

# **Folheações de Montiel em Variedades Riemannianas**

Júlio César Carvalho Pereira

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

São Paulo, Junho de 2024

# **Folheações de Montiel em Variedades Riemannianas**

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 30/05/2024. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Euripedes Carvalho da Silva - IFCE
- Prof. Dr. Eduardo Rosinato Longa - IME-USP
- Prof. Dr. Icaro Gonçalves - UFABC
- Prof. Dr. Francisco José Gozzi - UFABC

# Agradecimentos

Agradeço o apoio financeiro da CAPES durante parte do desenvolvimento desta tese de doutorado. E também o apoio do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Baiano.

Aos membros da banca, pela participação na defesa e por suas contribuições. Aos professores que tive ao longo deste período acadêmico por todo o conhecimento compartilhado nessa jornada.

Em especial, ao professor Fabiano, por aceitar ser meu orientador e ter me acolhido. Ao professor Euripedes, pelas conversas e por atuar como um segundo orientador, e apenas por razões regimentais/burocráticas não ser coorientador formal neste trabalho. À Adriana e ao Ícaro por toda generosidade, sugestões e apoio. Admiro muito vocês.

À minha família e meus amigos por todo suporte e carinho.

# Resumo

PEREIRA, J. C. C.. **Folheações de Montiel em Variedades Riemannianas**. 2024. 30 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

Neste trabalho, realizamos um estudo das propriedades geométricas de folheações por hipersuperfícies em variedades Riemannianas. Nosso objetivo foi investigar as condições nas quais as folhas se tornam hipersuperfícies mínimas, totalmente geodésicas ou totalmente umbílicas. Para isso, consideramos variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não positiva e equipadas com um campo de vetores conforme fechado. Ao analisar uma folheação com curvatura média constante, demonstramos que ela é totalmente geodésica. Além disso, apresentamos uma caracterização das folhas totalmente geodésicas de uma folheação que é transversal a um campo conforme fechado. Por fim, aplicamos alguns Princípios do Máximo em variedades completas para obter resultados de rigidez e obstrução para folheações com curvatura média constante. Esses resultados contribuem para um melhor entendimento das propriedades geométricas das folheações por hipersuperfícies em variedades Riemannianas e podem ter aplicações significativas em estudos futuros nessa área.

**Palavras-chave:** variedade Riemanniana, folheações, totalmente geodésica, princípio do máximo.

# Abstract

PEREIRA, J. C. C.. **Montiel Foliation on Riemannian Manifolds**. 2024. 30 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

In this work, we study the geometric properties of foliations by hypersurfaces on Riemannian manifolds. We investigate conditions for the leaves to be minimal hypersurfaces, totally geodesic, or totally umbilical. We consider a Riemannian manifold with non-positive Ricci curvature equipped with a closed conformal vector field. If the foliation has constant mean curvature, we show that the foliation is totally geodesic. We also present a characterization of totally geodesic leaves of a foliation transversal to a closed conformal field. Finally, we use some Maximum Principles for complete manifolds to conclude rigidity and obstruction results for foliations with constant mean curvature.

**Keywords:** Riemannian manifolds, foliations, totally geodesic, maximum principle.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>6</b>
2.1 Variedades Riemannianas e Folheações . . . . .	6
2.2 Campos conforme fechados . . . . .	8
2.3 Crescimento de volume e princípios do máximo . . . . .	12
<b>3 Folheações de Montiel</b>	<b>16</b>
3.1 Equação fundamental . . . . .	16
3.2 Folheação transversal ao campo conforme fechado . . . . .	18
<b>4 Caracterização de Folheações Totalmente Geodésicas</b>	<b>25</b>
4.1 Teorema de caracterização . . . . .	25
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>29</b>

# Lista de Abreviaturas

CMC	Curvatura média constante ( <i>Constant Mean Curvature</i> )
IME	Instituto de Matemática e Estatística
USP	Universidade de São Paulo

# Lista de Símbolos

$\xi$	Campo unitário conforme fechado
$\nu$	Função suporte ou Função ângulo
$\varphi$	Função associada ao campo conforme fechado
$\mathfrak{F}$	Folheação transversal ao campo $\xi$
$\mathfrak{F}(\xi)$	Folheação de Montiel
$\nabla f$	gradiente da função $f$
$\Delta f$	Laplaciano da função $f$



# Lista de Figuras

2.1	Exemplo de (a)	11
2.2	Exemplo de (c)	11
2.3	Exemplo em $\mathbb{S}^n$	12
3.1	Contra-exemplo: quando $\nu$ não satisfaz a desigualdade (3.5)	21
3.2	Contra-exemplo: quando $\nu$ muda de sinal	21



# Capítulo 1

## Introdução

A Geometria Diferencial de Folheações é uma área que estabelece uma conexão entre duas grandes áreas da matemática: Geometria Diferencial e Teoria de Folheações. Nesse campo, busca-se compreender as relações geométricas e topológicas entre as folhas, a geometria e a topologia da variedade que está sendo folheada.

O estudo da geometria extrínseca de folheações de codimensão um em variedades Riemannianas foi realizado por diversos autores. Quando são folheações totalmente geodésicas, há trabalhos que tratam da existência de tais folheações até àqueles sobre a topologia e a geometria de variedades possuindo folheações desta natureza, destacamos [Abe73, Bri81, BW84, BG18, Fer70, Ghy83, JW80, dSSR23]. Para folheações que possuem curvatura média constante, incluindo o caso mínimo, muitos autores discutiram resultados de rigidez, por exemplo [BGS87, BKO91, Osh81, Osh82, Osh87, SdS24]. Citamos ainda [CW06] e o livro [RW11], incluindo suas referências.

Em 1999, Montiel [Mon99] classificou as hipersuperfícies com curvatura média constante em variedades Riemannianas equipadas de um campo de vetores conforme fechado  $\xi$ . Este tipo de campo de vetores gera uma folheação Riemanniana singular com folhas totalmente umbílicas em seu estrato regular. Nós chamaremos estas folheações de Folheações de Montiel ou, mais simplesmente, de  $\mathcal{F}(\xi)$ . Mais detalhadamente, aquele autor provou dois resultados: no primeiro, mostrou que a distribuição ortogonal ao campo conforme fechado  $\xi$  é integrável e totalmente umbílica e que o conjunto das singularidades desse campo é discreto; e, no segundo, acrescentou a hipótese de completude e concluiu que a quantidade de singularidades do campo conforme fechado  $\xi$  deve ser uma, duas ou nenhuma e classificou o espaço ambiente, respectivamente, como o espaço Euclidiano com uma métrica invariante por rotações, uma esfera com uma métrica invariante por rotações ou o recobrimento Riemanniano da variedade é um produto warped do tipo  $\mathbb{R} \times_f P$  onde  $P$  é uma subvariedade completa e de codimensão um e  $f$  é a função warping.

Por outro lado, recentemente Brasil *et al.* [BDSS22] exploraram a ideia de folheações transversas a um campo de vetores conforme no infinito. Eles obtiveram um resultado tipo-Bernstein para folheações transversas a esta estrutura no infinito. Citamos também o trabalho de Alias [ACN21], no qual os autores estudam folheações transversais a campos de Killing e obtêm resultados com condições para que as folhas sejam totalmente geodésicas.

Com base nestas ideias, dada uma folheação de codimensão um transversa a um campo de vetores conforme fechado em uma variedade Riemanniana, formulamos as seguintes questões:

*Que relação existe entre a geometria das folhas e a folheação associada a este campo de vetores?*

*Quais condições devem ser impostas às folhas para que sejam hipersuperfícies totalmente geodésicas? Essas hipersuperfícies são de Montiel?*

*Há alguma obstrução para a existência de uma folheação por hipersuperfícies transversa a um campo conforme fechado em uma variedade Riemanniana?*

Essas questões são fundamentais para compreender as propriedades geométricas das folheações por hipersuperfícies em variedades Riemannianas e estão diretamente relacionadas à interseção entre a Geometria Diferencial e a Teoria de Folheações. Através da investigação desses questionamentos, é possível obter informações valiosas sobre as folheações e sua relação com a geometria e topologia das variedades envolvidas.

Nosso objetivo é responder parcialmente a estas questões

## Objetivos

Apresentar um estudo sobre propriedades geométricas das folhas de uma folheação por hipersuperfícies transversais a um campo conforme fechado em variedades Riemannianas.

Explorar ideias e investigar técnicas de resultados clássicos, válidos para espaços com curvatura não-negativa, e aliá-las a algumas técnicas recentes da Análise Geométrica, como ferramentas, a fim de obter novos resultados agora no contexto de curvatura de Ricci não-positiva.

Estabelecer resultados de rigidez e obstruções geométricas para folheações nessas variedades Riemannianas.

Caracterizar, a partir de um invariante geométrico, as subvariedades de codimensão um transversais a um campo conforme fechado que são totalmente geodésicas.

## Contribuições

Apresentamos uma versão do teorema principal de [BKO91] para variedades de curvatura não positiva e uma versão do Teorema 3.1 de [ACN21] e do Teorema 4.2 em [BDSS22]. Finalmente, provamos um resultado de caracterização de hipersuperfícies totalmente geodésicas transversais a um campo conforme fechado, obtendo uma versão dos teoremas principais de [Gom04] e [dSSR23].

1. Iniciamos provando uma equação que estabelece uma relação entre a geometria da variedade ambiente e a geometria da folha que é transversal ao campo conforme fechado. Essa expressão é análoga àquela apresentada em [BDSS22] e [GS17], e desempenha um papel fundamental em nosso estudo. Através dessa equação, exploramos interações entre as propriedades geométricas da variedade e das folhas, proporcionando insights sobre o comportamento da folheação e suas características distintivas. Ao estabelecer essa identidade, buscamos compreender melhor as restrições e implicações que surgem para a existência e nas propriedades das folheações por hipersuperfícies em uma variedade Riemanniana.
2. Neste estudo, focamos nas variedades de curvatura negativa que estão equipadas com um campo de vetores conforme fechado. Nessas condições, estabelecemos critérios para garantir que uma folheação de curvatura média constante ou mínima seja totalmente geodésica. Através de técnicas de análise geométrica, investigamos as propriedades geométricas das folhas. Essas condições nos permitem compreender melhor o comportamento das folheações em variedades de curvatura negativa e fornecem informações importantes sobre as propriedades de total geodesibilidade das folhas e sua relação com a geometria ambiente.
3. No contexto de folheações transversais a campos conformes fechados, introduzimos um invariante métrico. Utilizando esse invariante, conseguimos obter um resultado que nos fornece uma caracterização das folhas totalmente geodésicas de uma folheação transversal a um campo conforme fechado.

## Organização do Trabalho

No Capítulo 2, apresentamos as preliminares e resultados que serão utilizados ao longo do trabalho. Este capítulo inicial busca estabelecer as bases teóricas necessárias para o desenvolvimento das análises subsequentes. São apresentados conceitos fundamentais, definições e resultados relevantes que serão referenciados ao longo do texto. Além disso, contém uma revisão da literatura existente sobre o tema, destacando trabalhos anteriores e principais contribuições na área. Por meio dessas preliminares, o leitor será preparado para compreender as discussões e investigações apresentadas nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 3, apresentamos uma demonstração para uma equação diferencial parcial que relaciona a geometria das folhas de uma folheação por hipersuperfícies que são transversais a um campo de vetores conforme fechado e a geometria da variedade ambiente. Mais especificamente,

Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana conexa e orientável equipada com um campo de vetores conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação transversal ao campo  $\xi$ . Então, para toda folha  $L \in \mathcal{F}$ , temos que

$$\operatorname{div}_L (A(\xi^\top)) = -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + \nu\|A\|^2 + n\varphi H, \quad (1.1)$$

onde  $A$  é o operador de Weingarten com respeito ao campo de vetores  $N$  normal à folha  $L$ ,  $H$  é a função curvatura média da folha  $L$  e  $\nu$  é a função suporte definida em  $\overline{M}$  e dada por  $\nu = \overline{g}(\xi, N)$ .

O resultado acima é uma versão para folheações da Proposição 2.1 em [BDSS22].

Para variedades de com curvatura de Ricci não-positiva munidas de um campo de vetores conforme fechado, apresentamos condições para que uma folha mínima de uma folheação transversal ao campo de vetores conforme seja totalmente geodésica. Mais precisamente:

**Teorema A.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não-positiva equipada com um campo de vetores conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um de  $\overline{M}$  transversal ao campo  $\xi$ . Dada uma folha mínima  $L$  de  $\mathcal{F}$ , suponha que a função suporte  $\nu = \overline{g}(\xi, N)$  não muda de sinal em  $L$ . Então,*

1. *Se  $L$  é compacta, então  $L$  é totalmente geodésica;*
2. *Se  $L$  é completa não-compacta e  $A(\xi^\top) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ , então  $L$  é totalmente geodésica.*

*Em particular, se vale a desigualdade*

$$\nu \geq \frac{1}{\|A\|^2 + 1} \quad (1.2)$$

*em  $L \in \mathcal{F}$ , então  $L \in \mathcal{F}(\xi)$ .*

3. *Assuma que  $L$  é uma folha completa e não compacta com crescimento de volume polinomial. Se o operador de Weingarten  $A$  é limitado e vale (1.2), então  $L$  é totalmente geodésica e  $L \in \mathcal{F}(\xi)$ .*

A hipótese sobre  $\nu$  não mudar de sinal não pode ser removida, o exemplo obtido de [BDSS22] e a Figura 3.2 ilustram este fato. A hipótese na estimativa (1.2) também é fundamental, caso contrário, exibimos o seguinte contraexemplo

Seja  $\overline{M}^3$  o espaço euclidiano tridimensional. Considere em  $\overline{M}^3$  o campo conforme fechado unitário dado por  $\xi = (0, 0, 1)$  e  $\mathcal{F}(\xi)$  a folheação de Montiel. Seja  $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  a folheação

dada pelas superfícies algébricas

$$L_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid P_\alpha(x, y, z) = 0, \text{ onde } P_\alpha(x, y, z) = z - (x + y + \alpha)\},$$

completas e não compactas. Note que a função suporte  $\nu = \bar{g}(\xi, N) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  é constante e, consequentemente, não muda sinal. Entretanto,  $\bar{g}(\xi, N) < \frac{1}{\|A\|^2 + 1} = 1$ . Veja a Figura 3.1.

Com argumento análogo ao utilizado na demonstração do **Teorema A**, obtemos o seguinte corolário para variedades de Einstein. Note que o resultado a seguir é uma versão do Teorema 3.1 em [ACN21], onde removemos as hipóteses de segunda forma fundamental limitada,  $\xi$  ser paralelizável ou uma direção principal, e substituímos a hipótese de  $\xi$  ser um campo de Killing por ser um campo conforme fechado.

Seja  $\bar{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana de Einstein equipada com um campo conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação mínima transversal ao campo  $\xi$  tal que  $N$  é o campo normal unitário da folheação  $\mathcal{F}$ . Se a função suporte  $\nu = \bar{g}(\xi, N)$  satisfaz a desigualdade (1.2), então  $\mathcal{F}$  é a folheação de Montiel. Consequentemente,  $\mathcal{F}$  é totalmente geodésica.

Utilizando ideias similares, agora considerando o espaço ambiente compacto entretanto a folheação transversal de curvatura média constante, obtemos o seguinte resultado de rigidez

**Teorema B.** Seja  $\bar{M}^{n+1}$ ,  $n \geq 1$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável, com curvatura de Ricci não-positiva equipada com a folheação de Montiel  $\mathcal{F}(\xi)$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação CMC de  $\bar{M}$  transversa a  $\xi$  e  $L \in \mathcal{F}$ . Assuma que a função suporte  $\nu = \bar{g}(\xi, N)$  não muda de sinal em  $L$ . Então,

1. Se  $L$  é compacta, então  $L$  é totalmente geodésica;
2. Se  $L$  é completa não-compacta e o campo de vetores  $X = A(\xi^\top) - H\xi$  é Lebesgue integrável em  $L$ , então  $L$  é totalmente geodésica.

Em particular, se vale a desigualdade

$$\nu \geq \frac{1}{\|A\|^2 + 1} \tag{1.3}$$

em  $L \in \mathcal{F}$ , então  $L \in \mathcal{F}(\xi)$ .

3. Suponha que  $L$  é uma folha completa e não compacta com crescimento de volume polinomial e  $\nu \geq \frac{1}{\|A\|^2 + 1}$ . Se o operador de Weingarten  $A$  é limitado e não-negativo com respeito a  $N$ , então  $L$  é totalmente geodésica e  $L \in \mathcal{F}(\xi)$ .

No Capítulo 4, iremos definir um invariante métrico para folheações transversais as campos conformes fechados

$$\mathcal{G}_L^\xi := \sup_L \{ \operatorname{div}_L (A(\xi^\top) - H\xi^\top) + \operatorname{Ric}_{\bar{M}}(\xi^\top, N) \}.$$

Com este invariante, obteremos um resultado que nos fornecerá uma caracterização de folhas totalmente geodésicas de uma folheação transversal à um campo conforme fechado  $\xi$ .

De posse desse invariante e usando o método de curvas características como em [BW84], [Gom04], [CS20] e [dSSR23], obtivemos o seguinte resultado

**Teorema C.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana munida de um campo conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação transversal ao campo  $\xi$  e  $L \in \mathcal{F}$  uma folha completa. Se  $\nu \geq \nu_0 > 0$  e  $\dim L \geq \frac{1}{\nu_0}$ , então*

$$\mathcal{G}_L^\xi \geq 0,$$

$$\mathcal{G}_L^\xi \geq H_L^2$$

e

*$L$  é totalmente geodésica, se e somente se,  $\mathcal{G}_L^\xi = 0$ .*

Observe que estamos enunciando o teorema para folheações, mas o resultado vale para subvariedades imersas, transversais ao campo  $\xi$ , de codimensão um.

Utilizando de técnicas da análise geométrica, obtemos uma sequência de três resultados para folheações transversais a campos conformes fechados que decorrem do **Teorema C**. O corolário a seguir é uma versão do Corolário 5.4 em [CS20] e na sua prova utilizamos um princípio do máximo de Yau [Yau75]

*Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana munida de um campo conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação transversal ao campo  $\xi$  e  $L \in \mathcal{F}$  onde  $\nu \geq \nu_0 > 0$  e  $\dim L \geq \frac{1}{\nu_0}$ . Se  $L$  é uma folha completa com curvatura Ricci limitada por baixo e  $\mathcal{G}_L^\xi \in \mathbb{R}$ , então existe uma sequência de pontos  $\{p_k\} \in L$  tal que:*

1.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} H_L(p_k) = \sup_L H_L$ ;
2.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla H_L(p_k)\| = 0$ ;
3.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta H_L(p_k) \leq 0$ .

Exibimos mais uma aplicação do **Teorema B** e utilizaremos o princípio do máximo atribuído a Hopf-Calabi, veja [Cal59], no qual obtemos o seguinte

*Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana munida de um campo conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação transversal ao campo  $\xi$  e  $L \in \mathcal{F}$  uma folha completa onde  $\nu \geq \nu_0 > 0$  e  $\dim L \geq \frac{1}{\nu_0}$ . Se  $H_L$  é subharmônica e existe  $p \in L$  tal que  $H_L(p) = \left(\mathcal{G}_L^\xi\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$ , então  $L$  tem curvatura média constante.*

O próximo corolário nos fornece uma obstrução para a existência de uma folheação transversal a um campo conforme fechado.

*Sejam  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante  $c \neq 0$  munida de um campo conforme fechado unitário  $\xi$  e  $\mathcal{F}$  uma folheação transversal ao campo  $\xi$ . Se existe uma folha completa  $L \in \mathcal{F}$  com  $\nu \geq \nu_0 > 0$  e  $\dim L \geq \frac{1}{\nu_0}$ , então nenhuma folha de  $\mathcal{F}$  é totalmente geodésica.*

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentaremos a linguagem básica, as equações e os resultados que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

### 2.1 Variedades Riemannianas e Folheações

Ao longo desta seção, estabelecemos algumas notações, definições e resultados que serão utilizados. Uma variedade Riemanniana de dimensão  $n + 1$  será usualmente denotada por  $\overline{M}$ . Os símbolos  $\langle , \rangle$  e  $\overline{\nabla}$  denotarão, respectivamente, a métrica Riemanniana e a conexão Riemanniana de  $\overline{M}$ . Às vezes,  $\langle , \rangle = \overline{g}$ .

Inicialmente, apresentaremos o conceito de distribuição em uma variedade Riemanniana. Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade suave. Uma distribuição  $d$ -dimensional  $\mathcal{D}$  em  $\overline{M}$  é um subfibrado de  $T\overline{M}$   $d$ -dimensional. A distribuição  $\mathcal{D}$  é suave quando for um subfibrado suave. Também podemos descrever uma distribuição especificando para cada  $p \in \overline{M}$ , um subespaço vetorial  $d$ -dimensional  $\mathbb{D}_p \subset T_p\overline{M}$  e considerando  $\mathcal{D} = \bigcup_{p \in \overline{M}} \mathbb{D}_p$ . Deste modo, a distribuição  $\mathcal{D}$  será suave se para cada ponto  $p \in \overline{M}$  há uma vizinhança  $U$  deste ponto na qual existem campos suaves  $X_1, \dots, X_d: U \rightarrow T\overline{M}$  tais que para  $q \in U$  os vetores  $X_1(q), \dots, X_d(q)$  formam uma base de  $\mathbb{D}_q$ . Neste caso, diremos que  $\mathcal{D}$  é uma distribuição gerada localmente pelos campos de vetores  $X_1, \dots, X_d$ .

Um campo de vetores  $X$  de  $\overline{M}$  é dito pertencente à (ou estando na) distribuição  $\mathcal{D}$  se  $X_p \in \mathcal{D}(p)$  para cada  $p \in \overline{M}$  e denotaremos  $X \in \mathcal{D}$ . Uma distribuição  $\mathcal{D}$  é chamada de involutiva se o colchete de Lie  $[X, Y] \in \mathcal{D}$  quaisquer que sejam os campos  $X, Y \in \mathcal{D}$ .

Seja  $\mathcal{D} \subset T\overline{M}$  uma distribuição suave. Uma subvariedade  $S$  de  $\overline{M}$  será chamada de variedade integral de  $\mathcal{D}$  se  $\mathbb{D}_p = T_p S$  para todo ponto  $p \in S$ .

Intuitivamente, quando consideramos todas as variedades integrais maximais de uma distribuição involutiva  $k$ -dimensional sobre uma variedade suave  $\overline{M}$ , obtemos uma partição de  $\overline{M}$  em subvariedades de dimensão  $k$ . Assim, podemos pensar estas subvariedades como slices em  $\overline{M}$ . Mais precisamente, para  $\mathcal{F}$  uma coleção de subvariedades integrais  $k$ -dimensionais da variedade suave  $\overline{M}$ , fixemos a seguinte definição, uma carta suave  $(U, \varphi)$  de  $\overline{M}$  é uma carta flat para  $\mathcal{F}$  se existem  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e  $a = (a^{k+1}, \dots, a^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1-k}$  tais que  $\varphi(U) = [-\varepsilon, \varepsilon]^k \times a$ .

Assim, definimos uma folheação de dimensão  $k$  em  $\overline{M}$ , a coleção  $\mathcal{F}$  de subvariedades de  $\overline{M}$ ,  $k$ -dimensionais, disjuntas, conexas, não-vazias, imersas (que denominamos folhas da folheação) cuja união é igual a  $\overline{M}$  e tal que em uma vizinhança  $U$  de cada ponto  $p \in \overline{M}$  existe uma carta flat  $(U, \varphi)$  para  $\mathcal{F}$ , e denotaremos  $\dim \mathcal{F} = k$ . Definimos a codimensão de  $\mathcal{F}$  como sendo  $\text{codim } \mathcal{F} := \dim \overline{M} - \dim \mathcal{F}$ .

O resultado a seguir é o Teorema de Frobenius e fornece uma condição suficiente (que também



é necessária) para que a distribuição  $\mathfrak{D}$  gere subvariedades (variedades integrais da distribuição), de mesma dimensão em cada ponto  $p \in \overline{M}^{n+1}$ .

**Teorema (Frobenius).** *Seja  $\mathfrak{D}$  uma distribuição de dimensão  $k$  sobre a variedade Riemanniana  $\overline{M}$  de dimensão  $n + 1$ . São equivalentes:*

- (i)  $\mathfrak{D}$  é involutiva;
- (ii) Existe um atlas folheado suave sobre  $\overline{M}$  de codimensão  $q = (n + 1) - k$  tal que toda folha é uma variedade integral da distribuição  $\mathfrak{D}$ .

Diremos que uma folheação  $\mathcal{F}$  é transversal à subvariedade  $S \subset \overline{M}$  se para cada folha  $L \in \mathcal{F}$  e para cada ponto  $p \in L \cap S$ , temos

$$T_p L + T_p S = T_p \overline{M}.$$

Diremos que duas folheações  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  são transversais quando  $\mathcal{F}_1$  for transversal a cada uma das folhas de  $\mathcal{F}_2$ .

Uma subvariedade de codimensão um em uma variedade Riemanniana  $\overline{M}$  será sempre denotada por  $L$  e sua métrica Riemanniana será induzida da métrica Riemanniana de  $\overline{M}^{n+1}$ . Denotaremos a métrica Riemanniana, a conexão de Levi-Civita e tensor de curvatura de  $\overline{M}^{n+1}$  e  $L$ , respectivamente, por  $\overline{g}$ ,  $g$ ,  $\overline{\nabla}$ ,  $\nabla$  e  $\overline{R}$ ,  $R$ .

Tome  $p \in \overline{M}$  e considere um referencial ortonormal adaptado definido em uma vizinhança de  $p$ , ou seja, um conjunto de campos de vetores ortonormais  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$  definidos localmente em torno de  $p$ , onde os campos  $e_1, \dots, e_n$  são tangentes à  $\mathcal{F}$  e o campo  $e_{n+1} = N$  é normal a  $\mathcal{F}$ . Fixamos as seguintes convenções para os índices

$$1 \leq i, j \leq n \quad \text{e} \quad 1 \leq A, B \leq n + 1.$$

Definimos a segunda forma fundamental de  $\mathcal{F}$  na direção de  $N$  por

$$\mathcal{B}(e_i, e_j) = \langle -\overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle.$$

Considere um campo de vetores  $X$ , diferenciável em  $M$  (i.e. de classe  $C^\infty(M)$ ). Denotaremos por  $X^\perp$  e  $X^\top$ , respectivamente, os seguintes campos de vetores

$$X^\perp = \langle X, N \rangle N \quad \text{e} \quad X^\top = \sum_i \langle X, e_i \rangle e_i.$$

O Operador de Weingarten relativo a  $\mathcal{B}$  é dado por

$$A(e_i) = -(\overline{\nabla}_{e_i} N)^\top$$

Definimos a norma da segunda forma fundamental  $\mathcal{B}$  por

$$\|\mathcal{B}\| = \left( \sum_{i,j} \langle -\overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle^2 \right)^{1/2}.$$

O vetor curvatura média de  $\mathcal{F}$  é definido por

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_i (\overline{\nabla}_{e_i} e_i)^\perp.$$

Supondo que  $X, Y$  e  $Z$  são campos diferenciáveis definidos em  $\bar{M}$ , e que  $U$  e  $V$  são campos diferenciáveis linearmente independentes definidos em  $\bar{M}$ , temos as definições da *curvatura*  $\bar{R}$  de  $\bar{M}$  e da *curvatura seccional*  $\bar{K}$  de  $\bar{M}$  dadas, respectivamente, por

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

$$\bar{K}(U, V) = \frac{\langle \bar{R}(U, V)V, U \rangle}{\|U\|^2 \|V\|^2 - \langle U, V \rangle^2}.$$

Denotamos por  $(K_{ij}^N)$  a matriz  $n \times n$  com entradas dadas por

$$\bar{R}(N, e_i, e_j, N) = \langle \bar{R}(N, e_i)e_j, N \rangle.$$

Dados campos diferenciáveis  $X$  e  $Y$  definidos em  $\bar{M}$ , a *curvatura de Ricci*  $\text{Ric}_{\bar{M}}(X, Y)$  e a *curvatura escalar*  $S$  de  $\bar{M}$  são definidas, respectivamente, por

$$\text{Ric}_{\bar{M}}(X, Y) = \sum_A \langle \bar{R}(e_A, X)Y, e_A \rangle \quad \text{e} \quad S = \sum_A \text{Ric}_{\bar{M}}(e_A, e_A).$$

Para todo campo de vetores diferenciável  $X$  definido sobre  $\bar{M}$  temos, respectivamente, as seguintes definições para o *divergente em*  $L \in \mathcal{F}$  e *divergente em*  $\bar{M}$  deste campo

$$\text{div}_L(X) = \sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle$$

e

$$\text{div}(X) = \text{div}_L(X) + \langle \bar{\nabla}_N X, N \rangle.$$

Dizemos que a variedade Riemanniana  $\bar{M}$  possui curvatura de Ricci não-negativa (ou curvatura de Ricci não-positiva), e escrevemos  $\text{Ric}_{\bar{M}} \geq 0$  ( ou  $\text{Ric}_{\bar{M}} \leq 0$ ), se para todos os campos  $X, Y$  em  $\bar{M}$ , temos

$$\text{Ric}_{\bar{M}}(X, Y) \geq 0 \quad (\text{ ou } \text{Ric}_{\bar{M}}(X, Y) \leq 0).$$

Dizemos que a folha  $L$  da folheação  $\mathcal{F}$  é *mínima* se  $H_L \equiv 0$ , sendo  $H_L$  a restrição  $H|_L$ .

Dizemos que a folha  $L$  da folheação  $\mathcal{F}$  é *totalmente geodésica* se  $\mathcal{B} \equiv 0$  em  $L$ .

Dizemos que a folha  $L$  da folheação  $\mathcal{F}$  é *totalmente umbílica* se existe  $\lambda : L \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\mathcal{B}(U, V) = \lambda \langle U, V \rangle,$$

para todos  $U, V$  campos tangentes a  $L$ . A folheação  $\mathcal{F}$  é chamada de *folheação mínima*, *folheação totalmente geodésica* ou *folheação totalmente umbílica* se todas as suas folhas são, respectivamente, *mínimas*, *totalmente geodésicas* ou *totalmente umbílicas*.

## 2.2 Campos conforme fechados

Seja  $\bar{M}$  a variedade Riemanniana com dimensão  $n + 1$ ,  $n \geq 1$ . A métrica e a conexão de Levi-Civita de  $\bar{M}$ , respectivamente, por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\bar{\nabla}$ . Consideraremos  $\bar{M}$  equipada com um campo de vetores não-trivial  $\xi \in \mathfrak{X}(\bar{M})$  conforme fechado, isto é, vamos supor que existe uma função  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{M})$  tal que

$$\bar{\nabla}_u \xi = \varphi u \quad \text{para todo } u \in \mathfrak{X}(\bar{M}). \quad (2.1)$$

Note que o campo  $\xi$  é globalmente definido, nesse contexto, diremos que  $\overline{M}$  é uma variedade Riemanniana munida de um campo de vetores conforme fechado  $\xi$ .

O resultado a seguir reúne algumas características das variedades Riemannianas equipadas com tal campo de vetores e pode ser encontrado em [Mon99].

**Proposição 1** (Proposição 1 em [Mon99]). *Seja  $\overline{M}^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , uma variedade Riemanniana munida de um campo não-trivial  $X$  conforme fechado. Então temos que*

(a) *O conjunto  $\mathcal{Z}(X)$  formado pelos pontos de  $\overline{M}$  onde  $X$  se anula é um conjunto discreto.*

(b) *O campo unitário  $\xi = \frac{X}{\|X\|}$  definido sobre o aberto denso  $\widetilde{M} = \overline{M} - \mathcal{Z}(X)$  satisfaz*

$$\overline{\nabla}_\xi \xi = 0, \text{ e se } \langle u, \xi \rangle = 0, \text{ então } \overline{\nabla}_u \xi = \frac{\varphi}{\|X\|} u.$$

*Em particular, o fluxo de  $\xi$  é geodésico.*

(c) *A distribuição de dimensão  $n$  denominada  $\mathfrak{D}$  definida em  $\overline{M}^{n+1}$  por*

$$p \in \overline{M} \mapsto \mathfrak{D}(p) = \{v \in T_p \overline{M}^{n+1} \mid \langle X(p), v \rangle = 0\},$$

*determina uma folheação Riemanniana totalmente umbílica de codimensão um  $\mathcal{F}(X)$  que é orientada por  $\xi$ . Além disso, as funções  $\|X\|$ ,  $\text{div}(X)$  e  $X\varphi$  são constantes sobre folhas conexas de  $\mathcal{F}(X)$  e cada folha tem curvatura média constante  $H = -\frac{\text{div}(X)}{(n+1)\|X\|}$ .*

A folheação  $\mathcal{F}(X)$  como na Proposição 1 será chamada de folheação de Montiel gerada pelo campo  $X$  ou simplesmente folheação de Montiel.

A partir das singularidades do campo fechado conforme, a proposição a seguir permite-nos apresentar uma classificação das variedades Riemannianas completas munidas de um campo conforme fechado.  $\overline{M}$ .

**Proposição 2** (Proposição 2 em [Mon99]). *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana completa com um campo conforme fechado não-trivial  $X$ . Então,  $X$  tem no máximo dois zeros e as seguintes alternativas são as únicas possíveis, correspondendo respectivamente aos casos onde  $X$  possui um, dois ou nenhum zero em  $\overline{M}^{n+1}$ :*

(a)  *$\overline{M}^{n+1}$  é um espaço euclidiano com uma métrica rotacionalmente invariante, isto é,  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$  e a métrica, expressada em termos de coordenadas polares ( $x = rp$ ) em  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^n$  é, a menos de homotetias,*

$$dr^2 + f(r)^2 d\sigma_n^2, \quad (2.2)$$

*onde  $\sigma_n^2$  é métrica de curvatura constante um sobre a esfera  $\mathbb{S}^n$ , e  $f$  é a restrição positiva a  $\mathbb{R}^+$  de uma função diferenciável ímpar com  $f'(0) = 1$ . Além disso, o campo  $X$  é dado por  $X(r, p) = f(r)p$  para  $r \in \mathbb{R}^+$  e  $p \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Além disso, as folhas da folheação  $\mathcal{F}(X)$  são esferas centradas na origem  $r = r_0$ .*

(b)  *$\overline{M}^{n+1}$  é uma esfera com métrica rotacionalmente invariante, isto é,  $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}$  e a métrica, expressa em termos de coordenadas polares ( $x = a \cos(\theta) + p \sin(\theta)$ ) sobre  $\mathbb{S}^{n+1} -$*

$\{a, -a\} = ]0, \pi[ \times \mathbb{S}^n$ , onde  $a \in \mathbb{S}^{n+1}$  é arbitrário e  $\mathbb{S}^n$  é o equador ortogonal ao  $a$ , é dado, a menos de homotetias, por

$$d\theta^2 + f(\theta)^2 d\sigma_n^2,$$

onde  $f$  é a restrição a  $]0, \pi[$  de função ímpar de período  $2\pi$  com  $f'(0) = 1$  com nenhum zero em  $]0, \pi[$ . Além disso, o campo  $X$  é  $X(\theta, p) = f(\theta)(a \sin(\theta) - p \cos(\theta))$ , para cada  $\theta \in ]0, \pi[$  e  $p \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ . Neste caso, as folhas de  $\mathcal{F}(X)$  são esferas de dimensão  $n$  em  $\mathbb{S}^{n+1}$  paralelas ao equador  $\mathbb{S}^n$ .

- (c) O recobrimento Riemanniano simplesmente conexo de  $\overline{M}^{n+1}$  é um produto warped  $\mathbb{R} \times_f P^n$ , onde  $P^n$  é uma variedade Riemanniana completa de dimensão  $n$  e  $f$  é uma função positiva definida em  $\mathbb{R}$ . Além disso, o grupo  $\Gamma$  de isometrias deck (transformações de recobrimento) é um subgrupo de  $Iso(\mathbb{R}) \times Iso(P^n)$ . Neste caso, a função  $f$  é invariante por translações na projeção de  $\Gamma$  sobre  $Iso(\mathbb{R})$  e o campo  $X$  é determinado como a projeção de  $f(s)(\partial/\partial s)_{(s,p)}$ , para  $s \in \mathbb{R}$  e  $p \in P^n$ , e a folheação  $\mathcal{F}(X)$  consiste das projeções dos slices  $\{s\} \times P^n$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

**Observação 1.** Note que, quando o campo conforme fechado  $X$  é o gradiente de alguma função  $h \in C^\infty(\overline{M})$ , por exemplo, quando a variedade  $\overline{M}$  é simplesmente conexa, a hipótese conforme fechado sobre  $X$  implica que

$$\overline{\nabla}^2 h = \varphi \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

**Observação 2.** A Proposição 2 descreve variedades Riemannianas completas equipadas com um campo de vetores conforme fechado não-trivial tanto como um quociente de um produto warped (no caso (c)) ou como um produto warped completado com um ou dois pontos (nos casos (a) e (b)) de métricas rotacionalmente invariantes espaços Euclidianos ou esféricos. Seja  $I \times_f P^n$  o produto warped envolvido em cada caso. Então, a Proposição 2 afirma que a geometria de  $\overline{M}$  e a da folheação  $\mathcal{F}(X)$  é completamente descrita por meio da geometria de uma folha padrão (standard) da folheação  $\mathcal{F}(X)$ , isto é, a geometria de  $P$  e pela função warping  $f$ . A tradução correspondente entre estas duas linguagens pode ser facilmente feita. Por exemplo, a função  $|X|$  é agora  $f \circ \pi_I$  (vamos esquecer a projeção e vamos simplesmente escrever  $f$ ); a função  $\varphi$ , que aparece da definição de campo conforme fechado, é a derivada  $f'$ ; a função curvatura média  $H$  é agora  $-(\log(f))'$ ; vetores tangentes a cada folha da folheação, isto é, vetores em  $T\mathcal{F}(X)$  são identificados canonicamente com vetores tangentes a  $P$ ; e, finalmente, também podemos ver que, com esta identificação a equação (8), do artigo [Mon99], é agora

$$\mathcal{S}(u, v) = S(u, v) - \left( f f'' + (n+1) f'^2 \right) \langle u, v \rangle_P, \quad u, v \in TP$$

Então, por exemplo,  $\overline{M}$  tem curvatura seccional constante  $\bar{c}$  se, e somente se,  $P$  tem curvatura seccional constante  $c$  e  $f$  é uma solução positiva da equação  $f'^2 c + \bar{c} f^2 = c$ , veja [O'N83, p. 345]. Outras condições sobre  $P$  e  $f$  a fim de  $\overline{M}$  ter bom comportamento geométrico, como condição de Einstein, podem ser lidas em [Bes87].

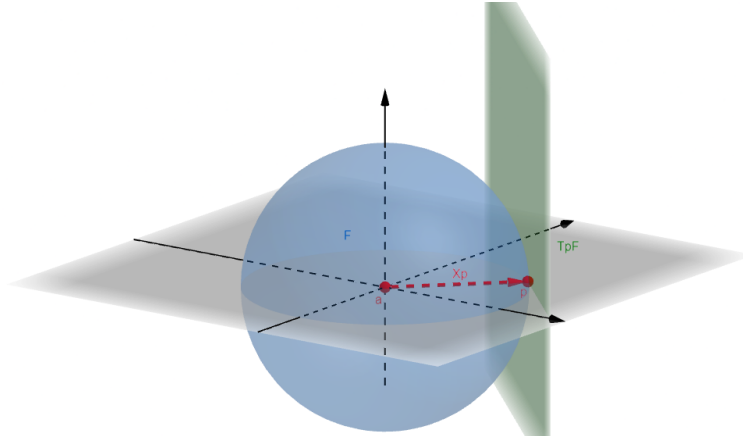
Vejam agora alguns exemplos:

1. Espaços euclidianos  $\mathbb{R}^{n+1}$  são variedades Riemannianas completas admitindo campos de vetores não-triviais fechados conformes. De fato, o vetor posição

$$X(p) = p - a, \quad p \in \mathbb{R}^{n+1},$$

com respeito a uma origem fixada  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ , é um campo deste tipo com apenas um zero em  $p = a$  que permite-nos folhear  $\mathbb{R}^{n+1}$  por hipersferas concêntricas centradas em  $a$ . Esta

escolha de campo fechado conforme corresponde à descrita em (a) na Proposição 2, para a função warping  $f(r) = r$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ .

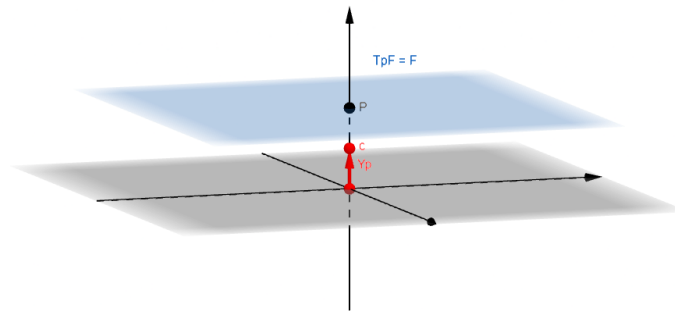


**Figura 2.1:** Exemplo de (a)

Além disso, este mesmo espaço possui outros campos fechados conformes que nos levam a vê-lo como na Proposição 2, (c). São os campos paralelos

$$Y(p) = c, \quad p \in \mathbb{R}^{n+1},$$

para cada  $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ . A correspondente folheação  $\mathcal{F}(Y)$  é dada por hiperplanos paralelos ortogonais a  $c$ .



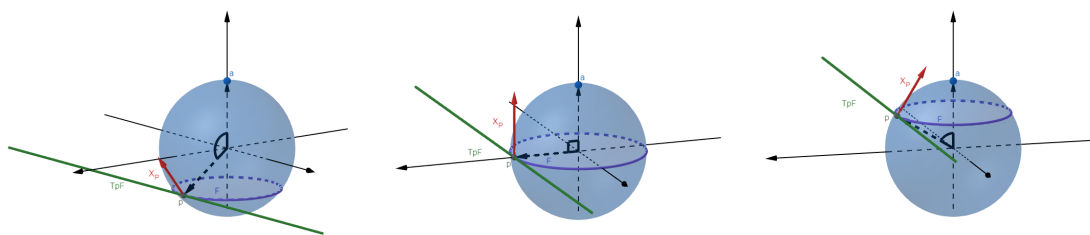
**Figura 2.2:** Exemplo de (c)

2. Hipersferas redondas  $\mathbb{S}^{n+1}$  possuem também campos fechados conformes. De fato, se fixamos um ponto  $a \in \mathbb{S}^{n+1}$ , podemos considerar o gradiente da correspondente função altura que é o campo de vetores

$$X(p) = a - \langle a, p \rangle p, \quad p \in \mathbb{S}^{n+1},$$

que se anula apenas nos pontos antipodais  $p = a$  e  $p = -a$ , e folheia a hipersfera  $\mathbb{S}^{n+1}$  por meio de esferas umbílicas de dimensão  $n$  paralelas ao equador ortogonal ao vetor  $a$ . Isto corresponde à escolha  $f(\theta) = \sin(\theta)$  na parte (b) da Proposição 2. Note que, como  $X(p) = X(-p)$ , para qualquer  $p \in \mathbb{S}^{n+1}$ , estes campos não descem para o espaço projetivo real

$\mathbb{R}P^{n+1}$ . Além disso, pode-se obter campos desse tipo pela projeção  $X$  sobre  $\mathbb{R}P^{n+1} - P_a$ , onde  $P_a$  é o hiperplano conjugado ao ponto  $a$ .



**Figura 2.3:** Exemplo em  $S^n$

3. O espaço Hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  pode ser pensado como uma classe de hipersferas no espaço de Minkowski. De fato, se denotamos por  $\langle, \rangle$  a métrica Lorentziana canônica de índice um sobre  $\mathbb{R}^{n+2}$ , temos que cada componente conexa da hiperquádrica

$$\{p \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \langle p, p \rangle = -1\},$$

equipada com a métrica induzida é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a  $-1$ . Com este modelo de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , não é difícil ver que

$$X(p) = a + \langle a, p \rangle p, \quad p \in \mathbb{H}^{n+1},$$

para  $a \in \mathbb{R}^{n+2}$  fixado, fornece um campo conforme fechado. Além disso, estes campos são qualitativamente diferentes de acordo com o caráter causal do vetor  $a$ . Então, para cada campo  $X$  sua distribuição ortogonal gera uma folheação  $\mathcal{F}(X)$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$  por esferas quando  $a$  é vetor tipo-tempo; por horoesferas quando  $a$  é vetor tipo-luz; e, por hiperplanos hiperbólicos totalmente geodésicos quando  $a$  é um vetor tipo-espaço. O primeiro caso corresponde, no contexto da Proposição 2, ao caso particular de (a), onde se trata da métrica rotacionalmente invariante  $dr^2 + f(r)d\sigma_n^2$  com  $f(r) = \sinh(r)$ . O segundo é um caso particular de (c), porque, com este modelo,  $\mathbb{H}^{n+1}$  pode ser considerado o produto warped  $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$  com  $f(t) = e^t$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . O terceiro caso corresponde à parte (b) e descreve  $\mathbb{H}^{n+1}$  como  $\mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^n$ , com  $f(t) = \cosh(t)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

## 2.3 Crescimento de volume e princípios do máximo

Nesta seção apresentaremos a definição de crescimento de volume de uma variedade e alguns resultados que são tipos de princípios de máximo e, nos próximos capítulos, os utilizaremos para demonstrar os teoremas principais deste trabalho. Seja  $\overline{M}$  uma variedade Riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta e  $B(p, t)$  a bola geodésica de centro  $p \in \overline{M}$  e raio  $t$ .

Considere as funções de valores reais  $f, g$  definidas em  $(a, +\infty)$  e assumamos que  $g(x)$  é estritamente positiva. Dizemos que  $f(x)$  é big- $\mathcal{O}$  de  $g(x)$  se existem constantes  $x_0 \in ]a, +\infty[$  e  $M > 0$  tais que  $\|f(x)\| \leq M g(x)$  para todo  $x \geq x_0$ . Denotamos por

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)).$$

Mais precisamente, o quociente  $\frac{f(x)}{g(x)}$  é limitado para todo  $x \geq x_0$ . Quando a função  $f$  e  $g$  são ambas big- $\mathcal{O}$  uma da outra, dizemos que  $f$  e  $g$  possuem a mesma ordem de crescimento. Também

convencionamos  $f(x) - h(x) = \mathcal{O}(g(x))$ , simplesmente por  $f(x) = h(x) + \mathcal{O}(g(x))$ . Vejamos um exemplo.

**Exemplo 1.** Consideremos a função polinomial  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $p(x) = 2x^2 + 7x - 2$ . Note que  $p(x)$  é  $\mathcal{O}(x^3)$ . De fato, para  $x > 1$ , temos que  $x^3 \geq x^2$  e para  $x > 3$  temos que  $7x - 2 \leq x^3$ . Assim, quando  $x > 3$ , temos  $\|p(x)\| = x^2 + 7x - 2 \leq 2x^3$ . Logo, para  $x_0 = 3$  and  $M = 2$ , finalizando o exemplo.

Agora, apresentaremos algumas propriedades:

**Proposição 3.** *As seguintes afirmações são válidas quando  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ :*

(a) *Se  $f$  e  $g$  são contínuas, então*

$$\int_a^x f(s)ds = \mathcal{O}\left(\int_a^x g(s)ds\right).$$

(b) *Se  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  para  $x \geq a$  e  $h(x) = \mathcal{O}(g(x))$  para  $x \geq b$ , então  $f(x) + h(x) = \mathcal{O}(g(x))$  para  $x \geq c = \max\{a, b\}$ .*

(c) *Se quisermos indicar que a função  $f$  é limitada, podemos escrever que  $f(x) = \mathcal{O}(1)$ .*

(d) *Se  $f_1(x) = \mathcal{O}(g_1(x))$  para  $x \geq a$  e  $f_2(x) = \mathcal{O}(g_2(x))$  para  $x \geq b$ , então  $(f_1 + f_2)(x) = \mathcal{O}(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$  e  $(f_1 f_2)(x) = \mathcal{O}(g_1(x)g_2(x))$ .*

*Demonstração.* (a) De fato, se  $f$  e  $g$  são contínuas e  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ , existem  $M_0 > 0$  e  $x_0$  reais tais que

$$|f(x)| \leq M_0 \cdot g(x), \quad x \geq x_0.$$

Por continuidade, integrando no intervalo  $[x_0, x]$ , podemos reescrever a desigualdade anterior como

$$\left| \int_{x_0}^x f(s)ds \right| \leq M_0 \cdot \int_{x_0}^x g(s), \quad x \geq x_0.$$

Isto finaliza a prova do item.

(b) Se  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  e  $h(x) = \mathcal{O}(g(x))$ , então temos que existem  $M_0, N_0$  reais positivos e  $a, b$  reais tais que

$$|f(x)| \leq M_0 \cdot g(x), \quad x \geq a, \tag{2.3}$$

e

$$|h(x)| \leq N_0 \cdot g(x), \quad x \geq b. \tag{2.4}$$

Defina  $M = M_0 + N_0$  e considere  $c = \max\{a, b\}$ . Pela desigualdade triangular e usando as desigualdades (2.3) e (2.4), temos

$$\begin{aligned} \|f(x) + h(x)\| &\leq \|f(x)\| + \|h(x)\| \\ &\leq (M_0 + N_0)g(x) \\ &= Mg(x). \end{aligned}$$

Assim,  $f(x) + h(x) = \mathcal{O}(g(x))$ .

(c) Imediato da definição.

(d) Se  $f_1(x) = \mathcal{O}(g_1(x))$  para  $x \geq a$  e  $f_2(x) = \mathcal{O}(g_2(x))$  para  $x \geq b$ , então existem  $M_1, M_2 > 0$  e  $x_0 = \max\{a, b\}$  tais que

$$\|f_1\| \leq M_1 g_1$$

e

$$\|f_2\| \leq M_2 g_2$$

para todo  $x \geq x_0$ . Defina agora a função  $\max\{g_1, g_2\}: [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\max\{g_1, g_2\}(x) = \max\{g_1(x), g_2(x)\}$ . Utilizando a desigualdade triangular e escolhendo  $M = M_1 + M_2$  temos que, para todo  $x \geq x_0$ ,

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|(x) &\leq (\|f_1\| + \|f_2\|)(x) \\ &\leq M_1 g_1(x) + M_2 g_2(x) \\ &\leq (M_1 + M_2) \max\{g_1, g_2\}(x) \\ &\leq M \max\{g_1(x), g_2(x)\}, \end{aligned}$$

isto é,  $(f_1 + f_2)(x) = \mathcal{O}(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$ . Ademais, para todo  $x \geq x_0$ , utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e que  $N = M_1 \cdot M_2$ , obtemos que,

$$\begin{aligned} \|f_1(x)f_2(x)\| &\leq \|f_1(x)\| \|f_2(x)\| \\ &\leq M_1 M_2 g_1(x) g_2(x) \\ &\leq N g_1(x) g_2(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $(f_1 f_2)(x) = \mathcal{O}(g_1(x) g_2(x))$ .

□

Agora apresentaremos o crescimento de volume em uma variedade Riemanniana completa não compacta como feito em [ACN21]. Dada a função contínua  $\sigma: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , dizemos que  $\overline{M}$  tem crescimento de volume como  $\sigma(t)$  se existe  $p \in \overline{M}$  tal que

$$\text{vol}(B(p, t)) = \mathcal{O}(\sigma(t))$$

quando  $t \rightarrow +\infty$ , onde  $\text{vol}$  denota o volume Riemanniano.

**Exemplo 2.** As variedades Riemannianas  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $\mathbb{H}^{n+1}$ , com  $n \geq 1$ , possuem formas polares, dadas por  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times_t \mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\sinh(t)} \mathbb{S}^n$ , e métricas canônicas dadas, respectivamente, por  $ds_{\mathbb{R}^{n+1}}^2 = dr^2 + r^2 ds_{\mathbb{S}^n}^2$  e  $ds_{\mathbb{H}^{n+1}}^2 = dr^2 + \sinh^2(r) ds_{\mathbb{S}^n}^2$ . Dados  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $q \in \mathbb{H}^{n+1}$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ , tem-se:

$$\text{vol}_{\mathbb{R}^{n+1}}(B(p, t)) = \omega_n \int_0^t r^n dr = \mathcal{O}(t^{n+1})$$

e

$$\text{vol}_{\mathbb{H}^{n+1}}(B(p, t)) = \omega_n \int_0^t \sinh^n(r) dr = \mathcal{O}(e^{nt}).$$

Onde  $\omega_n \doteq \text{vol}\mathbb{S}^n$ . Logo  $\mathbb{R}^{n+1}$  tem crescimento de volume polinomial e  $\mathbb{H}^{n+1}$  tem crescimento de volume exponencial.

Exibiremos agora resultados recentes que são tipos de Princípios do Máximo e podem ser encontrados em [CSC10], [CS20] e [ACN21].

Em 1975, [Yau75] obteve a seguinte versão do Teorema de Stokes sobre uma variedade Riemanniana completa e não compacta de dimensão  $n + 1$ , denotada  $\overline{M}^{n+1}$ : se  $\omega \in \Omega^n(\overline{M})$  é uma forma diferencial de dimensão  $n$  sobre  $\overline{M}^{n+1}$ , então existe uma sequência de domínios  $B_i$  sobre



$\overline{M}$  tal que  $B_i \subset B_{i+1}$ ,  $\overline{M}^n = \cup_{i \geq 1} B_i$  e

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Suponha que  $\overline{M}$  é orientada pelo elemento de volume  $d\overline{M}$ . Se  $\omega = i_X d\overline{M}$  é uma contração de  $d\overline{M}$  na direção de um campo de vetores suave  $X$  sobre  $T\overline{M}$ , então [CSC10] estenderam um resultado obtido por Yau que fornece uma versão do Teorema de Stokes para variedades Riemannianas completas não compactas. Eles obtiveram consequência conveniente do resultado, que é descrita a seguir. Considere que  $\mathcal{L}^1(\overline{M})$  significa o espaço das funções Lebesgue integráveis sobre  $\overline{M}$ . O resultado abaixo pode ser encontrado em [CS20].

**Teorema 1** (Lema 5.1 em [CS20]). *Seja  $X$  um campo de vetores suave sobre uma variedade Riemanniana, de dimensão  $n + 1$ , completa e não compacta  $\overline{M}^{n+1}$ , tal que  $\operatorname{div}_{\overline{M}} X$  não muda de sinal sobre  $\overline{M}^{n+1}$ . Se  $\|X\| \in \mathcal{L}^1(\overline{M})$ , então  $\operatorname{div}_{\overline{M}} X = 0$ .*

A seguir, exibimos o princípio do máximo proposto por Yau em [Yau75], para variedades Riemannianas com limitação inferior da curvatura de Ricci e considerando o Laplaciano ao invés do Hessiano. Mais precisamente,

**Teorema 2** (Corolário 1 em [Yau75]). *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente e  $f \in C^2(\overline{M})$  uma função limitada superiormente em  $\overline{M}$ . Então, existe uma sequência de pontos  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$  tal que*

1.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \sup_M f$ ;
2.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$ ;
3.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta f(x_k) \leq 0$ .

Para o resultado seguinte, lembre que um campo de vetores  $X$  sobre uma variedade Riemanniana completa  $\overline{M}$  é dito completo se seu fluxo  $\{\varphi_t\}$  é globalmente definido, e isto sempre ocorre quando o campo  $X$  é limitado em  $\overline{M}$ . Ademais, dizemos que um subconjunto  $\Omega$  de  $\overline{M}$  é estável sob o fluxo  $\varphi_t$  de  $X$  se  $\varphi_t(\Omega) \subset \Omega$ , para todo  $t \geq 0$ . Note que isso vale para  $\Omega = \overline{M}$ . O próximo princípio do máximo que estudaremos foi proposto em [ACN21].

**Teorema 3** (Teorema 2.1 em [ACN21]). *Seja  $\overline{M}$  uma variedade Riemanniana completa não compacta, orientável. Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vetores limitado sobre  $\overline{M}$ , com  $\|X\| \leq c < +\infty$ , e seja  $K$  um (possivelmente vazio) subconjunto compacto de  $M$  tal que  $M \setminus K$  é estável na direção do fluxo de  $X$ . Assuma que  $f \in C^\infty(M)$  é tal que  $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$  em  $M$  e  $\operatorname{div}(X) \geq af$  em  $M \setminus K$ , para algum  $a > 0$ .*

(a) *Se  $\overline{M}$  tem crescimento de volume polinomial, então  $f \leq 0$  sobre  $M \setminus K$ .*

(b) *Se  $\overline{M}$  tem crescimento de volume exponencial, digamos  $e^{\beta t}$  então  $f \leq \frac{c\beta}{a}$  sobre  $M \setminus K$ .*

# Capítulo 3

## Folheações de Montiel

Ao longo deste capítulo, consideraremos a variedade Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$  equipada com um campo de vetores fechado conforme não-trivial  $X$ . Vamos considerar o campo unitário  $\xi$  e a respectiva Folheação de Montiel  $\mathcal{F}(\xi)$  associada à distribuição ortogonal ao campo  $X$  como na Proposição 1.

### 3.1 Equação fundamental

A proposição a seguir nos fornece uma relação entre um campo de vetores conforme fechado  $\xi$  e uma folha qualquer de folheações transversais à Folheação de Montiel  $\mathcal{F}(\xi)$ . Essa proposição foi provada em [BDSS22], mas apresentaremos uma demonstração independente e geométrica.

**Proposição 4.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana conexa e orientável equipada com um campo de vetores conforme fechado unitário  $\xi$  e seja  $\mathcal{F}$  uma folheação transversal ao campo  $\xi$ . Então, para toda folha  $L \in \mathcal{F}$ , temos que*

$$\operatorname{div}_L (A(\xi^\top)) = -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + \nu\|A\|^2 + n\varphi H, \quad (3.1)$$

onde  $A$  é o operador de Weingarten com respeito ao campo de vetores  $N$  normal à folha  $L$ ,  $H$  é a função curvatura média da folha  $L$  e  $\nu$  é a função suporte definida em  $\overline{M}$  e dada por  $\nu = \overline{g}(\xi, N)$ .

*Demonstração.* Seja  $L$  uma folha em  $\mathcal{F}$ . Vamos calcular o divergente do campo  $A(\xi^\top)$  com respeito à folha  $L$  em um ponto  $p \in L$ . Utilizaremos um referencial ortonormal geodésico, em uma

vizinhança de  $p$  em  $L$ , que denotaremos por  $\{e_i\}_{i=1}^n$ . Deste modo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_L(A(\xi^\top)) &= \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} A(\xi^\top), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \bar{g}(-\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{\xi^\top} N, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{R}(\xi^\top, e_i)N - \bar{\nabla}_{\xi^\top} \bar{\nabla}_{e_i} N + \bar{\nabla}_{[\xi^\top, e_i]} N, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{R}(\xi^\top, e_i)N, e_i) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{\xi^\top} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i) + \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{[\xi^\top, e_i]} N, e_i) \\
&= -\sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{R}(\xi^\top, e_i)e_i, N) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{\xi^\top} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i) + \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{[\xi^\top, e_i]} N, e_i) \\
&= -\operatorname{Ric}_M(\xi^\top, N) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{\xi^\top} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i) + \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{[\xi^\top, e_i]} N, e_i). \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Vamos computar separadamente os dois últimos termos da equação (3.2). Note que o referencial local é geodésico, portanto,  $(\bar{\nabla}_{\xi^\top} e_i)^\top = \nabla_{\xi^\top} e_i \equiv 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{\xi^\top} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i) &= \sum_{i=1}^n [\xi^\top \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, e_i) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{\xi^\top} e_i)] \\
&= \sum_{i=1}^n [\xi^\top \bar{g}((\bar{\nabla}_{e_i} N)^\top, e_i) - \bar{g}((\bar{\nabla}_{e_i} N)^\top, (\bar{\nabla}_{\xi^\top} e_i)^\top)] \\
&= \sum_{i=1}^n \xi^\top \bar{g}(-A(e_i), e_i) \\
&= -\xi^\top (\operatorname{tr}(A)) \\
&= -\xi^\top (nH). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

A seguir, vamos reescrever o último termo da equação (3.2). Note que  $\xi^\top, e_i \in T\mathcal{F}$ , portanto,  $[\xi^\top, e_i] \in T\mathcal{F}$ , pois  $\mathcal{F}$  é integrável. Utilizando ainda a simetria da segunda forma fundamental,

obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{[\xi^\top, e_i]} N, e_i) &= \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, [\xi^\top, e_i]) \\
&= \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{\xi^\top} e_i - \bar{\nabla}_{e_i} \xi^\top) \\
&= \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{\xi^\top} e_i) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} \xi^\top) \\
&= - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} \xi^\top) \\
&= - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} (\xi - \xi^\perp)) \\
&= - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} \xi) + \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} \xi^\perp) \\
&= - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} N, \varphi e_i) - \sum_{i=1}^n \bar{g}((-\bar{\nabla}_{e_i} N)^\top, (\bar{\nabla}_{e_i} \xi^\perp)^\top) \\
&= \varphi \sum_{i=1}^n \bar{g}((-\bar{\nabla}_{e_i} N)^\top, e_i) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(A(e_i), (\bar{\nabla}_{e_i} \xi^\perp)^\top) \\
&= \varphi \sum_{i=1}^n \bar{g}(A(e_i), e_i) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(A(e_i), (\bar{\nabla}_{e_i} (\bar{g}(\xi, N) N)^\top)^\top) \\
&= \varphi(\text{tr}(A)) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(A(e_i), (e_i (\bar{g}(\xi, N)) N + \bar{g}(\xi, N) \bar{\nabla}_{e_i} N)^\top) \\
&= \varphi(nH) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\xi, N) \bar{g}(A(e_i), (\bar{\nabla}_{e_i} N)^\top) \\
&= \varphi(nH) - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\xi, N) \bar{g}(A(e_i), -A(e_i)) \\
&= \varphi(nH) + \bar{g}(\xi, N) \sum_{i=1}^n \bar{g}(A(e_i), A(e_i)) \\
&= \varphi(nH) + \nu \|A\|^2. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Daí, substituindo (3.3) e (3.4) em (3.2), obtemos

$$\text{div}_L(A(\xi^\top)) = -\text{Ric}_{\bar{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + \varphi(nH) + \nu \|A\|^2.$$

□

## 3.2 Folheação transversal ao campo conforme fechado

A seguir, vamos considerar  $\bar{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana completa, orientável e com curvatura de Ricci não-positiva. Dizemos que uma subvariedade  $S \subset \bar{M}$  é transversal a um campo

$X$  de  $\overline{M}$  se  $S$  é transversal as curvas integrais de  $X$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de  $\overline{M}$  e  $X$  um campo de vetores em  $\overline{M}$ . Dizemos que a folheação é transversal ao campo  $X$  se o campo é transversal a cada folha de  $\mathcal{F}$ . Deste modo, enunciamos o seguinte resultado.

**Teorema 4.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não-positiva equipada com um campo de vetores conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um de  $\overline{M}$  transversal ao campo  $\xi$ . Dada uma folha mínima  $L$  de  $\mathcal{F}$ , suponha que a função suporte  $\nu = \overline{g}(\xi, N)$  não muda de sinal em  $L$ . Então,*

1. *Se  $L$  é compacta, então  $L$  é totalmente geodésica;*
2. *Se  $L$  é completa não-compacta e  $A(\xi^\top) \in \mathcal{L}^1(L)$ , então  $L$  é totalmente geodésica.*

*Em particular, se vale a desigualdade*

$$\nu \geq \frac{1}{\|A\|^2 + 1} \quad (3.5)$$

*em  $L \in \mathcal{F}$ , então  $L \in \mathcal{F}(\xi)$ .*

3. *Assuma que  $L$  é uma folha completa e não compacta com crescimento de volume polinomial. Se o operador de Weingarten  $A$  é limitado e vale (3.5), então  $L$  é totalmente geodésica e  $L \in \mathcal{F}(\xi)$ .*

*Demonstração.* Seja  $L$  uma folha da folheação  $\mathcal{F}$ . Da Proposição 4, temos

$$\operatorname{div}_L (A(\xi^\top)) = -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) + \xi^\top(nH) + \nu\|A\|^2 + n\varphi H.$$

A variedade  $\overline{M}$  possui curvatura de Ricci não-positiva, logo,  $\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) \leq 0$ . Utilizando que a folha  $F$  é mínima e que  $\nu$  não muda de sinal, a identidade anterior nos fornece a seguinte desigualdade

$$\operatorname{div}_L (A(\xi^\top)) \geq \nu\|A\|^2 \geq 0. \quad (3.6)$$

Ademais, vale a seguinte consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\nu = \overline{g}(\xi, N) \leq |\overline{g}(\xi, N)| \leq \|\xi\| \|N\| \leq 1 \iff 0 \leq 1 - \nu. \quad (3.7)$$

A igualdade em (3.7) ocorre apenas quando  $\xi = N$ , isto é, a igualdade ocorre apenas quando  $F$  for uma folha da Folheação de Montiel  $\mathcal{F}(\xi)$ .

*Caso 1:* Se  $L$  é uma folha compacta, segue do Teorema de Stokes e da inequação (3.6) que

$$0 = \int_L \operatorname{div}_L (A(\xi^\top)) dL \geq \int_L \nu\|A\|^2 dL \geq 0. \quad (3.8)$$

Deste modo,  $\nu\|A\|^2 \equiv 0$ , e como a folheação  $\mathcal{F}$  é transversal ao campo  $\xi$ , temos  $\|A\| \equiv 0$ , ao longo da folha  $L$ . Concluimos que a folha  $L$  é totalmente geodésica.

*Caso 2:* Se  $L$  é uma folha completa não-compacta, segue da inequação (3.6) que o  $\operatorname{div}_L (A(\xi^\top))$  não muda de sinal e como  $\|A(\xi^\top)\| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ , do Lema 5.1 em [CS20] (veja também o Teorema principal em [Kar81]) temos que  $\operatorname{div}_L (A(\xi^\top)) = 0$ . Assim, da desigualdade (3.6), obtemos  $\|A\| \equiv 0$  ao longo da folha  $L$ . Logo,  $L$  é uma folha totalmente geodésica da folheação  $\mathcal{F}$ .

Note que em qualquer um dos casos anteriores, o  $\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) \equiv 0$  ao longo da folha  $L$ , compacta ou completa não compacta da folheação  $\mathcal{F}$ . Em particular, se vale a desigualdade (3.5),

temos que

$$\nu \|A\|^2 \geq \frac{\|A\|^2}{\|A\|^2 + 1} \geq 1 - \nu \geq 0.$$

A última desigualdade decorre de (3.7). E, como a folha  $L$  é totalmente geodésica, concluímos que  $\nu = 1$  ao longo da folha  $L$ . Ou seja, na folha  $L$  os campos coincidem, isto é,  $\xi = N$ . Daí,  $L$  é uma folha da folheação de Montiel  $\mathcal{F}(\xi)$ .

*Caso 3:* Defina agora  $f = 1 - \bar{g}(N, \xi)$  em  $\bar{M}^{n+1}$  e note que  $f \geq 0$  em  $L$ , de fato, isso decorre de (3.7) e das hipóteses assumidas. Se  $f \equiv 0$ , então  $N$  é identicamente igual a  $\xi$ . Neste caso, dados  $u, v \in T_p L$  temos que

$$\begin{aligned} \bar{g}(A(u), v) &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_u N, v) \\ &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_u \xi, v) \\ &= \bar{g}(-\varphi u, v), \end{aligned}$$

portanto,  $A \equiv -\varphi Id$ . Provando que  $L$  é uma folha totalmente umbílica da folheação  $\mathcal{F}$ . Ademais,  $L$  é totalmente geodésica.

Por outro lado, considere  $p \in L \in \mathcal{F}$ ,  $v \in T_p L$ , a igualdade entre os gradientes  $\nabla \nu = -\nabla f$ , o campo conforme fechado unitário  $\xi$  e a simetria do operador  $A$ , então

$$\begin{aligned} \bar{g}(\nabla \nu, v) &= \bar{g}(\nabla_v N, \xi) + \bar{g}(N, \nabla_v \xi) \\ &= \bar{g}(-A(\xi^\top), v), \end{aligned}$$

onde  $\xi^\top$  denota a projeção ortogonal de  $\xi|_L$  sobre o fibrado  $TL$ . Daí,

$$\nabla \nu = -A(\xi^\top). \quad (3.9)$$

Defina o campo  $Z = A(\xi^\top)$ , assim

$$\bar{g}(\nabla \nu, Z) = -\|Z\|^2.$$

Portanto,

$$\bar{g}(\nabla f, Z) = \|Z\|^2 \geq 0.$$

Da Equação (3.1) obtemos que

$$\operatorname{div}_L (A(\xi^\top)) = -\operatorname{Ric}_{\bar{M}}(\xi^\top, N) + \nu \|A\|^2.$$

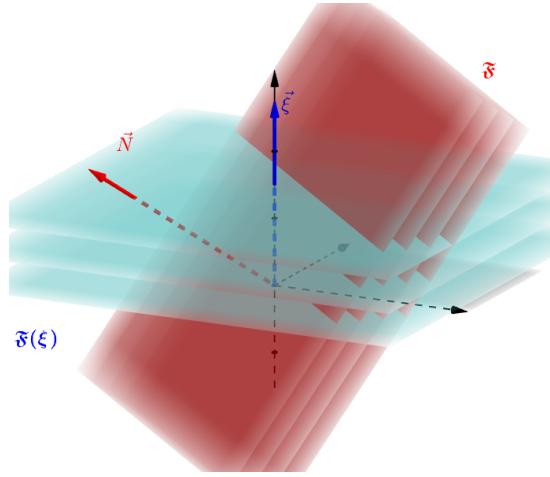
Como  $\bar{M}$  possui curvatura de Ricci não-positiva, temos

$$\operatorname{div}_L(Z) \geq \nu \|A\|^2.$$

Pela inequação (3.5), segue que  $\operatorname{div}_L(Z) \geq f$  ao longo da folha  $L$ . O operador  $A$  é limitado e o campo  $\xi$  é unitário, assim o campo  $Z$  é limitado. Como  $L$  possui crescimento de volume polinomial, do Teorema 2.1 em [ACN21], podemos concluir que  $f \leq 0$  ao longo de  $L$ . E, da inequação (3.7), temos que  $f \geq 0$  em  $L$ , logo  $f \equiv 0$  em  $L$ ; Assim,  $N = \xi$  ao longo da folha  $L$ , então  $L$  é uma folha totalmente geodésica de Montiel.  $\square$

**Observação 3.** Destacamos que no teorema anterior a hipótese de  $\nu \geq \frac{1}{\|A\|^2 + 1}$  não pode ser removida. O exemplo e a figura a seguir ilustram esse fato.

**Exemplo 3.** Seja  $\bar{M}^3$  o espaço euclidiano tridimensional. Considere em  $\bar{M}^3$  o campo conforme fechado unitário dado por  $\xi = (0, 0, 1)$  e  $\mathcal{F}(\xi)$  a folheação de Montiel. Seja  $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  a



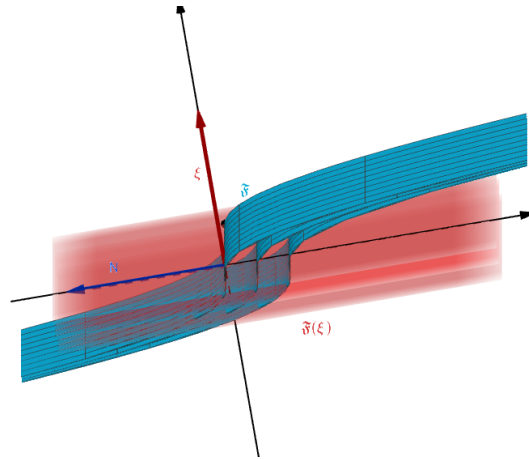
**Figura 3.1:** *Contra-exemplo: quando  $\nu$  não satisfaz a desigualdade (3.5)*

folheação dada pelas superfícies algébricas

$$L_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid P_\alpha(x, y, z) = 0, \text{ onde } P_\alpha(x, y, z) = z - (x + y + \alpha)\},$$

completas e não compactas. Note que a função suporte  $\nu = \bar{g}(\xi, N) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  é constante e, consequentemente, não muda sinal, entretanto,  $\bar{g}(\xi, N) < \frac{1}{\|A\|^2+1} = 1$ . Veja a Figura 3.1.

**Observação 4.** Destacamos ainda que a hipótese sobre a aplicação  $\nu$  não mudar de sinal também não pode ser removida no resultado anterior. O exemplo, obtido de [BDSS22], e a figura a seguir ilustram este fato.



**Figura 3.2:** *Contra-exemplo: quando  $\nu$  muda de sinal*

**Exemplo 4.** Seja  $\overline{M}^3$  o espaço euclidiano tridimensional. Considere o campo conforme fechado unitário dado por  $\xi = (1, 0, 0)$  e  $\mathcal{F}(\xi)$  a folheação de Montiel. Sejam, para cada  $\beta \in \mathbb{R}$ , as superfícies parametrizadas dadas por  $S_\beta(u, v) = (u, u^3 + \beta, v)$ . Podemos definir a folheação  $\mathcal{F} = \{L_\beta\}_{\beta \in \mathbb{R}}$  de modo que, para cada  $\beta \in \mathbb{R}$ , a folha  $L_\beta$  é a imagem desta parametrização, isto é,  $L_\beta = S_\beta(\mathbb{R}^2)$ . Note que a folheação  $\mathcal{F}$  é orientada pelo o campo vetorial unitário  $N$  que pode ser expresso nesta parametrização por

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + 9u^4}} (3u^2, -1, 0).$$

Ademais, as curvaturas principais de uma folha arbitrária  $L_\beta$  são  $k_1 = 0$  e  $k_2 = \frac{6u}{(1+9u^4)^{\frac{3}{2}}}$ . Daí, temos folheações transversais tais que  $\nu$  muda de sinal e  $\mathcal{F}$  não é totalmente geodésica.

Usando argumento análogo ao do Teorema 4, obtemos o seguinte corolário para variedades de Einstein. Além disso, note que o corolário a seguir é uma versão do Teorema 3.1 em [ACN21], onde substituímos a hipótese de  $\xi$  ser um campo de killing por conforme fechado e removemos as hipóteses de segunda forma fundamental limitada,  $\xi$  ser paralelizável ou uma direção principal.

**Corolário 1.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana de Einstein equipada com um campo conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação transversal ao campo  $\xi$  e  $L \in \mathcal{F}$  uma folha mínima, onde  $N$  é o campo normal unitário da folheação  $\mathcal{F}$ . Se a função suporte  $\nu = \overline{g}(\xi, N)$  satisfaz a desigualdade (3.5), então  $F$  é uma folheação de Montiel. Consequentemente,  $L$  é totalmente geodésica.*

*Demonstração.* Basta notarmos que  $\text{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) = 0$ , pois  $\overline{M}$  é variedade de Einstein. Da minimalidade de  $L$ , temos que  $H_L = 0$ . Daí, utilizando a igualdade estabelecida na Proposição 4 e a desigualdade (3.5), podemos reescrever a expressão do divergente do campo  $A(\xi^\top)$  da seguinte forma

$$\text{div}_L(A(\xi^\top)) = \nu \|A\|^2 \geq 1 - \nu.$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que  $1 - \nu \geq 0$ . E pelo argumento do Teorema 4 concluímos que  $L$  é uma folha da folheação de Montiel totalmente geodésica.  $\square$

O próximo resultado nos fornece uma nova versão do Teorema 3.1 de [BKO91], considerando agora a curvatura de Ricci da variedade Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$  não-positiva.

**Teorema 5.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$ ,  $n \geq 1$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável, com curvatura de Ricci não-positiva equipada com a folheação de Montiel  $\mathcal{F}(\xi)$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação CMC de  $\overline{M}$  de codimensão um transversa a  $\xi$  e  $L \in \mathcal{F}$ . Assuma que a função suporte  $\nu = \overline{g}(\xi, N)$  não muda de sinal em  $L$ . Então,*

1. *Se  $L$  é compacta, então  $L$  é totalmente geodésica;*
2. *Se  $L$  é completa não-compacta e o campo de vetores  $X = A(\xi^\top) - H\xi$  é Lebesgue integrável em  $L$ , então  $L$  é totalmente geodésica.*

*Em particular, se  $\nu \geq 1/(\|A\|^2 + 1)$  vale em  $L \in \mathcal{F}$ , então  $\mathcal{F}$  coincide com  $\mathcal{F}(\xi)$ .*

3. *Suponha que  $L$  é uma folha mínima completa não-compacta com crescimento de volume polinomial e  $\nu \geq \frac{1}{\|A\|^2 + 1}$ . Se o operador de Weingarten  $A$  é limitado, então  $L$  é totalmente geodésica e  $L \in \mathcal{F}(\xi)$ .*

*Demonstração.* A função curvatura média  $H: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  associa a cada ponto  $p \in \overline{M}^{n+1}$  o valor da curvatura média da folha  $L$ , que passa por  $p$ . E, desde que  $\mathcal{F}$  seja uma folheação de curvatura média constante, segue da Proposição 2.31 em [BKO91] que a função  $H$  é constante em  $\overline{M}$  ou o conjunto dos pontos de máximos da função  $H$ , denotado por

$$\mathcal{M} = \left\{ p \in \overline{M} \mid H(p) = \max_{\overline{M}}(H) \right\},$$

contém ao menos uma folha compacta da folheação  $\mathcal{F}$ . A seguir, vamos mostrar que  $H$  é constante em  $\overline{M}$ .



Suponha que  $H$  não é constante em  $\overline{M}$ . Assim, existe uma folha compacta  $\Sigma \in \mathcal{F}$  tal que  $\Sigma \subset \mathcal{M}$ . Utilizando que  $(n+1)\varphi = \operatorname{div}(\xi)$ , tomando a restrição à folha  $\Sigma$ , temos que

$$(n+1)\varphi|_{\Sigma} = \operatorname{div}(\xi)|_{\Sigma} = \operatorname{div}_{\Sigma}(\xi) + \varphi|_{\Sigma},$$

logo,  $\varphi|_{\Sigma} = \frac{\operatorname{div}_{\Sigma}(\xi)}{n}$ . Assim,  $nH\varphi|_{\Sigma} = H \operatorname{div}_{\Sigma}(\xi)$ .

Aplicando o teorema de Stokes a  $\Sigma$ , obtemos que

$$\int_{\Sigma} nH\varphi d\Sigma = H_{\Sigma} \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(\xi) d\Sigma = 0, \quad (3.10)$$

onde  $H_{\Sigma}$  é o valor da curvatura média ao longo da folha compacta  $\Sigma$  que, por hipótese, é constante.

Da Proposição 4 e dos fatos que  $\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^{\top}, N) \leq 0$  e  $\nu \geq 0$ , temos

$$0 = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(A(\xi^{\top})) d\Sigma = \int_{\Sigma} -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^{\top}, N) d\Sigma + \int_{\Sigma} \nu \|A\|^2 d\Sigma. \quad (3.11)$$

Portanto,  $\nu \|A\|^2 = 0$ . Logo,  $\|A\| = 0$  ao longo de  $\Sigma$ . Consequentemente,  $\Sigma$  é totalmente geodésica, em particular,  $H_{\Sigma}$  é nula. Como  $\Sigma \subset \mathcal{M}$ , pode-se concluir que  $H \leq 0$ .

Agora, considere  $q \in \overline{M}$  um ponto de mínimo de  $\overline{M}$ . Utilizando argumento similar, definimos o conjunto dos pontos de mínimo  $\mathfrak{M} = \{q \in \overline{M} \mid H(q) = \min_{\overline{M}}(H)\}$ . Analogamente, temos que existe uma folha compacta  $\Sigma$  da folheação  $\mathcal{F}$  tal que  $\Sigma \subset \mathfrak{M}$ . Assim, podemos concluir que  $H_{\Sigma} = 0$ . Consequentemente,  $H \geq 0$ . Logo,  $H$  é identicamente nula em  $\overline{M}$ , gerando um absurdo. Portanto,  $H$  é constante em  $\overline{M}$ .

*Caso 1:* Suponha que  $L$  é uma folha compacta de  $\mathcal{F}$ . Note que das hipóteses assumidas é imediato ver que  $\operatorname{Ric}(\xi^{\top}, N) \leq 0$  e  $\xi^{\top}(nH) = 0$ . Ademais, a Proposição 4 combinada com o Teorema de Stokes implica que

$$0 = \int_L \operatorname{div}(A(\xi^{\top})) = \int_L (-\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^{\top}, N) + \nu \|A\|^2) dL. \quad (3.12)$$

Utilizamos acima a equação (3.10) com respeito à folha compacta  $L$ . Daí,  $\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^{\top}, N) = 0$  e  $\|A\| = 0$  ao longo de  $L$ , desde que  $\mathcal{F}$  seja transversal ao campo  $\xi$ . Pela arbitrariedade de  $L$ , temos que toda folha compacta de  $\mathcal{F}$  é totalmente geodésica.

*Caso 2:* Suponha que  $L$  é uma folha completa não compacta de  $\mathcal{F}$ . Segue do fato de  $\xi$  ser um campo conforme fechado que

$$(n+1)\varphi|_L = \operatorname{div}(\xi)|_L = \operatorname{div}_L(\xi) + \varphi|_L, \quad (3.13)$$

logo,  $\varphi|_L = \frac{\operatorname{div}_L(\xi)}{n}$ . Assim, podemos reescrever a equação (3.1) da seguinte forma

$$\operatorname{div}_L(A(\xi^{\top}) - H\xi) = -\operatorname{Ric}_L(\xi^{\top}, N) + \nu \|A\|^2. \quad (3.14)$$

Considere o campo  $X \doteq A(\xi^{\top}) - H\xi$ . Desde que o campo  $\|X\| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$  e a função  $\operatorname{div}_L(X)$  não muda de sinal, segue do Lema 5.1, em [CS20], que  $\operatorname{div}_L(X) = 0$ . Consequentemente,  $\operatorname{Ric}_L(\xi^{\top}, N) = 0$  e  $\|A\| = 0$  ao longo da folha  $L$ , isto é, a folha  $L$  é totalmente geodésica.

Finalmente, se  $\nu \geq \frac{1}{\|A\|^2 + 1}$ , obtemos da equação (3.14) que

$$0 = \operatorname{div}_L(A(\xi^{\top}) - H\xi) \geq \nu \|A\|^2 \geq 1 - \nu \geq 0. \quad (3.15)$$

Portanto,  $\nu = 1$ . Consequentemente,  $\mathcal{F}$  é uma folheação de Montiel.

*Caso 3:* Suponha que  $L$  é uma folha completa não compacta de  $\mathcal{F}$ . Defina  $f = 1 - \bar{g}(N, \xi)$  em  $\bar{M}$ . Segue da Equação (3.7) que  $f \geq 0$  em  $L$ . Se provarmos que  $f \equiv 0$  em  $L$ , então  $N$  será identicamente igual à  $\xi$ . Neste caso, dados  $u, v \in T_p L$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{g}(A(u), v) &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_u N, v) \\ &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_u \xi, v) \\ &= \bar{g}(-\varphi Iu, v), \end{aligned}$$

portanto,  $A = -\varphi I$ . Provando que  $L$  é uma folha totalmente umbílica da folheação de Montiel. De fato, mais que isso, pois quando  $\nu = 1$ , temos que  $\nu$  satisfaz a inequação  $\nu \geq \frac{1}{\|A\|^2 + 1}$  e pelo que provamos no caso anterior,  $L$  é uma folha totalmente geodésica da folheação de Montiel.

Assim, é suficiente mostrarmos que  $f$  é identicamente nula ao longo de  $L$ . Considere  $p \in L \in \mathcal{F}$ , um vetor  $v \in T_p L$ , o campo conforme fechado unitário  $\xi$  e a simetria do operador  $A$ , então

$$\begin{aligned} \bar{g}(\nabla \nu, v) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_v N, \xi) + \bar{g}(N, \bar{\nabla}_v \xi) \\ &= \bar{g}(-A(\xi^\top), v), \end{aligned}$$

onde  $\xi^\top$  denota a projeção ortogonal de  $\xi|_L$  sobre o fibrado  $TL$ . Daí, o gradiente de  $\nu$  é

$$\nabla \nu = -A(\xi^\top). \quad (3.16)$$

Defina o campo  $Z = A(\xi^\top) - H\xi$ , assim

$$\bar{g}(\nabla \nu, Z) = -\|A(\xi^\top)\|^2 + \bar{g}(A(\xi^\top), H\xi).$$

Em cada um dos casos anteriores, temos

$$\bar{g}(\nabla f, Z) = \|A(\xi^\top)\|^2 - H\bar{g}(A(\xi^\top), \xi^\top) \geq 0.$$

Da Equação (3.1) obtemos que

$$\operatorname{div}_L(A\xi^\top - H\xi) = -\operatorname{Ric}_{\bar{M}}(\xi^\top, N) + \nu\|A\|^2.$$

Como  $\bar{M}$  tem curvatura de Ricci não negativa, temos

$$\operatorname{div}_L(Z) \geq \nu\|A\|^2.$$

Pela inequação (3.5), segue que  $\operatorname{div}_L(Z) \geq f$  ao longo da folha  $L$ . O operador  $A$  é limitado e o campo  $\xi$  é unitário, assim o campo  $Z$  é limitado. Como  $L$  possui crescimento de volume polinomial, do Teorema 2.1 em [ACN21], podemos concluir que  $f \leq 0$  ao longo de  $L$ . E, da inequação (3.7), temos que  $f \geq 0$  em  $L$ , logo  $f \equiv 0$  em  $L$ . Assim,  $N = \xi$  ao longo da folha  $L$ , então  $L$  é uma folha totalmente geodésica de Montiel.  $\square$

# Capítulo 4

## Caracterização de folheações totalmente geodésicas transversais a um campo conforme fechado

### 4.1 Teorema de caracterização

O próximo resultado nos fornecerá uma caracterização de folhas totalmente geodésicas de uma folheação transversal à um campo conforme fechado  $\xi$ . Para isso, definimos o invariante métrico  $\mathcal{G}_F^\xi$  da folha  $F$  transversal a  $\xi$  da seguinte maneira

$$\mathcal{G}_L^\xi := \sup_L \{ \operatorname{div}_L (A(\xi^\top) - H\xi^\top) + \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) \}.$$

De posse deste invariante, usaremos o método de curvas características como em [Gom04],[dSSR23] e [CS20]. Agora, podemos enunciar o resultado.

**Teorema 6.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana munida de um campo conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação transversal ao campo  $\xi$  e  $L \in \mathcal{F}$  uma folha completa. Se  $\nu \geq \nu_0 > 0$  e  $\dim L \geq \frac{1}{\nu_0}$ , então*

$$\mathcal{G}_L^\xi \geq 0, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{G}_L^\xi \geq H_L^2 \tag{4.2}$$

e

*$L$  é totalmente geodésica, se e somente se,  $\mathcal{G}_L^\xi = 0$ .*

*Demonstração.* Provaremos a Inequação (4.1) por contradição. Suponhamos que  $\mathcal{G}_L^\xi < 0$ . Assim, da equação (3.1) e do fato  $nH^2 \leq \|A\|^2$ , temos

$$\nu(nH^2) + \xi^\top(nH) \leq \nu\|A\|^2 + \xi^\top(nH) < 0. \tag{4.3}$$

Seja agora  $\gamma$  uma curva integral de  $\xi^\top$ . A inequação (4.3) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \nu(nH_{\gamma(s)}^2) + nH'_{\gamma(s)} &< 0 \\ H'_{\gamma(s)} &< -\nu H_{\gamma(s)}^2 < 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Como  $\overline{M}^{n+1}$  é completa, temos que  $\gamma$  pode ser estendida para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Podemos escolher o campo normal  $N$  de tal maneira que  $H_\gamma \leq 0$ . Basta mudarmos os campos  $N$  e  $\xi$  pelos campos

$-N$  e  $-\xi$ , já que o  $\operatorname{div}_L(A(\xi^\top))$ , o campo  $H\xi^\top$  e o  $\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N)$  não mudam. Assim, considere o intervalo  $I = ]a, +\infty[$  tal que  $H$  é negativa em  $I$ . Logo

$$H_{\gamma(s)} < 0, \quad H'_{\gamma(s)} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{-H'_{\gamma(s)}}{H_{\gamma(s)}^2} > \nu \geq 0,$$

para  $s > a$ . Defina a seguinte função no intervalo  $I$ ,

$$G(s) = -\frac{1}{H_{\gamma(s)}}.$$

Segue da equação (4.4) que

$$G'(s) = \frac{H'_{\gamma(s)}}{H_{\gamma(s)}^2} < -\nu. \quad (4.5)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, para  $b < s \in I$ , com  $b$  fixado, e também a equação (4.5), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{H_{\gamma(s)}} + \frac{1}{H_{\gamma(b)}} &= \left( \frac{H'_{\gamma(s)}}{H_{\gamma(s)}^2} \right) (s - b) \\ -\frac{1}{H_{\gamma(s)}} + \frac{1}{H_{\gamma(b)}} &< -\nu_0(s - b) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Note que quando  $s$  tende para  $+\infty$ , o membro esquerdo da desigualdade (4.6) tende para uma constante enquanto o membro à direita tende para  $-\infty$ . O que é uma contradição. Logo, a hipótese inicial é falsa, portanto,  $\mathcal{G}_L^\xi \geq 0$ .

Provaremos agora desigualdade (4.2). Utilizando a desigualdade (4.1), podemos afirmar, sem perda de generalidade, que  $\mathcal{G}_F^\xi = a^2$ , onde  $a$  é um número real não-negativo. Caso  $\mathcal{G}_F^\xi$  seja infinito, não há o que provar. Suponha por contradição que a afirmação (4.2) é falsa. Então, existe  $p \in F$  tal que neste ponto

$$H_p^2 > a^2. \quad (4.7)$$

Consideremos separadamente os casos  $a > 0$  e  $a = 0$ .

Assuma que  $a > 0$ . Pela desigualdade (4.7), temos que  $H^2 - a^2 > 0$ . Considere a curva integral  $\gamma$  de  $\xi^\top$  tal que  $\gamma(0) = p$ . Como feito anteriormente, podemos escolher uma direção tal que  $H_p < 0$ . Assim, de (4.7), temos que  $H_p = H_{\gamma(0)} < -a$ . Por continuidade, existe um intervalo maximal  $[0, b[$  onde

$$H_{\gamma(s)}^2 - a^2 > 0, \quad \forall s \in [0, b[. \quad (4.8)$$

Podemos afirmar que  $b = +\infty$  em (4.8). Caso contrário, isto é, se  $b$  for finito, deveríamos ter que  $H_{\gamma(b)} = -a$ , ou seja,  $H_{\gamma(b)}^2 = a^2$ . Assim, da Equação (3.1), da desigualdade  $nH \leq \|A\|^2$  e das considerações anteriores, temos que

$$\begin{aligned} \xi^\top(nH) &= \operatorname{div}_L(A(\xi^\top - H\xi^\top)) + \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) - \nu\|A\|^2 \\ &\leq \mathcal{G}_F^\xi - \nu\|A\|^2 \\ &\leq a^2 - n\nu H^2 \\ &\leq a^2 - n\nu_0 H^2 \\ &\leq a^2 - H^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Segue de (4.9) que  $H'_{\gamma(s)} < 0$  para todo  $s \in [0, b[$ . O que implica que  $H$  é estritamente decrescente

em  $[0, b]$ . Por outro lado,  $H_{\gamma(0)} < -a$  e  $H_{\gamma(b)} = -a$ , contradição, pois tínhamos  $H$  estritamente decrescente neste intervalo. Assim a afirmação é verdadeira, logo  $b = +\infty$ . Daí, podemos escrever as seguintes desigualdades, para todo  $s > 0$ ,

$$H_{\gamma(s)} < 0, \quad H'_{\gamma(s)} \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{H'_{\gamma(s)}}{a^2 - H_{\gamma(s)}^2} \geq 1. \quad (4.10)$$

Defina agora, para  $s > 0$ , a seguinte função  $h$  tal que

$$h(s) = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{H_{\gamma(s)} - a}{H_{\gamma(s)} + a} \right)$$

Fixado um número real estritamente positivo  $b_0$  e aplicando o teorema do valor médio em  $[b_0, s]$ , existe  $c \in ]b_0, s[$ , tal que  $h(s) - h(b_0) = h'(c)(s - b_0)$ , isto é,

$$\frac{1}{2a} \ln \left( \frac{H_{\gamma(s)} - a}{H_{\gamma(s)} + a} \right) - \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{H_{\gamma(b_0)} - a}{H_{\gamma(b_0)} + a} \right) < (-1)(s - b_0). \quad (4.11)$$

Note que na expressão acima, quando  $s$  tende para  $+\infty$  temos que o lado esquerdo da desigualdade tende para uma constante e o lado direito tende para  $-\infty$ . Obtemos uma contradição. Portanto, não existe um ponto  $p \in L$  tal que  $H_p < a^2$ .

O caso  $a = 0$  é análogo à demonstração feita para mostrar que vale a desigualdade (4.9). Logo,  $\mathcal{G}_L^\xi \geq H^2$ .

Agora, suponha que  $\mathcal{G}_L^\xi = 0$ , da inequação (4.2) segue que  $H_L = 0$ . Como  $\mathcal{G}_L^\xi$  é o supremo na folha  $L$ , segue da Equação (3.1) que

$$\xi^\top (nH) + \nu \|A\|^2 = \operatorname{div}_L (A(\xi^\top) - H\xi^\top) + \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) \leq \mathcal{G}_L^\xi = 0.$$

Logo,  $\nu \|A\|^2 = 0$ , isto é,  $A = 0$ . Portanto, a folha  $L$  é totalmente geodésica.

Para provarmos a recíproca, suponha agora que  $L \in \mathcal{F}$  é uma folha totalmente geodésica de  $\overline{M}$ , isto é,  $A = 0$  em  $L$ , conseqüentemente,  $H_L = 0$ . Deste modo, podemos reescrever (3.1) ao longo da folha  $L$ ,

$$\operatorname{div}_L (A(\xi^\top) - H\xi^\top) + \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\xi^\top, N) = 0.$$

Portanto,  $\mathcal{G}_L^\xi = 0$ . □

**Observação 5.** Note que no teorema anterior estamos caracterizando as hipersuperfícies totalmente geodésicas que são transversais a um campo conforme fechado.

Uma aplicação de técnicas da análise geométrica para obter resultados para folheações transversais a campos conformes fechados é dada pelo princípio do máximo atribuído a [Yau75] combinado com o Teorema 6 e conseguimos mostrar que

**Corolário 2.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana munida de um campo conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  é uma folheação transversal ao campo  $\xi$  e  $L \in \mathcal{F}$  onde  $\nu \geq \nu_0 > 0$  e  $\dim L \geq \frac{1}{\nu_0}$ . Se  $L$  é uma folha completa com curvatura Ricci limitada inferiormente e  $\mathcal{G}_L^\xi \in \mathbb{R}$ , então existe uma seqüência de pontos  $\{p_k\} \in L$  tal que:*

1.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} H_L(p_k) = \sup_L H_L$ ;
2.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla H_L(p_k)\| = 0$ ;

$$3. \lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta H_L(p_k) \leq 0.$$

*Demonstração.* Segue do Teorema 6 que  $H_L^2 \leq \mathcal{G}_L^\xi$  e temos que  $\mathcal{G}_L^\xi < +\infty$ , logo a função curvatura média da folha  $H_L$  é limitada. Por [Yau75], concluímos a prova.  $\square$

Mais uma consequência do Teorema 6 combinado com outro princípio do máximo, também conhecido como Teorema de Hopf-Calabi, ver [Cal59], é dado a seguir.

**Corolário 3.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana munida de um campo conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  é uma folheação transversal ao campo  $\xi$  e  $L \in \mathcal{F}$  uma folha completa onde  $\nu \geq \nu_0 > 0$  e  $\dim L \geq \frac{1}{\nu_0}$ . Se  $H_L$  é subharmônica e existe  $p \in L$  tal que  $H_L(p) = \left(\mathcal{G}_L^\xi\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$ , então  $L$  tem curvatura média constante.*

*Demonstração.* A aplicação  $H_L$  é subharmônica e existe um  $p \in L$  tal que  $H_L(p) = \left(\mathcal{G}_L^\xi\right)^{\frac{1}{2}}$ . Utilizando o princípio do máximo de Hopf-Calabi em [Cal59], segue que  $H_L$  é constante.  $\square$

O próximo corolário apresenta-nos uma obstrução de existência de folheação possuindo ao menos uma folha totalmente geodésica. Por exemplos, mostramos que não existe folheação transversal a um campo conforme fechado na esfera  $\mathbb{S}^{2n+1}$  possuindo pelo menos uma folha totalmente geodésica.

**Corolário 4.** *Seja  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante  $c$ , munida de um campo conforme fechado unitário  $\xi$ . Seja  $\mathcal{F}$  é uma folheação transversal ao campo  $\xi$  e  $L \in \mathcal{F}$  uma folha completa onde  $\nu \geq \nu_0 > 0$  e  $\dim L \geq \frac{1}{\nu_0}$ . Se  $c \neq 0$ , então não pode existir folha de  $\mathcal{F}$  totalmente geodésica.*

# Referências Bibliográficas

- [Abe73] K. Abe. Applications of a riccati type differential equation to riemannian manifolds with totally geodesic distributions. *Tohoku Mathematical Journal*, 25(4):425–444, 1973. [1](#)
- [ACN21] L. J. Alías, A. Caminha, and F. Y. do Nascimento. A maximum principle related to volume growth and applications. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, 200(4):1637–1650, 2021. [1](#), [2](#), [4](#), [14](#), [15](#), [20](#), [22](#), [24](#)
- [BDSS22] A. Brasil, S. Deshmukh, E. C. da Silva, and P. Sousa. Spacelike foliations on lorentz manifolds. Preprint, arXiv:2203.09605, 2022. [1](#), [2](#), [3](#), [16](#), [21](#)
- [Bes87] A. L. Besse. *Einstein Manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987. [10](#)
- [BG18] F. G. B. Brito and I. Gonçalves. Degree of the gauss map and curvature integrals for closed hypersurfaces. *Results in Mathematics*, 73(2):1–8, 2018. [1](#)
- [BGS87] J. L. M. Barbosa, J. M. Gomes, and A. M. Silveira. Foliation of 3-dimensional space forms by surfaces with constant mean curvature. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 18(2):1–12, 1987. [1](#)
- [BKO91] J. L. M. Barbosa, K. Kenmotsu, and G. Oshikiri. Foliations by hypersurfaces with constant mean curvature. *Mathematische Zeitschrift*, 207(1):97–107, 1991. [1](#), [2](#), [22](#)
- [Bri81] F. G. B. Brito. Une obstruction géométrique à l’existence de feuilletages de codimension 1 totalement géodésiques. *Journal of Differential Geometry*, 16(4):675–684, 1981. [1](#)
- [BW84] F. G. B. Brito and P. G. Walczak. Totally geodesic foliations with integral normal bundles. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 17(1):41–46, 1984. [1](#), [4](#)
- [Cal59] E. Calabi. An extension of e. hopf’s maximum principle with an application to riemannian geometry. *Duke Mathematical Journal*, 25(1):45–56, 1959. [5](#), [28](#)
- [CS20] R. M. dos S. B. Chaves and E. C. da Silva. Foliations by spacelike hypersurfaces on lorentz manifolds. *Results in Mathematics*, 75(1):36, 2020. [4](#), [5](#), [14](#), [15](#), [19](#), [23](#), [25](#)
- [CSC10] A. Caminha, P. Souza, and F. Camargo. Complete foliations of space forms by hypersurfaces. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 41(3):339–353, sep 2010. [14](#), [15](#)
- [CW06] M. Czarnecki and P. Walczak. *Extrinsic geometry of foliations*, pages 149–167. World Scientific, 2006. [1](#)

- [dSSR23] E. C. da Silva, D. C. Souza, and F. P. P. Reis. Characterization of totally geodesic foliations with integrable and parallelizable normal bundle. *Glasgow Mathematical Journal*, 65(1):128–137, 2023. [1](#), [2](#), [4](#), [25](#)
- [Fer70] D. Ferus. Totally geodesic foliations. *Mathematische Annalen*, 188(4):313–316, 1970. [1](#)
- [Ghy83] E. Ghys. Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 58(1):543–572, 1983. [1](#)
- [Gom04] A. Gomes. The mean curvature of a transversely orientable foliation. *Results in Mathematics*, 46(1):31–36, 2004. [2](#), [4](#), [25](#)
- [GS17] A. Gomes and E. C. da Silva. Orthogonal foliations on riemannian manifolds. Preprint, arXiv: 1711.05690, 2017. [2](#)
- [JW80] D. L. Johnson and L. B. Whitt. Totally geodesic foliations. *Journal of Differential Geometry*, 15(2):225–235, 1980. [1](#)
- [Kar81] L. Karp. On stokes’ theorem for noncompact manifolds. 82(3):487–490, 1981. [19](#)
- [Mon99] S. Montiel. Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some riemannian manifolds. *Indiana University Mathematics Journal*, 48(2):711–748, 1999. [1](#), [9](#), [10](#)
- [O’N83] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity*, volume 103 of *Pure and applied mathematics: a series of monographs and textbooks*. Academic Press, 1983. [10](#)
- [Osh81] G. Oshikiri. A remark on minimal foliations. *Tohoku Mathematical Journal*, 33(1):133–137, 1981. [1](#)
- [Osh82] G. Oshikiri. Jacobi fields and the stability of leaves of codimension-one minimal foliations. *Tohoku Mathematical Journal*, 34(3):417–424, 1982. [1](#)
- [Osh87] G. Oshikiri. Some remarks on minimal foliations. *Tohoku Mathematical Journal*, 39(2):223–229, 1987. [1](#)
- [RW11] V. Rovenski and P Walczak. *Topics in extrinsic geometry of codimension-one foliations*. Springer Science & Business Media, 2011. [1](#)
- [SdS24] J. E. Sampaio and E. C. da Silva. Cmc foliations on euclidean spaces are minimal foliations. Preprint, arXiv:2404.13772, 2024. [1](#)
- [Yau75] S. T. Yau. Harmonic functions on complete riemannian manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 28(2):201–228, mar 1975. [5](#), [14](#), [15](#), [27](#), [28](#)