Geraldo dos Santos Lima Filho.
Licenciado em Matemática.

A RESPEITO DAS PROJETIVIDADES PLANAS SÔBRE O CORPO PRIMO DE CARACTERÍSTICA 2

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para doutoramento em Ciências (Matemática).

1950

P R E F Á C I O

Têm-se desenvolvido sobremaneira nos últimos tempos os estudos de Geometria Finita.

Alguns autores já têm feito referência e apontado certos resultados que se obtêm, ao tratar a Geometria Projetiva sôbre um corpo de característica p qualquer.

Dentre tais corpos, o primo de característica 2 apresenta um comportamento separado dos demais, motivo pelo qual resolvemos fazer um estudo sistemático no caso da reta e do plano.

Embora as demonstrações se apresentem elementares, obtivemos alguns resultados e propriedades interessantes. Os enunciados correspondentes vão marcados com o sinal *.

Julgamos de particular interêsse a continuação dêste estudo no caso geral do corpo de característica 2.

No trabalho de Chung-Tao Yang: Projective Collineations in a Finite Projective Plane, do Instituto de Matemática da Universidade Nacional de Chekiang, há citação de um trabalho de Steck sôbre o corpo de característica 2, o qual trata sòmente da classificação de homografias.

Utilizámos, para o presente trabalho, entre outros, os livros:

√ Projective Geometry, Veblen e Young;
√ Lezioni di Geometria Moderna, Beniamino Segre;
Geometria Projetiva (Curso em Apostilas) para os alunos da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo - Prof. Dr. Benedito Castrucci.

Agradecemos ao Prof. Dr. Benedito Castrucci, pela orientação segura e pelas sugestões apresentadas no decorrer da preparação dêste estudo.

São Paulo, novembro de 1950.
Geraldo dos Santos Lima Filho.

C A P Í T U L O   I

AXIOMAS DE PERTINÊNCIA.

Consideraremos como conceito primitivo o conceito de <u>conjunto</u>; e como elementos indefinidos: <u>ponto</u> e <u>reta</u>.

Usaremos letras latinas maiúsculas, A, B, ..., para designar pontos; letras minúsculas latinas, a, b, ..., para designar retas. Se A e B (a e b) designam o mesmo elemento, usaremos o símbolo $A = B$ $(a = b)$. Se representam elementos distintos: $A \neq B$ $(a \neq b)$.

Se um ponto A pertence a uma reta a, usaremos a notação: $A \in a$ ou $a \in A$, que significa também que a passa por A, ou que A está em a. O fato de A não pertencer a a será indicado com $A \notin a$ ou $a \notin A$.

Adotaremos, relativamente a pontos e retas, os seguintes

1.1 - <u>Axiomas de pertinência</u>:

I P 1 - Se A e B são pontos distintos, existe uma reta r que passa por A e por B.

II P 2 - Se A e B são pontos distintos, não existe mais do que uma reta r, que passa por A e por B.

(Diz-se então que a reta r <u>une</u> os dois pontos A e B).

* P 3 - Tôda reta tem três e apenas três pontos.

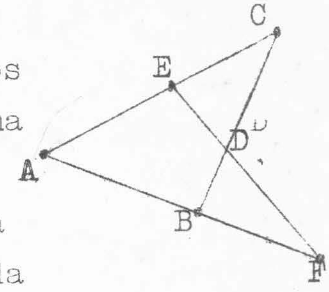
(Pontos pertencentes a uma reta se dizem <u>colineares</u>).

VI P 4 - Dada uma reta r, existem pontos não pertencentes a r.

P 5 - Dados dois pontos distintos A e B e um ponto C, não pertencente à reta AB, os terceiros pontos: $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$, pertencem a uma mesma reta.

Podem-se enunciar os seguintes teoremas, de verificação imediata a partir dos axiomas P 1,..., P 5:

(IV Existência) Existe pelo menos uma reta

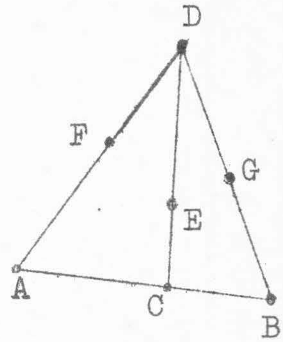


1.11 - TEOREMA - Dois pontos distintos pertencem a uma e sòmente uma reta.

1.12 - TEOREMA - Se C é ponto da reta AB, então A (ou B) é ponto da reta BC (ou AC).

III 1.13 - TEOREMA - Duas retas distintas não podem ter mais do que um ponto comum.

PLANO.



1.2 - DEFINIÇÃO - Se A e B são pontos de uma reta r, chamaremos PLANO o conjunto de todos os pontos pertencentes às retas que unem um ponto D, não pertencente a r, aos pontos de r.

Usaremos letras gregas minúsculas para designar os planos: α, β, ...

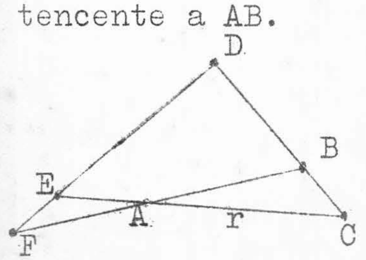
Conforme a definição acima, o plano pode ser considerado como o plano dos pontos A, B, D, ou da reta r e do ponto D. Indicaremos, respectivamente, chamando α o plano definido: α = ABD, α = rD.

1.21 - TEOREMA - Se A e B são pontos de um plano α, então o terceiro ponto de AB também pertence a α.

Seja o plano α determinado pela reta r e pelo ponto D.

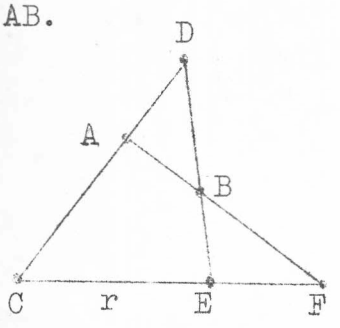
1) Se A, B $\in$ r, ou se a reta AB passa por D, o teorema é imediato.

2) Suponhamos A em r, B não pertencente a r, D não pertencente a AB.



Como B $\in$ α, existe um ponto C em r, pertencente a BD (definição de plano). Seja E o terceiro ponto de r. A reta DE corta AB em F, segundo o axioma P 5, aplicado à reta EC e ao ponto D. Então, $F \in \alpha$.

3) Sejam A e B não pertencentes a r, e D não pertencente a AB.



Como $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, pela definição de plano, existem os pontos: C, em r, alinhado com A e D; E, em r, alinhado com D e B. Por P 5, a reta AB corta r em F. Pela definição de plano, $F \in \alpha$.

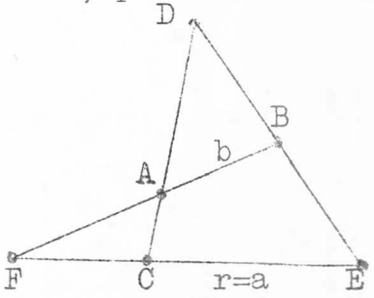
Se os pontos de uma reta pertencem a um plano, diremos que a reta e o plano se pertencem, ou que a reta está no plano, ou que o plano está na reta, ou passa pela reta.

1.22 - TEOREMA - Duas retas de um mesmo plano α têm um ponto comum.

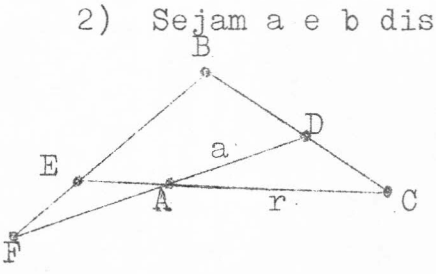
Sejam a e b duas retas do plano α, determinado por D e r.

1) Se a coincide com r e b passa por D, o ponto A de b, $A \neq D$, é colinear com D e B, pertencente a r, portanto b corta r = a em B.

Se b não contém D, existem dois pontos A e B em b. Como $b \in \alpha$, A e $B \in \alpha$, portanto, pela definição de plano, as retas DA e DB cortam r em C e E, respectivamente. Pelo axioma P 5, existe o ponto F, em r =a, alinhado com A e B. Portanto, b corta a=r em F.



2) Sejam a e b distintas de r. Se a passa por D, um ponto B de b é colinear com D e C, pertencente a r. a corta r em A (definição de plano; b corta r em E (caso 1)). Tendo em vista P 5, aplicado



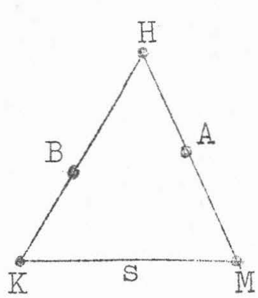
a EC e B, os pontos F, A, D são colineares e portanto b corta a em F.

Segue-se ainda que tôda reta de α tem ponto comum com tôda reta de α por D.

Se a não passa por D, as retas a e b cortam r em A, B, respectivamente. O terceiro ponto C, de r, deve estar alinhado com D e com um ponto de a; também com D e um ponto de b. Como cada reta tem sòmente três pontos, êstes pontos de a e b devem coincidir em F. Logo, b corta a em F.

1.23 - TEOREMA - O plano α determinado pela reta r e por um ponto D, não pertencente a r, coincide com o plano β, determinado por uma reta s e por um ponto H não pertencente a s, uma vez que s e H estejam em α.

Consideremos o ponto $A \in \beta$. A é colinear com H e com M, pertencente a s. Como s está em α, $M \in \alpha$. Logo, a reta HM pertence a α e o seu terceiro ponto A está em α. Então, todo ponto de β é de α. Reciprocamente, seja B um ponto de α. B é colinear com H e um ponto K de s. Como H e K estão em β, a reta HK, e, portanto, o ponto B, estão em β. Logo, todo ponto de α pertence a β.



COROLÁRIO - Há um e sòmente um plano, determinado por três pontos não colineares, ou por uma reta e um ponto não pertencente à mesma, ou por duas retas concorrentes.

Designamos o plano, em cada caso, por: $\alpha = ABC$, $\alpha = rD$, $\alpha = rs$.

AXIOMAS DE EXTENSÃO.

1.3. Aos axiomas já colocados, juntaremos os seguintes, que asseguram a existência de um espaço com duas dimensões, e excluem a existência de espaços com mais de duas dimensões:

E 1 - Existe pelo menos uma reta.

E 2 - Nem todos os pontos pertencem à mesma reta.

E 3 - Todos os pontos pertencem a um mesmo plano (Axioma de Fechamento).

COROLÁRIOS DE EXTENSÃO.

1.4. São imediatos, a partir dos axiomas adotados, os seguintes:

* COROLÁRIO 1: Existem três e apenas três retas em cada ponto.

COROLÁRIO 2: Nem tôdas as retas pertencem ao mesmo ponto.

COROLÁRIO 3: Tôdas as retas estão no mesmo plano.

LEI DE DUALIDADE.

1.5. Em vista das formas dadas aos axiomas, teoremas e corolários anteriores, verifica-se a existência da <u>Lei de Dualidade no Plano</u>, na forma usual, isto é:

A partir de cada axioma, teorema ou corolário anterior, é válida uma nova proposição, obtida pela permuta das palavras <u>ponto</u> e <u>reta</u>.

C A P Í T U L O   I I

PROJEÇÃO, SECÇÃO, PERSPECTIVIDADE.

2.1. O ponto e a reta são os <u>elementos</u> do plano.

2.11 - DEFINIÇÃO - Uma figura é qualquer conjunto de pontos e retas.

Figura retilínea (ou pontilhada) é o conjunto dos três pontos de uma reta.

Figura pontual (ou feixe) é o conjunto das três retas de um ponto (dual da precedente).

2.12 - DEFINIÇÃO - Dada uma reta r e um ponto P não pertencente à mesma, P determina, com cada ponto de r, uma reta que é chamada <u>projetante</u> dos pontos de r, a partir do centro P. O conjunto destas retas se chama <u>projeção da pontilhada</u>, a partir do ponto ou do centro P.

2.13 - DEFINIÇÃO - Dado um ponto P e uma reta r, não pertencente a P, cada reta de P determina, com r, um ponto, que se diz <u>traço</u> da reta sôbre r. O conjunto dêstes pontos é chamado <u>secção</u> do feixe de centro P, pela reta r.

2.14 - DEFINIÇÃO - Duas figuras F_1, F_2 se dizem em correspondência um a um (ou correspondência biunívoca), se a cada elemento de F_1 corresponde um único elemento de F_2, sendo que cada elemento de F_2 provém de um único elemento de F_1.

Uma figura está em auto-correspondência um a um, quando, a cada seu elemento corresponde um seu único elemento, de tal forma que cada um dêstes provenha de um único dos anteriores.

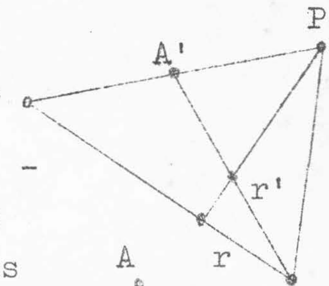
Os elementos associados por uma correspondência como a definida, se dizem <u>homólogos</u> ou <u>correspondentes</u>.

2.15 - DEFINIÇÃO - Se os pares de pontos homólogos de duas retas correspondentes r, r',estão sôbre uma mesma projetante, a partir de um centro P, não pertencente a r ou r', sendo distintas tôdas as projetantes, as retas dizem-se <u>pers-</u>

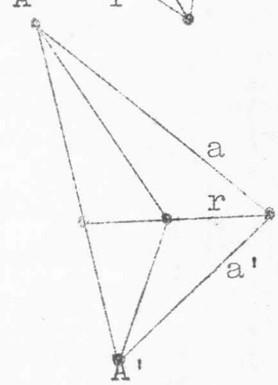
pectivas de P. A correspondência toma o nome de perspectividade e o ponto P é o centro de perspectividade.

Designamos a correspondência acima com o símbolo

$$r \overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}} r'.$$



2.15' - DEFINIÇÃO (dual da precedente) - Se os pares de retas homólogas de dois feixes correspondentes A e A' têm os traços em um mesmo ponto de uma secante r, não pertencente a A ou A', sendo distintos todos os traços, os feixes se dizem perspectivos de r. A correspondência é uma perspectividade, e a reta r é o eixo de perspectividade.



Designamos a correspondência com o símbolo

$$A \overset{r}{\overline{\overline{\wedge}}} A'.$$

2.16 - DEFINIÇÃO - Uma pontilhada r e um feixe de retas A se dizem perspectivos, quando cada ponto de r pertence à reta correspondente de A.

FIGURAS PLANAS.

2.2. É fácil verificar-se que o número total de pontos (de retas) de um plano é 7.

Os 7 pontos se distribuem nas 7 retas, 3 a 3, conforme o quadro abaixo, em que os pontos são designados pelas letras A, B, ..., G, e as retas são dadas pelas colunas:

A 0	B 1	C 2	D 3	E 4	F 5	G 6
1 B	2 C	3 D	E 4	F 5	G 6	A 0
3 D	4 E	5 F	G 6	A 0	B 1	C 2

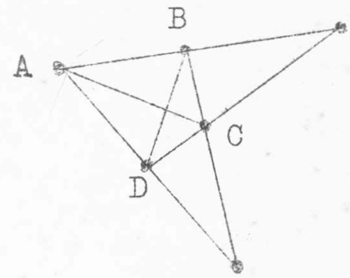
Ver pg 5 do Veblen

Nessas condições, podemos definir as seguintes figuras:

2.21 - DEFINIÇÃO - Chamamos quadrângulo completo a figura formada por 4 pontos, 3 a 3 não colineares, e pelas

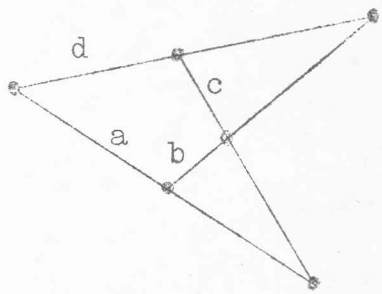
Exercício 3 pg 25 do Veblen

$\frac{4.3}{2} = 6$ retas que unem cada par de pontos. Os pontos são os <u>vértices</u>, as retas são os <u>lados</u> do quadrângulo. Os pontos de concurso dos lados opostos se chamam <u>pontos diagonais</u>.



Dualmente:

2.22 - DEFINIÇÃO - Chamamos <u>quadrilátero completo</u> a figura formada por 4 retas, três a três não pertencentes ao mesmo feixe, e pelos $\frac{4.3}{2} = 6$ pontos em que se cortam as retas, duas a duas. As retas são os <u>lados</u> e os pontos são os <u>vértices</u> do quadrilátero. As retas que unem os vértices opostos chamam-se <u>retas diagonais</u> do quadrilátero.



2.23 - DEFINIÇÃO - Um <u>n-ângulo</u> (n = 3,4) <u>simples</u> é o conjunto de n pontos, 3 a 3 não colineares, tomados em certa ordem, e das n retas determinadas pelos pares de pontos sucessivos. Os pontos são os <u>vértices</u> e as retas são os <u>lados</u> do n-ângulo simples.

Dualmente:

2.23' - DEFINIÇÃO - Um <u>n-látero simples</u> (n = 3,4) é o conjunto de n retas, 3 a 3 não do mesmo feixe, tomadas em certa ordem, e dos n pontos em que se cortam, 2 a 2, as retas consecutivas. As retas são os <u>lados</u> e os pontos são os <u>vértices</u> do n-látero simples.

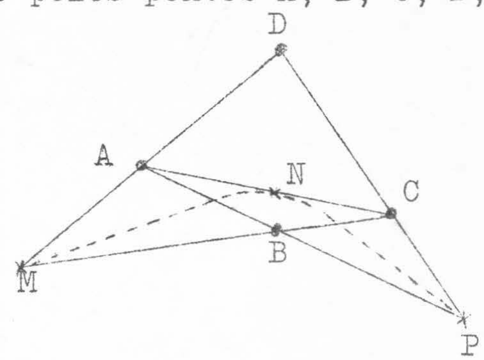
As figuras simples coincidem com as suas duais: para n = 3, temos o triângulo ou trilátero; para n = 4, o quadrângulo ou quadrilátero.

É imediato, relativamente ao quadrângulo completo, o seguinte

|| * 2.24 - TEOREMA - Os pontos diagonais de um quadrângulo completo são colineares. — ver Veblen - pg 4 e 5 assim como pg 45 (inclusive nota

Ver também Segre pg 100

De fato, no quadrângulo definido pelos pontos A, B, C, D, os pontos diagonais são: $M = AD.BC$; $N = AC.BD$; $P = AB.CD$. Como, por dois pontos passa sempre uma reta, existe a reta MN e também a reta NP. Como já foram contadas as 6 retas que formam os lados do quadrângulo, e como cada reta tem três e apenas três pontos, e o plano têm apenas sete retas, MNP é a sétima reta.



Dualmente:

$\ast$2.24' - TEOREMA - As retas diagonais do quadrilátero completo pertencem a um ponto.

CONFIGURAÇÕES.

2.3 - DEFINIÇÃO - Chama-se configuração um conjunto de pontos e retas, representado pla disposição em forma de matriz quadrada

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

em que a_{ij} $(i \neq j)$ é o número de elementos da espécie j em cada elemento da espécie i; a_{11} e a_{22} exprimem os números de pontos e de retas respectivamente, e sendo ainda verificada a condição:

$$a_{ij}a_{ii} = a_{ji}a_{jj} \quad (i,j = 1,2).$$

é consequência!

Veblen — pg 39 Exercício

A configuração de um triângulo é:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

ou seja: existem três pontos, cada um em duas retas e três retas, cada uma em dois pontos.

O quadrângulo completo é representado por

4	3
2	6

e o quadrilátero completo, por

6	2
3	4

A CONFIGURAÇÃO DE DESARGUES.

2.31. A configuração de Desargues é a configuração do conjunto de todos os elementos do plano, representada por

7	3
3	7

Torna-se trivial, então, o

2.32 - TEOREMA - Se dois triângulos são perspectivos de um ponto, são também perspectivos de uma reta.

Por dualidade:

2.32' - TEOREMA - Se dois triângulos são perspectivos de uma reta, são perspectivos de um ponto.

Os teoremas 2.32 e 2.32' são o conhecido teorema de Desargues e o seu recíproco, os quais, neste caso, não dependem da existência de ponto fora do plano.

C A P Í T U L O   I I I

PROJETIVIDADES.

3.1. Formas geométricas primitivas. Já definimos anteriormente, cap. II, a pontilhada e o feixe de retas. Estas são as formas geométricas primitivas de primeira espécie.

Chamamos de formas geométricas primitivas de segunda espécie: o plano pontilhado, conjunto de todos os pontos; e o plano regrado, conjunto de tôdas as retas.

O plano é chamado suporte destas duas formas.

No mesmo cap. II, 2.15 e 2.15', já nos referimos à perspectividade entre duas formas de primeira espécie. Reunindo as definições correspondentes, podemos dizer que:

3.11 - DEFINIÇÃO - Duas formas de primeira espécie, de nomes diferentes, são perspectivas se, e sòmente se, as mesmas se correspondem biunìvocamente, de tal forma que os elementos homólogos se pertençam. Duas formas de primeira espécie, de mesmo nome, são perspectivas se, e sòmente se, os elementos homólogos estão, dois a dois, em um elemento de uma terceira forma de primeira espécie, de nome diferente.

Tendo em vista os diversos elementos de duas formas perspectivas, a notação

$$A\ B\ C \;\bar{\wedge}\; A'\ B'\ C'$$

significa que os elementos colocados em posições correspondentes, nas duas sequências de elementos, são homólogos. Tais são: A e A', B e B', C e C'.

3.12 - DEFINIÇÃO - Duas formas F, F' de primeira espécie, de mesmo nome ou de nomes diferentes, são PROJETIVAS, quando perspectivas, ou quando existe uma sequência finita de formas de primeira espécie F_1, F_2, ..., F_n, tais que

$$F \;\bar{\wedge}\; F_1 \;\bar{\wedge}\; F_2 \;\bar{\wedge}\; \dots \;\bar{\wedge}\; F_n \;\bar{\wedge}\; F' .$$

A correspondência assim estabelecida entre F e F' chama-se projetividade. Os elementos correspondentes pela mesma chamam-se ainda homólogos.

Uma projetividade estabelece, pois, uma correspondência biunívoca entre as formas F e F', a qual é designada, de forma abstrata, relativamente à sequência de perspectividades, pelo símbolo

$$F \overline{\wedge} F' .$$

Chamando-se π a projetividade que leva os elementos de F nos de F', também se usa a notação em forma funcional

$$\pi(F) = F' .$$

3.2. A PROJETIVIDADE ENTRE AS FORMAS PRIMITIVAS DE PRIMEIRA ESPÉCIE.

3.21 - TEOREMA - Se A, B, C, são três pontos de uma reta r e A', B', C', são os de outra reta r', então A pode ser projetado em A', B em B', C em C', por meio de um único centro de perspectividade.

Como duas retas têm sempre um ponto comum, um dos três pontos de r deve coincidir com um dos três de r'. Seja C = = C'. O teorema é imediato, considerando-se como centro de perspectividade o ponto de concurso das retas AA' e BB'.

O ponto C, que coincide com o seu homólogo C', diz-se duplo ou unido na perspectividade de centro O = AA'.BB'.

COROLÁRIO - Tôda perspectividade entre duas pontilhadas tem, pelo menos, um ponto unido.

Podem-se enunciar o teorema e corolário correspondentes à perspectividade entre dois feixes de retas, usando-se a Lei de Dualidade.

* 3.22 - TEOREMA - Se uma projetividade deixa invariantes dois pontos de uma pontilhada, a projetividade

é a identidade.

(Êste teorema é o fundamental da projetividade, e correspondente ao postulado de Staudt).

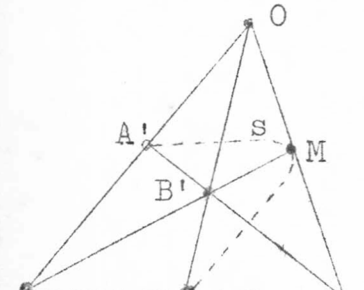
De fato, dois pontos determinam uma reta r. A correspondente de r, pela projetividade considerada, então coincide com r, uma vez que tem dois pontos em r. Como cada reta tem sòmente três pontos, os terceiros pontos das duas retas superpostas coincidem e, portanto, a projetividade é a identidade.

3.23 - DEFINIÇÃO - Uma projetividade com um elemento unido (duplo) se diz <u>parabólica</u>.

3.24 - DEFINIÇÃO - Uma projetividade com dois elementos unidos é chamada <u>hiperbólica</u>. * Segue-se que tôda projetividade hiperbólica é identidade.

3.25 - DEFINIÇÃO - Uma projetividade sem elemento unido se chama <u>elítica</u>.

3.26 - TEOREMA - A projetividade A B C $\overline{\wedge}$ B A C (e também A B C $\overline{\wedge}$ C B A, A B C $\overline{\wedge}$ A C B) se verifica para os pontos de uma reta r.



Projetando-se A B C de O, e cortando-se com s, obtém-se

A B C $\overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}}$ A'B'C', com C = C'.

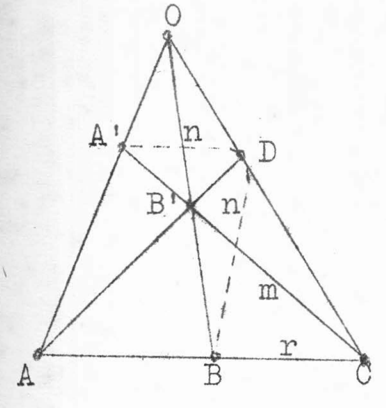
Projetando-se A'B'C de M, e cortando-se com r, vem:

A'B'C $\overset{M}{\overline{\overline{\wedge}}}$ B A C.

Segue-se:

A B C $\overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}}$ A'B'C $\overset{M}{\overline{\overline{\wedge}}}$ B A C e, portanto, A B C $\overline{\wedge}$ B A C.

3.27 - TEOREMA - A projetividade A B C $\overline{\wedge}$ B C A (e também B C A $\overline{\wedge}$ C A B e C A B $\overline{\wedge}$ A B C) se verifica para os pontos de uma reta, isto é, pode-se efetuar um conjunto de permutações cíclicas com os pontos de uma reta.



Consideremos as seguintes perspectividades:

A B C $\overset{O}{\barwedge}$ A'B'C, sôbre m;

A'B'C $\overset{D}{\barwedge}$ B A C, sôbre r;

B A C $\overset{O}{\barwedge}$ B A'D, sôbre n;

B A'D $\overset{B'}{\barwedge}$ B C A, sôbre r.

Pela definição de projetividade, temos, pois,

A B C $\barwedge$ B C A .

COROLÁRIO - Dos teoremas 3.26 e 3.27, concluimos que existe uma projetividade que permuta, de qualquer modo, os pontos de uma reta r.

Podem-se estabelecer os duais dos teoremas 3.26 e 3.27 e do corolário anterior, para as retas de um feixe.

Dados os pontos A, B, C, sôbre uma reta r, e A', B', C', sôbre outra reta r', com A = A', e considerado o ponto M = = BC'.B'C, temos

A B C $\overset{M}{\barwedge}$ A C'B' .

Como os pontos A e M determinam uma reta, torna-se então, trivial, o

3.28 - TEOREMA (PAPPUS) - Se A, B, C, são três pontos de uma reta r, e A', B', C', são três pontos de outra reta r', os pontos de intersecção dos pares de retas AB' e A'B; B'C e BC'; CA' e C'A são colineares.

3.3. PROJETIVIDADE ENTRE OS ELEMENTOS DA MESMA FORMA.

3.31. Conforme o teorema 3.22 (fundamental), tôda projetividade entre elementos de uma mesma forma, com dois elementos unidos, é identidade.

Examinemos agora as projetividades entre elementos de uma mesma forma, com apenas um elemento unido.

3.32 - DEFINIÇÃO - Chama-se INVOLUÇÃO a projetividade ω entre elementos da mesma forma, tal que $\omega . \omega = 1$ (o número 1 designa aqui a projetividade idêntica, e não deve ser confundido com o cardinal 1). (º)

3.33 - TEOREMA - Uma projetividade ω entre elementos de uma mesma forma, em que um par de elementos distintos se corresponde na ω e na ω^{-1}, é uma involução.

Como tôda reta tem apenas três pontos, se a A corresponde B e a B corresponde A, pela ω, então a C corresponde C (unido). Temos $\omega(A) = B$ e $\omega(B) = A$, de onde se obtém, respectivamente: $\omega^{-1}(B) = A$ e $\omega^{-1}(A) = B$.

Segue-se, pois, $\omega = \omega^{-1}$, ou $\omega . \omega = 1$.

* COROLÁRIO 1 - Tôda involução é parabólica.

* COROLÁRIO 2 - Uma involução fica determinada quando se conhece um par de elementos correspondentes.

3.4. ÁLGEBRA DE PONTOS.

3.41. Aplicando-se ao caso da reta com três pontos as operações de adição e multiplicação de pontos, introduzidas mediante as propriedades formais da Álgebra (Projective Geometry, Veblen e Young, volume I), e chamando P_0, P_1, P_∞ os três pontos de uma reta r, obtêm-se os resultados constantes das seguintes tabelas:

(º) Admitimos conhecidos os conceitos gerais e propriedades das correspondências e dos grupos.

1) ADIÇÃO:

+	P_o	P_1	P_∞
P_o	P_o	P_1	P_∞
P_1	P_1	P_o	P_∞
P_∞	P_∞	P_∞	P_∞

2) MULTIPLICAÇÃO:

.	P_o	P_1	P_∞
P_o	P_o	P_o	indeterminado
P_1	P_o	P_1	P_∞
P_∞	indeterm.	P_∞	P_∞

Além da unicidade do resultado em cada caso, com exceção dos produtos $P_o . P_\infty$ e $P_\infty . P_o$, que são indeterminados, verifica-se fàcilmente que as operações gozam das propriedades comutativa, associativa, bem como da distributiva da multiplicação relativamente à adição.

As operações inversas, de subtração e divisão, sòmente são definidas em certos casos:

3) SUBTRAÇÃO:

$P_o - P_o = P_o$ $\qquad$ $P_1 - P_1 = P_o$

$P_o - P_1 = P_1$ $\qquad$ $P_\infty - P_o = P_\infty$

$P_1 - P_o = P_1$ $\qquad$ $P_\infty - P_1 = P_\infty$

$P_\infty - P_\infty$ indeterminado

4) DIVISÃO:

$P_o : P_1 = P_o$ $\qquad$ $P_\infty : P_\infty$ indeterminado

$P_1 : P_1 = P_1$ $\qquad$ $P_1 : P_\infty = P_o$ $\qquad$ $P_o : P_o$ indeterm.

3.42. Substituindo-se P_0 por 0; P_1 por 1; P_∞ por ∞, as tabelas acima se tornam, respectivamente:

+	0	1	∞
0	0	1	∞
1	1	0	∞
∞	∞	∞	∞

.	0	1	∞
0	0	0	indet.
1	0	1	∞
∞	indet.	∞	∞

Excluindo-se as linhas e colunas correspondentes ao elemento ∞, os números 0 e 1, com estas tabelas, formam um corpo comutativo, de característica 2.

3.5 - COORDENADAS PROJETIVAS.

3.51. Chamados P_0, P_1, P_∞ os três elementos de uma forma de primeira espécie, e tendo em vista as tabelas de operações do parágrafo anterior, os elementos P_0 e P_1 formam um corpo. Tomemos o corpo $C = \{0,1\}$ isomorfo ao corpo P_0, P_1 e façamos corresponder o símbolo ∞ ao elemento P_∞.

O conjunto $\{C,\infty\}$ chama-se _sistema de coordenadas projetivas não homogêneas_, referido aos elementos fundamentais P_0, P_1, P_∞, da forma de primeira espécie considerada. O cálculo com o elemento ∞ segue-se do que foi obtido no parágrafo anterior.

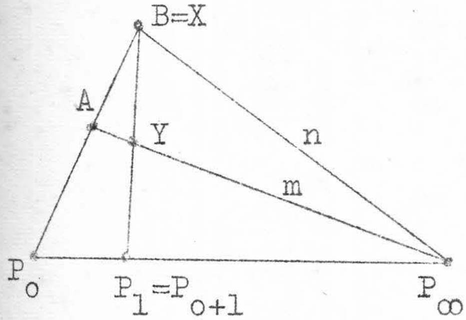
Para evitar o elemento ∞, podemos associar a cada coordenada projetiva x, relativa a cada elemento da forma, o par (x_1,x_2) de números tais que

$$x = \frac{x_1}{x_2} \qquad (x_2 \neq 0) .$$

O número 0 será definido pela classe $(0,x_2)$ ou $(0,1)$; o número 1, pela classe (x_1,x_1) ou $(1,1)$; associaremos ao elemento ∞ a classe $(x_1,0)$ ou $(1,0)$. Estabelecemos assim o _sistema de coordenadas projetivas homogêneas_ nas formas de primeira espécie.

3.6 - EQUAÇÃO DA PROJETIVIDADE.

3.61 - TEOREMA - Os pontos P_o e $P_1 = P_{o+1}$ são correspondentes numa projetividade, em que o elemento unido é P_∞.



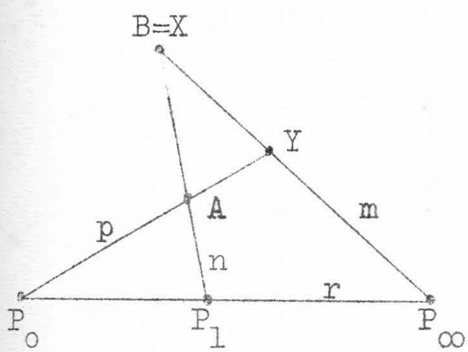
De fato, na determinação de P_{o+1}, P_oA corta n em X = B; P_1B corta m em Y. Temos imediatamente:

$$P_o \overset{A}{\overline{\overline{\wedge}}} X \overset{Y}{\overline{\overline{\wedge}}} P_{o+1} \quad \therefore \quad P_o \overline{\wedge} P_{o+1} .$$

Chamando x a coordenada de P_1; a, a coordenada de P_o; x', a de P_{o+1}, a equação dessa projetividade, uma vez que $P_{1+o} = P_{o+1} = P_o + P_1$, se escreve:

I) $$x' = x + a .$$

3.62 - TEOREMA - Os pontos P_1 e $P_\infty = P_{1.\infty}$ se correspondem numa projetividade, em que o elemento unido é P_o.



Na determinação de $P_{1.\infty}$, P_1A corta m em X = B; $P_\infty B$ corta p em Y; BY determina $P_\infty = P_{1.\infty}$ em r.

Temos, então:

$$P_1 \overset{A}{\overline{\overline{\wedge}}} X \overset{Y}{\overline{\overline{\wedge}}} P_\infty = P_{1.\infty} .$$

Como $P_1.P_\infty = P_{1.\infty}$, chamando x a coordenada de P_1; a, a coordenada de P_∞ e x', a de $P_{1.\infty}$, a equação da projetividade acima é:

II) $$x' = a\, x.$$

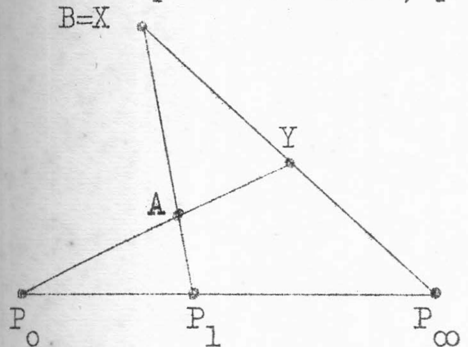
3.62. Tomemos, agora, a partir dos resultados de 3.41, P_x e $P_{x'}$ tais que $P_{x'}.P_x = P_1$ (x = 0 ou ∞; x' = ∞ ou 0).

Obtemos:

$P_1 : P_\infty = P_0 \quad (x = \infty \,,\; x' = 0)$

$P_1 : P_0 = P_\infty \quad (x = 0 \,,\; x' = \infty)$

No primeiro caso, para $P_x = P_\infty$, $P_{x'} = P_0$,



$$P_x \overset{Y}{\barwedge} X \overset{P_1}{\barwedge} A \overset{Y}{\barwedge} P_{x'} \;;$$

no segundo caso, para $P_x = P_0$, $P_{x'} = P_\infty$,

$$P_x \overset{Y}{\barwedge} A \overset{P_1}{\barwedge} X \overset{Y}{\barwedge} P_{x'} .$$

Em ambos os casos, $P_x \barwedge P_{x'}$ e a equação da projetividade é:

III) $$x' = \frac{1}{x} .$$

3.63. Ainda, de acôrdo com as operações dos n^{os}. 3.41 e 3.42, temos:

para I) $x = \infty \longrightarrow x' = \infty$;

para II) $x = \infty \longrightarrow x' = \infty$;

para III) $x = \infty \longrightarrow x' = 0$ e $x = 0 \longrightarrow x' = \infty$.

3.64. Na determinação da equação da projetividade sôbre um corpo de característica 0, verifica-se que a expressão

IV) $$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{em que} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

é a equação geral da projetividade, da qual as fórmulas I), II) e III) são casos particulares.

Levando em conta, porém, o isomorfismo entre o conjunto dos P_0, P_1, P_∞ da reta e o conjunto $\{C, \infty\}$, vemos que os coeficientes a, b, c, d, das fórmulas I),..., IV) sòmente podem assumir os valores 0 e 1, do corpo C. Assim sendo, as três primeiras fórmulas se escrevem:

I') $x' = x$ ou $x' = x + 1$;

II') $x' = 0$ ou $x' = x$;

III') $x' = \dfrac{1}{x}$.

Dispensando $x' = x$ que exprime a identidade, e $x' = 0$, que não tem sentido como projetividade, obtemos apenas:

I') $x' = x + 1$; II') $x' = \frac{1}{x}$.

* Quanto à IV), não podemos considerar o caso $a = b = c = d = 1$, uma vez que $\Delta \neq 0$.

Vejamos, então, quais os casos possíveis.

Façamos $c = 0$. Temos $a = d = 1$, pois que d ou a nulos, anulariam Δ. Então podemos considerar:

1) $b = 0$ $\therefore$ $x' = x$, que é a identidade;

2) $b = 1$ $\therefore$ $x' = x + 1$, que é a I').

Fazendo $c = 1$, encontramos as possibilidades:

3) $a = 0,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 1$:

$x' = \frac{1}{x + 1}$, que é o produto de $x_1 = x + 1$ (I') por $x_2 = \frac{1}{x_1}$ (III');

4) $a = 0,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 0$ $\therefore$ $x' = \frac{1}{x}$ (III');

5) $a = 1,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 0$ $\therefore$

$\therefore$ $x' = \frac{x + 1}{x} = \frac{1}{x} + 1$, que é o produto das projetividades:

$x_1 = \frac{1}{x}$ (III') e $x_2 = x_1 + 1$ (I') ;

6) $a = 1,\ b = 0,\ c = 1,\ d = 1$ $\therefore$ $x' = \frac{x}{x + 1}$,

que é o produto das projetividades $x_1 = \frac{1}{x}$ (III'), $x_2 = x_1 + 1$ (I'), $x_3 = \frac{1}{x_2}$ (III') .

Obtemos, finalmente, as seguintes fórmulas, para as projetividades entre os elementos de uma mesma forma:

* A) $x' = x + 1$,

que exprime uma involução, em que o elemento unido é P_∞ ;

B) $x' = x$, identidade;

* C) $x' = \frac{1}{x}$, involução, com o elemento P_1 unido;

D) $x' = \frac{1}{x + 1}$, projetividade elítica, que leva P_0, P_1, P_∞ em P_1, P_∞, P_0 ,respectivamente (cíclica de ordem 3);

E) $x' = \frac{1}{x} + 1$, projetividade elítica, que leva P_o, P_1, P_∞ em P_∞, P_o, P_1, respectivamente (cíclica de ordem 3);

* F) $x' = \frac{x}{x+1}$, involução com o elemento P_o unido.

3.65. Para o caso de duas formas distintas, consideremos a projetividade

$$\omega = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

entre os três elementos de cada forma. Se, em cada forma estabelecermos como coordenadas: 0, para A e A'; 1, para B e B'; ∞, para C e C', teremos

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix} .$$

Por ω, se $P_x \longrightarrow P'_x$, $P_y \longrightarrow P'_y$ $(x, y = 0, 1 \text{ ou } \infty)$, então $P_{x+y} \longrightarrow P'_{x+y}$, uma vez que cada forma sòmente possui três elementos. Também se verifica que $P_{xy} \longrightarrow P'_{xy}$. Os dois sistemas de coordenadas são, portanto, isomorfos, e, identificando-os, obtemos a equação $x' = x$ da projetividade (identidade).

Em segundo lugar, consideremos $\omega = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix}$, em que A, B, C, são os elementos P_o, P_1, P_∞ da primeira e chamemos K, L, M, os da segunda forma. Pelo caso precedente, a projetividade $\tau = \begin{pmatrix} K & L & M \\ A & B & C \end{pmatrix}$ tem por equação $y = x$. Tomando a projetividade $\sigma = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ K & L & M \end{pmatrix}$, entre os elementos da segunda forma, a sua equação é uma das A), ..., F), do nº precedente. O produto $\sigma\tau$ nos dá a projetividade $\omega = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix}$, cuja equação é também de um dos tipos A), ..., F).

3.66. Coloquemos, agora, as A),..., F) em coordenadas projetivas homogêneas.

Fazendo $x = \frac{x_1}{x_2}$ e $x' = \frac{x'_1}{x'_2}$,

obtemos, respectivamente:

* A')
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

B')
$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

* C')
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$$

D')
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

E')
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$$

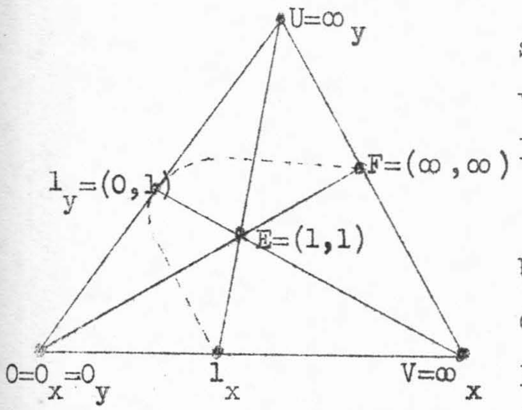
* F')
$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

CAPÍTULO IV

COORDENADAS NÃO HOMOGÊNEAS NAS FORMAS DE SEGUNDA ESPÉCIE.

4.1 - DEFINIÇÃO - Chamamos formas projetivas de segunda espécie o plano pontilhado e o plano regrado.

4.11. Coordenadas não homogêneas no plano pontilhado. Para se estabelecer um sistema de coordenadas não homogêneas no plano Π, considerado como pontilhado, tomam-se duas retas do mesmo, sôbre as quais se estabelecem sistemas de coordenadas não homogêneas, conforme o capítulo anterior.



Sejam essas retas x e y, e designemos os seus pontos, respectivamente, por 0_x, 1_x, $\infty_x = V$; 0_y, 1_y, $\infty_y = U$, fazendo $0_x = 0_y = 0$.

Projetando-se 1_x a partir de U e 1_y a partir de V, o ponto E, de concurso das projetantes, fica perfeitamente determinado. Projetando-se E, de O, e seccionando-se com UV, determina-se o ponto F, em UV.

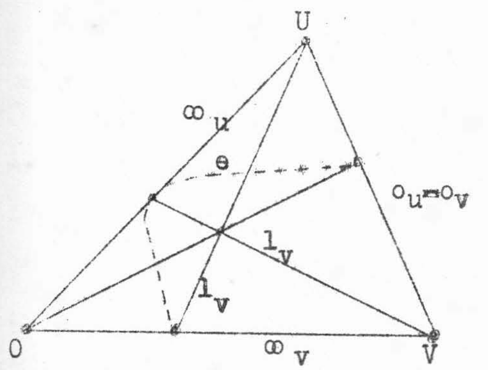
Os pontos 1_x e 1_y dão as coordenadas não homogêneas de E, no sistema xy. Como 1_x tem coordenada 1 em x, e 1_y coordenada 1 em y, designa-se o ponto E (ponto unidade), por E=(1,1).

Os pontos de x têm a segunda coordenada nula e os de y, a primeira nula. O ponto O tem as coordenadas (0,0); o ponto 1_x, (1,0); o ponto ∞_x, (∞,0), etc. O ponto F, que, num sistema infinito, assim como todos os pontos de UV, é um ponto de exceção, no atual sistema fica unìvocamente determinado, e pode ser designado por F=(∞,∞).

Se ∞_x e ∞_y são considerados como os pontos impróprios de x e y respectivamente, e o sistema em cada eixo é de coordenadas abscissas, o nosso sistema passa a constituir um sistema de coordenadas cartesianas não homogêneas.

4.12. Coordenadas não homogêneas no plano regrado. Êste sistema é obtido usando-se a Lei de Dualidade no plano π, considerado como regrado.

Tomem-se os pontos U e V, e considerem-se como centros de dois feixes de retas, com o raio unido UV.



Designemos os raios de (U) e (V), respectivamente, por o_u, 1_u, ∞_u; o_v, 1_v, ∞_v, com $o_u = o_v$ = UV. os raios ∞_u e ∞_v se cortam em O.

A reta e, de π, pelos pontos 1_u.OV e 1_v.OU, tem por coordenadas 1_u e 1_v. Como os raios 1_u e 1_v têm coordenadas 1, nos feixes (U) e (V) respectivamente, a reta e pode ser designada por e = [1,1].

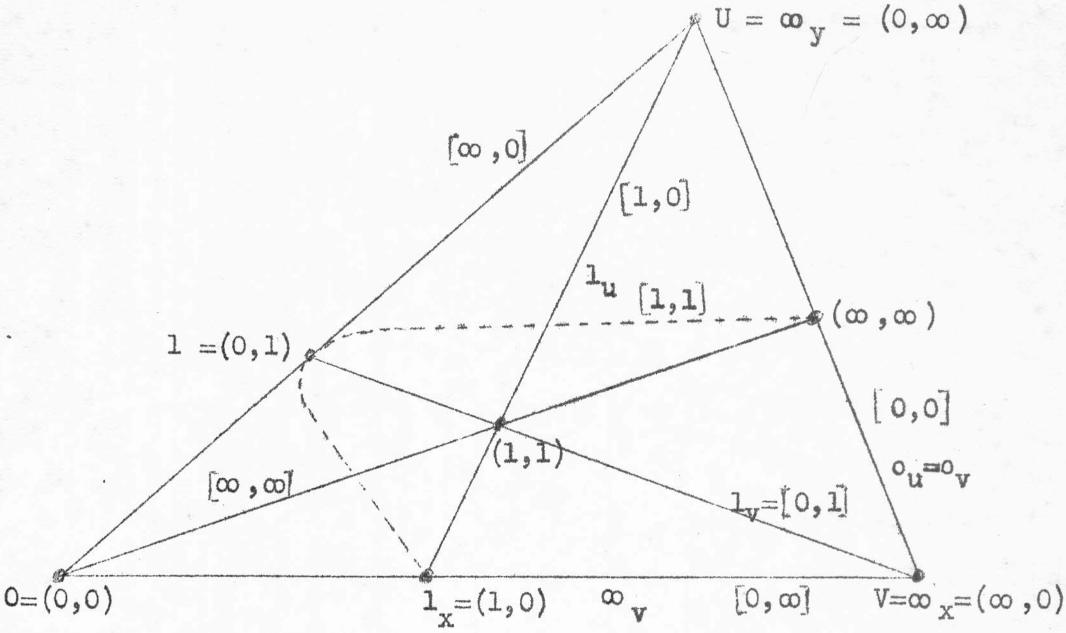
A última reta do plano π é a que parte de O e passa pelo ponto de concurso de 1_u e 1_v, e encontra $o_u = o_v$ no ponto em que esta encontra a reta e.

Como no caso do plano pontilhado, o feixe de centro O, que, no caso geral é um conjunto de exceção do sistema, no caso presente tem os seus elementos unìvocamente determinados.

As retas de (U) têm a segunda coordenada nula e as de (V) a primeira nula, e são, respectivamente: $o_u = o_v$ = [0,0]; 1_u = [1,0], ∞_u = [∞,0]; 1_v = [0,1], ∞_y = [0,∞].

As retas do centro O são ∞_u, ∞_v e a reta [∞,∞].

4.13. Sistemas associados de coordenadas projetivas não homogêneas. Associando-se os dois sistemas anteriores, no plano π, considerado como pontilhado e como regrado, com



$\infty_y = U$, $\infty_x = V$, $\infty_u = OU$, $\infty_v = OV$, considere-se a projetividade que faz corresponder, aos pontos do eixo x as retas do feixe U, quando as coordenadas do ponto em relação ao sistema x e da reta em relação a U são as mesmas:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0_u & 1_u \\ 0_x & 1_x \end{pmatrix} \begin{matrix} \infty_u \\ \infty_x \end{matrix}$$

Seja agora τ a perspectividade que faz corresponder a cada reta do U, o ponto interceptado pela mesma em x:

$$\tau = \begin{pmatrix} \infty_x & 1_x \\ 0_u & 1_u \end{pmatrix} \begin{matrix} 0_x \\ \infty_u \end{matrix}$$

A projetividade $\sigma = \tau^{-1}\omega$ transforma o eixo x em si mesmo, permutando 0_x **com** ∞_x, e mantendo 1_x fixo:

$$\sigma = \tau^{-1}\omega = \begin{bmatrix} \infty_x & 1_x \\ 0_x & 1_x \end{bmatrix} \begin{matrix} 0_x \\ \infty_x \end{matrix} .$$

σ é, portanto, uma involução com 1_x unido.

Usando-se as tabelas de operações do corpo, verifica-se pois, que:

* TEOREMA - Em um sistema associado xy.UV, de coordenadas projetivas não homogêneas no plano, uma reta de (U)

de coordenada u, intercepta o eixo x em um ponto, cuja coordenada é $x = \frac{1}{u}$. Anàlogamente, para o feixe (V) e o eixo y.

4.14 - <u>Pertinência entre ponto e reta</u>. Para as geometrias projetivas infinitas, a condição necessária e suficiente para que uma reta e um ponto se pertençam é que

$$am + bn + 1 = 0 \ ,$$

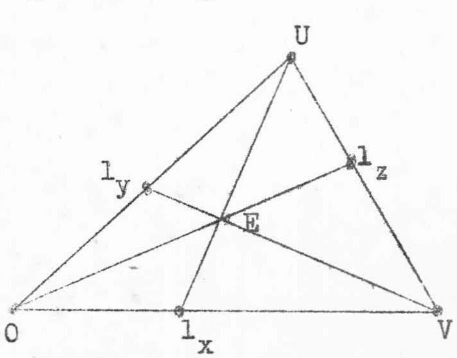
em que a reta é $r = [m,n]$, e o ponto $P = (a,b)$ (excluindo-se os elementos de exceção).

Para o caso atual, é de fácil verificação que a condição acima se verifica para os pontos e retas que não tenham ∞ como coordenada. Assim, o ponto (1,1) pertence à reta $[1,0]$, ou à $[0,1]$; os pontos (1,0) e (0,1) pertencem à reta $[1,1]$, etc.

Para os elementos que possuem ∞ como coordenada, a condição de pertinência não apresenta sentido. Esta exceção será levantada nos números seguintes.

4.2 - HOMOGENIZAÇÃO DAS COORDENADAS.

4.21. <u>Coordenadas homogêneas no plano pontilhado</u>. Chamemos z a reta UV, no nosso sistema associado xy,UV. Façamos $O_z = U$, $\infty_z = V$.



O ponto E, já visto, será o ponto unidade e ao mesmo atribuamos as coordenadas (1,1,1).

Chamemos de 1_z o ponto OE.UV.

Dêmos mais as seguintes coordenadas: $O = (0,0,1)$; $U = (0,1,0)$; $V = (1,0,0)$; $1_x = (1,0,1)$; $1_y = (0,1,1)$; $1_z = (1,1,0)$. Não há ponto com as três coordenadas nulas.

Ficam assim estabelecidas as coordenadas homogêneas dos sete pontos do plano, os quais são assim representados por conjuntos de três números reais, não nulos simultâneamente.

.*Esta afirmação constitui um teorema para o caso de um corpo de característica diferente de 2.

4.22. <u>Coordenadas homogêneas no plano regrado</u>. Usando-se o princípio de dualidade, podem-se estabelecer as coordenadas homogêneas no plano regrado, obtendo-se o resultado seguinte:

OU = [1,0,0]; OV = [0,1,0]; UV = [0,0,1]; OE = [1,1,0]; UE = [1,0,1]; VE = [0,1,1]. A reta [1,1,1] é a que liga os pontos (1,0,1), (0,1,1) e (1,1,0), projeções de E a partir dos vértices, sôbre os lados opostos do triângulo OUV.

4.23. <u>Condição de pertinência em coordenadas homogêneas</u>. A condição de pertinência entre o ponto P = (x,y) e a reta r = = [u,v], em coordenadas não homogêneas, conforme o número 4.14, nos casos em que admite sentido, é $ux + vy + 1 = 0$.

Fazendo:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad u = \frac{u_1}{u_3} \quad v = \frac{u_2}{u_3} \quad ,$$

obtém-se a condição para coordenadas homogêneas, na qual ficam eliminadas as exceções:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \ ,$$

e em que $r = [u_1, u_2, u_3]$ e $P = (x_1, x_2, x_3)$.

O quadro abaixo dá os pontos e as retas que se pertencem , respectivamente. A pertinência é indicada por um x, colocado na coluna relativa ao ponto, e na linha correspondente à reta.

	(0,0,1)	(0,1,0)	(1,0,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
[0,0,1]		x	x			x	
[0,1,0]	x		x	x			
[1,0,0]	x	x			x		
[1,0,1]		x		x			x
[0,1,1]			x		x		x
[1,1,0]	x					x	x
[1,1,1]				x	x	x	

4.3 - EQUAÇÃO DA RETA.

4.31. <u>Equação da reta em coordenadas de pontos</u>. Considerados os pontos (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3), a equação da reta determinada pelos mesmos se obtém a partir da condição de pertinência. Tomem-se, pois, as coordenadas de retas u_1, u_2, u_3, tais que:

$$u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 = 0$$
$$u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 = 0 .$$

Daí, resulta que os u_i são proporcionais, respectivamente , aos menores da matriz

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| ,$$

ou seja:

$$u_1 = k \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad u_2 = k \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \quad u_3 = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} .$$

Como k deve ser $\neq 0$, tem-se $k = 1$.

O terceiro ponto (x_1, x_2, x_3) da reta satisfaz então à relação :

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

que é a equação da reta que passa pelos pontos dados.

4.31. Por dualidade, pode-se escrever

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

que é a equação do ponto (ou feixe) determinado pelas retas $[v_1, v_2, v_3]$ e $[w_1, w_2, w_3]$.

4.32. Equações paramétricas da reta. A equação da reta em coordenadas de pontos é, como acima:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Por uma propriedade dos determinantes, pode-se escrever:

$$x_i = \lambda a_i + \mu b_i ,$$

com λ, $\mu = 0,1$, não nulos simultâneamente.

Esta é a expressão das equações paramétricas da reta em coordenadas de pontos. Para $\lambda = 0$, $x_i = b_i$; para $\mu = 0$, $x_i = a_i$; para $\lambda = \mu = 1$, x_i designa o terceiro ponto da reta por (a_i) e (b_i).

Por dualidade, podem-se obter as equações paramétricas do ponto (ou feixe de retas), em coordenadas de retas.

Vale o teorema:

4.33 - TEOREMA - Se existe uma projetividade entre duas formas de primeira espécie, a mesma pode ser traduzida por uma equação entre os parâmetros das duas representações paramétricas.

Sejam as formas dadas por

$$x_i = a_i + \sigma b_i \qquad\qquad u_i = v_i + \tau w_i$$

Conforme demonstração no Curso de Geometria Projetiva, segundo ano (apostilas), do prof. Dr. Benedito Castrucci, pag. 8, obtém-se:

$$\tau = \frac{A\sigma + B}{C\sigma + D} \qquad \text{com} \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ C & C \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

tanto para o caso da perspectividade, como para a projetividade.

C A P Í T U L O   V

5.11 - DEFINIÇÃO - Duas formas de segunda espécie quaisquer (de mesmo suporte) são projetivas quando existe uma correspondência biunívoca entre os elementos das mesmas, tal que conserve projetivamente as formas de primeira espécie, ou seja:

1) A cada forma de primeira espécie corresponde uma forma de primeira espécie;

2) Existe projetividade entre estas formas.

A projetividade recebe os seguintes nomes:

PERSPECTIVIDADE, quando os elementos correspondentes se pertencem, se as formas são de nomes diferentes; ou quando pertencem a outra forma, para as de mesmo nome.

HOMOGRAFIA, se é produto de perspectividades.

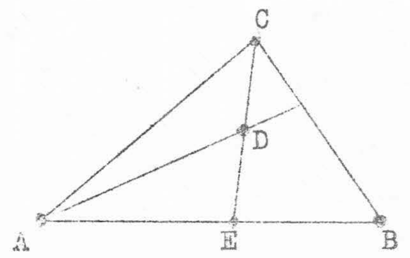
RECIPROCIDADE ou CORRELAÇÃO, se entre plano regrado e plano pontilhado.

5.12 - TEOREMA (Staudt) - Dada uma projetividade entre os ementos de uma forma de segunda espécie, se três elementos independentes são correspondentes de si mesmos, então todo elemento da forma é correspondente de si mesmo (unido).

Consideremos o caso do plano pontilhado, e seja ω a projetividade

$$\omega = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

em que A = A', B = B', C = C', A, B, C não alinhados.



Tomemos o ponto D, não pertencente às re tas AB, AC. As retas AB e CD determinam o ponto E. Como A e B são unidos, o terceiro ponto E, de AB também o é. A reta CD, tendo C e E unidos, tem o ponto D unido, portanto, D = D'. Da mesma forma se procede para os dois pontos restantes do plano pontilhado, verificando-se que a projetividade em questão é a identidade.

5.13. Uma transformação linear, em coordenadas projetivas homogêneas, com determinante $\neq 0$, satisfaz às condições da projetividade.

Seja a transformação:

$$[1] \qquad \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

com $|a_{ik}| \neq 0$ $\qquad (i,k = 1, 2, 3)$, ou

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_k \qquad \text{com } |a_{ik}| \neq 0.$$

A cada ponto $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$, a [1] faz corresponder um único ponto $(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2,\bar{x}'_3)$.

Reciprocamente, se $|a_{ik}| \neq 0$, a transformação

$$x_k = \sum_{i=1}^{3} A_{ki}x'_i \quad , \qquad \text{com } |A_{ki}| \neq 0$$

em que A_{ik} é o co-fator do elemento a_{ik}, faz corresponder a cada ponto $(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2,\bar{x}'_3)$ um único ponto $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$. A correspondência é, portanto, unívoca nos dois sentidos.

Verifiquemos que [1] transforma cada forma de primeira espécie subordinada, em uma forma de primeira espécie.

Tratando-se de plano pontilhado, consideremos a pontilhada AB, com $A = (a_1,a_2,a_3)$, $B = (b_1,b_2,b_3)$. Seja $X = (x_1,x_2,x_3)$ o terceiro ponto de AB.

Conforme o capítulo anterior, $x_i = a_i + b_i$ $(i = 1,2,3)$.

Pela transformação [1], temos:

$$a'_i = \sum a_{ik}a_k \qquad b'_i = \sum a_{ik}b_k \qquad |a_{ik}| \neq 0$$

A x_i corresponde, pois

$$x'_i = \sum a_{ik}(a_k + b_k) = \sum a_{ik}a_k + \sum a_{ik}b_k = a'_i + b'_i.$$

Segue-se que X' pertence à pontilhada A'B'.

Como nessa correspondência o parâmetro tem sempre o valor 1, a mesma é projetiva.

Conclui-se que [1] é uma projetividade.

5.14 - TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROJETIVIDADE NAS FORMAS DE SEGUNDA ESPÉCIE - Dados três pares de elementos independentes em duas formas de segunda espécie, existe e é única a projetividade que faz corresponder êsses elementos, em determinada ordem.

Existência. Como as duas formas de segunda espécie são sobrepostas, façamos corresponder aos pontos A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1), respectivamente, os pontos A' = (a_1,a_2,a_3), B' = (b_1,b_2,b_3), C' = (c_1,c_2,c_3).

Por $x'_i = \sum a_{ik}x_k$, obtêm-se:

$$\begin{array}{lll} a_1 = a_{11} & b_1 = a_{12} & c_1 = a_{13} \\ a_2 = a_{21} & b_2 = a_{22} & c_2 = a_{23} \\ a_3 = a_{31} & b_3 = a_{32} & c_3 = a_{33}\ , \end{array}$$

donde resulta a transformação linear:

$$[2] \qquad \begin{cases} x'_1 = a_1\, x_1 + b_1\, x_2 + c_1\, x_3 \\ x'_2 = a_2\, x_1 + b_2\, x_2 + c_2\, x_3 \\ x'_3 = a_3\, x_1 + b_3\, x_2 + c_3\, x_3\ , \end{cases}$$

na qual o determinante $|a_i\ b_i\ c_i|$ é diferente de zero,porque os pontos A', B', C' não pertencem à mesma forma de primeira espécie. A existência das transformações, conforme o número anterior, acarreta a existência da projetividade.

Unicidade. Sejam A, B, C, três elementos independentes de uma forma de segunda espécie, e A',B',C', os seus correspondentes em outra forma de segunda espécie (de mesmo suporte).

Consideremos a projetividade $\Omega = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix}$.
Admitindo-se a projetividade τ, tal que

$$\tau = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix},$$

façamos o produto

$$\tau^{-1}\Omega = \begin{pmatrix} A & B' & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

que é a identidade pelo teorema de Staudt, ou seja: $\tau^{-1}\Omega = I$, donde, sucessivamente: $(\tau\tau^{-1})\Omega = \tau I$,

$$I\Omega = \tau I, \qquad \Omega = \tau,$$

o que mostra que Ω é única.

5.2 - HOMOGRAFIAS.

5.21. Procedendo-se como no nº 5.14, façamos corresponder aos pontos $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$, respectivamente os pontos (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3).

A projetividade é dada pela transformação linear [2]:

$$\begin{cases} x_1' = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\ x_2' = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \\ x_3' = a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 \end{cases} \quad \text{com} \quad |a_ib_ic_i| \neq 0;$$

e, fazendo-se o elemento (1,1,1) corresponder a (d_1,d_2,d_3), obtém-se:

$$d_1 = a_1 + b_1 + c_1 \qquad d_2 = a_2 + b_2 + c_2 \qquad d_3 = a_3 + b_3 + c_3.$$

5.22. <u>Número total de homografias</u>. O número total de homografias planas que se podem estabelecer, obtém-se imediatamente.

Basta, na correspondência acima, verificar de quantos modos se podem tomar os pontos A', B', C', independentes, e correspondentes de A, B, C, respectivamente.

Considerando-se uma reta qualquer do plano, os dois primeiros pontos A' e B' podem ser escolhidos de 6 maneiras diferentes, que correspondem aos arranjos simples dos 3 pontos da reta, tomados 2 a 2. Para cada um dêsses arranjos, o tercei-

Nada sôbre a classificação das homografias

ro ponto C' pode ocupar 4 posições distintas, que são as dos 4 pontos restantes do plano.

Considerando-se que a reta de partida pode ser escolhida de 7 maneiras diferentes, obtém-se finalmente o número total N de homografias planas:

$$N = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168 ,$$

número êsse que poderia ser obtido com a fórmula

$$N = \frac{1}{q - 1} \prod_{i=0}^{2} (q^3 - q^i)$$

que exprime o número de homografias que se podem estabelecer sôbre um corpo de característica q (Segre - Lezioni di Geometria Moderna), ou ainda com a fórmula

$$N = p^3(p - 1)^2(p + 1)(p^2 + p + 1) ,$$

em que a característica é p (Chung-Tao Yang - Projective Collineations in a Finite Projective Plane - Instituto de Matemática da Universidade Nacional de Chekiang).

5.23. <u>Homologia</u>. A homologia é a homografia em que existe uma reta de pontos unidos (eixo da homologia).

Não há homologia geral, porque a existência de ponto unido fora do eixo de pontos unidos, pelo teorema de Staudt, acarretaria a identidade.

Determinemos as equações de uma homologia.

Consideremos, para isto, a homografia em que a reta AB é de pontos unidos. Tomando A = (1,0,0), B = (0,1,0), o terceiro ponto E = (1,1,0) de AB também é unido, pelo teorema de Staudt, para as formas de primeira espécie.

O ponto C = (0,0,1), do triângulo fundamental corresponderá ao ponto C', que poderá ser escolhido de três maneiras distintas. Seja C' = (a,b,1).

As equações da homologia serão, pois:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \qquad + ax_3 \\ x_2' = \qquad x_2 + bx_3 \\ x_3' = \qquad\qquad x_3 \end{cases},$$

nas quais a e b não podem ser nulos simultâneamente.

5.3 - RECIPROCIDADE.

5.31 - DEFINIÇÃO - <u>Reciprocidade</u> é a projetividade entre plano pontilhado e plano regrado. As equações de uma reciprocidade são:

$$u_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_k \quad (i = 1,2,3),\ |a_{ik}| \neq 0,$$

em que x_i são as coordenadas dos pontos do plano e u_i' as das retas correspondentes do mesmo.

Em uma reciprocidade, a um ponto do plano, considerado como pontilhado, corresponde uma reta do mesmo, considerado como regrado, pois sòmente podemos considerar formas com o mesmo suporte.

Como no caso geral, pode-se verificar que um produto de reciprocidades é uma homografia ou uma reciprocidade, conforme o número de reciprocidades consideradas seja par ou ímpar.

Um processo para classificar as reciprocidades ω, é o estudo da homografia ω^2.

Examinaremos o caso em que, sendo ω uma reciprocidade, ^{2} é a identidade: $\omega^2 = I$.

Se um ponto X é unido em ω^2, então X e a sua reta correspondente se correspondem involutòriamente em ω. A reciprocidade toma o nome de reciprocidade involutória.

5.32. Numa reciprocidade, chamamos <u>cônica de incidência</u> o lugar dos pontos que pertencem às retas correspondentes.

Seja $Y \longrightarrow v$, com v pertencente a Y.

Sendo $Y = (x_1, x_2, x_3)$, $v = [u_1, u_2, u_3]$, segue-se, pela condição de pertinência:

$$\sum u_i x_i = 0.$$

Das equações [1] e desta condição, resulta:

$$\sum_i \left(\sum_k a_{ik} x_k \right) x_i = 0$$

ou

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_1x_3 +$$
$$+ a_{21}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{32}x_2x_3 = 0 ,$$

que é a equação do lugar.

5.33. Inversamente, se procurarmos a equação do lugar das retas que pertencem aos pontos correspondentes, encontraremos a expressão

$$\sum_k u_k \left(\sum_i A_{ik} u_i \right) = 0 ,$$

que representa uma <u>cônica</u> <u>envólucro</u> <u>da</u> <u>reciprocidade</u>, e na qual A_{ik} é o co-fator do elemento a_{ik}.

5.34. <u>Elementos que se correspondem involutòriamente</u>.

Sejam $\omega(X) = u$, $\omega(u) = \omega^2(X) = Y$, com $Y = X$.

Pela ω, então:

[1] $$u_i = \sum_k a_{ik} x_k , \qquad |a_{ik}| \neq 0 .$$

Consideremos um ponto $Z = (z_1, z_2, z_3)$, de u, donde

$$\sum_i u_i z_i = 0 ,$$

e, pela [1]:

[2] $$\sum_i \left(\sum_k a_{ik} x_k \right) z_i = 0 .$$

Como, pela ω, aos pontos Z de u correspondem as retas $v = [v_1, v_2, v_3]$ pertencentes ao ponto $Y = (y_1, y_2, y_3)$, considerado como centro de feixe, têm-se:

$$v_i = \sum_k a_{ik} z_k \qquad \text{e} \qquad \sum_i v_i y_i = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \sum_i (\sum_k a_{ik} z_k) y_i = 0 \;, \quad \text{ou}$$

$$[3] \qquad \sum_i (\sum_k a_{ki} y_k) z_i = 0 \;.$$

Como Y = X, então $y_i = x_i$, e, de [2] e [3]:

$$\sum_i (\sum_k a_{ik} x_k) z_i = \sum_i (\sum_k a_{ki} x_k) z_i \;,$$

o que acarreta $\qquad a_{ik} = a_{ki}$.

Segue-se que o determinante $|a_{ik}| \neq 0$ da reciprocidade involutória é, pois, simétrico.

5.35 - DEFINIÇÃO - A reciprocidade involutória é chamada POLARIDADE. Um ponto e a sua reta correspondente em uma polaridade, chamam-se, respectivamente, polo e polar.

Verifica-se que, se $A \in b$, a polar de A passa pelo polo de B, pois se $\omega^2 = I$, obtém-se $\omega = \omega^{-1}$.

5.36 - DEFINIÇÃO - Se a é a reta polar de A, os pontos de a se dizem conjugados de A; e tôdas as retas de A se dizem conjugadas de a. O ponto que pertence à própria polar chama-se auto-polar ou auto-conjugado. Todos os pontos da reta polar são conjugados dêle.

5.37. Equação dos pontos conjugados e das retas conjugadas. Sejam o ponto $X = (x_i)$ e a sua polar $u = [u_i]$; então:

$$u_i = \sum_k a_{ik} x_k \;, \qquad |a_{ik}| \neq 0 \;.$$

Se $X' = (x_i')$ é um ponto de u, $\quad \sum_i u_i x_i' = 0 \;,$

donde

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_k\right)x'_i = 0,$$

que é a equação dos pontos conjugados de $X = (x_i)$.

Dada, agora, a reta $[u_1,u_2,u_3]$, as suas retas conjugadas pertencem ao seu polo (x_1,x_2,x_3), em que

$$x_i = \sum_k A_{ik}x_k.$$

A equação do polo é:

$$\sum_i u'_i x_i = 0,$$

em que u'_i são as coordenadas das retas que passam pelo mesmo. Substituindo-se nesta a expressão anterior, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} A_{ik}u_k\right)u'_i = 0 ,$$

equação das retas conjugadas de $[u_i]$.

5.38 - DEFINIÇÃO - Um triângulo se diz auto-recíproco ou auto-conjugado em uma reciprocidade, se cada vértice é o correspondente do lado oposto.

5.39 - TEOREMA - Se em uma reciprocidade existe um triângulo auto-recíproco, essa reciprocidade é uma polaridade.

Seja ω a reciprocidade, e ABC um triângulo auto-recíproco. Tomando ABC como triângulo de referência, temos: $A = (1,0,0)$; $B = (0,1,0)$; $C = (0,0,1)$; $a = [1,0,0]$; $b = [0,1,0]$; $c = [0,0,1]$. Substituindo-se êsses valores nas equações da reciprocidade:

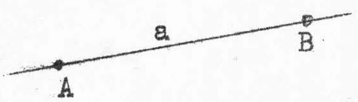
$$u_i = \sum a_{ik}x_k \qquad |a_{ik}| \neq 0,$$

verifica-se que, na matriz (a_{ik}), apenas os elementos pertencentes à diagonal principal são diferentes de zero.

O determinante da mesma é, portanto, simétrico e a correspondência ω é uma polaridade.

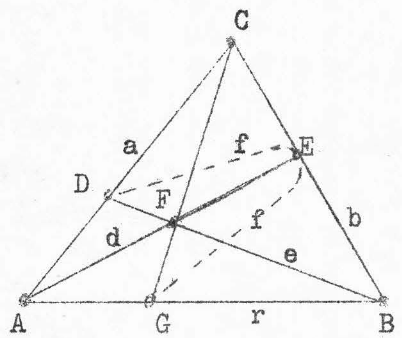
5.39' - TEOREMA - Se um ponto é auto-conjugado, isto é, pertence à sua polar, não existe sôbre esta outro ponto auto-conjugado.

Sejam A e a, o ponto e a sua polar, com A pertencente a a. Se o ponto B de a, $B \neq A$, também fosse auto-conjugado, a sua polar b passaria por B. Como $B \in a$, b pass aria também por A e, portanto, coincidiria com a, o que determinaria uma correspondência não biunívoca. Logo, A é o único ponto auto-conjugado de a.



Vale o dual.

* 5.310 - TEOREMA - Se em r existe, pela ω, dois pontos auto-conjugados, o terceiro ponto de r também é auto-conjugado.



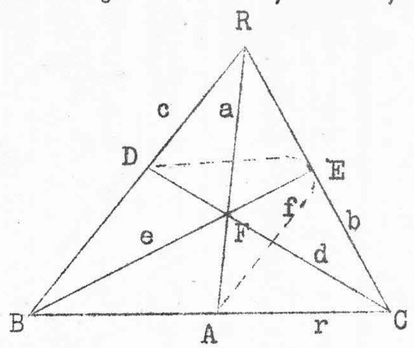
Sejam os pontos A e B, de r, auto-conjugados, portanto $A \in a$, $B \in b$.

Como $ab = C$, $AB = r$ é a polar de C. Seja D o terceiro ponto de a; então d, polar de D, passa por A, e $d \neq a$, pelo teorema 5.39. d corta b em E, portanto $e = BD$. d, e, se cortam em F $\therefore$ $f = DE$. f corta r em G $\therefore$ $FC = g \in G$. Segue-se que G é auto-conjugado.

Pelo teorema 5.39, não há outros pontos auto-conjugados.

* 5.311 - TEOREMA - Se numa reta r, não auto-conjugada, existem dois pontos B e C, não auto-conjugados, o terceiro ponto A, de r, é auto-conjugado, elemento unido de uma involução, em que se correspondem B e C, subordinada pela polaridade ω sôbre r.

Sejam B e C, de r, não auto-conjugados pela polaridade ω.



Se $B \in r$, $b \in R$ e $b \not\in B$;

$C \in r$, $c \in R$ e $c \not\in C$.

Como $BC = r$, $bc = R$. Pela ω, a B corresponde $b \in C$, e aos pontos de b correspondem as retas do feixe B, ou $b \xrightarrow{\omega} B$.

Seguem-se: $\omega(B) = b$; $\omega(b) = \omega[\omega(B)] = \omega^2(B) = B$, e, portanto, a reciprocidade ω é involutória, logo, polaridade.

Como $A \in r$, então $a \in R$. De R saem b, c, a; como $b \in C$, $c \in B$, então $a \in A$. Logo, A é auto-conjugado.

A involução subordinada é o produto de ω pela secção σ, com r.

Os outros pontos auto-conjugados, são D e D, alinhados com A, sôbre f.

* COROLÁRIO - Em uma polaridade existe um único triângulo auto-recíproco: o de vértices (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1).

5.312 - DEFINIÇÃO - O lugar dos pontos auto-conjugados em uma polaridade é chamado CONICA LUGAR. Dualmente, o lugar das retas auto-conjugadas é chamado CONICA ENVÓLUCRO. Os pontos da primeira pertencem a uma reta e as retas da seg unda pertencem a um feixe.

5.4 - EQUAÇÕES DAS CÔNICAS.

5.41. <u>Equação da cônica lugar</u>. Tomando a equação da cônica de incidência de uma reciprocidade, e impondo-se que o determinante da mesma seja simétrico (polaridade), obtém-se:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + 2a_{13}x_1x_3 = 0.$$

Tendo em vista o corpo sôbre o qual operamos, esta equação se reduz a

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

em que o determinante da polaridade é

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} .$$

A matriz correspondente pode ser de característica 3, 2 ou 1.

Se fôr de característica 3, Δ é igual a 1, pois $a_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, 3)$. Existe a polaridade e a cônica representada pela equação é a reta $[1,1,1]$, dos pontos $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$, considerada como dupla.

Se a característica fôr 2 ou 1, não existe a polaridade, de acôrdo com a definição dada; porém, a equação acima representa sempre uma reta dupla:

No primeiro caso, um dos a_{ii} é nulo. A cônica será uma das retas que passam por $(1,1,1)$.

No segundo caso, apenas um dos a_{ii} é diferente de zero: a cônica será um dos lados do triângulo de referência.

Por dualidade, pode-se obter a equação da cônica envólucro, do mesmo tipo da precedente, com propriedades análogas.

pg 1 _ comparar com axiomas de Veblen

pg 1 Axioma P3 *

pg 2 - 1.11. Teorema!!!

pg 5 tambem

pg 7 (Veblen)

pg 8 (Segre e Veblen)

pg 9 (2 - 24')

pg 9 - Noção de configuração

pg 12 - apresenta insuficient. a noção de projetividade (correspondencia Staudtiana) ver Segre pg 140 (fim da pagina) Inclusive enunciado que corresponde exatamente ao Teorema 3, 22 com *.

pg 15 - Involução ver Segre pg 156

pg 20/21/22 - resultados, inclusive equações, em Segre pg 156 - 157.

pg 26 (fim) e começo de 27

Esclarecer a observação com asterisco!!!

✓ pg 30 - Porque a referencia?

✓ pg 35 - citação imprecisa!

✓ pg 40 (ant. e seguintes)

Ver Segre pg 162 (149)

...
dos
grafos