SÔBRE UMA NOVA DEFINIÇÃO DE CÚBICA PLANA

Benedito Castrucci

INTRODUÇÃO

Antecipando o desenvolvimento das considerações que nos propusemos fazer sôbre uma nova definição das curvas planas de terceira ordem (cúbicas planas), achamos necessário dar algumas explicações a respeito de nossa pesquisa, bem como uma síntese dos resultados conseguidos.

É sabido que, para estudar as curvas de segunda ordem (cónicas), há duas vias:a analítica e a geométrica. Esta última, por sua vez, pode ter como base dois tipos de definição:a)a Steineriana;b)a Staudtiana.

O método analítico, usado nos tratados de geometria analítica, parte da definição de que a cónica é o lugar dos pontos de um plano, cujas coordenadas homogéneas projectivas (x_1 x_2 x_3) satisfazem a uma equação algébrica homogênea do segundo grau (ou cujas coordenadas cartesianas não homogéneas x e y satisfazem a uma equação algébrica do segundo grau). Decorrem a seguir as propriedades com recursos analíticos. Entre os inúmeros tratados que assim o fazem, citaremos os de Salmon (Traité de Géométrie Analytique-1897-tradução), Castelnuovo (Lezioni di Geometria Analitica-6a. edizione-1924), Niewenglowski (Cours de Géométrie Analytique-deuxième édition-1911), Tresse & Thybaut (Cours de Géométrie Analytique-nouvelle édition-1913) e Clebsch (Leçons de la Géométrie-I tômo-1903).

Cónica, segundo a definição de Steiner, é o lugar dos pontos comuns aos raios correspondentes de dois feixes projectivos coplanares, não concêntricos nem perspectivos (*). É a orientação seguida por Severi (Geometria Proiettiva-2a. edizione-1926), Edgardo Ciani (Lezioni di Geometria Proiettiva e Analitica-3a. edizione-1922), Veblen and Young (Projective Geometry-1916), Doehlemann (Projektive Geometrie-1922-fünfte Auflage) e Th. Reye (Leçons sur la Géométrie de Position-1881-tradução). É interessante, porque se utiliza exclusivamente a projectividade entre formas de primeira espécie.

Na orientação de Staudt, a cônica vem definida como o lugar dos pontos auto-conjugados de uma polaridade plana, e portanto supõe conhecimento das formas de segunda espécie. Seguem êste método os livros de Giacomo Albanese (Lezioni di Geometria Proiettiva-3a. edizione-1934), F. Enriques (Lezioni di Geometria Proiettiva-4a. edizione) e del Pezzo (Principi di Geometria Proiettiva-1920).

(*) Se concêntricos, teriamos a cónica decomposta em duas retas distintas ou coincidentes, conforme a projectividade fôsse elíptica (hiperbólica) ou parabólica. Se perspectivos, decompõe-se a cónica em duas retas: uma é o eixo de perspectividade e a outra o raio comum dos feixes.

A pergunta que surge espontâneamente depois das considerações anteriores, é saber se possuem os mesmos caminhos de estudo as curvas planas de ordem superior a dois.

Bastante conhecido é o estudo analítico de uma curva algébrica plana qualquer, com os recursos da polaridade de uma curva, fórmulas de Plücker, etc.

O método geométrico de Steiner pode também ser usado para qualquer curva, porque, dados dois feixes projectivos de curvas coplanares, respectivamente de ordens m e n, o lugar dos pontos de intersecção das curvas correspondentes é uma curva de ordem m+n (teorema de Chasles). Dêste modo é que Cremona (Opere Matematiche-Milão-1914-Tômo I) define a cúbica plana: lugar dos pontos comuns às curvas correspondentes de dois feixes projectivos coplanares, um de raios e outro de cônicas.

A respeito de uma via Staudtiana, nada encontrámos concernente ao assunto nas obras que tivemos o ensejo de consultar, cuja relação daremos oportunamente. Tal é a razão do presente trabalho, onde examinaremos apenas o caso das cúbicas.

Conseguimos formular, nesta nossa tese, uma definição elementar e geométrica das cúbicas, segundo caminho análogo ao de Staudt para as cônicas, como lugar dos elementos auto-conjugados de uma correspondência recíproca plana.

Construída uma polaridade quadrática plana (ou reciprocidade involutória quadrática plana), verificamos que o lugar dos pontos auto-conjugados constitue uma curva plana de terceira ordem. As primeiras propriedades da curva foram obtidas elementarmente por essa via. Ligeiras demonstrações geométricas acham-se nesta tese, acompanhadas de verificações analíticas.

Curioso é o processo geométrico que se obtém para o exame das singularidades das cúbicas.

Resultado que reputamos proveitoso, é a demonstração fácil e elementar do conhecido teorema de Hermite sôbre as cúbicas (*).

Finalmente, ligamos um determinante cúbico aos coeficientes da equação da curva de terceira ordem, com a observação de que aquêle apresenta uma simetria que lhe dá um único valor, em lugar dos três que em geral surgem. Por outro lado, notemos também que a anulação dêste determinante não está ligada às singularidades da curva, como poderia parecer numa rápida analogia com as cônicas.

A teoria assim construída pode ser estendida às curvas planas de ordem superior a três.

(*) Ver F. Enriques e O. Chisini - Teoria Geometrica delle Equazione e delle Funzione Algebriche - II volume - pag. 228.

Os problemas a respeito do determinante cúbico e das curvas de ordem superior são assuntos que pretendemos examinar futuramente.

Finalizando êste preâmbulo, apresentamos aos professores Giacomo Albanese e Omar Catunda os nossos profundos agradecimentos pelas sugestões valiosas e seguras que muito auxiliaram esta nossa tentativa de contribuição ao estudo da geometria.

-§§§§§§§-

§1º-POLARIDADE QUADRÁTICA PLANA

1.Suponhamos uma transformação recíproca e plana do tipo:

(i) $$\rho\xi_i = f_i(x_k) \qquad (i,k=1,2,3),$$

onde os x_k são coordenadas de ponto de um plano π, os ξ_i coordenadas de retas de um segundo plano π' e os $f_i(x_k)$ funções homogéneas racionais inteiras dos x_k. Geomètricamente, as (i) transformam um ponto $A \equiv (y_i)$ numa reta a de π', de coordenadas $\left[f_1(y_i), f_2(y_i), f_3(y_i)\right]$, cuja equação é, portanto,

(ii) $$x_1 f_1(y_i) + x_2 f_2(y_i) + x_3 f_3(y_i) = 0 .$$

Inversamente, a reta $a \equiv (\xi_i)$ provém dos pontos de intersecções das curvas definidas por:

(iii) $$\frac{f_1(x_k)}{f_3(x_k)} = \frac{\xi_1}{\xi_3} \quad \text{e} \quad \frac{f_2(x_k)}{f_3(x_k)} = \frac{\xi_2}{\xi_3}.$$

Esta correspondência será biunívoca, sòmente quando houver um único ponto, intersecção variável das curvas mencionadas (iii).

Vamos provar que <u>esta correspondência considerada em planos superpostos não pode ser involutória, no sentido ordinário, excepção feita do caso em que as (i) sejam fórmulas de transformação projectiva</u>.

De fato, suponhamos que seja involutória, isto é, a um ponto qualquer $B \equiv (z_i)$ da reta $a \equiv (\xi_i)$, corresponde uma reta $b \equiv (\eta_i)$, passando por $A \equiv (y_i)$.

Analìticamente, as coordenadas y_i satisfazem então à equação

(iv) $$x_1 f_1(z_i) + x_2 f_2(z_i) + x_3 f_3(z_i) = 0$$

da reta $b \equiv \left[\eta_i = f_i(z_k)\right]$, isto é, tem-se

(v) $$y_1 f_1(z_i) + y_2 f_2(z_i) + y_3 f_3(z_i) = 0.$$

Porém, B é ponto da reta $\underline{a}$, cuja equação é (ii), isto é, vale

(vi) $$z_1 f_1(y_i) + z_2 f_2(y_i) + z_3 f_3(z_i) = 0.$$

As equações (v) e (vi) coexistem simultâneamente, quaisquer que sejam os pontos de coordenadas y_i e z_i. Então, f_1, f_2 e f_3 são lineares, isto é, a transformação (i) é projectiva. Excluindo-se esta hipótese, a correspondência deixa de ser involutória, no sentido mencionado.

O caso que imediamente ocorre, depois da projectividade, é o das funções f_i do segundo grau.

2. Examinaremos, pois, a natureza da correspondência, supondo que as transformações

(vii) $$\begin{cases} \rho\xi_1 = f_1(x_1\ x_2\ x_3) \\ \rho\xi_2 = f_2(x_1\ x_2\ x_3) \\ \rho\xi_3 = f_3(x_1\ x_2\ x_3) \end{cases}$$

sejam com $f_k\ (x_1\ x_2\ x_3)$ funções homogéneas do segundo grau.

A um ponto $P \equiv (y_i)$ do plano π corresponde uma recta $\underline{p}$ do plano π', de coordenadas $\left[f_1(y_i), f_2(y_i), f_3(y_i)\right]$. Se P descrever uma reta, por exemplo, a determinada pelos pontos $P \equiv (y_i)$ e $Q \equiv (z_i)$, p descreverá uma cônica envólucro, porque as coordenadas de um ponto genérico da reta PQ são $x_i = \lambda y_i + \mu z_i$ e as da reta correspondente

$$\text{(viii)} \quad \begin{cases} \rho\xi_1 = f_1(\lambda y_i + \mu z_i) \\ \rho\xi_2 = f_2(\lambda y_i + \mu z_i) \\ \rho\xi_3 = f_3(\lambda y_i + \mu z_i) \end{cases},$$

cujos coeficientes são funções de segundo grau de λ e μ, o que nos mostra tratar-se de uma cônica envólucro.

Entretanto, apresenta-se mais simples e natural a correspondência inversa.

Um ponto $A \equiv (m, n, o)$ do 2º plano π' é centro de um feixe de retas, às quais correspondem os pontos de uma cônica.

Com efeito, temos o ponto, em coordenadas de retas, dado pela equação

$$\text{(ix)} \qquad m\xi_1 + n\xi_2 + o\xi_3 = 0$$

e os pontos correspondentes de coordenadas x_i, os que satisfazem à equação

$$\text{(x)} \qquad mf_1(x_i) + nf_2(x_i) + of_3(x_i) = 0$$

que é a de uma cônica γ.

Se o ponto A descrever uma reta r, a cônica γ descreverá um feixe.

De fato, as coordenadas de um ponto da reta r, fixados dois de seus pontos $A\equiv(m,n,o)$ e $B\equiv(s,t,v)$, são $(\lambda m+\mu s, \lambda n+\mu t, \lambda o+\mu v)$ e para cônicas correspondentes teremos:

$$(\lambda m+\mu s)f_1+(\lambda n+\mu t)f_2+(\lambda o+\mu v)f_3=0$$

(xi) ou

$$\lambda(mf_1+nf_2+of_3)+\mu(sf_1+tf_2+vf_3)=0,$$ equação

que representa um feixe de cônicas.

Daí, concluímos que a reta r do segundo plano π', provém de quatro pontos do primeiro plano, isto é, dos pontos-bases do feixe de cônicas. A correspondência entre ponto e reta é, portanto, em geral (4,1), pois a um ponto do primeiro plano π corresponde uma reta do segundo plano π' e uma reta dêste provém de quatro pontos do primeiro.

Aos pontos do segundo plano corresponde, por isso, uma rêde de cônicas do primeiro plano, isto é, a (X_1,X_2,X_3) variável corresponde,

(xii) $$X_1f_1+X_2f_2+X_3f_3=0$$

que é uma rêde de cônicas.

Se esta não tem pontos-bases, a correspondência é (4,1); se um ponto-base, (3,1); se dois, (2,1); e se três, (1,1) e é biunívoca.

A inversa é portanto uma correspondência projectiva ordinária entre um plano pontilhado e uma rêde de cônicas.

3. Já vimos a impossibilidade do conceito de involução no sentido comum (1). Vamos ver agora como se caracteriza outro tipo de correspondência involutória.

Imaginemos os dois planos superpostos. Dado um ponto $P \equiv (y_i)$ do primeiro plano π, a êste corresponde uma reta p do segundo plano π'. Tomando-se P como centro de um feixe de raios no segundo plano π', a êste corresponde uma cónica do primeiro plano π. Esta cónica define uma polaridade que a P faz corresponder uma reta polar p'. Quando esta reta p' coincide com p, ou então, quando a reta correspondente do ponto P é a reta polar da cónica correspondente de P na inversa, dizemos que a correspondência entre P e p é involutória. Se isto acontecer sempre, teremos aquilo a que chamamos POLARIDADE QUADRÁTICA PLANA (ou reciprocidade involutória quadrática plana).

Por definição, chamaremos à cónica correspondente de P, <u>cónica polar</u> e à reta correspondente de P ($p \equiv p'$), <u>reta polar</u>. Enunciaremos então o seguinte <u>teorema de reciprocidade</u>:

a) <u>se a cónica polar de P passa por um ponto M, a reta polar de M passa por P;</u>

b) <u>se a reta polar de P passa por M, a cónica polar de M passa por P.</u>

vale para o caso geral

O carácter involutório que impusemos, traduzido analìticamente, dar-nos-á uma condição notável como a seguir veremos.

A um ponto $P\equiv(y_i)$ corresponde uma reta p de equação

(xiii) $$x_1f_1(y_i)+x_2f_2(y_i)+x_3f_3(y_i)=0.$$

Uma reta que varia em tôrno de $P\equiv(y_i)$, terá a cónica correspondente

(xiv) $$\varphi=y_1f_1(x_i)+y_2f_2(x_i)+y_3f_3(x_i)=0$$

e esta terá a reta polar p' relativa a P, de equação

(xv) $$\frac{1}{2}\left[y_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right]=0.$$

Para ser polaridade deve p coincidir com p', isto é, as retas definidas por (xiii) e (xv) devem coincidir. Isto conduz às condições abaixo entre os coeficientes de f_1, f_2 e f_3, designada a transformação:

(xvi) $$\begin{cases} f_1=a_{111}x_1^2+a_{122}x_2^2+a_{133}x_3^2+2a_{112}x_1x_2+2a_{113}x_1x_3+2a_{123}x_2x_3 \\ f_2=a_{211}x_1^2+a_{222}x_2^2+a_{233}x_3^2+2a_{212}x_1x_2+2a_{213}x_1x_3+2a_{223}x_2x_3 \\ f_3=a_{311}x_1^2+a_{322}x_2^2+a_{333}x_3^2+2a_{312}x_1x_2+2a_{313}x_1x_3+2a_{323}x_2x_3. \end{cases}$$

Impondo as condições de que (xiii) e (xv) difiram por um fator ρ de proporcionalidade, vêem para $\rho=1$: (*)

(*) O outro valor de ρ é -2, o qual nos leva a uma transformação do tipo do sistema nulo, e neste todos os pontos do plano são auto-conjugados.

$$a_{112}=a_{211}=a_{121}$$
$$a_{122}=a_{212}=a_{221}$$
$$a_{133}=a_{313}=a_{331}$$
$$\text{(xvii)}\qquad a_{113}=a_{311}=a_{131}$$
$$a_{223}=a_{232}=a_{322}$$
$$a_{233}=a_{323}=a_{332}$$
$$a_{123}=a_{132}=a_{231}=a_{213}=a_{312}=a_{321}$$

A equação $f_i=\sum_{k,l} a_{ikl}x_kx_l=0$ $(i=1,2,3)$ tem os coeficientes com três índices.

Estas condições transformam $f_1dx_1+f_2dx_2+f_3dx_3=0$ em diferencial exata, isto é, conduzem às condições

$$\text{(xviii)}\qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_k}=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

Reciprocamente, se valerem estas últimas condições, os coeficientes virão ligados pela relação (xvii) e conseqüentemente coincidem as retas p e p'.

Observe-se que a condição de diferencial exata existe no caso da polaridade elementar ordinária que define as cónicas, pois sabemos que a condição para que a reciprocidade plana seja uma polaridade é que o determinante $|a_{ik}|\neq 0$ seja simétrico, o que equivale a impor que

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)dx_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)dx_2+(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)dx_3=0$$

seja diferencial exata.

As transformações recíprocas e quadráticas, no caso da polaridade, serão dadas pelas equações

$$(xix)\quad \begin{cases} \rho\xi_1 = a_{111}x_1^2+a_{122}x_2^2+a_{133}x_3^2+2a_{112}x_1x_2+2a_{113}x_1x_3+2a_{123}x_2x_3 \\ \rho\xi_2 = a_{211}x_1^2+a_{222}x_2^2+a_{233}x_3^2+2a_{212}x_1x_2+2a_{213}x_1x_3+2a_{223}x_2x_3 \\ \rho\xi_3 = a_{311}x_1^2+a_{322}x_2^2+a_{333}x_3^2+2a_{312}x_1x_2+2a_{313}x_1x_3+2a_{323}x_2x_3 \end{cases}$$

com as condições (xvii).

-§§§-

§2º-DEFINIÇÃO DE CÚBICA E PROPRIEDADES PRINCIPAIS.

4.Fixada uma polaridade quadrática plana, a nova definição de cúbica plana, tipo Staudtiano, a que aludimos no princípio (Introdução), é:

LUGAR DOS PONTOS AUTO-POLARES(ou auto-conjugados) DE UMA POLARIDADE QUADRÁTICA PLANA.

Antes de demonstrarmos geomètricamente que êsse lugar é uma curva plana de terceira ordem, procedamos à verificação analítica.

Para isto, imponhamos que o ponto $P\equiv(x_i)$ seja auto-polar, isto é, pertença à reta polar $p\equiv(\xi_i)$, o que equivale à equação

$$(xx)\quad \xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$$

entre as coordenadas.

Daí, imediatamente, vem, utilizando-se (xix):

$$(xxi)\quad a_{111}x_1^3+a_{222}x_2^3+a_{333}x_3^3+3a_{112}x_1^2x_2+3a_{113}x_1^2x_3+3a_{122}x_1x_2^2+ \\ +3a_{133}x_1x_3^2+3a_{233}x_2x_3^2+3a_{223}x_3x_2^2+6a_{123}x_1x_2x_3=0$$

e esta é a equação que define analìticamente uma cúbica plana qualquer.

Recìprocamente, dada analìticamente qualquer cúbica plana, é sempre possivel definir uma polaridade quadrática plana como a (xix), cujo lugar dos elementos auto-polares é a própria cúbica de que se trata.

Qual é a polaridade quadrática que [illegible]

Independentemente desta confirmação analítica, podemos provar geomètricamente que o lugar C dos pontos auto-polares, que foi definido pela nossa polaridade, tem a propriedade das cúbicas de ser encontrado por uma reta genérica em três pontos, distintos ou não.

Com efeito, suposta existente a referida polaridade, sabemos que a um ponto A corresponde uma cónica e a um ponto B desta corresponde uma reta b pelo ponto A (teorema de reciprocidade).

Considerada então uma reta genérica $\underline{r}$, a cada ponto P de $\underline{r}$, corresponde uma cónica γ que encontra $\underline{r}$ em dois pontos P' e P''.

Quando P percorre $\underline{r}$, a cónica γ descreve um feixe φ, cujas cónicas encontram $\underline{r}$ em pares de pontos.

Um ponto de $\underline{r}$, por exemplo P, para pertencer ao lugar C deve ser auto-polar, isto é, estar sôbre a reta polar $\underline{p}$, na polaridade quadrática. Mas, já vimos que esta reta polar é a polar de P respeito à cónica γ, na polaridade ordinária definida por γ. Então, evidentemente, o ponto P será auto-polar se pertencer à cónica γ.

Daí concluímos que para P ser auto-polar ou estar sôbre a curva C, deve coincidir com P' ou com P''.

Consideremos agora a correspondência que associa P ao par P' e P''. É fácil ver que <u>a correspondência é (1,2)</u>. Efetivamente, dado P, a cónica γ correspondente determina sôbre <u>r</u> dois pontos P' e P'', e, vice-versa, cada ponto P' de <u>r</u> pertence a uma e a uma só cónica do feixe φ, e então provém de um e um só ponto P. A correspondência é (1,2) e terá três pontos unidos de acôrdo com o princípio de Cremona-Chasles, salvo o caso em que tenha infinitos pontos unidos, hipótese em que naturalmente a reta é constituída de pontos auto-polares e faz parte da cúbica. Excluido êste caso, cada reta encontra a curva C em três pontos, reais ou em parte imaginários, distintos ou coincidentes, como acontece com as raízes de uma equação algébrica do terceiro grau. Isto justifica geomètricamente a denominação de curva de terceira ordem dada ao lugar C.

Podemos também definir a reta tangente à cúbica C_3. É suficiente para isto observar que se um ponto R está sôbre a reta polar <u>r</u>, absorve duas intersecções de <u>r</u> com a cúbica e por isso a <u>r</u> chamaremos RETA TANGENTE. De fato, pelo teorema de reciprocidade, a cada ponto M de

$\underline{r}$ corresponde uma cônica que passa sempre por R, e destarte quando M descreve $\underline{r}$, a cônica polar encontra $\underline{r}$ em dois pontos P′ e P″, um dos quais coincide sempre com R, e a R correspondem dois pontos R′ e R″ coincidentes em R mesmo. Então a correspondência (1,2) geral tem duas soluções coincidentes em R.

Vice-versa, se $\underline{r}$ fôr tangente à C_3, será auto-polar. Com efeito, $\underline{r}$ encontra a C_3 em dois pontos R e R′ coincidentes. Porém, R e R′ são auto-polares, e por isso estão sôbre as respectivas retas polares. R coincide com R′; portanto, as retas polares coincidem evidentemente com $\underline{r}$, e esta é auto-polar.

Daqui resulta que as retas tangentes ao lugar são tôdas e sòmente as retas auto-polares de nossa polaridade.

De modo quási idêntico, provaremos que <u>uma cúbica encontra uma cônica genérica em seis pontos, salvo o caso em que a cônica (eventualmente só uma sua parte) faça parte da cúbica.</u>

Dada uma cônica Ω genérica, a um ponto P de Ω corresponde uma reta polar $\underline{p}$, que é a reta polar da cônica Π correspondente de P. Esta reta encontra Ω em dois pontos P′ e P″. Inversamente, estando um ponto P′ de Ω sôbre a reta polar $\underline{p}$, a cônica polar de P′, Π', passa pelo polo de p, mas como π' encontra Ω em quatro pontos, a correspondência é (4,2), e, pelo princípio de Cremona-Chasles, o número de elementos unidos é seis. Mas êstes são os elementos auto-polares, pois P deve coincidir com P' e portanto estar sôbre π.(*)

No caso em que tôdos sejam auto-polares, a cônica faz parte da cúbica. A cônica pode ser decomposta em duas retas, e sòmente uma delas fazer parte da cúbica.

Outrossim, pode-se reconhecer que, se a cônica é a polar de um ponto P da cúbica, ela encontra a curva em P contado duas vêzes e em outros quatro pontos geralmente distintos de P.

Da aplicação do teorema de reciprocidade, decorrem tôdas as propriedades ordinárias da cúbica, considerada como envólucro.

Imediatamente, por ésta via, inferimos que <u>de um ponto P podem ser conduzidas seis tangentes à cúbica C_3</u>.

De fato, à cônica polar de P corresponde uma feixe de retas de centro P, e à cúbica, lugar de pontos,

---

(*)Como já demonstrámos que o lugar C é uma cúbica plana, poderíamos utilizar o teorema de Bézout, fazendo então uma demonstração analítica dessa propriedade.

corresponde a cúbica envólucro;aos seis pontos comuns às duas curvas correspondem pois seis tangentes à cúbica, pelo ponto P.

Se P está sôbre a cúbica, duas destas tangentes coincidem com a tangente t à curva (em P), e as outras quatro são em geral distintas de t.

Daqui tiramos a importante conseqüência:

<u>Uma cúbica geral é irracional</u>.

Tomemos um ponto P da C_3, e consideremos um feixe de retas com centro P. As retas de P determinam dois pontos de C_3, M e M', que, com a variação dos raios, se correspondem involutoriamente. Ora, os pontos duplos desta correspondência são quatro, que são os pontos de contacto das tangentes que saem de P, distintas da tangente t. Logo, sôbre a C_3 não vale o princípio de Cremona-Chasles, donde segue o teorema.

Para ser C_3 racional é necessário que, variando arbitràriamente P, duas das tangentes toquem a curva num ponto fixo D, que corresponde ao caso de D ponto duplo da C_3.

Daqui por diante, se quiséssemos construir a teoria das cúbicas por via geométrica, tiraríamos como conseqüência da irracionalidade de C_3, no caso geral, o teorema de Mac-Laurin, isto é:

a) sete pontos da C_3, ainda que infinitamente vizinhos, apresentam para as cúbicas sete condições independentes;

b) as cúbicas por oito pontos de uma C_3 passam por um nono ponto fixo;

c) se dos nove pontos comuns a duas cúbicas, tres estão em linha reta, os outros seis pertencem a uma cónica e vice-versa. (Ver, por exemplo, "Complementos de Geometria Projectiva" de Bertini).

Como é sabido, do teorema de Mac-Laurin, dimanam tôdas as conhecidas propriedades dos pontos tangenciais, dos pontos de inflexão e das importantes configurações dos pontos de inflexão, bem como as propriedades dos feixes sizigéticos.

Quanto ao importantíssimo teorema de Salmon, pode ser demonstrado por via elementar com o raciocínio empregado por Cremona.

Contudo, neste ligeiro trabalho, vamos fixar a atenção para a maneira de obter, com orientação nossa própria, o estudo dos pontos duplos e cúspides (pontos de reversão), das cúbicas, que surgem assim por um caminho puramente geométrico.

-§§§§§-

§ 3º-SINGULARIDADES DAS CÚBICAS

5. Examinaremos agora na nossa correspondência polar quadrática, o caso de indeterminação da reta correspondente a um ponto. É evidente que isto se dará se $\cancel{f_1, f_2}$ e f_3 se anularem simultâneamente, isto é, se $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$ para as coordenadas $(x_1\ x_2\ x_3)$ do ponto. Mas daí, evidentemente a rêde de cônicas tem pontos-bases. Êstes são um, dois, três ou infinitos (correspondendo ao caso em que as três cônicas tenham uma reta comum).

Vamos estudar as várias hipóteses a respeitos dos pontos-bases, considerando cada um como formado de infinitas direções, ou antes substituindo-os pelos pontos infinitamente vizinhos da sua vizinhança de primeira ordem.

a) Suponhamos que a rêde tenha <u>um só ponto-base</u>, que situaremos no vértice $A_3 \equiv (0\ 0\ 1)$ do triângulo fundamental. As equações da transformação serão:

$$(\mathrm{xxii})\quad \begin{cases} \rho\xi_1 = a_{111}x_1^2+a_{122}x_2^2+2a_{112}x_1x_2+2a_{113}x_1x_3+2a_{123}x_2x_3 \\ \rho\xi_2 = a_{112}x_1^2+a_{222}x_2^2+2a_{122}x_1x_2+2a_{123}x_1x_3+2a_{223}x_2x_3 \\ \rho\xi_3 = a_{113}x_1^2+a_{223}x_2^2+2a_{123}x_1x_2 \end{cases}$$

Uma reta p por $A_3 \equiv (0\ 0\ 1)$ terá equação $x_1-\lambda x_2=0$ e seus pontos serão de coordenadas $(\varepsilon\lambda, \varepsilon, 1)$. A reta polar do ponto $(\varepsilon\lambda, \varepsilon, 1)$ tem para coordenadas

$(a_{111}\varepsilon\lambda^2 + a_{122}\varepsilon + 2a_{112}\varepsilon\lambda + 2a_{113}\lambda + 2a_{123},\ a_{112}\varepsilon\lambda^2 + a_{222}\varepsilon +$
$+ 2a_{122}\varepsilon\lambda + 2a_{123}\lambda + 2a_{223},\ a_{113}\varepsilon\lambda^2 + a_{223}\varepsilon + 2a_{123}\varepsilon\lambda).$

Achamos a reta correspondente a A_3 (considerado como uma direção **p**) fazendo $\varepsilon \to 0$, o que dá a reta **p**$'$ de coordenadas $(a_{113}\lambda + a_{123},\ a_{123}\lambda + a_{223},\ 0)$ que evidentemente passa por A_3. A equação de **p**$'$ é então

(xxiii) $\qquad (a_{113}\lambda + a_{123})x_1 + (a_{123}\lambda + a_{223})x_2 = 0$

A direção da reta **p** tem coordenada projectiva λ e a reta **p**$'$ correspondente tem coordenada projectiva

(xxiv) $\qquad \mu = -\dfrac{a_{123}\lambda + a_{223}}{a_{113}\lambda + a_{123}}$

e portanto as retas **p** e **p**$'$ se correspondem numa projectividade não degenerada se

(xxv) $\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{123} & a_{223} \\ a_{113} & a_{123} \end{vmatrix} \neq 0$

A equação da projectividade entre **p** e **p**$'$ é

(xxvi) $\qquad a_{113}\lambda\mu + a_{123}(\mu + \lambda) + a_{223} = 0$

o que mostra tratar-se de uma involução no feixe de centro A_3.

Falta para demonstração sintética

Substituido então o ponto A_3 pela vizinhança das direções do feixe de centro A_3, quando um ponto P se avizinha de A_3 numa direção **p**, a reta correspondente é **p**$'$

do mesmo feixe; e se o ponto se avizinha de A_3 na direção p', a reta correspondente é p. Os raios unidos da involução serão definidos pelas coordenadas projectivas, raízes da equação

$$\text{(xxvii)} \qquad a_{113}\lambda^2 + 2\lambda a_{123} + a_{223} = 0,$$

isto é, por $\lambda = \dfrac{-a_{123} \pm \sqrt{a_{123}^2 - a_{113}a_{223}}}{a_{113}}$. Estas raízes são distintas, reais ou imaginárias, conforme seja $\Delta \gtrless 0$ (xxv).

Na vizinhança de A_3, a cada direção p corresponde pois uma p'; os dois elementos unidos nessa correspondência são as direções unidas, que correspondem aos dois pontos auto-polares vi[zin]hos de A_3, isto é, às duas retas tangentes à cúbica no [po]nto A_3, as quais serão distintas se a involução fôr geral.

Se $\Delta = 0$ (xxv), a involução é, como sabemos, degenerada, e então há um só raio unido e a cúbica tem um só ponto na vizinhança de A_3.

Vê-se que uma reta unida não encontra a cúbica em outro ponto, salvo se faz parte dela.

Conseqüentemente diremos: se $\Delta > 0$ a cúbica é nodal; se $\Delta < 0$, é acnodal ou com ponto isolado; se $\Delta = 0$, é cuspidada ou com ponto de reversão.

Um caso que necessita ~~de~~ ser considerado particularmente é o de $a_{123} = a_{223} = a_{113} = 0$, isto é, a equação da projectividade (xxvi) com todos os coeficientes nulos e, por isso com a projectividade completamente indeterminada.

não coordenadas da reta
indeterminada, fica ainda [illegible]

Serão estas as fórmulas de transformação:

$$
\text{(xxviii)} \qquad \begin{cases} r\rho_1 = a_{111}x_1^2 + a_{122}x_2^2 + 2a_{112}x_1x_2 = f_1 \\ r\rho_2 = a_{112}x_1^2 + a_{222}x_2^2 + 2a_{122}x_1x_2 = f_2 \\ r\rho_3 = 0 \end{cases}
$$

$f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ são dois pares de retas por A_3 (0 0 1).

A cúbica terá a equação

$$
\text{(xxix)} \qquad a_{111}x_1^3 + a_{222}x_2^3 + 3a_{122}x_1x_2^2 + 3a_{112}x_1^2x_2 = 0
$$

ou

$$
a_{111}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + 3a_{112}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 3a_{122}\cdot\frac{x_1}{x_2} + a_{222} = 0 .
$$

Temos aqui, supondo $a_{111} \neq 0$,* três raízes k_1, k_2 e k_3 para $\dfrac{x_1}{x_2}$ e a equação fica

$$
\text{(xxx)} \qquad a_{111}\left(\frac{x_1}{x_2} - k_1\right)\left(\frac{x_1}{x_2} - k_2\right)\left(\frac{x_1}{x_2} - k_3\right) = 0,
$$

isto é, a cúbica se decompõe nas três retas por A_3

$$
x_1 - k_1x_2 = 0, \quad x_1 - k_2x_2 = 0, \quad x_1 - k_3x_2 = 0
$$

distintas ou coincidentes.

A ~~cônica~~ cúbica tem em A_3 um ponto triplo. (*)

Note-se que a projectividade (xxvi) não pode ser a identidade, porque esta só se tem no caso em que $a_{113} = a_{223} = 0$ e $-a_{123} = a_{123}$, mas isto traz como conseqüência $a_{123} = 0$, exatamente como o caso em que a polaridade é completamente indeterminada.

isto é uma proprie-dade de qualquer involução!

Assim, também, a noção de ponto triplo mani-

(*) A primeira polar e a reta polar são indeterminadas.

* se $a_{111} = 0$, há uma raiz $\frac{x_1}{x_2} = \infty$, e uma das retas é $x_2 = 0$.

festa-se elementarmente pela definição que demos.

b) Estudemos agora o caso em que existem <u>dois pontos-bases</u>, na rêde de cônicas. Colocados êstes pontos nos vértices $A_2\equiv(0\ 1\ 0)$ e $A_3\equiv(0\ 0\ 1)$ do triângulo fundamental, as equações da polaridade serão

$$\text{(xxxi)}\qquad \begin{cases} \nu\xi_1 = a_{111}x_1^2+2a_{112}x_1x_2+2a_{113}x_1x_3+2a_{123}x_2x_3 \\ \nu\xi_2 = a_{112}x_1^2+ \qquad\qquad +2a_{123}x_1x_3 \\ \nu\xi_3 = a_{113}x_1^2+2a_{123}x_1x_2 \end{cases}$$

Como no caso anterior, avizinhando-se com um ponto $(\varepsilon\lambda, \varepsilon, 1)$ de A_3, chega-se à involução

$$\text{(xxxii)}\qquad \mu = -\frac{a_{123}\lambda}{a_{113}\lambda+a_{123}}$$

que possue os raios unidos com coordenadas projectivas $\lambda=0$ e $\lambda=-\frac{2a_{123}}{a_{113}}$, e portanto um deles é a reta $x_1=0$. (*) Estas duas retas, com idêntico raciocínio de (a) são as que chamamos tangentes à cúbica. Também pode ser comprovado êste fato com a procura das tangentes à cúbica em A_3, isto é, tomada a equação (xxix), a cônica polar é

$$\text{(xxxiii)}\qquad a_{113}x_1^2+2a_{123}x_1x_2=0$$

ou

$$x_1(a_{113}x_1+2a_{123}x_2)=0,$$

(*) Notando-se que ξ_2 e ξ_3 possuem o fator x_1, é claro que a equação da cúbica é: $x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3=x_1(a_{111}x_1^2+3a_{112}x_2x_1+3a_{113}x_1x_3+6a_{123}x_2x_3)=0$, isto é, a reta $x_1=0$ faz parte da cúbica.

o que nos dá $x_1=0$ e $\frac{x_1}{x_2}=-\frac{2a_{123}}{a_{113}}$. A cúbica é formada por uma cónica e uma reta A_2A_3 $(x_1=0)$. (")

Com raciocínio análogo em A_2 (0 1 0), chega-se à involução $\mu=-\frac{a_{123}\lambda}{a_{112}\lambda+a_{123}}$ (não degenerada se $a_{123}\neq 0$), de equação

(xxxiv) $\quad a_{112}\lambda\mu+a_{123}(\lambda+\mu)=0$,

Os raios unidos são os de coordenadas $\lambda=0$ e $\lambda=-\frac{2a_{123}}{a_{112}}$. Estas são as tangentes à cúbica, sendo uma delas $x_1=0$, que faz parte da cúbica.

c) Imaginemos que haja <u>três pontos-bases</u>. As equações serão, colocados êsses pontos nos vértices do triângulo fundamental,

$$\text{(xxxv)}\qquad \begin{cases} \nu\xi_1=x_2x_3 \\ \nu\xi_2=x_1x_3 \\ \nu\xi_3=x_1x_2 \end{cases}$$

e a cúbica será de equação

(xxxvi) $\quad x_1x_2x_3=0$,

(") Se $a_{123}=0$, a projectividade é degenerada, e a cúbica contém a reta $x_1=0$ contada duas vêzes, pois sua equação se torna $a_{111}x_1^3+3a_{112}x_1^2x_2+3a_{113}x_1^2x_3=0$ ou $x_1^2(a_{111}x_1+3a_{112}x_2+3a_{113}x_3)=0$, isto é, duas vêzes $x_1=0$ e mais uma reta resídua. Será a reta $x_1=0$ contada três vêzes, se $a_{112}=a_{113}=0$, mas então a projectividade terá todos os coeficientes nulos.

isto é, três retas distintas.

Neste caso, a reta r por $A_3 \equiv (0\ 0\ 1)$ é de equação $x_1 - \lambda x_2 = 0$ e seus pontos serão $(\varepsilon\lambda, \varepsilon, 1)$. A reta r' correspondente terá coordenadas $(1, \lambda, \varepsilon\lambda)$, e quando $\varepsilon \to 0$, isto é, o ponto tende a A_3, r' tende a $x_1 + \lambda x_2 = 0$ e a projectividade involutória no feixe é dada por

(xxxvii) $\mu = -\lambda$

e não é degenerada, pois $\Delta = -1 \neq 0$. Os elementos unidos são dados por $\lambda = \mu$ em $\lambda + \mu = 0$, isto é, por $2\lambda = 0$, que, como equação do segundo grau, tem as raízes $\lambda = 0$ e $\lambda = \infty$ e são as retas $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Igual raciocínio pode ser empregado com A_2 e A_1.

d) A rêde de cónicas pode possuir uma reta fixa r: é fácil ver que dá lugar a uma cúbica decomposta que pode ser a mais geral. Tendo a rêde uma reta comum de equação $x_1 = 0$, a transformação será do tipo:

$$\begin{cases} \rho\xi_1 = x_1(a_{111}x_1 + 2a_{112}x_2 + 2a_{113}x_3) \\ \rho\xi_2 = x_1(a_{211}x_1 + 2a_{212}x_2 + 2a_{213}x_3) \\ \rho\xi_3 = x_1(a_{311}x_1 + 2a_{312}x_2 + 2a_{313}x_3) \end{cases}$$

e a cúbica terá a equação $x_1^2(a_{111}x_1 + 2a_{112}x_2 + 2a_{113}x_3) + x_1x_2 \cdot (a_{211}x_1 + 2a_{212}x_2 + 2a_{213}x_3) + x_1x_3(a_{311}x_1 + 2a_{312}x_2 + 2a_{313}x_3) = 0$ e será decomposta na reta $x_1 = 0$ e numa cónica geral ou não, que terá por equação

$$x_1(a_{111}x_1 + 2a_{112}x_2 + 2a_{113}x_3) + x_2(a_{211}x_1 + 2a_{212}x_2 + 2a_{213}x_3) + \\ + x_3(a_{311}x_1 + 2a_{312}x_2 + 2a_{313}x_3) = 0.$$

Resumindo, poderemos formar o seguinte quadro:

PONTOS-BASES	INVOLUÇÃO	Δ	TIPO	SINGULARIDADE
um	geral	$\Delta>0$	C_3 nodal	ponto nodal
		$\Delta<0$	C_3 acnodal	ponto isolado
	degenerada	$\Delta=0$	C_3 cuspidada	cúspide
	identidade ou indeterminada	$\Delta=0$	três retas	um ponto triplo ou infinitos
dois	geral	$\Delta\neq0$	uma reta e uma cônica	dois ou três pontos duplos
	degenerada	$\Delta=0$	reta dupla e uma reta residua	infinitos pontos duplos e um triplo
	indeterminada	$\Delta=0$	reta tripla	infinitos pontos triplos
três	geral	$\Delta\neq0$	três retas distintas	três pontos duplos
reta fixa	geral	$\Delta\neq0$	uma reta e uma cônica	dois pontos duplos ou três

§ 4º-TEOREMA DE HERMITE

Tal teorema responde afirmativamente à pergunta: Qualquer rêde de cónicas é rêde de primeira polar de uma cúbica ?

A demonstração original de Hermite encontra-se na publicação "Oeuvres de Charles Hermite"-tômo II-pag. 100.

Interessantes considerações hiperespaciais fazem prever o teorema, conforme se observa na Teoria Geometrica delle Equazione e delle Funzione Algebriche (F. Enriques e O. Chisini-II volume-pag. 228). Resume-se isto no fato de que as cúbicas do plano são ∞^9 e os planos de um S_5 são tambem ∞^9, quando se representam as cónicas por pontos dêsse espaço.

A nossa demonstração consiste ùnicamente em verificar que qualquer transformação recíproca e quadrática plana, mediante uma oportuna projectividade aplicada às retas correspondentes, satisfaz à condição de diferencial exata (xviii).

Seja então a transformação recíproca e quadrática T de equações

$$\text{(xxxviii)} \quad \begin{cases} \rho\xi_1 = f_1 \\ \rho\xi_2 = f_2 \\ \rho\xi_3 = f_3 \end{cases}$$

e consideremos a projectividade ω de equações

$$
\text{(xxxix)} \qquad \begin{cases} \sigma\eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 \\ \sigma\eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 \\ \sigma\eta_3 = a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 \end{cases}
$$

onde $|a_{ik}| \neq 0$. Efetuado o produto da transformação T pela projectividade ω, virá:

$$
\text{(xL)} \qquad \begin{cases} \rho\sigma\eta_1 = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + a_{13}f_3 = \varphi_1 \\ \rho\sigma\eta_2 = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + a_{23}f_3 = \varphi_2 \\ \rho\sigma\eta_3 = a_{31}f_1 + a_{32}f_2 + a_{33}f_3 = \varphi_3 . \end{cases}
$$

Considerados incógnitas os coeficientes a_{ik}, podemos impor as condições de diferencial exata às funções φ.

Desenvolvidas estas condições e igualados os coeficientes veêm nove equações com as nove incógnitas a_{11}, a_{12}......a_{33}.

$$
\text{(xL i)} \begin{cases} a_{11}a_{122} + a_{12}a_{212} + a_{13}a_{312} - a_{21}a_{111} - a_{22}a_{211} - a_{23}a_{311} = 0 \\ a_{11}a_{122} + a_{12}a_{222} + a_{13}a_{312} - a_{21}a_{112} - a_{22}a_{212} - a_{23}a_{312} = 0 \\ a_{11}a_{123} + a_{12}a_{223} + a_{13}a_{323} - a_{21}a_{113} - a_{22}a_{213} - a_{23}a_{313} = 0 \\ a_{11}a_{113} + a_{12}a_{213} + a_{13}a_{313} - a_{31}a_{111} - a_{32}a_{211} - a_{33}a_{311} = 0 \\ a_{11}a_{123} + a_{12}a_{223} + a_{13}a_{323} - a_{31}a_{112} - a_{32}a_{212} - a_{33}a_{312} = 0 \\ a_{11}a_{133} + a_{12}a_{233} + a_{13}a_{333} - a_{31}a_{113} - a_{32}a_{213} - a_{33}a_{312} = 0 \\ a_{21}a_{113} + a_{22}a_{213} + a_{23}a_{313} - a_{31}a_{112} - a_{32}a_{212} - a_{33}a_{312} = 0 \\ a_{21}a_{123} + a_{22}a_{223} + a_{23}a_{323} - a_{31}a_{122} - a_{32}a_{222} - a_{33}a_{322} = 0 \\ a_{21}a_{133} + a_{22}a_{233} + a_{23}a_{333} - a_{31}a_{123} - a_{32}a_{223} - a_{33}a_{323} = 0 \end{cases}
$$

Haverá sempre soluções não tôdas nulas, se o determinante dos coeficientes for nulo, e é o que se verifica sempre.

O determinante dos coeficientes é:

$$
(\text{xLii}) \quad \begin{vmatrix}
a_{112} & a_{212} & a_{312} & -a_{311} & -a_{211} & -a_{311} & 0 & 0 & 0 \\
a_{122} & a_{222} & a_{322} & -a_{112} & -a_{212} & -a_{312} & 0 & 0 & 0 \\
a_{123} & a_{223} & a_{323} & -a_{113} & -a_{213} & -a_{313} & 0 & 0 & 0 \\
a_{113} & a_{213} & a_{313} & 0 & 0 & 0 & -a_{111} & -a_{211} & -a_{311} \\
a_{123} & a_{223} & a_{323} & 0\;0 & 0 & 0 & -a_{112} & -a_{212} & -a_{312} \\
a_{133} & a_{233} & a_{333} & 0 & 0 & 0 & -a_{113} & -a_{213} & -a_{313} \\
0 & 0 & 0 & a_{113} & a_{213} & a_{313} & -a_{112} & -a_{212} & -a_{312} \\
0 & 0 & 0 & a_{123} & a_{223} & a_{323} & -a_{122} & -a_{222} & -a_{322} \\
0 & 0 & 0 & a_{133} & a_{233} & a_{333} & -a_{123} & -a_{223} & -a_{323}
\end{vmatrix}
$$

Somando-se a terceira linha coma sétima, teremos a terceira igual à quinta e o determinante é evidentemente sempre nulo.

Assim de modo bastante elementar fica demonstrada esta interessante proposição.

-§§§§-

§5º-DETERMINANTE CÚBICO

É sabido que a dificuldade do uso do determinante cúbico está nos três valores que surgem conforme o índice que se deixa fixo nas permutações. Entretanto, é curioso verificar que, se ligarmos um determinante cúbico aos coeficientes da equação da nossa cúbica, como veremos adiante, por causa da condição de diferencial exata apresenta o referido determinante uma simetria que lhe dá um único valor em lugar dos três que em geral se manifestam.

Dada a equação da cúbica

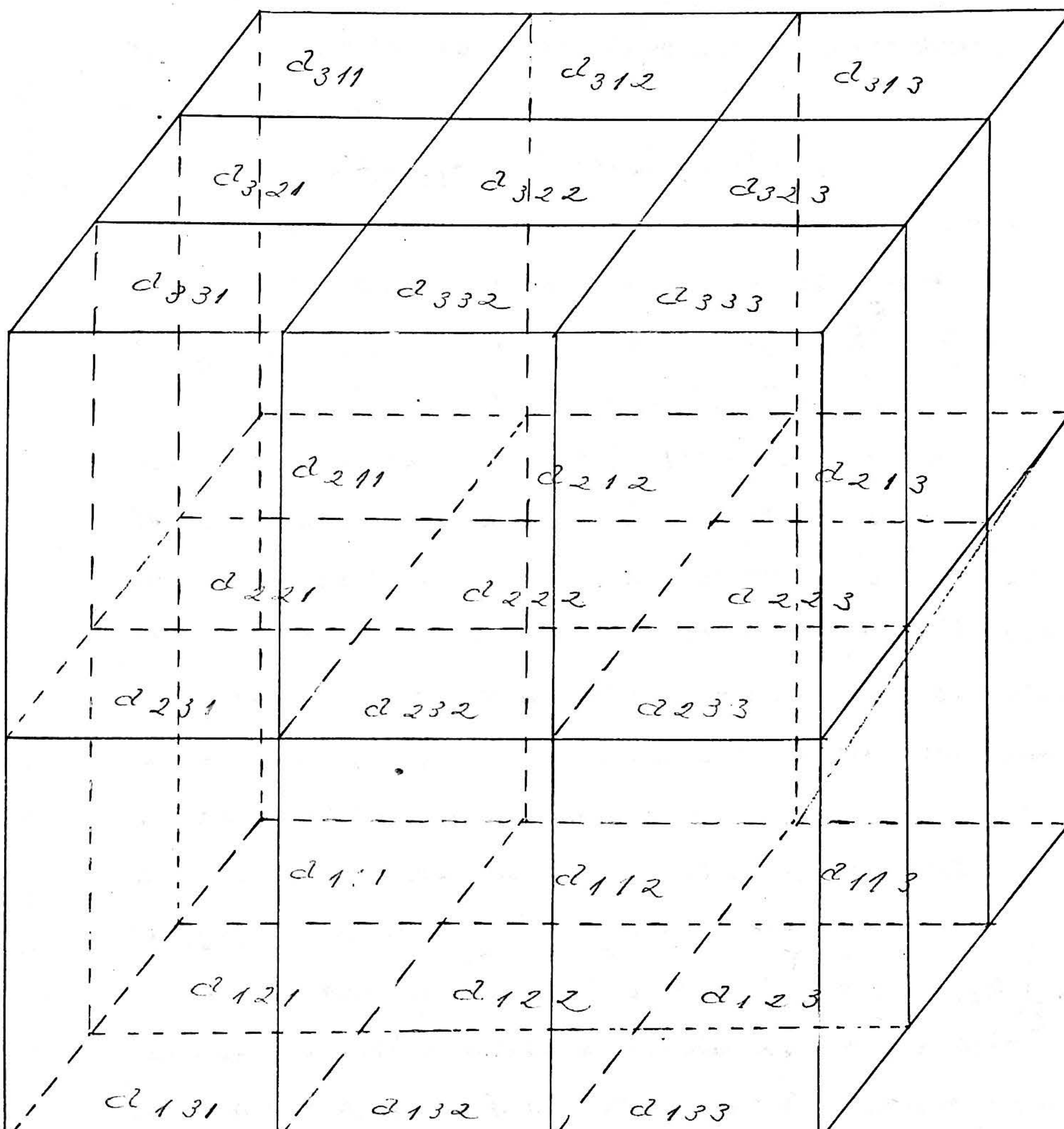
$$(\mathrm{xLiii})\quad a_{111}x_1^3+a_{222}x_2^3+a_{333}x_3^3+3a_{112}x_1^2x_2+3a_{113}x_1^2x_3+3a_{122}x_1x_2^2+$$
$$+3a_{133}x_1x_3^3+3a_{233}x_2x_3^3+3a_{223}x_2^2x_3+6a_{123}x_1x_2x_3=0,$$

constrói-se o determinante do seguinte modo:

Escrevem-se nos três planos horizontais (as duas bases e a secção reta horizontal pelo centro) de um cubo os coeficientes, levando em conta os primeiros índices, isto é, colocando no primeiro plano (inferior) os que teêm primeiro índice 1, no segundo plano (médio) os de índice 2, e no último (superior), 3, com as condições (xviii). A disposição é então a que se vê na figura da página seguinte, desenhado o cubo em perspectiva cavaleira.

O cálculo do valor D dêste determinante pode ser efetuado por uma espécie de regra de Sarrus tridimensional, o que se verifica fàcilmente.

Contrariamente à analogia que parece haver com as cónicas, a anulação dêste determinante não está ligada às singularidades da curva, o que se demonstra com um exemplo.



a_{311}
a_{312}
a_{313}
a_{321}
a_{322}
a_{323}
a_{331}
a_{332}
a_{333}
a_{211}
a_{212}
a_{213}
a_{221}
a_{222}
a_{223}
a_{231}
a_{232}
a_{233}
a_{111}
a_{112}
a_{113}
a_{121}
a_{122}
a_{123}
a_{131}
a_{132}
a_{133}

Seja a cúbica

(xLiv) $$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=0,$$

que tem um ponto duplo. Temos $a_{111}=1, a_{222}=1, a_{333}=1,$ $a_{123}=-\frac{1}{2}$ e os demais nulos. Construído o determinante cúbico que vale

(xLv) $$D=a_{111}a_{222}a_{333}+2a_{123}^2=\frac{3}{4}\neq 0,$$

nota-se que é diferente de zero. No entanto, a cúbica tem singularidade, porque é do tipo geral $x_1^3+x_2^3+x_3^3-6\lambda x_1x_2x_3=0$, onde λ satisfaz à equação $8\lambda^3-1=0$.

Não vale também uma relação do tipo $D'=B^3D$, quando se faz uma substituição linear na equação da cúbica, salvo se esta mantiver a simetria, nos produtos sucessivos de D por B, o que nem sempre se dá. O produto de um determinante cúbico D por um determinante plano (comum) B é um novo determinante cúbico D', determinante êste cujos planos são produtos ordinários dos planos de D por B. Embora D seja simétrico, o novo determinante BD em geral não o é, e então tem três valores $(BD)_1, (BD)_2$ e $(BD)_3$. O produto sucessivo por B terá ainda três valores $\left[(BD)_iB\right]_1$, $\left[(BD)_iB\right]_2$ e $\left[(BD)_iB\right]_3$, isto é, não será simétrico. Entretanto, num terceiro produto por B, volta a simetria, isto é, o determinante final terá um só valor D'. Não vale em geral $D'=B^3D$, isto é, uma substituição linear de módulo um, na equação da cúbica, altera o valor D e êste não é invariante.

É contudo provável, apesar de ser estudo ainda por fazer, que no caso de uma quártica plana, venha uma relação do tipo $D'=B^4D$, sendo D um determinante a quatro dimensões. Possível é então que D seja um invariante unimodular nas curvas de ordem par. Entretanto, é assunto que pretendemos estudar em outra oportunidade, de modo que estas considerações finais não valem por proposições confirmadas.

-§§§§-

OBRAS CONSULTADAS

Annales Scientifiques de l'École Normale de Paris-1864 a 1938.

Annals of Mathematics-1940 a 1942.

Acta Mathematica-volumes 1 a 71.

American Journal of Mathematics-1941 a 1942.

Albanese-Lezioni di Geometria Proiettiva-3a. edizione-1934.

Bertini-Complementi di Geometria Proiettiva-1927.

B. Segre-Lezioni di Geometria Proiettiva e Descritiva-1932.

Castelnuovo-Lezioni di Geometria Analitica-6a.edizione-1924.

Chisini-Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva-1931.

Ciani-Lezioni di Geometria Proiettiva e Analitica-1922.

Cremona-Opere Matematiche-Milão-1914.

Clebsch-Leçons de la Géométrie-1903.

Coolidge-A Treatise on Algebraic Plane Curves-1931.

Doehlemann-Projektive Geometrie-fünfte Auflage.

Del Pezzo-Principi di Geometria Proiettiva-1920.

Duke Mathematical Journla-1935 a 1942.

Enriques-Lezioni di Geometria Proiettiva-4a. edizione.

Enriques e Chisini-Teoria Geometrica delle Equazione e delle Funzione Algebriche.

Enciklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Fano-Complementi di Geometria.

Hermite-Oeuvres.

Hilton-Plane Algebraic Curves-1932.

Juel-Vorlesungen über Projektive Geometrie-1934.

Mathematischen Annalen-1869 a 1934.

Mathematical Reviews-1940 a 1942.

Niewenglowski-Cours de Géométrie Analytique-1911.

Pascal-I Determinanti-1923.

Severi-Geometria Proiettiva-1926.

Salmon-Traité de Géométrie Analytique-1897-tradução.

Reye-Leçons sur la Géométrie-1881.

Rey Pastor-Analisis Algebraico.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo-1889 a 1936.

Tresse & Thybaut-Cours de Géométrie Analytique-1913.

Veblen and Young-Projective Geometry-1916.

Yahrbuch über der Fortschritte der Mathematik-1868 a 1937.

Zentralblatt für Mathematik-1931 a 1939.

RESUMO E CONCLUSÕES DA TESE
"SÔBRE UMA NOVA DEFINIÇÃO DE CÚBICA PLANA"

As curvas planas de terceira ordem podem ser definidas analítica ou geomètricamente. Por via geométrica, a definição conhecida é do tipo Steineriano.

A falta de uma definição, tipo Staudtiano, foi o motivo que levou o prof. Giacomo Albanese a sugerir-nos uma pesquisa nesse sentido. A razão desta tese é a exposição dos resultados conseguidos a êsse respeito.

Assim obtivemos uma definição das cúbicas, como lugar dos pontos auto-conjugados de uma polaridade quadrática plana (reciprocidade involutória quadrática plana). A seguir as primeiras propriedades foram obtidas elementarmente por êsse caminho.

Conseguimos, também, um interessante processo geométrico para exame das singularidades das cúbicas.

Outrossim, reputamos bastante proveitosa a demonstração fácil e elementar do conhecido teorema de Hermite, sôbre as cúbicas.

Finalmente, ligamos um determinante cúbico simétrico (um só valor) aos coeficientes da equação da curva de terceira ordem. Verificamos que a anulação dêste determinante não está ligada às singularidades da curva, como poderia parecer numa rápida analogia com as cônicas.

A teoria assim construída pode ser estendida às curvas planas de ordem superior a três. Porém, nesta tese, não procuramos estudar esta possibilidade, limitando-nos ùnicamente ao caso das curvas de terceira ordem.