"Sobre a regularidade dos funcionaes definidos no campo das funções localmente analiticas"

Tése de doutoramento

São Paulo
1942
(Novembro)

- SÔBRE A REGULARIDADE DOS FUNCIONAIS DEFINIDOS NO CAMPO DAS FUNÇÕES LOCALMENTE ANALÍTICAS -

Tese de doutoramento apresentada por

CANDIDO LIMA DA SILVA DIAS.

1942

(Cadeira de Análise Matemática).

SOBRE A REGULARIDADE DOS FUNCIONAIS DEFINIDOS NO CAMPO DAS FUNÇÕES LOCALMENTE ANALÍTICAS.

INTRODUÇÃO

A tese que apresentamos se ocupa com o conceito e os fundamentos da teoria dos funcionais analíticos e particularmente dos funcionais analíticos lineares, teoria esta, que, como é sabido, foi criada e desenvolvida sistemáticamente a partir de 1925 pelo Prof. L. Fantappiè[1], numa série de notas e memórias.

O ponto de partida das considerações próprias que apresentamos é a seguinte propriedade que podemos chamar de continuidade, segundo sequências uniformemente ~~contínuas~~ CONVERGENTES de funções analíticas, dos funcionais analíticos lineares:[2]

"se temos uma série de funções analíticas, cada uma das quais definida e regular numa região R, que contem o conjunto fechado A, no qual a indicatriz u(t) do funcional linear F não é definido e, se a série é uniformemente convergente em R, então a soma da série pertence ao campo de definição do funcional e o valor assumido pelo funcional, em correspondência a essa série, é igual à soma da série formada com os valores que o funcional assume para cada uma das funções da série."

Esta propriedade foi demonstrada pelo Prof. L. Fantappiè utilizando a fórmula fundamental dos funcionais analíticos lineares. Posteriormente a mesma propriedade, enunciada sob forma de sucessão, foi demonstrada diretamente, isto é: a partir exclusivamente do conceito de funcional analítico linear, numa nota[3] de O. Teichmüller.

Esta última nota sugeriu-nos a possibilidade de tomar a referida propriedade, como base de uma definição de regularidade dos funcionais definidos no campo das funções localmente analíticas, o que fazemos na segunda parte desta tése.

Introduzida esta nova definição de regularidade do funcional, modificamos o conceito de linearidade do funcional, introduzindo para esse fim um conceito de "aditividade" que chamamos "aditividade complexa".

Será então linear, segundo o nosso modo de apresentar, o funcional que é regular, no sentido que introduzimos e que goza da propriedade de "aditividade" complexa.

Demonstramos em seguida que esses funcionais lineares são analíticos lineares no sentido de Fantappiè.

Além de julgarmos mais natural a definição de regularidade como a apresentamos, acreditamos que ela seja teòricamente oportuna porque permite a análise da primitiva regularidade de Fantappiè, em regularidade por continuidade segundo sequências e aditividade complexa. Outra vantagem é a expontaneidade, com que é deduzida então, a fórmula fundamental dos funcionais lineares o que fazemos no fim deste trabalho.

Para maior clareza e sobretudo para o enquadramento, na teoria dos funcionais analíticos, das considerações que fazemos, acreditamos oportuno expôr inicialmente, o mais breve possível, as noções e os resultados fundamentais da teoria dos funcionais analíticos, na parte que nos interessa.

Lembramos em primeiro lugar que nos ocupamos exclusivamente com os funcionais chamados puros, que são aqueles que exprimem uma correspondência, entre as funções de um certo campo funcional e os números de um determinado conjunto numérico que aqui será sempre o conjunto dos números complexos. Recordamos outrossim, que consideramos sómente campos funcionais, compostos de funções de uma única variável.

porque?

Ia. PARTE

1.1. CAMPO DE DEFINIÇÃO DO FUNCIONAL ANALÍTICO

Como argumentos dos funcionais analíticos, ou variável independente do funcional, tomamos as funções localmente analíticas que, como é sabido, são aquelas funções de variável complexa, definidas e regulares (holomorfas), numa região[4] da esfera complexa.

Para precisar o modo de dependência do funcional, em relação à função-argumento, convem lembrar o conceito de prolongamento de uma função localmente analítica $y(t)$, definida numa região R, Dizemos que uma função $\bar{y}(t)$, localmente analítica definida numa região $\bar{R}$, que contem R, é prolongamento de $y(t)$, se nos pontos de R temos $y(t) = \bar{y}(t)$.

Precizando o modo de dependência que referimos, impomos que um funcional F, definido para a função $y(t)$, o que indicaremos daquí por diante sempre com a notação $F_t\left[y(t)\right]$, deve estar tambem definido para qualquer função localmente analítica que seja prolongamento de $y(t)$, e além disso, deve assumir, para qualquer dessas funções prolongamento, o mesmo valor que para $y(t)$.

Desejando continuar o estudo dos funcionais que dependem de funções localmente analíticas, é natural inspirarmo-nos no estudo das funções de variável complexa e portanto procurar uma condição de regularidade dêsses funcionais. Para precisar este conceito, devemos coordenar entre si, de alguma forma, as funções localmente analíticas, donde a introdução de um oportuno conceito de entôrno de uma função localmente analítica.

1.2. ENTORNO LINEAR DE UMA FUNÇÃO LOCALMENTE ANALÍTICA E REGIÃO FUNCIONAL LINEAR.

Expomos o conceito de entôrno linear de uma função localmente analítica introduzida pelo Prof. O. Catunda,[5] que simplifica a anteriormente utilizada pelo Prof. Fantappiè.

Dada uma função localmente analítica $y_0(t)$, definida e regular numa região R da esféra complexa, chamamos entôrno linear (T) de $y_0(t)$, o conjunto de todas as funções localmente analíticas $y(t)$ que são regulares num conjunto fechado T, contido em R.

Deixamos de lado por não nos interessar diretamente, a noção de entôrno restrito (T, σ), assim como a ~~identificação~~ caracterização topológica do entôrno linear (T), ambos podendo ser encontrados na citada nota do Prof. O. Catunda.

Seguindo, em parte, a referida nota, chamamos região funcional linear um conjunto H de funções localmente analíticas, tal que:

1) Dada uma função $y(t)$ de H, existe em H todo um entôrno linear de $y(t)$;

2) Dadas duas funções quaisquer de H, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, existe e está em H, tambem a função soma $y_1(t)+y_2(t)$ (o que exige que a intersecção das regiões de definição de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ não seja vazia).

A terceira propriedade que se introduz, para definir uma região linear, não nos interessando no que segue, será omotida. Utilizamos, portanto, uma noção de região funcional linear, mais geral que a introduzida pelo Prof. O. Catunda.

Os conjuntos de funções que verificam sómente a condição 1), serão chamados simplesmente regiões funcionais.

Baseados nos conceitos de entôrno linear de uma função localmente analítica e de região funcional linear, o Prof. L.

Fantappiè demonstrou o seguinte teorema (6) que é fundamental:

"A tôda região funcional linear H está associado um conjunto fechado A da esfera complexa, de tal modo que a região H é constituida pelas funções, lo~~cla~~calmente analíticas, regulares em A e sómente por tais funções".

Com as noções que acabamos de introduzir podemos precisar o campo de definição dos funcionais, que estudamos, impondo que ele seja uma região funcional.

1.3. <u>CONCEITO DE LINHA ANALITICA E DE FUNCIONAL LOCALMENTE ANALITICO</u>.

Isto já não é espaço abstrato.

Chamamos ao <u>espaço abstrato</u> constituido pelas funções localmente analíticas, espaço analítico C. Vamos introduzir para este espaço um conceito de linha correspondente ao mesmo conceito, em relação ao espaço ordinário.

Chama-se linha do espaço analítico C, ou mais simplesmente linha analítica, um conjunto de pontos y(t) do espaço analítico C, dependente analíticamente de um parâmetro α , ou mais precisamente uma função localmente analítica y(t, α) de duas variáveis complexas t e α , onde o parâmetro α varia numa região Ω , que eventualmente se recobre, da esfera complexa. Precisando este conceito, supomos ainda que a função y(t, α) seja tal que, fixando um valor de α , obtemos uma função localmente analítica da variável t definida, numa região R(α) da esfera complexa t, que depende do ponto α de Ω e que goza da seguinte propriedade: variando α com continuidade em Ω, varia tambem com continuidade o domínio I(α).
(I(α) é o conjunto complementar na esfera t da região R(α).
Esta última parte significa precisamente que dado um ε posi-

tivo arbitrário, a ele corresponde outro número positivo δ, tal que variando α no entôrno $|\alpha-\alpha_0|<\delta$ de α_0, o desvio (I_α, I_{α_0}) é menor que ε.

A equação $y=y(t,\alpha)$ é a equação paramétrica da linha analítica. Chamamos trecho regular de uma linha analítica àquela parte da linha analítica, (eventualmente podendo ser toda a linha) que corresponde à uma região Ω (onde varia α) simplesmente conexa e que não se recobre (de uma folha). Podemos nestas condições dizer que todo ponto de Ω individualiza uma única função do trecho regular de linha analítica.

Baseando-se nos conceitos de entôrno linear, região funcional e de linha analítica pode-se demonstrar o seguinte resultado:(8)

Dada uma região funcional H, se uma linha analítica V_1, definida para α variável em Ω, do espaço analítico C, tem algum ponto em comum com H, o conjunto dos pontos P de Ω, que representam pontos de V_1 pertencentes a H, é uma região Ω' contida em Ω.

Suponhamos um funcional $F_t[y(t)]$, definido numa região H do espaço analítico C. Dada tambem uma linha analítica $y(t,\alpha)$, que passa por um ponto $y(t,\alpha_0)$ pertencente a H, o funcional F estará definido, para as funções $y(t,\alpha)$ correspondentes a um entôrno oportuno Ω de α_0, às quais correspondem os valores de uma função $f(\alpha)$ unívocamente definida no referido entôrno pela equação:

$$f(\alpha)=F_t[y(t,\alpha)] \quad .$$

Ao funcional F, definido em H, impomos que a função $f(\alpha)$ seja sempre localmente analítica em Ω.

Podemos verificar que, se tirarmos de Ω o ponto no infinito e os eventuais pontos de ramificação, formando assim uma região Ω', o valor do funcional F, sôbre a parte do V_1 que corresponde a pontos de Ω_1' será ainda uma função localmente analítica $f(\alpha)$, definida e regular em Ω_1'.

Estamos agora em condições de enunciar o conceito de regularidade, para os funcionais $F_t[y(t)]$, na forma dada pelo Prof. L. Fantappiè. Um funcional $F_t[y(t)]$, unívocamente definido num conjunto H do espaço analítico C, é regular em H, ou ainda localmente analítico em H, se para esse funcional estiverem satisfeitas as seguintes condições:(9)

I) se uma função y(t) pertence a H, todo prolongamento dessa função tambem pertence e o funcional assume, para qualquer prolongamento de y(t), o mesmo valor que em y(t);

II) o conjunto funcional H é uma região funcional;

III) sôbre todo trecho regular de linha analítica que esteja contido em H, o valor do funcional se reduz sempre ao valor de uma função localmente analítica do parâmetro α, isto é:

$$f(\alpha) = F_t[y(t,\alpha)] ,$$

com $f(\alpha)$, função localmente analítica em Ω_1' .

Desta terceira condição é que provem o nome de funcional analítico, isto é: que conserva a analiticidade em relação a um parâmetro.

1.4. FUNCIONAL ANALÍTICO LINEAR. INDICATRIZ E VALOR DO FUNCIONAL LINEAR.

Em 1.2. vimos que, por definição, quando duas funcões $y_1(t)$ e $y_2(t)$ pertencem a uma mesma região funcional linear H, a função soma $y_1(t) + y_2(t)$ tambem pertencem à mesma região.

É fácil mostrar que essa propriedade se extende a um número finito qualquer de funções, isto é: se $y_1(t)$, $y_2(t)$,..., $y_n(t)$, pertencem a uma mesma região funcional linear H o mesmo acontece à função soma $y_1(t) + y_2(t) + \ldots\ldots + y_n(t)$; mais geralmente, pertence tambem à mesma região linear H, a função $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \ldots\ldots + \alpha_n y_n(t)$, onde α_1, α_2, ..., α_n, são números complexos quaisquer.

Dizemos que um funcional $F_t\left[y(t)\right]$, definido e regular numa região funcional linear H é linear em H, se para todo par de funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de H tivermos sempre:

$$F_t\left[y_1(t) + y_2(t)\right] = F_t\left[y_1(t)\right] + F_t\left[y_2(t)\right]$$

(propriedade distributiva do funcional F, em relação à soma).

Podemos verificar que, se $F_t\left[y(t)\right]$ é um funcional analítico linear em H, segue:

$$F_t\left[\alpha\, y(t)\right] = \alpha\, F_t\left[\; y(t)\right] \qquad (\alpha \text{ nº complexo})$$

Com efeito, vemos fácilmente essa igualdade, caso α seja inteiro ou fracionário. Em seguida, considerando as duas funcões da variável complexa α,

$$\varphi(\alpha) = F_t\left[\alpha\, y(t)\right] \quad \text{e} \quad f(\alpha) = \alpha F_t\left[y(t)\right] \quad ,$$

do princípio de identidade de duas funções analíticas ($\varphi(\alpha)$ é analítica visto o caráter analítico do funcional F), segue para qualquer valor de α

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha) \; ,$$

pois $\varphi(\alpha)$ e $f(\alpha)$ coincidem quando α é frácionária.

É tambem de imediata demonstração a igualdade mais geral,

$$F_t\left[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \ldots + \alpha_n y_n(t)\right] =$$

$$\alpha_1 F\left[y_1(t)\right] + \alpha_2 F\left[y_2(t)\right] + \ldots + \alpha_n F\left[y_n(t)\right] \quad ,$$

onde $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$ são funções de H e α_1, α_2, ... α_n, números complexos quaisquer.

Quando um funcional analítico e linear $F_t\left[y(t)\right]$ está definido e é regular numa região funcional linear H, sabemos pelo teorema do Prof. L. Fantappiè citado em 1.2., que essa região H é constituída exclusivamente pelas funções localmente analíticas regulares num certo conjunto fechado A da esfera complexa. Se considerarmos a região B, complementar do domínio A, na esfera complexa, a cada valôr α dessa região B, corresponde uma função racional simples $\frac{1}{\alpha - t}$ regular em A e, portanto, pertencente ao campo de definição H do funcional F. Os valores do funcional linear $F_t\left[y(t)\right]$ para todas as funções $\frac{1}{\alpha - t}$, com α em B, serão os valores de uma função de variável complexa $u(\alpha)$, definida em B, e, por fôrça do caráter analítico do funcional $F_t\left[y(t)\right]$, certamente uma função localmente analítica em B. Esta função

$$u(\alpha) = F_t\left[\frac{1}{\alpha - t}\right],$$

tão felizmente introduzida pelo Prof. L. Fantappiè, foi pelo mesmo autor chamada indicatriz do funcional analítico linear $F_t\left[y(t)\right]$.

A importância fundamental da função indicatriz está em que, por intermédio dela e de uma oportuna integral curvilínea, podemos calcular o valôr do funcional $F_t\left[y(t)\right]$ para qualquer função $y(t)$ do seu campo de definição. Com efeito, como foi demonstrado pelo Prof. L. Fantappiè,(10) pela primeira vez com rigor e destaque para os funcionais que nos interessa, o valôr do funcional analítico linear $F_t\left[y(t)\right]$, para toda função $y(t)$ do seu campo de definição, completamente definido pela função indicatriz, é dado pela fórmula:

$$F_t\left[y(t)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_C y(t)u(t)dt \quad ,$$

notando que nesta integral, a linha de integração C é uma curva fechada retificavel sobre a esfera complexa, que encerra o conjunto A, onde a função indicatriz $u(\alpha)$ não está definida, e deixa para fora, segundo a convenção clássica, todos os pontos do conjunto I, onde a função y(t) não está definida.

Chamamos a curva C de curva separatriz pois, com efeito, ela separa os dois conjuntos fechados A e I, que efetivamente não têm pontos em comum.

Extendemo-nos, nesta exposição da teoria dos funcionais analíticos não sómente porque julgamos imprescindível para o entendimento do que temos a dizer, mas tambem, pela oportunidade de expôr, pela primeira vez, em português, os fundamentos da teoria referida, segundo os princípios últimamente adotados pelo Prof. L. Fantappiè.

1.5. TEOR~~IA~~ema SOBRE O VALOR DE UM FUNCIONAL ANALITICO LINEAR PARA UMA SUCESSÃO DE FUNCÕES ANALITICAS, UNIFORMEMENTE CONVERGENTES NUMA REGIÃO R.

Referimo-nos a um teorema que já enunciamos na introdução, sob a fórmula original dada pelo Prof. Fantappiè. Este teorema sendo fundamental em nossas considerações, vamos repeti-lo, sob forma de sucessão, que nos é mais apropriado:

"se temos uma sucessão de funções analíticas, cada uma das quais definida e regular, numa [illegible] região R que contem o conjunto fechado A, no qual a indicatriz u(t) do funcional linear

F não é definido e, se a sucessão é uniformemente convergente em R, então a função limite pertence ao campo de definição do funcional e o valor assumido pelo funcional em correspondência com essa função limite, é igual ao limite da sucessão formada com os valores que o funcional assume para cada uma das funções da sucessão."

O Prof. Fantappiè, como já dissemos na introdução, demonstra este teorema, utilizando a fórmula fundamental dos funcionais analíticos lineares. Esta demonstração póde ser encontrada na memória "I FUNZIONALI ANALITICI" do referido autor, a qual sendo de fácil acesso nos dispensamos de expôr.

Vamos entretanto, reproduzir em seguida a demonstração diréta de Teichmüller,(11) o que julgamos oportuno pois é dificil encontrá-la no original.

Ele parte do resultado conhecido(12) de que toda região R póde ser considerada como limite de uma sequência D_o, D_1, ..., de conjuntos conéxos fechados tais que D_k está inteiramente contido em D_{k+1} e todo ponto de R está num conjunto D_{k+1}

Seja $F_t[y(t)]$ um funcional analítico linear ~~e~~ definido para a função y(t) regular em R e $y_n(t)$ uma qualquer sucessão de funções localmente analíticas que converge para y(t) uniformemente, em cada conjunto D_k.

Escolhemos então os números inteiros n_o, n_1, ..., com $n_o < n_1 <$ ...., de tal modo que

$$\left| y_m(t) - y_{n_k}(t) \right| \leq \frac{1}{k!} \quad \text{sobre } D_k$$

para todo $m > n_k$.

Pomos ainda: $z_o = y_{n_o}$, $z_{k+1} = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$

e segue-se então, como é fácil verificar

$$y_{n_K} = \sum_{x=0}^{K} z_x$$

e $\quad |z_{K+1}| \leq \frac{1}{K!}$ sôbre D_k.

Formando a função das variáveis t e α,

$$z(t,\alpha) = \sum_{K=0}^{\infty} z_K(t)\,\alpha^K$$

segue a convergência desta série, uniformemente em qualquer conjunto D_k, para todo t de R e para qualquer α que seja finito, se aplicarmos por exemplo, o teste de Weierstrass.

É claro que as funções $z_k(t)$ e $z(t,\alpha)$, fazem parte do campo de definição do funcional linear F e que este funcional em correspondência com a função $z(t,\alpha)$ dá uma função analítica de α, isto é:

$$\text{(I)} \quad F_t\left[z(t,\alpha)\right] = F_t\left[\sum_{K=0}^{\infty} z_K(t)\,\alpha^K\right] = \sum_{K=0}^{\infty} f_K\,\alpha^K$$

esta última sendo convergente qualquer que seja α finito.

Para $\alpha =$ o vemos imediatamente que $F_t\left[z_0\right] = f_0$.

Vamos mostrar que para todo k temos

$$F_t\left[z_k\right] = f_k.$$

Suponhamos que a relação seja verdadeira para k - 1, isto é:

$$F_t\left[z_x\right] = f_x \qquad (x = 0, 1, \ldots\ldots, k-1)$$

Multiplicando estas últimas igualdades por α^x, somando-as e depois subtraindo-as membro a membro da igualdade:

$$F_t\left[z(t,\alpha)\right] = \sum_{K=0}^{\infty} f_k\,\alpha^K$$

e dividindo o resultado por α^K, da linearidade do Funcional F, segue-se, para $\alpha \neq 0$,

$$F_t\left[\sum_{x=K}^{\infty} z_x\,\alpha^{x-K}\right] = \sum_{x=K}^{\infty} f_x\,\alpha^{x-K}$$

e como os dois membros são regulares para todo α finito, fazendo $\alpha = 0$, vem

$$F_t\left[z_K\right] = f_K$$

Substituindo estes valores nas igualdades (I), para $\alpha = 1$ vem:

$$F\left[y(t)\right] = F\left[\sum_{K=0}^{\infty} z_K(t)\right] = \sum_{K=0}^{\infty} F\left[z_K(t)\right] = \lim_{K\to\infty} F\left[y_{n_K}(t)\right]$$

Vemos assim que na sequência parcial $y_{n_0}(t)$, $y_{n_1}(t)$,..... o resultado é verdadeiro. É fácil mostrar que o mesmo acontece para qualquer sucessão parcial. Suponhamos, com efeito, que para um $\varepsilon > 0$, exista uma conveniente sucessão infinita de números inteiros m_0, m_1, ... com $m_0 < m_1 <$ ....
e tal que

$$\text{(II)} \qquad \left| F\left[y_{m_\nu}(t)\right] - F_t\left[y(t)\right]\right| \geq \varepsilon$$

isto é: que para essa sucessão parcial $y_{m_\nu}(t)$ o teorema não seja verdadeiro.

Como a sucessão $y_{m_\nu}(t) \longrightarrow y(t)$, uniformemente em qualquer D_k existe uma sucessão parcial $y_{m_{\nu_K}}$ da sucessão y_{m_ν} e de conformidade com o raciocínio anterior, vem:

$$F_t\left[y(t)\right] = \lim_{K\to\infty} F_t\left[y_{m_{\nu_K}}(t)\right]$$

o que contradiz a desigualdade (II).

Cumpre notar que a demonstração diréta deste teorema fôra esboçada anteriormente por R. Cacciopoli,[13] o qual desenvolve tambem uma nova demonstração da fórmula fundamental dos funcionais analíticos lineares, utilizando entretanto resultados da teoria geral das operações lineares (Riecz).

IIa. PARTE

Desejamos mostrar na segunda parte desta tese, como a propriedade de continuidade, segundo sequências uniformemente convergentes de funções analíticas dos funcionais analíticos lineares, permite, tomada a-priori, uma definição do conceito de regularidade dos funcionais que podemos definir no espaço abstrato C.

Mostramos em seguida, introduzindo oportunas hipóteses sôbre a "aditividade" do funcional, que os funcionais lineares, que são regulares no sentido por nós introduzido, são analíticos lineares no sentido de Fantappiè.

Convem destacar inicialmente que continuamos a considerar o espaço abstrato C, tal como foi introduzido na primeira parte deste trabalho, em particular conservamos aqui os conceitos de entôrno linear de uma função localmente analítica, assim como o de região funcional e região funcional linear.

2.1. NÓVA DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE REGULARIDADE DOS FUNCIONAIS DEFINIDOS NO CAMPO DAS FUNÇÕES LOCALMENTE ANALÍTICAS.

Consideremos um funcional, que indicaremos ainda com a notação indicação $F_t[y(t)]$, definido numa região H do espaço abstrato C, e satisfazendo a condição I) introduzida em 1.3.

Seja $y_0(t)$ uma função de H e $y_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n, \ldots)$ uma sucessão de funções localmente analíticas, uniformemente convergentes para $y_0(t)$, num campo fechado contido na região R de definição de $y_0(t)$. É claro que nestas condições as funções

$y_i(t)$, pelo menos a partir das funções $y_k(t)$, com k suficientemente grande, estão num entôrno linear da função $y_0(t)$ e fazem dest'arte parte do campo H. Portanto, ao referirmos daqui por diante à sucessão $y_i(t) \to y_0(t)$ uniformemente, queremos indicar sómente as funções $y_1(t)$ que pertencem a H.

Tendo em vista as considerações que acabamos de fazer:

DIZEMOS QUE O FUNCIONAL $F_t[y(t)]$ É REGULAR EM $y_0(t)$, SE, QUALQUER QUE SEJA A SUCESSÃO DE FUNÇÕES LOCALMENTE ANALÍTICAS $y_i(t)$, UNIFORMEMENTE CONVERGENTES PARA $y_0(t)$ NUM CAMPO FECHADO CONTIDO EM R (que eventualmente varia com a sucessão), SE TIVERMOS

e que contém o conjunto característico do funcional

$$\lim_{n\to\infty} F_t[y_n(t)] = F_t[y_0(t)] .$$

Convem destacar ser a definição de regularidade, que acabamos de dar, rigorosamente local(14), ao contrário do que se dá com a definição introduzida por Fantappiè. É evidente o conceito de regularidade em toda a região de definição do funcional.

2.2. FUNCIONAL ADITIVO. "ADITIVIDADE" COMPLEXA. HOMOGENEIDADE. FUNCIONAL LINEAR.

Um funcional $F_t[y(t)]$ é aditivo(15) no seu campo de definição se, quaisquer que sejam as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ do seu campo de definição e pertencendo a função soma $y_1(t) + y_2(t)$ tambem ao mesmo campo, ~~se~~ tivermos:

$$F_t[y_1(t) + y_2(t)] = F_t[y_1(t)] + F_t[y_2(t)]$$

O funcional $F_t[y(t)]$ possúi uma "aditividade" complexa, ou é aditivo complexo, no seu campo de definição, se for verificada a condição mais restritiva:

$$F_t\left[y_1(t) + i\, y_2(t)\right] = F_t\left[y_1(t)\right] + iF_t\left[y_2(t)\right],$$

sendo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ funções quaisquer do seu campo de definição e, pertencendo ao mesmo campo, a função $y_1(t) + iy_2(t)$.

Finalmente, um funcional $F_t\left[y(t)\right]$ é homogêneo no seu campo de definição se tivermos, $y(t)$ sendo uma função qualquer desse mesmo campo:

$$F_t\left[\alpha\, y(t)\right] = \alpha\, F_t\left[y(t)\right],$$

onde α é um número complexo qualquer.

Se o funcional $F_t\left[y(t)\right]$ está definido numa região funcional linear H, à qual pertencem as funções $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y(t)$, sabemos que à mesma região funcional linear pertencem as funções $y_1(t) + y_2(t)$, $y_1(t) + iy_2(t)$ e $\alpha y(t)$.

<u>TEOREMA</u>: Um funcional $F_t\left[y(t)\right]$, definido numa região linear H e regular no sentido precisado em 2.1., sendo aditivo complexo, é tambem homogêneo.

Com efeito, dado um número complexo qualquer α, podemos considerá-lo como limite de uma sucessão de números complexos da forma $a_n + ib_n$, isto é:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} (a_n + ib_n). \quad (a_n,\ b_n,\ \text{números } ~~\text{reais}~~ \text{ racionais}).$$

É evidente que temos:

$$\alpha\, y(t) = \lim_{n\to\infty} (a_n + ib_n)\, y(t),$$

sendo a convergência uniforme em qualquer conjunto fechado, contido na região de definição da função $y(t)$.

Sendo aditivo complexo o funcional $F_t\left[y(t)\right]$, segue:

$$F_t\left[(a_n + ib_n)y(t)\right] = F_t\left[a_n y(t)\right] + iF_t\left[b_n y(t)\right].$$

Se a relação

$$F_t\left[a_n y(t)\right] = a_n F_t\left[y(t)\right]$$ for verificada, da anterior vem:

$$F_t\left[(a_n + ib_n)\, y(t)\right] = (a_n + ib_n)\, F_t\left[y(t)\right]$$ e portanto:

$$\lim_{n\to\infty} F_t\left[(a_n + ib_n)\, y(t)\right] = \lim_{n\to\infty} (a_n + ib_n)\, F_t\left[y(t)\right]$$

e finalmente, da regularidade do funcional, vem:

$$F_t\left[\alpha\, y(t)\right] = \alpha\, F_t\left[y(t)\right].$$

A relação

$$F_t\left[a_n\, y(t)\right] = a_n F_t\left[y(t)\right]$$

é um caso particular da anterior, sendo aquí α real; e podemos demonstra-la, considerando

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} r_n, \quad (r_n \text{ números racionais}).$$

sendo assim suficiente demonstrar que

$$F_t\left[r_n\, y(t)\right] = r_n\, F_t\left[y(t)\right],$$

a qual é imediata, se a verificarmos primeiro para r_n inteiro e depois para r_n ~~fracionário~~ racional.

A um funcional $F_t\left[y(t)\right]$, aditivo complexo e regular em H (região linear), Chamamos de funcional linear.

Acabamos de demonstrar que um funcional linear é homogêneo e é evidente que todo funcional $F_t\left[y(t)\right]$ linear, definido numa região H, goza da propriedade expressa pela igualdade:

$$F_t\left[\alpha_1 y_1(t) + \ldots\ldots + \alpha_n y_n(t)\right] =$$
$$= \alpha_1 F\, y_1(t) + \alpha_2 F_t\, y_2(t) + \ldots\ldots + \alpha_n F_t\, y_n(t) \quad ,$$

$y_1(t)$, $y_2(t)$, ... $y_n(t)$, sendo funções quaisquer de seu campo de definição e α_1, α_2, ... α_n, números complexos quaisquer.

NOTA: Podemos substituir a propriedade de "aditividade" complexa pela de "aditividade" simples, mais a de homogeneidade do funcional, em relação ao fator i, supondo sempre que o campo de definição do funcional seja uma região funcional linear.

Dessas hipóteses segue, com efeito:

$$F_t\left[y_1(t) + i\, y_2(t)\right] = F_t\left[y_1(t)\right] + F_t\left[i\, y_2(t)\right] =$$
$$= F_t\left[y_1(t)\right] + iF_t\left[y_2(t)\right],$$

o que exprime a "aditividade complexa.

De uma maneira semelhante podemos demonstrar que da propriedade de homogeneidade, em relação ao fator i, e da de "aditividade" complexa segue a de "aditividade" simples; assim como da propriedade de "aditividade complexa e da de "aditividade" simples segue a de homogeneidade em relação ao fator i.

2.3. OS FUNCIONAIS $F_t\left[y(t)\right]$ LINEARES SÃO ANALITICOS LINEARES NO SENTIDO DE FANTAPPIE.

Para demonstrar que os funcionais $F_t\left[y(t)\right]$ lineares são analíticos lineares é suficiente demonstrar que os valores do funcional $F_t\left[y(t)\right]$, para as funções de um trecho regular de linha analítica $y(t,\alpha)$, são os valores de uma função localmente analítica $f(\alpha)$, donde se segue que temos:

$$F_t\left[y(t,\alpha)\right] = f(\alpha),$$

com $f(\alpha)$ função localmente analítica, numa região Ω.

Vamos demonstrar em primeiro lugar a continuidade da função $f(\alpha)$, num ponto genérico α_0 do seu campo de definição, isto é, que para $\alpha \to \alpha_0$ segue:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} F_t\left[y(t,\alpha)\right] = F_t\left[y(t,\alpha_0)\right] = f(\alpha_0).$$

T deve ser domínio?

Supomos na continuação desta demonstração que aos pontos α da região Ω da esfera complexa, correspondem funções $y(t,\alpha)$ do entôrno (T) da função $y(t,\alpha_0)$ do campo de definição H do funcional F. Limitamo-nos ainda às funções $y(t,\alpha)$, com α variando num entôrno circular fechado $\overline{C}$ de α_0 contido em Ω, o que não importa em restrição, pois nos ocupamos de uma passagem ao limite quando $\alpha \to \alpha_0$.

Nestas condições, as funções $y(t,\alpha)$ estão definidas para t que varia no campo fechado T e α no campo tambem fechado $\overline{C}$, sendo, portanto, a função $y(t,\alpha)$ limitada, isto é:

$$\left|y(t,\alpha)\right| < M \qquad \text{(M constante)}$$

Vamos demonstrar, em primeiro lugar, que da convergência

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} y(t,\alpha) = y(t,\alpha_0).$$

válida para todo t de T, segue a convergência uniforme da mesma passagem ao limite, em qualquer domínio interno a T ~~contido em T~~.

Seja T_1 um domínio inteiramente contido em T e d a distância do contôrno de T_1 ao contôrno de T.

Sabemos que qualquer que seja α em $\bar{C}$, temos para t em T_1

$$|y(t,\alpha)| < M$$

Demonstremos que as funções $y(t,\alpha)$ são uniformemente contínuas, isto é, que dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\sigma(\varepsilon)$ tal que:

$$|y(t_1,\alpha) - y(t_2,\alpha)| < \varepsilon$$

desde que $|t_1 - t_2| < \sigma(\varepsilon)$ e α ponto qualquer de $\bar{C}$, t_1 e t_2 pontos de T_1.

O fato que queremos demonstrar é consequência da fórmula de Cauchy, pois tomando t_1 no domínio T_1 e um círculo C_d de raio d, com centro em t_1, essé círculo está todo contido em T. Tomamos em seguida o ponto t_2 dentro de um círculo concêntrico de raio $\frac{d}{2}$.

Aplicando a fórmula de Cauchy vem

$$|y(t_1,\alpha) - y(t_2,\alpha)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_d} \frac{y(\tau,\alpha)}{\tau - t_1} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_d} \frac{y(\tau,\alpha)}{\tau - t_2} d\tau \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_d} \frac{y(\tau,\alpha)(t_2 - t_1)}{(\tau - t_1)(\tau - t_2)} d\tau \right| < 2M \frac{|t_1 - t_2|}{d}$$

pois temos $|y(t,\alpha)| < M$, $|\tau - t_2| \geq \frac{d}{2}$

Portanto, tomando $|t_1 - t_2| < \frac{\varepsilon d}{2M}$

vem:

$$|y(t_1,\alpha) - y(t_2,\alpha)| < \varepsilon$$

$\sigma(\varepsilon)$ sendo dest'arte igual ao número $\frac{\varepsilon d}{2M}$, o que demonstra a continuidade uniforme da função $y(t,\alpha)$ em T_1.

Demonstremos finalmente que a convergência

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} y(t,\alpha) = y(t,\alpha_0)$$

é uniforme em T_1. Seja t_o um ponto qualquer de T_1; Vamos demonstrar a existência de um entôrno de α_o, tal que sendo α' e α'' dois pontos arbitrários dêsse entôrno, temos:

$$|y(t_o,\alpha'') - y(t_o,\alpha')| < \varepsilon \qquad \varepsilon > 0$$

Com efeito, podemos escrever:

$$|y(t_o,\alpha'') - y(t_o,\alpha')| \leq |y(t_o,\alpha'') - y(t,\alpha'')| + |y(t,\alpha'') - y(t,\alpha')| +$$
$$+ |y(t,\alpha') - y(t_o,\alpha')|$$

Da continuidade uniforme que demonstramos segue, desde que $|t_o - t| < \sigma\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ (t ponto de T_1)

$$|y(t_o,\alpha'') - y(t,\alpha'')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|y(t_o,\alpha') - y(t,\alpha')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Como

$$\lim_{\alpha\to\alpha_o} y(t,\alpha) = y(t,\alpha_o),$$

existe um entôrno de α_o que chamamos C_t, tal que, sendo α' e α'' dois pontos quaisquer dêsse entôrno, temos:

$$|y(t,\alpha'') - y(t,\alpha')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Das três últimas desigualdades segue portanto:

$$|y(t_o,\alpha'') - y(t_o,\alpha')| < \varepsilon$$

Fixando α' e fazendo $\alpha'' \to \alpha_o$ segue da última desigualdade:

$$|y(t_o,\alpha_o) - y(t_o,\alpha')| \leq \varepsilon$$

sendo α' um ponto arbitrário do entôrno C_t de α_o.

Das considerações que acabamos de fazer concluímos que a todo ponto t_0 de T_1 está associado um ponto t, tal que $|t - t_0| < \sigma(\frac{\varepsilon}{3})$, $\sigma(\frac{\varepsilon}{3})$ não dependendo de t_0, e a êste ponto t, por sua vez, está associado um entôrno C_t de α_0, tal que, α' sendo um ponto qualquer de C_t, segue:

$$\left| y(t_0, \alpha_0) - y(t_0, \alpha') \right| \leq \varepsilon$$

O conjunto T_1 sendo fechado, pelo teorema de Borel-Lebesgue, podemos encontrar um número finito de círculos de raio fixo $\sigma(\frac{\varepsilon}{3})$, de tal modo que, todo ponto t_0 de T_1 é interno a um dêstes círculos que são em número finito.

Associando a cada ponto t_0 o centro t de um dos círculos em número finito, que o contêm, somos levados a considerar os entôrnos C_t de α_0.

Dêstes entôrnos de α_0 em número finito, escolhemos o menor, que chamaremos simplesmente entôrno C de α_0.

Portanto, em definitivo, temos que qualquer que seja o ponto t_0 de T_1, podemos encontrar um entôrno C de α_0, tal que venha sempre, α' sendo um ponto qualquer do entôrno C de α_0,

$$\left| y(t_0, \alpha_0) - y(t_0, \alpha') \right| \leq \varepsilon$$

o que mostra a convergência uniforme de $y(t, \alpha)$ para $y(t, \alpha_0)$, em todo domínio T_1 contido em T.

× A convergência

$\lim_{\alpha \to \alpha_0} y(t, \alpha) = y(t, \alpha_0)$, uniforme em todo domínio contido em T, pode ser verificada, sendo as funções $y(t, \alpha)$ uniformemente limitadas no campo considerado e existindo o $\lim_{\alpha \to \alpha_0} y(t, \alpha)$, para todo t de T, se nos basearmos numa generalização do teorema de Vitali, sôbre sucessões de funções analíticas convegêntes. ×

Se tomamos então uma sucessão de pontos α_1, α_2, ..., α_n ....., de C, convergente para α_0, a sucessão de funções localmente analíticas de variável t,

$$y(t,\alpha_1),\ y(t,\alpha_2),\ \ldots\ldots,\ y(t,\alpha_n),\ \ldots\ldots$$

converge uniformemente para $y(t,\alpha_0)$, em qualquer domínio contido em T.

Como o funcional $F_t\big[y(t)\big]$ é regular em $y(t,\alpha_0)$, no sentido introduzido em 2.1., temos:

$$\lim_{n\to\infty} F\big[y(t,\alpha_n)\big] = \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = F_t\big[y(t,\alpha_0)\big] = f(\alpha_0).$$

O mesmo acontecendo, qualquer que seja a sucessão α_n convergênte para α_0, no entôrno C, temos:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} f(\alpha) = f(\alpha_0).$$

o que demonstra a continuidade de $f(\alpha)$ em α_0. α_0 sendo um ponto genérico de Ω_4, segue a continuidade de $f(\alpha)$, em toda a região Ω_4.

Para demonstrar a derivabilidade da função $f(\alpha)$, em α_0, basta demonstrar a existência do limite da relação incremental $\dfrac{f(\alpha)-f(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}$, quando α tende para α_0.

Pondo $\alpha = \alpha_0 + h$; ($|h|<\eta$, com η, suficientemente pequeno), e lembrando a linearidade do funcional $F_t\big[y(t)\big]$, temos que demonstrar a existência do limite(*)

$$\lim_{h\to 0} F_t\left[\frac{y(t,\alpha_0+h)-y(t,\alpha_0)}{h}\right]$$

Com êste objetivo, consideramos a linha analítica definida como segue:(17)

$$\varphi(t,h) = \begin{cases} \dfrac{y(t,\alpha_0+h)-y(t,\alpha_0)}{h} & h\neq 0 \\[2ex] \left\{\dfrac{\partial}{\partial\alpha} y(t,\alpha)\right\}_{\alpha=\alpha_0} & h=0. \end{cases}$$

Dada a continuidade do funcional $F_t[y(t)]$, sôbre uma linha analítica, que acabamos de demonstrar, segue:

$$\lim_{h\to 0} F_t[\varphi(t,h)] = F_t[\lim_{h\to 0} \varphi(t,h)] = F_t[\varphi(t,0)] = F_t\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha} y(t,\alpha)\right\}_{\alpha=\alpha_0}\right]$$

$\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha} y(t,\alpha)\right\}_{\alpha=\alpha_0}$ existindo e pertencendo ao campo H de definição funcional $F_t[y(t)]$, segue-se a existência do $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \frac{f(\alpha)-f(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}$, isto é: a derivabilidade da função $f(\alpha)$ em α_0, ponto genérico de $\mathcal{A}$ e consequentemente a derivabilidade da função $f(\alpha)$, em todo o campo $\mathcal{A}$.

Em conclusão, o funcional $F_t[y(t)]$ linear é analítico, no sentido definido por Fantappiè.

2.4. <u>DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA FUNDAMENTAL DOS FUNCIONAIS LINEARES</u>: $F_t[y(t)]$.

A demonstração da fórmula fundamental dos funcionais lineares, que estudamos, é uma consequência da fórmula de Cauchy, para as funções de uma variável complexa e, da condição de regularidade do funcional que introduzimos em 2.1.

O conceito desta demonstração, que se baseia na propriedade que chamamos de continuidade, segundo secessões uniformemente convergêntes de funções analíticas, pertence fundamentalmente ao Prof. L. Fantappiè que, entretanto, não o utiliza na demonstração da fórmula fundamental dos funcionais analíticos lineares, porque, como já observamos na introdução, èle deriva a continuidade, segundo uma sucessão uniformemente convergênte de funções localmente analíticas, exatamente da fórmula a demonstrar-se.

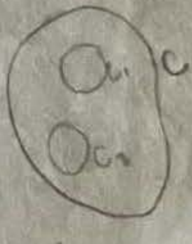
Tendo demonstrado diretamente essa propriedade de continuidade, no trabalho já citado, Teichmüller demonstra rapidamente a fórmula fundamental. Essa demonstração, adaptada à nossa definição de regularidade do funcional, póde ser desenvolvida, nas suas grandes linhas, como segue: seja $y(t)$ uma função localmente analítica pertencente ao campo H de definição do funcional linear $F_t[y(t)]$;

Como vimos em 1.2., o campo H é constituído exclusivamente pelas funções localmente analíticas regulares, num certo domínio A da esfera complexa; portanto, o domínio A está totalmente contido na região R de definição da função $\bar{y}(t)$.

Seja C uma curva simples retificável e que contorna o domínio A, em sentido positivo. Eventualmente essa curva C envolve pontos do contôrno de R. Nessas condições, indicamos com C_1, C_2, ..., C_n, curvas retificáveis fechadas e separadas umas das outras, (15) que supomos percorridas em sentido positivo, envolvendo pontos de o contorno de R.

Considerando a região R_1, envolvida pela curva C, mas não envolvida pelas curvas C_1, C_2, ..., C_n, é evidente que essa região contem tambem o domínio A e o seu contôrno C', percorrido em sentido positivo, é:

$$C' = C - C_1 - C_2 - \dots - C_n .$$



Temos, então, pela fórmula de Cauchy,

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{y(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

Da definição de integral, no campo complexo, temos:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\nu\to\infty} \sum_{1}^{\nu}{}_i\, y(\tau_i)\frac{1}{\tau_i - t}\Delta\tau_i$$

τ_i sendo pontos situados sôbre C' e, entendendo-se por $\lim_{\nu\to\infty}$

o limite da expressão $\sum_{1}^{\nu}{}_{i}\, y(\tau_i)\frac{1}{\tau_i - t}\Delta\tau_i$, quando a máxima das cordas $|\Delta\tau_i|$ da poligonal inscrita em C' e formada pelos pontos τ_i, tende para zero.

É evidente que as funções $\frac{1}{\alpha_i - t}$ são regulares, no domínio A e pertencem, portanto, ao campo H.

Indicamos com $u(\alpha)$ o valor do funcional F para as funções $\frac{1}{\alpha - t}$ que formam uma particular linha analítica, isto é;

$$u(\alpha) = F_t\left[\frac{1}{\alpha - t}\right]$$

Sabemos que a função $u(\alpha)$ é localmente analítca.

Indicamos ainda com $\Phi_n(t)$ a função racional de t, regular em A,

$$\Phi_n(t) = \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, y(\tau_\nu)\frac{1}{\tau_\nu - t}\Delta\tau_\nu$$

Da linearidade do funcional F segue:

$$F_t\left[\Phi_n(t)\right] = F_t\left[\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, y(\tau_\nu)\frac{1}{\tau_\nu - t}\Delta\tau_\nu\right] = \sum_{1}{}_{\nu}\, y(\tau_\nu)\Delta\tau_\nu F_t\left[\frac{1}{\tau_\nu - t}\right] =$$
$$= \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, y(\tau_\nu)\, u(\tau_\nu)\,\Delta\tau_\nu$$

Do teorema de Runge(19) que afirma a convergência uniforme de $\Phi_n(t)$ para y(t), em qualquer campo fechado envolvido por C', temos:

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(t) = 2\pi i\, y(t)$$

e, portanto, da regularidade do funcional F:

$$F_t[y(t)] = \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty} F\left[\Phi_n(t)\right] = \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, y(\tau_\nu)\, u(\tau_\nu)\,\Delta\tau_\nu$$

O último limite, certamente, existe, dada a analiticidade das funções $u(\tau)$ e $y(\tau)$ e temos finalmente:

$$F_t[y(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} y(\tau)\, u(\tau)\, d\tau.$$

que é a fórmula procurada, a qual coincide completamente com a fórmula encontrada pelo Prof, L. Fantappiè, inclusive quanto ao caminho de integração C', (curva separatriz).

R E F E R Ê N C I A S

(1) - L.Fantappiè: I Funzionali Analitici (Memorie della R.Accad. Naz. del Lincei - Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali - Anno 1930 - Serie Sesta - Vol. III.

Überblick über die Theorie der analytischen Funktionale und ihre anwendungen (J.der D.M.V. - 43 Band. 1933, S1), que contem uma bibliografia completa até 1933.

O autor utilizou também notas dos cursos desenvolvidos pelo Prof.Fantappiè, na Universidade de S.Paulo em 1939, assim como ~~de~~ um manuscrito inédito do mesmo Professor.

(2) L.Fantappiè: I Funzionali Analitici - pág. 60.

(3) O.Teichmüller: Über die Stetigkeit linearer analytischer Funktionale. Deutsche Mathematik 1936 - pág. 350.

(4) Para maior generalidade, nos seus últimos trabalhos o Prof. Fantappiè considera regiões da esfera complexa conexas e não conexas, assim como regiões que se recobrem (Riemannianas).

(5) O.Catunda: Un teorema sugl'insiemi, che si riconnette alla teoria dei funzionali analitici. Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei - vol. XXIX - série 6a. - 1939- pág. 15.

(6) Ibidem.

(7) O conceito de linha analítica precisado desta forma, dispensa a consideração dos valores excepcionais que figuram nos primeiros trabalhos do Prof. Fantappiè; por exemplo I Funzionali Analitici. p. 20

(8) I Funzionali Analitici - pág. 21, 22, ...

(9) Seguí aquí indicações recentes contidas no manuscrito citado em (1), assim como notas de aula.

(10) L.Fantappiè: Nuova dimostrazione della formula fondamentale per i funzionali analitici lineari, Rendiconti dei Lincei. Vol. 15º. S 6ª. 1º sem. 1932.

11) Vêr nota (3).

(12) Consultar, p. ex., Borel: Leçons sur les Fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe - Collection de monographies sur la théorie des Fonctions. pág. 10 e seguintes.

(13) R.Caccioppoli: Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche.
Rendiconti Lincei. vol. XIII - s. 6ª. - pág. 263.

(14) Ver as observações críticas desenvolvidas por S.Minetti na memória "Sulla struttura topológica..."
Rend.Circ.Mat.Palermo 59, 97-136 (1935).

(15) Seguimos, quanto possível, a nomenclatura de S.Banach: Théorie des Opérations Linéaires.

(16) Vêr p.ex. Bieberbach Lehrbuch der Funktionentheorie I. pág. 173.

(17) L.Fantappiè: I Funzionali Analitici, pág.

(18) Vêr p.ex. S.L.Walsch: Interpolation and Approximation - Colloquium Publications XX (American Math.Society).pág. 12 e seguintes.

(19) Consultar, p.ex. livro citado em (18) pág. 12 e seguintes, assim como, o livro de Borel,pág. 33 e seguinte,citado em (12), sobretudo para a extensão do theorema de Runge às regiões não conexas.

Verificar na Biblioteca de Harvard:

S. Kakeya. Theory of analytic
functions of lines
Tôhoku Science Rep 6, 341–358
(1918)
On funct. of lines and a set
of curves
Messen 7, 177–196. (1918)