Geometria dos espaços de Banach $C([0,\alpha],X)$ para ordinais enumeráveis α

Maurício Zahn

Tese apresentada

ao

Instituto de Matemática e Estatística

da

Universidade de São Paulo

para

obtenção do título

de

Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o período de desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES - Prodoutoral

São Paulo, Junho de 2015

Geometria de espaços de Banach $C([0,\alpha],X)$ para ordinais enumeráveis α

Esta tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Maurício Zahn em 12/06/2015. O original encontra-se disponível na biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão julgadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego - IME-USP
- Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Daniela Mariz Silva Vieira - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - UFRJ
- Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar - ITA
- Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi - ICMC-USP

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer a Deus por ter me dado força, fé e coragem para vencer mais esta etapa de minha vida;

aos meus pais Nelda Maria Zahn e Hellmuth Zahn (in memorian), pelo amor e carinho que sempre tiveram por mim;

à Lisiane Ramires Meneses, minha amada esposa, por todo o amor, carinho e compreensão. Tu também me deste força para continuar esta caminhada. Quero que saibas, vida minha, que te amo muito e que sempre estarei ao seu lado;

aos meus sogros Julio Meneses e Sirlei Meneses, e cunhados Anelise Meneses e Thiago Melendez, e também ao "pobre do cara, tchê!", obrigado pelo carinho, amizade e pela torcida;

ao Programa de pós-graduação em Matemática do IME-USP, pela oportunidade de estudo;

ao Prof. Elói Medina Galego, meu orientador de tese de doutorado, pela sua competência matemática, paciência e boa vontade em me auxiliar durante todo o período da pesquisa da tese, e, sobretudo, por sua honrosa amizade;

ao Prof. Gideon Schechtman, do Weizmann Institute of Science Rehovot - Israel, pelo auxílio nas provas do Lema 3.2 e da Proposição 3.3;

à banca examinadora desse trabalho, pelas importantes sugestões e correções realizadas;

ao Prof. Leonardo Pellegrini, por ter aceito inicialmente me orientar e ter ajudado com os trâmites em meio à USP referentes à bolsa da Capes Prodoutoral;

aos meus amigos do tempo de Mestrado na UFRGS, Rodrigo e Patrícia, que encontrei aqui, obrigado pela amizade e por me ajudar na primeira semana em que vim para São Paulo;

aos amigos que fiz no IME-USP: Fabiano Cidral, Luis Andres Rosso, Maikel Samuays, Michael Villamizar e Rodrigo Figueiredo, obrigado pela amizade e companheirismo;

aos meus colegas do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Pelotas, por favorecer esta oportunidade de qualificação profissional. Em especial aos meus amigos professores Alexandre Molter, Andrei Bourchtein, Cícero Nachtigall, Denise Nascimento, Fabio Botelho, Giovani Nunes, Janice Nery, Lisandra Sauer e Sérgio Cardoso;

à Capes, pelo apoio financeiro com a bolsa Prodoutoral;

e a todos que, de alguma maneira, ajudaram ou torceram por mim.

Dedico este trabalho à Lisiane Ramires Meneses, meu amor, minha vida!

Resumo

A classificação isomorfa dos espaços de Banach separáveis $C(K)$ é devida a Milutin no caso em que K são não enumeráveis e a Bessaga e Pełczyński no caso em que K são enumeráveis.

Neste trabalho apresentamos uma extensão vetorial dessa classificação e tiramos várias consequências, por exemplo, considerando o espaço métrico compacto infinito K e Y um espaço de Banach:

1. Sendo $1 < p < \infty$ e Γ um conjunto infinito, classificamos, a menos de isomorfismo, os espaços de Banach $C(K, Y \oplus \ell_p(\Gamma))$, quando o dual de Y contém uma cópia de ℓ_q, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Classificamos os espaços de Banach $C(K, Y \oplus \ell_\infty(\Gamma))$, quando a densidade de Y é estritamente menor que $2^{|\Gamma|}$.

3. Classificamos os espaços de Banach $C(K \times (S \oplus \beta\Gamma))$ e $C(S \oplus (K \times \beta\Gamma))$, onde S é um compacto disperso de Hausdorff arbitrário e $\beta\Gamma$ é a compactificação de Stone-Cech de Γ.

Obtemos, também, algumas leis de cancelamento para espaços de Banach da forma $C(K_1, X) \oplus C(K_2, Y)$, onde K_1 e K_2 são espaços compactos métricos infinitos de Hausdorff e X, Y espaços de Banach satisfazendo condições adequadas.

Estabelecemos também um teorema de quase-dicotomia envolvendo os espaços $C(K, X)$, onde X tem cotipo finito.

Finalmente, apresentamos algumas majorações nas distorções de isomorfismos positivos de $C([0, \omega \cdot k])$ em $C([0, \omega])$ e também de $C([0, \omega])$ em $C([0, \omega \cdot k])$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Palavras-chave: Teoremas de Bessaga-Pełczyński e Milutin em espaços separáveis $C(K)$, classificação isomorfa de espaços $C(K, X)$, quocientes ω_1 de espaços de Banach, espaços de cotipo finito, distorções de isomorfismos positivos.

Abstract

The isomorphic classification of separable Banach spaces $C(K)$ is due Milutin in the case when K are uncountable and to Bessaga and Pełczyński in the case when K are countable.

In this work we prove a vectorial extention of this classification and provide several consequences, for example considering the infinite metric compact space K and Y a Banach space:

1. Let $1 < p < \infty$ and Γ a infinite set, we classify, up to an isomorphism, the Banach spaces $C(K, Y \oplus \ell_p(\Gamma))$, in the case where the dual of Y contains no copy of ℓ_q, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. We classify the Banach spaces $C(K, Y \oplus \ell_\infty(\Gamma))$, when the density character of Y is strictly less that $2^{|\Gamma|}$.

3. We classify the Banach spaces $C(K \times (S \oplus \beta\Gamma))$ and $C(S \oplus (K \times \beta\Gamma))$ where S is an arbitrary dispersed compact and $\beta\Gamma$ is the Stone-Cech compactification of Γ.

We obtain also some cancellation laws for Banach spaces in the form $C(K_1, X) \oplus C(K_2, Y)$, where K_1 and K_2 are metric compact Hausdorff spaces and X, Y Banach spaces satisfying appropriate conditions.

We established also a quasi-dichotomy theorem envolving the $C(K, X)$ spaces, where X is of finite cotype.

Finally, we present some upper bounds of distortions of positive isomorphisms of $C([0, \omega \cdot k])$ on $C([0, \omega])$ and also of $C([0, \omega])$ on $C([0, \omega \cdot k])$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Keywords: Bessaga-Pełczyński and Milutin's theorems on separable $C(K)$ spaces, isomorphic classifications $C(K, X)$ spaces, ω_1-quotient of Banach spaces, spaces of finite cotype, distortions of positive isomorphisms.

Conteúdo

Introdução **xv**

1 Preliminares **1**
- 1.1 **Primeiros conceitos e resultados** 1
- 1.2 **Alguns resultados sobre o produto tensorial injetivo** 8
- 1.3 **Alguns resultados envolvendo números ordinais** 10
- 1.4 **Espaços de Grothendieck e estoneanos** 14
- 1.5 **Reticulados de Banach** 15

2 Extensão vetorial de um teorema de Bessaga e Pełczyǹski **17**
- 2.1 **Introdução** 17
- 2.2 **A prova do resultado principal** 22

3 Aplicações do Teorema de extensão de Bessaga e Pełczyǹski **31**
- 3.1 **Introdução** 31
- 3.2 **Resultados importantes** 32
- 3.3 **Classificações isomorfas de espaços** $C(K, X)$ 37
- 3.4 **Leis de cancelamento em espaços** $C(K, X)$ 42

4 Espaços de cotipo finito e espaços $C([0, \alpha])$, $\alpha < \omega_1$ **47**
- 4.1 **Introdução** 47
- 4.2 **O principal resultado** 48
- 4.3 **Resultados auxiliares** 51
- 4.4 **Prova da quase-dicotomia** 59
- 4.5 **Observações finais e problemas em aberto** 62

5 Sobre distorções de isomorfismos positivos entre $C([0, \omega])$ **e** $C([0, \omega \cdot k])$, $k \geq 2$ **65**
- 5.1 **Introdução** 65
- 5.2 **Majoração para** $d_+(C([0, \omega \cdot k]), C([0, \omega]))$ 68
- 5.3 **Majoração para** $d_+(C([0, \omega]), C([0, \omega \cdot k]))$ 73
- 5.4 **Observação final** 79

Referências bibliográficas **83**

Introdução

Dados X um espaço de Banach e K um espaço topológico compacto de Hausdorff, denotaremos por $C(K, X)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas com valores em X munido com a norma do supremo. Se K e S são espaços compactos, denotaremos por $K \oplus S$ e $K \times S$, respectivamente, a soma topológica e o produto topológico de K e S. Para um número cardinal $\mathfrak{m} \geq 1$ fixado, $\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}$ denotará o cubo de Cantor de peso $\mathfrak{m}$. Para um número ordinal α, $[0, \alpha]$ denotará o intervalo de ordinais $\{\xi : 0 \leq \xi \leq \alpha\}$ munido com a topologia da ordem. Se X e Y são espaços de Banach, então $X \sim Y$ denotará que X e Y são isomorfos, $X \twoheadrightarrow Y$ que Y é isomorfo a um quociente de X e $X \hookrightarrow Y$ que Y possui um subespaço isomorfo a X. Finalmente, $X \oplus Y$ denotará o produto cartesiano entre os espaços de Banach X e Y.

Um resultado importante sobre a classificação isomorfa dos espaços $C(K)$, onde K é métrico, foi provado por Milutin [43] em 1966. Tal resultado estabelece que se K for um espaço métrico compacto não enumerável, então

$$C(K) \sim C(\mathbf{2}^{\aleph_0}). \tag{1}$$

Pełczyǹski [44] provou em 1968 que se K for uma família de espaços métricos ou um grupo topológico com peso topológico infinito $\mathfrak{m}$, então

$$C(K) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}), \tag{2}$$

dando assim uma extensão para (1).

Em 1960 Bessaga e Pełczyǹski [5] apresentaram uma classificação isomorfa para os espaços $C([0, \alpha])$, onde $\alpha < \omega_1$. Eles provaram o seguinte resultado:

Teorema 1 *(Bessaga e Pełczyǹski) Sejam ξ e η dois ordinais tais que $\omega \leq \xi \leq \eta < \omega_1$. Então*

$$C([0, \xi]) \sim C([0, \eta]) \Leftrightarrow \eta < \xi^{\omega}.$$

Em 2011, Galego provou em [24] uma extensão vetorial para o Teorema 1, introduzindo o conceito de *fator maximal* em espaços de Banach. Ele provou o seguinte resultado:

Teorema 2. *Sejam X um espaço de Banach contendo algum fator maximal uniformemente convexo e ordinais $\omega \leq \alpha < \beta < \omega_1$. Então*

$$C([0,\alpha], X) \sim C([0,\beta], X) \Leftrightarrow \beta < \alpha^{\omega}.$$

Nesse mesmo artigo, Galego apresenta alguns problemas de classificação isomorfa. Ele provou, por exemplo, o seguinte Teorema:

Teorema 3. *Sejam $1 < p < q < \infty$. Então, para quaisquer espaços métricos infinitos, compactos e enumeráveis K_1, K_2, K_3 e K_4,*

$$C(K_1, \ell_p) \oplus C(K_2, \ell_q) \sim C(K_3, \ell_p) \oplus C(K_4, \ell_q) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_3) \ \text{ e } \ C(K_2) \sim C(K_4).$$

Vários problemas ficaram em aberto em [24], dentre eles, por exemplo, não foi possível dar uma classificação isomorfa tal como a do teorema acima quando $p = 1$ e/ou $q = \infty$, entre outros problemas que foram elencados no mesmo artigo.

Dessa forma, nosso principal objetivo neste trabalho foi apresentar outra extensão vetorial do Teorema de Bessaga e Pełczyǹski (Teorema 1), e a partir daí estudar as principais consequências de tal extensão, como por exemplo responder alguns dos problemas que ficaram em aberto em [24].

Para isso, introduzimos o conceito de *quociente* ω_1 de um espaço de Banach X e provamos a partir daí o seguinte teorema:

Teorema 4. *Seja X um espaço de Banach possuindo um quociente ω_1 uniformemente convexo. Então, para todos espaços métricos infinitos compactos K_1 e K_2,*

$$C(K_1, X) \sim C(K_2, X) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

Com este resultado classificamos, a menos de isomorfismo, alguns espaços $C(K, Y \oplus \ell_p(\Gamma))$, $1 < p \leq \infty$ e Γ não enumerável. Em particular, conseguimos a classificação isomorfa de certos espaços $C(L)$ envolvendo espaços compactos de Hausdorff de peso topológico infinito grande. Por exemplo, se $L = K \times (S \oplus \beta\Gamma)$ ou $L = S \oplus (K \times \beta\Gamma)$, onde $\beta\Gamma$ é a compactificação de Stone-Cech de um conjunto discreto infinito Γ e S é um espaço compacto de Hausdorff disperso ou um espaço compacto de Hausdorff arbitrário possuindo peso topológico estritamente menor que $2^{|\Gamma|}$.

Uma outra consequência que também obtemos foi obter a seguinte lei de cancelamento com relação aos espaços $C(K, X)$: suponha que $1 < p < 2$ e Γ e Λ conjuntos infinitos satisfazendo $|\Lambda| < 2^{|\Gamma|}$. Então, para todos espaços compactos métricos infinitos K_1, K_2, K_3 e K_4, são equivalentes as seguintes afirmações:

(a) $C(K_1, \ell_\infty(\Gamma)) \oplus C(K_2, \ell_p(\Lambda)) \sim C(K_3, \ell_\infty(\Gamma)) \oplus C(K_4, \ell_p(\Lambda))$.

(b) $C(K_1) \sim C(K_3)$ e $C(K_2) \sim C(K_4)$.

Observe que quando $1 < p < 2$, $\Gamma = \Lambda = \mathbb{N}$, e K_1, K_2, K_3 e K_4 são enumeráveis, obtemos a lei de cancelamento

$$C(K_1, \ell_\infty) \oplus C(K_2, \ell_p) \sim C(K_3, \ell_\infty) \oplus C(K_4, \ell_p) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_3) \text{ e } C(K_2) \sim C(k_4),$$

o que responde parcialmente a um dos problemas em aberto de [24], gerado pelo Teorema 3.

Ainda, generalizamos no Capítulo 4 o Teorema 2 no seguinte sentido:

Teorema 5. *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito, Y um espaço de Banach e $\omega \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$. Se $C([0, \alpha], X \oplus Y) \sim C([0, \beta], X \oplus Y)$, então*

$$X \hookrightarrow Y^n, \text{ para algum } 1 \leq n < \omega \text{ ou } C([0, \alpha]) \sim C([0, \beta]).$$

Este teorema, além de fornecer a solução para outros problemas que ficaram em aberto em [24] nos ajudou a provar o seguinte teorema de *quase-dicotomia* envolvendo espaços de Banach $C([0, \alpha], X)$ de todas as funções contínuas definidas no intervalo de ordinais $[0, \alpha]$ com a norma do supremo:

Teorema 6. *Sejam X e Y espaços de Banach de cotipo finito, então pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira*

(1) Existe um ordinal finito n tal que ou $C([0, n], X)$ contém uma cópia de Y ou $C([0, n], Y)$ contém uma cópia de X.

(2) Para quaisquer ordinais infinitos enumeráveis α, β, ξ e η, são equivalentes

(a) $C([0, \alpha], X) \oplus C([0, \xi], Y)$ é isomorfo a $C([0, \beta], X) \oplus C([0, \eta], Y)$.

(b) $C([0, \alpha])$ é isomorfo a $C([0, \beta])$ e $C([0, \xi])$ é isomorfo a $C([0, \eta])$.

Este resultado é o melhor possível no sentido que ele não pode ser estendido para ordinais não enumeráveis. Este resultado também generaliza o Teorema 3 acima, provado em [24].

No último capítulo vamos estudar algumas distorções de isomorfismos positivos entre reticulados de Banach $C([0,\omega])$ e $C([0,\omega\cdot k])$, onde $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. A motivação deste último capítulo veio de um resultado de Cengiz provado em 1992 [8].

Dados dois espaços de Banach X e Y, denotaremos

$$d_+(X,Y)=\inf\{||T||\cdot||T^{-1}||\,\text{tal que }\ T:X\to Y\ \text{ é positivo}\}.$$

Com isso provamos o seguinte teorema:
Teorema 7 *Para todo $k\geq 2$, $d_+(C([0,\omega\cdot k]),C([0,\omega]))\leq k+\sqrt{(k-1)(k+3)}$.*

Percebemos que d_+ "não é simétrica". Dessa forma, sendo X e Y dois reticulados de Banach, denotamos

$$d_r(X,Y)=\min\{d_+(X,Y),\,d_+(Y,X)\},$$

e então provamos o teorema abaixo:

Teorema 8 *Para todo $k\geq 2$, $d_r(C([0,\omega]),C([0,\omega\cdot k]))\leq 2+\sqrt{5}$.*

Finalmente, sendo $d(X,Y)$ a distância de Banach-Mazur entre dois reticulados de Banach X e Y, mostramos que existem reticulados X e Y tais que $d(X,Y)<d_r(X,Y)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições, resultados e notações que serão utilizados ao longo do nosso trabalho.

1.1 Primeiros conceitos e resultados

Definição 1.1 Seja X um espaço de Banach. Para $1 \leq p < \infty$, o espaço $\ell_p(X) = (X \oplus X \oplus ...)_p$ é chamado de *soma direta infinita de X no sentido de ℓ_p*, e consiste de todas as sequências $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ com valores em X tais que $\{||x_n||\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$, com a norma

$$||x|| = ||(||x_n||)_{n=1}^{\infty}||_p.$$

Definição 1.2 Seja X um espaço de Banach. Definimos a *soma direta infinita de X no sentido de c_0*, denotada por $c_0(X) = (X \oplus X \oplus ...)_{c_0}$ o espaço de todas as sequências $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ com valores em X tais que $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n|| = 0$, com a norma

$$||x|| = \max_{1 \leq n < \infty} ||x_n||.$$

Definição 1.3 Sejam X um espaço de Banach e K um espaço métrico compacto de Hausdorff. Vamos denotar por $C(K, X)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas definidas em K e com valores em X, munidas com a norma do supremo. Ou seja,

$$C(K, X) = \{f : K \to X \ : f \text{ é contínua em } X\},$$

munida da norma $||f|| = \sup\limits_{x \in K} ||f(x)||$. Quando $X = \mathbb{R}$ vamos denotar este espaço simplesmente por $C(K)$.

Definição 1.4 Dizemos que dois espaços topológicos X e Y são *homeomorfos*, e escrevemos $X \approx Y$, se existir uma bijeção $\varphi : X \to Y$ tal que φ e φ^{-1} são contínuas. Nesse caso a aplicação φ chama-se um *homeomorfismo*.

Definição 1.5 Dados X e Y espaços normados. Dizemos que X e Y são *isomorfos*, e escrevemos $X \sim Y$, quando existir $T : X \to Y$ transformação linear contínua bijetora com inversa também contínua. Nesse caso a aplicação T chama-se um *isomorfismo*.

Definição 1.6 Dizemos que dois espaços de Banach X e Y são *isométricos*, e escrevemos $X = Y$, se existir $T : X \to Y$ isomorfismo tal que, $\forall x \in X$, tem-se $||Tx|| = ||x||$.
Neste caso, dizemos que a aplicação T é uma *isometria*.

Notação. Se K e S são espaços topológicos, vamos denotar por $K \oplus S$ e $K \times S$, respectivamente, a soma topológica e o produto topológico entre K e S. Dados X e Y espaços de Banach, vamos indicar por $X \oplus Y$ o produto cartesiano entre X e Y.

O próximo conceito será muito importante em nosso trabalho, e pode ser encontrado, por exemplo, em [38], página xii.

Definição 1.7 Dados X e Y espaços de Banach. Se existir uma transformação linear contínua e sobrejetora $T : X \to Y$, dizemos que Y é *isomorfo a um quociente de* X ou que X *possui um quociente isomorfo a* Y, e escrevemos $X \twoheadrightarrow Y$. Ou seja, $\exists T : X \to Y$ linear contínua e sobrejetora tal que $Y \sim \frac{X}{\ker T}$.

Definição 1.8 Sejam X um espaço de Banach e Y e Z dois subespaços fechados de X. Dizemos que X é *soma direta* de Y e Z, e escrevemos $X = Y \oplus Z$, se $Y \cap Z = \{0\}$ e $X = Y + Z$.

Definição 1.9 Sejam X e Y dois espaços de Banach. Vamos dizer que Y *possui uma cópia de* X, e vamos denotar isto por $X \hookrightarrow Y$, quando X for isomorfo a um subespaço de Y.

Os símbolos $X \not\hookrightarrow Y$, $X \not\twoheadrightarrow Y$ e $X \not\sim Y$ significam, respectivamente, que Y não possui uma cópia de X, X não possui um quociente isomorfo a Y e X não é isomorfo a Y.

Teorema 1.10 *Sejam K_1 e K_2 espaços topológicos compactos, X e Y espaços de Banach. Então:*

(a) $K_1 \approx K_2 \Leftrightarrow C(K_1) = C(K_2)$.

(b) $C(K_1 \times K_2) = C(K_1, C(K_2))$.

(c) $X \sim Y \Rightarrow C(K_1, X) \sim C(K_1, Y)$.

(d) $C(K_1) \sim C(K_2) \Rightarrow C(K_1, X) \sim C(K_2, X)$.

(e) $C(K_1, X \oplus Y) = C(K_1, X) \oplus C(K_1, Y)$.

Demonstração. A demonstração dos itens de (a) até (d) pode ser encontrada em [52], respectivamente, nas páginas 131, 128, 376 e 376. Já a demonstração de (e) segue da definição de $X \oplus Y$ munido da norma do supremo.

□

Proposição 1.11 *O espaço c_0 não é isomorfo a nenhum quociente de ℓ_∞.*

Demonstração. Ver [19], página 402.

□

Teorema 1.12 *Sejam X e Y dois espaços de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Então X ou Y possui um subespaço isomorfo a ℓ_p se, e somente se, $X \oplus Y$ possui um subespaço isomorfo a ℓ_p.*

Demonstração. Ver Teorema 1 em [51], página 107.

□

Teorema 1.13 *Sejam X e Y dois espaços de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Então X ou Y possui um quociente isomorfo a ℓ_p se, e somente se, $X \oplus Y$ possui um quociente isomorfo a ℓ_p.*

Demonstração. Ver Teorema 2 em [51], página 108.

□

Definição 1.14 Dados dois espaços de Banach X e Y, o espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço vetorial de todos os operadores lineares limitados de X em Y, munido da norma

$$||T|| = \sup\{||Tx||_Y \, : \, x \in B_X\}.$$

O operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é chamado *operador linear compacto* se $\overline{T(B_X)}$ for compacto em Y.

Teorema 1.15 *Sejam X um espaço de Banach e $T : c_0 \to X$ um operador linear limitado. Se T não for compacto, então existe um subespaço Z de c_0 tal que Z é isomorfo a c_0 e $T|_Z$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Ver Teorema 2 em [3].

□

Proposição 1.16 *Seja $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que T é um isomorfismo. Se $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ é tal que*

$$||T - L|| \leq \frac{1}{||T^{-1}||},$$

então L também é um isomorfismo.

Demonstração. Ver [16], Lema 1, página 584.

□

Proposição 1.17 *Se X é um espaço de Banach separável então X é isometricamente isomorfo a um quociente de ℓ_1.*

Demonstração. Ver [1], página 36.

□

Proposição 1.18 *Se $1 \leq p \neq q < \infty$, então ℓ_q não possui cópia de ℓ_p.*

Demonstração. Ver [33], Teorema 26, página 142.

□

Proposição 1.19 *Sejam $1 < p < \infty$, e $\mathfrak{c}$ a cardinalidade do contínuo. Então ℓ_∞ não possui cópia de $\ell_p(\mathfrak{c})$.*

Demonstração. Ver [54], página 48.

□

Proposição 1.20 *Para $1 \leq p \leq 2$, $\ell_q \hookrightarrow L_p$ se, e somente se, $p \leq q \leq 2$.*

Demonstração. Ver o Teorema 6.4.19 em [1], página 160.

□

Definição 1.21 Seja X um espaço de Banach. O *dual* de X, denotado por X^*, é o espaço de todos os funcionais lineares definidos em X com valores num corpo $\mathbb{K}$.

Em [33], página 05, temos apresentadas as relações elementares de dualidade:

$$c_0^* = \ell_1;\ \ell_1^* = \ell_\infty;\ \text{ e para } 1 \leq p, q < \infty \text{ tais que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ temos } \ell_p^* = \ell_q.$$

Proposição 1.22 *Se K é um espaço métrico compacto de Hausdorff, então o dual de $C(K)$ não contém cópia de ℓ_q, se $q > 2$.*

Demonstração. Sendo K compacto métrico de Hausdorff, segue de [33], página 20, que $C(K)^* = L_1(\mu)$, para uma medida finita positiva. Mais ainda, como $q > 2$, segue da Proposição 1.20 que $\ell_q \not\hookrightarrow L_1(\mu) = C(K)^*$, como desejado.

$\square$

Proposição 1.23 *Sejam X e Y espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$ tais que $\ell_p(Y)$ possui uma cópia de X. Então X possui uma cópia de ℓ_p ou existe $n \in \mathbb{N}$ tal que Y^n possui uma cópia de X.*

Demonstração. Ver [6].

$\square$

Proposição 1.24 *Sejam F e Z espaços de Banach, com Z reflexivo. Então, Z é isomorfo a um subespaço de F^* se, e somente se, existir uma aplicação linear contínua $T : F \to Z^*$ sobrejetora.*

Demonstração. Ver [46], Observação 2, página 181.

$\square$

Proposição 1.25 *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $X \twoheadrightarrow Y$, então $Y^* \hookrightarrow X^*$.*

Demonstração. Veja [38], página xii.

$\square$

Proposição 1.26 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear compacto. Então, $T(X)$ é separável.*

Demonstração. Ver [18], página 679.

$\square$

Para os próximos resultados, lembramos que um espaço topológico K é *disperso* se qualquer subconjunto não vazio de K possuir pontos isolados.

Proposição 1.27 *Se K é um espaço compacto disperso de Hausdorff, então $C(K)^*$ é isomorfo a $\ell_1(K)$.*

Demonstração. Ver [52], Corolário 19.7.7, página 338.

$\square$

Proposição 1.28 *Seja X um espaço de Banach que não contém cópia de c_0. Então, todo operador $T : C(K) \to X$ é fracamente compacto.*

Demonstração. Ver [13], Teorema 15, página 159.

$\square$

Proposição 1.29 *Seja K um espaço compacto disperso. Então, todo operador fracamente compacto de $C(K)$ em um espaço de Banach X é um operador compacto.*

Demonstração. Ver [18], página 647.

□

Combinando as Proposições 1.28 e 1.29, obtemos o resultado:

Proposição 1.30 *Sejam X um espaço de Banach tal que X não possui cópia de c_0 e K um espaço compacto disperso. Então, todo operador linear $T : C(K) \to X$ é compacto.*

A Definição e a proposição a seguir encontram-se na referência [9]. Elas serão importantes nos estudos do Capítulo 2.

Definição 1.31 Um espaço de Banach X é dito ser *uniformemente convexo* se $\forall \varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon \leq 2$, existir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$||x_1|| = ||x_2|| = 1 \text{ e } ||x_1 - x_2|| \geq \varepsilon \Rightarrow ||x_1 + x_2|| \leq 2(1 - \delta).$$

Observamos que os espaços euclidianos de todas as dimensões e os espaços de Hilbert são alguns exemplos de espaços uniformemente convexos. Isto segue da *identidade do paralelogramo* que vale nestes espaços:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Proposição 1.32 *O espaço de Banach ℓ_p, com $p \in (1, +\infty)$, é uniformemente convexo.*

Demonstração. Ver [9], página 403.

□

Notação. Seja Γ um espaço topológico discreto. $\beta\Gamma$ indicará o compactificado de Stone-Cech de Γ.

Observação 1.33 Um resultado em [36] nos diz que $\ell_\infty(\mathbb{N})$ e $C(\beta\mathbb{N})$ são isométricos, ou seja, $\ell_\infty(\mathbb{N}) = C(\beta\mathbb{N})$. O mesmo vale quando substituirmos $\mathbb{N}$ por um conjunto infinito enumerável Γ qualquer, ou seja, vale a isometria $\ell_\infty(\Gamma) = C(\beta\Gamma)$. Isto porque o compacto $\beta\Gamma$ é caracterizado da seguinte forma: toda função limitada (note que toda função em Γ é contínua, pois Γ é discreto, e portanto elemento de ℓ_∞) pode ser estendida a uma função contínua de $\beta\Gamma$ (logo, um elemento de $C(\beta\Gamma)$ com a mesma norma). Esta extensão produz uma isometria entre $\ell_\infty(\Gamma)$ e $C(\beta\Gamma)$.

Ainda, dado K um espaço métrico compacto e observando que $\beta\mathbb{N}$ é um compacto, pelo Teorema 1.10 - item (b), valem as isometrias

$$C(K \times \beta\mathbb{N}) = C(K, C(\beta\mathbb{N})) = C(K, \ell_\infty).$$

Definição 1.34 Para cada número cardinal infinito $\mathfrak{m}$, $\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}$ denota o *cubo de Cantor* de peso $\mathfrak{m}$, i.e., o produto de $\mathfrak{m}$ cópias do espaço discreto de dois pontos $\{0,1\}$ munido com a topologia do produto.

Lema 1.35 *Seja Γ um conjunto infinito de cardinalidade $|\Gamma|$. Então, existe um operador linear limitado $T : \ell_\infty(\Gamma) \to \ell_2(\mathbf{2}^{|\Gamma|})$ sobrejetor.*

Demonstração. Ver a Observação 02 em [46], página 203.

$\square$

Em particular, quando $\Gamma = \mathbb{N}$, e tendo em vista que $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, o resultado acima nos dá o seguinte:

Lema 1.36 *O espaço ℓ_∞ possui um quociente isomorfo a $\ell_2(\mathfrak{c})$.*

Proposição 1.37 *Seja $\mathfrak{m}$ um número cardinal infinito. Então, $L_1(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}})$ contém um subespaço isomorfo a $\ell_2(\mathfrak{m})$.*

Demonstração. Ver [46], Proposição 1.5.

$\square$

Proposição 1.38 *Seja $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ um número cardinal infinito. O espaço de Banach $C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}})$ não possui cópia de $\ell_p(\Gamma)$, onde $1 < p < \infty$ e Γ é um conjunto não enumerável.*

Demonstração. Ver [44], Proposição 8.11, página 46.

$\square$

A definição a seguir é encontrada por exemplo em [30] e [31]. Ela será usada no Capítulo 4.

Definição 1.39 Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que Y é *finitamente representável* em X se para todo $\varepsilon > 0$ e todo subespaço F de dimensão finita de Y, existir um isomorfismo linear T de F sobre $T(F) \subset X$ tal que $||T|| \cdot ||T^{-1}|| < 1 + \varepsilon$.

O Teorema 9.14 presente em [19] nos fornece alguns exemplos de espaços finitamente representáveis: ℓ_2 é finitamente representável em todo espaço de Banach de dimensão infinita; todo espaço de Banach é finitamente representável em c_0, e se X for um espaço de Banach, então X^{**} é finitamente representável em X.

Definição 1.40 Uma sequência $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach X é chamada de *sequência básica* se $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de $\overline{\text{span}}\{e_i\}$.

Definição 1.41 ([18], Fato 4.22, página 192) Sejam $\{e_i\}$ uma sequência básica de um espaço de Banach X e $\{f_i\}$ uma sequência em um espaço de Banach Y. Então, $\{f_i\}$ é uma sequência básica equivalente a $\{e_i\}$ se, e somente se, existirem constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que para quaisquer escalares $a_1, ..., a_m$,

$$K_1||\sum_{i=1}^{m} a_i e_i||_X \leq ||\sum_{i=1}^{m} a_i f_i||_Y \leq K_2||\sum_{i=1}^{m} a_i e_i||_X.$$

A seguir vamos lembrar do enunciado do Axioma de Martin (veja [48]), que será usado em um resultado do Capítulo 3.

Definição 1.42 Seja K um espaço compacto de Hausdorff. Dizemos que K satisfaz a *countable chain condition*, ou simplesmente que K tem a *ccc*, se toda família de abertos não vazios dois a dois disjuntos de K tem cardinalidade menor do que $\aleph_1$.

Hipótese do Contínuo. ([32], página 37) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Axioma de Martin. ([48], página 15) *Seja K um espaço compacto de Hausdorff que tem a ccc. Então K não pode ser escrito da forma*

$$K = \bigcup_{i \leq \alpha} F_\alpha,$$

onde $\alpha < 2^{\aleph_0}$ é um cardinal e cada F_i é raro (i.e., o interior de $\overline{F}_i$ é vazio).

1.2 Alguns resultados sobre o produto tensorial injetivo

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados envolvendo o produto tensorial injetivo que serão usados em nosso trabalho. Para mais detalhes, ver por exemplo [10] ou [18], Capítulo 16. Como é usual, denotamos por $X \otimes_\varepsilon Y$ o produto tensorial entre dois espaços de Banach X e Y, munido com a norma injetiva $\varepsilon(u)$, de $u \in X \otimes Y$, definida por

$$\varepsilon(u) = \sup\{|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot \psi(y_i)| \,:\, \varphi \in B_{X^*} \text{ e } \psi \in B_{Y^*}\},$$

onde $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ é uma representação qualquer de u e B_{X^*} e B_{Y^*} denotam, respectivamente, as bolas unitárias dos duais de X e de Y, e o completamento por $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$, chamado de *produto tensorial injetivo*, entre X e Y. Assim, temos os resultados abaixo.

Proposição 1.43 *Se K é um espaço métrico compacto e X um espaço de Banach, então*

$$C(K)\hat{\otimes}_\varepsilon X = C(K, X).$$

Demonstração. Ver [10], página 48.

$\square$

Proposição 1.44 *Se X e Y são dois espaços de Banach separáveis, então $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ é separável.*

Demonstração. Ver [4], Lema 2.2 (ii).

$\square$

Proposição 1.45 *Sejam X, Y e Z espaços de Banach. Então $(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y)\hat{\otimes}_\varepsilon Z \sim X\hat{\otimes}_\varepsilon (Y\hat{\otimes}_\varepsilon Z)$.*

Demonstração. Ver [17], Corolário 8.1.7, página 141.

$\square$

Proposição 1.46 *Sejam K_1 e K_2 espaços topológicos compactos e X um espaço de Banach. Então*

$$C(K_1 \times K_2, X) \sim C(K_1, C(K_2, X)).$$

Demonstração. Usando o Teorema 1.10 e as Proposições 1.43 e 1.45, temos que

$$C(K_1 \times K_2, X) = C(K_1 \times K_2)\hat{\otimes}_\varepsilon X = C(K_1, C(K_2))\hat{\otimes}_\varepsilon X =$$

$$= (C(K_1)\hat{\otimes}_\varepsilon C(K_2))\hat{\otimes}_\varepsilon X \sim C(K_1)\hat{\otimes}_\varepsilon (C(K_2)\hat{\otimes}_\varepsilon X) =$$

$$= C(K_1)\hat{\otimes}_\varepsilon C(K_2, X) = C(K_1, C(K_2, X)).$$

$\square$

Definição 1.47 Um operador linear sobrejetor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é chamado *sobrejeção métrica* se

$$||T(x)|| = \inf\{||y|| : T(y) = T(x)\}.$$

Proposição 1.48 *Sejam X e Y espaços de Banach e K um espaço topológico compacto. Seja $id : C(K) \to C(K)$ o operador identidade. Se $Q : X \twoheadrightarrow Y$ é uma sobrejeção métrica, então*

$$id\,\hat{\otimes}_\varepsilon Q : C(K)\hat{\otimes}_\varepsilon X \to C(K)\hat{\otimes}_\varepsilon Y$$

também é uma sobrejeção métrica.

Demonstração. Ver [10], página 50.

$\square$

1.3 Alguns resultados envolvendo números ordinais

Nesta seção vamos apresentar brevemente os principais resultados envolvendo ordinais que serão usados nos próximos capítulos. Como antes, referenciamos as fontes onde as provas podem ser encontradas.

Definição 1.49 Dado α um número ordinal qualquer, vamos denotar por $[0, \alpha]$ o intervalo de números ordinais $\{\xi : 0 \leq \xi \leq \alpha\}$ munido com a topologia da ordem.

Vamos denotar o primeiro número ordinal infinito enumerável por ω e o primeiro número ordinal não enumerável por ω_1. Com estas notações, vamos trabalhar com números ordinais entre ω e ω_1.

Teorema 1.50 *(Mazurkiewicz - Sierpiński) Seja K um espaço métrico compacto infinito enumerável. Então existe um ordinal α, $\omega \leq \alpha < \omega_1$, tal que K é homeomorfo ao intervalo de ordinais* $[0, \alpha]$.

Demonstração. Ver [42], Teorema 1, página 21.

□

O teorema a seguir apresenta resultados obtidos por Bessaga e Pełczyński (item (i)) e Milutin (item (ii)).

Teorema 1.51 *Sejam $\omega \leq \alpha < \beta < \omega_1$ ordinais e K um espaço métrico compacto. Então:*

(i) $C([0, \alpha]) \sim C([0, \beta]) \Leftrightarrow \beta < \alpha^{\omega}$;

(ii) $C([0, 1]) \sim C(K) \Leftrightarrow K$ *for não enumerável.*

Demonstração. Para (i) veja [5]. Para (ii) veja [43].

□

Teorema 1.52 *Seja K um espaço métrico compacto infinito enumerável. Então $C(K)$ é isomorfo a $C([0, \omega^{\omega^{\alpha}}])$, para algum ordinal enumerável $\alpha \geq 0$.*

Demonstração. Ver [47], Teorema 2.14.

□

Proposição 1.53 *Sejam $0 \leq \gamma, \theta < \omega_1$, então $C([0, \omega^{\omega^{\gamma}}] \times [0, \omega^{\omega^{\theta}}]) \sim C([0, \omega^{\omega^{\max\{\gamma,\theta\}}}])$.*

Demonstração. Ver o Lema 2.4 em [2].

□

Notação. Para simplificar a notação, vamos denotar o espaço das funções contínuas do intervalo de ordinais $[0,\alpha]$, $\omega \leq \alpha < \omega_1$ em um espaço de Banach X, munido com a norma do supremo, i.e., $C([0,\alpha],X)$, simplesmente por X^α. Assim, por exemplo, temos $C([0,\alpha],\ell_p) = \ell_p^\alpha$. Esta notação será amplamente usada em nosso trabalho.

Definição 1.54 Dados $\omega \leq \alpha < \omega_1$ e X um espaço de Banach, X_0^α denota o conjunto de todas as funções de $C([0,\alpha],X)$ que se anulam em α, ou seja,

$$X_0^\alpha = \{f \in X^\alpha \,:\, f(\alpha) = 0\}.$$

Lema 1.55 *Sejam X um espaço de Banach e $\alpha \geq \omega$ um ordinal. Então $X^\alpha \sim X_0^\alpha$.*

Demonstração. Ver [5], página 55.

□

Lema 1.56 *Se $\omega \leq \alpha < \omega_1$ e $\alpha \leq \beta < \alpha^\omega$, então para um espaço de Banach arbitrário X temos $X^\alpha \sim X^\beta$.*

Demonstração. Ver [5], página 54.

□

Lema 1.57 *Seja $\omega \leq \alpha < \omega_1$. Então, para n arbitrário e X espaço de Banach, temos que $X^{\alpha n} \sim X^\alpha$. Tem-se também que $X^{\alpha\omega} \sim X^\alpha$.*

Demonstração. Ver [5], página 55.

□

Lema 1.58 *Dado X um espaço de Banach. Se $\omega \leq \alpha < \omega_1$ e $\beta < \alpha$, então*

$$X^{\alpha+\beta} \sim X^{\beta+\alpha} \sim X^\alpha.$$

Demonstração. Ver [5], página 55.

□

Teorema 1.59 *Sejam $\omega \leq \alpha < \omega_1$ e X um subespaço fechado de $C([0,\alpha])$. Então não existe nenhuma aplicação linear contínua sobrejetora de X sobre $C([0,\alpha^\omega])$.*

Demonstração. Ver [50], página 89.

□

Proposição 1.60 *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, Y uniformemente convexo, $Z \twoheadrightarrow Y$ e α um ordinal infinito enumerável tal que $\forall \beta < \alpha$, $Z^\beta \oplus X \not\twoheadrightarrow Y^\alpha$. Então $Z^\alpha \oplus X \not\twoheadrightarrow Y^{\alpha^\omega}$.*

Demonstração. Veja a Proposição 5.4 em [22].

□

Esta proposição pode ser reescrita como

Proposição 1.61 *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, Y uniformemente convexo tal que $Z \twoheadrightarrow Y$. Seja α um ordinal infinito enumerável tal que $Z^\alpha \oplus X \twoheadrightarrow Y^{\alpha^\omega}$. Então, $\exists \beta < \alpha$ tal que $Z^\beta \oplus X \twoheadrightarrow Y^\alpha$.*

No artigo [24] foi dada a definição de *fator maximal* de um espaço de Banach, que apresentaremos a seguir, bem como o teorema que segue, que trata de uma generalização do Teorema 1.51-(i) de Bessaga-Pełczyński.

Definição 1.62 Dizemos que um subespaço H de um espaço de Banach X é um *fator maximal* de X sempre que X for a soma direta de H e algum subespaço Y de X tal que toda soma finita Y^n de Y não contém cópia de H.

Teorema 1.63 *Seja X um espaço de Banach contendo algum fator maximal uniformemente convexo e α, β ordinais tais que $\omega \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$. Então*

$$C([0,\alpha], X) \sim C([0,\beta], X) \Leftrightarrow \beta < \alpha^\omega.$$

Demonstração. Ver o Teorema principal de [24].

□

Lema 1.64 *Sejam H e Y espaços de Banach tais que todo operador limitado de c_0 em H é compacto e Y não contém cópia de H. Então $H_0^\omega \not\twoheadrightarrow Y \oplus H$.*

Demonstração. Veja o Lema 2.2 em [24].

□

Teorema 1.65 *Sejam ξ um ordinal qualquer, Y um espaço de Banach e X um subespaço fechado de Y^ξ. Então ou X é isomorfo a um subespaço de Y^n para algum $1 \leq n < \omega$, ou X contém uma cópia de c_0 complementada em Y^ξ.*

Demonstração. Veja o Teorema 2.3 em [23].

□

Teorema 1.66 *Os espaços*

$$C([0,\omega_1]),\ C([0,\omega_1 \cdot 2]),\ ...,\ C([0,\omega_1 \cdot \omega])$$

são mutuamente não-isomorfos.

Demonstração. Ver [53], Teorema 2.

$\square$

Derivado de um conjunto. Se K é um espaço compacto de Hausdorff, o *derivado* de um subconjunto A de K é definido como o conjunto dos pontos limites de A. Então, uma sequência indutiva transfinita é definida da seguinte forma: $A^{(0)} = A$, $A^{(1)}$ é o derivado de A, $A^{(2)}$ é o derivado de $A^{(1)}$ e em geral suponha que $A^{(\alpha)}$ esteja bem definido para todos ordinais $\alpha < \beta$, se $\beta = \gamma + 1$, então $A^{(\beta)}$ é o derivado de $A^{(\gamma)}$, caso contrário $A^{(\beta)} = \cap_{\alpha<\beta} A^{(\alpha)}$.

Um resultado sobre espaços métricos envolvendo derivados que precisaremos usar no capítulo 4 é o enunciado abaixo:

Proposição 1.67 *Sejam E e F dois espaços métricos. Então, para todo ordinal infinito enumerável α e para todo $1 \leq n < \omega$,*

$$(E \times F)^{(\omega^\alpha n)} = \bigcup_{p+q=n} E^{(\omega^\alpha p)} \times F^{(\omega^\alpha q)}.$$

Demonstração. Ver [49], Lema 1, página 79.

$\square$

Lema 1.68 *Seja $\Gamma(\xi)$ o conjunto de todos os ordinais menores ou iguais a ξ. Para todo ordinal λ, tem-se que $\Gamma(\omega^\lambda)^{(\lambda)} = \{\omega^\lambda\}$. Ou seja, tem-se que $[0, \omega^\lambda]^{(\lambda)} = \{\omega^\lambda\}$.*

Demonstração. Ver [35], Lema 3, página 31.

$\square$

Seja X um espaço topológico. Se o derivado $X^{(\xi)}$ é finito e contém exatamente n pontos, o par (ξ, n) é chamado *sistema característico* de X.

Dessa forma, ainda em [35], temos o importante resultado, feito por Semadeni, que será usado no Capítulo 3:

Lema 1.69 *(Semadeni) Um espaço X primeiro-enumerável, disperso e compacto é metrizável. De fato, X é homeomorfo a $\Gamma(\omega^\gamma \cdot n)$, onde (γ, n) é o sistema característico de X e $\gamma < \Omega$, onde Ω é o ordinal inicial cujo número cardinal é não enumerável.*

Demonstração. Ver [35], Corolário 2, página 35.

$\square$

1.4 Espaços de Grothendieck e estoneanos

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados referentes ao espaços de Grothendieck e espaços estoneanos, que serão importantes no terceiro capítulo. Vamos começar com a definição de espaço de Grothendieck, que pode ser encontrada por exemplo em [13], pág. 179.

Definição 1.70 Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade de Grothendieck* se a convergência de sequências nas topologias fraca e fraca-estrela no seu dual X^* coincidem.

Convém observar que se X é um espaço de Banach reflexivo, então as topologias fraca e fraca-estrela coincidem no dual X^*. Logo, nesse caso X terá trivialmente a propriedade de Grothendieck. O exemplo acima é dos mais triviais de espaços de Grothendieck. O primeiro exemplo não-trivial de um espaço de Grothendieck foi dado por A. Grothendieck em [26]: *Se K é um espaço compacto de Hausdorff onde cada conjunto aberto tem o fecho aberto, então $C(K)$ é um espaço de Grothendieck.*

Outro exemplo de espaço de Grothendieck é dado no Teorema abaixo.

Teorema 1.71 *Em ℓ_∞^*, sequências fraca-estrela convergentes são fracamente convergentes. Ou seja, o espaço de Banach ℓ_∞ é um espaço de Grothendieck.*

Demonstração. Ver o Teorema 15 em [11], página 103.

□

Teorema 1.72 *Se $C(K)$ é um espaço de Grothendieck, então $C(K)$ não possui um quociente isomorfo a c_0.*

Demonstração. Ver [13], pág. 179.

□

Seguindo [21], escrevemos $\mathfrak{p}$ para o maior cardinal tendo a propriedade: se $\kappa < \mathfrak{p}$ e $(M_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é uma família de subconjuntos de $\mathbb{N}$ com $\cap_{\alpha \in F} M_\alpha$ infinito para todos os subconjuntos finitos F de κ, então existe um conjunto infinito $M \subset \mathbb{N}$ com $M \setminus M_\alpha$ finito para todo $\alpha < \kappa$.

Dessa forma, enunciamos a proposição abaixo, que será usada no Capítulo 2.

Proposição 1.73 *Se X é um espaço de Grothendieck não-reflexivo, então o seu dual X^* possui um subespaço isométrico a $L_1(\mathbf{2}^{\mathfrak{p}})$.*

Demonstração. Ver [28], página 511.

□

Também será útil em nosso trabalho apresentar a definição abaixo, encontrada por exemplo em [13], página 154.

Definição 1.74 Um espaço topológico S é chamado *estoneano* ou *extremamente desconexo* se o fecho de todo subconjunto aberto de S ainda for aberto.

Conforme o artigo [27], temos que os principais exemplos de espaços de Grothendieck não-reflexivos são os espaços $C(K)$, onde K é um espaço compacto estoneano. Por exemplo, dado Γ um conjunto discreto infinito, a compactificação de Stone-Cech $\beta\Gamma$ é um estoneano compacto e, portanto, $C(\beta\Gamma)$ é um espaço de Grothendieck não-reflexivo.

O teorema a seguir é devido a Rosenthal.

Teorema 1.75 *Se K é estoneano, então $C(K)$ possui um quociente isomorfo a ℓ_∞.*

Demonstração. Ver [13], pág. 156.

$\square$

1.5 Reticulados de Banach

Nesta seção vamos apresentar a definição de reticulado de Banach, pois precisaremos deste conceito para o Capítulo 5. Vamos começar apresentando a definição de conjunto ordenado.

Definição 1.76 Um conjunto não vazio M com uma relação $\leq$ é dito ser *ordenado* se

(a) $x \leq x$ para todo $x \in M$,

(b) $x \leq y$ e $y \leq x$ implicam em $x = y$,

(c) $x \leq y$ e $y \leq z$ implicam em $x \leq z$.

Definição 1.77 Seja S um subconjunto de um conjunto ordenado M. Um elemento $x \in M$ é chamado de um *limitante superior* de S se $y \leq x$ para todo $y \in S$. Do mesmo modo, um elemento $z \in M$ é chamado de um *limitante inferior* de S se $z \leq y$ para todo $y \in S$. O menor limitante superior de S é chamado *supremo* de S e é denotado por $\sup S$ e o maior limitante inferior de S é chamado de *ínfimo* de S e é denotado por $\inf S$.

Definição 1.78 Um espaço vetorial real E ordenado por uma relação de ordem $\leq$ é chamado de *espaço vetorial reticulado* se quaisquer dois elementos $x, y \in E$ possuem um supremo $x \vee y = \sup\{x, y\}$ e um ínfimo $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ e se valerem as propriedades:

(a) $x \leq y$ implica em $x + z \leq y + z$ para todos $x, y, z \in E$,

(b) $0 \leq x$ implica em $0 \leq tx$ para todo $x \in E$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

Sendo E um espaço vetorial reticulado e $x \in E$, o valor absoluto de x é definido por $|x| = x \vee -x$. Uma norma em um espaço vetorial reticulado E é chamada de *norma reticulada* se $|x| \leq |y|$ implicar em $||x|| \leq ||y||$, para $x, y \in E$.

Com os conceitos dados acima podemos apresentar a definição de reticulado de Banach:

Definição 1.79 Um *reticulado de Banach* é um espaço de Banach real X munido com uma ordenação $\leq$ tal que $(X, \leq)$ é um espaço vetorial reticulado e a norma em X é a norma reticulada.

Algumas propriedades dos reticulados de Banach podem ser encontradas, por exemplo, em [52], página 69 e também em [33], página 20. Um resultado importante que será usado no Capítulo 5 é a Proposição abaixo.

Proposição 1.80 *Sendo K um espaço métrico compacto de Hausdorff, o espaço de Banach $C(K)$ é um espaço reticulado de Banach.*

Demonstração. Ver [33], página 21.

$\square$

Capítulo 2

Classificações isomorfas de espaços $C(K, X)$ para espaços métricos compactos K e X com um quociente ω_1 uniformemente convexo

2.1 Introdução

O resultado central sobre classificação isomorfa de espaços separáveis $C(K)$, com K espaço métrico compacto, que temos, é o Teorema de Milutin (Teorema 1.51 - (ii)). Lembrando, tal resultado estabelece que se K é um espaço métrico compacto não enumerável, então

$$C(K) \sim C(\mathbf{2}^{\aleph_0}). \tag{2.1}$$

No caso onde K é um espaço métrico compacto e enumerável, um teorema clássico de Mazurkiewicz e Sierpiński (Teorema 1.50) afirma que tal K é homeomorfo a um intervalo de ordinais $[0, \alpha]$, para algum ordinal $\alpha < \omega_1$.

Já a classificação isomorfa dos espaços $C([0, \alpha])$ foi dada por Bessaga e Pełczyǹski em 1960 [5] da seguinte forma (Teorema 1.51 - (i)): sejam ξ e η dois ordinais tais que $\omega \leq \xi \leq \eta < \omega_1$. Então

$$C([0, \xi]) \sim C([0, \eta]) \Leftrightarrow \eta < \xi^{\omega}. \tag{2.2}$$

No caso não-métrico a classificação isomorfa dos espaços $C(K)$ parece impossível. No entanto, existem algumas classificações isomorfas quando K é um membro de certa classe concreta de compactos. Por exemplo, o Teorema de Milutin (2.1) foi generalizado para alguns espaços compactos não-metrizáveis. Recordamos que o *peso topológico* de um espaço K é o menor cardinal $\mathfrak{m}$ tal que existe uma base de abertos de K de cardinalidade $\mathfrak{m}$. Então, Pełczyǹski provou em [44], Teoremas 8.8 e 8.9, que se K é ou um produto de uma família de espaços métricos ou um grupo topológico com peso topológico infinito $\mathfrak{m}$, então

$$C(K) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}). \tag{2.3}$$

Ditor [14] estendeu a classe de espaços compactos de Hausdorff K satisfazendo (2.3) para alguns cardinais infinitos $\mathfrak{m}$, veja também o artigo de Ditor e Haydon [15].

Neste capítulo estamos principalmente interessados em obter extensões vetoriais das classificações isomorfas dos espaços $C(K)$ mencionados em (2.1) e (2.2) e que podem ser usados para dar novas classificações isomorfas de espaços não separáveis $C(K)$, que serão apresentadas no capítulo seguinte.

Inicialmente, focaremos nossa atenção em uma classe de espaços $C(K,X)$ que também permite-nos obter a classificação isomorfa de certos espaços envolvendo os espaços (2.2) e (2.3). Mais precisamente, vamos considerar os espaços da forma

$$C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \oplus ([0,\xi] \times K)), \tag{2.4}$$

onde $\omega \leq \xi < \omega_1$.

A motivação para estudar a classificação isomorfa destes espaços vem do fato que para quaisquer cardinais $\mathfrak{m}$, ordinais $\omega \leq \xi < \omega_1$ e espaços compactos de Hausdorff K, temos

$$C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \oplus [0,\xi] \oplus K) \sim C((\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \times [0,\xi]) \oplus K) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \oplus K), \tag{2.5}$$

e

$$C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \times [0,\xi] \times K) \sim C((\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \oplus [0,\xi]) \times K) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \times ([0,\xi] \oplus K)) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \times K). \tag{2.6}$$

Então, em contraste com (2.2), a classe de isomorfismos de cada um dos espaços (2.5) ou (2.6) é reduzida a um conjunto com um único elemento. Não obstante, como veremos neste capítulo e no seguinte, a mesma coisa não acontece com as classes de isomorfismos dos espaços (2.4) quando K é a compactificação de Stone-Cech $\beta\Gamma$ de um conjunto discreto infinito Γ com cardinalidade $|\Gamma|$ satisfazendo $\mathfrak{m} < 2^{|\Gamma|}$ (Corolário 3.1) ou K é um espaço estoneano infinito e $\mathfrak{m} < \mathfrak{c}$ (Corolário 3.9).

O ponto de partida de nossa pesquisa é o fato de que recentemente em [24] foi provada uma extensão de (2.2) para o caso vetorial. Ou seja, lembrando da definição 1.62 de fator maximal, o principal resultado de [24] é o teorema abaixo.

Teorema 2.1 *Sejam X um espaço de Banach contendo algum fator maximal uniformemente convexo e ordinais $\omega \leq \xi \leq \eta < \omega_1$. Então,*

$$C([0,\xi],X) \sim C([0,\eta],X) \Leftrightarrow \eta < \xi^{\omega}.$$

De fato, o Teorema 2.1 pode ser aplicado para obter as classificações isomorfas de muitos espaços $C([0,\xi],X)$, onde $\omega \leq \xi < \omega_1$. Em particular, pela Proposição 1.38, temos que $C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}})$ não contém cópia dos clássicos espaços de Banach uniformemente convexos $\ell_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, sempre que Γ for não enumerável, e além disso,

$$C([0,\xi],C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}})) \sim C([0,\xi] \times \mathbf{2}^{\mathfrak{m}}) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}), \tag{2.7}$$

para todo ordinal $\omega \leq \xi < \omega_1$ e cardinal infinito $\mathfrak{m}$. Disso, segue pelo Teorema 2.1 que a classificação isomorfa dos seguintes espaços é a mesma dos espaços $C([0,\xi])$, $\omega \leq \xi < \omega_1$, mencionada em (2.2)

$$C([0,\xi],C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}) \oplus \ell_p(\Gamma)) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}) \oplus C([0,\xi],\ell_p(\Gamma)). \tag{2.8}$$

Por outro lado, observe que quando Γ é finito, os espaços (2.8) são isomorfos a $C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}})$, para todo cardinal infinito $\mathfrak{m}$ e para todo ordinal $\omega \leq \xi < \omega_1$.

Então, é natural procurar pela classificação isomorfa completa dos espaços (2.8). Isto é, considerar os casos restantes onde Γ é um conjunto infinito enumerável ou quando $p = \infty$. Afirmamos que, neste último caso, os espaços (2.8) são isomorfos aos seguintes espaços tendo a mesma estrutura daqueles listados em (2.4).

$$C([0,\xi] \times (\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \oplus \beta\Gamma)) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \oplus ([0,\xi] \times \beta\Gamma)),$$

onde $\beta\Gamma$ é a compactificação de Stone-Cech de um conjunto discreto Γ. De fato, como $\ell_\infty(\Gamma) = C(\beta\Gamma)$, com ajuda do Teorema 1.10, temos

$$C([0,\xi],C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}) \oplus \ell_\infty(\Gamma)) \sim C([0,\xi],C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}) \oplus C(\beta\Gamma)) \sim C([0,\xi],C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \oplus \beta\Gamma)) \sim C([0,\xi] \times (\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \oplus \beta\Gamma)),$$

e

$$C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}) \oplus C([0,\xi],\ell_\infty(\Gamma)) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}) \oplus C([0,\xi],C(\beta\Gamma)) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}) \oplus C([0,\xi] \times \beta\Gamma) \sim C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}} \oplus ([0,\xi] \times \beta\Gamma)).$$

Logo, por (2.8) segue o isomorfismo desejado.

Nossa contribuição para responder a esta questão é dada pelos Teoremas 2.2 e 2.3. Esses teoremas serão provados no próximo capítulo.

Teorema 2.2 *Sejam Y um espaço de Banach, $1 < p < \infty$ e Γ um conjunto infinito. Suponha que Y^* não contenha cópia de ℓ_q, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para todos espaços métricos infinitos compactos K_1 e K_2,*

$$C(K_1, Y \oplus \ell_p(\Gamma)) \sim C(K_2, Y \oplus \ell_p(\Gamma)) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

Como consequência, no caso onde $1 < p < 2$, como pela Proposição 1.22 o dual de cada espaço $C(K)$ não contém cópia de ℓ_q, para $q > 2$, a classificação isomorfa dos espaços (2.8) é um Corolário do Teorema 2.2. Isto fornece uma solução para o Problema 4.3.a deixado em [24], quando $1 < p < 2$ e K_1 e K_2 forem enumeráveis. Ou seja, sendo ξ um ordinal infinito enumerável, obtemos a classificação isomorfa dos espaços

$$C(\mathbf{2}^{\aleph_0}) \oplus C([0, \xi], \ell_p),\ 1 < p < 2.$$

A seguir, denotando por $|\Gamma|$ a cardinalidade de um conjunto Γ e recordando que a *densidade* de um espaço topológico F, denotada por dens F, é a menor cardinalidade de um subconjunto denso de F, o teorema abaixo fornece a classificação isomorfa dos espaços (2.8) quando $p = \infty$ e $\mathfrak{m} < 2^{|\Gamma|}$.

Teorema 2.3 *Sejam Y um espaço de Banach e Γ um conjunto infinito. Suponha que* $\operatorname{dens} Y < 2^{|\Gamma|}$. *Então, para todos espaços métricos infinitos compactos K_1 e K_2,*

$$C(K_1, Y \oplus \ell_\infty(\Gamma)) \sim C(K_2, Y \oplus \ell_\infty(\Gamma)) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

Em particular, pelo Teorema 2.3 obtemos a classificação isomorfa dos espaços (2.8) quando $\mathfrak{m} = |\Gamma| = \aleph_0$. Isto resolve o Problema 4.3.c deixado em [24], ou seja, a classificação isomorfa dos espaços

$$C(\mathbf{2}^{\aleph_0}) \oplus C([0, \xi], \ell_\infty).$$

Com relação ao Teorema 2.1, nossa principal melhoria técnica neste capítulo é substituir o fator maximal uniformemente convexo de X por um subespaço F de X que tenha um quociente uniformemente convexo. A motivação para isto vem de um exame da prova do Teorema 2 de [22]. Tal resultado estabelece que se E for o espaço de Banach uniformemente convexo introduzido por Figiel em [20] e $F = E^*$, então para quaisquer ordinais $\omega \leq \xi \leq \eta < \omega_1$ temos

$$C([0, \xi], C(\mathbf{2}^{\aleph_0}) \oplus F) \sim C([0, \eta], C(\mathbf{2}^{\aleph_0}) \oplus F) \Leftrightarrow \eta < \xi^\omega. \tag{2.9}$$

Para provar (2.9) foi mostrado que para todo $1 \leq n < \omega$,

$$C(\mathbf{2}^{\aleph_0}) \oplus F^n \not\twoheadrightarrow C([0,\omega], F). \tag{2.10}$$

Inspirados pelos argumentos acima, introduzimos o seguinte conceito.

Definição 2.4 Dizemos que um espaço de Banach Z é um *quociente* ω_1 de um espaço de Banach X se existirem subespaços F e Y de X tais que

(a) $X = Y \oplus F$,

(b) $F \twoheadrightarrow Z$,

(c) $C([0,\xi], Y) \oplus F^n \not\twoheadrightarrow C([0,\omega], Z)$, para todos $\omega \leq \xi < \omega_1$ e $1 \leq n < \omega$.

Observe que sendo Z um quociente ω_1 de um espaço de Banach X, ele é de fato um quociente pois

$$X = Y \oplus F \twoheadrightarrow F \twoheadrightarrow Z.$$

De acordo com (2.7) e (2.10) vemos que o dual do espaço de Figiel $E^* = F$ é um quociente ω_1 de $C(\mathbf{2}^{\aleph_0}) \oplus F$. Além disso, todo espaço de Banach F não possuindo um quociente isomorfo a c_0 é um quociente ω_1 de si mesmo. De fato, tomando $Y = \{0\}$ na Definição 2.4 e supondo, por absurdo, que F não é um quociente ω_1 de F, teremos então a negação do item (c) da referida definição, ou seja,

$$F^n \twoheadrightarrow C([0,\omega], F) \sim c_0(F) \twoheadrightarrow c_0,$$

para algum $1 \leq n < \omega$, e portanto pelo Teorema 1.13, c_0 é isomorfo a um quociente de F, que é um absurdo. Em particular, cada espaço uniformemente convexo é um quociente ω_1 de si mesmo. Por outro lado, observe que como pela Proposição 1.17 todo espaço de Banach X separável é isomorfo a um quociente de ℓ_1, segue da Definição 2.4 que ℓ_1 nunca é um quociente ω_1 de X.

Nosso principal resultado deste capítulo, que dá uma extensão vetorial do Teorema de Bessaga e Pełczyǹski, é o teorema abaixo.

Teorema 2.5 *Seja X um espaço de Banach possuindo um quociente ω_1 que é uniformemente convexo. Então, para todos espaços métricos infinitos compactos K_1 e K_2,*

$$C(K_1, X) \sim C(K_2, X) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

Além disso, se $X = Y \oplus F$ como na Definição 2.4, então

$$Y \oplus C(K_1, F) \sim Y \oplus C(K_2, F) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

2.2 A prova do resultado principal

O principal objetivo desta seção é provar o Teorema 2.5. Como foi apresentado no Capítulo 1, será conveniente denotar os espaços $C([0,\xi], X)$ por X^ξ. Vamos começar esta seção com uma observação e um lema que ajudarão na prova da Proposição 2.8, que será apresentada em seguida.

Observação 2.6 Suponha que $L : Y \to Z$ é um operador linear sobrejetor e denote $N = \ker L$. Então Z é isomorfo ao espaço quociente Y/N e de acordo com a Definição 1.47 é fácil verificar que o operador linear canônico sobrejetor de Y em Y/N é uma sobrejeção métrica. Então, de acordo com as Proposições 1.43 e 1.48, temos que para qualquer ordinal γ, existe uma sobrejeção métrica de Y^γ sobre $(Y/N)^\gamma$. Consequentemente, temos que Z^γ é isomorfo a um quociente de Y^γ, ou seja, $Y^\gamma \twoheadrightarrow Z^\gamma$.

Lema 2.7 *Sejam γ e θ ordinais tais que $\omega \leq \gamma < \theta$. Então, para qualquer espaço de Banach Z, tem-se que*

$$\mathbb{R}^\gamma \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\theta \Rightarrow Z^\gamma \sim Z^\theta.$$

Demonstração. Suponha que $C([0,\gamma]) \twoheadrightarrow C([0,\theta])$.
Primeiramente, vamos mostrar que $\theta < \gamma^\omega$. Por absurdo, suponha que $\theta \geq \gamma^\omega$. Então

$$C([0,\gamma]) \twoheadrightarrow C([0,\theta]) \twoheadrightarrow C([0,\gamma^\omega]).$$

Logo, obtemos que

$$C([0,\gamma]) \twoheadrightarrow C([0,\gamma^\omega]),$$

o que contradiz o Teorema 1.59. Logo, concluímos que $\theta < \gamma^\omega$.

Assim, determinamos que $\gamma < \theta < \gamma^\omega$ e então, pelo Lema 1.56 segue que para qualquer espaço de Banach Z vale que $Z^\gamma \sim Z^\theta$, donde segue o resultado.

□

A proposição a seguir constitui a chave para a prova do Teorema 2.5.

Proposição 2.8 *Sejam $\omega \leq \xi \leq \eta < \omega_1$ dois ordinais e F, Y e Z espaços de Banach, com Z uniformemente convexo. Suponha que*

(i) $F \twoheadrightarrow Z$;

(ii) $Y \oplus F^n \not\twoheadrightarrow Z^\omega$, *para todo* $1 \leq n < \omega$.

Então

$$Y \oplus F^\xi \twoheadrightarrow Z^\eta \Longrightarrow \eta < \xi^\omega.$$

Demonstração. Defina os conjuntos de ordinais

$$I_1 := \{\theta : \omega \leq \theta < \omega_1 \text{ tal que } \mathbb{R}^\gamma \not\twoheadrightarrow \mathbb{R}^\theta, \forall \gamma < \theta\},$$

$$I_2 := \{\theta : \omega \leq \theta < \omega_1 \text{ tal que } Y \oplus F^\gamma \not\twoheadrightarrow Z^\theta, \forall \gamma < \theta\}.$$

Primeiramente mostraremos que $I_1 = I_2$.
Observe que $I_2 \subset I_1$ pois se $\mathbb{R}^\gamma \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\theta$, para algum $\gamma < \theta$, então pelo Lema 2.7 segue que $Z^\gamma \sim Z^\theta$. Além disso, como pela hipótese (i) $F \twoheadrightarrow Z$, pela Observação 2.6 segue que $F^\gamma \twoheadrightarrow Z^\gamma$. Então, temos que

$$Y \oplus F^\gamma \twoheadrightarrow F^\gamma \twoheadrightarrow Z^\gamma \sim Z^\theta,$$

ou seja,

$$Y \oplus F^\gamma \twoheadrightarrow Z^\theta, \text{ onde } \gamma < \theta.$$

Logo, $I_1^\complement \subset I_2^\complement$, ou seja, $I_2 \subset I_1$.

Observe também que se $Y \oplus F^\omega \twoheadrightarrow Z^{\omega^\omega}$, então de acordo com a Proposição 1.61 temos que $Y \oplus F^m \twoheadrightarrow Z^\omega$, para algum $1 \leq m < \omega$, o que é um absurdo por (ii). Logo, temos que $\omega \in I_2$.

Agora, por absurdo suponha que $I_2 \subsetneq I_1$, ou seja, que I_2 é um subconjunto próprio de I_1.
Seja α_1 o menor elemento de $I_1 \setminus I_2$. Sabemos que $\alpha_1 > \omega$. Como $\alpha_1 \notin I_2$, segue que existe um ordinal $\gamma_1 < \alpha_1$ tal que

$$Y \oplus F^{\gamma_1} \twoheadrightarrow Z^{\alpha_1}.$$

Como $\alpha_1 > \omega$ segue que $Z^{\alpha_1} \twoheadrightarrow Z^\omega$ e então

$$Y \oplus F^{\gamma_1} \twoheadrightarrow Z^{\alpha_1} \twoheadrightarrow Z^\omega,$$

ou seja,

$$Y \oplus F^{\gamma_1} \twoheadrightarrow Z^\omega.$$

Então, por (ii) concluímos que $\gamma_1 \geq \omega$.

Seja $J = \{\gamma, \omega \leq \gamma < \alpha_1 \, : Y \oplus F^{\gamma} \twoheadrightarrow Z^{\alpha_1}\}$ e tome $\alpha_2 = \min J$.

Assim, $Y \oplus F^{\alpha_2} \twoheadrightarrow Z^{\alpha_1}$, e novamente por (ii) concluímos que $\alpha_2 \geq \omega$.
Mostremos que $\alpha_2 \in I_1$. De fato, se não for verdade que $\alpha_2 \in I_1$, então existe um ordinal $\gamma_2 < \alpha_2$ tal que $\mathbb{R}^{\gamma_2} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\alpha_2}$. Disso, $\gamma_2 \geq \omega$ e de acordo com o Lema 2.7 obtemos que $F^{\gamma_2} \sim F^{\alpha_2}$.
Consequentemente, como $\alpha_2 = \min J \in J$, segue que $Y \oplus F^{\alpha_2} \twoheadrightarrow Z^{\alpha_1}$, e daí

$$Y \oplus F^{\gamma_2} \sim Y \oplus F^{\alpha_2} \twoheadrightarrow Z^{\alpha_1},$$

ou seja,

$$Y \oplus F^{\gamma_2} \twoheadrightarrow Z^{\alpha_1},$$

e portanto concluímos que $\gamma_2 \in J$, com $\gamma_2 < \alpha_2$, o que é uma contradição com a definição de α_2. Portanto, $\alpha_2 \in I_1$.

Além disso, como $\alpha_2 < \alpha_1$, pela definição de α_1 temos que $\alpha_2 \in I_2$ (já que α_1 é o menor elemento de $I_1 \setminus I_2$ e $\alpha_2 < \alpha_1$, então $\alpha_2 \in I_2$). Isto é,

$$Y \oplus F^{\gamma} \not\twoheadrightarrow Z^{\alpha_2}\, , \forall \gamma < \alpha_2.$$

Então, pela Proposição 1.60 concluímos que

$$Y \oplus F^{\alpha_2} \not\twoheadrightarrow Z^{\alpha_2{}^{\omega}}. \tag{2.11}$$

Por outro lado, note que se $\alpha_1 < \alpha_2^{\omega}$, então pelo Teorema 1.51 (item (i) - Teorema de Bessaga-Pełczyński) concluímos que $\mathbb{R}^{\alpha_1} \sim \mathbb{R}^{\alpha_2}$, que é um absurdo, pois $\alpha_2 < \alpha_1$ e $\alpha_1 \in I_1$.
Portanto, temos que $\alpha_2^{\omega} \leq \alpha_1$, e pela definição de α_2,

$$Y \oplus F^{\alpha_2} \twoheadrightarrow Z^{\alpha_1} \twoheadrightarrow Z^{\alpha_2{}^{\omega}} \Longrightarrow Y \oplus F^{\alpha_2} \twoheadrightarrow Z^{\alpha_2{}^{\omega}},$$

o que é uma contradição com (2.11).
Consequentemente, concluímos que I_2 não é um subconjunto próprio de I_1, ou seja, $I_1 = I_2$.

Para completar a prova desta proposição, suponha que $Y \oplus F^{\xi} \twoheadrightarrow Z^{\eta}$ e que por absurdo $\eta \geq \xi^{\omega}$.

Primeiramente, afirmamos que $\mathbb{R}^\xi \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\eta$. De fato, se $\mathbb{R}^\xi \not\twoheadrightarrow \mathbb{R}^\eta$, definindo

$$\xi_1 = \min\{\theta : \mathbb{R}^\theta \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\eta\},$$

segue que $\omega \leq \xi < \xi_1 \leq \eta$ e $\mathbb{R}^\gamma \not\twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\xi_1}$, para todo $\gamma < \xi_1$, porque senão para algum $\gamma < \xi_1$ teríamos $\mathbb{R}^\gamma \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\xi_1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\eta$, ou seja, teríamos $\mathbb{R}^\gamma \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\eta$, e daí ξ_1 não seria o mínimo do conjunto acima. Logo, temos que $\xi_1 \in I_1 = I_2$. Logo, sendo $\xi_1 \in I_2$ temos que

$$Y \oplus F^\gamma \not\twoheadrightarrow Z^{\xi_1}, \; \forall \gamma < \xi_1.$$

Como $\xi < \xi_1$, temos em particular que

$$Y \oplus F^\xi \not\twoheadrightarrow Z^{\xi_1}. \tag{2.12}$$

Porém, como $\eta \geq \xi_1$, segue que $Z^\eta \twoheadrightarrow Z^{\xi_1}$ e daí temos por hipótese que

$$Y \oplus F^\xi \twoheadrightarrow Z^\eta \twoheadrightarrow Z^{\xi_1},$$

que é uma contradição com (2.12).

Portanto, segue que $\mathbb{R}^\xi \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\eta$. Assim, como estamos supondo que $\eta \geq \xi^\omega$, obtemos

$$C([0,\xi]) \twoheadrightarrow C([0,\eta]) \twoheadrightarrow C([0,\xi^\omega]),$$

ou seja,

$$C([0,\xi]) \twoheadrightarrow C([0,\xi^\omega]),$$

o que contradiz o Teorema 1.59. Logo, concluímos que $\eta < \xi^\omega$.

□

O próximo resultado também ajudará a provar o Teorema 2.5.

Proposição 2.9 *Seja X um espaço de Banach possuindo um quociente ω_1 que é uniformemente convexo. Então, para todos ordinais $\omega \leq \xi \leq \eta < \omega_1$,*

$$C([0,\xi],X) \sim C([0,\eta],X) \Leftrightarrow \eta < \xi^\omega.$$

Além disso, se $X = Y \oplus F$ como na Definição 2.4, então

$$Y \oplus C([0,\xi],F) \sim Y \oplus C([0,\eta],F) \Leftrightarrow \eta < \xi^\omega.$$

Demonstração. Por hipótese existe um espaço de Banach Z uniformemente convexo e subespaços F e Y de X tais que

(a) $X = Y \oplus F$,

(b) $F \twoheadrightarrow Z$,

(c) $C([0,\gamma], Y) \oplus F^n \not\twoheadrightarrow C([0,\omega], Z)$, $\forall \omega \leq \gamma < \omega_1$ e $\forall 1 \leq n < \omega$.

Antes de tudo, observe que se fixarmos um ordinal $\omega \leq \xi_0 < \omega_1$, então pela Proposição 2.8, juntamente com (b) e (c),

$$C([0,\xi_0], Y) \oplus C([0,\xi], F) \twoheadrightarrow C([0,\eta], Z) \Longrightarrow \eta < \xi^\omega. \tag{2.13}$$

Então, tome $\omega \leq \xi \leq \eta < \omega_1$ e suponha que

$$C([0,\xi], X) \sim C([0,\eta], X). \tag{2.14}$$

Como por (a) $X = Y \oplus F$, segue que

$$C([0,\xi], X) \sim C([0,\xi], Y \oplus F) \sim C([0,\xi], Y) \oplus C([0,\xi], F),$$

e analogamente

$$C([0,\eta], X) \sim C([0,\eta], Y) \oplus C([0,\eta], F).$$

Portanto, (2.14) fica

$$C([0,\xi], Y) \oplus C([0,\xi], F) \sim C([0,\eta], Y) \oplus C([0,\eta], F).$$

Assim, por (b) e pela Observação 2.6 temos

$$C([0,\xi], Y) \oplus C([0,\xi], F) \sim C([0,\eta], Y) \oplus C([0,\eta], F) \twoheadrightarrow C([0,\eta], F) \twoheadrightarrow C([0,\eta], Z),$$

ou seja,

$$C([0,\xi], Y) \oplus C([0,\xi], F) \twoheadrightarrow C([0,\eta], Z).$$

De acordo com (2.13), com $\xi_0 = \xi$, concluímos que $\eta < \xi^\omega$. Em seguida, ainda com $\omega \leq \xi \leq \eta < \omega_1$ fixados e assumindo que

$$Y \oplus C([0,\xi], F) \sim Y \oplus C([0,\eta], F).$$

Disso, ainda pela Observação 2.6 temos

$$Y \oplus C([0,\xi],F) \twoheadrightarrow C([0,\eta],F) \twoheadrightarrow C([0,\eta],Z),$$

consequentemente pela Proposição 2.8 concluímos que $\eta \leq \xi^{\omega}$.
Isso conclui a prova da Proposição 2.9.

□

Estamos agora em condições de provar o Teorema 2.5 apresentado na Seção anterior, cujo enunciado repetimos:

Teorema 2.5 *Seja X um espaço de Banach possuindo um quociente ω_1 que é uniformemente convexo. Então, para todos espaços métricos infinitos compactos K_1 e K_2,*

$$C(K_1,X) \sim C(K_2,X) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

Além disso, se $X = Y \oplus F$ como na Definição 2.4, então

$$Y \oplus C(K_1,F) \sim Y \oplus C(K_2,F) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

Demonstração. De fato, a condição $C(K_1) \sim C(K_2)$ é suficiente para ambas afirmações do Teorema. Vamos então mostrar a necessidade das afirmações.
Por hipótese, existe um espaço de Banach Z uniformemente convexo e subespaços F e Y de X tais que

(a) $X = Y \oplus F$,

(b) $F \twoheadrightarrow Z$,

(c) $C([0,\gamma],Y) \oplus F^n \not\twoheadrightarrow C([0,\omega],Z)$, $\forall \omega \leq \gamma < \omega_1$ e $\forall 1 \leq n < \omega$.

Primeiramente suponha que

$$C(K_1,X) \sim C(K_2,X), \tag{2.15}$$

onde K_1 e K_2 são espaços métricos compactos infinitos. Vamos considerar dois casos de estudo:

Caso 1. Se K_1 e K_2 são enumeráveis. Pelo Teorema de Mazurkiewicz-Sierpiński (Teorema 1.50), sejam ξ e η ordinais infinitos enumeráveis tais que $C(K_1)$ é isomorfo a $C([0,\xi])$ e $C(K_2)$ é isomorfo a $C([0,\eta])$. Sem perda de generalidade, assuma que $\xi \leq \eta$. Então, pela Proposição 2.9 e o Teorema de Bessaga e Pełczyǹski (Teorema 1.51 - (i)) concluímos que $C(K_1) \sim C(K_2)$.

Caso 2. K_2 não enumerável. Neste caso, pelo Teorema (2.1) de Milutin, é suficiente mostrar que K_1 também é não enumerável. Por absurdo, suponha que K_1 seja enumerável. Então, pelo Teorema de Mazurkiewicz e Sierpiński segue que K_1 é homeomorfo a algum intervalo de ordinais $[0, \xi]$, com $\omega \leq \xi < \omega_1$. Disso, $C(K_1) \sim C([0, \xi])$ e consequentemente,

$$C([0, \xi], X) \sim C(K_1, X). \tag{2.16}$$

Por outro lado, como

$$C([0, \xi^\omega]) \sim C([0, \xi^\omega] \times [0, \xi]) \ \text{ e } \ C([0, \xi^\omega] \times K_2) \sim C(K_2), \tag{2.17}$$

segue de (2.15), (2.16), (2.17), do Teorema 1.10 e da Proposição 1.46 que

$$C([0, \xi^\omega], X) \sim C([0, \xi^\omega] \times [0, \xi], X) \sim C([0, \xi^\omega], C([0, \xi], X)) \sim C([0, \xi^\omega], C(K_1, X)) \sim$$

$$\sim C([0, \xi^\omega], C(K_2, X)) \sim C([0, \xi^\omega] \times K_2, X) \sim C(K_2, X) \sim C([0, \xi], X),$$

ou seja, obtemos

$$C([0, \xi^\omega], X) \sim C([0, \xi], X),$$

e como $\xi < \xi^\omega$, pela Proposição 2.9 concluímos que $\xi^\omega < \xi^\omega$, um absurdo.

Portanto, K_1 é não enumerável, e pelo Teorema de Milutin segue que

$$C(K_1) \sim C(\mathbf{2}^{\aleph_0}) \sim C(K_2).$$

Finalmente, suponha que

$$Y \oplus C(K_1, F) \sim Y \oplus C(K_2, F),$$

onde $X = Y \oplus F$ como na Definição 2.4 e K_1 e K_2 são espaços métricos infinitos compactos. Novamente, temos dois casos a considerar:

Caso 1: K_1 e K_2 são enumeráveis. Tome ξ e η ordinais infinitos enumeráveis tais que $C(K_1)$ é isomorfo a $C([0, \xi])$ e $C(K_2)$ é isomorfo a $C([0, \eta])$. Sem perda de generalidade, assuma que $\xi \leq \eta$. Assim, pelo Teorema 1.10-(d), obtemos que

$$C(K_1, F) \sim C([0, \xi], F) \ \text{ e } \ C(K_2, F) \sim C([0, \eta], F).$$

Somando Y, obtemos

$$Y \oplus C(K_1, F) \sim Y \oplus C([0, \xi], F) \ \text{ e } \ Y \oplus C(K_2, F) \sim Y \oplus C([0, \eta], F).$$

Então, por hipótese temos que

$$Y \oplus C([0,\xi],F) \sim Y \oplus C([0,\eta],F),$$

e portanto, pela Proposição 2.9 (segunda parte) concluímos que $\eta < \xi^\omega$ e daí

$$C(K_1) \sim C([0,\xi]) \sim C([0,\eta]) \sim C(K_2).$$

Caso 2: K_2 é não enumerável. Novamente, vamos mostrar que $C(K_1) \sim C(K_2)$ provando que K_1 também é não enumerável. Por absurdo, se K_1 for enumerável, então existe um ordinal enumerável ξ tal que $C(K_1)$ é isomorfo a $C([0,\xi])$. Então

$$Y \oplus C([0,\xi],F) \twoheadrightarrow Y \oplus C(K_2,F) \twoheadrightarrow C([0,\xi^\omega],F) \twoheadrightarrow C([0,\xi^\omega],Z),$$

uma contradição pela Proposição 2.8.

Isso conclui a prova do Teorema 2.5.

$\square$

Capítulo 3

Aplicações do Teorema de extensão de Bessaga e Pełczyǹski

3.1 Introdução

Neste capítulo daremos vários exemplos de espaços de Banach X tais que as classificações isomorfas dos espaços $C(K, X)$ são dadas pelo Teorema 2.5 estudado no capítulo anterior.

Em outras palavras, apresentaremos vários resultados que possibilitam a classificação isomorfa de espaços de Banach $C(K, X)$, onde X possui algum espaço $\ell_p(\Gamma)$ como quociente ω_1, com $1 < p < \infty$ e Γ um conjunto infinito arbitrário.

Como outra aplicação da técnica desenvolvida, apresentaremos novas classificações isomorfas de certos espaços $C(K)$ e $C(K, X)$, envolvendo espaços compactos K de peso topológico arbitrário $\mathfrak{m}$. Então, pelos Teoremas 2.5 e 3.5 provamos também:

Corolário 3.1 *Sejam Γ um conjunto infinito e S um espaço compacto disperso de Hausdorff ou um espaço compacto de Hausdorff tendo peso topológico estritamente menor que $2^{|\Gamma|}$. Então, para quaisquer espaços métricos compactos infinitos K_1 e K_2,*

(a) $C(K_1 \times (S \oplus \beta\Gamma)) \sim C(K_2 \times (S \oplus \beta\Gamma)) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2)$.

(b) $C(S \oplus (K_1 \times \beta\Gamma)) \sim C(S \oplus (K_2 \times \beta\Gamma)) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2)$.

Finalmente, é dada a classificação isomorfa de certos espaços

$$C(K, \ell_p(\Lambda)) \oplus C(S, \ell_q(\Gamma)),$$

em termos de espaços compactos métricos infinitos K e S. Esse resultado estende o Teorema 4.1 de [24] e nos leva a algumas novas questões interessantes relacionadas com os espaços

$C(K, \ell_\infty)$, onde K são espaços métricos infinitos compactos, veja os Problemas 3.13 e 3.14.

Com as técnicas aqui desenvolvidas apresentaremos também as provas dos Teoremas 2.2 e 2.3.

3.2 Resultados importantes

A fim de obter aplicações do Teorema de extensão vetorial de Bessaga e Pełczyǹski que provamos no capítulo anterior (Teorema 2.5), precisamos desenvolver os teoremas abaixo, que constituirão a chave para as provas dos Teoremas 2.2 e 2.3, respectivamente, que serão apresentadas na próxima seção.

Começamos estabelecendo uma importante proposição sobre os espaços $\ell_1(\ell_q)$ (Proposição 3.3). Denotamos por $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^\infty$ a base canônica de $\ell_1(\ell_q)$, e a norma deste espaço é dada por

$$\left\| \sum_{i,j=1}^\infty a_{i,j} e_{i,j} \right\| = \sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{i=1}^\infty |a_{i,j}|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

para todo $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$.

O próximo lema ajudará na prova da Proposição 3.3 e foi inspirado em [37], página 77. Agradecemos ao Prof. Gideon Schechtman pelo auxílio em prová-lo e na sugestão dada para melhorarmos a prova da Proposição 3.3.

Lema 3.2 *Sejam X um espaço de Banach e $1 < q < \infty$. Seja T um operador linear de $\ell_1(\ell_q)$ em $X \oplus \ell_q$ e P a projeção natural de $X \oplus \ell_q$ sobre ℓ_q. Então*

(a) *Para toda sequência dupla $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^\infty$ de números positivos existe sequência dupla $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^\infty \subseteq \ell_q$ e subequências $N_j \subseteq \mathbb{N}$ tais que denotando $N_j = \{[i,j]\}_{i=1}^\infty$,*

$$\|PT(e_{[i,j],j}) - b_{ij}\| < \varepsilon_{ij}, \tag{3.1}$$

para todos $1 \leq i, j < \omega$.

(b) *Se T é um isomorfismo, então existem subsequências $N_j = \{[i,j]\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, $1 \leq j < \omega$, e um isomorfismo $\tilde{T}$ do espaço gerado por $\{e_{[i,j],j}\}_{i,j=1}^\infty$ em $X \oplus \ell_q$ tal que $\{P\tilde{T}(e_{[i,j],j})\}_{i,j=1}^\infty$ é uma sequência de elementos em ℓ_q com suportes finitos e esses suportes são dois a dois disjuntos, para todos $1 \leq i, j < \omega$.*

Demonstração. (a) Defina uma ordem $\prec$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por $(i,j) \prec (k,l)$ se, e somente se, $i + j < k + l$ ou $i + j = k + l$ e $i < k$.

Assuma que já temos encontrado os segmentos iniciais de $N_j = \{[i,j]\}_{i=1}^{k_j}$ para $(i,j) \prec (i_0, j_0)$.

Precisamos encontrar $[i_0, j_0]$ e $b_{i_0 j_0}$.

Como $\{e_{i,j_0}\}_{i=1}^{\infty}$ converge fracamente para zero, para i_0 suficientemente grande

$$\|P_i T(e_{i_0,j_0})\| < \frac{\varepsilon_{i_0,j_0}}{2},$$

onde P_i é a projeção sobre S_i, a união finita dos suportes de $\{b_{ij}\}_{(i,j)\prec(i_0,j_0)}$.

Agora, para todo $1 \leq n < \omega$, denote por R_n a projeção natural de ℓ_q dada por

$$R_n(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}) = (a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...).$$

Tome $1 \leq m < \omega$ estritamente maior que o máximo de S_i e tal que

$$||PT(e_{i_0,j_0}) - R_m PT(e_{i_0,j_0})|| < \frac{\varepsilon_{i_0,j_0}}{2}.$$

Então, é suficiente definir $b_{i_0 j_0} = (R_m - P_i)PT(e_{i_0,j_0})$.

(b) Fixe uma sequência dupla $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ de números positivos tal que $\sum_{i,j=1}^{\infty} \varepsilon_{ij}^p < \frac{1}{\|T^{-1}\|^p}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pelo item (a) existem subsequências $N_j = \{[i,j]\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ e uma sequência $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty} \subseteq \ell_q$ de elementos com suportes finitos e dois a dois disjuntos satisfazendo (3.1). Defina o operador linear $\tilde{T}$ do espaço gerado por $\{e_{[i,j],j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ em $X \oplus \ell_q$ por

$$\tilde{T}(e_{[i,j],j}) = (I - P)T(e_{[i,j],j}) + b_{ij}.$$

Então $\|(T - \tilde{T})(e_{[i,j],j})\| < \varepsilon_{i,j}$, para todos $1 \leq i, j < \omega$.

De fato, basta observar que

$$||(T - \tilde{T})(e_{[i,j],j})|| = ||T(e_{[i,j],j}) - \tilde{T}(e_{[i,j],j})|| = ||T(e_{[i,j],j}) - (I - P)T(e_{[i,j],j}) - b_{ij}|| =$$

$$= ||PT(e_{[i,j],j}) - b_{ij}|| < \varepsilon_{i,j}.$$

Agora, sendo $y_{ij} = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} e_{[i,j],j}$ um vetor de norma menor ou igual a 1, usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$||(T - \tilde{T})(y_{ij})|| = || \sum_{i,j=1}^{\infty} (T - \tilde{T}) a_{ij} (e_{[i,j],j})|| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}||(T-\tilde{T})(e_{[i,j],j})||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\varepsilon_{ij}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{||T^{-1}||},$$

e portanto,

$$||(T-\tilde{T})(y_{ij})|| < \frac{1}{||T^{-1}||}.$$

Logo, pela Proposição 1.16 concluímos que $\tilde{T}$ é um isomorfismo e $P\tilde{T}(e_{[i,j],j}) = b_{ij}$, para todos $1 \leq i, j < \omega$.

□

Proposição 3.3 *Sejam X um espaço de Banach e $1 < q < \infty$. Suponha que $X \oplus \ell_q$ contém uma cópia de $\ell_1(\ell_q)$. Então X contém uma cópia de ℓ_q.*

Demonstração. Seja T um isomorfismo de $\ell_1(\ell_q)$ em $X \oplus \ell_q$. Inicialmente observe que para toda sequência infinita $N_j \subseteq \mathbb{N}$, $1 \leq j < \omega$, $\{e_{i,j}\}_{j=1, i\in N_j}^{\infty}$ gera em $\ell_1(\ell_q)$ um subespaço isométrico a $\ell_1(\ell_q)$. Então, pelo Lema 3.2 podemos supor que $\{PT(e_{i,j})\}_{i,j=1}^{\infty}$ é uma sequência dupla de elementos em ℓ_q com suportes finitos dois a dois disjuntos.

Antes de tudo afirmamos que para quaisquer conjunto finito $A \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e sequência $\{a_{n,j}\}_{n,j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ temos

$$|| \sum_{(n,j)\in A} a_{n,j}PT(e_{n,j})|| \leq M\left(\sum_{(n,j)\in A}|a_{n,j}|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.2}$$

onde $M = ||P|| \cdot ||T||$.

Tome $0 < \varepsilon < 1$ e $1 \leq k < \omega$ satisfazendo $M||T^{-1}||k^{-\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Observe que para todo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ e $1 \leq m < \omega$ temos

$$|| \sum_{n=1}^{m} a_n(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} e_{n,j})|| = \left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.3}$$

isto é, pela Definição 1.41 de equivalência de bases, $\{k^{-1}\sum_{j=1}^{k} e_{n,j}\}_{n=1}^{\infty}$ é equivalente à base de ℓ_q. Denote por W o espaço gerado por esses vetores.

Seja $\sum_{n=1}^{m} a_n(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} T(e_{n,j}))$ um vetor de norma menor ou igual a 1.

Por (3.2) e (3.3) obtemos

$$||P(\sum_{n=1}^{m} a_n(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} T(e_{n,j})))|| = \frac{1}{k}|| \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} a_nPT(e_{n,j})|| \leq \frac{1}{k}M\left(\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}|a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \frac{M}{k}\left(k\sum_{n=1}^{m}|a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} = k^{\frac{1}{q}-1}M\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} = k^{-\frac{1}{p}}M||\sum_{n=1}^{m}a_n(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}e_{n,j})|| =$$

$$= k^{-\frac{1}{p}}M||\sum_{n=1}^{m}a_n(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}T^{-1}T(e_{n,j}))|| \leq k^{-\frac{1}{p}}M||T^{-1}||\cdot||\sum_{n=1}^{k}T(e_{n,j})|| \leq$$

$$\leq M||T^{-1}||k^{-\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Consequentemente, se I denota o operador identidade de $X\oplus\ell_q$, então $I-P$ é um isomorfismo de um subespaço isomorfo a ℓ_q em X.

□

Teorema 3.4 *Sejam Y um espaço de Banach, $1 < p < \infty$ e Γ um conjunto infinito. Suponha que Y^* não possui nenhuma cópia de ℓ_q, onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Então $\ell_p(\Gamma)$ é um quociente ω_1 de $X = Y\oplus\ell_p(\Gamma)$.*

Demonstração. Como ℓ_p é um espaço uniformemente convexo e $(\ell_p(\Gamma))^n \sim \ell_p(\Gamma)$ para todo $1 \leq n < \omega$, é suficiente provar que

$$C([0,\xi],Y)\oplus\ell_p(\Gamma) \not\twoheadrightarrow C([0,\omega],\ell_p),$$

para todo $\omega \leq \xi < \omega_1$.

Por absurdo, suponha que $C([0,\xi],Y)\oplus\ell_p(\Gamma) \twoheadrightarrow C([0,\omega],\ell_p)$. Então pela dualidade e pela separabilidade de $\ell_1(\ell_q)$ concluímos que $\ell_1(Y^*)\oplus\ell_q$ contém uma cópia de $\ell_1(\ell_q)$. Logo, pela Proposição 3.3 segue que $\ell_q \hookrightarrow \ell_1(Y^*)$. Mas como $\ell_1 \not\hookrightarrow \ell_q$, pela Proposição 1.23 segue que existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\ell_q \hookrightarrow (Y^*)^n$, o que pelo Teorema 1.12 deduzimos que Y^* contém uma cópia de ℓ_q. Mas isto é um absurdo pela hipótese. Isto prova o Teorema 3.4.

□

Teorema 3.5 *Sejam F e Y espaços de Banach tais que existe um conjunto Λ e $1 < p < \infty$ satisfazendo*

(i) $F \twoheadrightarrow \ell_p(\Lambda)$*;*

(ii) $F \not\twoheadrightarrow c_0$*;*

(iii) *para quaisquer $\omega \leq \xi < \omega_1$ ordinal e operador linear limitado $T : C([0,\xi],Y) \to \ell_p(\Lambda)$, temos* $\operatorname{dens} T(C([0,\xi],Y)) < |\Lambda|$.

Então $\ell_p(\Lambda)$ é um quociente ω_1 de $X = Y\oplus F$.

Demonstração. Sabemos que $Z = \ell_p(\Lambda)$ é um espaço de Banach uniformemente convexo. Além disso, pelo Lema 1.57 temos que $C([0,\omega], \ell_p(\Lambda))$ é isomorfo à soma c_0 de $\ell_p(\Lambda)$, ou seja, a $c_0(\ell_p(\Lambda))$.
Suponha então que existe um operador linear limitado sobrejetivo

$$T : C([0,\xi], Y) \oplus F^n \to c_0(\ell_p(\Lambda)),$$

para algum $\omega \leq \xi < \omega_1$ e $1 \leq n < \omega$.
Dado $1 \leq m < \omega$, denotaremos por P_m a projeção natural em $c_0(\ell_p(\Lambda))$ sobre a m-ésima coordenada, isto é, $P_m : c_0(\ell_p(\Lambda)) \to c_0(\ell_p(\Lambda))$ definida por

$$(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ...) \mapsto (0, 0, ..., 0, x_m, 0, 0, ...).$$

Pelas nossas hipóteses concluímos que

$$\operatorname{dens} P_m T(C([0,\xi], Y)) < |\Lambda|, \text{ para todo } 1 \leq m < \omega.$$

Disso, existe um subconjunto Λ_1 de Λ com $|\Lambda_1| < |\Lambda|$ tal que

$$T(x)(\gamma)(m) = 0, \forall x \in C([0,\xi], Y), \gamma \notin \Lambda_1 \text{ e } 1 \leq m < \omega.$$

Identificamos de maneira natural $c_0(\ell_p(\Lambda_1))$ como um subconjunto de $c_0(\ell_p(\Lambda))$.
Seja Q a projeção natural de $c_0(\ell_p(\Lambda))$ sobre $c_0(\ell_p(\Lambda_1))$.
Então, é fácil ver que o operador composição

$$Q \circ T|_{F^n} : F^n \to c_0(\ell_p(\Lambda \setminus \Lambda_1))$$

é sobrejetor.
Consequentemente,

$$F^n \twoheadrightarrow c_0,$$

e de acordo com o Teorema 1.13, c_0 é isomorfo a um quociente de F, o que é um absurdo, visto que contradiz (ii).
Portanto, concluímos que

$$C([0,\xi], Y) \oplus F^n \not\twoheadrightarrow c_0(\ell_p(\Lambda)) \sim (\ell_p(\Lambda))^\omega = C([0,\omega], \ell_p(\Lambda)),$$

o que, juntamente com (i), mostra que $\ell_p(\Lambda)$ é um quociente ω_1 de $X = Y \oplus F$.

$\square$

Observação 3.6 Com relação às afirmações do Teorema 2.5 notamos que se $X = Y \oplus F$

como na Definição 2.4, então não temos necessariamente

$$C(K,X) \sim Y \oplus C(K,F),$$

para todo espaço métrico infinito compacto K.

De fato, pelo Teorema 3.4, o espaço ℓ_p com $1 < p < 2$ é um quociente ω_1 de $X = \ell_\infty \oplus \ell_p$. No entanto,

$$C([0,\omega], \ell_\infty \oplus \ell_p) \not\sim \ell_\infty \oplus C([0,\omega], \ell_p).$$

Caso contrário, visto que pelo Lema 1.35 o espaço $\ell_2(2^{\aleph_0})$ é um quociente de ℓ_∞, ou seja, $\ell_\infty \twoheadrightarrow \ell_2(2^{\aleph_0})$, teríamos, com ajuda da Observação 2.6, que

$$C([0,\omega], \ell_p) \oplus \ell_\infty \sim C([0,\omega], \ell_\infty \oplus \ell_p) \twoheadrightarrow C([0,\omega], \ell_\infty) \twoheadrightarrow C([0,\omega], \ell_2(2^{\aleph_0})),$$

ou seja, teríamos

$$C([0,\omega], \ell_p) \oplus \ell_\infty \twoheadrightarrow C([0,\omega], \ell_2(2^{\aleph_0})),$$

que é um absurdo, pois pelo Teorema 3.5 temos que $\ell_2(2^{\aleph_0})$ é um quociente ω_1 de $X = \ell_p \oplus \ell_\infty$.

3.3 Classificações isomorfas de espaços $C(K,X)$

O Teorema 2.5 pode ser usado para dar novas classificações isomorfas de espaços $C(K,X)$ para espaços compactos métricos infinitos K. Por exemplo, o Corolário 3.1 enunciado na introdução deste capítulo:

Corolário 3.1 *Sejam Γ um conjunto infinito e S um espaço compacto disperso de Hausdorff ou um espaço compacto de Hausdorff tendo peso topológico estritamente menor que $2^{|\Gamma|}$. Então, para quaisquer espaços métricos compactos infinitos K_1 e K_2,*

(a) $C(K_1 \times (S \oplus \beta\Gamma)) \sim C(K_2 \times (S \oplus \beta\Gamma)) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2)$.

(b) $C(S \oplus (K_1 \times \beta\Gamma)) \sim C(S \oplus (K_2 \times \beta\Gamma)) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2)$.

Demonstração. Mostraremos as implicações não-triviais.

(a) Suponha que $C(K_1 \times (S \oplus \beta\Gamma)) \sim C(K_2 \times (S \oplus \beta\Gamma))$. Observe que para $K = K_1$ ou $K = K_2$ temos (e lembrando que $C(\beta\Gamma) = \ell_\infty(\Gamma)$)

$$C(K \times (S \oplus \beta\Gamma)) \sim C(K, C(S \oplus \beta\Gamma)) \sim C(K, C(S) \oplus C(\beta\Gamma)) \sim C(K, C(S) \oplus \ell_\infty(\Gamma)).$$

Então, a hipótese acima é equivalente a

$$C(K_1, C(S) \oplus \ell_\infty(\Gamma)) \sim C(K_2, C(S) \oplus \ell_\infty(\Gamma)). \tag{3.4}$$

Temos dois casos a considerar:

Caso 1: S é disperso. Pelo Lema 1.35 segue que $\ell_2(2^{|\Gamma|})$ é isomorfo a um quociente de $\ell_\infty(\Gamma)$, i.e.,

$$\ell_\infty(\Gamma) \twoheadrightarrow \ell_2(2^{|\Gamma|}). \tag{3.5}$$

Lembrando que $\ell_\infty(\Gamma) = C(\beta\Gamma)$ e como $\beta\Gamma$ é estoneano compacto, segue que $C(\beta\Gamma)$ é de Grothendieck, e portanto pelo Teorema 1.72 temos que

$$\ell_\infty(\Gamma) = C(\beta\Gamma) \not\twoheadrightarrow c_0. \tag{3.6}$$

Ainda, para todo ordinal $\omega \leq \xi < \omega_1$, temos que $[0, \xi] \times S$ é compacto e disperso pois é um produto cartesiano de compactos dispersos. Logo, como $c_0 \not\hookrightarrow \ell_2(2^{|\Gamma|})$, segue pela Proposição 1.30 que todo operador linear $T : C([0, \xi] \times S) \to \ell_2(2^{|\Gamma|})$ é compacto.
Assim, pela Proposição 1.26 segue que $T(C([0, \xi] \times S))$ é separável. Logo,

$$\operatorname{dens} T(C([0, \xi] \times S)) \leq \aleph_0 < 2^{|\Gamma|}.$$

Observando que $C([0, \xi] \times S) \sim C([0, \xi], C(S))$, concluímos que para quaisquer ordinal $\omega \leq \xi < \omega_1$ e operador linear limitado $T : C([0, \xi], C(S)) \to \ell_2(2^{|\Gamma|})$, temos

$$\operatorname{dens} T(C([0, \xi], C(S))) \leq \aleph_0 < 2^{|\Gamma|},$$

o que, juntamente com (3.5) e (3.6) nos dão as hipóteses do Teorema 3.5, donde segue que $\ell_2(2^{|\Gamma|})$ é um quociente ω_1 uniformemente convexo de $X = C(S) \oplus \ell_\infty(\Gamma)$. Assim, observando (3.4), pelo Teorema 2.5 concluímos que $C(K_1) \sim C(K_2)$, o que prova (a).

Caso 2: O peso topológico de S é estritamente menor que $2^{|\Gamma|}$. Neste caso, denotando o peso topológico de S por $\mathfrak{w}(S)$, e como $\operatorname{dens} C(S) = \mathfrak{w}(S)$ (veja [52], página 126), temos então que $\operatorname{dens} C(S) < 2^{|\Gamma|}$ e daí usando $Y = C(S)$ no Teorema 2.3, também concluímos a prova de (a).

(b) Suponha que $C(S \oplus (K_1 \times \beta\Gamma)) \sim C(S \oplus (K_2 \times \beta\Gamma))$. Observe que para $K = K_1$ ou $K = K_2$, temos que

$$C(S \oplus (K \times \beta\Gamma)) \sim C(S) \oplus C(K_1 \times \beta\Gamma) \sim C(S) \oplus C(K_1, C(\beta\Gamma)) \sim C(S) \oplus C(K, \ell_\infty(\Gamma)).$$

Logo, a classificação isomorfa desejada é a mesma que

$$C(S) \oplus C(K_1, \ell_\infty(\Gamma)) \sim C(S) \oplus C(K_2, \ell_\infty(\Gamma)).$$

Temos novamente dois casos a considerar:
Caso 1: S é disperso. Escrevendo $X = C(S) \oplus \ell_\infty(\Gamma)$, pelo feito no Caso 1 em (a), temos que $\ell_2(2^{|\Gamma|})$ é um quociente ω_1 uniformemente convexo de $X = C(S) \oplus \ell_\infty(\Gamma)$.
Logo, observando o isomorfismo acima, pelo Teorema 2.5 (segunda afirmação), segue que $C(K_1) \sim C(K_2)$.

Caso 2: O peso topológico de S é estritamente menor que $2^{|\Gamma|}$. Novamente, escrevendo $X = C(S) \oplus \ell_\infty(\Gamma)$, pelo Teorema 3.5 concluímos também que $\ell_2(2^{|\Gamma|})$ é um quociente ω_1 de X. Então, pelo Teorema 2.5 (segunda afirmação), segue que $C(K_1) \sim C(K_2)$.

Isto conclui a prova do Corolário 3.1.

□

No entanto, sob a Hipótese do Contínuo, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, não podemos resolver o problema:

Problema 3.7 *Classificar, a menos de isomorfismos, os seguintes espaços $C(K)$*

$$C(\mathbf{2}^{\aleph_1} \oplus ([0, \xi] \times \beta\mathbb{N})),$$

onde $\omega \leq \xi < \omega_1$.

Seguindo [21] ou [28], escrevemos $\mathfrak{p}$ para o maior cardinal tendo a propriedade: se $\kappa < \mathfrak{p}$ e $(M_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é uma família de subconjuntos de $\mathbb{N}$ com $\cap_{\alpha\in F} M_\alpha$ infinito para todos os subconjuntos finitos F de κ, então existe um conjunto infinito $M \subset \mathbb{N}$ com $M \backslash M_\alpha$ finito para todo $\alpha < \kappa$.

É sabido que $\omega_1 \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{c}$ e que o Axioma de Martin implica que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Além disso, a consistência relativa de $\omega_1 < \mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ pode também ser estabelecida. Para mais detalhes, veja [21].

Convém lembrar também da definição de espaço de Grothendieck dada no Capítulo 1, bem como algumas de suas propriedades que foram citadas lá.

Feitas estas observações, apresentamos mais algumas consequências dos Teoremas 2.5 e 3.5.

Corolário 3.8 *Sejam F um espaço de Grothendieck não-reflexivo e Y um espaço de Banach com* dens $Y = \mathfrak{m}$, *$\aleph_0 \leq \mathfrak{m} < \mathfrak{p}$. Então, para quaisquer espaços métricos compactos infinitos K_1 e K_2,*

$$C(K_1, Y \oplus F) \sim C(K_2, Y \oplus F) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

Demonstração. Suponha que

$$C(K_1, Y \oplus F) \sim C(K_2, Y \oplus F).$$

Como F é um espaço de Grothendieck não-reflexivo, pela Proposição 1.73 segue que F^* possui um subespaço isométrico a $L_1(\mathbf{2}^{\mathfrak{p}})$.

Note que $L_1(\mathbf{2}^{\mathfrak{p}})$ possui um subespaço isomorfo a $\ell_2(\mathfrak{p})$ devido à Proposição 1.37, i.e.,

$$\ell_2(\mathfrak{p}) \hookrightarrow L_1(\mathbf{2}^{\mathfrak{p}}).$$

Assim, temos $\ell_2(\mathfrak{p}) \hookrightarrow L_1(\mathbf{2}^{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow F^*$, ou seja,

$$\ell_2(\mathfrak{p}) \hookrightarrow F^*.$$

Como $\ell_2(\mathfrak{p})$ é reflexivo, segue pela Proposição 1.24 que

$$F \twoheadrightarrow (\ell_2(\mathfrak{p}))^*,$$

e como $(\ell_2(\mathfrak{p}))^* = \ell_2(\mathfrak{p})$, segue que $\ell_2(\mathfrak{p})$ é isomorfo a um quociente de F, i.e.,

$$F \twoheadrightarrow \ell_2(\mathfrak{p}).$$

Logo, temos a condição (i) do Teorema 3.5, onde $\ell_2(\mathfrak{p})$ é uniformemente convexo.

Pelo Teorema de Grothendieck, c_0 não é isomorfo a um quociente de F, ou seja, $F \not\twoheadrightarrow c_0$. Temos portanto a condição (ii) do Teorema 3.5.

Ainda, para qualquer ordinal infinito enumerável ξ e para qualquer operador linear limitado $T : C([0,\xi], Y) \to \ell_2(\mathfrak{p})$, como $\operatorname{dens} Y = \mathfrak{m} < \mathfrak{p}$, temos

$$\text{dens }\ T(C([0,\xi]), Y) \leq \operatorname{dens} C([0,\xi], Y) = \operatorname{dens} Y = \mathfrak{m} < \mathfrak{p},$$

ou seja, temos a condição (iii) do Teorema 3.5.
Portanto, pelo Teorema 3.5 segue que $\ell_2(\mathfrak{p})$ é um quociente ω_1 de $X = Y \oplus F$. Assim, pelo Teorema 2.5 segue que $C(K_1) \sim C(K_3)$.

A prova da implicação contrária é trivial.

$\square$

O Corolário 3.8 pode ser melhorado para alguns espaços de Grothendieck F especiais da forma $C(\Omega)$. Lembramos, conforme definido no Capítulo 1, que um espaço compacto de Hausdorff Ω chama-se *estoneano* se o fecho de qualquer aberto de Ω ainda é um aberto.

Corolário 3.9 *Sejam Ω um espaço estoneano infinito e Y um espaço de Banach com* $\operatorname{dens} Y = \mathfrak{m}$, *onde* $\aleph_0 \leq \mathfrak{m} < \mathfrak{c}$. *Então, para quaisquer espaços métricos compactos infinitos K_1 e K_2,*

$$C(K_1, Y \oplus C(\Omega)) \sim C(K_2, Y \oplus C(\Omega)) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

Demonstração. Suponha que $C(K_1, Y \oplus C(\Omega)) \sim C(K_2, Y \oplus C(\Omega))$. Pelo Teorema 1.75, sendo Ω estoneano, segue que $C(\Omega)$ possui um quociente isomorfo a ℓ_∞, ou seja,

$$C(\Omega) \twoheadrightarrow \ell_\infty \tag{3.7}$$

Ainda, segue do Lema 1.36 que ℓ_∞ possui um quociente isomorfo a $\ell_2(\mathfrak{c})$, ou seja,

$$\ell_\infty \twoheadrightarrow \ell_2(\mathfrak{c}). \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8) temos

$$C(\Omega) \twoheadrightarrow \ell_2(\mathfrak{c}), \tag{3.9}$$

onde $\ell_2(\mathfrak{c})$ é uniformemente convexo.
Ainda, como Ω é estoneano temos que $C(\Omega)$ é de Grothendieck, e daí pelo Teorema 1.72 segue que

$$C(\Omega) \not\twoheadrightarrow c_0. \tag{3.10}$$

Por fim, note que dados ξ um ordinal infinito enumerável e $T : C([0, \xi], Y) \to \ell_2(\mathfrak{c})$ um operador linear limitado qualquer, temos

$$\operatorname{dens} T(C([0, \xi], Y)) \leq \operatorname{dens} C([0, \xi], Y) = \operatorname{dens} Y = \mathfrak{m} < \mathfrak{c}, \tag{3.11}$$

segue que (3.9), (3.10) e (3.11) nos dão as hipóteses do Teorema 3.5, donde segue que $\ell_2(\mathfrak{c})$ é um quociente ω_1 uniformemente convexo de $X = Y \oplus C(\Omega)$, e daí pelo Teorema 2.5 segue que $C(K_1) \sim C(K_2)$.

A prova da outra implicação é trivial.

□

Corolário 3.10 *Sejam S um espaço compacto disperso de Hausdorff, $1 < p < \infty$ e Γ um conjunto infinito. Então para quaisquer espaços métricos compactos infinitos K_1 e K_2,*

$$C(K_1, C(S) \oplus \ell_p(\Gamma)) \sim C(K_2, C(S) \oplus \ell_p(\Gamma)) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

Demonstração. Suponha que

$$C(K_1, C(S) \oplus \ell_p(\Gamma)) \sim C(K_2, C(S) \oplus \ell_p(\Gamma)).$$

Sendo S compacto disperso e de Hausdorff, pela Proposição 1.27 segue que $C(S)^* \sim \ell_1(S)$. Assim, como $\ell_q \not\hookrightarrow \ell_1(S) \sim C(S)^*$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, segue pelo Teorema 3.4 que $\ell_p(\Gamma)$ é um quociente ω_1 de $X = C(S) \oplus \ell_p(\Gamma)$, e tendo em vista que $\ell_p(\Gamma)$ é uniformemente convexo, pelo Teorema 2.5 segue que $C(K_1) \sim C(K_2)$. A prova da outra implicação é trivial.

□

Por fim, para encerrar esta seção, tendo em vista as técnicas até aqui desenvolvidas, vamos apresentar as demonstrações dos Teoremas 2.2 e 2.3 que foram enunciados no Capítulo 2.

Demonstração do Teorema 2.2. Como $\ell_q \not\hookrightarrow Y^*$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, segue pelo Teorema 3.4 que $\ell_p(\Gamma)$ é um quociente ω_1 de $X = Y \oplus \ell_p(\Gamma)$. Além disso, $\ell_p(\Gamma)$ é uniformemente convexo. Logo, o resultado segue do Teorema 2.5.

Demonstração do Teorema 2.3. Pelos mesmos argumentos feitos na prova do Corolário 3.1, item (a), temos que $\ell_\infty(\Gamma) \twoheadrightarrow \ell_2(2^{|\Gamma|})$ e $\ell_\infty(\Gamma) \not\twoheadrightarrow c_0$. Ainda, para todo ordinal $\omega \leq \xi < \omega_1$ e para todo operador linear limitado $T : C([0, \xi], Y) \to \ell_2(2^{|\Gamma|})$, temos

$$\operatorname{dens} T(C([0, \xi], Y)) \leq \operatorname{dens} C([0, \xi], Y) = \operatorname{dens} Y < 2^{|\Gamma|}.$$

Logo, pelo Teorema 3.5 segue que $\ell_2(2^{|\Gamma|})$ é um quociente ω_1 de $X = Y \oplus \ell_\infty(\Gamma)$.
Assim, pelo Teorema 2.5 segue o resultado.

□

3.4 Leis de cancelamento em espaços $C(K, X)$

Observamos que a Proposição 2.8 pode ser usada para dar mais algumas classificações isomorfas de espaços da forma $C(K, X) \oplus Y$. Para terminar este capítulo, provamos mais uma entre elas que é muito interessante.

Em [24] foi mostrado que, dados $1 < p < q < \infty$ e K_1, K_2, K_3 e K_4 espaços métricos compactos e enumeráveis, são equivalentes as afirmações:

(i) $C(K_1, \ell_p) \oplus C(K_2, \ell_q) \sim C(K_3, \ell_p) \oplus C(K_4, \ell_q)$;

(ii) $C(K_1) \sim C(K_3)$ e $C(K_2) \sim C(K_4)$.

Este resultado nos motivou a investigar o seguinte problema:

Teorema 3.11 *Sejam $1 < p < 2$, Γ e Λ conjuntos infinitos com $|\Lambda| < 2^{|\Gamma|}$. Então, para quaisquer espaços métricos infinitos compactos K_1, K_2, K_3 e K_4, são equivalentes:*

(a) $C(K_1, \ell_\infty(\Gamma)) \oplus C(K_2, \ell_p(\Lambda)) \sim C(K_3, \ell_\infty(\Gamma)) \oplus C(K_4, \ell_p(\Lambda))$

(b) $C(K_1) \sim C(K_3)$ *e* $C(K_2) \sim C(K_4)$.

Para provar o teorema acima estabelecemos um resultado auxiliar.

Lema 3.12 *Sejam $1 < p < 2$, Γ um conjunto infinito, W um espaço de Banach com* $\operatorname{dens} W < |\Gamma|$ *e K um espaço compacto de Hausdorff. Então, para todos ordinais $\omega \leq \xi \leq \eta < \omega_1$*

(i) $W \oplus C([0, \xi], \ell_\infty(\Gamma)) \twoheadrightarrow C([0, \eta], \ell_\infty(\Gamma)) \Rightarrow \eta < \xi^\omega$,

(ii) $C(K) \oplus C([0, \xi], \ell_p(\Gamma)) \twoheadrightarrow C([0, \eta], \ell_p(\Gamma)) \Rightarrow \eta < \xi^\omega$.

Demonstração. (i) Suponha que

$$W \oplus C([0, \xi], \ell_\infty(\Gamma)) \twoheadrightarrow C([0, \eta], \ell_\infty(\Gamma)).$$

Pelo Teorema 3.5 com $Y = W$, $F = \ell_\infty(\Gamma)$, $\Lambda = 2^{|\Gamma|}$ e $p = 2$, deduzimos que

$$W \oplus \ell_\infty(\Gamma) \not\twoheadrightarrow C([0, \omega], \ell_2(2^{|\Gamma|})). \tag{3.12}$$

Por outro lado, como $\ell_\infty(\Gamma) \twoheadrightarrow \ell_2(2^{|\Gamma|})$, pela hipótese e pela Observação 2.6 deduzimos que

$$W \oplus C([0, \xi], \ell_\infty(\Gamma)) \twoheadrightarrow C([0, \eta], \ell_\infty(\Gamma)) \twoheadrightarrow C([0, \eta], \ell_2(2^{|\Gamma|})),$$

ou seja,

$$W \oplus C([0, \xi], \ell_\infty(\Gamma)) \twoheadrightarrow C([0, \eta], \ell_2(2^{|\Gamma|})). \tag{3.13}$$

Então, como $\ell_\infty(\Gamma) \twoheadrightarrow \ell_2(2^{|\Gamma|})$, juntamente com (3.12) e (3.13), estamos nas hipóteses da Proposição 2.8, donde segue que $\eta < \xi^\omega$.

(ii) Suponha que

$$C(K) \oplus C([0, \xi], \ell_p(\Gamma)) \twoheadrightarrow C([0, \eta], \ell_p(\Gamma)). \tag{3.14}$$

De acordo com a Proposição 1.22, temos que $C(K)^*$ não possui cópia de ℓ_q, $q > 2$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo, pelo Teorema 3.4 segue que $\ell_p(\Gamma)$ é um quociente ω_1 de $X = C(K) \oplus \ell_p(\Gamma)$, onde $1 < p < 2$, e daí deduzimos que

$$C(K) \oplus \ell_p(\Gamma) \not\twoheadrightarrow C([0, \omega], \ell_p(\Gamma)). \tag{3.15}$$

Como $\ell_p(\Gamma) \twoheadrightarrow \ell_p(\Gamma)$, juntamente com (3.14) e (3.15) temos as hipóteses da Proposição 2.8, donde segue que $\eta < \xi^\omega$.

□

Demonstração do Teorema 3.11. É fácil ver que (b) implica (a). Suponha então que (a) vale, ou seja,

$$C(K_1, \ell_\infty(\Gamma)) \oplus C(K_2, \ell_p(\Lambda)) \sim C(K_3, \ell_\infty(\Gamma)) \oplus C(K_4, \ell_p(\Lambda)).$$

Por simetria, e tendo em mente o Teorema de Milutin, é suficiente provar as quatro afirmações abaixo para mostrar que (b) também vale.

Afirmação 1. *Se K_1 é não enumerável, então K_3 é não enumerável.*

De fato, se por absurdo supormos que K_3 é enumerável, então pelo Teorema de Mazurkiewicz e Sierpiński, existe um ordinal $\omega \leq \xi < \omega_1$ tal que $C(K_3)$ é isométrico a $C([0, \xi])$. Escreva $W = C(K_4, \ell_p(\Lambda))$. Pelas nossas hipóteses temos

$$W \oplus C([0, \xi], \ell_\infty(\Gamma)) \twoheadrightarrow C(K_1, \ell_\infty(\Gamma)) \twoheadrightarrow C([0, \xi^\omega], \ell_\infty(\Gamma)).$$

Logo, pelo item (i) do Lema 3.12 concluiríamos que $\xi^\omega < \xi^\omega$, o que é um absurdo. Logo, vale a afirmação 1. Disso, sendo K_1 e K_3 não enumeráveis, concluímos pelo Teorema de Milutin que $C(K_1) \sim C(K_3)$.

Afirmação 2. *Se K_1 e K_3 são enumeráveis, então $C(K_1) \sim C(K_3)$.*

De fato, existem ordinais enumeráveis ξ e η tais que $C(K_1)$ e $C(K_3)$ são isométricos a $C([0, \xi])$ e $C([0, \eta])$, respectivamente. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\xi \leq \eta$. Escreva $W = C(K_4, \ell_p(\Lambda))$. Então, pela nossa hipótese deduzimos

$$W \oplus C([0, \xi], \ell_\infty(\Gamma)) \twoheadrightarrow C([0, \eta], \ell_\infty(\Gamma)).$$

De acordo com o item (i) do Lema 3.12 concluímos que $\eta < \xi^\omega$. Disso, pelo Teorema de Bessaga e Pełczyǹski obtemos

$$C(K_1) = C([0, \xi]) \sim C([0, \eta]) = C(K_3).$$

Afirmação 3. *Se K_2 é não enumerável, então K_4 é não enumerável.*

De fato, caso contrário K_4 é homeomorfo a um intervalo de ordinais $[0, \xi]$ com $\omega \leq \xi < \omega_1$. Além disso, como

$$C(K_3, \ell_\infty(\Gamma)) = C(K_3, C(\beta\Gamma)) = C(K_3 \times \beta\Gamma),$$

onde $\beta\Gamma$ é a compactificação de Stone-Cech de um conjunto discreto Γ, segue da nossa hipótese que

$$C(K_3 \times \beta\Gamma) \oplus C([0,\xi], \ell_p(\Lambda)) \twoheadrightarrow C(K_2, \ell_p(\Lambda)) \twoheadrightarrow C([0,\xi^\omega], \ell_p(\Lambda)).$$

Como $K_3 \times \beta\Gamma$ é um espaço compacto de Hausdorff, pelo item (ii) do Lema 3.12 concluímos que $\xi^\omega < \xi^\omega$, que é um absurdo. Portanto, vale a afirmação 3. Disso, sendo K_2 e K_4 não enumeráveis, concluímos pelo Teorema de Milutin que $C(K_2) \sim C(K_4)$.

Afirmação 4. *Se K_2 e K_4 são enumeráveis, então $C(K_2) \sim C(K_4)$.*
De fato, sem perda de generalidade, suponha que $C(K_2)$ e $C(K_4)$ são isométricos a $C([0,\xi])$ e $C([0,\eta])$, respectivamente, com $\omega \leq \xi \leq \eta < \omega_1$. Então, observando que $C(K_1, \ell_\infty(\Gamma))$ é isométrico a $C(K_1 \times \beta\Gamma)$, pela hipótese temos

$$C(K_1 \times \beta\Gamma) \oplus C([0,\xi], \ell_p(\Lambda)) \twoheadrightarrow C([0,\eta], \ell_p(\Lambda)).$$

Então, pelo item (ii) do Lema 3.12 concluímos que $\eta < \xi^\omega$, e portanto,

$$C(K_2) = C([0,\xi]) \sim C([0,\eta]) = C(K_4).$$

Isto completa a prova do Teorema 3.11

□

Observe que no caso $1 < p < 2$, $\Gamma = \Lambda = \mathbb{N}$ e K_i para $1 \leq i \leq 4$ são compactos métricos enumeráveis, o Teorema 3.11 resolve o seguinte problema de lei de cancelamento, não contemplado em [24]:

$$C(K_1, \ell_\infty) \oplus C(K_2, \ell_p) \sim C(K_3, \ell_\infty) \oplus C(K_4, \ell_p) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_3) \text{ e } C(K_2) \sim C(K_4).$$

A seguir, destacamos alguns problemas que surgem naturalmente do Teorema 3.11.

Problema 3.13 *Seja $1 < p < 2$. Sob a Hipótese do Contínuo, classificar, a menos de um isomorfismo, os seguintes espaços em termos de espaços métricos infinitos K e S*

$$C(K, \ell_\infty) \oplus C(S, \ell_p(\mathbf{2}^{\aleph_0})).$$

Problema 3.14 *Classificar, a menos de isomorfismos, os seguintes espaços em termos de espaços métricos compactos K_1 e K_2:*

(a) $C(K_1, \ell_\infty) \oplus C(K_2, \ell_1)$.

(b) $C(K_1, \ell_\infty) \oplus C(K_2, \ell_p)$, *onde $2 \leq p < \infty$.*

Ainda temos o problema de classificação isomorfa dos espaços $C(K_1, \ell_1) \oplus C(K_2, \ell_p)$, $1 < p < \infty$, com K_1 e K_2 espaços métricos compactos enumeráveis, mas este caso se enquadra no Teorema da quase-dicotomia que será provado no próximo capítulo, visto que ℓ_p é de cotipo finito para $1 \leq p < \infty$.

Para encerrar, comentamos que é consequência imediata do Lema 3.12 o resultado abaixo, que resolve o Problema 4.5.b deixado em [24].

Proposição 3.15 *Sejam K_1 e K_2 espaços métricos compactos, X um espaço de Banach separável e Γ um conjunto não enumerável. Então,*

$$C([0,1], X) \oplus C(K_1, \ell_\infty(\Gamma)) \sim C([0,1], X) \oplus C(K_2, \ell_\infty(\Gamma)) \Leftrightarrow C(K_1) \sim C(K_2).$$

Capítulo 4

Uma interação entre geometrias de dimensão infinita de espaços de cotipo finito e espaços $C([0, \alpha])$, $\alpha < \omega_1$

4.1 Introdução

A noção de *cotipo* para um espaço de Banach emergiu dos trabalhos de Hoffmann-Jørgensen, S. Kwapién, B. Maurey e G. Pisier em meados da década de 1970 ([29], [34], [39], [41]), e tem sido encontrado uso frequente na geometria de espaços de Banach, veja por exemplo [40]. A definição de um espaço de cotipo finito é dada abaixo.

Definição 4.1 Dizemos que um espaço de Banach $X \neq \{0\}$ tem *cotipo finito* q se existir $2 \leq q < \infty$ e uma constante $K > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e para qualquer sequência de vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in X$, vale a desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^{n} ||v_i||^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq K \left(\int_0^1 ||\sum_{i=1}^{n} r_i(t)v_i||^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.1}$$

onde $r_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ denotam as *funções de Rademacher*, definidas por

$$r_i(t) = \text{sgn}(\text{sen}\, 2^i \pi t).$$

Sabemos que os clássicos espaços de Banach ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ são de cotipo finito ([12], página 219) e que todos os espaços de dimensão infinita $C(K)$ não o são ([45], página 34).

Além disso, no cenário da teoria local de espaços de Banach, foi provado em [41], Corolário 1.2, que um espaço de Banach X é de cotipo finito se e somente se $C([0, \omega])$ não é *finitamente* *representável* em X. Isto é, existe $\varepsilon > 0$ e um subespaço de dimensão finita F de $C([0,\omega])$ tal que para todo isomorfismo linear T de F sobre $T(F) \subset X$ temos $||T|| \cdot ||T^{-1}|| \geq 1 + \varepsilon$.

Então, parece natural investigar a relação entre a geometria desses espaços também com a geometria de dimensão infinita de espaços $C(K)$, que não são de cotipo finito.

4.2 O principal resultado

O principal propósito deste capítulo é mostrar que para quaisquer dois espaços de Banach de cotipo finito, ou um deles é isomorfo a um subespaço de alguma soma finita do outro, ou seus respectivos espaços de funções vetoriais contínuas definidos em intervalos infinitos enumeráveis de ordinais $[0,\alpha]$ são, em algum sentido, muito distantes um do outro. Mais precisamente, nosso principal resultado é o teorema que segue.

Teorema 4.2 *Suponha que X e Y sejam espaços de Banach de cotipo finito. Então, pelo menos uma das seguintes afirmações vale:*

(1) *Existe um ordinal finito n tal que*

$$X \hookrightarrow C([0,n],Y) \text{ ou } Y \hookrightarrow C([0,n],X).$$

(2) *Para quaisquer ordinais infinitos e enumeráveis α, β, ξ e η, são equivalentes:*

(a) $C([0,\alpha],X) \oplus C([0,\xi],Y) \sim C([0,\beta],X) \oplus C([0,\eta],Y)$

(b) $C([0,\alpha]) \sim C([0,\beta])$ *e* $C([0,\xi]) \sim C([0,\eta])$.

Observação 4.3 O Teorema 4.2 não pode ser estendido para ordinais não enumeráveis. De fato, tome $1 < p \neq q < \infty$, $X = \ell_p$ e $Y = \ell_q$. É bem conhecido que a afirmação (1) do Teorema 4.2 não vale, i.e., sabemos que $\ell_p \not\hookrightarrow \ell_q$ e que $\ell_q \not\hookrightarrow \ell_p$ (veja Proposição 1.18), e como $\forall 1 \leq m,n < \omega$ valem $\ell_p \sim (\ell_p)^n$ e $\ell_q \sim (\ell_q)^m$, tem-se que

$$\ell_p \not\hookrightarrow (\ell_q)^m \text{ e } \ell_q \not\hookrightarrow (\ell_p)^n.$$

Por outro lado, como $\ell_p \sim (\ell_p)^2 = \ell_p \oplus \ell_p$, segue que

$$C([0,\omega_1],\ell_p) \sim C([0,\omega_1],(\ell_p)^2) \sim C([0,\omega_1],\ell_p \oplus \ell_p) \sim$$

$$\sim C([0,\omega_1],\ell_p) \oplus C([0,\omega_1],\ell_p) \sim C([0,\omega_1 2],\ell_p).$$

Então, para todo ordinal ξ temos que

$$C([0,\omega_1],\ell_p)\oplus C([0,\xi],\ell_q)\sim C([0,\omega_1 2],\ell_p)\oplus C([0,\xi],\ell_q).$$

Porém, de acordo com o Teorema 1.66 temos que $C([0,\omega_1])$ não é isomorfo a $C([0,\omega_1 2])$. Então, a afirmação (2) do Teorema 4.2 também não vale.

Observação 4.4 Sem a suposição de cotipo nos espaços de Banach X e Y a afirmação (2) do Teorema 4.2 pode ser falsa quando a afirmação (1) também for falsa. De fato, vamos mostrar primeiramente que para qualquer espaço de Banach $Y \neq \{0\}$, tal que $C([0,\omega]) \not\hookrightarrow Y^n$ e $Y \not\hookrightarrow (C([0,\omega]))^n$ para todo $1 \leq n < \omega$, temos

$$C([0,\omega],C([0,\omega]))\oplus C([0,\omega^\omega],Y)\sim C([0,\omega^\omega],C([0,\omega]))\oplus C([0,\omega^\omega],Y). \tag{4.2}$$

Para mostrar isto, notamos que

$$C([0,\omega],C([0,\omega]))\sim C([0,\omega]\times[0,\omega])\sim C([0,\omega]), \tag{4.3}$$

e

$$C([0,\omega^\omega],C([0,\omega]))\sim C([0,\omega^\omega]\times[0,\omega])\sim C([0,\omega^\omega]). \tag{4.4}$$

As provas dos isomorfismos acima são obtidas aplicando-se o Teorema 1.10 e a Proposição 1.53, onde para (4.3) consideramos $\gamma=\theta=0$ e para (4.4) consideramos $\gamma=1$ e $\theta=0$ na referida Proposição. Para provar (4.2) faremos duas afirmações:

- Afirmação 1. $C([0,\omega^\omega])\oplus C([0,\omega^\omega],Y)\sim C([0,\omega^\omega],Y)$. De fato, como $Y\neq\{0\}$, seja H espaço de Banach tal que $Y=\mathbb{R}\oplus H$. Assim,

  $$C([0,\omega^\omega],Y)\sim C([0,\omega^\omega],\mathbb{R})\oplus C([0,\omega^\omega],H).$$

  Somando $C([0,\omega^\omega])$ em ambos os lados do isomorfismo acima, obtemos

  $$C([0,\omega^\omega])\oplus C([0,\omega^\omega],Y)\sim C([0,\omega^\omega])\oplus C([0,\omega^\omega])\oplus C([0,\omega^\omega],H),$$

  e tomando $\alpha=\omega^\omega$, $n=2$ e $X=\mathbb{R}$ no Lema 1.57 obtemos que

  $$C([0,\omega^\omega])\oplus C([0,\omega^\omega])\sim C([0,\omega^\omega]),$$

  e assim

  $$C([0,\omega^\omega])\oplus C([0,\omega^\omega],Y)\sim C([0,\omega^\omega])\oplus C([0,\omega^\omega],H)\sim C([0,\omega^\omega],Y).$$

Logo, vale a Afirmação 1.

- Afirmação 2. $C([0,\omega]) \oplus C([0,\omega^\omega], Y) \sim C([0,\omega^\omega], Y)$. De fato, como $Y \neq \{0\}$, seja H espaço de Banach tal que $Y = \mathbb{R} \oplus H$. Assim,

$$C([0,\omega^\omega], Y) \sim C([0,\omega^\omega], \mathbb{R}) \oplus C([0,\omega^\omega], H).$$

Somando $C([0,\omega])$ em ambos os lados do isomorfismo acima, obtemos

$$C([0,\omega]) \oplus C([0,\omega^\omega], Y) \sim C([0,\omega]) \oplus C([0,\omega^\omega]) \oplus C([0,\omega^\omega], H),$$

e tomando $\alpha = \omega^\omega$, $\beta = \omega$ e $X = \mathbb{R}$ no Lema 1.58 obtemos que

$$C([0,\omega]) \oplus C([0,\omega^\omega]) \sim C([0,\omega^\omega]),$$

e assim

$$C([0,\omega]) \oplus C([0,\omega^\omega], Y) \sim C([0,\omega^\omega]) \oplus C([0,\omega^\omega], H) \sim C([0,\omega^\omega], Y).$$

Logo, vale a Afirmação 2.

Portanto, pelas Afirmações 1 e 2, juntamente com (4.3) e (4.4), concluímos o isomorfismo em (4.2). No entanto, embora valendo (4.2), temos pelo clássico Teorema de Bessaga e Pełczyǹski (Teorema 1.51 - (i)) que $C([0,\omega])$ não é isomorfo a $C([0,\omega^\omega])$. Logo, a afirmação (2) do Teorema 4.2 também não vale.

A prova do Teorema 4.2 de *quase-dicotomia* será apresentada na Seção 4.4 visto que precisamos apresentar alguns resultados intermediários que serão discutidos nesta e nas próximas seções.

Para provar o Teorema 4.2 vamos primeiramente estender o Teorema 1.63 apresentado no Capítulo 1 no seguinte:

Teorema 4.5 *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito, Y um espaço de Banach e $\omega \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$ ordinais. Se*

$$C([0,\alpha], X \oplus Y) \sim C([0,\beta], X \oplus Y),$$

então

$$X \hookrightarrow Y^n, \text{ para algum } 1 \leq n < \omega \text{ ou } C([0,\alpha]) \sim C([0,\beta]).$$

Observação 4.6 Afirmamos que o Teorema 4.5, no caso quando $X = \ell_1$, resolve o Problema 5.2a deixado em [24], ou seja, obtemos a classificação isomorfa dos espaços $C(K, Y \oplus \ell_1)$, onde Y não contém cópia de ℓ_1 e K denota um espaço métrico compacto. Enfatizamos que é um problema ainda em aberto saber se a afirmação do Teorema 4.5 também é válida quando $X = \ell_\infty$, o que corresponde ao Problema 5.2b do mesmo artigo, ou seja, não sabemos apresentar a classificação isomorfa dos espaços $C(K, Y \oplus \ell_\infty)$, onde Y não possui cópia de ℓ_∞ e K denota um espaço métrico compacto. No entanto, no caso quando $\operatorname{dens} Y < \mathfrak{c}$, o Teorema 2.3 fornece uma classificação isomorfa para os espaços $C(K, Y \oplus \ell_\infty)$.

Na próxima seção provaremos o Teorema 4.5.

4.3 Resultados auxiliares

Para provar o Teorema 4.5 vamos estabelecer alguns resultados auxiliares. De agora em diante, como já fizemos no capítulo anterior, vamos denotar os espaços $C([0,\alpha], X)$ por X^α. Também vamos escrever $X_0^\alpha = \{f \in X^\alpha : f(\alpha) = 0\}$, c.f. definido no Capítulo 1. No que segue, iremos usar seguidamente, sem menção explícita do Lema 1.55, que X^α é isomorfo a X_0^α, sempre que $\alpha \geq \omega$.

Proposição 4.7 *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito, Y um espaço de Banach não contendo cópia de X e $\omega \leq \xi < \omega_1$ ordinal. Então*

$$X^{\xi^\omega} \hookrightarrow X^\xi \oplus Y \Longrightarrow X^\xi \hookrightarrow X^\gamma \oplus Y, \ \textit{para algum } \omega \leq \gamma < \xi.$$

Demonstração. Assuma que X é de cotipo q para algum $2 \leq q < \infty$ e seja $K > 0$ uma constante satisfazendo (4.1). Suponha por absurdo que

$$X^\xi \not\hookrightarrow X_0^\gamma \oplus Y, \forall \gamma < \xi.$$

De acordo com a nossa hipótese existem dois operadores lineares limitados

$$T_1 : X^{\xi^\omega} \to X_0^\xi \ \text{ e } \ T_2 : X^{\xi^\omega} \to Y$$

e uma constante $M > 0$ tais que para todo $f \in X^{\xi^\omega}$, tem-se

$$M||f|| \leq \sup\left(||T_1(f)||, ||T_2(f)||\right) \leq ||f||. \tag{4.5}$$

Fixemos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{M}{K}\sqrt[q]{m} > 1,$$

e $\varepsilon > 0$ tal que

$$1 + \varepsilon < \frac{M}{K}\sqrt[q]{m}. \tag{4.6}$$

Denote para todo $\eta \in [0, \xi)$,

$$\Delta^1_\eta = [\xi^m \eta + 1, \xi^m(\eta + 1)],$$

e

$$X_m = \{f \in X^{\xi^\omega} : \forall \eta \in [0, \xi), f \text{ é constante em } \Delta^1_\eta \text{ e } f(\gamma) = 0, \forall \gamma \in [\xi^{m+1}, \xi^\omega]\}.$$

É fácil verificar que X_m é isométrico a X^ξ_0. Como Y não contém cópia de X, a restrição de T_2 para X_m não é um isomorfismo sobre a imagem. Então, existe $f_1 \in X_m$ com

$$||f_1|| = 1 \text{ e } ||T_2(f_1)|| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $0 \leq \eta_1 < \xi$ tal que exista $x_1 \in X$ com

$$||x_1|| = 1 \text{ e } f_1(\gamma) = x_1, \forall \gamma \in \Delta^1_{\eta_1}.$$

Como $T_1(f_1) \in X^\xi_0$, segue que existe $\gamma_1 < \xi$ tal que

$$||T_1(f_1(\gamma))|| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall \gamma \in [\gamma_1 + 1, \xi).$$

Denote para todo $\eta \in [0, \xi)$,

$$\Delta^2_\eta = [\xi^m \eta_1 + \xi^{m-1}\eta + 1, \xi^m \eta_1 + \xi^{m-1}(\eta + 1)]$$

e

$$X_{m-1} = \{f \in X^{\xi^\omega} : \forall \eta \in [0, \xi), f \text{ é constante em } \Delta^2_\eta \text{ e } f(\gamma) = 0, \forall \gamma \notin [\xi^m \eta_1, \xi^m(\eta_1 + 1)]\}.$$

Também é fácil ver que X_{m-1} é isométrico a X^ξ_0. Seja P_{γ_1} a projeção canônica de X^ξ sobre X^{γ_1}. Como por hipótese

$$X^\xi \not\hookrightarrow X^{\gamma_1} \oplus Y,$$

segue que a restrição do operador linear limitado $T_2 + P_{\gamma_1} \circ T_1$ definido por

$$(T_2 + P_{\gamma_1} \circ T_1)(g) = (T_2(g), P_{\gamma_1} T_1(g)),$$

em X_{m-1} não pode ser um isomorfismo sobre a imagem. Então existe $f_2 \in X_{m-1}$ tal que

$$||f_2|| = 1, \; ||T_2(f_2)|| \leq \frac{\varepsilon}{2^2} \text{ e } ||T_1(f_2)(\gamma)|| \leq \frac{\varepsilon}{2^2}, \forall \gamma \in [0, \gamma_1].$$

Fixe $\gamma_2 \in [\gamma_1 + 1, \xi)$ tal que

$$||T_1(f_2)(\gamma)|| \leq \frac{\varepsilon}{2^2}, \forall \gamma \in [\gamma_2 + 1, \xi).$$

Seja $0 \leq \eta_2 < \xi$ tal que existe $x_2 \in X$ com

$$||x_2|| = 1 \text{ e } f_2(\gamma) = x_2, \forall \gamma \in \Delta^2_{\eta_2}.$$

Repetindo este procedimento m vezes encontramos ordinais $\eta_1 < \eta_2 < \ ... < \eta_m < \xi$, $\gamma_1 < \gamma_2 < ... < \gamma_m < \xi$, funções f_1, f_2, ..., f_m e elementos x_1, x_2, ..., $x_m \in X$ tais que:

(i) $||T_2(f_i)|| \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$, $1 \leq i \leq m$.

(ii) $||T_1(f_i)(\gamma)|| \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$, $\forall \gamma \in [0, \gamma_{i-1}]$ e $2 \leq i \leq m$.

(iii) $||T_1(f_i)(\gamma)|| \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$, $\forall \gamma \in [\gamma_i + 1, \xi]$ e $1 \leq i < m$.

(iv) $||x_i|| = 1$, $1 \leq i \leq m$.

(v) $f_i(\gamma) = x_i$, $\forall \gamma \in \Delta^i_{\eta_i}$ e $1 \leq i \leq m$, onde

$$\Delta^i_{\eta_i} = [\xi^m \eta_1 + \xi^{m-1}\eta_2 + ... + \xi^{m-(i-1)}\eta_i + 1, \xi^m \eta_1 + \xi^{m-1}\eta_2 + ... + \xi^{m-(i-1)}(\eta_i + 1)].$$

Observando as funções de Rademacher $r_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, particionando o intervalo $[0, 1]$ em 2^m intervalos de comprimento $\frac{1}{2^m}$ cada, ou seja, tomando $I_1 = [0, \frac{1}{2^m}]$, $I_2 = [\frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}]$,..., $I_j = [\frac{j-1}{2^m}, \frac{j}{2^m}]$,... , $I_{2^m} = [\frac{2^m-1}{2^m}, 1]$, considerando $r_i(t) = \pm 1$ temos que

$$\sum_{i=1}^{m} r_i(t)x_i = \begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_m & \text{se} \quad t \in I_1, \\ -x_1 + x_2 + ... + x_m & \text{se} \quad t \in I_2, \\ x_1 - x_2 + ... + x_m & \text{se} \quad t \in I_3, \\ \quad \vdots & \\ -x_1 - x_2 - ... - x_m & \text{se} \quad t \in I_{2^m}. \end{cases}$$

Assim, segue de (4.1) que

$$\frac{\sqrt[q]{m}}{K} \leq \left[\frac{||x_1 + ... + x_m||^2}{2^m} + \frac{||-x_1 + x_2 + ... + x_m||^2}{2^m} + ... + \frac{||-x_1 - ... - x_m||^2}{2^m} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

Afirmamos que para uma escolha adequada de escalares $r_i=\pm 1$,

$$||\sum_{i=1}^{m} r_i x_i|| \geq \frac{1}{K}\sqrt[q]{m}.$$

De fato, por simplicidade vamos escrever

$$\begin{cases} a_1 = ||x_1+x_2+...+x_m||, \\ a_2 = ||-x_1+x_2+...+x_m||, \\ a_3 = ||x_1-x_2+...+x_m||, \\ \quad\vdots \\ a_{2^m} = ||-x_1-x_2-...-x_m||. \end{cases}$$

Assim, se por absurdo $a_i \leq \dfrac{\sqrt[q]{m}}{K}$, para todo $i=1,2,...,2^m$, então teríamos

$$a_1^2+a_2^2+...+a_{2^m}^2 \leq 2^m\cdot\left(\frac{\sqrt[q]{m}}{K}\right)^2,$$

e daí

$$\frac{\sqrt[q]{m}}{K} \geq \left[\frac{||x_1+...+x_m||^2}{2^m}+\frac{||-x_1+x_2+...+x_m||^2}{2^m}+...+\frac{||-x_1-...-x_m||^2}{2^m}\right]^{\frac{1}{2}},$$

que contradiz (4.7). Logo, para uma escolha adequada de $r_i=\pm 1$, vale que

$$||\sum_{i=1}^{m} r_i x_i|| \geq \frac{1}{K}\sqrt[q]{m}.$$

Seja $f=\displaystyle\sum_{i=1}^{m} r_i f_i$. Disso, claramente valem as desigualdades

(vi) $||f|| \geq \dfrac{1}{K}\sqrt[q]{m}$,

(vii) $||T_2(f)|| \leq \varepsilon$.

(viii) $||T_1(f)|| \leq 1+\varepsilon$.

Então de (vi), (4.5), (vii) e (viii) temos

$$M\cdot\frac{1}{K}\sqrt[q]{m} \leq M\cdot||f|| \leq \sup(||T_1(f)||,||T_2(f)||) \leq 1+\varepsilon,$$

ou seja,

$$\frac{M}{K}\sqrt[q]{m} \leq 1+\varepsilon,$$

que entra em contradição com (4.6). Isto conclui a prova da proposição.

$\square$

Proposição 4.8 *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito e Y um espaço de Banach não contendo cópia de X. Então para todo ordinal $\omega \leq \xi < \omega_1$*

$$X^{\xi^\omega} \not\hookrightarrow X^\xi \oplus Y.$$

Demonstração. Seja A o conjunto de ordinais $\omega \leq \xi < \omega_1$ satisfazendo a seguinte condição:

$$X^{\xi^\omega} \hookrightarrow X^\xi \oplus Y \text{ para algum } Y \text{ com } X \not\hookrightarrow Y.$$

Por absurdo, suponha que $A \neq \emptyset$ e seja ξ_1 o mínimo de A. Então deduzimos que

$$X^{\xi_1^\omega} \hookrightarrow X^{\xi_1} \oplus Y_1, \tag{4.8}$$

para algum espaço de Banach Y_1 não contendo cópia de X.

Por outro lado, como X é de cotipo finito, segue que X não contém cópia de c_0 ([38], página 811). Então o Teorema 1.12 implica que para todo $1 \leq n < \omega$, X^n não contém cópia de c_0. Por isso, pelo Teorema 1.15 segue que todo operador linear limitado de c_0 em X^n é compacto. Então, se Y_2 é um espaço de Banach arbitrário não contendo cópia de X, pelos Lemas 1.57 e 1.64 deduzimos que

$$X^\omega \sim X^{n\omega} \sim (X^n)^\omega \sim (X^n)_0^\omega \not\hookrightarrow X^n \oplus Y_2,$$

para todo $1 \leq n < \omega$. Então, pela Proposição 4.7 concluímos que

$$X^{\omega^\omega} \not\hookrightarrow X^\omega \oplus Y_2.$$

Isto significa que $\omega < \xi_1 = \min A$.

Em seguida, observe que

$$X^{\xi_1} \not\hookrightarrow X^\xi \oplus Y_1, \, \forall \xi < \xi_1. \tag{4.9}$$

De fato, caso contrário, existe um ordinal $\xi_0 < \xi_1$ tal que

$$X^{\xi_1} \hookrightarrow X^{\xi_0} \oplus Y_1. \tag{4.10}$$

Disso, pela minimalidade de ξ_1 deduzimos que

$$X^{\xi_0^\omega} \not\hookrightarrow X^{\xi_0} \oplus Y_1. \tag{4.11}$$

Então (4.10) e (4.11) implicam que

$$X^{\xi_0^\omega} \not\hookrightarrow X^{\xi_1}. \tag{4.12}$$

Vamos agora distinguir dois casos:

Caso 1: $\xi_0^\omega < \xi_1^\omega$. Então, pelo Teorema 1.51 -(i), vemos que

$$C([0,\xi_0^\omega]) \sim C([0,\xi_1]),$$

e daí tem-se que $C([0,\xi_0^\omega]) \hookrightarrow C([0,\xi_1])$, ou seja,

$$\mathbb{R}^{\xi_0^\omega} \hookrightarrow \mathbb{R}^{\xi_1}.$$

Consequentemente,

$$X^{\xi_0^\omega} \hookrightarrow X^{\xi_1},$$

o que é um absurdo por (4.12).

Caso 2: $\xi_1^\omega \leq \xi_0^\omega$. Neste caso, como $\xi_0 < \xi_1 < \xi_1^\omega \leq \xi_0^\omega$, pelo Lema 1.56 segue que

$$X^{\xi_0} \sim X^{\xi_1}.$$

Então podemos reescrever (4.11) como

$$X^{\xi_1^\omega} \not\hookrightarrow X^{\xi_1} \oplus Y_1,$$

que entra em contradição com (4.8).
Então (4.9) vale e daí pela Proposição 4.7 aplicada em (4.9) concluímos que

$$X^{\xi_1^\omega} \not\hookrightarrow X^{\xi_1} \oplus Y_1,$$

o que contradiz (4.8). Então $A = \emptyset$, o que conclui a prova da Proposição 4.8.

$\square$

Estamos, por fim, em condições de provar o Teorema 4.5:

Demonstração do Teorema 4.5: Suponha que $\omega \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$,

$$(X \oplus Y)^{\alpha} \sim (X \oplus Y)^{\beta}.$$

Suponhamos que

$$X \not\hookrightarrow Y^n, \forall 1 \leq n < \omega. \tag{4.13}$$

Provaremos que $C([0,\alpha])$ é isomorfo a $C([0,\beta])$. Pelo clássico Teorema de Bessaga e Pełczyński 1.51-(i), é suficiente mostrar que $\beta < \alpha^{\omega}$. Assim, suponha por absurdo que $\alpha^{\omega} \leq \beta$. Então, pelas nossas hipóteses temos

$$X^{\alpha^{\omega}} \hookrightarrow (X \oplus Y)^{\alpha^{\omega}} \hookrightarrow (X \oplus Y)^{\beta} \sim (X \oplus Y)^{\alpha} \sim X^{\alpha} \oplus Y^{\alpha},$$

ou seja,

$$X^{\alpha^{\omega}} \hookrightarrow X^{\alpha} \oplus Y^{\alpha}. \tag{4.14}$$

Por outro lado, como X não possui cópia de c_0 (pois X é de cotipo finito) e (4.13) vale, ou seja, como $c_0 \not\hookrightarrow X$ e $X \not\hookrightarrow Y^n$, $\forall 1 \leq n < \omega$, segue do Teorema 1.65 que

$$X \not\hookrightarrow Y^{\alpha}.$$

Disso, e de acordo com a Proposição 4.8, temos que

$$X^{\alpha^{\omega}} \not\hookrightarrow X^{\alpha} \oplus Y^{\alpha},$$

que é uma contradição com (4.14).
Portanto, $\beta < \alpha^{\omega}$, donde segue que $C([0,\alpha]) \sim C([0,\beta])$. Isso conclui a prova do Teorema 4.5.

□

O Teorema 4.5 também ajuda na resolução do Problema 4.5a deixado em [24]. Ou seja, provamos o seguinte problema de classificação isomorfa:

Teorema 4.9 *Sejam K_1 e K_2 espaços métricos compactos, X um espaço de Banach separável e Γ um conjunto não enumerável. Se*

$$C([0,1], X) \oplus C(K_1, \ell_1(\Gamma)) \sim C([0,1], X) \oplus C(K_2, \ell_1(\Gamma)),$$

então $C(K_1) \sim C(K_2)$.

Demonstração. Faremos a prova em duas partes. Primeiramente, suponha que K_1 e K_2 são espaços métricos compactos enumeráveis, logo pelo Teorema de Mazurkiewicz-Sierpiński segue que existem ordinais infinitos enumeráveis α e β tais que $C(K_1) \sim C([0,\alpha])$ e $C(K_2) \sim C([0,\beta])$. Sem perda de generalidade, suponha que $\omega \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$. Assim, pela hipótese temos que

$$C([0,1],X) \oplus C([0,\alpha],\ell_1(\Gamma)) \sim C([0,1],X) \oplus C([0,\beta],\ell_1(\Gamma)). \tag{4.15}$$

Como para qualquer ordinal $\omega \leq \gamma < \omega_1$ vale

$$C([0,\gamma],C([0,1],X)) \sim C([0,\gamma] \times [0,1],X) \sim C([0,1],X),$$

temos que (4.15) pode ser escrito como

$$C([0,\alpha],C([0,1],X) \oplus \ell_1(\Gamma)) \sim C([0,\beta],C([0,1],X) \oplus \ell_1(\Gamma)), \tag{4.16}$$

onde $C([0,1],X)$ é separável, devido às Proposições 1.43 e 1.44, e $\ell_1(\Gamma)$ é de cotipo finito.

Como $\ell_1(\Gamma)$ não é separável, pois Γ é não enumerável, temos que $\ell_1(\Gamma)$ não pode ser isomorfo a nenhum subespaço de $C([0,1],X)$, pois este é separável, e então temos que

$$\ell_1(\Gamma) \not\hookrightarrow (C([0,1],X))^n, \ \forall 1 \leq n < \omega. \tag{4.17}$$

Logo, por (4.16) e (4.17), segue do Teorema 4.5 que $C([0,\alpha]) \sim C([0,\beta])$, ou seja, concluímos que $C(K_1) \sim C(K_2)$.

Suponha agora que K_1 é não enumerável. Então pelo Teorema de Milutin segue que $C(K_1) \sim C([0,1])$ e que daí $C(K_1,\ell_1(\Gamma)) \sim C([0,1],\ell_1(\Gamma))$. Vamos mostrar que K_2 também é não enumerável. Se por absurdo K_2 é enumerável, então pelo Teorema de Mazurkiewicz-Sierpiński segue que existe um ordinal $\omega \leq \alpha < \omega_1$ tal que $C(K_2) \sim C([0,\alpha])$. Dessa forma, pela hipótese do teorema segue que

$$C([0,1],X) \oplus C([0,1],\ell_1(\Gamma)) \sim C([0,1],X) \oplus C([0,\alpha],\ell_1(\Gamma)). \tag{4.18}$$

Como $C([0,\alpha^\omega]) \hookrightarrow C([0,1])$, segue que

$$C([0,\alpha^\omega],\ell_1(\Gamma)) \hookrightarrow C([0,1],\ell_1(\Gamma)),$$

e então

$$C([0,1],X) \oplus C([0,\alpha^\omega],\ell_1(\Gamma)) \hookrightarrow C([0,1],X) \oplus C([0,1],\ell_1(\Gamma)).$$

Pelo isomorfismo em (4.18) temos

$$C([0,1],X) \oplus C([0,\alpha^\omega],\ell_1(\Gamma)) \hookrightarrow C([0,1],X) \oplus C([0,\alpha],\ell_1(\Gamma)).$$

Denote $Y = C([0,1],X)$. Note que pelas Proposições 1.43 e 1.44 concluímos que Y é separável. Temos, então,

$$C([0,\alpha^\omega],\ell_1(\Gamma)) \hookrightarrow C([0,\alpha^\omega],\ell_1(\Gamma)) \oplus Y \hookrightarrow C([0,\alpha],\ell_1(\Gamma)) \oplus Y,$$

ou seja,

$$(\ell_1(\Gamma))^{\alpha^\omega} \hookrightarrow (\ell_1(\Gamma))^\alpha \oplus Y,$$

onde $\ell_1(\Gamma)$ é de cotipo finito e $\ell_1(\Gamma) \not\hookrightarrow Y$, pois $\ell_1(\Gamma)$ não é separável e Y é separável, mas isso contradiz a Proposição 4.8.

Portanto, K_2 também é não enumerável.

Com isso, sendo K_1 e K_2 ambos não enumeráveis, pelo Teorema de Milutin segue que

$$C(K_1) \sim C(\mathbf{2}^{\aleph_0}) \sim C(K_2).$$

□

4.4 Prova da quase-dicotomia

Nesta seção provaremos o Teorema 4.2 que fornece uma quase-dicotomia para espaços de cotipo finito envolvendo os espaços $C([0,\alpha],X)$, $\alpha < \omega_1$.

Demonstração do Teorema 4.2 (quase-dicotomia). Mostraremos a implicação não-trivial. Supomos que a afirmação (1) do Teorema 4.2 não vale, i.e.,

$$X \not\hookrightarrow Y^m \text{ e } Y \not\hookrightarrow X^n \ \forall 1 \leq m,n < \omega. \tag{4.19}$$

Tome $\omega \leq \alpha,\beta,\xi,\eta < \omega_1$ satisfazendo

$$X^\alpha \oplus Y^\xi \sim X^\beta \oplus Y^\eta. \tag{4.20}$$

Provaremos que $C([0,\alpha])$ é isomorfo a $C([0,\beta])$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\alpha \leq \beta$. Pelo clássico Teorema 1.51 de Bessaga e Pełczyński, $C([0,\omega^{\omega^\gamma}])$ para $0 \leq \gamma < \omega_1$ são um conjunto completo de representantes de classes de isomorfismos de espaços $C([0,\alpha])$,

$\omega \le \alpha < \omega_1$. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha = \omega^{\omega^{\delta_1}}$, $\xi = \omega^{\omega^{\delta_2}}$, $\beta = \omega^{\omega^{\delta_3}}$ e $\eta = \omega^{\omega^{\delta_4}}$ para certos ordinais δ_i, $1 \le i \le 4$. Fixe $\omega < \theta < \omega_1$ satisfazendo $\theta > \delta_i$, para todo $1 \le i \le 4$. Agora, para cada $1 \le i \le 4$ considere os seguintes espaços métricos compactos

$$F_i = [0, \omega^{\omega^{\delta_i}}] \times [0, \omega^{\omega^{\theta}}].$$

Note que F_i possui $\omega^{\omega^{\delta_i}} \cdot \omega^{\omega^{\theta}} = \omega^{\omega^{\delta_i} + \omega^{\theta}}$ pontos.
Como pelo Lema 1.68 temos que $[0, \omega^{\lambda}]^{(\lambda)} = \{\omega^{\lambda}\}$ para todo ordinal λ, com a ajuda do lema 1.67, segue que

$$(F_i)^{(\omega^{\theta})} = [0, \omega^{\omega^{\delta_i}}] \times \{\omega^{\omega^{\theta}}\},$$

e então

$$(F_i)^{(\omega^{\theta} + \omega^{\delta_i})} = ((F_i)^{(\omega^{\theta})})^{(\omega^{\delta_i})} = \{(\omega^{\omega^{\delta_i}}, \omega^{\omega^{\theta}})\},$$

ou seja, $(F_i)^{(\omega^{\theta} + \omega^{\delta_i})}$ possui apenas um ponto, a saber, o ponto de coordenadas $(\omega^{\omega^{\delta_i}}, \omega^{\omega^{\theta}})$.

Então o derivado $(F_i)^{(\omega^{\theta} + \omega^{\delta_i})}$ é finito com $n = 1$ ponto, e com isso temos que

$$(\gamma, n) = (\omega^{\theta} + \omega^{\delta_i}, 1)$$

é o sistema característico de F_i, $1 \le i \le 4$ (veja essa definição no Capítulo 1).
Assim, pelo Lema 1.69 (Semadeni) concluímos que F_i é homeomorfo a $\Gamma(\omega^{\gamma}, 1) = [0, \omega^{\gamma} \cdot 1]$, onde $\gamma = \omega^{\theta} + \omega^{\delta_i}$, ou seja, $F_i \approx [0, \omega^{\omega^{\theta} + \omega^{\delta_i}}]$, para todo $1 \le i \le 4$.

Agora, como vale a desigualdade

$$\omega^{\omega^{\theta}} < \left(\omega^{\omega^{\theta} + \omega^{\delta_i}}\right)^{\omega},$$

segue pelo Teorema 1.51 de Bessaga e Pełczyński que

$$C([0, \omega^{\omega^{\theta} + \omega^{\delta_i}}]) \sim C([0, \omega^{\omega^{\theta}}]).$$

Seja $K = [0, \omega^{\omega^{\theta}}]$. Disso, e como $F_i \approx [0, \omega^{\omega^{\theta} + \omega^{\delta_i}}]$, podemos escrever

$$C([0, \omega^{\omega^{\delta_i}}] \times K) \sim C(F_i) \sim C([0, \omega^{\omega^{\theta} + \omega^{\delta_i}}]) \sim C([0, \omega^{\omega^{\theta}}]) \sim C(K),$$

ou seja,

$$C([0, \omega^{\omega^{\delta_i}}] \times K) \sim C(K), 1 \le i \le 4, \tag{4.21}$$

e

$$C(K) \oplus C([0, \omega^{\omega^{\delta_i}}]) \sim C([0, \omega^{\omega^{\theta}}]) \oplus C([0, \omega^{\omega^{\delta_i}}]) \sim C([0, \omega^{\omega^{\theta}}] \oplus [0, \omega^{\omega^{\delta_i}}]) \sim$$

$$\sim C([0,\omega^{\omega^\theta+\omega^{\delta_i}}]) \sim C([0,\omega^{\omega^\theta}]) \sim C(K),$$

ou seja,

$$C(K) \oplus C([0,\omega^{\omega^{\delta_i}}]) \sim C(K),\ 1 \leq i \leq 4. \tag{4.22}$$

Por outro lado, por (4.20) temos

$$C(K,Y) \oplus C([0,\alpha],X) \oplus C([0,\xi],Y) \sim C(K,Y) \oplus C([0,\beta],X) \oplus C([0,\eta],Y). \tag{4.23}$$

Então, por (4.22) e (4.23), obtemos

$$C([0,\alpha],X) \oplus C(K,Y) \sim C([0,\beta],X) \oplus C(K,Y). \tag{4.24}$$

Mas de (4.21), usando o Teorema 1.10-item (d), concluímos que, sendo $\mu = \alpha = \omega^{\omega^{\delta_1}}$ ou $\mu = \beta = \omega^{\omega^{\delta_3}}$,

$$C([0,\mu] \times K, Y) \sim C(K,Y),$$

e daí (4.24) fica:

$$C([0,\alpha],X) \oplus C([0,\alpha] \times K, Y) \sim C([0,\beta],X) \oplus C([0,\beta] \times K, Y),$$

e como para $\alpha = \mu$ ou $\beta = \mu$, pela Proposição 1.46 vale

$$C([0,\mu] \times K, Y) \sim C([0,\mu], C(K,Y)),$$

obtemos

$$C([0,\alpha],X) \oplus C([0,\alpha],C(K,Y)) \sim C([0,\beta],X) \oplus C([0,\beta],C(K,Y)). \tag{4.25}$$

Ainda, pelo Teorema 1.10, item (e), para $\mu = \alpha$ ou $\mu = \beta$, vale

$$C([0,\mu],X) \oplus C([0,\mu],C(K,Y)) \sim C([0,\mu], X \oplus C(K,Y,))$$

segue que (4.25) fica

$$C([0,\alpha], X \oplus C(K,Y)) \sim C([0,\beta], X \oplus C(K,Y)). \tag{4.26}$$

Observe que

$$C(K,Y) \sim C(K,Y)^m,\ \forall 1 \leq m < \omega. \tag{4.27}$$

Como X não contém cópia de c_0 e como (4.19) vale, pelo Teorema 1.65 segue que

$$X \not\hookrightarrow Y^{\omega^{\omega^\theta}},$$

e como $Y^{\omega^{\omega^\theta}} = C([0,\omega^{\omega^\theta}],Y) \sim C(K,Y)$, obtemos

$$X \not\hookrightarrow C(K,Y). \tag{4.28}$$

Assim, de acordo com (4.26), (4.27), (4.28) e o Teorema 4.5 concluímos que

$$C([0,\alpha]) \sim C([0,\beta]).$$

Analogamente se prova que

$$C([0,\xi]) \sim C([0,\eta]).$$

Isto conclui a prova do Teorema 4.2.

□

4.5 Observações finais e problemas em aberto

Com relação a extensões do Teorema 4.2, observamos que se K é um espaço métrico compacto enumerável, então pelo clássico Teorema de Mazurkiewicz e Sierpiński (Teorema 1.50) K é homeomorfo a um intervalo de ordinais $[0,\alpha]$, com $\alpha < \omega_1$. Então, a afirmação (2) do Teorema 4.2 é uma lei de cancelamento para espaços métricos compactos infinitos enumeráveis. Não obstante, não sabemos se esta lei de cancelamento pode ser estendida para espaços métricos compactos não enumeráveis, no caso onde a afirmação (1) do Teorema 4.2 não vale.

Por exemplo, não sabemos obter a classificação isomorfa dos espaços $C(K_1,\ell_p) \oplus C(K_2,\ell_q)$, onde $1 < p \neq q < \infty$ e K_1 e K_2 são espaços métricos compactos, onde pelo menos um deles é não enumerável. Mais concretamente, pelo Teorema de Milutin, temos os seguintes problemas:

Problema 4.10 *Para todo ordinal infinito enumerável η,*

$$C([0,1],\ell_p) \oplus C([0,1],\ell_q) \nsim C([0,1],\ell_p) \oplus C([0,\eta],\ell_q)\,?$$

Problema 4.11 *Suponha que $\xi \leq \eta$ são ordinais infinitos enumeráveis.*

$$C([0,1],\ell_p) \oplus C([0,\xi],\ell_q) \sim C([0,1],\ell_p) \oplus C([0,\eta],\ell_q) \Rightarrow \eta < \xi^\omega\,?$$

Problema 4.12 *Para todos ordinais infinitos enumeráveis β e ξ,*

$$C([0,1],\ell_p)\oplus C([0,\xi],\ell_q)\not\sim C([0,\beta],\ell_p)\oplus C([0,1],\ell_q)\,?$$

Porém, notamos que se $[0,1]$ é o intervalo de números reais entre 0 e 1, temos da Proposição 4.8 o corolário abaixo.

Corolário 4.13 *Sejam X e Y espaços de Banach de cotipo finito e α e β ordinais infinitos enumeráveis. Suponha que*

$$C([0,1],X)\oplus C([0,1],Y)\sim C([0,\alpha],X)\oplus C([0,\beta],Y).$$

Então existem $1\le m,n<\omega$ tais que

$$X\hookrightarrow Y^m \quad \text{e } Y\hookrightarrow X^n.$$

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Por simetria assumiremos somente que

$$X\not\hookrightarrow Y^m, \tag{4.29}$$

para todo $1\le m<\omega$. Como $C([0,1])$ contém uma cópia de $C([0,\alpha^\omega])$, teríamos

$$C([0,\alpha^\omega],X)\hookrightarrow C([0,1],X)\hookrightarrow C([0,\alpha],X)\oplus C([0,\beta],Y),$$

ou seja, obtemos

$$X^{\alpha^\omega}\hookrightarrow X^\alpha\oplus Y^\beta. \tag{4.30}$$

Como $c_0\not\hookrightarrow X$, pois X é de cotipo finito, e como por (4.29) temos que $X\not\hookrightarrow Y^m$, $\forall\, 1\le m<\omega$, pelo Teorema 1.65 concluímos que $C([0,\beta],Y)$ não contém cópia de X, ou seja, $X\not\hookrightarrow Y^\beta$.

Mas então pela Proposição 4.8 temos que

$$X^{\alpha^\omega}\not\hookrightarrow X^\alpha\oplus Y^\beta,$$

o que entra em contradição com (4.30). Portanto, segue que $X\hookrightarrow Y^m$, para algum $1\le m<\omega$. $\square$

O Teorema 4.5 é uma extensão vetorial da classificação isomorfa de espaços $C([0,\alpha])$, $\omega\le\alpha<\omega_1$ devido a Bessaga e Pełczyński (Teorema 1.51 - (i)). De fato, o Teorema 4.5 pode ser usado para dar a classificação isomorfa de muitos espaços de Banach envolvendo espaços de cotipo finito. Por exemplo, sendo $\mathfrak{c}$ a cardinalidade do contínuo, então como pela Proposição

1.19 o espaço ℓ_∞ não contém cópia de $\ell_p(\mathfrak{c})$, $1 < p < \infty$, segue diretamente do Teorema 4.5 que se $\omega \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$, então

$$C([0,\alpha], \ell_p(\mathfrak{c}) \oplus \ell_\infty) \sim C([0,\beta], \ell_p(\mathfrak{c}) \oplus \ell_\infty) \Leftrightarrow C([0,\alpha]) \sim C([0,\beta]).$$

No entanto, não podemos resolver o seguinte Problema:

Problema 4.14 *Sejam $1 < p < \infty$, $\mathfrak{c}$ a cardinalidade do contínuo e α, β, ξ e η ordinais infinitos enumeráveis. É verdade que $C([0,\alpha])$ é isomorfo a $C([0,\beta])$ e $C([0,\xi])$ é isomorfo a $C([0,\eta])$ sempre que*

$$C([0,\alpha], \ell_p(\mathfrak{c})) \oplus C([0,\xi], \ell_\infty) \sim C([0,\beta], \ell_p(\mathfrak{c})) \oplus C([0,\eta], \ell_\infty)\,?$$

Os problemas citados acima surgiram de nossas técnicas desenvolvidas. Além deles, é importante citar o Problema 4.3-b de [24] que ainda permaneceu em aberto:

Problema 4.15 *Sendo K um espaço métrico compacto enumerável, dar a classificação isomorfa dos espaços*

$$C([0,1]) \oplus C(K, \ell_1).$$

Capítulo 5

Sobre distorções de isomorfismos positivos entre $C([0,\omega])$ e $C([0,\omega\cdot k])$, $k\geq 2$

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar algumas distorções de isomorfismos positivos entre reticulados de Banach. Estamos interessados em achar majorações para essas distorções tomando isomorfismos positivos entre os espaços $C([0,\omega])$ e $C([0,\omega\cdot k])$, onde $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$.

Lembramos que um reticulado de Banach X é um espaço de Banach real X munido com uma ordenação $\leq$ tal que $(X,\leq)$ é um espaço vetorial reticulado e a norma em X é a norma reticulada, c.f. dado no Capítulo 1.

Lembramos também que a *distância de Banach-Mazur* entre dois espaços de Banach X e Y é definida por

$$d(X,Y)=\inf_{T}\{||T||\cdot||T^{-1}||\},$$

onde T percorre todos os isomorfismos de X sobre Y. O número $||T||\cdot||T^{-1}||$ é chamado de *distorção* da transformação T.

A motivação deste capítulo veio do seguinte resultado de Cengiz provado em 1992 [8]:

Teorema 5.1 *Sejam K e S espaços compactos de Hausdorff. Se existe um isomorfismo $T:C(K)\to C(S)$ sobre a imagem, então para todo ordinal α tem-se*

$$\mathrm{card}\,(K^{(\alpha)})\leq||T||\cdot||T^{-1}||\cdot\mathrm{card}\,(S^{(\alpha)}).$$

Portanto, considerando $K = [0, \omega \cdot k]$, para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, e $S = [0, \omega]$, logo $K^{(1)} = k$ e $S^{(1)} = 1$. Consequentemente temos o seguinte Corolário.

Corolário 5.2 *Sejam $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ e $T : C([0, \omega \cdot k]) \to C([0, \omega])$ um isomorfismo sobre a imagem. Então $k \leq ||T|| \cdot ||T^{-1}||$.*

Lembramos que um isomorfismo T de um reticulado X sobre um reticulado Y é *positivo* quando $T(f) \geq 0$, para toda $f \in X$ tal que $f \geq 0$. Vamos introduzir a seguinte notação: dados X e Y reticulados de Banach, denotaremos por

$$d_+(X, Y) = \inf\{||T|| \cdot ||T^{-1}|| \ \text{ tal que } \ T : X \to Y \text{ é um isomorfismo positivo}\}.$$

Observação 5.3 O Corolário 5.2 estabelece que

$$k \leq d_+(C([0, \omega \cdot k]), C([0, \omega])).$$

A Observação 5.3 sugere a procura de cotas superiores para $d_+(C([0, \omega \cdot k]), C([0, \omega]))$, isto é:

Problema 5.4 *Achar uma sequência $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, tal que $d_+(C([0, \omega \cdot k]), C([0, \omega])) \leq b_k$ e que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{k} \in \mathbb{R}.$$

Esse problema será resolvido na próxima seção. Mais precisamente, provaremos o seguinte Teorema:

Teorema 5.5 *Para todo $k \geq 2$, temos $d_+(C([0, \omega \cdot k]), C([0, \omega])) \leq k + \sqrt{(k-1)(k+3)}$.*

Observação 5.6 Como observado por Cengiz em [8], página 303, segue do Teorema 5.1 que não existe um isomorfismo positivo de $C([0, \omega])$ sobre $C_0([0, \omega])$. No entanto, se definirmos $T : C_0([0, \omega]) \to C([0, \omega])$ pondo

$$\begin{aligned} (Tf)(\omega) &= \frac{1}{3} f(0) \\ (Tf)(n) &= \frac{2f(n-1) + f(0)}{3} \ \text{ para } \ n > 0, \end{aligned}$$

é fácil verificar que T é um isomorfismo positivo sobre a imagem com $||T|| = 1$ e $||T^{-1}|| = 3$.

Logo, $d_+(C_0([0, \omega]), C([0, \omega])) \leq 3$. Mas pelo Teorema de Cambern [7], página 74,

$$d(C_0([0, \omega]), C([0, \omega])) = 3.$$

Logo, segue que

$$d_+(C_0([0, \omega]), C([0, \omega])) = 3.$$

Notamos pela Observação 5.6 que d_+ “não é simétrica”. Dessa forma, sendo X e Y dois reticulados de Banach, denotaremos

$$d_r(X,Y)=\min\{d_+(X,Y),\, d_+(Y,X)\}.$$

Quando não existir um isomorfismo positivo T de X sobre Y indicaremos que

$$d_+(X,Y)=+\infty.$$

Logo, pela Observação 5.6 temos que

$$d_r(C([0,\omega]),C_0([0,\omega]))=3.$$

Observamos também que para $k\geq 2$ o Teorema 5.5 fornece a majoração:

$$d_r(C([0,\omega\cdot k]),C([0,\omega]))\leq k+\sqrt{(k-1)(k+3)}. \tag{5.1}$$

E então também surge naturalmente o seguinte Problema:

Problema 5.7 *Existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $d_r(C([0,\omega\cdot k]),C([0,\omega]))\leq M$, para todo $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$?*

Vamos mostrar que a resposta ao problema acima é afirmativa. Sua solução segue diretamente do seguinte resultado:

Teorema 5.8 *Para todo $k\geq 2$, temos*

$$d_r(C([0,\omega]),C([0,\omega\cdot k]))\leq 2+\sqrt{5}.$$

Para provar o Teorema 5.8, mostraremos:

Teorema 5.9 *Para todo $k\geq 2$, temos*

$$d_+(C([0,\omega]),C([0,\omega\cdot k]))\leq 2+\sqrt{5}.$$

No entanto, não sabemos resolver:

Problema 5.10 *Calcular $d_r(C([0,\omega]),\, C([0,\omega\cdot 2]))$.*

Observação 5.11 Y. Gordon provou que $d(C([0,\omega]),C([0,\omega\cdot 2]))=3$ (veja [25], Exemplo 3.1.1, pág. 395). No entanto, mostraremos na seção 5.4 que existem reticulados X e Y tais que $d(X,Y)<d_r(X,Y)$.

O resto deste capítulo está desenvolvido da seguinte forma: na seção 5.2 apresentamos a prova do Teorema 5.5, na seção 5.3 apresentamos a prova do Teorema 5.9 e na seção 5.4 mostraremos um exemplo de dois reticulados X e Y tais que $d(X,Y)<d_r(X,Y)$.

5.2 Majoração para $d_+(C([0,\omega\cdot k]),C([0,\omega]))$

Nesta seção provaremos o Teorema 5.5, cujo enunciado é lembrado abaixo.

Teorema 5.5. *Para todo $k\geq 2$, temos $d_+(C([0,\omega\cdot k]),C([0,\omega]))\leq k+\sqrt{(k-1)(k+3)}$.*

Demonstração. Observe que $[0,\omega\cdot k]$ possui k pontos de acumulação, pois possui k cópias de $[0,\omega]$, $k\geq 2$. Vamos denotar tais pontos de acumulação por $x_1,x_2,...,x_k$. Já o contradomínio possui apenas ω como ponto de acumulação, que vamos denotá-lo por y_∞. Destacamos também $k-1$ pontos isolados em $[0,\omega]$: $y_0,y_1,...,y_{k-2}$, e sequências $(y_{mn})_n$, para $m=1,2,..,k$, que convergem para y_∞. Sejam $(x_{1n})_n$, $(x_{2n})_n$, ..., $(x_{kn})_n$, as sequências dos pontos em $[0,\omega\cdot k]$ que convergem, respectivamente, para x_1, x_2,..., x_k.

Sejam $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k>0$ e tome $\gamma=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j$.

Assim, $\forall f\in C([0,\omega\cdot k])$, definimos a transformação $T:C([0,\omega\cdot k])\to C([0,\omega])$ por

$$\begin{aligned}(Tf)(y_\infty)&=\frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j f(x_j)\\ (Tf)(y_{j-2})&=f(x_j),\quad\text{para } j=2,3,...,k\\ (Tf)(y_{mn})&=\frac{1}{\gamma}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(1-\delta_{j,m})f(x_j)+\alpha_m f(x_{mn})\right),\quad\text{para } m=1,2,3,...,k,\end{aligned}$$

onde $\delta_{j,m}=\begin{cases}1 & \text{, se } j=m\\ 0 & \text{, se } j\neq m\end{cases}$ é o delta de Kronecker.

Observe que o operador T é positivo, pois é definido por somas com coeficientes $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ positivos.

Afirmamos que

$$||T||\leq 1. \tag{5.2}$$

De fato, basta observar que

- $||(Tf)(y_\infty)||=\frac{1}{\gamma}||\sum_{j=1}^{k}\alpha_j f(x_j)||\leq\frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{k}||\alpha_j||=\frac{\sum_{j=1}^{k}\alpha_j}{\gamma}=\frac{\gamma}{\gamma}=1,$
- $||(Tf)(y_{j-2})||=||f(x_j)||=1$, $\forall j=2,3...,k,$

- $||(Tf)(y_{mn})|| \leq \frac{1}{\gamma}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(1-\delta_{j,m})+\alpha_m\right) = \frac{1}{\gamma}([\alpha_1+...+\alpha_{m-1}+\alpha_{m+1}+...+\alpha_k]+\alpha_m) =$
$= \frac{\gamma}{\gamma} = 1.$

Em seguida, vamos determinar a candidata à inversa de T.

Vamos definir uma transformação $L : C([0,\omega]) \to C([0,\omega\cdot k])$. Como antes, vamos denotar os k pontos de acumulação do contradomínio por $x_1, x_2, ..., x_k$. Agora o domínio possui apenas ω como ponto de acumulação o qual será novamente denotado por y_∞. Sejam $(x_{1n})_n$, $(x_{2n})_n$, ..., $(x_{kn})_n$, as sequências dos pontos em $[0,\omega\cdot k]$ que convergem, respectivamente, para x_1, x_2,..., x_k. Destacamos também $k-1$ pontos isolados em $[0,\omega]$: $y_0, y_1, ..., y_{k-2}$, e sequências $(y_{mn})_n$, para $m = 1, 2, .., k$, que convergem para y_∞. Novamente, estamos tomando $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k > 0$ e $\gamma = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j$.

Isto posto, e considerando a definição dada para T, definimos o operador $L : C([0,\omega]) \to C([0,\omega\cdot k])$ pondo, para todo $g \in C([0,\omega])$:

$$
\begin{aligned}
(Lg)(x_1) &= \frac{1}{\alpha_1}\left(\gamma\cdot g(y_\infty) - \sum_{j=2}^{k}\alpha_j\cdot g(y_{j-2})\right)\\
(Lg)(x_m) &= g(y_{m-2}), \quad \text{para } m = 2,3,...,k\\
(Lg)(x_{1n}) &= \frac{1}{\alpha_1}\left(\gamma\cdot g(y_{1n}) - \sum_{j=2}^{k}\alpha_j\cdot g(y_{j-2})\right)\\
(Lg)(x_{mn}) &= \frac{1}{\alpha_m}\left[\gamma\cdot(g(y_{mn})-g(y_\infty)) + \alpha_m\cdot g(y_{m-2})\right], \quad \text{para } m = 2,3,...,k.
\end{aligned}
$$

Mostremos que T e L são inversas uma da outra. Para isso, provaremos duas afirmações:

Afirmação 01. $L(Tf) = f$, $\forall f \in C([0,\omega\cdot k])$.

Afirmação 02. $T(Lg) = g$, $\forall g \in \operatorname{Im} T$.

Prova da Afirmação 01. Montando as composições adequadamente, em cada ponto de $[0,\omega\cdot k]$, obtemos:

- $L(Tf)(x_1) = \dfrac{1}{\alpha_1}\left(\gamma \cdot (Tf)(y_\infty) - \sum_{j=2}^{k} \alpha_j \cdot (Tf)(y_{j-2})\right) =$

$$= \frac{1}{\alpha_1}\left(\gamma \cdot \frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j f(x_j) - \sum_{j=2}^{k}\alpha_j f(x_j)\right) = \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 \cdot f(x_1)) = f(x_1),$$

- $L(Tf)(x_m) = (Tf)(y_{m-2}) = f(x_m)$, para $m = 2, 3, ..., k$,

- $L(Tf)(x_{1n}) = \dfrac{1}{\alpha_1}\left(\gamma(Tf)(y_{1n}) - \sum_{j=2}^{k}\alpha_j(Tf)(y_{j-2})\right) =$

$$= \frac{1}{\alpha_1}\left(\gamma\frac{1}{\gamma}\left[\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(1-\delta_{j,1})f(x_j) + \alpha_1 f(x_{1n})\right] - \sum_{j=2}^{k}\alpha_j f(x_j)\right) = f(x_{1n}),$$

- e, para $m = 2, 3, ..., k$, temos

$$L(Tf)(x_{mn}) = \frac{1}{\alpha_m}\left(\gamma(Tf)(y_{mn}) - \gamma(Tf)(y_\infty) + \alpha_m(Tf)(y_{m-2})\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_m}\left[\gamma\frac{1}{\gamma}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(1-\delta_{j,m})f(x_j) + \alpha_m f(x_{mn})\right) - \gamma\frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j f(x_j) + \alpha_m f(x_m)\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha_m}[\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_{m-1}f(x_{m-1}) + \alpha_{m+1}f(x_{m+1}) + ... + \alpha_k f(x_k) +$$

$$+ \alpha_m f(x_{mn}) - \alpha_1 f(x_1) - ... - \alpha_k f(x_k) + \alpha_m f(x_m)] = \frac{1}{\alpha_m}[\alpha_m f(x_{mn})] = f(x_{mn}).$$

Portanto, vale a Afirmação 01.

Prova da Afirmação 02. Dado $g \in \operatorname{Im} T$. Então, montando as composições adequadamente, em cada ponto de $[0,\omega]$, obtemos:

- $T(Lg)(y_\infty) = \dfrac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j \cdot (Lg)(x_j) = \dfrac{1}{\gamma}\alpha_1(Lg)(x_1) + \dfrac{1}{\gamma}\sum_{j=2}^{k}\alpha_j(Lg)(x_j) =$

$$= \frac{\alpha_1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha_1}\left(\gamma g(y_\infty) - \sum_{j=2}^{k}\alpha_j g(y_{j-2})\right) + \frac{1}{\gamma}\sum_{j=2}^{k}\alpha_j g(y_{j-2}) = g(y_\infty),$$

- para $j = 2, 3, ..., k$, temos $T(Lg)(y_{j-2}) = (Lg)(x_j) = g(y_{j-2})$,

- para $m = 1, 2, ..., k$, temos

$$T(Lg)(y_{mn}) = \frac{1}{\gamma}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(1-\delta_{j,m})(Lg)(x_j) + \alpha_m(Lg)(x_{mn})\right) =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[\alpha_1(Lg)(x_1) + ... + \alpha_{m-1}(Lg)(x_{m-1}) + \alpha_{m+1}(Lg)(x_{m+1}) + ...+\right.$$

$$\left. + \alpha_k(Lg)(x_k) + \alpha_m(Lg)(x_{mn})\right] = ... = g(y_{mn}).$$

Portanto, também vale a Afirmação 02.

Disso, temos que T é inversível, com $T^{-1} = L$.

Determinaremos agora uma estimativa para a norma da L. Observando a definição da L, obtemos que

- $$||(Lg)(x_1)|| \leq \frac{1}{\alpha_1}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j + \sum_{j=2}^{k}\alpha_j\right) = \frac{\alpha_1 + 2\sum_{j=2}^{k}\alpha_j}{\alpha_1} = 1 + 2\sum_{j=2}^{k}\frac{\alpha_j}{\alpha_1},$$
- $||(Lg)(x_m)|| = 1$, para $m = 2, 3, ..., k$,
- $$||(Lg)(x_{1n})|| \leq \frac{1}{\alpha_1}\gamma + \frac{1}{\alpha_1}\sum_{j=2}^{k}\alpha_j = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + ... + 2\alpha_k}{\alpha_1} = 1 + 2\sum_{j=2}^{k}\frac{\alpha_j}{\alpha_1},$$
- e para $m = 2, 3, ..., k$, temos
$$||(Lg)(x_{mn})|| \leq \frac{1}{\alpha_m}\left(\sum_{j=1}^{k}2\cdot\alpha_j + \alpha_m\right) = 3 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{k}\frac{2\alpha_j}{\alpha_m}.$$

Vamos determinar o valor que minimiza as estimativas acima para a norma de L. Isto se dá quando valerem as igualdades

$$1 + 2\sum_{j=2}^{k}\frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 3 + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{k}\frac{\alpha_j}{\alpha_m}, \quad \text{para} \quad m = 2, 3, ..., k. \tag{5.3}$$

Denotamos, para $j = 2, 3, ..., k$ os quocientes $\dfrac{\alpha_j}{\alpha_1} = x_j$. Disso, para $m = 2, 3, ..., k$ temos

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_m} = \frac{\frac{\alpha_j}{\alpha_1}}{\frac{\alpha_m}{\alpha_1}} = \frac{x_j}{x_m},$$

e daí as igualdades em (5.3) ficam

$$1+2x_2+2x_3+...+2x_k = 3+\frac{2}{x_2}+\frac{2x_3}{x_2}+\frac{2x_4}{x_2}+...+\frac{2x_k}{x_2} =$$

$$= 3+\frac{2}{x_3}+\frac{2x_2}{x_3}+\frac{2x_4}{x_3}+...+\frac{2x_k}{x_3} = ... = 3+\frac{2}{x_k}+\frac{2x_2}{x_k}+\frac{2x_3}{x_k}+...+\frac{2x_{k-1}}{x_k}.$$

Observando as $k-1$ últimas igualdades, notamos que elas são idênticas quando $x_2=x_3=...=x_k=x$, e neste caso a primeira igualdade fornece

$$1+2(k-1)x = 3+\frac{2}{x}+2(k-2),$$

que é equivalente à equação

$$(k-1)x^2-(k-1)x-1=0,$$

à qual possui a solução positiva

$$x=\frac{k-1+\sqrt{(k-1)(k+3)}}{2(k-1)}.$$

Assim, sendo $x=x_2=x_3=...=x_k$, obtemos

$$||T^{-1}|| = ||L|| \leq 1+2(x_2+x_3+...+x_k)|_{x_2=...=x_k=x} =$$

$$= 1+2(k-1)\left[\frac{k-1+\sqrt{(k-1)(k+3)}}{2(k-1)}\right] = k+\sqrt{(k-1)(k+3)}.$$

Logo,

$$||T^{-1}|| \leq k+\sqrt{(k-1)(k+3)}. \tag{5.4}$$

Assim, de (5.2) e (5.4) concluímos que

$$||T||\cdot||T^{-1}|| \leq k+\sqrt{(k-1)(k+3)},$$

onde $k\geq 2$. Tal majoração é válida para toda T positiva, em particular para aquela que produz o ínfimo do produto $||T||\cdot||T^{-1}||$, ou seja, obtemos que

$$d_+(C([0,\omega\cdot k]),C([0,\omega])) \leq k+\sqrt{(k-1)(k+3)},\ \forall k\geq 2. \tag{5.5}$$

□

Por fim, note que para $k \geq 2$, sendo $b_k = k + \sqrt{(k-1)(k+3)}$, temos que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{b_k}{k} = 2 \in \mathbb{R},$$

que resolve o Problema 5.4.

5.3 Majoração para $d_+(C([0,\omega]), C([0,\omega\cdot k]))$

Nesta seção provaremos o Teorema 5.9 cujo enunciado é lembrado abaixo.
Teorema 5.9. *Para todo $k \geq 2$, temos*

$$d_+(C([0,\omega]), C([0,\omega\cdot k])) \leq 2+\sqrt{5}.$$

Demonstração. Denotaremos o único ponto de acumulação ω de $[0,\omega]$ por x_∞. Vamos destacar em $[0,\omega]$ $k-1$ pontos isolados $x_0, x_1, ..., x_{k-2}$ e k sequências $(x_{1n})_n, (x_{2n}), ..., (x_{kn})$, tais que $x_{mn} \to x_\infty$, $m \in \{1,2,...,k\}$. Observamos que $[0,\omega\cdot k]$ possui k pontos de acumulação, pois possui k cópias de $[0,\omega]$, e denotaremos tais pontos por $y_1, y_2, ..., y_k$. Vamos considerar também as sequências $(y_{mn})_n$, $m \in \{1,2,...,k\}$, tais que $y_{mn} \to y_m$.

Isto posto, vamos definir $T : C([0,\omega]) \to C([0,\omega\cdot k])$, com $k \geq 2$, do seguinte modo: dados

$$A_1 = 1+(k-1)\varepsilon,\ A_2 = A_3 = ... = A_k = a+1+(k-2)\varepsilon,$$

onde $a > 1$ e $0 < \varepsilon < 1$, para todo $f \in C([0,\omega])$, definimos:

$$\begin{aligned}
(Tf)(y_1) &= \frac{f(x_\infty)+\varepsilon\sum_{j=0}^{k-2} f(x_j)}{A_1}\\
(Tf)(y_m) &= \frac{af(x_\infty)+f(x_{m-2})+\varepsilon\sum_{j=0}^{k-2}(1-\delta_{(m-2),j})f(x_j)}{A_m},\ \text{para } m=2,3,...,k\\
(Tf)(y_{1n}) &= \frac{f(x_{1n})+\varepsilon\sum_{j=0}^{k-2} f(x_j)}{A_1}\\
(Tf)(y_{mn}) &= \frac{af(x_{mn})+f(x_{m-2})+\varepsilon\sum_{j=0}^{k-2}(1-\delta_{(m-2),j})f(x_j)}{A_m},\ \text{para } m=2,3,...,k,
\end{aligned}$$

onde $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & ,\text{ se } \ i=j \\ 0 & ,\text{ se } \ i\neq j \end{cases}$ é o delta de Kronecker.

Observe que o operador T é positivo, pois é definido por somas com coeficientes positivos.

As k primeiras equações possuem a notação matricial

$$\begin{bmatrix} (Tf)(y_1) \\ (Tf)(y_2) \\ (Tf)(y_3) \\ \vdots \\ (Tf)(y_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & \frac{\varepsilon}{A_1} & \frac{\varepsilon}{A_1} & \cdots & \frac{\varepsilon}{A_1} \\ \frac{a}{A_2} & \frac{1}{A_2} & \frac{\varepsilon}{A_2} & \cdots & \frac{\varepsilon}{A_2} \\ \frac{a}{A_3} & \frac{\varepsilon}{A_3} & \frac{1}{A_3} & \cdots & \frac{\varepsilon}{A_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a}{A_k} & \frac{\varepsilon}{A_k} & \frac{\varepsilon}{A_k} & \cdots & \frac{1}{A_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_\infty) \\ f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{k-2}) \end{bmatrix}.$$

Denotando por M a matriz quadrada dos coeficientes, afirmamos que $\det(M)\neq 0$ quando ε próximo de zero.

De fato, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema acima é dado por

$$\det(M) = \frac{(-1)^{k+1}}{\prod_{j=1}^{k} A_j}\cdot(\varepsilon-1)^{k-2}[(k-1)a\varepsilon-(k-2)\varepsilon-1].$$

Escrevendo $\det(M)=\dfrac{p(\varepsilon)}{q(\varepsilon)}=r(\varepsilon)$, notamos que o mesmo é uma função racional (um quociente de dois polinômios) na variável ε, que é contínua em todo o seu domínio, e como

$$r(0)=\frac{p(0)}{q(0)}=\frac{(-1)^{k+1}\cdot(-1)^{k-2}(-1)}{1\cdot(a+1)^{k-1}}=\frac{1}{(a+1)^{k-1}}\neq 0,$$

segue pela continuidade da r que $r(\varepsilon)=\det(M)$ é diferente de zero para ε próximo de zero.

Logo, a matriz M é inversível quando ε é pequeno, e daí podemos definir uma inversa.

Além disso, sendo M inversível, o sistema dado acima com ε pequeno, é determinado. Assim, os elementos $f(x_\infty)$, $f(x_{m-2})$, para $m=2,3,...,k$ estão bem definidos e são únicos.

Seja $g\in \operatorname{Im} T$ tal que $Tf=g$. Para determinar $f(x_\infty)$ e $f(x_{m-2})$, onde $m=2,3,...,k$, aplicaremos a regra de Cramer. Para isso, considere $\Delta=\det(M)$, Δ_∞ o determinante obtido quando substituímos a primeira coluna da matriz M pela matriz coluna $G=[g(y_1)\ \ g(y_2)\ \ \cdots\ \ g(y_k)]^T$, Δ_0 o determinante obtido quando substituímos a segunda coluna da matriz M pela matriz coluna G e, em geral, para $m=2,3,...,k$, denotaremos por Δ_{m-2} o determinante da matriz obtida ao substituir a coluna m da matriz M pela matriz coluna G.

Assim, temos pela regra de Cramer que

$$f(x_\infty)=\frac{\Delta_\infty}{\Delta}\quad\text{e}\quad f(x_{m-2})=\frac{\Delta_{m-2}}{\Delta},\ \text{ para }\ m=2,3,...,k.$$

Para o cálculo de Δ, Δ_∞ e Δ_{m-2}, aplicamos o Teorema de Laplace na primeira linha de cada um destes determinantes. Assim, obtemos

$$f(x_\infty)=\frac{\dfrac{g(y_1)}{\prod_{j=2}^{k}A_j}+h_\infty(\varepsilon)}{\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{k}A_j}+h(\varepsilon)}, \tag{5.6}$$

e, para $m=2,3,...,k$

$$f(x_{m-2})=\frac{\dfrac{g(y_m)}{\prod_{j=1,j\neq m}^{k}A_j}-\dfrac{ag(y_1)}{\prod_{j=2}^{k}A_j}+h_{m-2}(\varepsilon)}{\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{k}A_j}+h(\varepsilon)}, \tag{5.7}$$

onde $h_\infty(\varepsilon)$, $h(\varepsilon)$ e $h_{m-2}(\varepsilon)$ representam as partes infinitesimais dos desenvolvimentos dos determinantes acima, via o Teorema de Laplace, que tendem a zero quando ε tender para zero.

Por fim, para determinar $f(x_{mn})$, com $m=1,2,...,k$, basta substituir (5.6) e (5.7) adequadamente nas demais k equações que definem a T. Note que os valores de $f(x_{mn})$ também serão únicos, devido à unicidade dos elementos encontrados em (5.6) e (5.7).

Da equação que define $(Tf)(y_{1n})$, lembrando que estamos tomando $g\in \operatorname{Im}T$ tal que $Tf=g$, podemos escrever

$$A_1 g(y_{1n})=f(x_{1n})+\varepsilon\sum_{j=0}^{k-2}f(x_j)=f(x_{1n})+\varepsilon\sum_{j=2}^{k}f(x_{j-2}),$$

isolando $f(x_{1n})$ e escrevendo $h_{1n}(\varepsilon)=\varepsilon\sum_{j=2}^{k}f(x_{j-2})$, que tende a zero quando ε tender a zero (e lembre que cada $f(x_{j-2})$ é dado por (5.7)), obtemos

$$f(x_{1n})=A_1g(y_{1n})-h_{1n}(\varepsilon).$$

Por fim, da equação que define $(Tf)(y_{mn})$, isolando $f(x_{mn})$, obtemos

$$f(x_{mn})=\frac{A_m}{a}g(y_{mn})-\frac{f(x_{m-2})}{a}-\frac{\varepsilon}{a}\sum_{j=2}^{k}(1-\delta_{(m-2),(j-2)})f(x_{j-2}),$$

e usando (5.7), obtemos

$$f(x_{mn}) = \frac{A_m}{a} g(y_{mn}) + \frac{\dfrac{-g(y_m)}{a\prod_{j=1,j\neq m}^{k} A_j} + \dfrac{g(y_1)}{\prod_{j=2}^{k} A_j}}{\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{k} A_j} + h(\varepsilon)} + h_{mn}(\varepsilon),$$

onde

$$h_{mn}(\varepsilon) = -\frac{\dfrac{h_{m-2}(\varepsilon)}{a}}{\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{k} A_j} + h(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{a}\sum_{j=2}^{k}(1-\delta_{(m-2),(j-2)})f(x_{j-2}),$$

que tende a zero quando ε tender para zero.

Dessa forma, dado $g \in \operatorname{Im} T$, escrevendo $f = Lg$, definimos o operador $L : C([0,\omega\cdot k]) \to C([0,\omega])$ pondo, para toda $g \in \operatorname{Im} T$:

$$\begin{aligned}
(Lg)(x_\infty) &= \frac{\dfrac{g(y_1)}{\prod_{j=2}^{k} A_j} + h_\infty(\varepsilon)}{\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{k} A_j} + h(\varepsilon)}, \\
(Lg)(x_{m-2}) &= \frac{\dfrac{g(y_m)}{\prod_{j=1,j\neq m}^{k} A_j} - \dfrac{ag(y_1)}{\prod_{j=2}^{k} A_j} + h_{m-2}(\varepsilon)}{\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{k} A_j} + h(\varepsilon)}, \text{ para } m = 2,3,...,k, \\
(Lg)(x_{1n}) &= A_1 g(y_{1n}) - h_{1n}(\varepsilon), \\
(Lg)(x_{mn}) &= \frac{A_m}{a} g(y_{mn}) + \frac{\dfrac{-g(y_m)}{a\prod_{j=1,j\neq m}^{k} A_j} + \dfrac{g(y_1)}{\prod_{j=2}^{k} A_j}}{\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{k} A_j} + h(\varepsilon)} + h_{mn}(\varepsilon), \text{ para } m = 2,3,...,k,
\end{aligned}$$

onde $h_\infty(\varepsilon), h(\varepsilon), h_{m-2}(\varepsilon), h_{1n}(\varepsilon), h_{mn}(\varepsilon) \longrightarrow 0$ quando ε tender para zero.

Por construção tal L é o operador inverso de T, ou seja, $L = T^{-1}$.

Vamos obter majorações para a norma dos operadores T e L. Para isso, como ε é pequeno, devemos fazer o mesmo tender a zero. Dessa forma, será necessário definir o símbolo $\approx$ para as aproximações dos operadores e das normas respectivas:

Definição 5.12 Dados $0 < \varepsilon < 1$, $a > 1$ e $f = f(a, v, \varepsilon)$, onde

$v = x = (x_\infty, x_0, x_1, ..., x_{k-2}, x_{1n}, ..., x_{kn})$ ou $v = y = (y_1, y_2, ..., y_k, y_{1n}, ..., y_{kn})$. Definimos:

(i) $f \approx g$ se $\lim_{\varepsilon \to 0^+} f(a, v, \varepsilon) = g(a, v)$,

(ii) sendo $||f|| = N_1(a, \varepsilon) \geq 0$ e $||g|| = N_2(a) \geq 0$, diremos que $||f|| \approx ||g||$ se, e só se,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} N_1(a, \varepsilon) = N_2(a).$$

Observe que se $||f|| \approx ||g||$ e se existir $M > 0$ tal que $||g|| \leq M$, então $||f|| \leq M$.

Assim, a fim de facilitar os cálculos, já vamos tomar $\varepsilon = 0$ e daí temos $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = ... = A_k = a + 1$, onde $a > 1$, e dessa forma, temos que $T : C([0, \omega]) \to C([0, \omega \cdot k])$ fica aproximado por

$$\begin{array}{rcl} (Tf)(y_1) & \approx & f(x_\infty) \\ (Tf)(y_m) & \approx & \dfrac{af(x_\infty) + f(x_{m-2})}{a+1}, \text{ para } m = 2, 3, ..., k \\ (Tf)(y_{1n}) & \approx & f(x_{1n}) \\ (Tf)(y_{mn}) & \approx & \dfrac{af(x_{mn}) + f(x_{m-2})}{a+1}, \text{ para } m = 2, 3, ..., k. \end{array}$$

Afirmamos que

$$||T|| \leq 1. \tag{5.8}$$

De fato, basta observar que nas aproximações acima obtemos as majorações

- $||(Tf)(y_1)|| \approx ||f(x_\infty)|| \leq 1$,
- $||(Tf)(y_m)|| \approx ||\dfrac{af(x_\infty) + f(x_{m-2})}{a+1}|| \leq \dfrac{a+1}{a+1} = 1$, para $m = 2, 3, ..., k$,
- $||(Tf)(y_{1n})|| \approx ||f(x_{1n})|| \leq 1$
- $||(Tf)(y_{mn})|| \approx ||\dfrac{af(x_{mn}) + f(x_{m-2})}{a+1}|| \leq \dfrac{a+1}{a+1} = 1$, para $m = 2, 3, ..., k$.

Do mesmo modo, temos a seguinte aproximação para a inversa da T, quando ε tender para zero:

$$\begin{aligned}
(Lg)(x_\infty) &\approx g(y_1)\\
(Lg)(x_{m-2}) &\approx (a+1)g(y_m)-ag(y_1),\ \text{para } m=2,3,...,k\\
(Lg)(x_{1n}) &\approx g(y_{1n})\\
(Lg)(x_{mn}) &\approx \frac{(a+1)g(y_{mn})-(a+1)g(y_m)+ag(y_1)}{a},\ \text{para } m=2,3,...,k.
\end{aligned}$$

Note que mesmo estas aproximações para T e para L são inversas uma da outra, basta efetuar as composições adequadamente.

Estimativa para $||L||$, usando a aproximação:

- $||(Lg)(x_\infty)|| \approx ||g(y_1)|| \leq 1$,
- $||(Lg)(x_{m-2})|| \approx ||(a+1)g(y_m)-ag(y_1)|| \leq a+1+a = 2a+1$, para $m=2,3,...,k$,
- $||(Lg)(x_{1n})|| \approx ||g(y_{1n})|| \leq 1$,
- $||(Lg)(x_{mn})|| \approx ||\frac{(a+1)g(y_{mn})-(a+1)g(y_m)+ag(y_1)}{a}|| \leq \frac{(a+1)+(a+1)+a}{a} = \frac{3a+2}{a}$, para $m=2,3,...,k$.

Logo, temos que $||L||$ fica minimizada quando (lembramos que devemos ter $a>1$)

$$2a+1=\frac{3a+2}{a}\Leftrightarrow a^2-a-1=0\Leftrightarrow a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

e daí

$$||L||\leq (2a+1)\big|_{a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1 = 2+\sqrt{5}. \tag{5.9}$$

Portanto, como $||L||=||T^{-1}||$, concluímos de (5.8) e (5.9) que

$$||T||\cdot||T^{-1}||\leq 2+\sqrt{5}.$$

Tal majoração é válida para toda T positiva, em particular para aquela que produz o ínfimo do produto $||T||\cdot||T^{-1}||$, ou seja, obtemos que

$$d_+(C([0,\omega]),C([0,\omega\cdot k]))\leq 2+\sqrt{5},\ \forall k\geq 2.$$

Isto conclui a prova do Teorema 5.9.

$\square$

Assim, como

$$d_r(C([0,\omega]),C([0,\omega\cdot k]))=\min\{d_+(C([0,\omega]),C([0,\omega\cdot k])),d_+(C([0,\omega\cdot k]),C([0,\omega]))\},$$

pelo Teorema 5.9 e por (5.1) provamos o Teorema 5.8.

5.4 Observação final

Para encerrar, conforme mencionado na Observação 5.11, vamos mostrar que existem reticulados X e Y tais que $d(X,Y)<d_r(X,Y)$.

Indicaremos por ℓ_2^1 o espaço $\mathbb{R}^2$ com a norma $||(x,y)||=||x||+||y||$ e o espaço ℓ_2^∞ o espaço $\mathbb{R}^2$ com a norma $||(x,y)||=\max(||x||,||y||)$. Dessa forma, vamos provar o seguinte resultado:

Teorema 5.13 *Sendo d a distância de Banach-Mazur, considerando os espaços de Banach ℓ_2^1 e ℓ_2^∞, valem as seguintes igualdades referentes a d e d_r:*

(a) $d(\ell_2^1,\ell_2^\infty)=1$;

(b) $d_r(\ell_2^1,\ell_2^\infty)=2$.

Demonstração. O item (a) é bem conhecido e basta considerar o isomorfismo $T:\ell_2^1\to\ell_2^\infty$ dado por

$$T(x,y)=(x-y,x+y),$$

e observar que $\max(|x-y|,\,|x+y|)=|x|+|y|$.

Para provar o item (b), provaremos que:

(i) $d_+(\ell_2^1,\ell_2^\infty)=2$;

(ii) $d_+(\ell_2^\infty,\ell_2^1)=2$.

Prova de (i): Seja $T:\ell_2^1\to\ell_2^\infty$ um isomorfismo positivo. Então existem $a,b,c,d>0$ tais que

$$T(x,y)=(ax+by,cx+dy).$$

Logo,

$$||T||=\sup_{|x|+|y|=1}\max\{|ax+by|,\,|cx+dy|\}=\max\{a,b,c,d\}.$$

Portanto, $T^{-1}:\ell_2^\infty\to\ell_2^1$ é dada por

$$T^{-1}(x,y)=\frac{1}{ad-bc}(dx-cy,-bx+ay).$$

Logo,

$$||T^{-1}|| = \sup_{\max\{|x|,|y|\}=1} \frac{|dx-cy|+|-bx+ay|}{|ad-bc|} = \frac{a+b+c+d}{|ad-bc|}.$$

Afirmação 1. $||T||\cdot||T^{-1}||\geq 2$. De fato, pelos cálculos anteriores, temos

$$||T||\cdot||T^{-1}|| = \max\{a,b,c,d\}\cdot\frac{a+b+c+d}{|ad-bc|}.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $a=\max\{a,b,c,d\}$. Logo,

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{|ad-bc|}\leq \max\{a,b,c,d\}\cdot\frac{a+b+c+d}{|ad-bc|}.$$

Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $ad-bc>0$. Logo, teremos que provar que

$$2\leq\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{ad-bc},$$

mas isto é equivalente a

$$0\leq (a-d)^2+(b+c)^2.$$

Caso 2: $ad-bc<0$. Neste caso devemos mostrar que

$$2\leq\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{bc-ad},$$

mas isto é equivalente a

$$0\leq (b-c)^2+(a+d)^2.$$

Em qualquer dos casos acima concluímos que

$$||T||\cdot||T^{-1}||\geq 2.$$

Logo, vale a Afirmação 1.

Afirmação 2. $d_+(\ell_2^1,\ell_2^\infty)=2$. De fato, dado $\varepsilon>0$, tomamos $0<\delta<1$ tal que

$$\frac{1+2\delta}{1-\delta^2}<2+\varepsilon.$$

Sejam $a=d=1$ e $b=c=\delta$ e consideremos T como acima. Logo,

$$||T|| = 1 \ \text{ e } \ ||T^{-1}|| = \frac{2+2\delta}{1-\delta^2}.$$

Consequentemente,

$$||T||\cdot||T^{-1}|| < 2+\varepsilon.$$

Como isto vale para todo $\varepsilon > 0$, segue que $||T||\cdot||T^{-1}|| \leq 2$, o que, juntamente com a Afirmação 1, concluímos a Afirmação 2, o que conclui a prova de (i).

Prova de (ii): Seja $L : \ell_2^\infty \to \ell_2^1$ um isomorfismo positivo. Então existem $a,b,c,d>0$ tais que

$$L(x,y) = (ax+by, cx+dy).$$

Portanto,

$$||L|| = \sup_{\max\{|x|,|y|\}=1} \{|ax+by| + |cx+dy|\} = a+b+c+d.$$

Mais ainda, $L^{-1} : \ell_2^1 \to \ell_2^\infty$ é dado por

$$L^{-1}(x,y) = \frac{1}{ad-bc}(dx-cy, -bx+ay).$$

Consequentemente,

$$||L^{-1}|| = \sup_{|x|+|y|=1} \frac{\max\{|dx-cy|, |-bx+ay|\}}{|ad-bc|} = \frac{\max\{a,b,c,d\}}{|ad-bc|}.$$

Afirmação 3. $||L||\cdot||L^{-1}|| \geq 2$. De fato, basta notarmos que

$$||L||\cdot||L^{-1}|| = \max\{a,b,c,d\}\cdot\frac{a+b+c+d}{|ad-bc|},$$

e procedermos como na prova da Afirmação 1.

Afirmação 4. $d_+(\ell_2^\infty, \ell_2^1) = 2$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $0<\delta<1$ satisfazendo

$$\frac{2+2\delta}{1-\delta^2} < 2+\varepsilon.$$

Sejam $a=d=1$, $b=c=\delta$ e L como acima. Então

$$||L|| = 2+2\delta \ \text{ e } \ ||L^{-1}|| = \frac{1}{1-\delta^2}.$$

Logo,

$$||L||\cdot||L^{-1}|| < 2+\varepsilon.$$

Como isto vale para todo $\varepsilon > 0$, segue que $||T|| \cdot ||T^{-1}|| \leq 2$, o que, juntamente com a Afirmação 3, concluímos a Afirmação 4, o que conclui a prova de (ii).

Assim, de (i) e (ii) obtemos que $d_r(\ell_2^1, \ell_2^\infty) = 2$, que prova o item (b) e com isso completamos a prova do Teorema 5.13.

$\square$

Bibliografia

[1] F. Albiac; N.J. Kalton. *Topics in Banach space theory*. Springer-Verlag Inc. 2006.

[2] D.E. Alspach; E.M. Galego. *Geometry of the Banach Spaces $C(\beta\mathbb{N} \times K, X)$ for compact metric spaces K*. Studia Math. **207** (2011), 2, 153-180.

[3] E.M. Bator. *Unconditionally converging and compact operators on c_0*. Rocky Mountain J. Math. **22** (1992), 2, 417-422.

[4] T. Bermudéz; A. Bonilla; H. Hemamirad. *Chaotic Tensor Product Semigroups*. Semigroup Forum **71** (2005) 252-264.

[5] C. Bessaga; A. Pełczyński. *Spaces of continuous functions IV*. Studia Math. **XIX** (1960) 53-61.

[6] L. Burlando. *On subspaces of direct sums of infinite sequences of Banach spaces*. Atti Accad. Ligure Sci. Lett., **46** (1989) 96-105.

[7] M. Cambern. *On mappings of sequence spaces*. Studia Math. **XXX** (1968) 73-77.

[8] B. Cengiz. *On order-preserving isomorphism of $C_0(X)$*. Rend. Mat. Appl. **VII** (1992), 12, 299-304.

[9] J.A. Clarkson. *Uniformly convex spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 3, 396-414.

[10] A. Defant; K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*. North-Holland Mathematics Studies. North-Holland Publishing Co. Amsterdan. 176, 1993.

[11] J. Diestel. *Sequences and series in Banach spaces*. Graduate Texts in Mathematics, 92. Springer-Verlag, New York, 1984.

[12] J. Diestel; H. Jarchow; A. Tonge. *Absolutely Summing Operators*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[13] J. Diestel; J.J. Uhl, Jr. *Vector Measures*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[14] S. Z. Ditor. *Averagings operators in $C(S)$ and lower semicontinuous sections of continuous maps.* Trans. Amer. Math. Soc. **175** (1973) 195-208.

[15] S.Z. Ditor; R. Haydon. *On absolute retracts, $P(S)$, and complemented subspaces of* $C(D^{\omega_1})$. Studia Math. **56** (1976), 3, 243-251.

[16] N. Dunford; J. T. Schwartz. *Linear operators.* Part II: Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space. With assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle. Interscience Publishers John Wiley Sons New York-London, 1963.

[17] E.G. Effros; Z.H-J Ruan. *Operator spaces.* London Mathematical Society Monographs 23, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[18] M. Fabian; P. Habala; P. Hajek; V.M. Santalucia; J. Pelant; V. Zizler. *Banach Space Theory The Basis for Linear and Nonlinear Analysis.* Canadian Mathematical Society. Springer-Verlag, 2010.

[19] M. Fabian; P. Habala; P. Hajek; V.M. Santalucia; J. Pelant; V. Zizler. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry.* Canadian Mathematical Society. Springer-Verlag, 2001.

[20] T. Figiel. *An example of infinite dimensional reflexive Banach space non-isomorphic to its cartesian square.* Studia Math. **42** (1972) 295-306.

[21] D.H. Fremlin. *Consequences of Martin's Axiom.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[22] E.M. Galego. *Banach spaces of continuous vector-valued functions of ordinals.* Proc. Edinb. Math. Soc., **44** (2001), 2, 49-62.

[23] E.M. Galego. *On subspaces and quotients of Banach spaces $C(K, X)$.* Monatsh. Math. **136** (2002), 2, 87-97.

[24] E.M. Galego. *The $C(K, X)$ spaces for compact metric spaces K and X with a uniformly convex maximal factor.* J. Math. Anal. Appl. **384** (2011), 2, 357-365.

[25] Y. Gordon. *On the distance coefficient between isomorphic function spaces.* Israel J. Math. **8** (1970) 391-397.

[26] A. Grothendieck. *Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$.* Canadian J. Math. **5** (1953) 129-173.

[27] R. Haydon. *A non-reflexive Grothendieck space that does not contain ℓ_∞.* Israel J. Math. **40** (1981), 1, 65-73.

[28] R. Haydon. *An unconditional result about Grothendieck spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 3, 511-516.

[29] J. Hoffmann-Jørgensen. *Sums of independent Banach space valued random variables.* Studia Math. **52** (1974) 159-186.

[30] R.C. James. *Super-reflexive Banach spaces.* Canad. J. Math. **24** (1972) 896-904.

[31] R.C. James. *Super-reflexive spaces with bases.* Pacific J. Math. **41-42** (1972) 409-419.

[32] T. Jech. *Set Theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[33] W.B. Johnson; J. Lindenstrauss. *Handbook of the geometry of Banach spaces.* Vol. 1. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (2001) 1-84.

[34] S. Kwapień. *A remark on p-summing operators in ℓ_r-spaces.* Studia Math. **34** (1970) 109-111.

[35] H.E. Lacey. *The isometric theory of classical Banach spaces.* Die Grundlehren der mathematischen Wissesnschaften, Band 208. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

[36] I.E. Leonard; J.H.M. Whitfield. *A classical Banach space ℓ_∞/c_0.* Rocky Mountain J. Math. **13** (1983), 3, 531-539.

[37] R. Levy; G. Schechtman. *Stabilizing isomorphism from $\ell_p(\ell_2)$ into $L_p[0,1]$.* Banach J. Math. Anal. **5** (2011), 2, 73-83.

[38] J. Lindenstrauss; L.Tzafriri. *Classical Banach Spaces I.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 92. Springer-Verlag, 1977.

[39] B. Maurey. *Espaces de cotype p,* $0 < p \leq 2$. Séminaire Maurey-Schwartz année (1972 -1973) Exp. No. 7, 11 pp. Centre de Math., École Polytech., Paris, 1973.

[40] B. Maurey. *Type, cotype and K-convexity.* Handbook of the geometry of Banach spaces, North-Holland, Amsterdan. **2** (2003) 1299-1332.

[41] B. Maurey, G. Pisier. *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach.* Studia Math. **58** (1976), 1, 45-90.

[42] S. Mazurkiewicz, W. Sierpiński. *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables,* Fund. Math. **1** (1920) 17-27.

[43] A.A. Milutin. *Isomorphisms of spaces of continuous functions on compacts of power continuum.* Tieoria Func. (Kharkov) **2** (1966) 150-156 (in Russian).

[44] A. Pełczyński. *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions.* Dissertationes Math. Rozprawy Mat. 58, 1968, 92pp.

[45] G. Pisier. *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces.* Conference Board of the Mathematical Sciences. American Mathematical Society, 1986.

[46] H.P. Rosenthal. *On quasi-complemented subspaces of Banach spaces,with an appendix on compactness of operators from $L_p(\mu)$ to $L_p(\nu)$.* J. Functional Analysis **4** (1969) 176-214.

[47] H.P. Rosenthal. *The Banach space $C(K)$.* Handbook of the geometry of Banach spaces. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (2001) 1547-1602.

[48] M.E. Rudin. *Lectures on set-theoretic topology.* Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 23. Americam Mathematical Society, 1975.

[49] C. Samuel. *Contributions à l'etúde des espaces de Banach.* PhD thesis, l'Université d'Aix - Marseille II (1977).

[50] C. Samuel. *Indice de Szlenk des $C(K)$ (K espace topologique compact nombrable). (French).* Seminar on the geometry of Banach spaces, vol I, II (Paris, 1983), 81-91, Publ. Math. Univ. Paris VII, 18, Univ. Paris VII, Paris, 1984.

[51] C. Samuel. *Sur la reproductibilite des espaces ℓ_p.* Math. Scand. **45** (1979) 1, 103-117.

[52] Z. Semadeni. *Banach spaces of continuous functions*, vol I, monographie Mathematyczne Tom 55. Warzawa, PWN - Polish Scientific Publishers, 1971.

[53] Z. Semadeni. *Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares. II.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. **8** (1960) 81-84.

[54] P. Wojtaszczyk. *Banach spaces for analysts.* Cambridge studies in Advanced Mathematics 25. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.