17 e III.17,

$$S_{\alpha\beta} S_o S_{\alpha\gamma} ,$$

ou, de acôrdo com a definição de soma,

$$S_{\alpha\beta+\alpha\gamma} ,$$

e fica demonstrado o teorema para o caso em que α é positivo.

Para o caso em que $\alpha = 0$, temos

$$0.(\beta+\gamma) = 0 ,$$

$$0.\beta+0.\gamma = 0 ,$$

de modo que $\quad 0.(\beta+\gamma) = 0.\beta+0.\gamma .$

Para o caso em que α é negativo, ponhamos $-\alpha = \sigma$, em que σ é positivo e

$$\alpha(\beta+\gamma) = -[\sigma(\beta+\gamma)] = -(\sigma\beta+\sigma\gamma) = -\sigma\beta-\sigma\gamma ,$$

e, substituindo agora σ por $-\alpha$,

$$\alpha\ (\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \ .$$

III.22. À vista das definições que acabamos de dar, concluimos que o conjunto H é um corpo comutativo. Além disso, como demonstraremos a seguir, êsse corpo é ordenado.

Com efeito, o conjunto H contém um sub-conjunto P de elementos positivos para os quais valem as propriedades:

a) Se α e β são elementos quaisquer de P, $\alpha + \beta$ é também um elemento de P ;

b) Se α e β são de P, $\alpha\beta$ também é um elemento de P ;

c) Se α é um elemento qualquer de H, ou α é positivo, ou α é zero, ou $-\alpha$ é positivo, valendo ùnicamente uma das três alternativas.

As proposições <u>b</u> e <u>c</u> decorrem das próprias definições de produto de dois elementos, e de ser positivo , nulo ou negativo um elemento. Quanto à proposição <u>a</u> vamos demonstrá-la. Chamemos de P a um ponto qualquer da reta (o, ∞) e sejam

$$A = S_\alpha\ (P) \ , \quad B = S_\beta\ (P) \ .$$

Apliquemos o movimento

$$S_\beta S_o S_\alpha$$

ao ponto A. Obteremos

$$S_\beta S_o S_\alpha\ (A) = B = S_{\alpha+\beta}(A),$$

o que nos leva a concluir que A e B se situam simètricamente em relação à reta $(\alpha+\beta, \infty)$, o que significa, precisamente, que essa reta, bem como os pontos A e B estão no mesmo semi-plano de origem $(0, \infty)$ que contém o elemento 1, isto é, $\alpha + \beta$ é positivo .

III.23. <u>Desigualdade entre os extremos</u>: Dados dois elementos α e β do corpo H, dizemos que α é maior do que β, e escrevemos

$$\alpha > \beta \ ,$$

quando e sòmente quando $\alpha - \beta$ for positivo.

Ao contrário, α se diz menor do que β, e se escreve

$$\alpha < \beta \ ,$$

quando, e sòmente quando, a diferença $\alpha - \beta$ for negativa.

Como consequência, temos, se α for positivo, $\alpha > 0$, e se negativo, $\alpha < 0$, pois que $\alpha - 0 = \alpha$. Recìprocamente, se $\alpha > 0$, ou $\alpha < 0$, α é positivo ou negativo, respetivamente, pois se $\alpha > 0$, por exemplo, $\alpha = \alpha - 0$ é positivo.

Aplicando-se a propriedade c do nº III.22, à diferença $\alpha - \beta$, segue-se que, das relações, $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha < B$, uma e sòmente uma é verificada. Seguem-se ainda, como consequências, as propriedades:

a) assimétrica: Se $\alpha > \beta$, $\beta < \alpha$; se $\alpha < \beta$, $\beta > \alpha$.

b) transitiva: Se $\alpha > \beta$ e $\beta > \gamma$, $\alpha > \gamma$; se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, $\alpha < \gamma$. Todo elemento positivo é maior do que todo elemento negativo.

d) O elemento unidade, 1, de H, é positivo.

e) Se γ é positivo, γ^{-1} também é positivo.

f) Se $\alpha > \beta$, $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

g) Se $\alpha > \beta$ e $\gamma > \sigma$, $\alpha + \gamma > \beta + \sigma$.

h) Se $\alpha > \beta$, $\alpha\gamma > \beta\gamma$, se $\gamma > 0$ e $\alpha\gamma < \beta\gamma$, se $\gamma < 0$.

i) Se $\alpha > \beta$ e $\beta > 0$, $\alpha^{-1} < \beta^{-1}$.

j) Se $\alpha > \beta$, $\gamma > \sigma$, $\beta > 0$, $\sigma > 0$, $\alpha\gamma > \beta\sigma$, propriedade válida ainda mesmo quando β ou σ é nulo.

III.24. Vamos introduzir, finalmente como definição, as seguintes desigualdades:

$$\alpha < \infty \ , \quad \text{e} \quad \infty > \alpha \ ,$$

em que α é um elemento qualquer de H.

-.-.-.-.-.-

IV. EQUAÇÕES DOS MOVIMENTOS

IV.01. Como vimos anteriormente, todo movimento faz corresponder a cada extremo um extremo, biunìvocamente. Vamos, agora, determinar as relações entre os extremos, estabelecidas pelos movimentos. Observemos, antes de tudo, que a identidade, movimento que conserva todos os pontos, conserva também todos os extremos (1). Recìprocamente, o movimento que conserva todos os extremos, conserva todos os pontos, isto é, é a identidade. Realmente, se tal movimento fizer corresponder a um ponto A o ponto $A' \not\equiv A$, à reta <u>r</u>, perpendicular à AA', fará corresponder a reta r', perpendicular, também à AA' (teorema II.07). Se α e β forem os extremos de <u>r</u>, serão também os de r' e, portanto, por um mesmo extremo haverá duas perpendiculares à mesma reta, o que é absurdo (teorema II.23).

IV.02. <u>Teorema:</u> Dada uma transformação linear, fracionária, dos extremos,

$$\bar{\xi} = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\alpha + \rho}$$

cujos coeficientes são elementos de H, e cujo módulo

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \rho \end{vmatrix}$$

é diferente de zero, existe um e um só movimento que produz tal transformação (2).

Observe-se, em primeiro lugar, que àquela transformação se poderia chegar, com certo número de transformações dos tipos

a) $\bar{\xi} = -\xi$

b) $\bar{\xi} = 1/\xi$

c) $\bar{\xi} = \xi + \mu$

d) $\bar{\xi} = \xi\pi$,

---

(1) Porque tôda semi-reta é conservada.

(2) Fazendo $f(\xi) = \bar{\xi}$, adotaremos as seguintes convenções: $f(\xi) = \infty$, quando $\gamma\xi+\rho = 0$ e $\alpha\xi+\beta \neq 0$; $f(\infty) = \alpha/\gamma$, se $\gamma \neq 0$ e $f(\infty) = \infty$, se $\gamma = 0$.

transformações a que correspondem, de acôrdo com os números III.05, III.10, III.08 e III.17, os movimentos S_o, P_1, $S_{\frac{\mu}{2}} S_o$, $P_{\sqrt{\pi}} P_1$.

Com efeito, se $\gamma \neq 0$, fazendo

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \alpha', \quad \frac{\beta}{\gamma} = \beta', \quad \frac{\rho}{\gamma} = \rho',$$

teremos:

$$\bar{\xi} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}\xi + \frac{\beta}{\gamma}}{\xi + \frac{\rho}{\gamma}},$$

$$\bar{\xi} = \frac{\alpha'\xi + \beta'}{\xi + \rho'}.$$

Se $\gamma=0$, ρ é diferente de zero, pois o módulo da substituição não é nulo e, pois

$$\bar{\xi} = \frac{\frac{\alpha}{\rho}\xi + \frac{\beta}{\rho}}{\frac{\rho}{\rho}},$$

$$\bar{\xi} = \alpha''\xi + \beta'',$$

em que fizemos $\alpha'' = \alpha/\rho$ e $\beta'' = \beta/\rho$.

Podemos, portanto, concluir que a transformação

$$\bar{\xi} = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \rho}$$

produz um movimento, produto de certo número de movimentos dos tipos

$$S_o, \; P_1, \; S_{\frac{\mu}{2}} S_o, \; P_{\sqrt{\pi}} P_1.$$

De II.04 e IV.01 segue-se a unicidade do movimento. Reciprocamente, IV.03. Teorema: Todo movimento estabelece entre os extremos uma transformação linear fracionária, de módulo diferente de zero.

Como todo movimento é um produto de simetrias (II.22), limitar-nos-emos a considerar o caso de uma simetria.

Sejam, então, α e β os extremos do eixo da simetria S_r, e α' e β' os extremos que se correspondem nessa simetria, isto é, $S(\alpha') = \beta$.

Efetuando a transformação

$$\overline{\xi} = \frac{\xi - \alpha}{\xi - \beta}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & -\beta \end{vmatrix} \neq 0,$$

que, segundo vimos há pouco, é um movimento, ao eixo de simetria considerada, corresponderá a reta (o, ∞), e à reta (α', β') a reta

$$\left(\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \beta}, \frac{\beta' - \alpha}{\beta' - \beta} \right).$$

Como α' e β' são simétricos em relação à reta r, isto é, α' e β' se correspondem na simetria S_r, segue-se que os extremos

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \beta}, \frac{\beta' - \alpha}{\beta' - \beta}$$

são simétricos em relação à rena (o, ∞), e, pois, segundo o número III.05

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \beta}, \frac{\beta' - \alpha}{\beta' - \beta},$$

de onde,

$$\beta' = \frac{1/2\,(\alpha + \beta)\,\alpha' - \alpha\beta}{\alpha' - 1/2(\alpha + \beta)},$$

transformação, de que o módulo,

$$\begin{vmatrix} 1/2(\alpha + \beta) & -\alpha\beta \\ 1 & -1/2(\alpha + \beta) \end{vmatrix} =$$

$$= -1/4(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta = -1/4(\alpha - \beta)^2 ,$$

é certamente diferente de zero, pois que $\alpha \neq \beta$.

É claro, então, que a aplicação de certo número de vêzes da transformação (I) dará como resultado ainda uma transformação linear fracionária, de módulo diferente de zero, de onde se segue o teorema.

IV.04. Definição: A tôda transformação linear, fracionária, cujos coeficientes são elementos de H, de módulo diferente de zero, dos extremos, chamaremos de equação de um movimento.

---------x--------

V. POSIÇÕES RELATIVAS DAS RETAS

V.01. Retas paralelas: Dadas duas retas r e s, dizemos que r é paralela à s, quando e sòmente quando existe uma semi-reta a de r, paralela a uma semi-reta b de s. Como consequência da definição e dos teoremas sôbre semi-retas paralelas, se r é paralela a s, esta é paralela àquela, o que se exprime, abreviadamente, dizendo que r e s são retas paralelas. Pode-se ainda dizer, do mesmo modo que, se a é paralela à b e b é paralela à c, a é paralela à c .

V.02. Retas secantes: Dizemos que duas retas r e s são secantes, quando e sòmente quando têm um ponto comum.

V.03. Retas não secantes: Dada uma reta r, sejam s e t retas perpendiculares à r. Essas retas, s e t, não são nem paralelas, nem secantes, pois, no primeiro caso, teriamos duas perpendiculares a uma reta por um mesmo extremo, e, no segundo, duas perpendiculares a uma reta por um mesmo ponto.

Sejam AA' e BB' duas semi-retas não paralelas, pertencentes a um mesmo semi-plano ABA', e B um ponto não pertencente à reta AB. Essas semi-retas definem, pois, dois extremos distintos, α e β. Êsses dois extremos determinam (teorema II.24) uma única reta e essa reta e a AB não são nem paralelas, nem secantes. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que elas tenham um ponto comum, M. Ora, as semi-retas (M,α) e (M,β), pertencendo a u'a mesma reta e a um mesmo semi-plano cuja origem passa pela origem comum, M (das semi-retas), são paralelas e, pois, α e β não são distintos, contra a hipótese. Essas retas, (α,β) e AB, por outro lado, não são paralelas, pois os dois extremos de AB, α e β são distintos entre si. Inversamente, se AB e (α, β) não são nem paralelas, nem secantes, uma delas, por exemplo (α,β), tem todos os seus pontos em um mesmo semi-plano, em relação à outra, AB. Observe-se que se duas retas são paralelas, a e b, os pontos de uma delas estão em um mesmo semi-plano em relação à outra. Segue-se que, chamando de retas não secantes a duas retas de um plano que não são nem secantes, nem paralelas, dadas duas retas, r e s, a fim de que todos os pontos de uma estejam em mesmo semi-plano em relação à outra, é necessário e suficiente que r e s ou sejam não secantes, ou sejam paralelas.

V.04. Posições de duas retas e relações com os extremos: Pelo que vimos, duas retas de um plano podem ser secantes, não secantes, ou paralelas. Veremos, neste número, as relações existentes entre os extremos das retas, nos três casos considerados.

Sejam (α, β) e (ρ, μ) as retas, que suporemos, sempre, distintas. Suponhamos, primeiramente, que nenhum dêsses extremos coincida com o extremo ∞, e efetuemos o movimento definido pela equação

$$\bar{\xi} = \frac{\xi - \rho}{\xi - \mu} .$$

Por êsse movimento, à reta (ρ, μ) corresponde a reta (o, ∞) e à reta (α, β) a reta

$$\left(\frac{\alpha - \rho}{\alpha - \mu} , \frac{\beta - \rho}{\beta - \mu} \right) .$$

Ora, se as retas dadas tiverem um ponto comum, o mesmo acontecerá com as retas correspondentes, pois, segundo o teorema II.06, se um ponto P pertence a uma reta r, o ponto correspondente, P', pertence à reta correspondente r'. Do mesmo modo, se as retas dadas forem não secantes, o mesmo acontecerá com as retas transformadas, uma vez que, se estas tivessem um ponto comum ou um extremo comum, as retas de que elas são correspondentes teriam, respetivamente, um ponto comum ou um extremo comum, como se depreende da aplicação do movimento inverso. Em resumo, dadas duas retas, se elas forem secantes, não secantes ou paralelas, o mesmo acontecerá com as retas correspondentes, e vice-versa.

Levando em conta as considerações expendidas em V.03 e as definições de elementos positivos e negativos do corpo H, podemos concluir que, a fim de que as retas (o, ∞) e

$$\left(\frac{\alpha - \rho}{\alpha - \mu} , \frac{\beta - \rho}{\beta - \mu} \right) ,$$

e, consequentemente as retas (α, β) e (ρ, μ) sejam, respetivamente, secantes ou não secantes, é necessário e suficiente que

$$\frac{\alpha - \rho}{\alpha - \mu} \cdot \frac{\beta - \rho}{\beta - \mu} < 0 \quad ,$$

ou

$$\frac{\alpha - \rho}{\alpha - \mu} \cdot \frac{\beta - \rho}{\beta - \mu} > 0 \quad .$$

Observando que essas desigualdade são equivalentes, respetivamente, às desigualdades

$$(\alpha - \rho)(\beta - \rho)(\alpha - \mu)(\beta - \mu) < 0 \quad ,$$

$$(\alpha - \rho)(\beta - \rho)(\alpha - \mu)(\beta - \mu) > 0 \quad ,$$

e que o primeiro membro (comum) dessas desigualdades a que chamaremos de Δ , se anula quando um dos extremos de uma das retas coincide com um dos extremos da outra, e que, vice-versa, quando $\Delta = 0$, um dos extremos de uma delas coincide com um dos extremos da outra, podemos concluir:

a) A fim de que as retas (α, β) e (ρ, μ) sejam secantes é necessário e suficiente que $\Delta < 0$.

b) A fim de que as retas (α, β) e (ρ, μ) sejam não secantes é necessário e suficiente que $\Delta > 0$.

c) A fim de que as retas (α, β) e (ρ, μ) sejam paralelas é necessário e suficiente que $\Delta = 0$.

Suponhamos, agora, que um dos extremos, ρ, por exemplo, coincida com o extremo ∞. Efetuemos, então, o movimento cuja equação é

$$\bar{\xi} = \xi - \mu \; .$$

Por êsse movimento, a reta (∞ , μ) transforma-se na reta $(\infty , 0)$ e a reta (α, β) na reta $(\alpha - \mu, \beta - \mu)$. Como se vê fàcilmente, as conclusões são as mesmas a que chegámos anteriòrmente desde que façamos

$$\Delta = (\alpha - \mu)(\beta - \mu) \quad .$$

Observação: O produto $\triangle$, quando nenhum dos extremos coincide com o extremo ∞, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\triangle = (u_0-u_1)^2 - 4(u_0v_1-u_1v_0)(v_0-v_1)$$

em que

$$u_0 = \alpha\beta \quad , \quad u_1 = \rho\mu \quad , \quad v_0 = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad , \quad v_1 = \frac{\rho+\mu}{2} .$$

Com efeito,

$$-\triangle = (\alpha-\rho)(\beta-\mu)(\beta-\rho)(\mu-\alpha) = (\alpha-\rho)(\beta-\mu)(-\alpha\beta-\rho\mu+\beta\mu+\alpha\rho) =$$

$$= (\alpha-\rho)(\beta-\mu)(-\alpha\beta+\rho\beta+\rho\beta-\rho\mu+\beta\mu+\alpha\rho-2\rho\beta) =$$

$$= (\alpha-\rho)(\beta-\mu)\left[-(\alpha-\rho)\beta+(\beta-\mu)\rho+\beta\mu+\alpha\rho-2\rho\beta\right] =$$

$$= (\alpha-\rho)^2(\mu-\beta)\beta+(\beta-\mu)^2\alpha\rho-(\beta-\mu)^2\rho^2+(\beta\mu+\alpha\rho-2\rho\beta)(\alpha-\rho)(\beta-\mu) =$$

$$= (\alpha-\rho)^2\beta\mu \quad (\alpha-\rho)^2\beta^2+(\beta-\mu)^2\alpha\rho-(\beta-\mu)^2\rho^2+(\beta\mu+\alpha\rho)(\alpha-\rho)(\beta-\mu)+$$

$$-2\rho\beta(\alpha-\rho)(\beta-\mu) =$$

$$= (\alpha-\rho)^2\beta\mu+(\beta-\mu)^2\alpha\rho+\beta\mu(\alpha-\rho)(\beta-\mu)+\alpha\rho(\alpha-\rho)(\beta-\mu)+$$

$$-\left[\beta^2(\alpha-\rho)^2+\rho^2(\beta-\mu)^2+2\rho\beta(\alpha-\rho)(\beta-\mu)\right] =$$

$$=(\alpha-\rho)^2\beta\mu+(\beta-\mu)^2\alpha\rho+\beta\mu(\alpha-\rho)(\beta-\mu)+\alpha\rho(\alpha-\rho)(\beta-\mu)+$$

$$-\left[\beta(\alpha-\rho)+\rho(\beta-\mu)\right]^2 =$$

Resultante das equações em x: $x^2-2v_0x+u_0=0$ com raízes α e β, $x^2-2v_1x+u_1=0$ " ρ e μ

$$= (\alpha-\rho)\beta\mu\left[(\alpha-\rho)+(\beta-\mu)\right]+(\beta-\mu)\alpha\rho\left[(\alpha-\rho)+(\beta-\mu)\right]-(\alpha\beta-\rho\mu)^2 =$$

$$= \left[(\alpha-\rho)+(\beta-\mu)\right]\left[(\alpha-\rho)\beta\mu+(\beta-\mu)\alpha\rho\right]-(\alpha\beta-\rho\mu)^2 =$$

$$= \left[(\alpha+\beta)-(\rho+\mu)\right](\alpha\beta\mu-\rho\beta\mu+\alpha\rho\beta-\alpha\rho\mu)-(\alpha\beta-\rho\mu)^2 =$$

$$= \left[(\alpha+\beta)-(\rho+\mu)\right]\left[\alpha\beta(\mu+\rho)-\rho\mu(\alpha+\beta)\right]-(\alpha\beta-\rho\mu)^2 =$$

$$= 4\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\rho+\mu}{2}\right)\left(\alpha\beta\frac{\rho+\mu}{2}-\rho\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-(\alpha\beta-\rho\mu)^2 =$$

$$= 4(v_o-v_1)(u_ov_1-u_1v_o)-(u_o-u_1)^2 .$$

Portanto:

$$\triangle = (u_o-u_1) -4(u_ov_1-u_1v_o)(v_o-v_1) .$$

V.05. <u>Condição de perpendicularidade entre duas retas</u>: Para que duas retas (α,β) e (ρ,μ) sejam perpendiculares entre sí, é necessário e suficiente que

$$-\frac{\alpha-\rho}{\alpha-\mu} = \frac{\beta-\rho}{\beta-\mu} .$$

Vamos demonstrar primeiramente que a condição dada é necessária. Suponhamos, então, que as duas retas sejam perpendiculares entre sí, e efetuemos o movimento de equação

$$\bar{\xi} = \frac{\xi-\rho}{\xi-\mu} .$$

Por êsse movimento, a reta (ρ,μ) transforma-se na reta (o, ∞) e a reta (α,β), na reta

$$\left(\frac{\alpha - \rho}{\alpha - \mu}, \frac{\beta - \rho}{\beta - \mu}\right).$$

Segundo o teorema II.07, as retas (o, ∞) e $\left(\frac{\alpha - \rho}{\alpha - \mu}, \frac{\beta - \rho}{\beta - \mu}\right)$ são, também, perpendiculares entre si, e, de acôrdo com o número III.05, pois,

$$-\frac{\alpha - \rho}{\alpha - \mu} = \frac{\beta - \rho}{\beta - \mu},$$

a condição é necessária.

Para demonstrar que a condição é suficiente, basta observar que essa condição implica na perpendicularidade das retas (o, ∞) e $\left(\frac{\alpha - \rho}{\alpha - \mu}, \frac{\beta - \rho}{\beta - \mu}\right)$, e pela aplicação do movimento inverso,de acôrdo ainda com o número II.07, se pode concluir que as retas (α, β) e (ρ, μ) são, entre si, perpendiculares.

<u>Observação I</u>: Para a demonstração que acabámos de fazer é necessário supor que nenhum dos extremos coincida com o ∞. Se um dêles, por exemplo α, coincidir com o ∞, efetuando o movimento $S_{-\beta/2}\, S_o$, que é uma rotação, se $\beta \neq 0$ e a identidade, se $\beta = 0$, e cuja equação é

$$\bar{\xi} = \xi - \beta,$$

as retas (∞, β) e (ρ, μ) transformam-se, respetivamente, nas retas (∞, o) e $(\rho - \beta, \mu - \beta)$ e raciocinando como anteriormente, podemos concluir que, a fim de que as retas (∞, β) e (ρ, μ) sejam, entre si, perpendiculares é necessário e suficiente que

$$\rho - \beta = -(\mu - \beta)$$

ou

$$\rho + \mu = 2\beta.$$

<u>Observação II</u>: A condição de perpendicularidade pode exprimir-se de outro modo, como o faremos, no caso em que nenhum dos

extremos coincida com o extremo ∞. Como $u_o = \alpha\beta$, $u_1 = \rho\mu$, $v_o = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ e $v_1 = \dfrac{\rho+\mu}{2}$ de

$$-\frac{\alpha-\rho}{\alpha-\mu} = \frac{\beta-\rho}{\beta-\mu}$$

tiramos, sucessivamente:

$$-(\alpha-\rho)(\beta-\mu) = (\alpha-\mu)(\beta-\rho)\ ,$$

$$-\alpha\beta + \alpha\mu + \rho\beta - \rho\mu = \alpha\beta - \alpha\rho - \beta\mu + \rho\mu\ ,$$

$$2\alpha\beta + 2\rho\mu = \alpha\mu + \rho\beta + \beta\rho + \beta\mu\ ,$$

$$2\alpha\beta + 2\rho\mu = \alpha(\rho+\mu) + \beta(\rho+\mu)\ ,$$

$$\alpha\beta + \rho\mu = 2\,\frac{\rho+\mu}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\ ,$$

e, finalmente,

$$u_o + u_1 = 2v_1 v_o\ .$$

V.06. <u>Perpendicular comum a duas retas</u>: Dadas as retas (α, β) e (γ, σ), e fazendo

$$u_1 = \alpha\beta\ ,\ v_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}\ ,\ u_2 = \gamma\sigma\ ,\ v_2 = \frac{\gamma+\sigma}{2}\ ,$$

suponhamos, primeiramente, que o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2v_1 \\ 1 & -2v_2 \end{vmatrix} \neq 0\ ,$$

e que nenhuma dessas retas passe pelo ∞.

Se houver, então, uma reta (α', β'), perpendicular simultaneamente à (α, β) e à (γ, σ), deverão ser satisfeitas as condições:

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= 2v_1v_0 \\ u_0 + u_2 &= 2v_2v_0 \,, \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

de acôrdo com o número V.05, observação I, em que $u_0 = \alpha'\beta'$ e $v_0 = (\alpha' + \beta')/2$.

Ora, essas condições constituem um sistema de duas equações lineares, de incógnitas u_0 e v_0, que, em virtude de o determinante formado com os coeficientes das incógnitas ser diferente de zero, por hipótese, admite uma única solução

$$u_0 = \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{v_1 - v_2}$$

$$v_0 = \frac{u_1 - u_2}{2(v_1 - v_2)} \,.$$

Como $u_0 = \alpha'\beta'$ e $v_0 = \dfrac{\alpha' + \beta'}{2}$, segue-se que α' e β' são as raizes da equação

$$X^2 - 2v_0X + u_0 = 0 \,,$$

a qual é resolúvel no corpo H, desde que se tenha $v_0^2 - u_0 \geqslant 0$. Substituindo v_0 e u_0 pelos valores encontrados acima, obteremos:

$$v_0^2 - u_0 = \frac{(u_1-u_2)^2}{4(v_1-v_2)^2} - \frac{u_1v_2-u_2v_1}{v_1-v_2} = \frac{(u_1-u_2)^2 - 4(u_1v_2-u_2v_1)}{4(v_1-v_2)^2} = \frac{\Delta}{4(v_1-v_2)^2}$$

e, para que $v_0^2 - u_0$ seja positivo, uma vez que $4(v_1 - v_2)^2$ é sempre positivo, é necessário e suficiente que $\Delta > 0$, o que acarreta, de acôrdo com o número V.03, que as retas dadas sejam <u>não secantes</u>.

Supondo, agora, que um dos extremos, por exemplo σ, coincide com o ∞, para que a reta (α', β') seja perpendicular ao mesmo tempo à reta (α, β) e à (γ, ∞) é necessário, primeiramente, que u_o e v_o sejam raizes das equações

$$\begin{aligned} u_o + u_1 &= 2v_1 v_o \\ v_o &= \gamma \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

de acôrdo, ainda, com o número V.03. Ora, êsse sistema admite uma única solução

$$v_o = \gamma$$

$$u_o = 2\gamma v_1 - u_1 \ ,$$

pois que

$$\begin{vmatrix} 1 & -2v_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ ,$$

e como α' e β' são as raizes (distintas) da equação

$$X^2 - 2v_o X + u_o = 0$$

devemos ter:

$$v_o^2 - u_o > 0 \ .$$

Como, neste caso,

$$v_o^2 - u_o = \gamma^2 - 2v_1\gamma + u_1 = \gamma^2 - \gamma(\alpha+\beta) + \alpha\beta = \gamma(\gamma-\alpha) - \beta(\gamma-\alpha) = (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = \Delta \ ,$$

segue-se que as retas dadas, como no caso anterior, devem ser <u>não secantes</u>.

Em qualquer dos dois casos, se houvesse uma outra reta perpendicular comum às duas retas dadas, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, fazendo $\bar{u}_o = \overline{\alpha\beta}$ e $\bar{v}_o = (\bar{\alpha} + \bar{\beta})/2$, como $\bar{u}_o$ e $\bar{v}_o$ devem ser raizes das equações (I), ou (II), segue-se que $u_o = \bar{u}_o$ e $v_o = \bar{v}_o$, e, consequentemente, as retas (α', β') e $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ coincidiriam, o que é absurdo.

Suponhamos, finalmente, que

$$\begin{vmatrix} 1 & -2v_1 \\ 1 & -2v_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Efetuemos o movimento expresso pela equação

$$\bar{\xi} = \frac{2}{\alpha - \beta}\xi - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} .$$

Por êsse movimento, à reta (α,β) corresponde a reta $(-1,1)$ e à reta (γ,σ), a reta

$$\left(\frac{2\gamma - \alpha - \beta}{\alpha - \beta} , \frac{2\sigma - \alpha - \beta}{\alpha - \beta} \right) .$$

Ora,

$$\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{\alpha-\beta} + \frac{2\sigma-\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{2\left[(\gamma+\sigma)-(\alpha+\beta)\right]}{\alpha - \beta}$$

e, como, por hipótese, $v_1 = v_2$, consequentemente, $\gamma+\sigma = \alpha+\beta$ e,pois,

$$\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{\alpha-\beta} + \frac{2\sigma-\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 0$$

com o que se pode concluir, de acôrdo com o número III.05, que as retas (o,∞) e

$$\left(\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{\alpha-\beta} , \frac{2\sigma-\alpha-\beta}{\alpha-\beta} \right)$$

são perpendiculares entre si, o mesmo acontecendo com as retas (o,∞) e $(-1,1)$, isto é, a reta (o,∞) é perpendicular comum às retas $(-1,1)$ e

$$\left(\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{\alpha-\beta}, \frac{2\sigma-\alpha-\beta}{\alpha-\beta} \right)$$

e, consequentemente, (número V.05) a reta (ρ,μ), (1) de que a $(0,\infty)$ é a correspondente, é perpendicular comum às retas (α,β) e (γ,σ).

Para demonstrar que essa perpendicular comum é única, basta provar que não existe nenhuma outra perpendicular ao mesmo tempo à $(-1,1)$ e à

$$\left(\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{\alpha-\beta}, \frac{2\sigma-\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right) .$$

Para simplificar, designemos os extremos desta última reta por $-\xi$ e ξ, e suponhamos exista uma outra reta $(\overline{\rho},\overline{\mu})$, também perpendicular, simultaneamente, às retas $(-1,1)$ e $(-\xi,\xi)$. Pela condição de perpendicularidade (número V.05) devemos ter

$$\overline{\rho\mu} - 1 = 0$$

$$\overline{\rho\mu} - \xi^2 = 0$$

de onde

$$\xi = 1 ,$$

o que é absurdo, pois as retas $(-1,1)$ e $(-\xi,\xi)$ são distintas.

Observando que também neste caso as duas retas dadas são <u>não secantes</u> (2), podemos, resumindo, concluir:

<u>Para que duas retas, r e s, tenham uma perpendicular comum,</u> (que é única), é <u>necessário</u> e <u>suficiente que elas sejam não secantes</u>.

---------x---------

(1) Determinam-se ρ e μ, por meio da equação $\xi = \overline{\xi}(\alpha-\beta)/2 + (\alpha+\beta)/2$, que é a equação do movimento inverso do movimento de equação $\overline{\xi} = 2\xi/(\alpha-\beta) - (\alpha+\beta)/(\alpha-\beta)$.

(2) É condição suficiente, a fim de que duas retas sejam não secantes, que a soma dos extremos de uma seja igual à soma dos extremos da outra, pois $\Delta = (u_1-u_2)^2 - 4(u_1v_2-u_2v_1)(v_1-v_2)$.

EQUAÇÕES DOS PONTOS

VI.01. Ponto impróprio: Duas ou mais retas definem o mesmo ponto impróprio, quando e sòmente quando são paralelas entre si. Consequentemente, retas não paralelas definem pontos impróprios diferentes.

Diremos que duas ou mais retas, que definem o mesmo ponto impróprio, passam por êle, ou pertencem a ele, ou ainda, que êsse ponto impróprio pertence à aquelas retas.

Para distinguir os pontos impróprios dos outros pontos até agora considerados, daremos, a êstes, o nome de pontos próprios. Frequentemente, porém, desde que não haja confusão, designaremos os pontos próprios com o nome de pontos, apenas.

VI.02. Ponto ideal: Duas ou mais retas definem o mesmo ponto ideal, quando e sòmente quando têm uma perpendicular comum. Segue-se que retas que não têm perpendicular comum definem pontos ideais diferentes.

No capítulo anterior vimos que duas retas não secantes têm uma perpendicular comum. Duas retas não secantes, pois, definem um ponto ideal.

Diremos que duas ou mais retas, que definem o mesmo ponto ideal, passam por êle, ou pertencem a êle, ou ainda que êsse ponto pertence àquelas retas.

VI.03. Feixe de retas: Chama-se feixe de retas ao conjunto das retas de um plano que passam por um mesmo ponto, próprio, impróprio ou ideal, o qual, por sua vez, recebe o nome de centro do feixe.

VI.04. Teorema: Para que uma reta (α, β), que não passa pelo ∞, passe pelo ponto 0, intersecção das retas $(0, \infty)$ e $(-1, 1)$, é necessário e suficiente que $\alpha\beta = -1$.

Suponhamos que a reta (α, β) passe pelo ponto 0 e consideremos o movimento $S_t S_r$, em que $r \equiv (\alpha, \beta)$ e t é a perpendicular, pelo ponto 0, à reta r. Se A é um ponto qualquer da semi-reta $(0, \alpha)$ e A' o correspondente de A, por aquêle movimento, A' é o simétrico de A, em relação à t. A' é, pois, um ponto da semi-reta $(0, \beta)$, oposta à $(0, \alpha)$, isto é, $S_t S_r(\alpha) = \beta$. Por outro lado, $S_t S_r = P_1 S_0$ (II.14) e, como a equação de $P_1 S_0$ é, (IV.02), $\overline{\xi} = -1/\xi$, $S_t S_r(\alpha) = -1/\alpha$, e, portanto $\beta = -1/\alpha$, ou $\alpha\beta = -1$. A condição é, pois, necessária.

Suponhamos, agora, que $\alpha\beta = -1$. Observemos, em primeiro lugar, que essa igualdade exclui que as retas (α, β) e $(0, \infty)$ sejam paralelas ou não secantes, porquanto $\triangle = (\alpha - 0)(\beta - 0) = -1$. Designemos, então, por T, o ponto comum às retas (α, β) e $(0, \infty)$, e, por P', o correspondente de P, no movimento P_1S_o. P' é, então, um ponto da reta $(0, \infty)$, porque é o simétrico de P, em relação à reta $(-1,1)$ e pertence, também, à reta (α, β), porquanto o movimento P_1S_o, que transforma α em $-1/\alpha$ e β em $-1/\beta$, conserva a reta (α, β). Se P não coincidir, então, com O, as retas (α, β) e $(0, \infty)$ terão, em comum, dois pontos, P e P', isto é, coincidirão, o que é absurdo, e, portanto, a condição é suficiente.

VI.05. <u>Teorema</u>: Para que uma reta (α, β), que não passa pelo ∞, passe por um ponto Q da reta $(0, \infty)$, é necessário e suficiente que $\alpha\beta = -\pi^2$, em que $(\pi, -\pi)$ é a reta perpendicular à $(0, \infty)$, pelo ponto Q.

Com efeito, se $\pi > 0$ (1), efetuando o movimento

$$P_{\sqrt{1/\pi}}P_1$$

o ponto Q se transformará no ponto O, e, basta, então, aplicar o teorema anterior.

VI.06. <u>Teorema</u>: Para que uma reta (α, β), que não passa pelo ∞, passe por um ponto A da reta (ρ, ∞), é necessário e suficiente que

$$u_1 - 2\rho v_1 + \pi^2 = 0 \quad ,$$

em que $u_1 = \alpha\beta$, $v_1 = (\alpha + \beta)/2$ e $(\pi, -\pi)$ é a perpendicular, pelo ponto A, à reta $(0, \infty)$.

Efetuando o movimento de equação

$$\bar{\xi} = \xi - \rho$$

o ponto A se transforma em um ponto Q da reta $(0, \infty)$ e, de acôrdo com o teorema anterior, para que a reta (α_1, β_1), transformada de (α, β), por êsse movimento, passe pelo ponto Q, é necessário e suficiente que

$$\alpha_1\beta_1 = -\pi_1^2$$

---

(1) Se $\pi < 0$, $-\pi$ será maior do que 0, e o movimento $P_{\sqrt{-1/\pi}}P_1$ transforma o ponto Q no ponto O.

em que $(\pi_1, -\pi_1)$ é a perpendicular, pelo ponto Q, à reta $(0, \infty)$.

Designando por (γ, σ) a perpendicular, pelo ponto A, à reta (ρ, ∞), vê-se, imediatamente, que $\pi_1^2 = (\gamma - \rho)(\sigma - \rho)$. Substituindo então, α_1, β_1 e π_1^2 pelos seus respetivos valores, vem

$$(\alpha - \rho)(\beta - \rho) = -(\gamma - \rho)(\sigma - \rho)$$

ou

$$\alpha\beta - 2\rho(\alpha + \beta)/2 + \rho^2 + (\gamma - \rho)(\sigma - \rho) = 0 \; .$$

Para que a reta $(\pi, -\pi)$ passe também pelo ponto A, raciocinando com anteriormente, devemos ter:

$$-\pi^2 - 2\rho(\pi - \pi)/2 + \rho^2 + (\gamma - \rho)(\sigma - \rho) = 0$$

ou

$$\pi^2 = \rho^2 + (\gamma - \rho)(\sigma - \rho) \; .$$

Substituindo $\alpha\beta$, $(\alpha + \beta)/2$ e $\rho^2 + (\gamma - \rho)(\sigma - \rho)$ pelos seus respetivos valores, temos, finalmente:

$$u_1 - 2\rho v_1 + \pi^2 = 0 \; .$$

VI.07. <u>Teorema</u>: Para que as retas (α_1, β_1), (α_2, β_2) e (α_3, β_3) passem por um mesmo ponto, isto é, constituam um feixe, é necessário e suficiente que

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; ,$$

em que $u_i = \alpha_i\beta_i$ e $v_i = (\alpha_i + \beta_i)/2$, $i=1,2,3$. (1)

Demonstremos que a condição é necessária e suponhamos em primeiro lugar, que as três retas passem por um ponto próprio P. Indicando com ρ o outro extremo da reta (P, ∞), e por $(\pi, -\pi)$ a

(1) Supomos que as retas dadas sejam distintas e nenhuma delas passe pelo ∞.

perpendicular, pelo ponto P, à reta (0, ∞), deverão verificar-se, de acôrdo com o teorema anterior, as relações

$$u_i - 2\rho v_i + \pi^2 = 0 \qquad (i=1,2,3).$$

Podemos escrever, então:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\rho v_1 - \pi^2 & v_1 & 1 \\ 2\rho v_2 - \pi^2 & v_2 & 1 \\ 2\rho v_3 - \pi^2 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\rho \begin{vmatrix} v_1 & v_1 & 1 \\ v_2 & v_2 & 1 \\ v_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Seja, agora, impróprio, o centro do feixe. Então $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$, por exemplo, e podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 & (\alpha_1+\beta_1)/2 & 1 \\ \alpha_1\beta_2 & (\alpha_1+\beta_2)/2 & 1 \\ \alpha_1\beta_3 & (\alpha_1+\beta_3)/2 & 1 \end{vmatrix} = \alpha_1/2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 & 1 \\ \beta_2 & \beta_2 & 1 \\ \beta_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Finalmente, suponhamos seja ideal o centro do feixe. Existe, então, uma reta (α_o, β_o), à qual as três retas dadas são perpendiculares. Designando por u_o e v_o , respetivamente o produto e a semi-soma dos extremos daquela reta, devemos ter, de acôrdo com o número V.05, as relações:

$$u_o + u_i = 2v_o v_i \qquad (i=1,2,3).$$

Podemos, portanto, escrever:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2v_o v_1 - u_o & v_1 & 1 \\ 2v_o v_2 - u_o & v_2 & 1 \\ 2v_o v_3 - u_o & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 2v_o \begin{vmatrix} v_1 & v_1 & 1 \\ v_2 & v_2 & 1 \\ v_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstremos, agora, que a condição é suficiente. Ora, se

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

uma fila qualquer dêsse determinante é uma combinação linear das filas restantes. Podemos, pois, escrever:

$$u_1 = \mu_1 v_1 + \mu_2$$

$$u_2 = \mu_1 v_2 + \mu_2$$

$$u_3 = \mu_1 v_3 + \mu_2$$

ou, fazendo $\beta = -\mu_1 \alpha$, $\gamma = -\mu_2 \alpha$, com $\alpha \neq 0$,

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma = 0$$
$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma = 0$$
$$\alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma = 0 .$$

Ora, essas equações, lineares e homogêneas, das incógnitas α, β e γ, admitem soluções próprias, que são

$$\alpha = \mu \begin{vmatrix} v_i & 1 \\ v_j & 1 \end{vmatrix} , \ \beta = -\mu \begin{vmatrix} u_i & 1 \\ u_j & 1 \end{vmatrix} , \ \gamma = \mu \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$$

em que $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, 3$.

Vamos decompor a demonstração em três partes, segundo seja a diferença $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ negativa, positiva ou nula, respetivamente.

a) $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$. Segue-se (número V.04) que as retas dadas são, duas a duas, secantes, e, ou passam tôdas por um mesmo ponto P (próprio) ou são suportes dos lados de um triângulo. Provemos que a última alternativa não pode verificar-se. Com efeito, chamando de P ao ponto comum às duas retas (α_1, β_1) e (α_2, β_2), suponhamos, para a demonstração pela redução ao absurdo, que a terceira reta não passe pelo ponto P. Traçando a semi-reta (P, α_3), indiquemos com β_4 o outro extremo da reta (P, α_3). De acôrdo com a primeira parte da demonstração dêste teorema (a condição é necessária), devemos ter, então:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ \alpha_3\beta_4 & (\alpha_3+\beta_4)/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Efetuando a soma dêsse determinante com o determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ -u_3 & -v_3 & -1 \end{vmatrix}$$

que, também é nulo, obteremos

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ \alpha_3\beta_4-\alpha_3\beta_3 & (\beta_4-\beta_3)/2 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ou

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ \alpha_3(\beta_4-\beta_3) & 1/2(\beta_4-\beta_3) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ \alpha_3 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} (\beta_4-\beta_3) = 0 .$$

Como $\beta_3 \neq \beta_4$, porque a reta (P, α_3) $\not\equiv$ (α_3, β_3), o último determinante, acima, é nulo, de onde se deduz que

$$\alpha_3 = \frac{u_1 - u_2}{2(v_1 - v_2)} \quad .$$

Traçando, agora, a semi-reta (P, β_3) e designando por α_4 o outro extremo da reta (P, β_3), devemos, igualmente, ter:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ \beta_3 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} (\alpha_4 - \alpha_3) = 0 \ .$$

E, como o último determinante também é nulo,

$$\beta_3 = \frac{u_1 - u_2}{2(v_1 - v_2)}$$

e, portanto, $\alpha_3 = \beta_3$, o que é absurdo, porque α_3 e β_3 são os extremos de uma reta, distintos, pois.

b) $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$. Vamos mostrar que, neste caso, existe uma reta à qual as três retas dadas são perpendiculares. Ora, se a reta (α_o, β_o) for perpendicular a cada uma das retas dadas, deveremos ter, de acôrdo com o número V.05,

$$u_o + u_1 = 2v_ov_1$$

$$u_o + u_2 = 2v_ov_2$$

$$u_o + u_3 = 2v_ov_3$$

em que $u_i = \alpha_i\beta_i$, $v_i = 1/2(\alpha_i + \beta_i)$, $i=0,1,2,3$, um sistema de três equações, lineares, das incógnitas u_o e v_o. Como se vê imediatamente, a característica da matriz completa não pode ser superior a 2 e, se for 2 a característica da matriz incompleta, o sistema admitirá uma e uma só solução, isto é , a reta (α_o , β_o) é perpendicular (e é a única) a cada uma das retas dadas. Se a característica da matriz incompleta for 1, $v_1 = v_2 = v_3$ e, de acôrdo com o número V.06, existe uma (e uma só) reta perpendicular àquelas retas, e, pois, o teorema está demonstrado.

c) $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$. Segue-se, do número V.04, que as três retas dadas são paralelas entre si e passam, pois, por um mesmo ponto impróprio, e fica, assim, o teorema completamente demonstrado.

VI.08. <u>Equações dos pontos</u>: Supondo que as retas (α_2, β_2) e (α_3, β_3) do número anterior sejam fixas, e, observando que a relação

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

pode escrever-se sob a forma:

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma = 0 , \qquad \text{(I)}$$

em que

$$\alpha = v_2 - v_3 , \ \beta = u_3 - u_2 , \ \gamma = u_2 v_3 - u_3 v_2 ,$$

podemos dizer que, ao variar a reta (α_1, β_1), a equação (I) representa <u>analìticamente</u> um ponto, e precisamente um ponto próprio, impróprio ou ideal, segundo seja $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ negativo, nulo ou positivo, respetivamente.

Podemos dizer, ainda, que tôda equação do tipo (I) representa analìticamente um ponto, isto é, as retas, de que o produto e a semi-soma dos extremos satisfazem a uma equação daquele tipo, passam, tôdas, por um mesmo ponto (próprio, impróprio ou ideal). Com efeito, basta demonstrar que três quaisquer dessas retas passam por um mesmo ponto. Sejam, então, (α_1, β_1), (α_2, β_2)

e (α_3, β_3) três dessas retas, isto é, tais que

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma = 0$$

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma = 0$$

$$\alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma = 0 ,$$

em que, como sempre, $u_i = \alpha_i \beta_i$, $v_i = (\alpha_i + \beta_i)/2$, $i=1,2,3$.

Ora, temos, acima, um sistema de três equações, lineares, homogêneas, de três incógnitas, e, para que êle admita soluções próprias, é necessário que

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

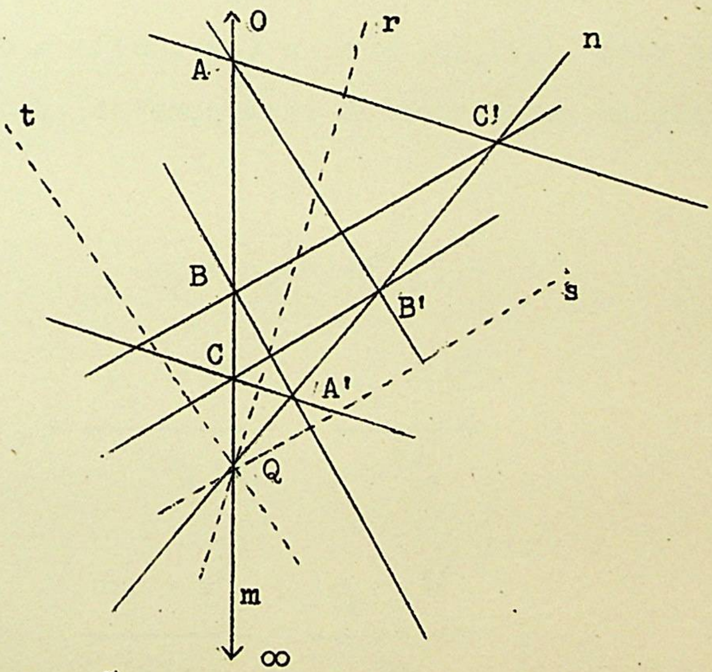
relação que, de acôrdo com o teorema do número anterior, é uma condição necessária e suficiente para que as retas dadas passem por um mesmo ponto. Portanto, podemos concluir que, se uma reta varia em tôrno de um ponto (próprio, impróprio ou ideal), o produto e a semi-soma dos extremos satisfazem a uma equação linear, de duas variáveis, e vice-versa.

------x------

VII. TEOREMA DE PASCAL

VII.01. Teorema : Dadas as retas $\underline{m}$ e $\underline{n}$ que se encontram em um ponto Q, se A,B,C, forem pontos de $\underline{m}$, A',B',C' de $\underline{n}$, e as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, perpendiculares comuns, respetivamente, aos lados opostos AC' e A'C, AB' e A'B, do hexágono simples AC'BA'CB', passarem pelo ponto Q, as retas BC' e B'C, lados opostos daquele hexágono, serão não secantes, e a perpendicular comum a elas também passará pelo ponto Q.

Observemos, primeiramente, que, da hipótese de as retas AC' e A'C admitirem uma perpendicular comum, e o mesmo acontecer com as retas AB' e A'B, se segue, (V.06), que AC' e A'C de um lado, e AB' e A'B, de outro, são retas não secantes, e, pois, nenhum dos vértices daquele hexágono pode coincidir com o ponto Q. Observando, em seguida, que, por meio de um movimento (1) podemos transformar uma das retas $\underline{m}$, $\underline{n}$, na reta $(0, \infty)$, podemos, desde já, supor, que a reta $\underline{m}$ seja a reta $(0, \infty)$.



Com a notação

$$(u_1 , v_1)$$

indicaremos, neste número, a reta cujo produto e cuja semi-soma dos extremos são, respetivamente, u_1 e v_1.

---

(1) O movimento expresso pela equação $\xi = (\xi-\alpha)/(\xi-\beta)$, por exemplo, em que α e β são os extremos da reta $\underline{m}$.

Sejam, então,

$$AC' \equiv (u_1,\ v_1),\ CA' \equiv (u_2,\ v_2),\ AB' \equiv (u_3,\ v_3),$$

$$A'B \equiv (u_4,\ v_4),\ BC' \equiv (u_5,\ v_5),\ B'C \equiv (u_6,\ v_6)\ .$$

Dos teoremas VI.05 e VI.07, se seguem as igualdades

$$u_1 = u_3 = -k_1^2,\ u_4 = u_5 = -k_2^2,\ u_2 = u_6 = -k_3^2\ ,$$

$$\begin{vmatrix} u_2 & v_2 & 1 \\ u_4 & v_4 & 1 \\ -k^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_6 & v_6 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \\ -k^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_5 & v_5 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ -k^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0\ ,$$

em que $-k_1^2$, $-k_2^2$, $-k_3^2$, são, respetivamente, o produto dos extremos das retas que passam por A, B e C, γ é a semi-soma dos extremos da reta n e $u + k^2 = 0$ é a equação do ponto Q.

Fazendo $r \equiv (u_7,\ v_7)$ e $s \equiv (u_8,\ v_8)$, como essas retas passam pelo ponto Q, devemos ter, de acôrdo com os números V.06 e VI.05 (1):

$$u_7 = u_8 = -k^2\ ,$$

$$v_7 = \frac{u_1 - k^2}{2v_1} = \frac{u_2 - k^2}{2v_2}$$

$$v_8 = \frac{u_3 - k^2}{2v_3} = \frac{u_4 - k^2}{2v_4}\ ,$$

---

(1) Na hipótese de que $v_i \neq 0$, i=1,2,3,4. Note-se que se $v_1 = 0$, por exemplo, $v_2 = 0$ e $r \perp m$, e que não podem ser simultaneamente nulos v_1 e v_3 (e, consequentemente, v_2 e v_4), porquanto as retas secantes A'C e A'B não podem ter perpendicular comum. Note-se que, mesmo no caso em que $v_1 = v_2 = 0$ ou $v_3 = v_4 = 0$, ainda são válidas as igualdades (I), da página seguinte.

ou

$$(u_1 - k^2)v_2 = v_1(u_6 - k^2)$$
$$(u_1 - k^2)v_4 = v_3(u_5 - k^2) \quad . \qquad (I)$$

Por serem nulos os três determinantes anteriormente escritos, podemos escrever, substituindo, no primeiro, u_4 por u_5 e no segundo u_3 por u_1 :

$$v_2(u_5 + k^2) - v_4(u_6 + k^2) + \gamma(u_6 - u_5) = 0$$

$$v_6(u_1 + k^2) - v_3(u_6 + k^2) + \gamma(u_6 - u_1) = 0$$

$$v_5(u_1 + k^2) - v_1(u_5 + k^2) + \gamma(u_5 - u_1) = 0 \ ,$$

ou, multiplicando ambos os membros da primeira igualdade por $u_1 - k^2$, os da segunda por $u_5 - k^2$ e os da terceira por $u_6 - k^2$:

$$v_2(u_5 + k^2)(u_1 - k^2) = v_4(u_6 + k^2)(u_1 - k^2) - \gamma(u_6 - u_5)(u_1 - k^2)$$

$$v_6(u_1 + k^2)(u_5 - k^2) = v_3(u_6 + k^2)(u_5 - k^2) - \gamma(u_6 - u_1)(u_5 - k^2)$$

$$v_5(u_1 + k^2)(u_6 - k^2) = v_1(u_5 + k^2)(u_6 - k^2) - \gamma(u_5 - u_1)(u_6 - k^2),$$

igualdades estas que chamaremos de (II).

Substituindo, na primeira dessas igualdades, $v_2(u_1 - k^2)$ por $v_1(u_6 - k^2)$, $v_4(u_1 - k^2)$ por $v_3(u_5 - k^2)$ e subtraindo-lhe, de ambos os membros, a expressão $\gamma(u_5 - u_1)(u_6 - k^2)$, obtemos, sucessivamente:

$$v_1(u_5 + k^2)(u_6 - k^2) - \gamma(u_5 - u_1)(u_6 - k^2) = v_3(u_6 + k^2)(u_5 - k^2) +$$
$$- \gamma\Big[(u_6 - u_5)(u_1 - k^2) + (u_5 - u_1)(u_6 - k^2)\Big] \ ,$$

$$v_1(u_5 + k^2)(u_6 - k^2) - \gamma(u_5 - u_1)(u_6 - k^2) = v_3(u_6 + k^2)(u_5 - k^2) +$$

$$- \gamma\left[(u_5 - k^2)u_6 - (u_5 - k^2)u_1\right] ,$$

$$v_1(u_5 + k^2)(u_6 - k^2) - \gamma(u_5 - u_1)(u_6 - k^2) = v_3(u_6 + k^2)(u_5 - k^2) +$$

$$- \gamma(u_5 - k^2)(u_6 - u_1) .$$

Observando que o primeiro e o segundo membro desta última igualdade são, respetivamente, os segundos membros das duas últimas igualdades (II), podemos escrever:

$$v_5(u_1 + k^2)(u_6 - k^2) = v_6(u_1 + k^2)(u_5 - k^2) ,$$

ou, como $u_1 + k^2 \neq 0$, pois que a reta AC' não passa pelo ponto Q,

$$v_5(u_6 - k^2) = v_6(u_5 - k^2) . \quad \text{(III)}$$

Suponhamos, agora, que $v_5 = 0$. Ora, da igualdade (III) e do fato de as retas BC' e B'C não passarem pelo ponto Q, se segue que $v_6 = 0$, e vice-versa, isto é, se $v_6 = 0$, $v_5 = 0$. Nesse caso, porém, as retas BC' e B'C são não secantes e a reta $(0, \infty)$ lhes é a perpendicular comum.

Suponhamos, então $v_5 v_6 \neq 0$. Da igualdade (III) deduzimos:

$$\frac{v_5}{v_6} = \frac{u_5 - k^2}{u_6 - k^2} \quad \text{e} \quad \frac{u_6 - k^2}{2v_6} = \frac{u_5 - k^2}{2v_5} .$$

Demonstremos, agora, que as retas BC' e B'C são não secantes, para o que, de acôrdo com o número V.04, observação, basta demonstrar que

$$\Delta = (u_5 - u_6)^2 - 4(u_5 v_6 - u_6 v_5)(v_5 - v_6) > 0 .$$

Ora, temos, sucessivamente:

$$\triangle = (u_5 - u_6)^2 - 4(u_5 - u_6 v_5/v_6)(v_5/v_6 - 1)v_6^2 \quad ,$$

$$\triangle = (u_5 - u_6)^2 - 4(u_5 - u_6 \frac{u_5 - k^2}{u_6 - k^2})(\frac{u_5 - k^2}{u_6 - k^2} - 1)v_6^2 \quad ,$$

$$\triangle = (u_5 - u_6)^2 - (u_5 u_6 - u_5 k^2 - u_6 u_5 + u_6 k^2)(u_5 - k^2 - u_6 + k^2) \frac{4v_6^2}{(u_6 - k^2)^2} \quad ,$$

$$\triangle = (u_5 - u_6)^2 - k^2(u_6 - u_5)(u_5 - u_6) \frac{4v_6^2}{(u_6 - k^2)^2} \quad ;$$

$$\triangle = (u_5 - u_6)^2 + k^2(u_5 - u_6)^2 \frac{4v_6^2}{(u_6 - k^2)^2} > 0 \; .$$

Do número V.06, segue-se, então, que, fazendo

$$u_o = -k^2$$

$$v_o = \frac{u_5 - k^2}{2v_5} = \frac{u_6 - k^2}{2v_6}$$

$(u_o \, , \, v_o)$ é a perpendicular comum às retas BC' e B'C, e o teorema fica, assim, demonstrado.

---------x--------