Extensões cindidas por ideais nilpotentes

Heily Wagner

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, junho de 2008

Extensões cindidas por ideais nilpotentes

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Heily Wagner
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares - UFPR.
- Prof. Dr. Clézio Aparecido Braga - UNIOESTE-PR.

Resumo

Consideremos A e B duas álgebras de Artin tais que B é uma extensão cindida de A pelo ideal Q, onde Q é um ideal nilpotente de B. Estudamos algumas propriedades homológicas das categorias $\mathsf{mod}\,A$ e $\mathsf{mod}\,B$, tais como dimensão projetiva e injetiva. A partir disso mostramos que se B pertence a uma das seguintes classes: hereditária, laura, fracamente shod, shod, quase inclinada, colada à esquerda, colada à direita ou disfarçada; então A pertence a mesma classe. Além disso, restringindo nosso estudo para álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, comparamos as respectivas aljavas ordinárias, bem como suas apresentações. Finalmente, após caracterizarmos o ideal Q, exibimos alguns exemplos de extensões no contexto de álgebras de caminhos com relações, que mostram que A pode ser de uma das classes citadas sem que B o seja.

Palavras-chave: extensões cindidas, representações de álgebras, dimensões homológicas.

Abstract

Let A and B be two Artin algebras such that B is a split-by-nilpotent extension of A by Q, were Q is a nilpotent ideal of B. We study some homological properties of the categories $\mathsf{mod}\, A$ and $\mathsf{mod}\, B$ such that the projetive and the injetive dimensions of their objects. Using this we show that if B belongs to one of this classes: hereditary, laura, weakly shod, shod, quasi-tilted, left glued, right glued or concealed; then A belongs to same class. Moreover restricting our study to finite dimensional algebras over algebraically closed fields, we compare the ordinary quivers and presentations of the corresponding algebras. Finally, after giving a characterization of ideal Q as above, we exhibit some exemples of split extensions in the context of path algebras bounded by relations, which shows that A can be one of the above cited algebras without B so.

Keywords: split extensions, algebras representation, homological dimensions.

Sumário

Introdução

A álgebra B é dita uma extensão da álgebra A se existir um epimorfismo de álgebras $\pi : B \to A$. Também podemos dizer que o par (B, π) é uma extensão de A.

Este conceito aparece na literatura, por exemplo, em *On the cohomology groups of an associative algebra* (1945 - Annals of Mathematics **46**, 58-67) de G. Hochschild, onde encontramos a chamada extensão singular, que é quando $(\mathsf{Nuc}\,\pi)^2 = 0$ e a chamada extensão " segregate ", que é quando $B \cong A \oplus \mathsf{Nuc}\,\pi$. Neste trabalho, Hochschild trata (sem dar nome) de extensões " segregate "cujo núcleo ($\mathsf{Nuc}\,\pi$) é um ideal nilpotente.

No livro *Homological algebra* (1956 - Princeton University Press) de H. Cartan e S. Eilenberg, uma extensão de álgebra $\pi : B \to A$ é dita inessencial quando π tiver inverso à direita, isto é, se existir um morfismo de álgebras $\sigma : A \to B$ tal que $\pi\sigma = id_A$. Atualmente dizemos que o epimorfismo cinde, ou ainda, que a extensão é cindida. Além disso podemos escrever $B \cong A \oplus \mathsf{Nuc}\,\pi$ (soma de A-módulos).

Nos trabalhos da última década, em especial [6], [7], [9] e [10] encontramos o termo que aqui será estudado: extensão cindida por ideal nilpotente.

Vamos estudar nesse trabalho características comuns entre duas álgebras de Artin A e B quando B for uma extensão cindida de A por um ideal nilpotente, isto é, quando existir um epimorfismo cindido de álgebras $\pi : B \to A$, cujo núcleo é um ideal nilpotente de B (ver [6, 7, 9, 10]). Quando isso acontece podemos considerar A como uma subálgebra de B. Mais ainda, todo módulo sobre A é um módulo sobre B e vice-versa. Para fazer uma conexão entre as categorias dos módulos de tipo finito sobre A e sobre B, utilizamos os funtores de mudança de anéis

$$- \otimes_A B, \mathsf{Hom}_A(B_A, -) : \mathsf{mod}\,A \to \mathsf{mod}\,B \text{ e } - \otimes_B A, \mathsf{Hom}_B(A_B, -) : \mathsf{mod}\,B \to \mathsf{mod}\,A$$

(ver [12]). Com eles relacionamos os módulos indecomponíveis em $\mathsf{mod}\, A$ e em $\mathsf{mod}\, B$, em especial os projetivos e os injetivos. Na verdade, todo B-módulo projetivo é isomorfo a um módulo da forma $P \otimes_A B$, onde P_A é uma A-módulo projetivo; e todo B-módulo injetivo é isomorfo a um módulo da forma $\mathsf{Hom}_A(B, I)$, onde I é um A-módulo injetivo.

A partir disso relacionamos resoluções e apresentações projetivas (e injetivas) de um "mesmo" módulo visto como A-módulo e como B-módulo e, portanto, conseguimos algumas propriedades homológicas da categoria $\mathsf{ind}\, A$ a partir de propriedades $\mathsf{ind}\, B$ (aqui $\mathsf{ind}\, C$ é a subcategoria plena de $\mathsf{mod}\, C$ cujos objetos são representantes das classes de isomorfismo dos C-módulos indecomponíveis). Um resultado, envolvendo as dimensões projetivas (dp) e injetivas (di), é o seguinte:

Para todo A-módulo M indecomponível,
· se $\mathsf{dp}\, M_B \leq 1$ então $\mathsf{dp}\, M_A \leq 1$;
· se $\mathsf{di}\, M_B \leq 1$ então $\mathsf{di}\, M_A \leq 1$.

Tal resultado merece destaque pois nos garante duas propriedades de B que são herdadas por A: ser hereditária e ser shod.

Uma pergunta natural é se esse tipo de resultado também é válido para outras classes de álgebras. Estudamos então os conceitos de parte direita ($\mathcal{R}$) e parte esquerda ($\mathcal{L}$) da categoria de módulos [16] que podem ser definidas, para uma álgebra de Artin C, por

$$\mathcal{L} := \{X \in \mathsf{ind}\, C \mid \text{se } Y \text{ é predecessor de } X, \text{ então } \mathsf{dp}\, Y \leq 1\} \text{ e}$$
$$\mathcal{R} := \{X \in \mathsf{ind}\, C \mid \text{se } X \text{ é sucessor de } Y, \text{ então } \mathsf{di}\, Y \leq 1\}.$$

Essas subcategorias de $\mathsf{ind}\, C$ nos permitem caracterizar algumas classes de álgebras que são frequentemente estudadas em teoria de representações [5]. Algumas dessas classes estão no seguinte

Teorema A de [10]. Sejam A e B álgebras de Artin, tais que B é uma extensão cindida por nilpotente de A. Então,

- se B é laura então A também é laura;
- se B colada à esquerda então A também é colada à esquerda;
- se B colada à direita então A também é colada à direita;

- se B é fracamente shod então A também é fracamente shod;
- se B é shod então A também é shod;
- se B é quase inclinada então A também é quase inclinada.

Mostramos também um resultado análogo para álgebras disfarçadas, porém como estas álgebras são de tipo de representação infinito, precisamos supor que A é de tipo infinito.

As recíprocas desses resultados não são válidas. Para construírmos alguns contra-exemplos restringimos nosso estudo para álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, mas ainda considerando B uma extensão cindida de A por um ideal nilpotente Q. Mostramos que a aljava ordinária de A é uma subaljava da aljava ordinária de B, um resultado que já era esperado uma vez que A pode ser vista como subálgebra de B. Há também uma forte ligação entre as apresentações dessas álgebras, o que nos permitiu caracterizar o ideal Q [6]. Utilizamos tal caracterização para construir exemplos de extensões cindidas por nilpotente. Por fim, para justificar que uma álgebra pertence ou não a uma das classes de álgebras estudadas, fizemos uso da aljava de Auslander-Reiten [8, 11] que permite uma "visualização" da categoria dos módulos indecomponíveis e das subcategorias $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$.

Organização do Trabalho

No primeiro capítulo fazemos um apanhado de definições e resultados gerais envolvendo categorias e funtores, módulos sobre álgebras, produto tensorial e álgebras de caminhos (ver [1, 8, 11–13]), que são utilizados no decorrer do trabalho.

Para os demais capítulos foram estudadas as extensões cindidas por nilpotente, principalmente em [6, 7, 9, 10].

No Capítulo 2 definimos extensão cindida por um ideal nilpotente para álgebras de Artin. Estudamos as categorias $\mathsf{mod}\,A$ e $\mathsf{mod}\,B$ através dos funtores de mudanças de anéis, em especial, os módulos projetivos e injetivos. Mostramos ainda que se A é uma álgebra conexa então B também o é. Os resultados foram retirados em sua maioria de [7, 9, 10].

Já no Capítulo 3 restringimos o estudo para álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e passamos a estudar as caracterizações, feitas em [6], das aljavas ordinárias e apresntações das álgebras A e B, bem como do ideal nilpotente Q.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo das propriedades homológicas das categorias $\mathsf{mod}\,A$ e $\mathsf{mod}\,B$.

Para isso, incluímos uma seção introdutória contendo definições e algumas propriedades de coberturas projetivas, envolventes injetivas, dimensões projetivas e injetivas, etc. A segunda seção compara as propriedades homológicas dos A-módulos e dos B-módulos. Ao final mostramos que se B é uma álgebra hereditária (ou shod) então A também é hereditária (ou shod). Tais resultados são em sua maioria de [7, 10].

No Capítulo 5 extendemos esse último resultado para outras classes de álgebras. Iniciamos com um estudo das partes direita e esquerda das categorias $\mathsf{mod}\, A$ e $\mathsf{mod}\, B$. As álgebras laura, colada à direita (à esquerda), fracamente shod, shod, quase inclinada e disfarçada podem ser determinadas utilizando esses conceitos, como em [5]. Provamos que se B pertence a uma dessas classes então A também pertence a mesma classe [10]. Finalmente, na última seção damos alguns exemplos de extensões cindidas, utilizando as técnicas do Capítulo 3, que mostram que A pode ser de uma dessas classes de álgebras sem que B o seja.

Incluímos um apêndice com algumas características da aljava de Auslander-Reiten que são usadas nos exemplos do Capítulo 5.

Capítulo 1

Preliminares

Começamos nosso trabalho incluindo as definições e os resultados básicos de álgebras artinianas que serão utilizados nos próximos capítulos. Muitos dos resultados terão suas demonstrações omitidas, as quais podem ser encontradas, por exemplo, em [1], [8], [11] e [13]. Na seção de álgebras de caminhos restringimos nosso estudo às álgebras de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados.
Em muitas partes do trabalho utilizamos propriedades de categorias e funtores, por isso incluímos inicialmente uma seção com algumas definições e resultados que serão utilizados. Estes podem ser encontrados por exemplo em [1], [8] e [12].

1.1 Categorias e Funtores

Uma **categoria** $\mathfrak{C}$ é definida por:

- uma classe de objetos de $\mathfrak{C}$, denotada por Ob $\mathfrak{C}$;
- para cada par $(X,\ Y)$ de objetos de $\mathfrak{C}$ associamos um conjunto chamado de **conjunto de morfismos** de X para Y, denotado por $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X{,}Y)$, e tal que se $(X,\ Y) \neq (X',\ Y')$ então $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,\ Y) \cap \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X',\ Y') = \emptyset$;
- para cada tripla $(X,\ Y,\ Z)$ de objetos de $\mathfrak{C}$, há uma operação de **composição de morfismos**, denotada por $\circ$: $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y{,}Z) \times \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X{,}Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X{,}Z)$ tal que
  - $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ para todo $f \in \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X{,}Y)$, $g \in \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y{,}Z)$, $h \in \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z{,}W)$;
  - para todo objeto X de $\mathfrak{C}$ existe um morfismo id_X em $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X{,}X)$, chamado de morfismo

identidade de X, tal que $f \circ id_X = f$ e $id_X \circ g = g$, para todo morfismo $f \in \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ e $g \in \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z,X)$.

Escreveremos, por abuso de notação, $X \in \text{Ob } \mathfrak{C}$, ou ainda $X \in \mathfrak{C}$ para dizer que X é um objeto da categoria $\mathfrak{C}$ e $f : X \to Y$ (ou $X \xrightarrow{f} Y$) denota que $f \in \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$. Além disso, em alguns casos também escreveremos fg no lugar de $f \circ g$.

Dado um morfismo $f : X \to Y$, uma **secção** de f é um morfismo $g : Y \to X$ tal que $fg = id_Y$ e uma **retração** de f é um morfismo $h : Y \to X$ tal que $hf = id_X$. Diremos que o morfismo $f : X \to Y$ é um **isomorfismo** se existir $h : Y \to X$ que é uma secção e uma retração de f, ou seja, $hf = id_X$ e $fh = id_Y$. Nesse último caso, dizemos que os objetos X e Y são isomorfos ($X \cong Y$).

Dados os objetos $X_1, ..., X_n$ de $\mathfrak{C}$, a **soma direta** é um objeto de $\mathfrak{C}$, denotado por $X_1 \oplus ... \oplus X_n$, junto com um conjunto de morfismos $u_i : X_i \to X_1 \oplus ... \oplus X_n$, com $i = 1, ..., n$, tais que para cada objeto $Z \in \text{Ob } \mathfrak{C}$ e cada conjunto de morfismos $f_i : X_i \to Z$, $i = 1, ..., n$ em $\mathfrak{C}$, existe um único morfismo $f : X_1 \oplus ... \oplus X_n \to Z$ tal que para cada i vale $f_i = f \circ u_i$. Também escrevemos $\bigoplus_{i=1}^{n} X_i = X_1 \oplus ... \oplus X_n$. Cada morfismo u_i é chamado de i-ésima **inclusão**.

Uma categoria $\mathfrak{C}$ é dita **aditiva** se:

- para quaisquer objetos $X_1, ..., X_n$ de $\mathfrak{C}$ existe a soma direta $X_1 \oplus ... \oplus X_n$ em $\mathfrak{C}$;
- o conjunto $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ tem estrutura de grupo abeliano, para cada $X, Y \in \mathfrak{C}$;
- existe um objeto **zero**, $0 \in \text{Ob } \mathfrak{C}$, tal que o morfismo identidade id_0 é o elemento nulo do grupo abeliano $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(0, 0)$;
- para f, g, h morfismos em $\mathfrak{C}$, vale $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ e $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ (desde que estas operações estejam definidas).

Para uma categoria aditiva $\mathfrak{C}$, a **categoria dual** ou **oposta**, denotada por $\mathfrak{C}^{op}$ é definida como a categoria cujos objetos são os mesmos de $\mathfrak{C}$, $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X)$ para $X, Y \in \text{Ob } \mathfrak{C}$ e a composição de $f \in \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(X, Y)$ com $g \in \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(Y, Z)$ é $fg \in \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z, X) = \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(X, Z)$.

Exemplo 1.1 (Notação matricial) *Seja* $\bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ *junto com* $\{u_i\}_i$ *a soma direta dos objetos* X_i

de uma categoria aditiva $\mathfrak{C}$. Existem morfismos $p_j : \bigoplus_{i=1}^{n} X_i \to X_j$ (j-ésima projeção) tais que $p_j \circ u_j = id_{X_j}$, $p_j \circ u_i = 0$ se $i \neq j$ e $\bigoplus_{i=1}^{n}(u_i \circ p_i) = id_{\bigoplus X_i}$.

Dados os morfismos $f_i : X_i \to Y$ e $g_j : Y \to Z_j$ em $\mathfrak{C}$, denotamos por $f = \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_n \end{bmatrix} : X_1 \oplus ... \oplus X_n \to Y$ o morfismo tal que $f \circ u_i = f_i$ para cada $i = 1, ..., n$ e $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} : Y \to Z_1 \oplus ... \oplus Z_m$ o morfismo tal que $p_i \circ g = g_i$ para cada $i = 1, ..., m$.

Se $X = X_1 \oplus ... \oplus X_n$ e $Z = Z_1 \oplus ... \oplus Z_m$ então um morfismo $h : X \to Z$ em $\mathfrak{C}$ é denotado pela matriz $h : [h_{ij}] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix}$ onde $h_{ij} = p_i \circ h \circ u_j : X_j \to Z_i$.

■

Dizemos que uma categoria $\mathfrak{D}$ é uma **subcategoria** de $\mathfrak{C}$ se:

- a classe Ob $\mathfrak{D}$ é uma subclasse de Ob $\mathfrak{C}$;
- se $X, Y \in$ Ob $\mathfrak{D}$, então $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{D}}(X,Y) \subseteq \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$;
- a composição de $\mathfrak{D}$ é a mesma de $\mathfrak{C}$;
- para cada objeto X de $\mathfrak{D}$, o morfismo identidade em $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{D}}(X,X)$ coincide com o morfismo identidade em $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,X)$.

Uma subcategoria $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{C}$ é dita **plena** se $\mathsf{Hom}_{\mathfrak{D}}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ para todos os objetos X e Y em $\mathfrak{D}$.

Funtores

Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias, define-se um **funtor covariante** $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ associando para cada objeto X de $\mathfrak{C}$ um objeto FX (ou $F(X)$) de $\mathfrak{D}$ e para cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathfrak{C}$, um morfismo $Ff : FX \to FY$ (ou $F(f)$) em $\mathfrak{D}$ tal que:

- $F(gf) = (Fg)(Ff)$, para todos f e g morfismos em $\mathfrak{C}$;
- $Fid_X = id_{FX}$, para todo objeto X de $\mathfrak{C}$.

Define-se um **funtor contravariante** $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ associando para cada objeto X de $\mathfrak{C}$ um objeto FX de $\mathfrak{D}$ e para cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathfrak{C}$, um morfismo $Ff : FY \to FX$ em $\mathfrak{D}$ tal que:

- $F(gf) = (Ff)(Fg)$, para todos f e g morfismos em $\mathfrak{C}$;
- $Fid_X = id_{FX}$, para todo objeto X de $\mathfrak{C}$.

Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias aditivas. Um funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ é dito **aditivo** se dados X e Y em $\mathfrak{C}$, temos $F(X \oplus Y) \cong F(X) \oplus F(Y)$ em $\mathfrak{D}$ e se $f, g \in \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ então $F(f + g) = F(f) + F(g)$.

Sejam F, G funtores covariantes da categoria $\mathfrak{C}$ na categoria $\mathfrak{D}$. Um **morfismo funtorial** ou **transformação natural** $\Phi : F \to G$ é uma família $\{\Phi_X\}_{X \in Ob\,\mathfrak{C}}$ de morfismos $\Phi_X : FX \to GX$ de $\mathfrak{D}$ tal que, se $f : X \to Y$ é um morfismo de $\mathfrak{C}$, então $\Phi_Y \circ Ff = Gf \circ \Phi_X$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "\Phi_Y"'] & GY \end{tikzcd}$$

Sejam F, G são funtores contravariantes da categoria $\mathfrak{C}$ na categoria $\mathfrak{D}$. Um **morfismo funtorial** ou **transformação natural** $\Phi : F \to G$ é uma família $\{\Phi_X\}_{X \in Ob\,\mathfrak{C}}$ de morfismos $\Phi_X : FX \to GX$ de $\mathfrak{D}$ tal que, se $f : X \to Y$ é um morfismo de $\mathfrak{C}$, então $\Phi_X \circ Ff = Gf \circ \Phi_Y$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & GX \\ FY \arrow[r, "\Phi_Y"'] \arrow[u, "Ff"] & GY \arrow[u, "Gf"'] \end{tikzcd}$$

A composição de morfismos funtoriais definida por $(\Phi\Psi)_X = \Phi_X \Psi_X$ é ainda um morfismo funtorial. Para cada funtor F tem-se um morfismo funtorial identidade $id_F : F \to F$ dado por $(id_F)_X = id_{FX}$. Um morfismo funtorial $\Phi : F \to G$ é dito **isomorfismo funtorial** se cada Φ_X for um isomorfismo em $\mathfrak{D}$. Nesse caso existe um morfismo funtorial $\Psi : G \to F$ tal que $\Phi\Psi = id_G$ e

$\Psi\Phi = id_F$. Utilizaremos $F \approx G$ para dizer que existe um isomorfismo funtorial entre F e G. A composição de isomorfismos funtoriais é também um isomorfismo funtorial.

Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias, $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ e $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ funtores. Dizemos que F é **adjunto à esquerda de** G ou G é **adjunto à direita de** F ou ainda que o par (F, G) é **adjunto** se para todos os objetos $X \in \mathfrak{C}$ e $M \in \mathfrak{D}$ existe uma bijeção $\Phi_{(X,M)} : \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, GM) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathfrak{D}}(FX, M)$ que é funtorial em cada variável.

Um funtor (covariante) $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ é dito uma **equivalência** entre as categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ se existir um funtor $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ tal que $FG \approx id_{\mathfrak{D}}$ e $GF \approx id_{\mathfrak{C}}$. Nesse caso, dizemos que G é um **quase-inverso** de F e que as categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ são **equivalentes** ($\mathfrak{C} \approx \mathfrak{D}$). Um funtor contravariante $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ é dito uma **equivalência** entre as categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ se o funtor covariante induzido $\acute{F} : \mathfrak{C}^{op} \to \mathfrak{D}$ for uma equivalência de categorias. Nesse caso, F é chamado de **dualidade**.

Um funtor covariante $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ induz, para cada par (X, Y) de objetos de $\mathfrak{C}$, uma aplicação $F : \mathsf{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathfrak{D}}(FX, FY)$ dada por $f \mapsto Ff$. Se esta aplicação é injetora, dizemos que o funtor F é **fiel**. Se for sobrejetora, dizemos que o funtor F é **pleno**. O funtor F é dito **denso** se para cada objeto M de $\mathfrak{D}$ existir um objeto X de $\mathfrak{C}$ tal que M e FX são isomorfos em $\mathfrak{D}$.

Proposição 1.1 *Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias. Um funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, F é fiel, pleno e denso.* ■

1.2 Álgebras e Módulos

Seja R um anel comutativo com unidade. Uma R-**álgebra** A é um anel com unidade que ao mesmo tempo é um módulo sobre R e tal que para todo $x \in R$ e para todo $a, b \in A$ vale:

$$(ab)x = a(bx) = (ax)b.$$

A toda R-álgebra A corresponde uma outra R-álgebra, chamada de **álgebra oposta** A^{op} que tem a mesma estrutura de R-módulo de A, mas a multiplicação $*$ é definida por $a * a' := a'a$ para todos a, $a' \in A$.

Uma R-álgebra A é dita uma **álgebra de Artin** se R é um anel artiniano e A é um R-módulo de tipo finito (isto é, finitamente gerado).

Daqui para frente, caso não se faça menção ao contrário, as álgebras serão consideradas R-álgebras de Artin.

Exemplo 1.2 (Álgebra de Matrizes) *Seja k um corpo. O conjunto $M_n(k)$, das matrizes $n \times n$ com coeficientes em k, munido das operações usuais de matrizes, é uma k-álgebra de Artin de dimensão n^2.* ∎

Um R-submódulo B da R-álgebra A é uma **R-subálgebra** de A se $1_A \in B$ e $bb' \in B$, $\forall b, b' \in B$.

Um R-submódulo $\mathcal{I}$ de uma R-álgebra A é um **ideal à direita de** A se $\alpha a \in \mathcal{I}$, para todo $\alpha \in \mathcal{I}$ e para todo $a \in A$. Se $a\alpha \in \mathcal{I}$, $\forall \alpha \in \mathcal{I}$, $\forall a \in A$ então $\mathcal{I}$ é um **ideal à esquerda de** A. Se $\mathcal{I}$ é um ideal à direita e um ideal à esquerda, então $\mathcal{I}$ é um **ideal bilateral de** A ou simplesmente um **ideal de** A.

Exemplo 1.3 *Consideremos $\mathcal{I}$ um ideal de uma R-álgebra A. Seja $\frac{A}{\mathcal{I}}$ o conjunto das classes módulo $\mathcal{I}$ da forma $a + \mathcal{I} = \{a + \alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$, para todo $a \in A$. Então, $\frac{A}{\mathcal{I}}$ tem uma estrutura de R-módulo dada por $(a + \mathcal{I}) + (b + \mathcal{I}) := (a + b) + \mathcal{I}$ e $(a + \mathcal{I})x := ax + \mathcal{I}$, para todo $a, b \in A$ e para todo $x \in R$ e tem uma estrutura de anel dada por $(a + \mathcal{I})\ (b + \mathcal{I}) := ab + \mathcal{I}$, para todo $a, b \in A$. Além disso, essas duas estruturas são compatíveis, ou seja, para todos $a, b \in A$ e para todo $x \in R$: $((a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}))x = (a + \mathcal{I})((b + \mathcal{I})x) = ((a + \mathcal{I})x)(b + \mathcal{I})$. Portanto, $\frac{A}{\mathcal{I}}$ é uma R-álgebra, a qual chamamos de* **álgebra quociente de** A **por** $\mathcal{I}$. ∎

Seja $\mathcal{I}$ um ideal à direita da R-álgebra A. Um subconjunto $S \subseteq \mathcal{I}$ é dito um **gerador** do ideal $\mathcal{I}$ se cada elemento ω de $\mathcal{I}$ possa ser escrito como $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i a_i$ onde $\omega_i = \prod_{j=1}^{t} s_j$ e cada $s_j \in S$. Se S for finito, $\mathcal{I}$ é dito finitamente gerado.

Diremos que um ideal $\mathcal{I}$ de uma R-álgebra A é **nilpotente** se existir um inteiro positivo n tal que $\mathcal{I}^n = 0$, onde $\mathcal{I}^n := \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1_i}\alpha_{2_i}...\alpha_{n_i} \mid \alpha_{j_i} \in \mathcal{I}\}$.

Exemplo 1.4 *Seja k um corpo. O conjunto $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in k \right\}$ é uma k-subálgebra da álgebra de matrizes $M_2(k)$.*

O conjunto $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ é um ideal (bilateral) de A nilpotente e é gerado por $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_k & 0 \end{pmatrix} \right\}$, onde 1_k é a unidade do corpo k. ∎

Um ideal $\mathcal{I}$ de uma R-álgebra A é dito **maximal** se não existir um ideal $\bar{\mathcal{I}} \neq \mathcal{I}$, $\bar{\mathcal{I}} \neq A$ tal que $\mathcal{I} \subset \bar{\mathcal{I}} \subset A$.

Proposição 1.2 *Sejam A uma R-álgebra de Artin e $\mathcal{I}$ um ideal de A. São equivalentes:*

1. *$\mathcal{I}$ é o maior ideal nilpotente.*
2. *$\mathcal{I}$ é a interseção de todos os ideais maximais.* ∎

Um ideal com as propriedades da proposição acima é chamado de **radical** (de Jacobson) de A e é denotado por $\mathsf{rad}\, A$.

Morfismos de álgebras

Sejam A e B duas R-álgebras. Um **morfismo** ou **homomorfismo de R-álgebras** de A em B é uma aplicação $\phi : A \to B$ que é R-linear e é um homomorfismo de anéis, isto é, para todos $a_1, a_2 \in A$ e $x, y \in R$:

- $\phi(a_1 x + a_2 y) = \phi(a_1)x + \phi(a_2)y$;
- $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2)$;
- $\phi(1_A) = 1_B$;

Se ϕ é injetora então ϕ é dita um **monomorfismo de álgebras**. Se ϕ é sobrejetora então ϕ é dita um **epimorfismo de álgebras**. E, se ϕ é bijetora, então ϕ é dita um **isomorfismo de álgebras**. Neste último caso, dizemos que as álgebras A e B são **isomorfas** e denotamos por $A \cong B$.

Exemplo 1.5 *Se A é uma R-subálgebra de B, então a aplicação $\iota : A \to B$, definida por $\iota(a) = a$, é um monomorfismo de álgebras, chamado de* **inclusão canônica**.
Se $\mathcal{I}$ é um ideal bilateral de A então, a aplicação $\pi : A \to \frac{A}{\mathcal{I}}$, definida por $\pi(a) = a + \mathcal{I}$ é um epimorfismo de álgebras e é chamado de **projeção canônica**. ∎

Um monomorfismo é dito **monomorfismo cindido** quando possuir uma retração e um epimorfismo é dito **epimorfismo cindido** quando possuir uma secção.

Seja $\phi : A \to B$ um morfismo de álgebras. Então:

1. A imagem de ϕ ($\operatorname{Im}\phi := \{\phi(a) \mid a \in A\}$) é uma subálgebra de B;
2. $\phi(0) = 0$;
3. $\phi(-a) = -\phi(a)$;
4. O núcleo de ϕ ($\mathsf{Nuc}\,\phi := \{a \in A \mid \phi(a) = 0\}$) é um ideal bilateral de A;
5. ϕ é injetora se, e somente se, $\mathsf{Nuc}\,\phi = 0$;
6. $\phi(\mathsf{rad}\,A) \subseteq \mathsf{rad}\,B$.

Proposição 1.3 (Teorema do isomorfismo para álgebras) *Se $\phi : A \to B$ é um epimorfismo de álgebras, então*

$$\frac{A}{\mathsf{Nuc}\,\phi} \cong B$$

■

Módulos

Nessa seção as álgebras serão R-álgebras de Artin, onde R é uma anel comutativo com unidade.

Seja A uma R-álgebra. Um **A-módulo à direita** M é simplesmente um módulo à direita sobre o anel A. Neste caso, M é dotado de uma estrutura natural de R-módulo à direita, dada por $mx := m(1_A x)$, para todo $m \in M$ e para todo $x \in R$. Como R é comutativo, M também tem estrutura de R-módulo à esquerda. Além disso, se $x \in R$, $m \in M$ e $a \in A$ vale

$$(xm)a = x(ma) = m(xa).$$

Analogamente, define-se A-módulos à esquerda.

Usaremos a seguinte notação: M_A denota um A-módulo à direita e ${}_AM$ denota um A-módulo à esquerda. Em muitos casos, omitiremos enunciados envolvendo módulos à esquerda, pois estes são inteiramente análogos ao caso dos módulos à direita.

Exemplo 1.6 *Sejam M_A um A-módulo e $\mathcal{I}$ um ideal de A, então o conjunto*

$$M\mathcal{I} := \{\sum_j m_j\alpha_j \mid m_j \in M, \alpha_j \in \mathcal{I}\}$$

é um A-submódulo de M_A.

Se M for anulado pelo ideal $\mathcal{I}$, isto é, se $M\mathcal{I} = 0$, então M possui uma estrutura natural de $\frac{A}{\mathcal{I}}$-módulo, dada por $m \cdot (a + \mathcal{I}) := ma$, para $m \in M$ e $a \in A$. ■

Se M é um A-módulo à direita então o **radical** de M, denotado por $\mathsf{rad}\, M_A$, é o A-submódulo $M(\mathsf{rad}\, A)$. O radical do A-módulo A_A é $\mathsf{rad}\, A_A = A\mathsf{rad}\, A = \mathsf{rad}\, A$. Vale ainda que $\mathsf{rad}\, (M \oplus N)_A = \mathsf{rad}\, M_A \oplus \mathsf{rad}\, N_A$; e se N_A é um submódulo de M_A com $N \subseteq \mathsf{rad}\, M$, então $\mathsf{rad}\, \frac{M}{N} = \frac{\mathsf{rad}\, M}{N}$.

Proposição 1.4 *(Lema de Nakayama) Sejam M_A um A-módulo de tipo finito e N_A um submódulo de M_A. Então $N \subseteq \mathsf{rad}\, M$ se, e somente se, $N + L = M$ implica que $L = M$, para todo submódulo $L_A \subseteq M_A$.* ■

Sejam A e B duas R-álgebras. Um conjunto M que tem estrutura de A-módulo à esquerda e estrutura de B-módulo à direita é um **(A-B)-bimódulo** se estas estruturas forem compatíveis, isto é, se $a(mb) = (am)b$ para todo $a \in A$, $m \in M$ e $b \in B$.

Denotaremos um (A-B)-bimódulo M por ${}_AM_B$.

Morfismos de módulos

Sejam M e N dois A-módulos à direita. Um **morfismo de A-módulos** ou **homomorfismo de A-módulos** é uma aplicação $f : M \to N$ tal que $f(m_1a + m_2b) = f(m_1)a + f(m_2)b$ para todos $m_1, m_2 \in M$ e $a, b \in A$. Um morfismo de A-módulos é, claramente, R-linear.

Se M e N são (A-B)-bimódulos, uma aplicação que é um morfismo de A-módulos à direita e de B-módulos à esquerda é dita um **morfismo de (A-B)-bimódulos**.

Se $f : M \to N$ é um morfismo de A-módulos, dizemos que f é um **monomorfismo** se f é injetora e que f é um **epimorfismo** se f é sobrejetora. Se f é bijetora, então dizemos que é um **isomorfismo** de módulos, neste caso dizemos que M e N são **isomorfos** e denotamos por $M \cong N$.

Para um morfismo de módulos à direita (ou à esquerda) $f : M \to N$ valem propriedades análogas as enunciadas para um morfismo de álgebras:

1. A imagem de f e o núcleo de f são submódulos de N e M respectivamente;

2. $f(0) = 0$;

3. $f(-m) = -f(m)$;
4. f é um monomorfismo se, e somente se, $\mathsf{Nuc}\, f = 0$;
5. f é um epimorfismo se, e somente se, $\mathsf{Conuc}\, f := \frac{M}{\operatorname{Im} f} = 0$;
6. $f(\mathsf{rad}\, M_A) \subseteq \mathsf{rad}\, N_A$ (ou $f(\mathsf{rad}\, {}_AM) \subseteq \mathsf{rad}\, {}_AN$).

Denotamos por $\mathsf{Hom}_A(M, N)$ o conjunto dos morfismos (de A-módulos) de M em N. Tal conjunto tem estrutura de R-módulo com as seguintes operações: se $f, g \in \mathsf{Hom}_A(M, N)$ e $x \in R$ definimos $(f + g)(m) := f(m) + g(m)$ e $(fx)(m) := xf(m)$, para todo $m \in M$.

Denotaremos por $\mathsf{Mod}\, A$ (A-Mod) a categoria aditiva cujos objetos são os A-módulos à direita (à esquerda) e os morfismos são os morfismos de A-módulos. Denotaremos também por $\mathsf{mod}\, A$ (A-mod) a subcategoria plena de $\mathsf{Mod}\, A$ (A-Mod) cujos objetos são os A-módulos de tipo finito.

Seja M_A um A-módulo. Definimos um funtor covariante $\mathsf{Hom}_A(M, -) : \mathsf{Mod}\, A \to \mathsf{Mod}\, R$ que a cada A-módulo N_A associa o R-módulo $\mathsf{Hom}_A(M, N)$ e a cada morfismo de A-módulos $f : L_A \to N_A$ associa o morfismo R-linear $\mathsf{Hom}_A(M, f) : \mathsf{Hom}_A(M, L) \to \mathsf{Hom}_A(M, N)$, onde $\mathsf{Hom}_A(M, f)(g) := fg$. Analogamente, definimos o funtor contravariante $\mathsf{Hom}_A(-, M) : \mathsf{Mod}\, A \to \mathsf{Mod}\, R$ que a cada módulo N_A associa o R-módulo $\mathsf{Hom}_A(M, N)$ e a cada morfismo de A-módulos $f : L_A \to N_A$ associa o morfismo R-linear $\mathsf{Hom}_A(f, M) : \mathsf{Hom}_A(N, M) \to \mathsf{Hom}_A(L, M)$, onde $\mathsf{Hom}_A(f, M)(g) := gf$.

Dadas as R-álgebras A e B vale:

1. para ${}_AM_B$ e N_B, $\mathsf{Hom}_B(M, N)$ é um A-módulo à direita com $(fa)(m) := f(am)$;
2. para ${}_AM_B$ e ${}_AN$, $\mathsf{Hom}_A(M, N)$ é um B-módulo à esquerda com $(bf)(m) := f(mb)$;
3. para ${}_AM$ e ${}_AN_B$, $\mathsf{Hom}_A(M, N)$ é um B-módulo à direita com $(fb)(m) := f(m)b$;
4. para M_B e ${}_AN_B$, $\mathsf{Hom}_B(M, N)$ é um A-módulo à esquerda com $(af)(m) := af(m)$.

Podemos então definir outros funtores, como por exemplo: $\mathsf{Hom}_A(-, {}_AN_B) : \mathsf{Mod}\, A^{op} \to \mathsf{Mod}\, B$ e $\mathsf{Hom}_B(-, {}_AN_B) : \mathsf{Mod}\, B \to \mathsf{Mod}\, A^{op}$. Todos esses funtores são aditivos.

Exemplo 1.7 *Dado um A-módulo $M_A \in \mathsf{Mod}\, A$ temos que $\mathsf{Hom}_A({}_AA_A, M_A) \cong M_A$. Mais ainda, esse isomorfismo é funtorial, ou seja, $\mathsf{Hom}_A({}_AA_A, -) \approx id_{\mathsf{Mod}\, A}$.* ■

Se M_A e N_A são de tipo finito, então $\mathsf{Hom}_A(M_A, N_A)$ é também de tipo finito. Podemos então considerar os funtores "restrições"como $\mathsf{Hom}_A(-,_A N_B) : \mathsf{mod}\ A^{op} \to \mathsf{mod}\ B$ por exemplo.

Exemplo 1.8 (Funtor dual) *O funtor contravariante* $D := \mathsf{Hom}_R(-, R) : \mathsf{mod}\ A \to \mathsf{mod}\ A^{op}$ *é uma dualidade cujo funtor quase-inverso é* $D := \mathsf{Hom}_R(-, R) : \mathsf{mod}\ A^{op} \to \mathsf{mod}\ A$*, ou seja,* $D^2 := D \circ D \approx id_{\mathsf{mod}\ A}$ *e portanto* $\mathsf{mod}\ A \approx \mathsf{mod}\ A^{op}$.

Para cada A-módulo M, o A^{op}-módulo DM é chamado de **dual de** M*. Dados os A-módulos M e N, vale ainda que* $\mathsf{Hom}_A(M, N) \cong \mathsf{Hom}_{A^{op}}(DN, DM)$. ■

Sequência exata de módulos

Uma sequência de A-módulos e de morfismos de A-módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots$$

é dita **exata em** M_i se $\mathrm{Im}\, f_{i+1} = \mathsf{Nuc}\, f_i$. Tal sequência é dita **exata** se for exata em todo M_i.

Observemos que dado um morfismo de A-módulos $f : M \to N$, temos que f é um monomorfismo se, e somente se, a sequência $0 \to M \xrightarrow{f} N$ for exata; e f é um epimorfismo se, e somente se, a sequência $M \xrightarrow{f} N \to 0$ for exata.

Uma sequência exata de A-módulos da forma $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ é chamada de **sequência exata curta**. Dizemos que uma sequência exata curta **cinde** se f tiver uma secção, ou equivalentemente, se g tiver uma retração. Nesse caso, $M \cong L \oplus N$.

O funtor dual é um funtor exato, ou seja, se $0 \to L \to M \to N \to 0$ é uma sequência exata curta, então a sequência induzida $0 \to DN \to DM \to DL \to 0$ também é exata.

Proposição 1.5 *Seja A uma R-álgebra.*

a) A sequência $0 \to L_A \xrightarrow{f} M_A \xrightarrow{g} N_A$ é exata se, e somente se, pra todo X_A, a sequência de R-módulos $0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(X, L) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_A(X,f)} \mathsf{Hom}_A(X, M) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_A(X,g)} \mathsf{Hom}_A(X, N)$ *é exata.*

b) A sequência $L_A \xrightarrow{f} M_A \xrightarrow{g} N_A \to 0$ é exata se, e somente se, pra todo X_A, a sequência de R-módulos $0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(N, X) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_A(g,X)} \mathsf{Hom}_A(M, X) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_A(f,X)} \mathsf{Hom}_A(L, X)$ *é exata.*

c) *A sequência* $0 \to L_A \xrightarrow{f} M_A \xrightarrow{g} N_A \to 0$ *é exata e cinde se, e somente se, para todo* X_A*, a sequência de* R*-módulos* $0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(X,L) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(X,M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(X,N) \longrightarrow 0$ *é exata.*

d) *A sequência* $0 \to L_A \xrightarrow{f} M_A \xrightarrow{g} N_A \to 0$ *é exata e cinde se, e somente se, para todo* X_A*, a sequência de* R*-módulos* $0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(N,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(M,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(L,X) \longrightarrow 0$ *é exata.*

■

Módulos indecomponíveis, simples, projetivos e injetivos

Seja A uma R-álgebra de Artin. Lembraremos nessa seção propriedades de algumas classes de módulos que são importantes no estudo da categoria de módulos de tipo finito. Consideraremos somente A-módulos à direita e de tipo finito.

Um A-módulo M_A não nulo é dito **indecomponível** se $M = M_1 \oplus M_2$ implicar que $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$.

Indicaremos por $\mathsf{ind}\,A$ a subcategoria plena de $\mathsf{mod}\,A$ que consiste de um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismos dos A-módulos indecomponíveis de tipo finito. Muitas vezes, por abuso de notação, escreveremos $M \in \mathsf{ind}\,A$ para indicar que M é um A-módulo indecomponível.

Proposição 1.6 (Teorema de Krull-Schmidt) *Seja* A *uma* R*-álgebra de Artin, então todo* A*-módulo de tipo finito se decompõe como soma direta finita de* A*-módulos indecomponíveis de tipo finito. Mais ainda, tal decomposição é única a menos de isomorfismo e ordem dos "fatores".* ■

Um A-módulo S_A não nulo é dito **simples** se os seus únicos submódulos são os triviais, ou seja, S_A e 0.

Definição 1.1 *Um* A*-módulo* P_A *é dito* **projetivo** *se possuir as seguintes propriedades equivalentes:*

1. *para todo epimorfismo* $f : M_A \to N_A$ *e todo morfismo* $g : P_A \to N_A$ *existe um morfismo*

$\bar{g} : P_A \to M_A$ tal que $f\bar{g} = g$, ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\bar{g}"'] \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] & 0 \end{tikzcd}$$

2. *P_A é um somando direto do A-módulo $A^{(\Lambda)} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ onde $A_\lambda = A$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

3. *toda sequência exata curta da forma $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ cinde.*

4. *o funtor $\mathsf{Hom}_A(P, -) : \mathsf{Mod}\ A \to \mathsf{Mod}\ R$ é exato, ou seja, dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ em $\mathsf{Mod}\ A$, então a sequência induzida em $\mathsf{Mod}\ R$, $0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(P, L) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(P, N) \longrightarrow 0$ também é exata.*

Os indecomponíveis que aparecem na decomposição do A-módulo A_A formam uma lista completa dos A-módulos projetivos indecomponíveis. Os outros projetivos são somas destes.

Definição 1.2 *Um A-módulo I_A é dito* **injetivo** *se possuir as seguintes propriedades equivalentes:*

1. *para todo monomorfismo $f : M_A \to N_A$ e todo morfismo $g : M_A \to I_A$ existe um morfismo $\bar{g} : N_A \to I_A$ tal que $\bar{g}f = g$, ou seja, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "\bar{g}"] \arrow[dl, phantom, bend right, "\circlearrowleft"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

2. *toda sequência exata curta da forma $0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ cinde.*

3. *o funtor $\mathsf{Hom}_A(-, I) : \mathsf{Mod}\ A \to \mathsf{Mod}\ R$ é exato, ou seja, dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ em $\mathsf{Mod}\ A$, então a sequência induzida em $\mathsf{Mod}\ R$, $0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(N, I) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(M, I) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(L, I) \longrightarrow 0$ também é exata.*

Se P_A é um A-módulo projetivo então o dual DP é um A^{op}-módulo injetivo e reciprocamente, se I_A é um A-módulo injetivo então DI é um A^{op}-módulo projetivo.

1.3 Produto tensorial de módulos

Para essa seção continuaremos considerando R um anel comutativo com unidade e R-álgebras de Artin.

Sejam M_A e ${}_AN$ A-módulos e W um R-módulo. Uma função $g : M \times N \to W$ é dita **A-bilinear** se para todos $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $x, x' \in R$ e $a \in A$,

i) $g(mx + m'x', n) = g(m, n)x + g(m', n)x'$;

ii) $g(m, nx + n'x') = g(m, n)x + g(m, n')x'$;

iii) $g(ma, n) = g(m, an)$.

Um **produto tensorial** de M e N é um par (T, τ), onde T é um R-módulo e $\tau : M \times N \to T$ é uma aplicação A-bilinear, que tem a seguinte propriedade: para cada par (W, g), onde W é um R-módulo e $g : M \times N \to W$ é A-bilinear, existe uma única aplicação R-linear $\overline{g} : T \to W$ tal que $\overline{g}\tau = g$, ou seja, que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "g"'] & & T \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \overline{g}"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

Dados os A-módulos M_A e ${}_AN$ existe, e é unico (a menos de isomorfismo), o produto tensorial de M e N. Denotamos T por $M \otimes_A N$, τ é chamada de função tensorial e $\tau(m, n) = m \otimes n$ são ditos tensores. Temos que $\tau(M \times N)$ gera $M \otimes_A N$, e então podemos escrever para cada $t \in M \otimes_A N$, $t = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(m_i \otimes n_i)$. Portanto, se M e N são de tipo finito, então $M \otimes_A N$ também é de tipo finito.

Consideremos as R-álgebras A, B e C, e os bimódulos ${}_BM_A$ e ${}_AN_C$. Neste caso, o produto tensorial $M \otimes_A N$ (que é um R-módulo) tem uma estrutura natural de $(B$-$C)$-bimódulo dada por $b(m \otimes n)c := bm \otimes nc$.

Sejam $f : M_A \to M'_A$ e $g : N_A \to N'_A$ morfismos. A aplicação $f \times g : M \times N \to M' \times N$

definida por $(f \times g)(m,n) := (f(m), g(n))$ composta com a função tensorial de $M' \otimes_A N'$ é uma aplicação A-bilinear de $M \times N$ em $M' \otimes_A N'$. Logo induz uma aplicação R-linear denotada por $f \otimes g : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ que satisfaz $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$. Denotaremos por $f \otimes M$ a aplicação $f \otimes id_M$, onde id_M é a aplicação identidade de M.

Fixado uma A-módulo M_A, fica definido um funtor covariante $M \otimes_A - : \mathsf{Mod}\, A^{op} \to \mathsf{Mod}\, R$ que associa a cada A-módulo ${}_AL$ o R-módulo $M \otimes_A L$ e a cada morfismo de A-módulos $f :_A L \to_A N$ associa a aplicação R-linear $M \otimes_A f : M \otimes_A L \to M \otimes_A N$. Da mesma forma podemos definir o funtor covariante $- \otimes_A M : \mathsf{Mod}\, A \to \mathsf{Mod}\, R$, para um A-módulo à esquerda ${}_AM$.

Se A e B são R-álgebras e ${}_AM_B$ é um $(A$-$B)$-bimódulo então também temos os seguintes funtores covariantes:

$$\begin{array}{cccc} - \otimes_A M_B : & \mathsf{Mod}\, A & \longrightarrow & \mathsf{Mod}\, B \\ & L_A & \longmapsto & L \otimes_A M_B \\ & f & \longmapsto & f \otimes_A M \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{cccc} {}_AM \otimes_B - : & \mathrm{Mod}\, B^{op} & \longrightarrow & \mathsf{Mod}\, A^{op} \\ & {}_BN & \longmapsto & {}_AM \otimes_B N \\ & f & \longmapsto & M \otimes_B f \end{array}$$

Também podemos considerar as "restrições"desses funtores para módulos de tipo finito, por exemplo $- \otimes_A M_B : \mathsf{mod}\, A \to \mathsf{mod}\, B$.

Esses funtores são aditivos e exatos à direita, isto é, dada uma sequência exata $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ então a sequência $X \otimes_A L \xrightarrow{X \otimes_A f} X \otimes_A M \xrightarrow{X \otimes_A g} X \otimes_A N \longrightarrow 0$ também é exata. Quando X for um A-módulo projetivo então esse funtor é exato. O mesmo vale para o funtor da forma $- \otimes_A X$.

O próximo exemplo tem aqui um esboço de sua demonstração apenas para ilustrar como são construídos os isomorfismos que envolvem produtos tensoriais.

Exemplo 1.9 *Seja M_A um A-módulo. Então, $M \otimes_A A \cong M_A$*

Prova. Definimos $f : M \times A \to M$ por $f(m,a) := ma$. É fácil verificar que f é uma aplicação A-bilinear, então pela definição do produto tensorial, existe $\overline{f} : M \otimes_A A \to M$ R-linear tal que $\overline{f}(m \otimes a) = ma$. Definimos também $g : M \to M \otimes_A A$ por $g(m) := m \otimes 1_A$. Temos que g é R-linear e que $\overline{f}g = id_M$ e $g\overline{f} = id_{M \otimes_A N}$. Portanto, $M \otimes_A A \cong M_A$ como R-módulos. Porém, observamos que $\overline{f}$ e g são também morfismos de A-módulos, logo $M \otimes_A A \cong M_A$ também como A-módulos. ■

Mais ainda, o isomorfismo acima é funtorial, ou seja, $- \otimes_A A \approx id_{\mathsf{Mod}\, A}$. Além desse valem também os seguintes isomorfismos funtoriais:

1. Se ${}_AM$ é um módulo então $A \otimes_A M \cong_A M$
2. Se L_A, ${}_AM_B$ e N_B são três módulos, então $L \otimes_A (M \otimes_B N) \cong (L \otimes_A M) \otimes_B N$
3. Seja $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de A-módulos à direita e $\{N_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ uma família de A-módulos à esquerda. Então, $\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma\right) \cong \bigoplus_{(\lambda,\gamma)\in\Lambda\times\Gamma} (M_\lambda \otimes_A N_\gamma)$

Uma consequência de 3 e do Exemplo 1.9 é que se L_A e ${}_AM$ são A-módulos e Λ um conjunto qualquer, então $L \otimes_A A^{(\Lambda)} \cong L_A^{(\Lambda)}$ e $A^{(\Lambda)} \otimes_A M \cong_A M^{(\Lambda)}$.

Proposição 1.7 (Teorema da adjunção) *Sejam A e B R-álgebras e ${}_AM_B$ um $(A$-$B)$-bimódulo. Os funtores $- \otimes_A M_B : \mathsf{Mod}\ A \to \mathsf{Mod}\ B$ e $\mathsf{Hom}_B(M, -) : \mathsf{Mod}\ B \to \mathsf{Mod}\ A$ são adjuntos. Ou seja, dados os módulos L_A e N_B existe o seguinte isomorfismo funtorial (em cada variável):*

$$\mathsf{Hom}_A(L, \mathsf{Hom}_B(M, N)) \approx \mathsf{Hom}_B(L \otimes_A M, N)$$

■

O isomorfismo acima é de R-módulos. Porém, se considerarmos C e D duas R-álgebras de modo que ${}_CL_A$ e ${}_DN_B$ sejam bimódulos, então o isomorfismo acima é de $(D$-$C)$-bimódulos.

Vale também que se ${}_BM_A$ é um bimódulo, então os funtores $M \otimes_A - : \mathsf{Mod}\ A^{op} \to \mathsf{Mod}\ B^{op}$ e $\mathsf{Hom}_B(M, -) : \mathsf{Mod}\ B^{op} \to \mathsf{Mod}\ A^{op}$ são adjuntos.

Proposição 1.8 *Seja A uma R-álgebra e $\mathcal{I}$ um ideal bilateral de A.*

Para todo A-módulo L_A existe um isomorfismo funtorial $L \otimes_A \frac{A}{\mathcal{I}} \approx \frac{L}{L\mathcal{I}}$ dado por

$$l \otimes (a + \mathcal{I}) \mapsto la + L\mathcal{I}.$$

■

Proposição 1.9 *Sejam A e B duas R-álgebras, P_A um A-módulo projetivo de tipo finito, ${}_BM_A$ um bimódulo e N_B um B-módulo. Existe um isomorfismo funtorial*

$$N \otimes_B \mathsf{Hom}_A(P, M) \approx \mathsf{Hom}_A(P, N \otimes_B M)$$

dado por $n \otimes f \mapsto \phi$ *com* $\phi(p) = n \otimes f(p)$. ■

1.4 Álgebra de Caminhos

Álgebra básica e conexa

Um elemento e de uma R-álgebra é dito **idempotente** se $e^2 := ee = e$. Um idempotente e é dito **central** se dado $a \in A$ tem-se $ea = ae$. Dois idempotentes e e $\bar{e}$ são ditos **ortogonais** se $e\bar{e} = \bar{e}e = 0$. Um idempotente e é dito **primitivo** se dados os idempotentes ortogonais $\hat{e}$ e $\check{e}$ com $e = \hat{e} + \check{e}$ então $\hat{e} = 0$ ou $\check{e} = 0$.

Uma R-álgebra A, não nula, é dita **conexa** (ou **indecomponível**) se $A = A_1 \oplus A_2$, com A_1 e A_2 R-álgebras implicar que $A_1 = 0$ ou $A_2 = 0$; ou equivalentemente, se os únicos idempotentes centrais são 0 e 1_A.

Proposição 1.10 *Uma R-álgebra A é conexa se, e somente se, dados dois A-módulos projetivos indecomponíveis P e $\bar{P}$, existem A-módulos projetivos indecomponíveis $P = P_0$, $P_1, \cdots, P_n = \bar{P}$ tais que* $\mathsf{Hom}_A(P_i, P_{i+1}) \neq 0$ *ou* $\mathsf{Hom}_A(P_{i+1}, P_i) \neq 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$. ■

Sejam A uma R-álgebra de Artin e $A_A = P_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus P_r^{n_r}$ a decomposição de A em projetivos indecomponíveis de $\mathsf{mod}\, A$, com $P_i \neq P_j$ sempre que $i \neq j$. Dizemos que A é uma álgebra **básica** se $n_i = 1$, $\forall i = 1, ...r$.

Proposição 1.11 *Seja A uma R-álgebra de Artin. Todo A-módulo projetivo indecomponível de tipo finito é isomorfo a um A-módulo da forma eA, onde e é um idempotente.* ■

Proposição 1.12 *Seja A uma R-álgebra de Artin, básica e conexa. Então existem idempotentes ortogonais e primitivos $\{e_1, ..., e_n\}$ tais que $1_A = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Em particular, $A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$. Tal conjunto é chamado de* **sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos de** A. ■

Álgebra de caminhos

Ao longo dessa seção vamos considerar k um corpo algebricamente fechado.

Uma **aljava** Δ é uma quádrupla $(\Delta_0,\, \Delta_1,\, s,\, e)$ onde Δ_0 e Δ_1 são conjuntos e $s, e : \Delta_1 \to \Delta_0$ são funções. Os elementos de Δ_0 são chamados de **vértices** de Δ e os elementos de Δ_1 são chamados de **flechas** de Δ. Dada uma flecha $\alpha \in \Delta_1$, chamamos $s(\alpha)$ de **vértice inicial** de α e $e(\alpha)$ de **vértice final** de α. Uma aljava Δ é dita **finita** quando os conjuntos Δ_0 e Δ_1 são finitos.

Exemplo 1.10 *Podemos representar uma aljava por um diagrama como,* $\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \underset{2}{\bullet} \arrow[r, "\gamma"] & \underset{3}{\bullet} \arrow[loop right, "\delta"] \end{tikzcd}$ *por exemplo. Aqui temos* $\Delta_0 = \{1, 2, 3\}$*,* $\Delta_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$*,* $s(\alpha) = s(\beta) = 1$*,* $s(\gamma) = e(\alpha) = e(\beta) = 2$ *e* $s(\delta) = e(\delta) = e(\gamma) = 3$. ■

Uma **subaljava** de Δ é uma aljava $(\tilde{\Delta}_0,\, \tilde{\Delta}_1,\, \tilde{s},\, \tilde{e})$ de forma que $\tilde{\Delta}_0 \subseteq \Delta_0$, $\tilde{\Delta}_1 \subseteq \Delta_1$, $\tilde{s} = s|_{\tilde{\Delta}_1}$ e $\tilde{e} = e|_{\tilde{\Delta}_1}$. Uma subaljava é dita **plena** se a flecha $a \xrightarrow{\alpha} b$ estiver em $\tilde{\Delta}_1$ sempre que $a, b \in \tilde{\Delta}_0$.

Um **caminho** ω em Δ de comprimento $n > 0$ é uma sequência de flechas $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, tal que $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para $1 \leq i < n$. Por convenção, um caminho de comprimento zero (ou **caminho trivial**) é um caminho sem flechas associado a um vértice $a \in \Delta_0$, que denotamos por e_a. Para um caminho não trivial $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ definimos o **vértice inicial** de ω por $s(\omega) := s(\alpha_1)$ e o **vértice final** de ω por $e(\omega) := e(\alpha_n)$. Para um caminho trivial e_a definimos $s(e_a) = e(e_a) = a$. Um caminho ω de comprimento $n \geq 1$ é dito um **ciclo orientado** quando $s(\omega) = e(\omega)$.

Um **passeio** de comprimento $n \geq 1$ de $a \in \Delta_0$ para $b \in \Delta_0$ é uma sequência de flechas $\gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ com $a \in \{s(\alpha_1), e(\alpha_1)\}$, $b \in \{s(\alpha_n), e(\alpha_n)\}$ e $\{s(\alpha_i), e(\alpha_i)\} \cap \{s(\alpha_{i+1}), e(\alpha_{i+1})\} \neq \emptyset$ para $1 \leq i < n$.

Dado um vértice $a \in \Delta_0$, a subaljava plena Δ_a de Δ formada pelos vértices $b \in \Delta_0$ tais que existe um passeio de a para b é chamada de **componente conexa de Δ contendo** a. Quando $\Delta = \Delta_a$ para algum a dizemos que a aljava Δ é **conexa**.

Consideremos agora Δ uma aljava finita. Seja $k\Delta$ o k-espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos de Δ. Definimos em $k\Delta$ o seguinte produto: dados γ e σ caminhos de Δ, então

- se $e(\gamma) \neq s(\sigma)$, $\gamma \cdot \sigma = 0$;
- se $e(\gamma) = s(\sigma)$, $\gamma \cdot \sigma = \begin{cases} \sigma, & \text{se} \quad \gamma = e_a \text{ para algum } a \in \Delta_0 \\ \gamma, & \text{se} \quad \sigma = e_a \text{ para algum } a \in \Delta_0 \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_t, & \text{se} \quad \gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_n \text{ e } \sigma = \beta_1 \cdots \beta_t \end{cases}$

Estendendo esse produto, por linearidade, aos elementos de $k\Delta$ temos que $k\Delta$ é uma k-álgebra, a qual chamamos de **álgebra de caminhos de** Δ.

Exemplo 1.11 *Seja Δ a aljava*

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 3. \\ & 2 \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

A base de $k\Delta$ como k-espaço vetorial é $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\beta, \gamma\delta\}$ e portanto a dimensão de $k\Delta$ é $\mathsf{dim}_k k\Delta = 10$. Quanto a multiplicação teremos, por exemplo, $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$, $\alpha \cdot \delta = 0$, $e_2 \cdot \delta = \delta$, etc. ■

Denotaremos por J_Δ o ideal de $k\Delta$ gerado pelas flechas de Δ.

Proposição 1.13 *Sejam Δ uma aljava finita com $\Delta_0 = \{1, ..., n\}$, $k\Delta$ sua álgebra de caminhos e e_i o caminho trivial associado ao vértice $i \in \Delta_0$. Então:*

1. *$k\Delta$ é uma álgebra associativa.*
2. *o conjunto $\{e_i\}_{i \in \Delta_0}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de $k\Delta$. Em particular, $k\Delta$ tem identidade $1 = e_1 + \cdots + e_n$.*
3. *$k\Delta$ é uma álgebra básica e $k\Delta = e_1(k\Delta) \oplus \cdots \oplus e_n(k\Delta)$ é a decomposição de $k\Delta$ em módulos indecomponíveis.*
4. *$k\Delta$ tem dimensão finita se, e somente se, Δ não possui ciclos orientados.*
5. *$k\Delta$ é uma álgebra conexa se, e somente se, Δ é uma aljava conexa.*
6. *$J_\Delta = \mathsf{rad}\, k\Delta$ se, e somente se, Δ não possui ciclos orientados.*
7. *o número de flechas de i para j é igual ao número $\mathsf{dim}_k \left(e_i \left(\dfrac{J_\Delta}{J_\Delta^2} \right) e_j \right)$.* ■

Um ideal $\mathcal{I}$ de $k\Delta$ é dito **admissível** se existir $n \geq 2$ tal que $J_\Delta^n \subseteq \mathcal{I} \subseteq J_\Delta^2$.

Uma **relação** ρ em Δ é uma combinação linear de caminhos de comprimento pelo menos dois, todos com os mesmos vértices iniciais e finais.

Um ideal admissível $\mathcal{I}$ sempre possui um conjunto finito de geradores formado por relações. Por isso chamamos o par $(\Delta, \mathcal{I})$ de **aljava com relações**.

Proposição 1.14 *Sejam Δ uma aljava finita, $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $k\Delta$ e $\frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$ a álgebra quociente. Então:*

1. *$\frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$ tem dimensão finita sobre k.*
2. *o conjunto $\{e_i + \mathcal{I}\}_{i\in\Delta_0}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de $\frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$.*
3. *$\frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$ é uma álgebra básica.*
4. *$\frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$ é uma álgebra conexa se, e somente se, Δ é uma aljava conexa.*
5. *$\mathsf{rad}\,\frac{k\Delta}{\mathcal{I}} = \frac{J_\Delta}{\mathcal{I}}$.*

■

Teorema 1.15 *Seja A uma k-álgebra básica e de dimensão finita sobre k. Existe uma aljava Δ_A e um epimorfismo $\eta_A : k\Delta_A \to A$ tal que $\mathcal{I}_\mathcal{A} := \mathsf{Nuc}\,\eta_\mathcal{A}$ é um ideal admissível de $k\Delta_A$. Em particular, $A \cong \frac{k\Delta_A}{\mathcal{I}_\mathcal{A}}$.* ■

O epimorfismo do teorema acima é chamado de uma **apresentação** de A e a aljava Δ_A é chamada de **aljava ordinária** de A.

Módulos e representações de aljavas

Sejam k um corpo algebricamente fechado e Δ uma aljava finita. Uma **representação de** Δ é dada por $V = ((V_i)_{i\in\Delta_0}, (T_\alpha)_{\alpha\in\Delta_1})$, onde para cada $i \in \Delta_0$, V_i é um k-espaço vetorial de dimensão finita e para cada $\alpha \in \Delta_1$, T_α é uma transformação linear de $V_{s(\alpha)}$ em $V_{e(\alpha)}$.

Exemplo 1.12 *Seja Δ a aljava* $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 2$. *Então* $k^2 \underset{T_\beta}{\overset{T_\alpha}{\leftleftarrows}} k$ *é uma representação de Δ, onde $V_1 = k^2$, $V_2 = k$, $T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $T_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.* ■

Seja $\omega = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ um caminho não trivial de Δ. Definimos a transformação linear $T(\omega) : V_{s(\omega)} \to V_{e(\omega)}$ dada pela composta $T_{\alpha_1}T_{\alpha_2}\cdots T_{\alpha_n}$. Estendemos esta definição para uma combinação linear de caminhos $\omega = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \omega_i$, onde $s(\omega_i) = s(\omega_j)$ e $e(\omega_i) = e(\omega_j)$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, fazendo $T(\omega) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i T(\omega_i)$.

Uma **representação de** $(\Delta, \mathcal{I})$ é uma representação de Δ de forma que para cada relação ω de $\mathcal{I}$ tem-se $T(\omega) = 0$.

Dadas duas representações $V = ((V_i)_{i \in \Delta_0}, (T_\alpha)_{\alpha \in \Delta_1})$ e $W = ((W_i)_{i \in \Delta_0}, (S_\alpha)_{\alpha \in \Delta_1})$, um **morfismo** $\Phi : V \to W$ é uma família $\{\phi_i\}_{i \in \Delta_0}$ de transformações lineares tal que, para cada flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "T_\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W_i \arrow[d, "S_\alpha"] \\ V_j \arrow[r, "\phi_j"'] & W_j \end{tikzcd}$$

ou seja, $\phi_j T_\alpha = S_\alpha \phi_i$. A composta de dois morfismos é definida coordenada a coordenada. Definimos então a categoria $\mathsf{mod}\,(\Delta, \mathcal{I})$ cujos objetos são as representações de $(\Delta, \mathcal{I})$ e os morfismos são os descritos acima.

Teorema 1.16 *Seja $A = \frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$ onde Δ é uma aljava finita e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $k\Delta$. Então as categorias $\mathsf{mod}\,(\Delta, \mathcal{I})$ e $\mathsf{mod}\,A$ são equivalentes.*

Pelo teorema acima podemos identificar os A-módulos com representações de $(\Delta, \mathcal{I})$. Em especial, as representações que correspondem aos A-módulos simples, projetivos indecomponíveis e injetivos indecomponíveis podem ser calculados a partir da aljava ordinária (Δ) e das relações $(\mathcal{I})$. Para detalhes dessas descrições ver, por exemplo, [8] ou [13].

Exemplo 1.13 *Sejam Δ a aljava* $\begin{tikzcd}[sep=small] & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] & \\ 1 & & 4 \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[dl, "\delta"] \\ & 3 \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$ *e $\mathcal{I}$ o ideal gerado por $\beta\alpha - \delta\gamma$. A seguinte representação de $(\Delta, \mathcal{I})$ dada por* $\begin{tikzcd}[sep=small] & 0 \arrow[dl, "0"'] & \\ 0 & & 0 \arrow[ul, "0"'] \arrow[dl, "0"] \\ & k \arrow[ul, "0"] & \end{tikzcd}$ *corresponde a um A-módulo simples, que denotamos por*

S_3. Em muitos casos, representaremos esse módulo escrevendo apenas $\begin{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$*, onde o "1" indica a dimensão do espaço vetorial na "posição 3".* ■

Capítulo 2

Extensão cindida por nilpotente

Neste capítulo define-se o que é uma *extensão cindida por nilpotente* de uma dada álgebra e algumas propriedades decorrentes desta definição. Para isso consideramos, nessa primeira parte, R um anel artiniano comutativo e R-álgebras de Artin. Além disso, os módulos são módulos à direita (caso não se faça menção ao contrário).

2.1 Propriedades iniciais

Definição 2.1 *Sejam A e B duas R-álgebras e Q um ideal nilpotente de B. Dizemos que B é uma* **extensão cindida de A pelo nilpotente** *Q (ou mais brevemente* **extensão cindida por nilpotente** *de A) se existir um epimorfismo cindido de álgebras $\pi : B \to A$ tal que $\mathsf{Nuc}\,\pi = Q$.*

Vejamos um primeiro exemplo:

Exemplo 2.1 *Consideremos $R = \mathbb{R}$ o corpo dos números reais e as $\mathbb{R}$-álgebras $B = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$. O conjunto $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}$ é um ideal nilpotente de B.*

Definimos $\pi : B \longrightarrow A$ por $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ que é claramente um epimorfismo com $\mathsf{Nuc}\,\pi = Q$. O morfismo $\sigma : A \to B$ dado por $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ é inversa à direita de π. Portanto, B é uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q. ■

A partir da Definição 2.1, já podemos fazer as seguintes observações:

Observação 2.1 *Consideremos B uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q e $\pi : B \to A$ o epimorfismo cindido cujo núcleo é Q.*

1. *Como π é um epimorfismo, pelo Teorema 1.3 (do isomorfismo para álgebras), temos $A \cong \frac{B}{Q}$.*

2. *Como π é um epimorfismo cindido, então existe $\sigma : A \to B$ tal que $\pi\sigma = id_A$, onde id_A é o morfismo identidade da álgebra A.*

3. *Como $\sigma : A \to B$ é monomorfismo de álgebras (pois $\pi\sigma = id_A$), podemos considerar A uma R-subálgebra de B (pois $A \cong Im\,\sigma$ que é uma subálgebra de B).*

4. *Se M é um A-módulo, podemos dar uma estrutura de B-módulo a M definida por*

$$m \cdot b := m\pi(b),\ \forall m \in M \text{ e } \forall b \in B.$$

Da mesma forma, se M é um B-módulo, podemos dar uma estrutura de A-módulo a M definida por

$$m * a := m\sigma(a),\ \forall m \in M \text{ e } \forall a \in A,$$

onde σ é o morfismo do item 2.

Vale o mesmo para módulos à esquerda. Temos, em particular, que B é um A-módulo e A um B-módulo. Mais ainda, temos as seguintes estruturas de bimódulos: ${}_BA_B$, ${}_BA_A$, ${}_AA_B$, ${}_AB_A$, etc.

5. *A sequência exata de (A-A)-bimódulos abaixo cinde.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, hook] & B \arrow[r, shift left, "\pi"] & A \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como A é projetivo (como um (A-A)-bimódulo), basta observar que π é um homomorfismo de (A-A)-bimódulos:
sejam a e a' em A e b em B, temos que

$$\pi(a * b * a') = \pi(\sigma(a)b\sigma(a')) = \pi\sigma(a)\pi(b)\pi\sigma(a') = a\pi(b)a',$$

pois π é homomorfismo de álgebras e $\pi\sigma = id_A$.

6. *Decorre da última observação que o A-módulo B pode ser escrito como $B = A \oplus Q$ (soma direta de A-módulos).*

7. *Como Q é nilpotente, então Q está contido no radical $\mathsf{rad}\, B$ e, portanto, $\mathsf{rad}\, A = \dfrac{\mathsf{rad}\, B}{Q}$.*

Do item 6 da observação acima temos que $B = A \oplus Q$ como R-módulos. Nesse caso o produto da álgebra pode ser escrito por:
Dados $a_1 + q_1, a_2 + q_2 \in A \oplus Q$, temos

$$(a_1 + q_1)(a_2 + q_2) = a_1a_2 + (a_1q_2 + q_1a_2 + q_1q_2).$$

Usaremos, no entanto, a seguinte notação:

$$(a_1, q_1)(a_2, q_2) = (a_1a_2, a_1q_2 + q_1a_2 + q_1q_2).$$

Observemos ainda que a unidade da álgebra é $(1_A, 0) \in A \oplus Q$.

Usamos essas observações na primeira proposição:

Proposição 2.1 *Seja B uma extensão cindida de A pelo nilpotente Q e seja $e \in A$ um idempotente. Então, eBe é uma extensão cindida de eAe por eQe.*

Prova. Das observações acima temos $B = A \oplus Q$ como R-módulo, e daí podemos escrever também $eBe = eAe \oplus eQe$. Definimos $\pi : eAe \oplus eQe \to eAe$ por $\pi(eae, eqe) = eae$, isto é, a projeção de R-módulos. Então, π é R-linear, sobrejetora e para $a, \hat{a} \in A$ e $q, \hat{q} \in Q$ ainda vale:

$$\pi((eae, eqe)(e\hat{a}e, e\hat{q}e)) = \pi(e(ae\hat{a})e, e(ae\hat{q}+qe\hat{a}+qe\hat{q})e) = e(ae\hat{a})e = (eae)(e\hat{a}e) = \pi(eae, eqe)\pi(e\hat{a}e, e\hat{q}e)$$

e

$$\pi(e, 0) = \pi(e1_Ae, e0e) = e1_Ae = e,$$

o que mostra que π é um epimorfismo de álgebras.

Para mostrar que cinde, seja $\sigma : eAe \to eAe \oplus eQe$ dada por $\sigma(eae) = (eae, 0)$. Temos então, para cada $a \in A$, $\pi\sigma(eae) = \pi\,(eae, 0) = eae$. Além disso, claramente $\mathsf{Nuc}\,\pi = eQe$ que é nilpotente pois $eQe \subseteq Q$ e Q é nilpotente. ■

2.2 Categorias mod A e mod B

Nosso objetivo é identificar propriedades comuns entre as R-álgebras A e B, quando B é uma extensão cindida por nilpotente de A. Para isso, vamos comparar os módulos de tipo finito (finitamente gerados) sobre A e sobre B.

Funtores de mudança de anéis

Para comparar os módulos de $\mathsf{mod}\,A$ com os módulos em $\mathsf{mod}\,B$ usaremos os funtores:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\boxed{\mathsf{mod}\,B} \arrow[r, bend left=60, "- \otimes_B A"] \arrow[r, bend left=30, "\mathsf{Hom}_B(A_B, -)"] & \boxed{\mathsf{mod}\,A} \arrow[l, bend left=30, "\mathsf{Hom}_A(B_A, -)"] \arrow[l, bend left=60, "- \otimes_A B"]
\end{tikzcd}$$

Temos os seguintes isomorfismos funtoriais:

Lema 2.2 *Se B é uma extensão cindida por nilpotente de A então:*

(a) $- \otimes_A B_B \otimes_B A_A \approx id_{\mathsf{mod}\,A}$

(b) $\mathsf{Hom}_B(A_B, \mathsf{Hom}_A(B_A, -)) \approx id_{\mathsf{mod}\,A}$

Prova. Consideremos $\pi : B \to A$ um epimorfismo cindido tal que $\mathsf{Nuc}\,\pi$ é um ideal nilpotente de B, $\sigma : A \to B$ tal que $\pi\sigma = id_A$ e os produtos $*$ e $\cdot$ como no item 4 da Observação 2.1.

(a) Seja M_A um A-módulo. Definimos as funções R-lineares $\Phi_M : M \otimes_A B \otimes_B A_A \to M_A$ por $\Phi_M(m \otimes b \otimes a) := m\pi(b)a$ e $\tilde{\Phi}_M : M_A \to M \otimes_A B \otimes_B A_A$ por $\tilde{\Phi}_M(m) := m \otimes 1_B \otimes 1_A$.

1. Φ_M e $\tilde{\Phi}_M$ são A-lineares:
   Sejam $a, a' \in A$, $b \in B$ e $m \in M$, então
   - $\Phi_M((m \otimes b \otimes a)a') = \Phi_M(m \otimes b \otimes aa') = m\pi(b)(aa') = (m\pi(b)a)\,a' = \Phi_M(m \otimes b \otimes a)a'$.
   - $\tilde{\Phi}_M(ma) = ma \otimes 1_B \otimes 1_A = m \otimes a * 1_B \otimes 1_A = m \otimes \sigma(a) \otimes 1_A = m \otimes 1_B \otimes \sigma(a) \cdot 1_A = m \otimes 1_B \otimes \pi(\sigma(a))1_A = m \otimes 1_B \otimes a = (m \otimes 1_B \otimes 1_A)a = \tilde{\Phi}_M(m)a$.

2. $\Phi_M\tilde{\Phi}_M = id_M$ e $\tilde{\Phi}_M\Phi_M = id_{M_A\otimes_A B_B\otimes_B A_A}$:
   Sejam $m \in M$, $a \in A$ e $b \in B$, então

   - $\Phi_M\tilde{\Phi}_M(m) = \Phi_M(m \otimes 1_B \otimes 1_A) = m\pi(1_B)1_A = m1_A1_A = m = id_M(m)$.
   - $\tilde{\Phi}_M\Phi_M(m \otimes b \otimes a) = \tilde{\Phi}_M(m\pi(b)a) = m\pi(b)a \otimes 1_B \otimes 1_A = m \otimes (\pi(b)a) * 1_B \otimes 1_A = m \otimes \sigma\pi(b)\sigma(a) \otimes 1_A = m \otimes 1_B \otimes (\sigma\pi(b)\sigma(a)) \cdot 1_A = m \otimes 1_B \otimes \pi(\sigma\pi(b)\sigma(a)) = m \otimes 1_B \otimes \pi(b)a = m \otimes 1_B \otimes b \cdot a = m \otimes b \otimes a = id_{M_A\otimes_A B_B\otimes_B A_A}(m \otimes b \otimes a)$.

3. $\{\Phi_M\}_{M\in \mathsf{mod}\ A}$ é um morfismo funtorial: Sejam M_A e N_A dois A-módulos e $f : M_A \to N_A$ um morfismo de A-módulos, mostraremos que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A B \otimes_B A_A \arrow[r, "\Phi_M"] \arrow[d, "f\otimes B\otimes A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_A \arrow[d, "f"] \\
N \otimes_A B \otimes_B A_A \arrow[r, "\Phi_N"'] & N_A
\end{tikzcd}$$

   Para todo $m \in M$, $b \in B$ e $a \in A$ temos que
   $\Phi_N \circ f\otimes B\otimes A(m\otimes b\otimes a) = \Phi_N(f(m)\otimes b\otimes a) = f(m)\pi(b)a = f(m\pi(b)a) = f\circ\Phi_M(m\otimes b\otimes a)$.

(b) Para o segundo isomorfismo, definimos as funções $\Psi_M : \mathsf{Hom}_B(A_B, \mathsf{Hom}_A(B_A, M_A)) \longrightarrow M_A$ por $\Psi_M(\phi) := \phi(1_A)(1_B)$ e $\tilde{\Psi}_M : M_A \longrightarrow \mathsf{Hom}_B(A_B, \mathsf{Hom}_A(B_A, M_A))$ por $\tilde{\Psi}_M(m)(a)(b) := ma\pi(b)$.

1. Ψ_M é A-linear:
   Sejam $\phi, \psi \in \mathsf{Hom}_B(A_B, \mathsf{Hom}_A(B_A, M_A))$ e $a \in A$, então

   - $\Psi_M(\phi + \psi) = [(\phi + \psi)(1_A)](1_B) = [\phi(1_A) + \psi(1_A)](1_B) = \phi(1_A)(1_B) + \psi(1_A)(1_B) = \Psi_M(\phi) + \Psi_M(\psi)$
   - $\Psi_M(\phi a) = ((\phi a)(1_A))(1_B) = \phi(a1_A)(1_B) = [\phi(\pi\sigma(a))](1_B) = \phi(1_A \cdot \sigma(a))(1_B) = [\phi(1_A)\sigma(a)](1_B) = \phi(1_A)(1_B\sigma(a)) = \phi(1_A)(1_B * a) = [\phi(1_A)(1_B)]a = \Psi_M(\phi)a$

2. $\tilde{\Psi}_M$ é A-linear:
   Sejam $m, m' \in M_A$, $a, a' \in A$ e $b \in B$, então

   - $\tilde{\Psi}_M(m+m')(a)(b) = (m+m')a\pi(b) = ma\pi(b)+m'a\pi(b) = \tilde{\Psi}_M(m)(a)(b)+\tilde{\Psi}_M(m')(a)(b) = [\tilde{\Psi}_M(m)(a) + \tilde{\Psi}_M(m')(a)](b) = [\tilde{\Psi}_M(m) + \tilde{\Psi}_M(m')](a)(b)$
   - $\tilde{\Psi}_M(ma')(a)(b) = (ma')a\pi(b) = m(a'a)\pi(b) = \tilde{\Psi}_M(m)(a'a)(b) = (\tilde{\Psi}_M(m)a')(a)(b)$

3. $\Psi_M\tilde{\Psi}_M = id_M$ e $\tilde{\Psi}_M\Psi_M = id_{\mathsf{Hom}_B(A_B,\mathsf{Hom}_A(B_A,M_A))}$:
   Sejam $m \in M$, $a \in A$, $b \in B$ e $\phi \in \mathsf{Hom}_B(A_B, \mathsf{Hom}_A(B_A, M_A))$, então
   - $\Psi_M\tilde{\Psi}_M(m) = \tilde{\Psi}_M(m)(1_A)(1_B) = m1_A\pi(1_B) = m1_A1_A = m$
   - $\tilde{\Psi}_M\Big(\Psi_M(\phi)\Big)(a)(b) = \Big(\Psi_M(\phi)\Big)a\pi(b) = \Psi_M(\phi a\pi(b)) = (\phi a\pi(b))(1_A)(1_B) =$
     $= \phi(a\pi(b))(1_B) = \phi(a \cdot b)(1_B) = (\phi(a)b)(1_B) = \phi(a)(b)$
4. $\{\Psi_M\}_{M\in\mathsf{mod}\,A}$ é um morfismo funtorial: Sejam M_A e N_A dois A-módulos e $f : M_A \to N_A$ um morfismo de A-módulos, mostraremos que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_B(A_B, \mathsf{Hom}_A(B_A, M_A)) \arrow[r, "\Psi_M"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_B(A_B,\mathsf{Hom}_A(B_A,f))"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_A \arrow[d, "f"] \\
\mathsf{Hom}_B(A_B, \mathsf{Hom}_A(B_A, N_A)) \arrow[r, "\Psi_N"'] & N_A
\end{tikzcd}$$

   De fato, para todo $\phi \in \mathsf{Hom}_B(A_B, \mathsf{Hom}_A(B_A, M_A))$ temos que
   $\Psi_N \circ \mathsf{Hom}_B(A_B, \mathsf{Hom}_A(B_A, f))(\phi) = \Psi_N(\mathsf{Hom}_A(B_A, f)\circ\phi) = [(\mathsf{Hom}_A(B_A, f)\circ\phi)(1_A)](1_B) =$
   $[\mathsf{Hom}_A(B_A, f)(\phi(1_A))](1_B) = (f \circ \phi(1_A))(1_B) = f(\phi(1_A)(1_B)) = f \circ \Psi_M(\phi)$

■

Observe que não vale $- \otimes_B A \otimes_A B_B \approx id_{\mathsf{mod}\,B}$ e nem $\mathsf{Hom}_A(B_A, \mathsf{Hom}_B(A_B, -)) \approx id_{\mathsf{mod}\,B}$. Se fosse esse o caso, teríamos uma equivalência entre as categorias $\mathsf{mod}\,A$ e $\mathsf{mod}\,B$. Mostraremos que os funtores $- \otimes_B A$ não são fiéis, portanto, pela Proposição 1.1 não são equivalências de categorias:

Exemplo 2.2 *O funtor* $- \otimes_B A : \mathsf{mod}\,B \to \mathsf{mod}\,A$ *não é fiel.*

Prova. Sejam A e B duas R-álgebras tais que B é uma extensão cindida de A por um ideal nilpotente (não nulo) Q. Consideremos a aplicação $- \otimes_B A : \mathsf{Hom}_B(Q, B) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(Q \otimes_B A, B \otimes_B A)$. Como $q \otimes a = q1_B \otimes a = 1_B \otimes q \cdot a = 1_B \otimes \pi(q)a = 0$ para todo $q \in Q$ e para todo $a \in A$, temos $\mathsf{Hom}_A(Q \otimes_B A, B \otimes_B A) = \{0\}$. Mas o homomorfismo ($B$-linear) inclusão, $\iota : Q_B \longrightarrow B_B$, é não nulo, portanto essa aplicação não é injetora. ■

Exemplo 2.3 *O funtor* $\mathsf{Hom}_B(A_B, -) : \mathsf{mod}\,B \to \mathsf{mod}\,A$ *não é fiel.*

Prova. Sejam A e B duas R-álgebras tais que B é uma extensão cindida de A por um ideal nilpotente (não nulo) Q. Consideremos a aplicação

$\mathsf{Hom}_B(A_B, -) : \mathsf{Hom}_B(DQ, DQ) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(\mathsf{Hom}_B(A, DQ), \mathsf{Hom}_B(A, DQ))$ onde D é o funtor dual definido no Exemplo 1.8. O morfismo identidade $id : DQ \rightarrow DQ$ é não nulo. Mostraremos que $\mathsf{Hom}_A(\mathsf{Hom}_B(A, DQ), \mathsf{Hom}_B(A, DQ)) = 0$, o que implicará que $\mathsf{Hom}_B(A_B, -)$ não é fiel. Pela definição de funtor dual e pelo Teorema da adjunção (1.7), vale a seguinte sequência de isomorfismos:

$$\mathsf{Hom}_B(A, DQ) = \mathsf{Hom}_B(A, \mathsf{Hom}_R(Q, R)) \cong \mathsf{Hom}_R(A \otimes_B Q, R) = D(A \otimes_B Q).$$

Pelo mesmo raciocínio do exemplo anterior, $A \otimes_B Q = 0$ e portanto $\mathsf{Hom}_B(A, DQ) = 0$. ■

Veremos agora uma outra forma de olhar o funtor $- \otimes_B A : \mathsf{mod}\ B \to \mathsf{mod}\ A$.

Dado um B-módulo M, observe que $\frac{M}{MQ}$ é anulado por Q, logo tem uma estrutura natural de $\frac{B}{Q}$-módulo, dada por $(m+MQ)(b+Q) := mb+MQ$, e consequentemente de A-módulo $((m+MQ)\cdot a := (m+MQ)(\sigma(a)+Q) = m\sigma(a)+MQ)$.

Definimos o funtor $F : \mathsf{mod}\, B \to \mathsf{mod}\, A$ associando a cada B-módulo M, o A-módulo $FM := \frac{M}{MQ}$, e para cada morfismo de B-módulos $f : M_B \to N_B$, o morfismo de A-módulos $Ff : \frac{M}{MQ} \to \frac{N}{NQ}$ dado por $m + MQ \mapsto f(m) + NQ$.

Lembremos que um funtor $G : \mathsf{mod}\ B \rightarrow \mathsf{mod}\ A$ é dito R-linear se para cada par de módulos (X_B, Y_B) a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hom}_B(X,Y) & \to & \mathsf{Hom}_A(GX,GY) \\ f & \mapsto & Ff \end{array}$$

é R-linear. O funtor F aqui definido é R-linear pois para $f, g \in \mathsf{Hom}_B(M, N)$, $x \in R$ e $m \in M$, vale $F(fx+g)(m+MQ) = (fx+g)(m)+NQ = (fx)(m)+g(m)+NQ = (f(xm)+NQ)+(g(m)+NQ) = ((Ff)x + Fg)(m + MQ)$.

Além disso, F preserva somas diretas, pois

$$F\left(\bigoplus M_i\right) = \frac{\bigoplus M_i}{(\bigoplus M_i)\, Q} \cong \frac{\bigoplus M_i}{\bigoplus M_i Q} \cong \bigoplus \frac{M_i}{M_i Q} = \bigoplus F M_i$$

Proposição 2.3 *O funtor F é funtorialmente isomorfo a $- \otimes_B A : \mathsf{mod}\ B \to \mathsf{mod}\ A$.*

Para a demonstração vamos utilizar o Teorema de Watts, que enunciaremos a seguir:

Lema 2.4 *(Teorema de Watts) Sejam A e B R-álgebras e $G : \mathsf{Mod}\, B \rightarrow \mathsf{Mod}\, A$ um funtor R-linear. As condições abaixo são equivalentes:*

(i) G é exato à direita e preserva somas diretas.

(ii) Existe um isomorfismo funtorial $G \approx - \otimes_B M$, onde M é o A-módulo $G(B)$.

(iii) G admite um adjunto à direita.

■

Prova. (da Proposição 2.3) Como o funtor F é R-linear e preserva somas diretas, basta demontrar que ele é exato à direita, pois pela equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (ii) do teorema de Watts teremos $F \approx - \otimes_B \frac{B}{BQ}$ e consequentemente $F \approx - \otimes_B A$, uma vez que $F(B_B) = \frac{B}{BQ} = \frac{B}{Q} \cong A$.

Seja $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ uma sequência exata à direita em $\mathsf{mod}\, B$. Mostraremos que a sequência $\frac{L}{LQ} \xrightarrow{Ff} \frac{M}{MQ} \xrightarrow{Fg} \frac{N}{NQ} \longrightarrow 0$ é exata em $\mathsf{mod}\, A$.

A aplicação $Fg : \frac{M}{MQ} \rightarrow \frac{N}{NQ}$ é sobrejetora pois dado $n + NQ \in \frac{N}{NQ}$, como g é sobrejetora existe $m \in M$ tal que $g(m) = n$, daí $Fg(m + MQ) = g(m) + NQ = n + NQ$.

Mostremos também que $\mathrm{Im}\, Ff = \mathsf{Nuc}\, Fg$:
Se $l \in L$, então $(Fg)(Ff)(l + LQ) = Fg(f(l) + MQ) = g(f(l)) + NQ = 0$ pois $gf = 0$. Portanto, $\mathrm{Im}\, Ff \subseteq \mathsf{Nuc}\, Fg$. Por outro lado, seja $m \in M$ tal que $Fg(m + MQ) = 0$, isto é, $g(m) + NQ = 0$. Então, $g(m) = \sum n_i q_i \in NQ$. Para cada n_i, seja $m_i \in M$ de forma que $g(m_i) = n_i$ (g é sobrejetora). Daí $g(m) = \sum n_i q_i = \sum g(m_i) q_i = \sum g(m_i q_i) = g(\sum m_i q_i)$ pois g é homomorfismo de B-módulos e $q_i \in Q \subseteq B$. Então,
$m - \sum m_i q_i \in \mathsf{Nuc}\, g = \mathrm{Im}\, f$ e portanto, existe $l \in L$ tal que $m - \sum m_i q_i = f(l)$, ou seja,
$m - f(l) = \sum m_i q_i \in MQ$. Finalmente, $Ff(l + MQ) = f(l) + MQ = m + MQ$, o que mostra que $\mathrm{Im}\, Ff \supseteq \mathsf{Nuc}\, Fg$. ■

2.3 Projetivos, injetivos e conexidade

Dadas duas R-álgebras A e B, onde B é extensão cindida por nilpotente de A, queremos obter informações de B que sejam herdadas por A e vice-versa. A primeira que iremos analisar é a conexidade dessas álgebras, para isso começaremos estudando a relação entre os módulos projetivos das categorias $\mathsf{mod}\, A$ e $\mathsf{mod}\, B$.

Projetivos e Injetivos

Vamos comparar os módulos projetivos e injetivos em $\mathsf{mod}\,A$ com os projetivos e injetivos em $\mathsf{mod}\,B$. Veremos que a cada projetivo (injetivo) em $\mathsf{mod}\,A$ corresponde um projetivo (injetivo) em $\mathsf{mod}\,B$ e vice-versa.

Lema 2.5 *Seja M_B um B-módulo finitamente gerado. Então, $M = 0$ se, e somente se, $\frac{M}{MQ} = 0$.*

Prova. Obviamente $\frac{M}{MQ} = 0$ quando $M = 0$. Suponhamos $\frac{M}{MQ} = 0$, ou seja, $M = MQ$. Como B é uma álgebra de Artin temos que $\mathsf{rad}\,M_B = M\mathsf{rad}\,B$, e como Q é nilpotente temos $Q \subsetneq \mathsf{rad}\,B$. Portanto, $M = MQ \subseteq M\mathsf{rad}\,B = \mathsf{rad}\,M_B$. Pelo Lema de Nakayama (1.4), se $L \subsetneq \mathsf{rad}\,M$ é submódulo de M e $M + L = M$ então $L = M$. Tomando $L = 0$, resulta que $M = 0$. ■

Proposição 2.6 *Seja B uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q, então:*

(a) *$X_B \in \mathsf{mod}\,B$ é um B-módulo projetivo e indecomponível se, e somente se, existe $P_A \in \mathsf{mod}\,A$ projetivo e indecomponível tal que $X \cong P \otimes_A B$.*

(b) *$Y_B \in \mathsf{mod}\,B$ é um B-módulo injetivo e indecomponível se, e somente se, existe $I_A \in \mathsf{mod}\,A$ injetivo e indecomponível tal que $Y \cong \mathsf{Hom}_A(B, I)$.*

Prova.

(a) $\Leftarrow$ Seja P_A projetivo e indecomponível, mostraremos que $P \otimes_A B_B$ é projetivo e indecomponível.

Como P_A é projetivo então existem P'_A e um conjunto J tais que $P \oplus P' = A_A^{(J)}$. Daí $(P \otimes_A B) \oplus (P' \otimes_A B) = A_A^{(J)} \otimes_A B_B = (A \otimes_A B_B)^{(J)} = B_B^{(J)}$, isto é $P \otimes_A B$ é somando do B-módulo livre $B_B^{(J)}$ e portanto é projetivo.

Suponhamos agora que $P \otimes_A B_B = M_B \oplus N_B$. Aplicando o funtor $- \otimes_B A$ temos $P_A \cong P \otimes_A B \otimes_B A = (M_B \oplus N_B) \otimes_B A = (M \otimes_B A) \oplus (N \otimes_B A)$. Pela Proposição 2.3 chegamos a $P_A \cong \frac{M}{MQ} \oplus \frac{N}{NQ}$. Como P_A é indecomponível temos $\frac{M}{MQ} = 0$ ou $\frac{N}{NQ} = 0$ e pelo Lema 2.5 segue que $M = 0$ ou $N = 0$. Portanto, $P \otimes_A B_B$ é indecomponível.

$\Rightarrow$ Seja X_B projetivo e indecomponível. Então, $B_B = \bigoplus_i M_i$, onde M_i são B-módulos projetivos e indecomponíveis dois a dois não isomorfos e $X_B = M_i$ para algum i. Da mesma forma $A_A = \bigoplus_j P_j$ com P_j projetivos indecomponíveis, dois a dois não isomorfos. Mas, $B_B \cong A \otimes_A B_B \cong \left(\bigoplus_j P_j\right) \otimes_A B_B \cong \bigoplus_j (P_j \otimes_A B_B)$. Logo, $B_B = \bigoplus_i M_i \cong \bigoplus_j P_j \otimes_A B_B$. Como cada $P_j \otimes_A B_B$ é projetivo e indecomponível, concluímos que $X_B \cong P_j \otimes_A B_B$ para algum j.

(b) $\Leftarrow$ Seja I_A um A-módulo injetivo e indecomponível, mostraremos que $\mathsf{Hom}_A(B, I)$ é um B-módulo injetivo e indecomponível. Lembremos que se I_A é injetivo então o dual DI é um A^{op}-módulo projetivo e se I_A é indecomponível então DI é indecomponível. Como DI é um A^{op}-módulo projetivo e indecomponível, com argumento similar ao do item (a), teremos que o B^{op}-módulo $B \otimes_A DI$ é projetivo e indecomponível. Daí, o dual deste último $D\,(B \otimes_A DI)$ é B-injetivo. Finalmente, pelo Teorema da adjunção (1.7), a sequência de isomorfismos abaixo nos leva a concluir que $\mathsf{Hom}_A(B, I)$ é um B-módulo injetivo e indecomponível:

$$D\,(B \otimes_A DI) = \mathsf{Hom}_R(B \otimes_A DI, R) \cong \mathsf{Hom}_A(B, \mathsf{Hom}_R(DI, R)) \cong \mathsf{Hom}_A(B, I).$$

$\Rightarrow$ Seja Y_B um B-módulo injetivo e indecomponível. Como DY é um B^{op}-módulo projetivo e indecomponível, por um argumento similar ao do item (a), existe um A^{op}-módulo projetivo e indecomponível P tal que $DY \cong B \otimes_A P$. Tomando $I_A = DP$, temos que I_A é injetivo e indecomponível e pelo Teorema da adjunção (1.7) vale a sequência de isomorfismos

$$\begin{aligned} Y_B &\cong DDY_B \cong D(B \otimes_A P) = \mathsf{Hom}_R(B \otimes_A P, R) \\ &\cong \mathsf{Hom}_A(B, \mathsf{Hom}_R(P, R)) = \mathsf{Hom}_A(B, DP) = \mathsf{Hom}_A(B, I). \end{aligned}$$

■

Se X é um B-módulo projetivo em $\mathsf{mod}\, B$, então podemos escrever $X = \bigoplus_{i-1}^{n} X_i$, onde cada X_i é um B-módulo projetivo indecomponível. Pela Proposição 2.6, para cada $i = 1, ..., n$ existe um

A-módulo projetivo e indecomponível P_i tal que $X_i \cong P_i \otimes_A B$. Fazendo $P = \bigoplus_{i-1}^{n} P_i$, temos que P é um A-módulo projetivo e $X \cong P \otimes_A B$. Um raciocínio análogo vale para módulos injetivos.

Conexidade das álgebras

Com essas informações, em particular sobre módulos projetivos, já podemos enunciar um resultado sobre a conexidade das álgebras envolvidas.

Proposição 2.7 *Seja B uma extensão cindida por nilpotente de A. Se A é uma álgebra conexa, então B também é uma álgebra conexa.*

Prova. Sejam X e $\hat{X}$ dois B-módulos projetivos e indecomponíveis. Pela Proposição 2.6 existem A-módulos P_A e $\hat{P}_A$ tais que $X \cong P \otimes_A B$ e $\hat{X} \cong \hat{P} \otimes_A B$. Como A é uma álgebra conexa existem A-módulos projetivos e indecomponíveis $P = P_0$, P_1,...,$P_n = \hat{P}$ tais que, para cada i,

$$\mathsf{Hom}_A(P_i, P_{i+1}) \neq 0 \text{ ou } \mathsf{Hom}_A(P_{i+1}, P_i) \neq 0.$$

Daí, $X_0 = P \otimes_A B$, $X_1 = P_1 \otimes_A B$, ..., $X_n = P_n \otimes_A B = \hat{P} \otimes_A B$ são B-módulos projetivos e indecomponíveis e ainda temos que $\mathsf{Hom}_B(X_i, X_{i+1}) \neq 0$ ou $\mathsf{Hom}_B(X_{i+1}, X_i) \neq 0$ para cada i, pois se $f : P_i \rightarrow P_j$ é não nulo então $f \otimes_A B : X_i \rightarrow X_{i+1}$ é também não nulo; caso contrário como $\mathrm{Im}\,(f \otimes_A B) = \mathrm{Im}\, f \otimes_A B$, aplicando o funtor $- \otimes_B A$ teríamos $\mathrm{Im}\, f \cong \mathrm{Im}\, f \otimes_A B \otimes_B A = 0$. Portanto, B é uma álgebra conexa. ■

Observação 2.2 *A recíproca não vale, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 2.4 *Sejam A e B as $\mathbb{R}$-álgebras do Exemplo 2.1. Já sabemos que B é uma extensão cindida por nilpotente de A. Neste caso B é uma álgebra conexa, mas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é um idempotente central de A diferente de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou seja, A não é conexa.* ■

Capítulo 3

Aljavas das extensões

Consideremos agora k um corpo algebricamente fechado e k-álgebras dadas por aljavas com relações. Se B é uma extensão cindida de A pelo nilpotente Q, qual será a relação entre suas respectivas aljavas? Após um exemplo (que também mostra que a reciproca da Proposição 2.7 não vale) responderemos tal questão, mostraremos uma relação entre as apresentações das álgebras e finalmente caracterizaremos, neste contexto, o ideal nilpotente Q. Para isso consideraremos álgebras básicas e com dimensão finita sobre k.

Exemplo 3.1 *Sejam Δ a aljava*

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 3, \\ & 2 \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}$ o ideal (admissível) de $k\Delta$ gerado pela relação $\alpha\beta - \gamma\delta$. Consideremos $B = \dfrac{k\Delta}{\mathcal{I}}$ e $Q =< \alpha + \mathcal{I}, \delta + \mathcal{I} >$. Como Δ é conexa, então B é uma álgebra conexa.

Seja a k-álgebra $A = \frac{B}{Q}$. Temos a seguinte sequência de isomorfismos:

$$A = \frac{B}{Q} = \frac{k\Delta/\mathcal{I}}{< \alpha + \mathcal{I}, \delta + \mathcal{I} >} \cong \frac{k\Delta}{< \alpha, \delta >} \cong k\hat{\Delta}, \text{ onde } \hat{\Delta} \text{ é a aljava } \begin{tikzcd} & 4 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[dr, "\gamma"'] & & 3. \\ & 2 & \end{tikzcd}$$

Nesse caso, B é uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q, mas A não é conexa, uma vez que $\hat{\Delta}$ não é conexa.

Antes de relacionarmos as aljavas de A e de B, relembraremos a construção de uma apresentação de uma k-álgebra.

Observação 3.1 (Apresentação de uma k-álgebra) *Sejam C uma k-álgebra básica e de dimensão finita sobre k e $\{e_1, ..., e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos de C. Construímos a aljava ordinária de C, denotada por Δ_C, da seguinte forma:*

O conjunto $(\Delta_C)_0 = \{1, ..., n\}$, ou seja, os vértices estão em correspondência biunívoca com o conjunto de idempotentes $\{e_1, ..., e_n\}$. Dados dois vértices a e b, o número de flechas $a \xrightarrow{\alpha} b$ é $\dim_k \left(e_a \left(\frac{\mathsf{rad}\, C}{\mathsf{rad}^2 C}\right) e_b\right)$. Mostra-se, em [8] por exemplo, que tal construção independe do conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos de C escolhido.

Consideremos a álgebra de caminhos $k\Delta_C$ e denotemos por ϵ_a o caminho trivial associado ao vértice a. Definimos uma apresentação $\eta_C : k\Delta_C \to C$ da seguinte forma:

Escolhemos uma k-base $\{x_\alpha + \mathsf{rad}^2 C \mid a \xrightarrow{\alpha} b\}$ do espaço vetorial $e_a \left(\frac{\mathsf{rad}\, C}{\mathsf{rad}^2 C}\right) e_b$. Definimos então, para cada $i = 1, ..., n$, $\eta_C(\epsilon_i) = e_i$; para cada $\alpha \in (\Delta_C)_1$, $\eta_C(\alpha) = x_\alpha$ e $\eta_C(\alpha_1\alpha_2...\alpha_t) = x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\cdots x_{\alpha_t}$. Estendemos por linearidade aos demais elementos de $k\Delta$. Mostra-se (em [8] por exemplo) que esse morfismo k-linear é também um morfismo de álgebras, é sobrejetor e $\mathcal{I}_C := \mathsf{Nuc}\, \eta_C$ é um ideal admissível de $k\Delta_C$.

Suponhamos que B seja uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q. Veremos que a aljava de A é uma subaljava de Δ_B.

Proposição 3.1 *Seja B uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q. Então*

- $(\Delta_B)_0 = (\Delta_A)_0$.
- *Dados os vértices a e b, o conjunto de flechas em Δ_B é o mesmo que em Δ_A mais* $\dim_k \left(e_a \dfrac{Q}{Q\mathsf{rad}\, A + (\mathsf{rad}\, A)Q + Q^2}\, e_b\right)$ *flechas.*

Prova. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos de B. Como $e_i^t = e_i \neq 0$ para qualquer t, então, como Q é nilpotente, $e_i \notin Q$, ou seja, cada $e_i + Q$ é não nulo. Daí o conjunto $\{e_1 + Q, ..., e_n + Q\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos de $\frac{B}{Q}$, pois

. $(e_i+Q)^2 = e_i^2 + Q = e_i + Q$;

. para $i \neq j$ vale que $(e_i+Q)(e_j+Q) = e_ie_j + Q = 0$, pois $e_ie_j = 0$;

. Suponhamos que $e_i + Q = (e+Q) + (\hat{e}+Q)$ com $e+Q$ e $\hat{e}+Q$ idempotentes ortogonais. Pelo Teorema do levantamento de idempotentes (ver por exemplo [1], VIII.1.5) podemos supor que e e $\hat{e}$ são idempotentes de B. Então, $(e + \mathsf{rad}\, B)$ e $(\hat{e} + \mathsf{rad}\, B)$ são idempotentes ortogonais: de $e^2 + Q = e + Q$ segue que $e^2 - e \in Q \subseteq \mathsf{rad}\, B$ e portanto $(e + \mathsf{rad}\, B)^2 = e^2 + \mathsf{rad}\, B = e + \mathsf{rad}\, B$; e de $(e+Q)(\hat{e}+Q) = 0$ segue que $e\hat{e} \in Q \subseteq \mathsf{rad}\, B$ e portanto $(e + \mathsf{rad}\, B)(\hat{e} + \mathsf{rad}\, B) = 0$. Além disso, como $e_i + Q = e + \hat{e} + Q$, então $e_i - (e+\hat{e}) \in Q \subseteq \mathsf{rad}\, B$ e portanto $e_i + \mathsf{rad}\, B = (e + \mathsf{rad}\, B) + (\hat{e} + \mathsf{rad}\, B)$. Segue então que $e \in \mathsf{rad}\, B$ ou $\hat{e} \in \mathsf{rad}\, B$, pois $e_i + \mathsf{rad}\, B$ é primitivo (ver por exemplo [1], VIII.1.6). Como $\mathsf{rad}\, B$ é nilpotente, então $e = 0$ ou $\hat{e} = 0$. Logo, $e_i + Q$ é primitivo.

. $1_A = 1_B + Q = \sum_{i=1}^{n} e_i + Q = \sum_{i=1}^{n} (e_i + Q)$.

Portanto, $(\Delta_B)_0 = (\Delta_A)_0$.

Para a segunda parte, sejam a e b vértices, então o número de flechas de a para b em $(\Delta_B)_1$ é $\dim_k \left(e_a \frac{\mathsf{rad}\, B}{\mathsf{rad}^{\,2} B} e_b \right)$.

Como k-espaço vetorial temos que a sequência exata abaixo cinde

$$0 \longrightarrow Q \hookrightarrow \mathsf{rad}\, B \underset{\sigma'}{\overset{\pi'}{\rightleftarrows}} \mathsf{rad}\, A \longrightarrow 0\ ,$$

onde π' e σ' são as respectivas restrições de $\pi : B \to A$ e $\sigma : A \to B$ aos radicais.

Então $\mathsf{rad}\, B \cong \mathsf{rad}\, A \oplus Q$ e portanto,

$$\mathsf{rad}^{\,2} B \cong (\mathsf{rad}\, A \oplus Q)(\mathsf{rad}\, A \oplus Q) = \mathsf{rad}^{\,2} A \oplus \Big(Q(\mathsf{rad}\, A) + (\mathsf{rad}\, A)Q + Q^2 \Big).$$

Daí, como $\mathsf{rad}^{\,2} A \subseteq \mathsf{rad}\, A$ e $Q(\mathsf{rad}\, A) + (\mathsf{rad}\, A)Q + Q^2 \subseteq Q$ temos que

$$\frac{\mathsf{rad}\, B}{\mathsf{rad}^{\,2} B} \cong \frac{\mathsf{rad}\, A \oplus Q}{\mathsf{rad}^{\,2} A \oplus \Big(Q(\mathsf{rad}\, A) + (\mathsf{rad}\, A)Q + Q^2 \Big)} \cong \frac{\mathsf{rad}\, A}{\mathsf{rad}^{\,2} A} \oplus \frac{Q}{Q(\mathsf{rad}\, A) + (\mathsf{rad}\, A)Q + Q^2}.$$

Finalmente, $\dim_k\left(e_a\frac{\mathsf{rad}\,B}{\mathsf{rad}\,^2B}\,e_b\right) = \dim_k\left(e_a\frac{\mathsf{rad}\,A}{\mathsf{rad}\,^2A}\,e_b\right) + \dim_k\left(e_a\frac{Q}{Q(\mathsf{rad}\,A)+(\mathsf{rad}\,A)Q+Q^2}\,e_b\right)$. Como $\dim_k\left(e_a\frac{\mathsf{rad}\,A}{\mathsf{rad}\,^2A}\,e_b\right)$ é o número de flechas de a para b em $(\Delta_A)_1$ segue o resultado. ■

Ideal Q

Antes de enunciarmos a caracterização do ideal Q precisamos da seguinte definição:

Definição 3.1 *Sejam Δ uma aljava, $k\Delta$ a álgebra de caminhos de Δ e $\mathcal{I}$ um ideal de $k\Delta$. Dizemos que um conjunto $S \subseteq k\Delta$ de geradores de $\mathcal{I}$ é* **minimal** *se, para cada ρ em S, temos:*

(a) Se ρ é um caminho em Δ, então para todo subcaminho próprio $\hat{\rho}$ de ρ temos $\hat{\rho} \notin \mathcal{I}$.

(b) Se $\rho = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\omega_j$ com $m \geq 2$, $\lambda_j \in k$ não nulos e $\omega_j \in \Delta$ caminhos de comprimento positivo todos com o mesmo início e o mesmo fim, então para cada subconjunto próprio $J \subset \{1, ..., m\}$ não vazio, temos $\sum_{j\in J} \lambda_j\omega_j \notin \mathcal{I}$.

De forma análoga define-se conjunto minimal de geradores para um ideal de $\frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$, onde $\mathcal{I}$ é um ideal admissível de $k\Delta$.

Lema 3.2 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal finitamente gerado de uma k-álgebra $k\Delta$, onde Δ é uma aljava. Então existe um conjunto de geradores minimal para $\mathcal{I}$.*

Prova. A partir de um conjunto qualquer $\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_s\}$ de geradores de $\mathcal{I}$, podemos obter um novo conjunto $G = \{\epsilon_a\rho_i\epsilon_b : a, b \in \Delta_0 \text{ e } 1 \leq i \leq s\}$ de combinações lineares de caminhos com mesmo início e mesmo fim em Δ e que ainda é gerador de Q. Aqui ϵ_a é o caminho trivial do vértice $a \in \Delta_0$. Basta observar que cada elemento do primeiro conjunto de geradores pode ser escrito como $\rho_j = \sum_{a,b\in\Delta_0} \epsilon_a\rho_j\epsilon_b$.

Seja $\sigma = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\omega_j \in G$ com $m \geq 2$, e suponhamos que σ não satisfaz a condição (b) da Definição 3.1. Então existe um subconjunto não vazio próprio $J \subset \{1, ..., m\}$ tal que $\hat{\sigma} \in \mathcal{I}$, onde $\hat{\sigma} = \sum_{j\in J} \lambda_j\omega_j$. Podemos trocar σ por $\hat{\sigma}$ e $\sigma - \hat{\sigma}$ no conjunto de geradores de $\mathcal{I}$. Repetindo o processo um número finito de vezes chegamos a um novo conjunto $G' = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ de geradores de $\mathcal{I}$, onde cada combinação com pelo menos 2 caminhos satisfaz a condição (b).

Suponhamos agora que $\sigma \in G'$ é um caminho que não satisfaz a condição (a) da Definição 3.1. Nesse caso, existe um subcaminho $\hat{\sigma}$, próprio, de σ tal que $\hat{\sigma} \in \mathcal{I}$. Mas então existem ω_1 e ω_2 caminhos tais que $\sigma = \omega_1\hat{\sigma}\omega_2$. Troquemos σ por $\hat{\sigma}$ em G'.

Após um número finito de passos chegamos a um conjunto minimal $S = \{\rho_1, ..., \rho_t\}$ de geradores de $\mathcal{I}$. ■

Sejam ω um caminho e α uma flecha. Denotaremos por $\alpha|\omega$ se existirem subcaminhos $\hat{\omega}$ e $\check{\omega}$ de ω, tais que $\omega = \hat{\omega}\alpha\check{\omega}$.

Mostraremos agora que existe uma apresentação η_B para álgebra B tal que o conjunto das flechas que estão em $(\Delta_B)_1 \setminus (\Delta_A)_1$ gera o ideal Q.

Proposição 3.3 *Sejam B uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q e $\eta_A : k\Delta \to A$ uma apresentação de A. Então, existem uma apresentação $\eta_B : k\Delta_B \to B$ e morfismos de álgebras $0 \to k\Delta_A \xrightarrow{\hat{\sigma}} k\Delta_B$, $k\Delta_B \xrightarrow{\hat{\pi}} k\Delta_A \to 0$ tais que $\hat{\pi}\hat{\sigma} = id_{k\Delta_A}$ e o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
k\Delta_B \arrow[r, shift left, "\hat{\pi}"] \arrow[d, "\eta_B"'] & k\Delta_A \arrow[l, shift left, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "\eta_A"] \\
B \arrow[r, shift left, "\pi"] & A \arrow[l, shift left, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

onde π é o epimorfismo cindido e σ é tal que $\pi\sigma = id_A$.

Prova. Sejam $\pi : B \to A$, $\sigma : A \to B$ morfismos tais que $\pi\sigma = id_A$ e $Q = \mathsf{Nuc}\,\pi$. Podemos identificar A como uma subálgebra de B e σ como a inclusão. Pela Proposicao 3.1 podemos considerar Δ_A como uma subaljava de Δ_B. A inclusão $\Delta_A \hookrightarrow \Delta_B$ induz um monomorfismo de álgebras $\hat{\sigma} : k\Delta_A \to k\Delta_B$ dado por $\hat{\sigma}(\epsilon_i) = \epsilon_i$ para cada $i \in (\Delta_A)_0$ e $\hat{\sigma}(\alpha) = \alpha$ para cada $\alpha \in (\Delta_A)_1$.

Pela Observação 3.1, o conjunto $X_{ij} := \{\eta_A(\alpha) + \mathsf{rad}\,^2 A \mid i \xrightarrow{\alpha} j \in (\Delta_A)_1\}$ é uma k-base para $e_i \left(\frac{\mathsf{rad}\,A}{\mathsf{rad}\,^2 A}\right) e_j$.

Seja $S := (\Delta_B)_1 \setminus (\Delta_A)_1$. Pela Proposição 3.1 o número de flechas de i para j em S é

$$\dim_k \left(e_i \frac{Q}{Q\mathsf{rad}\, A + (\mathsf{rad}\, A)Q + Q^2}\, e_j \right).$$

Para cada flecha $i \xrightarrow{\beta} j$ em S escolhemos $q_\beta \in Q$ de modo que o conjunto $Y_{ij} := \{q_\beta + \big(Q\mathsf{rad}\, A + (\mathsf{rad}\, A)Q + Q^2\big) \,|i \xrightarrow{\beta} j \in S\}$ seja uma k-base para $e_i \dfrac{Q}{Q\mathsf{rad}\, A + (\mathsf{rad}\, A)Q + Q^2} e_j$.

Temos então que $X_{ij} \cup Y_{ij}$ é uma base para $e_i \left(\frac{\mathsf{rad}\, B}{\mathsf{rad}^{\,2} B}\right) e_j$. Definimos uma apresentação para B fazendo $\eta_B(\epsilon_i) = e_i$ para cada $i \in (\Delta_B)_0$, $\eta_B(\alpha) = \eta_A(\alpha)$ para cada $\alpha \in (\Delta_A)_1$ e $\eta_B(\beta) = q_\beta$ para cada $\beta \in S$.

Dessa forma temos que $\eta_B \hat{\sigma} = \sigma \eta_A$ pois $\eta_B \hat{\sigma}(\epsilon_i) = \eta_B(\epsilon_i) = e_i = \sigma \eta_A(\epsilon_i)$ e para $\alpha \in (\Delta_A)_1$ temos $\eta \hat{\sigma}(\alpha) = \eta_B(\alpha) = \eta_A(\alpha) = \sigma \eta_A(\alpha)$.

Definimos também $\hat{\pi} : k\Delta_B \to k\Delta_A$ por $\hat{\pi}(\epsilon_i) = \epsilon_i$ para cada $i \in (\Delta_B)_0$, $\hat{\pi}(\alpha) = \alpha$ para cada $\alpha \in (\Delta_A)_1$ e $\hat{\pi}(\beta) = 0$ para cada $\beta \in S$. Temos, claramente, que $\hat{\pi}\hat{\sigma} = id_{k\Delta_A}$. Além disso, $\eta_A \hat{\pi} = \pi \eta_B$ pois

. para cada $i \in (\Delta_B)_0$, $\pi \eta_B(\epsilon_i) = \pi(e_i) = \pi\sigma(e_i) = e_i$ e $\eta_A \hat{\pi}(\epsilon_i) = \eta_A(\epsilon_i) = e_i$;

. para cada $\alpha \in (\Delta_A)_1$, $\pi \eta_B(\alpha) = \pi \eta_A(\alpha) = \pi\sigma\eta_A(\alpha) = \eta_A(\alpha)$ e $\eta_A \hat{\pi}(\alpha) = \eta_A(\alpha)$;

. para cada $\beta \in S$, $\pi \eta_B(\beta) = \pi(q_\beta) = 0$ e $\eta_A \hat{\pi}(\beta) = \eta_A(0) = 0$.

■

Corolário 3.4 *Nos termos da Proposição 3.3, sejam $\mathcal{I}_A := \mathsf{Nuc}\, \eta_A$ e $\mathcal{I}_B := \mathsf{Nuc}\, \eta_B$.*
Então $\hat{\sigma}(\mathcal{I}_A) \subseteq \mathcal{I}_B$.

Prova. Seja ω em $k\Delta_A$ tal que $\eta_A(\omega) = 0$. Então, como $\hat{\sigma}(\omega) = \omega$ e pela comutatividade do diagrama da proposição anterior, $\eta_B(\omega) = \eta_B(\hat{\sigma}(\omega)) = \sigma\eta_A(\omega) = \sigma(0) = 0$, ou seja, $\hat{\sigma}(\omega) = \omega \in \mathcal{I}_B$. ■

Corolário 3.5 *Seja B uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q. Então, existe uma apresentação de B e um subconjunto S de flechas de $(\Delta_B)_1$, tais que o ideal Q é gerado pelas classes das flechas de S.*

Prova. Consideremos a apresentação de B e os morfismos $\hat{\pi}$ e $\hat{\sigma}$ como na demonstração da Proposição 3.3. Por construção, o núcleo de $\hat{\pi}$ é gerado por S. Mostraremos que $\eta_B(\mathsf{Nuc}\,\hat{\pi}) = Q$. Se $\beta \in S$ então $\pi\eta_B(\beta) = \pi(q_\beta) = 0$, ou seja, $\eta_B(\mathsf{Nuc}\,\hat{\pi}) \subseteq Q$. Para a outra inclusão, seja $q \in Q$ e $\omega \in k\Delta_B$ com $q = \eta_B(\omega)$.

Como $\hat{\pi}\hat{\sigma} = id_{k\Delta_A}$ então a sequência de k-espaços vetoriais $0 \to \mathsf{Nuc}\hat{\pi} \to k\Delta_B \xrightarrow{\hat{\pi}} k\Delta_A \to 0$ cinde e portanto podemos escrever $\omega = \hat{\omega} + \breve{\omega}$ com $\hat{\omega} \in \mathsf{Nuc}\hat{\pi}$ e $\breve{\omega} \in k\Delta_A$. Mostraremos que $\eta_B(\hat{\omega}) = q$. Para isso, basta mostrar que $\breve{\omega} \in \mathcal{I}_B$. Temos que $\eta_A\hat{\pi}(\omega) = \pi\eta_B(\omega) = \pi(q) = 0$, ou seja, $\breve{\omega} = \hat{\pi}(\omega) \in \mathcal{I}_A$. Pelo Corolário 3.4, $\breve{\omega} = \hat{\sigma}(\breve{\omega}) \in \mathcal{I}_B$. ■

A pergunta natural é quando que um ideal gerado por classes de flechas define uma extensão cindida por nilpotente. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.2 *Consideremos a mesma aljava Δ e o mesmo ideal $\mathcal{I}$ do exemplo 3.1, porém agora consideremos $Q' =< \alpha + \mathcal{I} >$. Nesse caso Q' é um ideal gerado pela classe de uma flecha de Δ, mas $B = \frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$ não é uma extensão cindida por nilpotente de $A = \frac{B}{Q'}$. Se fosse esse o caso, teríamos A uma k-subálgebra de B, o que não acontece, pois em A temos que $\gamma\delta$ é nulo (pois $\gamma\delta + \mathcal{I} = \alpha\beta + \mathcal{I} \in Q'$) e em B é não nulo. Notemos que o conjunto $S = \{\alpha\}$ não tem a propriedade do corolário que segue, isto é, $\alpha|\alpha\beta$, mas não existe $\mu \in S$ com $\mu|\gamma\delta$.* ■

Corolário 3.6 *Nos termos da Proposição 3.3, seja X um conjunto minimal de geradores para $\mathcal{I}_B$. Então o conjunto S tem a seguinte propriedade:*

$$\text{“ sempre que para } \rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\omega_i \in X \text{ existirem } i \in \{1, ..., m\} \text{ e } \alpha_i \in S$$
$$\text{com } \alpha_i|\omega_i, \text{ então para cada } j \in \{1, ..., m\} \text{ existirá } \alpha_j \in S \text{ tal que } \alpha_j|\omega_j \text{”}$$

Prova. Seja $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\omega_i \in X$ tal que para algum i existe $\alpha_i \in S$ com $\alpha_i|\omega_i$. Podemos escrever $\rho = \sum_{i\in I} \lambda_i\omega_i + \sum_{j\in J} \lambda_j\omega_j$ com $I, J \subseteq \{1, ..., m\}$ de forma que, para cada $i \in I$ existe $\alpha_i \in S$ com $\alpha_i|\omega_i$, e para cada $j \in J$ não existe $\alpha \in S$ com $\alpha|\omega_j$. Mostraremos que $J = \emptyset$. Suponhamos o contrário, então $\hat{\pi}(\rho) = \sum_{j\in J} \lambda_j\omega_j \in \mathcal{I}_A$, pois $\eta_A\hat{\pi}(\rho) = \pi\eta_B(\rho) = \pi(0) = 0$. Pelo Corolário 3.4, $\sum_{j\in J} \lambda_j\omega_j = \hat{\sigma}(\sum_{j\in J} \lambda_j\omega_j) \in \mathcal{I}_B$. Contradição com a minimalidade de X. Logo, $J = \emptyset$. ■

Mostraremos que a propriedade desse corolário é suficiente para garantir que um ideal gerado por flechas defina uma extensão cindida por nilpotente.

Proposição 3.7 *Sejam B uma k-álgebra, $\eta_B : k\Delta_B \to B$ uma apresentação de B e Q um ideal de B, gerado pela classe das flechas de um conjunto S. Então existem uma apresentação de $A = \frac{B}{Q}$, $\eta_A : k\Delta_A \to A$ e morfismos de álgebras $0 \to k\Delta_A \xrightarrow{\hat{\sigma}} k\Delta_B$, $k\Delta_B \xrightarrow{\hat{\pi}} k\Delta_A \to 0$ tais que $\hat{\pi}\hat{\sigma} = id_{k\Delta_A}$ e o seguinte diagrama de linhas e colunas exatas é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \hat{Q} \cap \mathcal{I}_B \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_B \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{Q} \arrow[r] \arrow[d] & k\Delta_B \arrow[r, shift left, "\hat{\pi}"] \arrow[d, "\eta_B"'] & k\Delta_A \arrow[r] \arrow[l, shift left, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "\eta_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde π é o epimorfismo canônico.

Prova. Pela demonstração da primeira parte da Proposição 3.1 já temos que $(\Delta_A)_0 = (\Delta_B)_0$. Consideremos o conjunto $\Delta_1 = (\Delta_B)_1 \setminus S$. Chamando $\Delta_0 = (\Delta_A)_0$, mostraremos que $\Delta_A = \Delta$.

Como Δ é uma subaljava de Δ_B existe um morfismo de álgebras $\hat{\sigma} : k\Delta \to k\Delta_B$ dada por $\hat{\sigma}(\epsilon_i) = \epsilon_i$, para cada $i \in \Delta_0$ e $\hat{\sigma}(\alpha) = \alpha$ para cada $\alpha \in \Delta_1$. Claramente, $\hat{\sigma}$ é um monomorfismo.

Definimos agora $\hat{\pi} : k\Delta_B \to k\Delta$ por

$\hat{\pi}(\epsilon_i) = \epsilon_i$, $\forall i \in (\Delta_B)_0$

$\hat{\pi}(\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \notin S$

$\hat{\pi}(\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in S$;

e estendendo por linearidade aos demais elementos de $k\Delta_B$ teremos que esse morfismo k-linear é também um epimorfismo de álgebras, que $\hat{\pi}\hat{\sigma} = 1_{k\Delta}$ e que o núcleo é gerado por S. Denotemos por $\hat{Q} = \mathsf{Nuc}\,\hat{\pi}$.

Definimos agora um morfismo $\eta_A : k\Delta \to A$ da seguinte forma: dado $\rho \in k\Delta$, existe $\omega \in k\Delta_B$ tal que $\rho = \hat{\pi}(\omega)$. Notemos que $\eta_B(\hat{Q}) = Q$, daí se $\hat{\pi}(\omega) = \hat{\pi}(\tilde{\omega})$ então $\omega - \tilde{\omega} \in \hat{Q}$ e portanto $\eta_B(\omega - \tilde{\omega}) \in Q$, isto é, $\pi\eta_B(\omega) = \pi\eta_B(\tilde{\omega})$. Podemos então definir $\eta_A(\rho) := \pi\eta_B(\omega)$.

Então η_A é um epimorfismo pois π e η_B o são e claramente vale $\pi\eta_B = \eta_A\hat{\pi}$. Para mostrar que η_A é uma apresentação de A falta verificar que $\mathcal{I}_A := \mathsf{Nuc}\,\eta_A$ é um ideal admissível de $k\Delta$. Daí pela unicidade da aljava ordinária teremos que $\Delta_A = \Delta$.

Devemos mostrar que existe $n \geq 2$ tal que $J^n \subseteq \mathcal{I}_A \subseteq J^2$, onde J denota o ideal de $k\Delta$ gerado pelas flechas de Δ. Denotemos também por J_{Δ_B} o ideal de $k\Delta_B$ gerado pelas flechas de Δ_B.

$\mathcal{I}_A \subseteq J^2$: Suponhamos que $\mathcal{I}_A \nsubseteq J^2$, e seja $\rho \in \mathcal{I}_A \setminus J^2$. Podemos escrever $\rho = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i\alpha_i + \gamma$, com $\alpha_1, ..., \alpha_t \in \Delta_1$, $\lambda_1, ..., \lambda_t \in k$ e $\gamma \in J^2$. Então $\pi\eta_B(\rho) = \eta_A\hat{\pi}(\rho) = \eta_A\hat{\pi}(\hat{\sigma}(\rho)) = \eta_A(\rho) = 0$, pois $\pi\eta_B = \eta_A\hat{\pi}$, $\rho = \hat{\sigma}(\rho) \in k\Delta_B$, $\hat{\pi}\hat{\sigma} = 1_{k\Delta}$ e $\rho \in \mathcal{I}_A$. Ou seja, $\rho + \mathcal{I}_B = \eta_B(\rho) \in Q$. Como Q é gerado por classes de flechas de S, existem $\beta_1, ..., \beta_s \in S$ e $\delta_1, ..., \delta_s \in k$ tais que $\rho + \mathcal{I}_B = \sum_{i=1}^{s} \delta_i\beta_i + \mathcal{I}_B$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i\alpha_i + \gamma + \mathcal{I}_B = \sum_{i=1}^{s} \delta_i\beta_i + \mathcal{I}_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t} \lambda_i\alpha_i + \gamma - \sum_{i=1}^{s} \delta_i\beta_i \in \mathcal{I}_B \subseteq J^2_{\Delta_B} \text{ (pois } \mathcal{I}_B \text{ é admissível)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{t} \lambda_i\alpha_i - \sum_{i=1}^{s} \delta_i\beta_i \in J^2_{\Delta_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t} \lambda_i\alpha_i - \sum_{i=1}^{s} \delta_i\beta_i = 0 \text{ (pois } \alpha_i \text{ e } \beta_i \text{ são flechas)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{t} \lambda_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{s} \delta_i\beta_i.$$

Contradição, pois cada $\alpha_i \in S$ e cada $\beta_j \in \Delta_1 = (\Delta_B)_1 \setminus S$. Logo, $\mathcal{I}_A \subseteq J^2$.

$J^n \subseteq \mathcal{I}_A$: Como $\mathcal{I}_B$ é um ideal admissível de $k\Delta_B$, existe n tal que $J^n_{\Delta_B} \subseteq \mathcal{I}_B$. Daí como Δ é subaljava de Δ_B vale que $J^n \subseteq J^n_{\Delta_B} \subseteq \mathcal{I}_B$, ou seja, $\eta_B(\rho) = 0$ para todo $\rho \in J^n$. Finalmente, para todo $\rho \in J^n$, temos $\eta_A(\rho) = \eta_A(\hat{\pi}\hat{\sigma}(\rho)) = \pi\eta_B(\hat{\sigma}(\rho)) = \pi\eta_B(\rho) = 0$. Logo, $J^n \subseteq \mathcal{I}_A$.

Temos então o seguinte diagrama comutativo e de linhas exatas,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{Q} \arrow[r, "\hat{\iota}"] \arrow[d, "\eta_B|_{\hat{Q}}"'] & k\Delta_B \arrow[r, "\hat{\pi}"] \arrow[d, "\eta_B"'] & k\Delta_A \arrow[r] \arrow[d, "\eta_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "\iota"'] & B \arrow[r, "\pi"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde ι e $\hat{\iota}$ são as respectivas inclusões de Q em B e de $\hat{Q}$ em $k\Delta_B$.

Pelo Lema da serpente ([1] por exemplo) chegamos ao diagrama que queremos.

■

Teorema 3.8 *Sejam $\eta_B : k\Delta_B \to B$ uma apresentação de B, X um conjunto minimal de geradores de $\mathcal{I}_B = \mathsf{Nuc}\,\eta_B$, Q um ideal gerado por classes de flechas de um conjunto S, e $\pi : B \to A = \frac{B}{Q}$ a projeção canônica. Se S tem a seguinte propriedade:*

$$\text{“ sempre que para } \rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega_i \in X \text{ existirem } i \in \{1, ..., m\} \text{ e } \alpha_i \in S$$
$$\text{com } \alpha_i | \omega_i, \text{ então para cada } j \in \{1, ..., m\} \text{ existirá } \alpha_j \in S \text{ tal que } \alpha_j | \omega_j \text{”}$$

então π é um epimorfismo cindido, ou seja, B é uma extensão cindida de A pelo nilpotente Q.

Prova. O ideal Q é nilpotente, isto é, $Q \subseteq \mathsf{rad}\, B$ pois é gerado por classes de flechas.

Construíremos um morfismo de ágebras $\sigma : A \to B$ tal que $\pi\sigma = id_A$. Pela Proposição 3.7, existem uma apresentação de A, $\eta_A : k\Delta_A \to A$ e morfismos de álgebras $0 \to k\Delta_A \xrightarrow{\hat{\sigma}} k\Delta_B$, $k\Delta_B \xrightarrow{\hat{\pi}} k\Delta_A \to 0$ tais que $\hat{\pi}\hat{\sigma} = id_{k\Delta_A}$ e $\pi\eta_B = \eta_A\hat{\pi}$.

Dado $a \in A$ existe $\omega \in k\Delta_A$ com $a = \eta_A(\omega)$. Definimos $\sigma(a) := \eta_B\hat{\sigma}(\omega)$. Para que σ esteja definida é suficiente mostrar que $\hat{\sigma}(\mathcal{I}_A) \subseteq \mathcal{I}_B$, onde $\mathcal{I}_A = \mathsf{Nuc}\,\eta_A$, pois daí se $\eta_A(\omega) = \eta_A(\tilde{\omega})$, então $\omega - \tilde{\omega} \in \mathcal{I}_A$, o que implica que $\hat{\sigma}(\omega - \tilde{\omega}) \in \mathcal{I}_B$, ou seja, $\eta_B\hat{\sigma}(\omega) = \eta_B\hat{\sigma}(\tilde{\omega})$.

Antes de mostrar tal inclusão vejamos que σ definida dessa forma é um morfismo de álgebras e é uma inversa à direita de π: é um morfismo de álgebras pois η_A, η_B e $\hat{\sigma}$ o são. Agora dado $a = \eta_A(\omega) \in A$, então $\pi\sigma(a) = \pi\eta_B\hat{\sigma}(\omega) = \eta_A\hat{\pi}\hat{\sigma}(\omega) = \eta_A(\omega) = a$. Portanto, neste caso, π é um epimorfismo cindido, ou seja, B é uma extensão cindida de A pelo nilpotente Q.

Voltemos à inclusão $\hat{\sigma}(\mathcal{I}_A) \subseteq \mathcal{I}_B$:

Seja $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega_i \in X$. Lembremos da demonstração da Proposição 3.7 que $\hat{\pi}(\alpha) = \alpha$ se $\alpha \notin S$ e $\hat{\pi}(\alpha) = 0$ se $\alpha \in S$. Se para algum i, $\hat{\pi}(\omega_i) = 0$ então existe uma flecha $\alpha_i \in S$ com $\alpha_i | \omega_i$. Daí, pela hipótese, para cada j existe $\alpha_j \in S$ com $\alpha_j | \omega_j$, o que implica, nesse caso, que $\hat{\pi}(\rho) = 0$. Agora se $\hat{\pi}(\rho) \neq 0$ então $\hat{\pi}(\omega_i) \neq 0$ para algum i, ou seja, não existe $\alpha \in S$ com $\alpha | \omega_i$ e consequentemente, não existe $\alpha \in S$ com $\alpha | \omega_j$ para todo j, o que implica que $\hat{\pi}(\omega_i) = \omega_i$, para todo i e portanto $\hat{\pi}(\rho) = \rho$. Ou seja, para todo $\rho \in X$ temos que $\hat{\pi}(\rho) = 0$ ou $\hat{\pi}(\rho) = \rho$.

Denotemos por Y um conjunto minimal de geradores de $\mathcal{I}_A$. Mostraremos que $\hat{\sigma}(Y) \subseteq \mathcal{I}_B$.

Seja $\gamma \in Y$. Como $\hat{\pi}_{|_{\mathcal{I}_B}} : \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{I}_A$ é um epimorfismo (pelo diagrama da Proposição 3.7) existe $\rho \in \mathcal{I}_B$ com $\hat{\pi}(\rho) = \gamma$. Então $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \rho_i$, onde $\lambda_i \in k$ e cada $\rho_i = \rho_{i_1} ... \rho_{i_t}$, com $\rho_{i_j} \in X$. Além disso, cada $\hat{\pi}(\rho_{i_j}) = \rho_{i_j}$ ou $\hat{\pi}(\rho_{i_j}) = 0$ e $\gamma = \hat{\pi}(\rho) = \hat{\pi}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \rho_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \hat{\pi}(\rho_i)$ com $\hat{\pi}(\rho_i) = \hat{\pi}(\rho_{i_1}) ... \hat{\pi}(\rho_{i_t})$.

Como γ é não nulo existe i tal que $\hat{\pi}(\rho_i) \neq 0$. Pela minimalidade de Y esse i é único, pois cada $\hat{\pi}(\rho_j) \in \mathcal{I}_A$. Daí $\gamma = \lambda_i \hat{\pi}(\rho_i) = \lambda_i \hat{\pi}(\rho_{i_1}) ... \hat{\pi}(\rho_{i_t})$. Novamente pela minimalidade de Y (e como cada $\hat{\pi}(\rho_{i_j}) \in \mathcal{I}_A$), temos que $t = 1$ e assim $\gamma = \lambda_i \hat{\pi}(\rho_{i_1}) = \lambda_i \rho_{i_1} \in \mathcal{I}_B$. Finalmente, pela definição de $\hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}(\gamma) = \gamma \in \mathcal{I}_B$. ■

Exemplo 3.3 *Agora podemos justificar o Exemplo 3.1. Notemos que Q é gerado pelas classes das flechas de $S = \{\alpha, \delta\}$. Além disso, $\alpha | \alpha\beta$ e $\delta | \gamma\delta$. Portanto, o epimorfismo canônico $\pi : B \rightarrow \frac{B}{Q}$ cinde. Ou seja, B é uma extensão cindida de $A = \frac{B}{Q}$ pelo ideal Q.* ■

Capítulo 4

Propriedades homológicas herdadas

Sejam as R-álgebras de Artin A e B tais que B uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q. Queremos comparar caracteristicas das álgebras A e B envolvendo propriedades homológicas das categorias $\mathsf{mod}\, A$ e $\mathsf{mod}\, B$. Ao final desse capítulo chegamos a um resultado importante que nos garantirá que se B é uma álgebra hereditária (ou shod) então A também é hereditária (ou shod).

4.1 Introdução

Iniciaremos relembrando algumas definições e algumas proposições que serão usadas ao longo do capítulo. Nesta seção, consideraremos R um anel comutativo com unidade e C uma R-álgebra de Artin qualquer. Os módulos serão considerados à direita, caso não se faça menção ao contrário.

Definição 4.1 *Um epimorfismo de C-módulos $f : M \to N$ é dito* **supérfluo** *se, para todo morfismo $h : L \to M$, a composição $fh : L \to N$ ser um epimorfismo implicar que h também é um epimorfismo.*

Um monomorfismo $f : M \to N$ é dito **essencial** *se, para todo morfismo $h : N \to L$, a composição $hf : M \to L$ ser um monomorfismo implicar que h também é um monomorfismo.*

Lema 4.1

- *A composição de epimorfismos supérfluos é ainda supérfluo.*
- *A composição de monomorfismos essenciais é ainda essencial.*

Prova. Faremos a demonstração para epimorfismos supérfluos. O outro caso é análogo.

Sejam $f : M \to N$ e $g : N \to L$ dois epimorfismos supérfluos. Temos que $gf : M \to L$ é um epimorfismo, falta mostrar que é supérfluo. Seja então, $h : W \to M$ um morfismo de forma que $(gf)h : W \to L$ seja um epimorfismo. Como g é supérfluo, temos que fh é um epimorfismo e como f é supérfluo, segue que h é um epimorfismo. ■

Definição 4.2 *Um submódulo N de um C-módulo M é dito* **supérfluo em** M *se, para todo submódulo L de M, a igualdade $N + L = M$ implicar que $L = M$.*

Lema 4.2 *Um epimorfismo de C-módulos $f : M \to N$ é supérfluo se, e somente se,* $\mathsf{Nuc}\, f$ *for um submódulo supérfluo em M.*

Prova.

(⇒) Sejam L um submódulo de M tal que $\mathsf{Nuc}\, f + L = M$ e $\iota : L \hookrightarrow M$ a inclusão de L em M. Dado $n \in N$ existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$, pois f é um epimorfismo. Além disso, podemos escrever $m = x+l$ com $x \in \mathsf{Nuc} f$ e $l \in L$. Finalmente, $n = f(m) = f(x+l) = f(x)+f(l) = f(l) = fh(l)$, isto é, a composição $f\iota$ é um epimorfismo. Como f é supérfluo, temos que ι é um epimorfismo e portanto um isomorfismo. Logo, $L = M$.

(⇐) Seja $g : L \to M$ tal que $fg : L \to N$ seja um epimorfismo. Mostraremos que $M = \mathsf{Nuc}\, f + \mathrm{Im}\, g$ e daí como $\mathsf{Nuc}\, f$ é supérfluo em M resulta que $\mathrm{Im}\, g = M$, ou seja, que g é um epimorfismo. Obviamente $\mathsf{Nuc} f + \mathrm{Im} g \subseteq M$. Por outro lado, dado $m \in M$, como fg é um epimorfismo, existe $l \in L$ tal que $fg(l) = f(m)$. Então $m - g(l) \in \mathsf{Nuc}\, f$ e $m = (m - g(l)) + g(l) \in \mathsf{Nuc}\, f + \mathrm{Im}\, g$.

■

Agora podemos reescrever o lema de Nakayama (Proposição 1.4) da seguinte forma:

Lema 4.3 *(Lema de Nakayama)*
Seja M um C-módulo de tipo finito. Um submódulo N de M é supérfluo se, e somente se, $N \subseteq \mathsf{rad}\, M$. ■

Corolário 4.4 *Se M é de tipo finito, então um epimorfismo $f : M \to N$ é supérfluo se, e somente se,* $\mathsf{Nuc}\, f \subseteq \mathsf{rad}\, M$. ■

Definição 4.3 *Uma* **cobertura projetiva** *de um C-módulo M é um par (P, f), onde P é um C-módulo projetivo e $f : P \longrightarrow M$ é um epimorfismo supérfluo. Dualmente, uma* **envolvente injetiva** *de um C-módulo M é um par (I, g), onde I é um C-módulo injetivo e $g : M \to I$ é um monomorfismo essencial.*

Mostra-se, em [1] por exemplo, que um módulo de tipo finito sobre uma álgebra de Artin sempre admite uma cobertura projetiva, com P também de tipo finito e uma envolvente injetiva, com I também de tipo finito. Mostraremos agora que tal cobertura é unica a menos de isomorfismo. O resultado também vale para a envolvente injetiva, mas a demonstração será omitida.

Lema 4.5 *Seja (P, f) é uma cobertura projetiva de M. Para cada epimorfismo $g : P' \longrightarrow M$, com P' projetivo, existe um epimorfismo $h : P' \longrightarrow P$ tal que $fh = g$.*

Prova. Como P' é projetivo e $f : P \longrightarrow M$ é um epimorfismo (já que é cobertura projetiva de M), existe $h : P' \longrightarrow P$ tal que $fh = g$, isto é, que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
& P' \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\
P \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

Resta verificar que h é um epimorfismo e isso decorre do fato de fh ser um epimorfismo e de f ser supérfluo. ■

Proposição 4.6 *Sejam M um C-módulo de tipo finito, (P, f) e $(\bar{P}, \bar{f})$ coberturas projetivas de M. Então existe um isomorfismo $h : \bar{P} \to P$ tal que $fh = \bar{f}$.*

Prova. Como (P, f) é uma cobertura projetiva, pelo Lema 4.5, existe um epimorfismo $h : \bar{P} \longrightarrow P$ tal que $fh = \bar{f}$. Daí, a sequência exata curta $0 \to \mathsf{Nuc}\, h \to \bar{P} \xrightarrow{h} P \to 0$ cinde e portanto $\bar{P} \cong \mathsf{Nuc}\, h \oplus P$. Utilizando novamente o Lema 4.5, trocando P por $\bar{P}$ concluímos que $\bar{P}$ também é um somando de direto de P. Portanto, $P \cong \bar{P}$ e $\mathsf{Nuc}\, h = 0$, isto é, h é um isomorfismo como queríamos. ■

Muitas vezes, por abuso de linguagem, diremos apenas que P é uma cobertura projetiva de M, ou ainda, que f é uma cobertura projetiva de M. O mesmo para envolvente injetiva.

Definição 4.4

- *Uma* **apresentação projetiva** *de um C-módulo M é uma sequência exata $P_1 \overset{f_1}{\to} P_0 \overset{f_0}{\to} M \to 0$ onde P_1 e P_0 são C-módulos projetivos. Tal apresentação é dita* **minimal** *se $f_0 : P_0 \to M$ e $f_1 : P_1 \to \mathsf{Nuc}\, f_0$ forem coberturas projetivas.*

- *Uma* **apresentação injetiva** *de um C-módulo M é uma sequência exata $0 \to M \overset{g_0}{\to} I_0 \overset{g_1}{\to} I_1$, onde I_0 e I_1 são C-módulos injetivos. Tal apresentação é dita* **minimal** *se $g_0 : M \to I_0$ e $g_1 : Im\, g_0 \to I_1$ forem envolventes injetivas.*

Definição 4.5

- *Uma* **resolução projetiva** *de um C-módulo M é uma sequência exata*

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \to P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

onde cada P_i é um C-módulos projetivo.

Tal resolução é dita **minimal** *se $f_0 : P_0 \to M$ e $f_i : P_i \to Nuc\, f_{i-1}$, $i = 1, 2, ...,$ forem coberturas projetivas.*

Tal resolução é dita com **comprimento** *n se $P_n \neq 0$ e $P_i = 0$, $\forall i > n$.*

- *Uma* **resolução injetiva** *de um C-módulo M é uma sequência exata*

$$0 \to M \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \xrightarrow{g_n} I_n \to \cdots$$

onde cada I_i é um C-módulo injetivo.

Tal resolução é dita **minimal** *se $g_0 : M \to I_0$ e $g_i : Im\, g_{i-1} \to I_i$, $i = 1, 2, ...,$ forem envolventes injetivas.*

Tal resolução é dita com **comprimento** *n se $I_n \neq 0$ e $I_i = 0$, $\forall i > n$.*

Definição 4.6

- *Dizemos que a* **dimensão projetiva** *de um C-módulo M é um inteiro n, se esse for o menor inteiro tal que existe uma resolução projetiva de M com comprimento n. Denotaremos por* $\mathsf{dp}\, M_C = n$ *(ou* $\mathsf{dp}\, M = n$*).*

- *Dizemos que a* **dimensão injetiva** *de um C-módulo M é um inteiro n, se esse for o menor inteiro tal que existe uma resolução injetiva de M com comprimento n. Denotaremos por* $\mathsf{di}\, M_C = n$ *(ou* $\mathsf{di}\, M = n$*).*

Definição 4.7 *A dimensão global de uma álgebra de Artin C, denotado por dim. gl. C é*

$$\sup\{\mathsf{dp}\, M_C \mid M_C \textit{ é um } C\textit{-módulo}\}.$$

Mostra-se (ver [1] por exemplo), que se M é de tipo finito (sobre uma álgebra de Artin), então

i) $\mathsf{dp}\, M_C = n$ se, e somente se, a resolução projetiva minimal de M tem comprimento n. Analogamente para $\mathsf{di}\, M_C = n$;

ii) dim. gl. $C = \sup\{\mathsf{dp}\, M_C \mid M_C$ é um C-módulo de tipo finito$\} =$
$\sup\{\mathsf{dp}\, S_C \mid S_C$ é um C-módulo simples$\} = \sup\{\mathsf{dp}\, M_C \mid M_C$ é um C-módulo indecomponível$\}$.

Transposto

Precisaremos agora introduzir alguns funtores de $\mathsf{mod}\, C$ em $\mathsf{mod}\, C^{op}$. Relembremos, primeiramente, o funtor dual definido no Exemplo 1.8.

Dada uma apresentação projetiva $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ de um C-módulo M, aplicando o funtor dual, chegamos a

$$0 \longrightarrow DM \xrightarrow{Df_0} DP_0 \xrightarrow{Df_1} DP_1,$$

que é uma apresentação injetiva do C^{op}-módulo DM. Mais ainda, se a primeira for minimal a segunda também será. Dualmente, se partirmos de uma apresentação injetiva (minimal) em $\mathsf{mod}\, C$, aplicando o funtor dual, chegaremos a uma apresentação projetiva (minimal) em $\mathsf{mod}\, C^{op}$.

Para uma álgebra de Artin C, chamamos de C**-dual** ao funtor

$$(-)^t := \mathsf{Hom}_C(-, C) : \mathsf{mod}\, C \to \mathsf{mod}\, C^{op}.$$

Seja $P_1 \overset{f_1}{\to} P_0 \overset{f_0}{\to} M \to 0$ uma apresentação projetiva minimal em $\mathsf{mod}\, C$. Aplicando o funtor C-dual, temos a seguinte sequência exata $0 \to M^t \xrightarrow{f_0^t} P_0^t \xrightarrow{f_1^t} P_1^t \longrightarrow \mathsf{Conuc}\, f_1^t \to 0$. Denotaremos $\mathsf{Conuc}\, f_1^t$ por $\mathsf{Tr}^C M$ (ou simplesmente $\mathsf{Tr}\, M$) e chamaremos de **transposto de** M. Desta forma, fica definido um funtor $\mathsf{Tr} : \mathsf{mod}\, C \to \mathsf{mod}\, C^{op}$ que é chamado funtor **transposição**. Vejamos algumas propriedades desse funtor:

Lema 4.7 ([11], IV)

(a) $\mathsf{Tr}\,(\bigoplus M_i) \cong \bigoplus(\mathsf{Tr}\, M_i)$*, onde* $M_i \in \mathsf{mod}\, C$*.*

(b) $M \in \mathsf{mod}\, C$ *é projetivo se, e somente se,* $\mathsf{Tr}\, M = 0$*.*

(c) $M \in \mathsf{ind}\, C$ *se, e somente se,* $\mathsf{Tr}\, M \in \mathsf{ind}\, C^{op}$*.*

(d) Se $M \in \mathsf{ind}\, C$ *é não projetivo, então* $P_0^t \xrightarrow{f_1^t} P_1^t \to \mathsf{Tr}\, M \to 0$ *é uma apresentação projetiva minimal em* $\mathsf{mod}\, C^{op}$*.*

■

Também define-se os funtores **transladado de Auslander-Reiten (A-R)** por $\tau := D\mathsf{Tr}$ e **transladado (de A-R) inverso** por $\tau^{-1} := \mathsf{Tr}\, D$.

A composição de D com o C-dual é o **funtor de Nakayama** $\nu := D(-)^t$ e $\nu^{-1} := \mathsf{Hom}_C(DC, -)$ é a quase-inversa.

Lema 4.8

(a) Seja $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ *uma apresentação projetiva minimal de* $M \in \mathsf{mod}\, C$*. Então existe a sequência exata*

$$0 \to \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu f_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu f_0} \nu M \to 0.$$

(b) Seja $0 \to N \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} I_1$ *uma apresentação injetiva minimal de* $M \in \mathsf{mod}\, C$*. Então existe a sequência exata*

$$0 \to \nu^{-1} N \xrightarrow{\nu^{-1} g_0} \nu^{-1} I_0 \xrightarrow{\nu^{-1} g_1} \nu^{-1} I_1 \longrightarrow \tau^{-1} N \to 0.$$

Prova.

(a) Aplicando o funtor C-dual à apresentação projetiva minimal $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ temos, em $\mathsf{mod}\, C^{op}$,

$$0 \to M^t \xrightarrow{f_0^t} P_0^t \xrightarrow{f_1^t} P_1^t \to \mathsf{Tr}\, M \to 0.$$

Agora aplicando o funtor dual, que é exato:

$$0 \to D\mathsf{Tr}\, M \longrightarrow DP_1^t \xrightarrow{Df_1^t} DP_0^t \xrightarrow{Df_0^t} DM^t \to 0 \text{ em } \mathsf{mod}\, C,$$

ou seja, $0 \to \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu f_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu f_0} \nu M \to 0.$

(b) Aplicando o funtor dual na apresentação injetiva minimal $0 \to N \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} I_1$ temos, em $\mathsf{mod}\, C^{op}$, a seguinte apresentação projetiva minimal:

$$DI_1 \xrightarrow{Dg_1} DI_0 \xrightarrow{Dg_0} DN \to 0.$$

Agora aplicando o funtor C^{op}-dual, temos

$$0 \to (DN)^t \xrightarrow{(Dg_0)^t} (DI_0)^t \xrightarrow{(Dg_1)^t} (DI_1)^t \longrightarrow \mathsf{Tr}^{\,C^{op}} DN \to 0.$$

Observemos que do Exemplo 1.8 segue os isomorfismos funtoriais para um C-módulo X:

$$(DX)^t = \mathsf{Hom}_{C^{op}}(DX, C) \approx \mathsf{Hom}_C(DC, DDX) \approx \mathsf{Hom}_C(DC, X) = \nu^{-1} X.$$

Então: $0 \to \nu^{-1} N \xrightarrow{\nu^{-1} g_0} \nu^{-1} I_0 \xrightarrow{\nu^{-1} g_1} \nu^{-1} I_1 \longrightarrow \tau^{-1} N \to 0.$

■

Proposição 4.9 *Seja C uma álgebra de Artin e $M \in \mathsf{mod}\, C$. Então,*

(a) $\mathsf{dp}\, M_C \leq 1$ *se, e somente se,* $\mathsf{Hom}_C(DC, \tau M) = 0$.

(b) $\mathsf{di}\, M_C \leq 1$ *se, e somente se,* $\mathsf{Hom}_C(\tau^{-1}M, C) = 0$.

Prova.

(a) Seja $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ uma apresentação projetiva minimal de M. Pelo Lema 4.8, existe a sequência exata

$$0 \to \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu f_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu f_0} \nu M \to 0.$$

Aplicando o funtor $\nu^{-1} = \mathsf{Hom}_C(DC, -)$ temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \nu^{-1}\tau M \arrow[r] & \nu^{-1}\nu P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \nu^{-1}\nu P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \nu^{-1}\nu M \arrow[d, "\cong"] & \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Nuc}\, f_1 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "f_o"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Logo, $\mathsf{Hom}_C(DC, \tau M) = \nu^{-1}\tau M \cong \mathsf{Nuc}\, f_1$ e $\mathsf{Nuc}\, f_1 = 0$ se, e somente se $\mathsf{dp}\, M \leq 1$.

(b) Seja $0 \to N \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} I_1$ uma apresentação injetiva minimal de N. Pelo Lema 4.8 existe a sequência exata

$$0 \to \nu^{-1}N \xrightarrow{\nu^{-1}g_0} \nu^{-1}I_0 \xrightarrow{\nu^{-1}g_1} \nu^{-1}I_1 \longrightarrow \tau^{-1}N \to 0.$$

Aplicando o funtor ν temos o diagrama comutativo de linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \nu\nu^{-1}M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \nu\nu^{-1}\nu I_0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \nu\nu^{-1}I_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \nu\tau^{-1}M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g_0"] & I_0 \arrow[r, "g_1"] & I_1 \arrow[r] & \mathsf{Conuc}\, g_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Logo, $\mathsf{Conuc} g_1 \cong \nu\tau^{-1}M = D\mathsf{Hom}_C(\tau^{-1}M, C)$. Então, $\mathsf{di} M \leq 1$ se, e somente se, $\mathsf{Conuc} g_1 = 0$, ou seja, $\mathsf{Hom}_C(\tau^{-1}M, C) = 0$.

■

4.2 Propriedades homológicas em $\mathsf{mod}\,A$ e em $\mathsf{mod}\,B$

A partir de agora, consideremos B uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q. Nosso objetivo é comparar as dimensões homólogicas dos módulos em $\mathsf{ind}\,A$ e em $\mathsf{ind}\,B$. Para isso começaremos comparando as respectivas coberturas e apresentações projetivas.

Proposição 4.10 *Seja B um extensão cindida de A pelo nilpotente Q, então a projeção canônica de B-módulos $p_{_M} : M \longrightarrow \frac{M}{MQ}$ é um epimorfismo supérfluo.*

Prova. Como $\mathsf{Nuc}\,p_{_M} = MQ$ e M_B é de tipo finito, basta verificar que $MQ \subseteq \mathsf{rad}\,M_B$. Como Q é nilpotente, já temos $Q \subseteq \mathsf{rad}\,B$, daí $MQ \subseteq M\mathsf{rad}\,B = \mathsf{rad}\,M_B$. ■

Observação 4.1 *Seja M é um A-módulo. Olhando M como B-módulo temos que $MQ = 0$ pois $Q = \mathsf{Nuc}\,\pi$ (onde $\pi : B \to A$ é o epimorfismo cindido) e então $m \cdot q = m\pi(q) = 0$. Portanto, nesse caso, o epimorfismo canônico $p_{_M} : M \longrightarrow \frac{M}{MQ} \cong M$ é na verdade a aplicação identidade de M_B.*

Se considerarmos o B-módulo $M \otimes_A B$ teremos, pela Proposição 2.3 e pelo Lema 2.2, que $\frac{M\otimes_A B}{(M\otimes_A B)Q} \cong M \otimes_A B \otimes_B A \cong M$. Neste caso, o epimorfismo canônico $M \otimes_A B \to \frac{M\otimes_A B}{(M\otimes_A B)Q}$ pode ser visto como $p_{_{M\otimes_A B}} : M \otimes_A B \longrightarrow M$, dado por $m \otimes b \mapsto m \cdot b$.

Lembrando que $B \cong A \oplus Q$ como A-módulos, essa última aplicação, olhada como um morfismo de A-módulos, pode ainda ser expressa por $m \otimes (a, q) \mapsto ma$, uma vez que $m \cdot (a, q) = m\pi(a, q) = ma$.

Lema 4.11 *Seja $f : P \longrightarrow M$ uma cobertura projetiva em $\mathsf{mod}A$. Então $f \otimes B : P \otimes_A B_B \to M \otimes_A B_B$ é uma cobertura projetiva em $\mathsf{mod}\,B$.*

Prova. Já sabemos que $P \otimes_A B$ é B-projetivo, mostraremos que $f \otimes B$ é um epimorfismo supérfluo. De $\mathrm{Im}\,(f \otimes B) = (\mathrm{Im}\,f) \otimes_A B \cong M \otimes_A B$ segue que $f \otimes B$ é um epimorfismo.

Consideremos P e M como B-módulos (temos que f é também B-linear), $p_{_{M\otimes_A B}} : M \otimes_A B \to M$ e $p_{_{P\otimes_A B}} : P \otimes_A B \to P$ os epimorfismos canônicos como na Observação 4.1.

Teremos o seguinte diagrama comutativo de B-módulos

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_A B \arrow[r, "f\otimes B"] \arrow[d, "p_{P\otimes_A B}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \otimes_A B \arrow[d, "p_{M\otimes_A B}"] \\
P \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

pois f é B-linear e então $p_{M\otimes_A B}(f\otimes B)(p\otimes b) = p_{M\otimes_A B}(f(p)\otimes b) = f(p)\cdot b = f(p\cdot b) = fp_{P\otimes_A B}(p\otimes b)$.

Seja agora $h : X \longrightarrow P\otimes_A B$ tal que $(f\otimes B)\circ h$ é um epimorfismo. Nesse caso, pela comutatividade do diagrama, $f\circ p_{P\otimes_A B}\circ h\,(= p_{M\otimes_A B}\circ(f\otimes B)\circ h)$ é um epimorfismo. Como f e $p_{P\otimes_A B}$ são supérfluos, então $f\circ p_{P\otimes_A B}$ também é supérfluo e portanto h é um epimorfismo como queríamos. ∎

Corolário 4.12 *Seja* $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ *uma apresentação projetiva em* $\mathsf{mod}\,A$. *Então* $P_1\otimes_A B \xrightarrow{f_1\otimes B} P_0\otimes_A B \xrightarrow{f_0\otimes B} M\otimes_A B \to 0$ *é uma apresentação projetiva em* $\mathsf{mod}\,B$. *Mais ainda, se a primeira é minimal, então a segunda também é minimal.*

Prova. A primeira parte decorre do fato de que $P\otimes_A B$ é projetivo em $\mathsf{mod}\,B$ sempre que P é projetivo em $\mathsf{mod}\,A$ e do funtor $-\otimes_A B$ ser exato à direita.
Vejamos agora quanto à minimalidade das apresentações. Suponhamos que a primeira é minimal. Pelo Lema 4.11 temos que $P_0\otimes_A B \xrightarrow{f_0\otimes B} M\otimes_A B \to 0$ é uma cobertura projetiva em $\mathsf{mod}\,B$.

Da mesma forma segue de $P_1 \xrightarrow{f_1} \mathrm{Im}\,f_1 \to 0$ ser uma cobertura projetiva em $\mathsf{mod}\,A$, que $P_1\otimes_A B \xrightarrow{f_1\otimes B} \mathrm{Im}\,f_1\otimes_A B \to 0$ é uma cobertura projetiva em $\mathsf{mod}\,B$.

O resultado segue de $\mathrm{Im}\,f_1\otimes_A B = \mathrm{Im}\,(f_1\otimes_A B) = \mathsf{Nuc}\,(f_0\otimes B)$. ∎

Proposição 4.13 *Seja* $f : P \longrightarrow M$ *uma cobertura projetiva em* $\mathsf{mod}\,A$. *Então a composição* $p_{M\otimes_A B}(f\otimes B) : P\otimes_A B \longrightarrow M$ *é uma cobertura projetiva em* $\mathsf{mod}\,B$.

Prova. Segue da Proposição 4.10 que $p_{M\otimes_A B}$ é um B-epimorfismo supérfluo e do Lema 4.11 que $f\otimes B$ é um B-epimorfismo supérfluo. A composição também é um B-epimorfismo supérfluo. E $P\otimes_A B$ é B-projetivo porque P é A-projetivo. ∎

Corolário 4.14 *Seja* $M_A \in \mathsf{mod}\,A$, *então* $\mathsf{dp}\,M_B = 0 \Rightarrow \mathsf{dp}\,M_A = 0$.

Prova. Seja $f : P \to M_A$ uma cobertura projetiva em $\mathsf{mod}\,A$. Pela proposição anterior $p_{M\otimes_A B}(f\otimes B) : P\otimes_A B \to M$ é uma cobertura projetiva em $\mathsf{mod}\,B$. Como $\mathsf{dp}\,M_B = 0$ então tal cobertura é um isomorfismo. Temos que $\mathsf{Nuc}\,f\otimes_A B \subseteq \mathsf{Nuc}\,p_{M\otimes_A B}(f\otimes B)$ e portanto $\mathsf{Nuc}\,f\otimes_A B = 0$. Aplicando o funtor $-\otimes_B A$ chegamos a $\mathsf{Nuc}\,f = 0$ e portanto f é um isomorfismo, isto é, $\mathsf{dp}\,M_A = 0$. ∎

Proposição 4.15 *Seja* $M \in \mathsf{mod}\, A$. *Se* $\mathsf{dp}\, M_B \leq 1$ *então* $\mathsf{dp}\,(M \otimes_A B)_B \leq 1$.

Prova. Seja $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ uma apresentação projetiva minimal em $\mathsf{mod}\, A$. Pelo Corolário 4.12, $P_1 \otimes_A B \xrightarrow{f_1 \otimes B} P_0 \otimes_A B \xrightarrow{f_0 \otimes B} M \otimes_A B \to 0$ é uma apresentação projetiva minimal em $\mathsf{mod}\, B$. Mostraremos que essa apresentação é na verdade uma resolução projetiva minimal, de onde seguirá que $\mathsf{dp}\,(M \otimes_A B)_B \leq 1$.

Seja $0 \to \widetilde{P}_1 \xrightarrow{\widetilde{f}_1} \widetilde{P}_0 \xrightarrow{\widetilde{f}_0} M_B \to 0$ uma resolução projetiva minimal em $\mathsf{mod}\, B$ ($\mathsf{dp}\, M_B \leq 1$). Pela proposição anterior, temos que $P_0 \otimes_A B$ é cobertura projetiva de M_B, logo $\widetilde{P}_0 \cong P_0 \otimes_A B$.

Consideremos $\mathsf{p} := p_{M \otimes B}$ o epimorfismo canônico da Observação 4.1. Observe que $\mathrm{Im}\,(f_1 \otimes B) = \mathsf{Nuc}\,(f_0 \otimes B) \subseteq \mathsf{Nuc}\,(\mathsf{p}(f_0 \otimes B))$ e como $\widetilde{P}_1 \to \mathsf{Nuc}\,(\mathsf{p}(f_0 \otimes B)) \to 0$ é cobertura projetiva, então existe um morfismo $P_1 \otimes_A B \to \widetilde{P}_1$ que faz o seguinte diagrama de linhas exatas comutar:

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \otimes_A B \arrow[r, "f_1 \otimes B"] \arrow[d] & P_0 \otimes_A B \arrow[r, "f_0 \otimes B"] \arrow[d, equal] & M \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{p}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{P}_1 \arrow[r] & P_0 \otimes_A B \arrow[r, "\mathsf{p}(f_0 \otimes B)"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Determinação de $\widetilde{P}_1$:
Consideremos a sequência exata inferior, do diagrama acima, olhada como uma sequência de A-módulos. Observemos que, nesse caso, $P_0 \otimes_A B \cong P_0 \otimes_A (A \oplus Q) \cong (P_0 \otimes_A A) \oplus (P_0 \otimes_A Q) \cong P_0 \oplus (P_0 \otimes_A Q)$ e da mesma forma $M \otimes_A B \cong M \oplus (M \otimes_A Q)$.

Dado $(m, \hat{m} \otimes q) \in M \oplus (M \otimes_A Q)$ temos

$$(m, \hat{m} \otimes q) = (m, m \otimes 0) + (\hat{m}.0, \hat{m} \otimes q) \xrightarrow{\sim} m \otimes (1_A, 0) + \hat{m} \otimes (0, q) \xrightarrow{\mathsf{p}} m1_A + \hat{m}0 = m$$

e portanto, como aplicação A-linear, podemos escrever $\mathsf{p} = [\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}]$.

Analogamente, dado $(p, \hat{p} \otimes q) \in P_0 \oplus (P_0 \otimes_A Q)$, temos

$$(p, \hat{p} \otimes q) \xrightarrow{\sim} p \otimes (1_A, 0) + \hat{p} \otimes (0, q) \xrightarrow{f_0 \otimes B} f_0(p) \otimes (1_A, 0) + f_0(\hat{p}) \otimes (0, q) \xrightarrow{\sim}$$

$$(f_0(p), f_0(p) \otimes 0) + (f_0(\hat{p})0, f_0(\hat{p}) \otimes q) = (f_0(p), 0) + (0, f_0(\hat{p}) \otimes q) = (f_0(p), f_0(\hat{p}) \otimes q)$$

e portanto, como aplicação A-linear, $f_0 \otimes B = \begin{bmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & f_0 \otimes Q \end{bmatrix}$.

Logo, $\mathsf{p}(f_0 \otimes B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & f_0 \otimes Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & 0 \end{bmatrix}$ e então $\widetilde{P}_1 \cong \mathsf{Nuc} \begin{bmatrix} f_0 & 0 \end{bmatrix}$.

Mas, se $p \in P_0$ e $t \in P_0 \otimes_A Q$, então $(p,t) \in \mathsf{Nuc} \begin{bmatrix} f_0 & 0 \end{bmatrix} \iff f_0(p) = 0$ e assim,

$\widetilde{P}_1 \cong \mathsf{Nuc}\, f_0 \oplus (P_0 \otimes_A Q)$.

Como P_1 é cobertura projetiva de $\mathsf{Nuc}\, f_0$ em $\mathsf{mod}\, A$ então $P_1 \otimes_A B$ é cobertura projetiva de $\mathsf{Nuc}\, f_0$ em $\mathsf{mod}\, B$. Seja P a cobertura projetiva de $P_0 \otimes_A Q$ em $\mathsf{mod}\, A$, então $P \otimes_A B$ é cobertura de $P_0 \otimes_A Q$ em $\mathsf{mod}\, B$. Denotemos por $g : P \otimes_A B \longrightarrow P_0 \otimes_A Q$ tal cobertura.

Como P_0 é projetivo, então $P_0 \otimes_A -$ é exato e aplicando tal funtor em ${}_AQ_B \hookrightarrow_A B_B$ temos a inclusão de B-módulos $P_0 \otimes_A Q \overset{\iota}{\hookrightarrow} P_0 \otimes_A B$. Chamemos de $\widetilde{f}$ a composição de g com a inclusão ι.

Consideremos agora o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \otimes_A B \arrow[r, "f_1 \otimes B"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"'] & P_0 \otimes_A B \arrow[r, "f_0 \otimes B"] \arrow[d, equal] & M \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{p}"] & 0 \\
(P_1 \oplus P) \otimes_A B \arrow[r, "{[f_1 \otimes B \ \ \widetilde{f}]}"'] & P_0 \otimes_A B \arrow[r, "\mathsf{p}(f_0 \otimes B)"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mostraremos que existe um somando P' de P tal que o diagrama de linhas exatas a seguir é comutativo e a linha inferior é uma resolução projetiva minimal para M_B:

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \otimes_A B \arrow[r, "f_1 \otimes B"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"'] & P_0 \otimes_A B \arrow[r, "f_0 \otimes B"] \arrow[d, equal] & M \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{p}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (P_1 \oplus P') \otimes_A B \arrow[r, "{[f_1 \otimes B \ \ \widetilde{f}']}"'] & P_0 \otimes_A B \arrow[r, "\mathsf{p}(f_0 \otimes B)"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde $\widetilde{f}'$ é a restrição de $\widetilde{f}$ a $P' \otimes_A B$.

Do epimorfismo B-linear $P_1 \otimes_A B \oplus P \otimes_A B \longrightarrow \widetilde{P}_1 \to 0$ segue que $\widetilde{P}_1$ é somando de $(P_1 \oplus P) \otimes_A B$. Seja então P'' somando de $P_1 \oplus P$ tal que $\widetilde{P}_1 = P'' \otimes_A B$, ou seja,

$$0 \longrightarrow P'' \otimes_A B \longrightarrow P_0 \otimes_A B \xrightarrow[\mathsf{p}(f_0 \otimes B)]{} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva minimal de M_B. Aplicando o funtor $- \otimes_B A$ temos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^B(M,A) \arrow[r] & P'' \arrow[r, "f''"] & P_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& & P_1 \arrow[r, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

pois $\mathrm{Tor}_1^B(P_0 \otimes_A B, A) = 0$ uma vez que $P_0 \otimes_A B$ é projetivo, e $M \otimes_B A \cong M \otimes_B \frac{B}{Q} \cong \frac{M}{MQ} \cong M_A$ uma vez que M é anulado por Q.

De $f_1 : P_1 \longrightarrow \mathsf{Nuc}\, f_0$ ser cobertura projetiva e $f'' : P'' \longrightarrow \mathsf{Nuc}\, f_0$ ser um epimorfismo temos, pelo Lema 4.5, um epimorfismo $P'' \longrightarrow P_1 \to 0$ e portanto $P'' = P_1 \oplus P'$ para algum P' submódulo de P, como queríamos.

Neste caso, $f_1 \otimes B = [\ f_1 \otimes B \quad \widetilde{f'}\ ] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é composição de monomorfismos e portanto um monomorfismo. Finalmente,

$$0 \longrightarrow P_1 \otimes_A B \xrightarrow{f_1 \otimes B} P_0 \otimes_A B \xrightarrow{f_0 \otimes B} M \otimes_A B \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva minimal para $(M \otimes_A B)_B$, isto é, $\mathsf{dp}\,(M \otimes_A B)_B \leq 1$. ■

Mostraremos agora que se um A-módulo indecomponível é tal que $\mathsf{dp}\, M_B \leq 1$, então $\mathsf{dp}\, M_A \leq 1$. Um resultado análogo vale também para a dimensão injetiva. Para isso precisamos de alguns lemas:

Lema 4.16 *Seja M um módulo em* $\mathsf{ind}\, A$. *Então*

(a) $\tau_B(M \otimes_A B) \cong \mathsf{Hom}_A({}_B B_A, \tau_A M)$

(b) $\tau_B^{-1} \mathsf{Hom}_A({}_B B_A, M) \cong (\tau_A^{-1} M) \otimes_A B_B$

Prova. Lembremos inicialmente que quando P_A é projetivo, então valem os seguintes isomorfismos funtoriais:

$$B \otimes_A \mathsf{Hom}_A(P, A) \approx \mathsf{Hom}_A(P, B \otimes_A A) \approx \mathsf{Hom}_A(P, B_A)$$

$$\approx \mathsf{Hom}_A(P, \mathsf{Hom}_B(B, B)) \approx \mathsf{Hom}_B(P \otimes_A B, B).$$

(a) Seja $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ uma apresentação projetiva minimal de M_A. Pelo Corolário 4.12,

$$P_1 \otimes_A B \xrightarrow{f_1 \otimes B} P_0 \otimes_A B \xrightarrow{f_0 \otimes B} M \otimes_A B \to 0$$

é uma apresentação projetiva minimal em $\mathsf{mod}\, B$. Aplicando o funtor B-dual, pelo Lema 4.7 temos que

$$(P_0 \otimes_A B)^t \longrightarrow (P_1 \otimes_A B)^t \longrightarrow \mathsf{Tr}\,^B(M \otimes_A B) \to 0$$

é uma apresentação projetiva minimal em $\mathsf{mod}\, B^{op}$.

Por outro lado, aplicando o funtor A-dual na apresentação projetiva minimal de M_A, temos que $P_0^t \longrightarrow P_1^t \longrightarrow \mathsf{Tr}\,^A M \to 0$ é uma apresentação projetiva minimal em $\mathsf{mod}\, A^{op}$ e portanto

$$B \otimes_A P_0^t \longrightarrow B \otimes_A P_1^t \longrightarrow B \otimes_A \mathsf{Tr}\,^A M \to 0$$

também é uma apresentação projetiva minimal em $\mathsf{mod}\, B^{op}$.

Pelos isomorfismos iniciais, temos que $B \otimes_A P_0^t = B \otimes_A Hom_A(P_0, A) \cong Hom_B(P_0 \otimes_A B, B) = (P_0 \otimes_A B)^t$ e $B \otimes_A P_1^t \cong (P_1 \otimes_A B)^t$ e assim chegamos ao seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
(P_0 \otimes_A B)^t \arrow[r] \arrow[d, "f"] & (P_1 \otimes_A B)^t \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathsf{Tr}\,^B(M \otimes_A B) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
B \otimes_A P_0^t \arrow[r] & B \otimes_A P_1^t \arrow[r] & B \otimes_A \mathsf{Tr}\,^A M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde f e g são isomorfismos e h é o morfismo induzido, o que implica que h também é isomorfismo.

Finalmente,

$$\tau_B(M \otimes_A B) = D\mathsf{Tr}\,^B(M \otimes_A B) \cong D(B \otimes_A \mathsf{Tr}\,^A M) = Hom_R(B \otimes_A \mathsf{Tr}\,^A M, R) \cong$$

$$Hom_A(B_A, Hom_R(\mathsf{Tr}\,^A M, R)) = Hom_A(B, D\mathsf{Tr}\,^A M) = Hom_A(B, \tau_A M).$$

(b) Se M é injetivo então $\mathsf{Hom}_A({}_BB_A, M)$ também é injetivo e portanto

$$\tau_A^{-1} M = 0 = \tau_B^{-1} \mathsf{Hom}_A({}_BB_A, M).$$

Agora se M é não injetivo, então $M_A \cong \tau_A \tau_A^{-1} M$ e assim utilizando o item (a) para $\tau_A^{-1} M$ temos

$$\tau_B^{-1}\mathsf{Hom}_A({}_BB_A, M) \cong \tau_B^{-1}\mathsf{Hom}_A({}_BB_A, \tau_A(\tau_A^{-1}M)) \cong \tau_B^{-1}\tau_B((\tau_A^{-1}M)\otimes_A B_B) \cong (\tau_A^{-1}M)\otimes_A B_B.$$

■

Lema 4.17 *Seja M um módulo em* $\mathsf{ind}\, A$. *Então*

(a) $\mathsf{dp}\, M \otimes_A B_B \leq 1$ *se, e somente se,* $\mathsf{dp}\, M_A \leq 1$ *e* $\mathsf{Hom}_A(D\, {}_AQ, \tau_A M) = 0$.

(b) $\mathsf{di}\, \mathsf{Hom}_A({}_BB_A, M)_B \leq 1$ *se, e somente se,* $\mathsf{di}\, M_A \leq 1$ *e* $\mathsf{Hom}_A(\tau_A^{-1}M,\, {}_AQ) = 0$.

Prova.

(a) Pela Proposição 4.9, $\mathsf{dp}\,(M \otimes_A B_B) \leq 1$ se, e somente se, $\mathsf{Hom}_B(DB, \tau_B(M \otimes_A B)) = 0$. Observemos que $DB \otimes_B B_A \cong (DB)_A \cong D_A B \cong D_A(A \oplus Q) \cong D_A A \oplus D_A Q$. Daí, utilizando o lema anterior e o Teorema da Adjunção (1.7) chegamos aos seguintes isomorfismos:

$$\mathsf{Hom}_B(DB, \tau_B(M \otimes_A B) \cong \mathsf{Hom}_B(DB, \mathsf{Hom}_A({}_BB_A, \tau_A M)) \cong \mathsf{Hom}_A(DB \otimes_B B_A, \tau_A M) \cong$$

$$\mathsf{Hom}_A(D_A A \oplus D_A Q, \tau_A M) \cong \mathsf{Hom}_A(D_A A, \tau_A M) \oplus \mathsf{Hom}_A(D_A Q, \tau_A M).$$

Portanto $\mathsf{dp}\,(M \otimes_A B_B) \leq 1 \Leftrightarrow \mathsf{Hom}_A(D_A A, \tau_A M) = 0$ e $\mathsf{Hom}_A(D_A Q, \tau_A M) = 0$, ou seja,

$$\mathsf{dp}\,(M \otimes_A B_B) \leq 1 \Leftrightarrow \mathsf{dp}\, M_A \leq 1 \text{ e } \mathsf{Hom}_A(D_A Q, \tau_A M) = 0.$$

(b) Pela Proposição 4.9, $\mathsf{di}\, \mathsf{Hom}_A({}_BB_A, M)_B \leq 1 \Longleftrightarrow \mathsf{Hom}_B(\tau_B^{-1}\mathsf{Hom}_A({}_BB_A, M), B) = 0$. Temos, nesse caso, os seguintes isomorfismos

$$\mathsf{Hom}_B(\tau_B^{-1}\mathsf{Hom}_A({}_AB_B, M), B) \cong \mathsf{Hom}_B((\tau_A^{-1}M) \otimes_A B_B, B) \cong \mathsf{Hom}_A(\tau_A^{-1}M, B \otimes_B B) \cong$$

$$\mathsf{Hom}_A(\tau_A^{-1}M, {}_A B) \cong \mathsf{Hom}_A(\tau_A^{-1}M, {}_A A \oplus_A Q) \cong \mathsf{Hom}_A(\tau_A^{-1}M, {}_A A) \oplus \mathsf{Hom}_A(\tau_A^{-1}M,\, {}_AQ)$$

e portanto $\mathsf{di}\, \mathsf{Hom}_A({}_BB_A, M)_B \leq 1 \Leftrightarrow \mathsf{Hom}_A(\tau_A^{-1}M,\, {}_AA) = 0$ e $\mathsf{Hom}_A(\tau_A^{-1}M,\, {}_AQ) = 0$, ou seja,

$$\mathsf{di}\, \mathsf{Hom}_A({}_BB_A, M)_B \leq 1 \Leftrightarrow \mathsf{di}\, M_A \leq 1 \text{ e } \mathsf{Hom}_A(\tau_A^{-1}M,\, {}_AQ) = 0.$$

■

Lema 4.18 *Sejam A uma R-álgebra e M um A-módulo em* $\mathsf{mod}\, A$*. Então, $DM_B \cong DM_A$ em* $\mathsf{mod}\, B^{op}$*.*

Prova. Lembremos que $MQ = 0$ e portanto $M_A \cong M \otimes_B A_A \cong M \otimes_B (B/Q)_A$. Definiremos um isomorfismo $\Phi : DM_B \to D(M \otimes_B (B/Q)_A)$:

Seja $f : M_B \to R$, R-linear. Definimos $g : M \times (B/Q) \to R$ por $g(m, b+Q) := f(mb)$ que é bilinear, logo existe uma R-linear $g' : M \otimes (B/Q) \to R$ tal que $g'(m \otimes (b+Q)) = f(mb)$. Definimos $\Phi(f) := g'$, ou seja, $\Phi(f)(m \otimes (b+Q)) = f(mb)$. É facil ver que Φ é R-linear, vejamos que é também B-linear: dado $f \in DM_B$ e $b \in B$, então, $\forall m \in M$ e $\forall b' \in B$ temos
$\Phi(bf)(m \otimes (b'+Q) = (bf)(mb') = f((mb')b) = f(m(b'b))$ e
$(b\Phi(f))(m \otimes (b'+Q)) = \Phi(f)((m \otimes (b'+Q))b) = \Phi(f)(m \otimes (b'b+Q)) = f(m(b'b))$.

Definiremos agora $\Psi : D(M \otimes_B (B/Q)_A) \to DM_B$. Seja $g : M \otimes_B (B/Q)_A \to R$, R-linear. Definimos $\Psi(g)(m) := g(m \otimes (1_B + Q))$. Não é dificil ver que Ψ é B-linear. Mostraremos que é a inversa de Φ. Seja g em $D(M \otimes_B (B/Q)_A)$, então, $\forall m \in M$ e $\forall r \in B$ temos

$$\Phi(\Psi(g))(m \otimes (b+Q)) = \Psi(g)(mb) = g(mb \otimes (1_B + Q)) = g(m \otimes (b+Q))$$

e se $f \in DM_B$, então, $\forall m \in M$

$$\Psi(\Phi(f))(m) = \Phi(f)(m \otimes (1_B + Q) = f(m1_B) = f(m).$$

■

Proposição 4.19 *Seja M um módulo em* $\mathsf{ind}\, A$*,*

(a) se $\mathsf{dp}\, M_B \leq 1$ *então* $\mathsf{dp}\, M_A \leq 1$*.*

(b) se $\mathsf{di}\, M_B \leq 1$ *então* $\mathsf{di}\, M_A \leq 1$*.*

Prova.

(a) Como $\mathsf{dp}\, M_B \leq 1$, pela Proposição 4.15 temos que $\mathsf{dp}\, (M \otimes_A B_B) \leq 1$ e pelo lema anterior segue que $\mathsf{dp}\, M_A \leq 1$.

(b) Do isomorfismo do lema anterior, segue que $\mathsf{dp} DM_B = \mathsf{dp} DM_A$ como B-módulos. Pela hipótese, $\mathsf{di}\ M_B \leq 1$ e então $\mathsf{dp}\ DM_B \leq 1$. Portanto, $\mathsf{dp}\ DM_A \leq 1$ como B-módulo. Pela parte (a), $\mathsf{dp}\ DM_A \leq 1$ como A-módulo, isto é, $\mathsf{di}\ M_A \leq 1$. ■

Para um A-módulo indecomponível, se $\mathsf{dp} M_B = 0$ então $\mathsf{dp} M_A = 0$ (Corolário 4.14) e se $\mathsf{dp} M_B \leq 1$ então $\mathsf{dp}\ M_A \leq 1$ (Proposicao 4.19). Vejamos agora o que acontece quando $\mathsf{dp}\ M_B = 1$.

Exemplo 4.1 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, B a álgebra dada pela aljava*
$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] & \\ 1 & & 4 \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[dl, "\delta"] \\ & 3 \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd},$$
com a relação $\beta\alpha - \delta\gamma = 0$ e Q o ideal de B gerado pelas classes de β e γ. Então, pelo Teorema 3.8, a álgebra B é uma extensão cindida por nilpotente de $A = \frac{B}{Q}$. Temos também que A é dada pela aljava
$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] & \\ 1 & & 4 \arrow[dl, "\delta"] \\ & 3 & \end{tikzcd}.$$
O A-módulo simples S_3 associado ao vértice 3 é A-projetivo mas não é B-projetivo e $\mathsf{dp}\,(S_3)_B = 1$, pois $0 \to P_1^B \to P_3^B \to S_3 \to 0$ é uma resolução projetiva minimal em $\mathsf{mod}\, B$. ■

4.2.1 Álgebra hereditária e álgebra shod.

Agora, a partir desse último resultado, podemos fazer afirmações a respeito das álgebras envolvidas. Vamos, então, lembrar as definições de álgebra hereditária e de álgebra shod.

Definição 4.8 *Uma álgebra de Artin C é dita* **hereditária** *se dim. gl. $C \leq 1$.*

Definição 4.9 *Uma álgebra de Artin C é dita* **shod** *se para cada módulo indecomponível M tem-se $\mathsf{dp}\ M_C \leq 1$ ou $\mathsf{di}\ M_C \leq 1$.*

A partir das definições acima fica claro que toda álgebra hereditária é shod.

Teorema 4.20 *Seja B uma extensão cindida por nilpotente de A. Se B é uma álgebra hereditária então A também é uma álgebra hereditária.*

Prova. Seja M um A-módulo em $\mathsf{ind}\ A$. Como B é hereditária, então $\mathsf{dp}\ M_B \leq 1$ e pela Proposição 4.19 temos $\mathsf{dp}\ M_A \leq 1$. Logo, $\sup\{\mathsf{dp}\ M \mid M \in \mathsf{ind}\ A\} \leq 1$, isto é, dim. gl. $A \leq 1$. ■

Teorema 4.21 *Seja B uma extensão cindida por nilpotente de A. Se B é uma álgebra shod então A também é uma álgebra shod.*

Prova. Seja M um A-módulo indecomponível em $\mathsf{mod}\, A$. Como B é shod então $\mathsf{dp}\, M_B \leq 1$ ou $\mathsf{di}\, M_B \leq 1$ e pela Proposição 4.19 temos $\mathsf{dp}\, M_A \leq 1$ ou $\mathsf{di}\, M_A \leq 1$. Logo, A é shod. ■

A pergunta natural é o que podemos falar sobre a recíproca desses teoremas. Como mostram os exemplos a seguir, não são verdadeiras em geral.

Exemplo 4.2 *Sejam A e B as k-álgebras do Exemplo 4.1. Então*

$$0 \to P_1 \to P_2 \oplus P_3 \to P_4 \to S_4 \to 0$$

é uma resolução projetiva minimal para o B-módulo simples S_4 e, portanto, $\mathsf{dp}\, S_4 = 2 > 1$, ou seja, B não é hereditária. No entanto, em A temos que $\mathsf{dp}\, S_1 = \mathsf{dp}\, S_3 = 0$ e $\mathsf{dp}\, S_2 = \mathsf{dp}\, S_4 = 1$, isto é, dim. gl. $A = 1$. ■

Exemplo 4.3 *Seja k um corpo algebricamente fechado. Consideremos B a k-álgebra dada pela aljava* $\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] & \\ 1 & & 3 \arrow[ll, "\gamma"] \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$, *limitada pela relação $\beta\alpha = 0$ e M o B-módulo indecomponível* $\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "0"'] & \\ k & & k \arrow[ll, "1"] \arrow[ul, "0"'] \end{tikzcd}$. *Então, $0 \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to M \to 0$ é uma resolução projetiva minimal para M e $0 \to M \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to 0$ é uma resolução injetiva minimal para M, ou seja, $\mathsf{dp}\, M = 2$ e $\mathsf{di}\, M = 2$. Portanto, B não é shod.*

Sejam Q o ideal de B gerado por β e $A = \frac{B}{Q}$. Então, B é uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q. A álgebra A é dada por $2 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\gamma} 3$ que é hereditária e portanto shod. ■

Capítulo 5

Parte direita e parte esquerda

No final do capítulo anterior vimos, quando B é uma extensão cindida por nilpotente de A, que A é uma álgebra hereditária (ou shod) sempre que B for hereditária (ou shod). [Teorema 4.20 e Teorema 4.21]

Veremos nesse capítulo que isso também é verdade para outras classes de álgebras. As classes que aqui serão apresentadas podem ser caracterizadas pelas partes direita $\mathcal{R}$ e esquerda $\mathcal{L}$ de sua respectiva categoria de módulos.

Começamos, portanto, definindo as categorias $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{L}_B$, $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{R}_B$ e relacionando-as.

5.1 Parte direita e parte esquerda da categoria de módulos

Aqui todas as álgebras são R-álgebras de Artin. As álgebra A e B são tais que B é uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q e C denotará uma álgebra qualquer.

Definição 5.1 *Dados dois C-módulos indecomponíveis M e N, um* **caminho de M para N de comprimento** $t \geq 0$ *em* $\operatorname{ind} C$ *é uma sequência*

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{t-1} \xrightarrow{f_t} M_t = N$$

onde cada $M_i \in \operatorname{ind} C$ e cada f_i é um morfismo não nulo.
Notação: $M \rightsquigarrow N$
Nesse caso dizemos que M é um **predecessor** *de N e que N é um* **sucessor** *de M.*

Notemos que um C-módulo M é sempre sucessor e predecessor dele mesmo, basta considerar um caminho de comprimento $t = 0$.

Definição 5.2

A **parte esquerda** *de* $\mathsf{mod}\, C$*, denotada por* $\mathcal{L}_C$*, é a subcategoria plena de* $\mathsf{ind}\, C$ *cujos objetos são os módulos para os quais a dimensão projetiva de seus predecessores é menor ou igual a* 1*. Também escreveremos* $\mathcal{L}_C = \{X \in \mathsf{ind}\, C \mid \text{se } Y \rightsquigarrow X \text{ então } \mathsf{dp}\, Y \leq 1\}$.

A **parte direita** *de* $\mathsf{mod}\, C$*, denotada por* $\mathcal{R}_C$*, é a subcategoria plena de* $\mathsf{ind}\, C$ *cujos objetos são os módulos para os quais a dimensão injetiva de seus sucessores é menor ou igual a* 1*. Também escreveremos* $\mathcal{R}_C = \{X \in \mathsf{ind}\, C \mid \text{se } X \rightsquigarrow Y \text{ então } \mathsf{di}\, Y \leq 1\}$.

Não é difícil ver que, com as definições acima, a subcategoria $\mathcal{L}_C$ é fechada para predecessores e a subcategoria $\mathcal{R}_C$ é fechada para sucessores.

Consideremos agora o caso em que B é uma extensão cindida por nilpotente de A e comparemos as partes direita e esquerda de $\mathsf{mod}\, A$ e $\mathsf{mod}\, B$.

Lema 5.1 *Sejam B uma extensão cindida de A pelo ideal nilpotente Q e M_A um A-módulo indecomponível.*

1. *Se $M \otimes_A B \in \mathcal{L}_B$ então $M \in \mathcal{L}_A$.*
2. *Se $\mathsf{Hom}_A(B, M) \in \mathcal{R}_B$ então $M \in \mathcal{R}_A$.*
3. *Se $M \otimes_A B \in \mathcal{R}_B$ então $M \in \mathcal{R}_A$.*
4. *Se $\mathsf{Hom}_A(B, M) \in \mathcal{L}_B$ então $M \in \mathcal{L}_A$.*

Prova. Observemos inicialmente que se $L \in \mathsf{ind}\, A$ então, pelo Lema 2.6, $L \otimes_A B \in \mathsf{ind}\, B$ e $\mathsf{Hom}_A(B, L) \in \mathsf{ind}\, B$. Além disso, se $f : L \to \hat{L}$ é não nulo segue que $f \otimes B : L \otimes_A B \to \hat{L} \otimes_A B$ e ${}_A(B, f) := \mathsf{Hom}_A(B, f) : \mathsf{Hom}_A(B, L) \to \mathsf{Hom}_A(B, \hat{L})$ são não nulos, pois $f \otimes B \otimes A \cong f \cong \mathsf{Hom}_B(A, \mathsf{Hom}_A(B, f))$.

1. Seja $L \in \mathsf{ind}\, A$ um predecessor de M e consideremos $L = L_0 \overset{f_1}{\to} L_1 \to \cdots \to L_{n-1} \overset{f_n}{\to} L_n = M$ um caminho de L para M em $\mathsf{ind}\, A$. Aplicando o funtor $- \otimes_A B$, temos que
$$L \otimes_A B = L_0 \otimes_A B \overset{f_1 \otimes B}{\longrightarrow} L_1 \otimes_A B \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{n-1} \otimes_A B \overset{f_n \otimes B}{\longrightarrow} L_n \otimes_A B = M \otimes_A B$$
é um caminho de $L \otimes_A B$ para $M \otimes_A B$ em $\mathsf{ind}\, B$. Como $M \otimes_A B \in \mathcal{L}_B$ então $\mathsf{dp}\ L \otimes_A B \leq 1$ e pelo Lema 4.17 segue que $\mathsf{dp}\, L_A \leq 1$ e portanto $M \in \mathcal{L}_A$.

2. Seja $L \in \mathsf{ind}\, A$ um sucessor de M e consideremos $M = L_0 \overset{f_1}{\to} L_1 \to \cdots \to L_{n-1} \overset{f_n}{\to} L_n = L$ um caminho de M para L em $\mathsf{ind}\, A$. Aplicando o funtor $\mathsf{Hom}_A(B, -)$, temos que
$$\mathsf{Hom}_A(B, M) \overset{{}_A(B,\, f_1)}{\longrightarrow} \mathsf{Hom}_A(B, L_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(B, L_{n-1}) \overset{{}_A(B,\, f_n)}{\longrightarrow} \mathsf{Hom}_A(B, L)$$
é um caminho de $\mathsf{Hom}_A(B, M)$ para $\mathsf{Hom}_A(B, L)$ em $\mathsf{ind}\, B$. Como $\mathsf{Hom}_A(B, M) \in \mathcal{R}_B$ então $\mathsf{di}\, \mathsf{Hom}_A(B, L) \leq 1$ e pelo Lema 4.17 segue que $\mathsf{di}\ L_A \leq 1$ e portanto $M \in \mathcal{R}_A$.

3. Utilizando o Teorema da Adjunção (1.7), o isomorfismo do Exemplo 1.9 e lembrando que $B_A \cong A_A \oplus Q_A$, temos os seguintes isomorfismos de R-módulos:
$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_B(M \otimes_A B, \mathsf{Hom}_A({}_B B, M)) &\cong \mathsf{Hom}_A(M \otimes_A B \otimes_B B_A, M) \\
&\cong \mathsf{Hom}_A(M \otimes_A B, M) \\
&\cong \mathsf{Hom}_A\Big(M \otimes_A (A_A \oplus Q_A), M\Big) \\
&\cong \mathsf{Hom}_A\Big((M \otimes_A A_A) \oplus (M \otimes_A Q_A), M\Big) \\
&\cong \mathsf{Hom}_A\Big(M_A \oplus (M \otimes_A Q), M\Big) \\
&\cong \mathsf{Hom}_A(M, M) \oplus \mathsf{Hom}_A(M \otimes_A Q, M)
\end{aligned}$$
Como $\mathsf{Hom}_A(M, M)$ é não nulo, então existe um B-homomorfismo não nulo de $M \otimes_A B$ para $\mathsf{Hom}_A(B, M)$, ou seja $\mathsf{Hom}_A(B, M)$ é um sucessor de $M \otimes_A B$. Como $M \otimes_A B \in \mathcal{R}_B$ e $\mathcal{R}_B$ é fechado para sucessores então $\mathsf{Hom}_A(B, M) \in \mathcal{R}_B$. Pelo item 2, temos que $M \in \mathcal{R}_A$.

4. Pelo isomorfismo apresentado em 3 temos que $M \otimes_A B$ é um predecessor de $\mathsf{Hom}_A(B, M)$. Como $\mathsf{Hom}_A(B, M) \in \mathcal{L}_B$ e $\mathcal{L}_B$ é fechado para predecessores então $M \otimes_A B \in \mathcal{L}_B$. Pelo item 1 temos $M \in \mathcal{L}_A$. ■

5.2 Álgebras determinadas por $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$

As classes de álgebra aqui tratadas serão: laura, colada à direita, colada à esquerda, fracamente shod e quase inclinada. As definições apresentadas não são necessariamente as originais, mas obviamente são equivalentes.

Precisamos primeiramente da definição de subcategorias finita e cofinita:

Definição 5.3 *Uma subcategoria $\mathcal{D}$ de* $\mathsf{ind}\,C$ *é dita* **finita em** $\mathsf{ind}\,C$ *se contém apenas um número finito de C-módulos. E é dita* **cofinita em** $\mathsf{ind}\,C$ *se a subcategoria* $\mathsf{ind}\,C \setminus \mathcal{D}$ *é finita em* $\mathsf{ind}\,C$*.*

Definição 5.4 *Uma álgebra de Artin C é dita de* **tipo de representação finito** *se a categoria* $\mathsf{ind}\,C$ *for finita. Caso contrário dizemos que C é de* **tipo de representação infinito***.*

Como trataremos da finitude de subcategorias de $\mathsf{ind}\,A$ e $\mathsf{ind}\,B$ usaremos o seguinte lema:

Lema 5.2 *Seja M_A uma A-módulo. Então, $M_A \cong N_A$ se, e somente se, $M \otimes_A B \cong N \otimes_A B$.*

Prova. Seja $f : M_A \to N_A$ um isomorfismo. Então $f \otimes B : M \otimes_A B \to N \otimes_A B$ também será um isomorfismo cuja inversa é $f^{-1} \otimes B : N \otimes_A B \to M \otimes_A B$, pois $(f \otimes B)(f^{-1} \otimes B) = ff^{-1} \otimes B = id_N \otimes B = id_{N \otimes_A B}$ e $(f^{-1} \otimes B)(f \otimes B) = f^{-1}f \otimes B = id_M \otimes B = id_{M \otimes_A B}$.

Reciprocamente, se $g : M \otimes_A B \to N \otimes_A B$ então $g \otimes A : M \otimes_A B \otimes_B A \to N \otimes_A B \otimes_B A$ também será um isomorfismo e portanto $M_A \cong M \otimes_A B \otimes_B A \cong N \otimes_A B \otimes_B A \cong N_A$. ∎

Corolário 5.3 *Se B é de tipo de representação finito, então A também é de tipo de representação finito.*

Prova. Suponhamos que $\mathsf{ind}\,A$ é infinita, pelo lema anterior o conjunto $\{M \otimes_A B \,|\, M \in \mathsf{ind}\,A\} \subseteq \mathsf{ind}\,B$ é infinito. Contradição, pois $\mathsf{ind}\,B$ é finita. ∎

5.2.1 Álgebra laura.

Essa classe de álgebras foi introduzida em [3] e contém as demais classes já citadas: colada (à direita e à esquerda), fracamente shod, shod, quase inclinada e hereditária. (Ver também [5])

Definição 5.5 *Uma álgebra de Artin C é dita uma* **álgebra laura** *se a união $\mathcal{L}_C \cup \mathcal{R}_C$ for cofinita em* $\mathsf{ind}\, C$.

Teorema 5.4 *Seja B uma extensão cindida por nilpotente de A. Se B é uma álgebra laura então A também é laura.*

Prova. Seja $M \in \mathsf{ind}\, A$ tal que $M \notin \mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A$. Se $M \otimes_A B \in \mathcal{L}_B$ então pelo item 1 do Lema 5.1 teríamos $M \in \mathcal{L}_A$. Da mesma forma, pelo item 3 do mesmo lema, temos que $M \otimes_A B \notin \mathcal{R}_B$ e portanto $M \otimes_A B \in \mathsf{ind}\, B$ mas $M \otimes_A B \notin \mathcal{L}_B \cup \mathcal{R}_B$.

Como B é laura, então $\mathcal{L}_B \cup \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ é cofinita em $\mathsf{ind}\, B$ e consequentemente $\mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A$ é cofinita em $\mathsf{ind}\, A$. Caso contrário, pelo Lema 5.2 teríamos que $\mathsf{ind}\, B \setminus (\mathcal{L}_B \cup \mathcal{R}_B)$ seria infinita. Portanto, A é laura. ∎

5.2.2 Álgebras coladas à direita e à esquerda.

As álgebras coladas foram introduzidas em [2].

Definição 5.6 ([2], 3.2) *Seja C uma álgebra de Artin.*

(a) C é dita **colada à esquerda** *se $\{M \in \mathsf{ind}\, C \mid \mathsf{di}\, M \leq 1\}$ é cofinita em $\mathsf{ind}\, C$.*

(b) C é dita **colada à direita** *se $\{M \in \mathsf{ind}\, C \mid \mathsf{dp}\, M \leq 1\}$ é cofinita em $\mathsf{ind}\, C$.*

Em [3] mostra-se a seguinte equivalência:

Lema 5.5 ([3], 2.2) *Seja C uma álgebra de Artin.*

(a) C é colada à esquerda se, e somente se, $\mathcal{R}_C$ é cofinita em $\mathsf{ind}\, C$.

(b) C é colada à direita se, e somente se, $\mathcal{L}_C$ é cofinita em $\mathsf{ind}\, C$. ∎

Teorema 5.6 *Seja B uma extensão cindida por nilpotente de A.*

(a) Se B é uma álgebra colada à direita então A também é colada à direita.

(b) Se B é uma álgebra colada à esquerda então A também é colada à esquerda.

Prova.

(a) Suponhamos que B seja colada à direita. Seja $M \in \operatorname{ind} A$ tal que $M \notin \mathcal{R}_A$. Pelo item 3 do Lema 5.1 temos que $M \otimes_A B \notin \mathcal{R}_B$. Pelo lema anterior $\mathcal{R}_B$ é cofinita em $\operatorname{ind} B$, daí segue do Lema 5.2 que $\mathcal{R}_A$ é cofinita em $\operatorname{ind} A$. Portanto, A é colada à direita.

(b) Analogamente, se $M \in \operatorname{ind} A$ é tal que $M \notin \mathcal{L}_A$, pelo item 1 do Lema 5.1 $M \otimes_A B \notin \mathcal{L}_B$. Daí se B é colada à esquerda temos que $\mathcal{L}_B$ é cofinita em $\operatorname{ind} B$ e o Lema 5.2 implica que $\mathcal{L}_A$ é cofinita em $\operatorname{ind} A$, isto é, A é colada à esquerda. ■

5.2.3 Álgebra fracamente shod.

Está é uma subclasse da classe de álgebras laura e como o nome sugere contém a classe das álgebras shod.

Definição 5.7 ([15], 2.3) *Uma álgebra de Artin C é chamada* **fracamente shod** *se existe um inteiro positivo n tal que todo caminho em $\operatorname{ind} C$ de um injetivo para um projetivo tem comprimento no máximo n.*

Mostra-se em [4] que basta olhar os caminhos de módulos em $\operatorname{ind} C \setminus \mathcal{L}_C$ para módulos em $\operatorname{ind} C \setminus \mathcal{R}_C$:

Lema 5.7 ([4], 1.1) *Uma álgebra de Artin C é fracamente shod se existe um inteiro positivo n tal que todo caminho em $\operatorname{ind} C$ de um módulo que não está em $\mathcal{L}_C$ para um módulo que não está em $\mathcal{R}_C$ tem comprimento no máximo n.* ■

Teorema 5.8 *Seja B uma extensão cindida por nilpotente de A. Se B é uma álgebra fracamente shod então A também é fracamente shod.*

Prova. Sejam $M, N \in \operatorname{ind} A$ com $M \notin \mathcal{L}_A$ e $N \notin \mathcal{R}_A$ tais que M é predecessor de N. Consideremos $M = L_0 \xrightarrow{f_1} L_1 \to \cdots \to L_{n-1} \xrightarrow{f_n} L_n = N$ um caminho de M para N em $\operatorname{ind} A$. Aplicando o funtor $- \otimes_A B$, temos que

$$M \otimes_A B = L_0 \otimes_A B \xrightarrow{f_1 \otimes B} L_1 \otimes_A B \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{n-1} \otimes_A B \xrightarrow{f_n \otimes B} L_n \otimes_A B = N \otimes_A B$$

é um caminho de $M \otimes_A B$ para $N \otimes_A B$ de comprimento n em $\mathsf{ind}\, B$. Pelo Lema 5.1, $M \otimes_A B \notin \mathcal{L}_B$ e $N \otimes_A B \notin \mathcal{R}_B$. Como B é fracamente shod, pelo lema anterior, existe n_0 tal que $n \leq n_0$. Portanto, A é fracamente shod. ■

5.2.4 Álgebra shod

O resultado para álgebras shod já foi enunciado em 4.21. Incluímos aqui uma definição equivalente à dada anteriormente, envolvendo as partes direita e esquerda da categoria de módulos, que será utilizada nos exemplos. Há também uma nova versão para a demonstração do Teorema 4.21.

Essa classe de álgebras foi introduzida em [14] onde também encontramos a equivalência:

Proposição 5.9 ([14], 2.1) *Seja C uma álgebra de Artin.*
Então C é uma álgebra shod se, e somente se, $\mathsf{ind}\, C = \mathcal{L}_C \cup \mathcal{R}_C$. ■

Prova 2.[para o Teorema 4.21] Suponhamos que B é shod e seja $M_A \in \mathsf{ind}\, A$. Como $M \otimes_A B \in \mathsf{ind}\, B$ então, pela proposição anterior, $M \otimes_A B \in \mathcal{L}_B$ ou $\mathcal{R}_B$. Pelos itens 1 e 3 do Lema 5.1 teremos que $M \in \mathcal{L}_A$ ou $M \in \mathcal{R}_A$, ou seja $\mathsf{ind}\, A \subseteq \mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A$. Como a outra inclusão é óbvia, segue que A é shod. ■

5.2.5 Álgebra quase inclinada.

Pela definição abaixo, é fácil ver que a classe das álgebras inclinadas é uma subclasse das álgebras shod.

Definição 5.8 ([16], II) *Uma álgebra de Artin C é dita* **quase inclinada** *se for shod e dim. gl. $C \leq 2$.*

Mostra-se em [16] que vale:

Lema 5.10 ([16], II 1.14) *Seja C uma álgebra de Artin. Então C é quase inclinada se, e somente se, $\mathcal{L}_C$ contém todos os módulos projetivos de* $\mathsf{ind}\, C$.

Teorema 5.11 *Seja B uma extensão cindida por nilpotente de A. Se B é uma álgebra quase inclinada então A também é quase inclinada.*

Prova. Seja $P \in \mathsf{ind}\, A$ um módulo projetivo, mostraremos que $P \in \mathcal{L}_A$. Pelo Lema 2.6 temos que $P \otimes_A B$ é projetivo e indecomponível e, como B é quase inclinada, então $P \otimes_A B \in \mathcal{L}_B$. Pelo item 1 do Lema 5.1 segue que $P \in \mathcal{L}_A$. ■

5.2.6 Álgebra disfarçada.

Esta é uma classe de álgebras de tipo de representação infinito, que pertence às demais classes já citadas nesse capítulo. Sua definição pode ser encontrada, por exemplo em [8]. Sua caracterização pode ser feita da seguinte forma:

Lema 5.12 ([2], 3.4) *Seja C uma álgebra de Artin de tipo de representação infinito. Então, C é uma álgebra disfarçada se, e somente se, C é colada à esquerda e C é colada à direita.* ■

Gostaríamos de enunciar um resultado para essa classe, análogo aos aqui apresentados. Porém, se uma álgebra B, de tipo de representação infinito, é extensão cindida de uma álgebra A por um ideal nilpotente, não podemos garantir que A também seja de tipo infinito.

Exemplo 5.1 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, Δ_B a aljava $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 2$ e Δ_A a aljava $1 \xleftarrow{\alpha} 2$. Então, $k\Delta_B$ é uma extensão cindida de $k\Delta_A$ pelo ideal gerado pela flecha β. A álgebra B é de tipo de representação infinito, mas $k\Delta_A$ é de tipo finito.* ■

Acrescentaremos, portanto, a hipótese de que A seja de tipo de representação infinito, pois o Corolário 5.3 garante que B também será de tipo infinito.

Teorema 5.13 *Sejam A uma álgebra de tipo de representação infinito e B uma extensão cindida por nilpotente de A. Se B é uma álgebra disfarçada, então A também é uma álgebra disfarçada.*

Prova. Como B é disfarçada, pelo Lema 5.12, B é colada à esquerda e à direita. Pelo Teorema 5.6, segue que A também é colada à esquerda e à direita e como A é de tipo infinito, segue que A é também disfarçada. ■

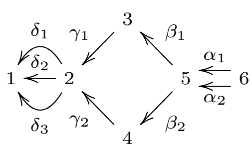
5.3 Exemplos

Veremos que as recíprocas dos teoremas acima não são verdadeiras. Os exemplos serão dados no contexto de álgebras dadas por aljavas com relações. Por isso, consideremos um corpo k algebricamente fechado.

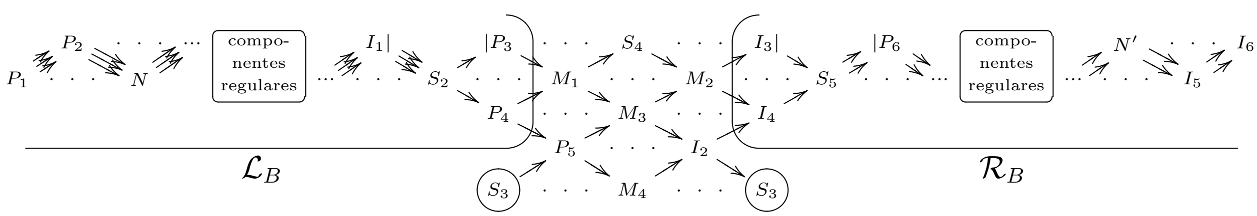
Para decidir se a álgebra que estivermos estudando é de uma determinada classe olharemos a chamada **Aljava de Auslander-Reiten** da álgebra. O estudo de tal aljava é suficiente para obter as informações da categoria dos módulos indecomponíveis que precisamos. Esse fato não será detalhado neste trabalho, apenas faremos algumas considerações sobre a aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra no Apêndice A.

Para decidir se uma álgebra é extensão cindida de outra usaremos a técnica do Teorema 3.8.

1º Exemplo.

Seja B a k-álgebra dada pela aljava  com as relações $\alpha_i\beta_j = 0$, $\gamma_i\delta_j = 0$ para todo i, j, e $\beta_1\gamma_1 = 0$, ou seja, $B = \frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$, onde Δ é a aljava acima e $\mathcal{I}$ é o ideal gerado por $\alpha_i\beta_j$, $\gamma_i\delta_j$ e $\beta_1\gamma_1$.

Segue um esquema da aljava de Auslander-Reiten para B, onde destacamos $\mathcal{L}_B$ e $\mathcal{R}_B$:



onde S_i, P_i e I_i são os módulos indecomponíveis simples, projetivo e injetivo referentes ao vértice i, respectivamente. Além disso, $N = \begin{smallmatrix} & & 0 & & \\ 8 & 3 & & 0 & 0 \\ & & 0 & & \end{smallmatrix}$, $N' = \begin{smallmatrix} & & 0 & & \\ 0 & 0 & & 2 & 3 \\ & & 0 & & \end{smallmatrix}$, $M_1 = \begin{smallmatrix} & & 1 & & \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$, $M_2 = \begin{smallmatrix} & & 1 & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$, $M_3 = \begin{smallmatrix} & & 2 & & \\ 0 & 1 & & 1 & 0 \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$ e $M_4 = \begin{smallmatrix} & & 0 & & \\ 0 & 1 & & 1 & 0 \\ & & 1 & & \end{smallmatrix}$.

Vejamos a que classes de álgebras B pertence:

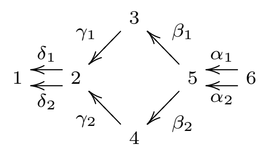
- B é laura, pois $(\mathsf{ind}\, B) \setminus (\mathcal{L}_B \cup \mathcal{R}_B) = \{S_3, M_1, P_5.S_4, M_3, M_4, M_2, I_2\}$ é finita.

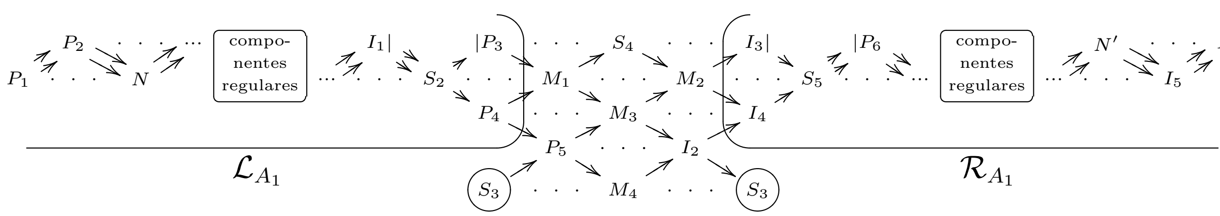
- B não é colada à esquerda, pois $\mathsf{ind}\, B \setminus \mathcal{R}_B$ não é finita.
- B não é colada à direita, pois $\mathsf{ind}\, B \setminus \mathcal{L}_B$ não é finita.
- B não é shod, pois $S_3 \notin \mathcal{L}_B \cup \mathcal{R}_B$ por exemplo.
- B não é quase inclinada pois não é shod.
- B não é fracamente shod, pois não existe um inteiro que limite os caminhos de I_2 para P_5 da forma:

$$I_2 \to S_3 \to P_5 \to M_3 \to I_2 \to S_3 \to P_5 \to M_3 \to I_2 \to \ldots \to P_5.$$

Vejamos agora alguns exemplos de k-álgebras A_i tais que B seja uma extensão cindida por um ideal nilpotente Q_i:

A_1**:**

Consideremos Q_1 o ideal de B gerado por δ_3 e $A_1 = B/Q_1$. Então, B é uma extensão cindida de A_1 pelo nilpotente Q_1. Temos que A_1 é a álgebra dada pela aljava  com as relações herdadas de B. Um esquema para a aljava de Auslander-Reiten dessa álgebra é:



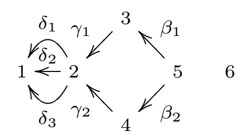
Temos então que:

- A_1 é laura, pois $(\mathsf{ind}\, A_1) \setminus (\mathcal{L}_{A_1} \cup \mathcal{R}_{A_1}) = \{S_3, M_1, P_5.S_4, M_3, M_4, M_2, I_2\}$ é finita.
- A_1 não é colada à esquerda, pois $\mathsf{ind}\, A_1 \setminus \mathcal{R}_{A_1}$ não é finita.
- A_1 não é colada à direita, pois $\mathsf{ind}\, A_1 \setminus \mathcal{L}_{A_1}$ não é finita.

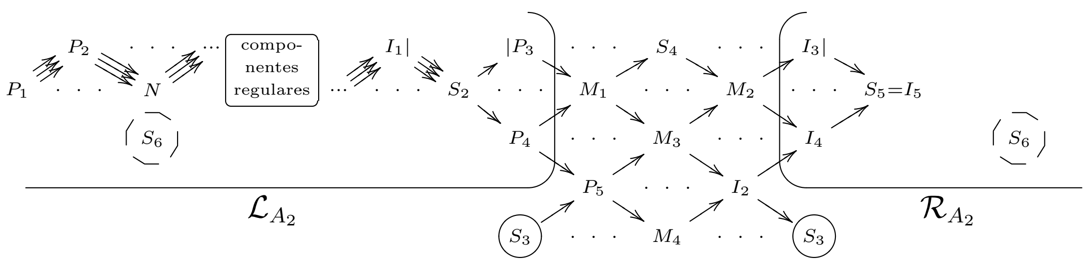
- A_1 não é shod, pois $S_3 \notin \mathcal{L}_{A_1} \cup \mathcal{R}_{A_1}$ por exemplo.
- A_1 não é quase inclinada, pois não é shod.
- A_1 não é fracamente shod, pois não existe um inteiro que limite os caminhos de I_2 para P_5 da forma:

$$I_2 \to S_3 \to P_5 \to M_3 \to I_2 \to S_3 \to P_5 \to M_4 \to I_2 \to \ldots \to P_5.$$

A_2**:**

Consideremos Q_2 o ideal de B gerado por α_1 e por α_2. Então B é uma extensão cindida de $A_2 = B/Q_2$ pelo nilpotente Q_2. Além disso, A_2 é dada pela aljava 

com as relações herdadas de B. Um esquema para a aljava de Auslander-Reiten dessa álgebra é:



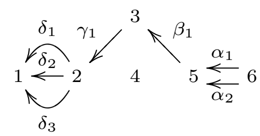
Então,

- A_2 é laura, pois $(\mathsf{ind}\, A_2) \setminus (\mathcal{L}_{A_2} \cup \mathcal{R}_{A_2}) = \{S_3, M_1, P_5.S_4, M_3, M_4, M_2, I_2\}$ é finita.
- A_2 não é colada à esquerda, pois $\mathsf{ind}\, A_2 \setminus \mathcal{R}_{A_2}$ não é finita.
- A_2 é colada à direita, pois $\mathsf{ind}\, A_2 \setminus \mathcal{L}_{A_2} = \{S_3, M_1, P_5.S_4, M_3, M_4, M_2, I_2, I_3, I_4, S_5\}$ é finita.
- A_2 não é shod, pois $S_3 \notin \mathcal{L}_{A_2} \cup \mathcal{R}_{A_2}$ por exemplo.
- A_2 não é quase inclinada pois não é shod.
- A_2 não é fracamente shod, pois não existe um inteiro que limite os caminhos de I_2 para P_5 da

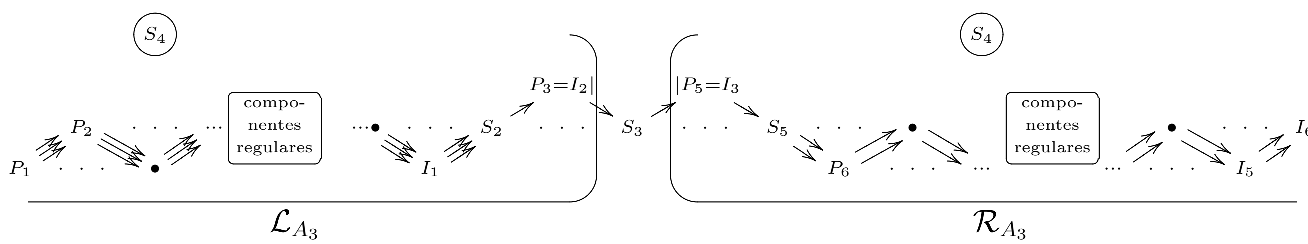
forma:

$$I_2 \to S_3 \to P_5 \to M_3 \to I_2 \to S_3 \to P_5 \to M_3 \to I_2 \to \dots \to P_5.$$

A_3**:**

Consideremos Q_3 o ideal de B gerado por β_2 e por γ_2. Temos que B uma extensão cindida de $A_3 = B/Q_3$ pelo nilpotente Q_3. Além disso, A_3 é dada pela aljava 

com as relações herdadas de B. Um esquema para a aljava de Auslander-Reiten dessa álgebra é:



Então,

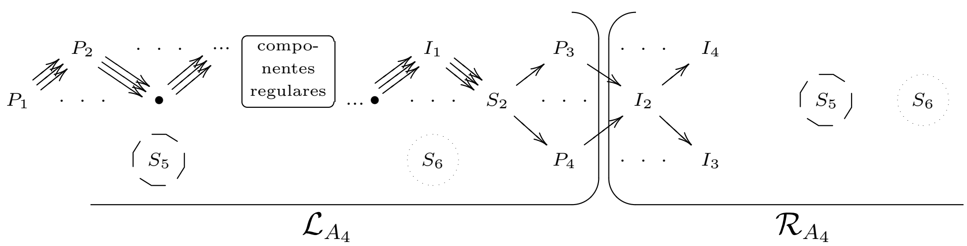
- A_3 é laura, pois $(\mathsf{ind}\, A_2) \setminus (\mathcal{L}_{A_2} \cup \mathcal{R}_{A_2}) = \{S_3\}$ é finita.
- A_3 não é colada à esquerda, pois $\mathsf{ind}\, A_3 \setminus \mathcal{R}_{A_3}$ não é finita.
- A_3 não é colada à direita, pois $\mathsf{ind}\, A_3 \setminus \mathcal{L}_{A_3}$ não é finita.
- A_3 não é shod, pois pois $S_3 \notin \mathcal{L}_{A_3} \cup \mathcal{R}_{A_3}$.
- A_3 não é quase inclinada, pois não é shod.
- A_3 é fracamente shod, pois se $M \notin \mathcal{L}_{A_3}$ e $N \notin \mathcal{R}_{A_3}$ com $M \rightsquigarrow N$, então $M = N = S_3$.

A_4**:**

Consideremos Q_4 o ideal de B gerado por α_1, α_2, β_1 e β_2. Temos que B uma extensão cindida de $A_4 = B/Q_4$ pelo nilpotente Q_4. Além disso, A_4 é dada pela aljava

$$\begin{tikzcd} & & 3 \arrow[dl, "\gamma_1"'] & & \\ 1 & 2 \arrow[l, bend right, "\delta_1"'] \arrow[l, "\delta_2"] \arrow[l, bend left, "\delta_3"] & & 5 & 6 \\ & & 4 \arrow[ul, "\gamma_2"] & & \end{tikzcd}$$

com as relações herdadas de B. Um esquema para a aljava de Auslander-Reiten dessa álgebra é:



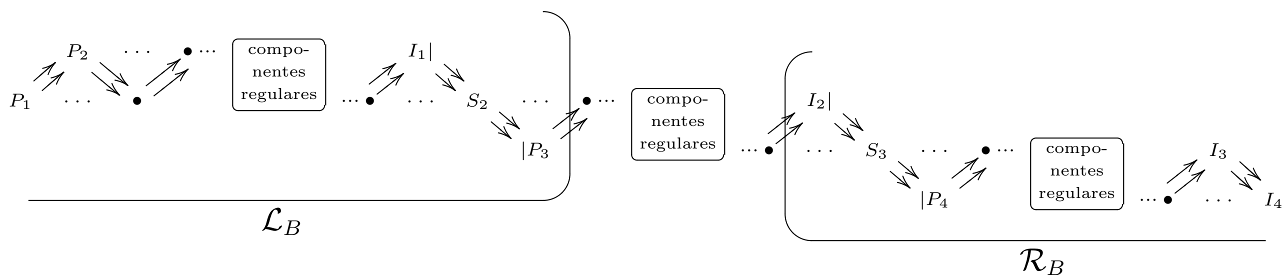
Então,

- A_4 é laura, pois $(\mathsf{ind}\, A_4) \setminus (\mathcal{L}_{A_4} \cup \mathcal{R}_{A_4}) = \emptyset$
- A_4 não é colada à esquerda, pois $\mathsf{ind}\, A_4 \setminus \mathcal{R}_{A_4}$ não é finita.
- A_4 é colada à direita, pois $(\mathsf{ind}\, A_4) \setminus \mathcal{L}_{A_4} = \{I_2, I_3, I_4\}$ é finita.
- A_4 é shod, pois $\mathsf{ind}\, A_4 = \mathcal{L}_{A_4} \cup \mathcal{R}_{A_4}$.
- A_4 é fracamente shod pois é shod.
- A_4 é quase inclinada, pois $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 = S_5, P_6 = S_6 \in \mathcal{L}_{A_4}$.

2º Exemplo.

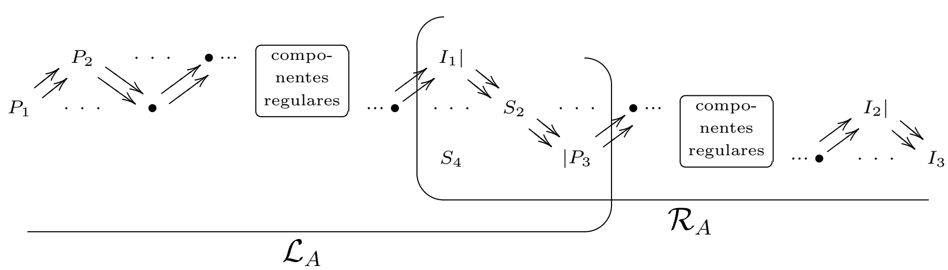
Veremos agora que a recíproca do Teorema 5.4 não é verdadeira.

Seja $B = \frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$ onde Δ é a aljava $1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\leftleftarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\leftleftarrows}} 3 \underset{\beta_3}{\overset{\alpha_3}{\leftleftarrows}} 4$ e $\mathcal{I}$ é o ideal gerado por $\alpha_i\alpha_{i-1}$, $\beta_i\beta_{i-1}$, $\alpha_i\beta_{i-1}$ e $\beta_i\alpha_{i-1}$ para $i = 2, 3$. Um esquema para a aljava de Auslander-Reiten de B é



Nesse caso, $\mathcal{L}_B \cup \mathcal{R}_B$ não é cofinita em $\mathsf{ind}\, B$, portanto B não é uma álgebra laura.

Consideremos agora o ideal Q de B gerado pelas classes das flechas α_3 e β_3. Então, B é uma extensão cindida de $A = \frac{B}{Q}$ pelo ideal Q. A álgebra A é dada pela aljava $1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\leftleftarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\leftleftarrows}} 3 \qquad 4$ com as relações herdadas de B. Um esquema para a aljava de Auslander-Reiten de A é



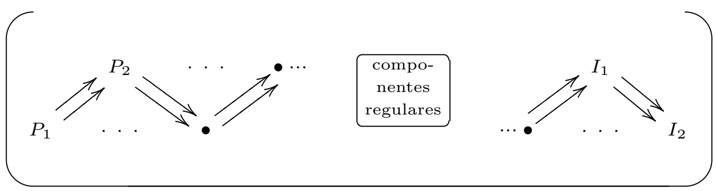
A álgebra A é laura, pois $\mathsf{ind}\, A \setminus (\mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A) = \emptyset$.

3º Exemplo.

Veremos agora que a recíproca do Teorema 5.13 não é verdadeira.

Seja $B = \frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$ onde Δ é a aljava $1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\leftleftarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\leftleftarrows}} 3$ e $\mathcal{I}$ é o ideal gerado por $\alpha_2\alpha_1$, $\beta_2\beta_1$, $\alpha_2\beta_1$ e $\beta_2\alpha_1$. A aljava de Auslander-Reiten de B é a mesma da álgebra A do exemplo anterior, exceto pelo S_4 que nesse caso não existe. Portanto, B não é uma álgebra disfarçada, pois não é colada à esquerda por exemplo.

Consideremos o ideal Q de B gerado pelas flechas α_2 e β_2. Então, B é uma extensão cindida de $A = \frac{B}{Q}$ pelo ideal Q. A álgebra A é dada pela aljava $1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\leftleftarrows}} 2 \quad 3$ e portanto um esquema da aljava de Auslander-Reiten para A é



$\mathcal{R}_A = \mathcal{L}_A$

Então A é disfarçada, uma vez que $\mathsf{ind}\, A \setminus \mathcal{R}_A = \emptyset = \mathsf{ind}\, A \setminus \mathcal{L}_A$.

Apêndice A

Aljava de Auslander-Reiten

Sejam k um corpo algebricamente fechado e C uma k-álgebra de dimensão finita. A essa álgebra associamos uma aljava, cujos vértices correspondem aos objetos da categoria $\mathsf{ind}\, C$ e as flechas correspondem aos chamados morfismos irredutíveis. Por isso, começaremos definindo esses morfismos.

A construção da aljava de Auslander-Reiten não será discutida. Serão salientadas apenas algumas características dessa aljava.

As demonstrações e mais detalhes sobre esse assunto podem ser encontradas em, por exemplo, [8], [11] e [13].

Definição A.1 *Sejam M e N dois C-módulos em $\mathsf{mod}\, C$. Um morfismo $f \in \mathsf{Hom}_C(M, N)$ é dito* **irredutível** *se:*

(i) f não é monomorfismo que cinde e nem epimorfismo que cinde;

(ii) se $f = gh$ então, ou g é um epimorfismo que cinde, ou f é um monomorfismo que cinde.

Exemplo A.1 *Se P é um C-módulo projetivo indecomponível não simples, então a inclusão $\iota : \mathsf{rad}\, P \hookrightarrow P$ é um morfismo irredutível.* ■

Sejam M e N dois C-módulos em $\mathsf{ind}\, C$. Denotamos por $\mathsf{rad}_C(M, N)$ o k-espaço vetorial dos morfismos de M para N que não são isomorfismos. Um morfismo $f : M \to N$ é irredutível se, e somente se, $f \in \mathsf{rad}_C(M, N) \backslash \mathsf{rad}^2_C(M, N)$. O k-espaço vetorial Irr $(M, N) = \dfrac{\mathsf{rad}_C(M, N)}{\mathsf{rad}^2_C(M, N)}$ é chamado de **espaço dos morfismos irredutíveis**.

Definição A.2 *Seja C uma k-álgebra de dimensão finita. A* **aljava de Auslander-Reiten de** C, *denotada por Γ_C é a aljava definida por:*

(i) os vértices estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfismos dos C-módulos indecomponíveis;

(ii) o número de flechas de $[M]$ para $[N]$ é igual a $\dim_k \operatorname{Irr}(M, N)$.

Decorre, diretamente da definição, que se C é de tipo de representação infinito então Γ_C tem infinitos vértices. Nesse caso, Γ_C pode ter infinitas componentes conexas.

Sequências de Auslander-Reiten

Uma sequência exata curta de C-módulos que não cinde, $0 \to N \to E \to M \to 0$, é uma **sequência de Auslander-Reiten (A-R)** se:

(i) M e N são indecomponíveis;

(ii) dados $X \in \mathsf{mod}\, C$ e $h : X \to M$ um morfismo que não seja um epimorfismo que cinde, existe $\bar{h} : X \to E$ tal que $g\bar{h} = h$.

Podemos trocar (ii) pela condição equivalente:

(iii) dados $X \in \mathsf{mod}\, C$ e $h : N \to X$ um morfismo que não seja um monomorfismo que cinde, existe $\bar{h} : E \to X$ tal que $\bar{h}f = h$.

Proposição A.1 (Existência e unicidade) *Sejam C uma R-álgebra de Artin e M um C-módulo indecomponível.*

1. *Se M não for projetivo, então existe e é única a sequência de A-R terminando em M:*

$$0 \to N \to E \to M \to 0.$$

Além disso, $N \cong \tau M$, onde $\tau = D\mathsf{Tr}$ como definido no Capítulo 4.

2. Se M não for injetivo, então existe e é única a sequência de A-R começando em N:

$$0 \to N \to E \to M \to 0.$$

Além disso, $M \cong \tau^{-1}N$, onde $\tau^{-1} = \mathsf{Tr}\, D$ como definido no Capítulo 4.

■

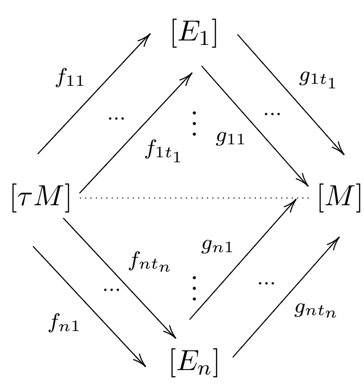
Podemos escrever uma sequência de A-R da seguinte forma

$$0 \to N \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{n} E_i^{t_i} \xrightarrow{g} M \to 0$$

com cada E_i indecomponível, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ onde $f_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{it_i} \end{bmatrix} : N \to E_i^{t_i}$ e $g = \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{bmatrix}$ onde $g_i : \begin{bmatrix} g_{i1} & \cdots & g_{it_i} \end{bmatrix} : E_i^{t_i} \to M$. Nesse caso, cada f_{ij} e cada g_{ij} é um morfismo irredutível.

Se M é um C-módulo indecomponível e não projetivo, então o número de flechas que saem de $[\tau M]$ é igual ao número de flechas que chegam em $[M]$. Por outro lado, se M é um C-módulo indecomponível e não injetivo então o número de flechas que saem de $[M]$ é igual ao número de flechas que chegam em $[\tau^{-1}M]$.

Na aljava de A-R tal sequência corresponderia a um diagrama da forma:



Exemplo A.2 *Seja k um corpo algebricamente fechado, Δ a aljava $1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$, $\mathcal{I}$ o ideal de $k\Delta$*

gerado por $\beta\alpha$. A aljava de A-R de $\frac{k\Delta}{\mathcal{I}}$ tem a seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
& {[P_2]} \arrow[dr] & & & \\
{[P_1]} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[S_2]} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[I_3]} \\
& & & {[P_3]} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

■

Em geral, escreveremos apenas M para representar $[M]$. Por convenção as flechas sempre estão da esquerda para direita.

Vejamos qual é a relação de um morfismo qualquer entre C-módulos indecomponíveis e os morfismos irredutíveis.

Denotemos por $\operatorname{rad}^{\infty}(M,N) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{rad}^{n}(M,N)$. Uma componente conexa $\hat{\Gamma}$ de Γ_C é dita **standard generalizada** se $\operatorname{rad}^{\infty}(M,N) = 0$ para todos $M, N \in \hat{\Gamma}$.

Uma propriedade importante da aljava de A-R é que se M e N são C-módulos indecomponíveis tais que M "aparece" à direita de N na aljava, então $\operatorname{Hom}_C(M,N) = 0$. Por isso para encontrar os predecessores (em $\operatorname{ind} C$) de um C-módulo indecomponível, basta olhar os C-módulos que ficam à sua esquerda na aljava.

Proposição A.2 *Seja $\hat{\Gamma}$ uma componente standard generalizada de Γ_C e $M, N \in \hat{\Gamma}$. Se $f \in \operatorname{Hom}_C(M,N)$ é não nulo e não isomorfismo então f é soma de compostas de morfismos irredutíveis.* ■

Em particular, para uma álgebra de tipo de representação finito vale:

Corolário A.3 *Seja C uma álgebra de tipo de representação finito e M e N dois C-módulos indecomponíveis. Então, se $f \in \operatorname{Hom}_C(M,N)$ é não nulo e não isomorfismo então f é soma de compostas de morfismos irredutíveis.* ■

Referências Bibliográficas

[1] I. Assem, *Algèbres et modules*, Presses de l'Université d'Ottawa, Canada, 1997.

[2] I. Assem and F. U. Coelho, *Glueings of tilted algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra **96** (1994), 225–243.

[3] ———, *Two-sided gluings of tilted algebras*, Journal of Algebra **269** (2003), 456–479.

[4] ———, *Endomorphism algebras of projective modules over laura algebras*, Journal of Algebra and Its Applications **3** (2004), no. 1, 49–60.

[5] I. Assem, F. U. Coelho, M. A. Lanzilotta, D. Smith, and S. Trepode, *Algebras determined by their left and right parts*, Algebraic Structures and Their Representations, Cont. Math. **376** (2005), 13–47.

[6] I. Assem, F. U. Coelho, and S. Trepode, *The bound quiver of a split extension*, aceito para publicação no Journal of Algebra and its Applications.

[7] I. Assem and N. Marmaridis, *Tilting modules over split-by-nilpotent extensions*, Comm. Algebra **26** (1998), 1547–1555.

[8] I. Assem, D. Simson, and A. Skowronski, *Elements of the representation theory of associative algebras*, vol. 1.

[9] I. Assem and D. Zacharia, *Full embeddings of almost split sequences over split-by-nilpotent extensions*, Colloquium Mathematicum **81** (1999), 21–31.

[10] ———, *On split-by-nilpotent extensions*, Colloquium Mathematicum **98** (2003), 259–275.

[11] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalϕ, *Representation theory of artin algebras*, Cambridge Stud. Adv. Math. 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[12] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, New Jersey, 1956.

[13] F. U. Coelho, *Uma introdução à teoria de representações de álgebras (minicurso)*, Atas da XII Escola de Álgebra, Diamantina (1992), 60p.

[14] F. U. Coelho and M. A. Lanzilotta, *Algebras with small homological dimension*, Manuscripta Math **100** (1999), 1–11.

[15] ______, *Weakly shod algebras*, Journal of Algebra **265** (2003), 379–403.

[16] D. Happel, I. Reiten, and S. O. Smalϕ, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **575** (1996).

Índice Remissivo