Geometria dos espaços de Banach $C_0(K, X)$

Michael Alexánder Rincón Villamizar

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq
(processo 161162/2014-2) e da CAPES

São Paulo, junho de 2016

Geometria dos espaços de Banach $C_0(K, X)$

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Michael Alexánder Rincón Villamizar em 15/06/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (Presidente) - IME-USP
- Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Daniela Mariz Silva Vieira - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Roberto Silva - UFRJ
- Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi - ICMC-USP
- Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann - UNIFESP

Agradecimentos

Muy agradecido con las agencias de apoyo CAPES y CNPq; sin su valiosísima ayuda este logro no hubiera sido posible.

Finalmente, quiero agradecer a toda la gente que conocí en estos cuatro años de estudio. Por todos los golpes de locura vívidos.

Resumo

Para um espaço localmente compacto Hausdorff K e um espaço de Banach X, seja $C_0(K,X)$ o espaço de Banach das funções contínuas de K em X que se anulam no infinito, munido da norma do supremo.

Seja T um isomorfismo de $C_0(K,X)$ num subespaço de $C_0(S,X)$ e definamos

$$\lambda(X) = \inf\{\max\{\|x + \lambda y\| \,:\, |\lambda| = 1\} \,:\, x, y \in S_X\}.$$

Nesta tese generalizamos alguns resultados de Jarosz, Cengiz e Gordon (ver [16, 30, 33]). Em particular, mostraremos que:

1. Se $\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda(X)$, então K é imagem contínua de um subconjunto de S.
2. Se $\|T\|\|T^{-1}\| < \frac{3\lambda(X)}{\lambda(X)+2}$, então para todo ordinal α, $K^{(\alpha)}$ é imagem contínua de um subconjunto de $S^{(\alpha)}$. Se K é compacto, tal subconjunto é fechado.
3. Se X não contém um subespaço isomorfo a c_0 e T é sobrejetor com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$, então $|K^{(\alpha)}||S^{(\alpha)}| < \aleph_0$ ou $|K^{(\alpha)}| = |S^{(\alpha)}|$ para qualquer ordinal α.
4. Se X não contém um subespaço isomorfo a c_0 e T é sobrejetor, então $|K||S| < \aleph_0$ ou $|K| = |S|$.

Para um reticulado de Banach X, o espaço $C_0(K,X)$ admite uma estrutura natural de reticulado de Banach. Motivados por alguns resultados de Cengiz e Kaplansky (ver [17, 36]), estudamos isomorfismos positivos entre reticulados $C_0(K,X)$.

Para um isomorfismo positivo T de $C_0(K,X)$ num subespaço de $C_0(S,X)$, sendo X é um AL-espaço, estabeleceremos que:

1. Para qualquer ordinal α temos $|K^{(\alpha)}| \leq \|T\|\|T^{-1}\||S^{(\alpha)}|$.
2. Se $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$, então para qualquer ordinal α, $K^{(\alpha)}$ é imagem contínua de um subconjunto de $S^{(\alpha)}$.
3. Se T é sobrejetor e preserva a ordem, isto é, $Tf \geq 0$ se e somente se $f \geq 0$, e $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$, então K e S são homeomorfos.

Palavras-chave: Espaços de Banach, Reticulados de Banach, Espaços de funções contínuas, Isomorfismos, Isomorfismos positivos, Isomorfismos de ordem.

Abstract

For a locally compact Hausdorff space K and a Banach space X, let $C_0(K, X)$ be the Banach space of continuous functions from K to X which vanish at infinity endowed with the supremum norm.

Let T be an isomorphism from $C_0(K, X)$ into $C_0(S, X)$ and let

$$\lambda(X) = \inf\{\max\{\|x + \lambda y\| \, : \, |\lambda| = 1\} \, : \, x, y \in S_X\}.$$

We generalize some known results due to Jarosz, Cengiz and Gordon (see [16, 30, 33]). Particularly, we will show that:

1. If $\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda(X)$ then K is a continuous image of a subset of S.
2. If $\|T\|\|T^{-1}\| < \frac{3\lambda(X)}{\lambda(X)+2}$ then for each ordinal α, $K^{(\alpha)}$ is a continuous image of a subset of $S^{(\alpha)}$. In the case where K is compact such set is closed.
3. If X is a Banach space containing no copy of c_0 and T is onto with $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$ then either $|K^{(\alpha)}||S^{(\alpha)}| < \aleph_0$ or $|K^{(\alpha)}| = |S^{(\alpha)}|$ for each ordinal α.
4. If X is a Banach space containing no copy of c_0 and T is onto then either $|K||S| < \aleph_0$ or $|K| = |S|$.

For a Banach lattice X, the space $C_0(K, X)$ has a natural structure of Banach lattice. Inspired by some results due to Cengiz and Kaplansky (see [17, 36]), we study positive isomorphisms between $C_0(K, X)$ Banach lattices.

For a positive isomorphism T from $C_0(K, X)$ into $C_0(S, X)$, being X an AL-space, we will prove that:

1. For each ordinal α we have $|K^{(\alpha)}| \leq \|T\|\|T^{-1}\||S^{(\alpha)}|$.
2. If $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$ then for each ordinal α, $K^{(\alpha)}$ is a continuous image of a subset of $S^{(\alpha)}$.
3. If T is an onto Banach lattice isomorphism that is $Tf \geq 0$ iff $f \geq 0$ and $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$ then K and S are homeomorphic.

Keywords: Banach spaces, Banach lattices, Spaces of continuous functions, Isomorphisms, Positive isomorphisms, Banach lattice isomorphisms.

Conteúdo

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	o conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	o conjunto dos números complexos.
$\mathbb{K}$	o corpo de escalares $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\vert A\vert$	a cardinalidade de um conjunto A.
$K \oplus S$	a soma topológica dos espaços K e S.
B_X	a bola unitária fechada de um espaço de Banach X.
S_X	a esfera unitária de um espaço de Banach X.
B_X^+	o conjunto $\{x \in B_X : x \geq 0\}$ para um reticulado de Banach X.
S_X^+	o conjunto $\{x \in S_X : x \geq 0\}$ para um reticulado de Banach X.
$L(X, Y)$	o espaço dos operadores lineares e limitados de X a Y.
$L(X)$	o espaço $L(X, X)$.
X^*	o espaço $L(X, \mathbb{K})$.
$X \oplus_\infty Y$	o espaço $X \times Y$ munido da norma $\Vert(x, y)\Vert = \max\{\Vert x\Vert, \Vert y\Vert\}$.
$C_0(K, X)$	o espaço de Banach das funções contínuas de K em X que se anulam no infinito com a norma do supremo.
$C_0(K)$	o espaço $C_0(K, X)$ com $X = \mathbb{K}$.
$C(K, X)$	o espaço $C_0(K, X)$ com K compacto.
$C(K)$	o espaço $C_0(K)$ com K compacto.
c_0	o espaço $C_0(\mathbb{N})$.
$X \cong Y$	os espaços X e Y são isometricamente isomorfos.
$X \sim Y$	os espaços de Banach X e Y são isomorfos.
$X \hookrightarrow Y$	o espaço X é isomorfo a um subespaço de Y.
$K \approx S$	os espaços topológicos K e S são homeomorfos.
$\mathcal{B}_K$	a σ-álgebra de Borel de um espaço topológico K.
χ_A	a função característica do conjunto A.
$\mathrm{rcabv}(K, X)$	o espaço de Banach de todas todas as medidas $\mu\colon \mathcal{B}_K \to X$ regulares, σ-aditivas e de variação limitada munido da norma da semivariação.
$\lambda(X)$	o parâmetro $\inf\{\max\{\Vert x + \lambda y\Vert : \vert\lambda\vert = 1\} : x, y \in S_X\}$.
$\mu(X)$	o parâmetro $\sup\{\min\{\Vert x + \lambda y\Vert : \vert\lambda\vert = 1\} : x, y \in S_X\}$.
$\mathcal{P}(A)$	o conjunto de partes de A.
$\Lambda\colon K \rightrightarrows S$	Λ é uma função de K a $\mathcal{P}(S)$.

$S^{(\alpha)}$	o α-derivado do espaço topológico S.
$\mathrm{ht}(S)$	o menor ordinal α tal que $S^{(\alpha)} = \emptyset$.
$\mathcal{S}(K, X)$	o conjunto das funções simples de K em X.
$\mathcal{M}(K, X)$	o espaço das funções totalmente mensuráveis.

Introdução

Sejam K um espaço localmente compacto e Hausdorff e X um espaço de Banach. Denotamos por $C_0(K, X)$ o espaço de Banach das funções contínuas de K em X que se anulam no infinito, munido da norma do supremo. Quando K for compacto, escreveremos $C(K, X)$ no lugar de $C_0(K, X)$. No caso em que $X = \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, usaremos as notações $C_0(K)$ ou $C(K)$ no caso compacto.

O clássico teorema de Banach-Stone afirma que a topologia de um compacto Hausdorff K é caracterizada pelo espaço $C(K)$. Mais precisamente, para dois espaços compactos Hausdorff K e S vale que $C(K)$ é isometricamente isomorfo a $C(S)$ se e somente se K e S são homeomorfos. Este teorema foi provado por Banach para espaços métricos compactos [3], e estendido por Stone para espaços compactos Hausdorff [48]. Por outro lado, Arens e Kelley provaram que o resultado é válido quando consideramos espaços de funções contínuas com valores em $\mathbb{C}$ [2]. Finalmente, Behrends mostrou que a mesma conclusão do teorema vale para os espaços de funções contínuas $C_0(K)$ [4].

O teorema de Banach-Stone foi o ponto de partida para o estudo de isometrias não necessariamente sobrejetoras entre espaços $C(K)$. Geba e Semadeni provaram que se existe uma isometria $T\colon C(K) \to C(S)$ satisfazendo $Tf \geq 0$ se e somente se $f \geq 0$, então K é imagem contínua de um subconjunto fechado de S [29]. Holsztyński mostrou que o resultado de Geba e Semadeni é ainda válido para isometrias arbitrárias [31].

Motivados por estes resultados, vários autores generalizaram o teorema de Banach-Stone e o teorema de Holsztyński para isomorfismos entre espaços de Banach de funções contínuas. Amir e Cambern, independentemente, provaram que se existe um isomorfismo $T\colon C_0(K) \to C_0(S)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$, então K e S são homeomorfos [1, 8]. Mais ainda, Cohen mostrou que 2 é a melhor constante possível no teorema de Amir-Cambern [20]. Outra generalização foi dada por Benyamini: se K e S são espaços métricos compactos e T é um isomorfismo de $C(K)$ num subespaço de $C(S)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$, então K é imagem contínua de um subconjunto fechado de S [5]. Note que o resultado de Benyamini generaliza os teoremas de Amir-Cambern e Holsztyński para espaços métricos compactos. Jarosz provou que o resultado de Benyamini vale também para espaços localmente compactos arbitrários [32].

Para espaços de funções contínuas com valores vetoriais em geral não pode ser dito que os resultados mencionados acima seguem valendo. A validade de tais resultados depende da geometria do espaço vetorial considerado. Em [34], Jerison provou que o teorema de Banach-Stone vale para os espaços $C(K, X)$, quando X é estritamente convexo.

Cambern provou que o teorema de Holsztyński também vale para estes espaços sob a mesma hipótese [7]. Por outro lado, Jarosz deu uma generalização comum aos teoremas de Amir-Cambern e Holsztyński para os espaços $C_0(K, X)$, quando X satisfaz uma condição geométrica envolvendo o seguinte parâmetro introduzido em [33]: para um espaço de Banach E seja

$$\mu(E) = \sup\{\min\{\|x + \lambda y\| \,:\, |\lambda| = 1\} \,:\, x, y \in S_E\}.$$

Em [33, Teorema 5], Jarosz prova que dados K e S espaços localmente compactos Hausdorff e um espaço de Banach X com $\mu(X^*) < 2$, se existe um isomorfismo $T\colon C_0(K, X) \to C_0(S, X)$ satisfazendo

$$\|T\|\|T^{-1}\| < \frac{4}{2 + \mu(X^*)}, \tag{1}$$

então K é imagem contínua de um subconjunto de S. Mais ainda, se K é compacto tal subconjunto é fechado. No caso em que X é um espaço de Banach real, a condição $\mu(X^*) < 2$ coincide com o fato de X ter a propriedade de ser uniformemente não quadrado [37, Proposição 1 e Corolário 2].

O resultado de Jarosz sugere o seguinte problema: a limitação do isomorfismo na equação (1) é a melhor possível? No Capítulo 2 apresentaremos uma resposta parcial a esta questão. Nosso resultado dependerá de outro parâmetro introduzido por Jarosz em [33]: para um espaço de Banach E seja

$$\lambda(E) = \inf\{\max\{\|x + \lambda y\| \,:\, |\lambda| = 1\} \,:\, x, y \in S_E\}.$$

Assim, podemos enunciar o primeiro resultado de nosso trabalho.

Teorema 1. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Se $T\colon C_0(K, X) \to C_0(S, X)$ é um isomorfismo com $\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda(X)$, então K é imagem contínua de um subconjunto de S.

Em [33, Teorema 1], Jarosz provou o Teorema 1 para espaços métricos localmente compactos. Além disso, o Teorema 1 é uma generalização do teorema de Jarosz mencionado na equação (1) já que para qualquer espaço de Banach X temos a relação

$$\frac{4}{2 + \mu(X^*)} \leq \lambda(X),$$

sendo a desigualdade estrita no caso em que X é um espaço de Banach real [19, Observações 4.5 e 4.6]. Como veremos no decorrer deste trabalho, em alguns casos a limitação do Teorema 1 é a melhor possível.

Voltando ao caso escalar, Cengiz deu outra generalização do teorema de Holsztyński. O resultado dele estabelece que se $T\colon C_0(K) \to C_0(S)$ é um isomorfismo satisfazendo $\|T\|\|T^{-1}\| < 3/2$, então para qualquer ordinal α, $K^{(\alpha)}$ é imagem contínua de um subconjunto de $S^{(\alpha)}$ [16]. Lembremos que para um espaço topológico S e um ordinal α, $S^{(\alpha)}$ denota o α-derivado de S.

Nosso segundo resultado do Capítulo 2 é uma versão vetorial deste resultado.

Teorema 2. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Se $T\colon C_0(K,X) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo com

$$\|T\|\|T^{-1}\| < \frac{3\lambda(X)}{\lambda(X)+2}, \tag{2}$$

então para qualquer ordinal α, $K^{(\alpha)}$ é imagem contínua de um subconjunto de $S^{(\alpha)}$. Mais ainda, se K é compacto tal subconjunto é fechado.

Mostraremos que para uma classe ampla de espaços de Banach, a limitação (2) é melhor do que a limitação (1). Portanto, podemos considerar o Teorema 2 como outra generalização de [33, Teorema 5].

Os resultados acima inspiram o problema de saber quais relações topológicas ou conjuntistas são preservadas sob a existência de um isomorfismo T injetor ou sobrejetor entre espaços $C_0(K,X)$. O teorema de Banach-Stone junto com suas generalizações vetoriais mostram que tais relações podem depender da limitação sobre a distorção do isomorfismo, isto é, $\|T\|\|T^{-1}\|$. No entanto, Cengiz estabeleceu independentemente da limitação da distorção que se $C_0(K)$ e $C_0(S)$ são isomorfos, então K e S têm a mesma cardinalidade [15]. Em [13], Candido e Galego deram uma versão vetorial deste resultado para a classe dos espaços $C_0(K,X)$, com X de cotipo finito. Nosso próximo teorema estende o resultado deles para a classe dos espaços de Banach que não contem cópia de c_0.

Teorema 3. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach não contendo cópia isomorfa de c_0. Temos

$$C_0(K,X) \sim C_0(S,X) \Longrightarrow |K||S| < \aleph_0 \text{ ou } |K| = |S|.$$

Notemos que tanto o resultado de Cengiz quanto o Teorema 3 são meramente conjuntistas. Agora como já vimos, podemos obter relações topológicas impondo limitações sobre a distorção do isomorfismo. Nesta linha, Gordon provou se K e S são espaços métricos compactos enumeráveis e $T\colon C(K) \to C(S)$ é um isomorfismo sobrejetor com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$, então K e S são homeomorfos [30]. Candido e Galego generalizaram este resultado para a classe dos espaços $C_0(K,X)$, com X de cotipo finito [14]. O seguinte resultado, cuja prova faremos no Capítulo 2, é uma generalização vetorial do resultado do Gordon.

Teorema 4. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach não contendo cópia isomorfa de c_0. Para qualquer ordinal α temos

$$C_0(K,X) \overset{<3}{\sim} C_0(S,X) \Longrightarrow |K^{(\alpha)}||S^{(\alpha)}| < \aleph_0 \text{ ou } |K^{(\alpha)}| = |S^{(\alpha)}|.$$

No Capítulo 3 abordamos o estudo de isomorfismos entre espaços $C_0(K,X)$, sendo X um reticulado de Banach. Nosso primeiro resultado é inspirado pelo clássico teorema de Kaplansky que estabelece que se existe um isomorfismo de ordem T de $C(K)$ sobre $C(S)$, isto é, $T(f) \geq 0$ se e somente se $f \geq 0$ para todo $f \in C(K)$, então K e S são homeomorfos [36]. Muitos autores têm estendido este resultado para o reticulado $C(K, X)$ sob algumas condições algébricas envolvendo o isomorfismo (ver por exemplo [18, 27, 39]). Apresentamos aqui uma generalização comum aos teoremas de Amir-Cambern e Kaplansky para os reticulados $C_0(K, X)$, quando X é um *AL-espaço*. Lembremos que um reticulado de Banach X é chamado *L-espaço abstrato* ou simplesmente AL-espaço, se $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in X$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Teorema 5. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um AL-espaço. Se $T\colon C_0(K, X) \to C_0(S, X)$ é um isomorfismo de ordem com $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$, então K e S são homeomorfos.

Em seguida, estudamos isomorfismos positivos entre reticulados $C_0(K, X)$, isto é, isomorfismos que enviam elementos positivos em positivos. Motivados pelo Teorema 4, damos uma generalização comum aos teoremas de Holsztyński e Kaplansky, quando X é um AL-espaço.

Teorema 6. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um AL-espaço. Se $T\colon C_0(K, X) \to C_0(S, X)$ é um isomorfismo positivo com $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$, então para qualquer ordinal α, $K^{(\alpha)}$ é imagem contínua de um subconjunto de $S^{(\alpha)}$. Mais ainda, se K é compacto tal subconjunto é fechado.

Mostraremos também que os Teoremas 5 e 6 não são válidos sem a hipótese da limitação sobre a distorção. Mesmo assim, provaremos que existem relações topológicas entre os espaços envolvidos. O seguinte resultado é uma versão vetorial de [17, Teorema, pág. 301].

Teorema 7. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um AL-espaço. Se existe um isomorfismo positivo $T\colon C_0(K, X) \to C_0(S, X)$, então para qualquer ordinal α temos

$$|K^{(\alpha)}| \leq \|T\|\|T^{-1}\||S^{(\alpha)}|.$$

No Capítulo 3 abordaremos também o estudo de isomorfismos positivos entre reticulados $C_0(K, X)$, quando X é um reticulado de Banach arbitrário. Nosso próximo resultado é uma versão do Teorema 4 para isomorfismos positivos.

Teorema 8. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um reticulado de Banach não contendo cópia de c_0. Se $T_1\colon C_0(K, X) \to C_0(S, X)$ e $T_2\colon C_0(S, X) \to C_0(K, X)$ são isomorfismos positivos, então para qualquer ordinal α temos $|K^{(\alpha)}||S^{(\alpha)}| < \aleph_0$ ou $|K^{(\alpha)}| = |S^{(\alpha)}|$.

Para finalizar o Capítulo 3, mostraremos uma generalização vetorial do teorema de Kaplansky. Ressaltamos aqui que a conclusão deste teorema não vale em geral para o reticulado de Banach $C(K, X)$. Contudo, é possível obter uma versão vetorial deste resultado.

Teorema 9. Sejam K e S intervalos de ordinais e X um reticulado de Banach não contendo cópia de c_0. Suponhamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, não existe um homomorfismo de reticulados de X^{n+1} em X^n. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $C(K, X)$ é ordem isomorfo a $C(S, X)$;

(b) os espaços K e S são homeomorfos.

O restante de nosso trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 1 serão apresentadas todas as ferramentas que serão usadas no decorrer deste trabalho. As provas dos teoremas apresentados nos Capítulos 2 e 3 deste trabalho estão fortemente baseadas no estudo de isomorfismos (positivos) definidos no espaço $C_0(K)$ com valores no espaço $C_0(S, X)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos as notações e resultados que serão usados no decorrer do trabalho. Na primeira seção lembraremos alguns fatos bem conhecidos em espaços de Banach. Na segunda seção daremos uma breve introdução à teoria de medidas vetoriais e integração vetorial. Na terceira seção apresentamos alguns resultados sobre medidas vetoriais envolvendo reticulados de Banach. Na quarta seção vamos discutir algumas propriedades de dois parâmetros associados a um espaço de Banach. Por fim, na última seção discutiremos algumas propriedades topológicas de uma classe de espaços topológicos conhecidos como intervalos de ordinais.

1.1 Espaços de Banach

Para um espaço de Banach X, B_X e S_X denotarão a bola fechada unitária e a esfera unitária em X, respectivamente.

Definição 1.1. Por um *operador* entre espaços de Banach entenderemos qualquer função linear e contínua. Sejam X e Y espaços de Banach. O espaço de operadores de X em Y é denotado por $L(X,Y)$. Se $X = Y$, escreveremos simplesmente $L(X)$. Se $Y = \mathbb{K}$, $L(X,Y)$ é o *dual topológico* de X, e é denotado por X^*.

Definição 1.2. Um *isomorfismo* entre espaços de Banach X e Y é um operador $T\colon X \to Y$ injetor tal que T^{-1} é contínuo. Um *isomorfismo isométrico* é um isomorfismo T tal que $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$, isto é, T é uma *isometria*.

Definição 1.3. Se $T\colon X \to Y$ é um isomorfismo, o número $\|T\|\|T^{-1}\|$ é chamado a *distorção de T*.

Notação 1.4. Sejam X e Y espaços de Banach. As seguintes notações serão usadas:

1. $X \cong Y$ se existir um isomorfismo isométrico sobrejetor entre X e Y.

2. $X \sim Y$ se existir um isomorfismo sobrejetor de X a Y;

3. $X \hookrightarrow Y$ se existir um isomorfismo de X a Y;

4. $X \overset{a}{\sim} Y$ ($X \overset{<a}{\sim} Y$) se existir um isomorfismo sobrejetor de X a Y com distorção exatamente a (menor do que a, respectivamente);

5. $X \overset{a}{\hookrightarrow} Y$ ($X \overset{<a}{\hookrightarrow} Y$) se existir um isomorfismo de X a Y com distorção exatamente a (menor do que a, respectivamente).

Definição 1.5. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em um espaço de Banach X é chamada *incondicionalmente convergente* se $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge (em norma) para toda permutação π de $\mathbb{N}$. Diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é *fracamente incondicionalmente convergente* se $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty$ para qualquer $x^* \in X^*$.

Uma prova do seguinte lema pode ser encontrada em [38, Lema 2, pag. 107].

Lema 1.6. *Seja X um espaço de Banach. Para uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é fracamente incondicionalmente convergente;*

2. *existe uma constante $K > 0$ tal que para qualquer sequência limitada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ temos*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

O próximo resultado, provado por Pełzyński, caracteriza os espaços de Banach que contem cópia isomorfa de c_0. Para uma prova o leitor pode consultar [38, Teorema 9, pag. 108].

Teorema 1.7. *Seja X um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *existe uma série fracamente incondicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ que não é incondicionalmente convergente;*

2. *existe uma série fracamente incondicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tal que $\inf\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} > 0$;*

3. *o espaço X contém um subespaço isomorfo a c_0.*

Finalizamos esta seção com um resultado da geometria dos espaços de Banach cuja prova pode ser encontrada em [45].

Teorema 1.8. *Sejam X e Y espaços de Banach. Então*

$$c_0 \hookrightarrow X \oplus_\infty Y \Longrightarrow c_0 \hookrightarrow X \text{ ou } c_0 \hookrightarrow Y.$$

1.2 Medidas vetoriais e integração vetorial

Nesta seção daremos algumas definições e resultados clássicos da teoria de medidas vetoriais e integração vetorial. Para um estudo mais detalhado, veja por exemplo [24, 25].

Por comodidade só vamos considerar medidas vetoriais definidas em σ-álgebras. Dado um conjunto não vazio K e uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de K, o par $(K, \mathcal{A})$ é chamado *espaço mensurável.*

Definição 1.9. Seja $(K, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam X e Y espaços de Banach. Uma medida vetorial é uma função $m\colon \mathcal{A} \to L(X,Y)$ tal que para cada $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos temos

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Além disso, dizemos que m é *σ-aditiva* se para qualquer seqüência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$ temos

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

onde a série acima é convergente em norma.

Uma *medida escalar* é qualquer medida que tome valores em $\mathbb{K} = L(\mathbb{K})$.

Observação 1.10. É conhecido que existe uma isometria (canônica) entre os espaços $L(\mathbb{K}, X)$ e X. Por conveniência escreveremos $L(\mathbb{K}, X) = X$. Assim, uma medida vetorial $m\colon \mathcal{A} \to X$ é uma função tal que para cada $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos temos

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

A definição de σ-aditividade de uma medida vetorial $m\colon \mathcal{A} \to X$ é análoga.

Definição 1.11. Sejam $(K, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e X um espaço de Banach. Diremos que $f\colon K \to X$ é simples se existirem $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $f = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} x_j$.

Observação 1.12. Qualquer função simples $f\colon K \to X$ pode ser escrita na forma $f = \sum_{j=1}^{m} \chi_{B_i} y_i$, onde $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{A}$ são mutuamente disjuntos e $y_1, \ldots, y_m \in X$ [24, Proposição 1, pág. 82].

O conjunto das funções simples de K em X é denotado por $\mathcal{S}(K, X)$. Este conjunto é um espaço vetorial com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Mais ainda, a função

$$f \in S(K, X) \longmapsto \|f\| = \sup_{t\in K} \|f(t)\|$$

define uma norma em $\mathcal{S}(K,X)$. O completamento deste espaço com respeito a esta norma é chamado o espaço das *funções totalmente mensuráveis* e o denotamos por $\mathcal{M}(K,X)$. Consideraremos o espaço $\mathcal{M}(K,X)$ munido da topologia da convergência uniforme, isto é, a topologia induzida pela norma

$$\|f\| = \sup_{t\in K} \|f(t)\|, \quad \text{se } f \in \mathcal{M}(K,X).$$

Definição 1.13. Seja $(K,\mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam X e Y espaços de Banach. A *semivariação escalar* de $m\colon \mathcal{A}\to L(X,Y)$ em $A\in\mathcal{A}$ é definida por

$$\|m\|(A) = \sup \left\| \sum_{j=1}^{n} m(A_j)(x_j) \right\|,$$

onde o supremo é tomado sobre as $\mathcal{A}$-partições finitas de A e todas as famílias finitas em B_X. Diremos que m é de semivariação escalar limitada se $\|m\|(K)<\infty$.

Observação 1.14. A definição de semivariação de uma medida $m\colon \mathcal{A}\to X$ no sentido de [23, pág. 2] coincide com a Definição 1.13 sob a identificação $L(\mathbb{K},X)=X$.

Seja $(K,\mathcal{A})$ um espaço mensurável. Se $m\colon \mathcal{A}\to L(X,Y)$ é uma medida vetorial, a integral de uma função simples f de K em X, $f=\sum_{j=1}^{n}\chi_{A_j}x_j$, respeito a m é definida como

$$\int_K f\,dm = \sum_{j=1}^{n} m(A_j)(x_j).$$

Pode ser mostrado que esta definição é independente da representação de f como função simples [24, Corolário, pág. 108]. Também para $A\in\mathcal{A}$ definiremos

$$\int_A f\,dm = \int_K \chi_A f\,dm.$$

Observe que para cada $A\in\mathcal{A}$, a aplicação dada por

$$f\in\mathcal{S}(K,X)\longmapsto \int_A f\,dm \in Y \tag{1.1}$$

é linear. Além disso, para cada $f\in\mathcal{S}(K,X)$ temos

$$\left\|\int_K f\,dm\right\| \le \|f\|\|m\|(K).$$

Assim, a aplicação definida na equação (1.1) é contínua respeito a norma do supremo quando m é de semivariação escalar limitada. Portanto, pela densidade de $\mathcal{S}(K,X)$ em $\mathcal{M}(K,X)$, existe uma única extensão desta aplicação a todo o espaço $\mathcal{M}(K,X)$. O valor de tal extensão em $f\in\mathcal{M}(K,X)$ será ainda denotado por $\int_K f\,dm$ e é chamado *integral imediata de Dinculeanu* da f com respeito a medida m.

Para o propósito deste trabalho será suficiente a definição de integral dada acima. Para o leitor interessado numa teoria de integração vetorial mais geral, recomendamos [25].

Definição 1.15. Seja K um espaço topológico. A menor σ-álgebra que contém a topologia de K é chamada a *σ-álgebra de Borel de* K e a denotamos por $\mathcal{B}_K$.

Dado um espaço topológico K, suporemos que nas definições dadas anteriormente a σ-álgebra $\mathcal{A}$ é precisamente $\mathcal{B}_K$. Por uma *medida de Borel* entenderemos qualquer medida (escalar ou vetorial) definida na σ-álgebra $\mathcal{B}_K$.

Definição 1.16. Sejam K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach. Diremos que $f\colon K \to X$ se anula no infinito se $\{x \in K : \|f(x)\| \geq \varepsilon\}$ for compacto para qualquer $\varepsilon > 0$.

Para um espaço localmente compacto Hausdorff K e um espaço de Banach X, o conjunto das funções contínuas de K em X que se anulam no infinito será denotado por $C_0(K, X)$. Este conjunto é um espaço de Banach com a norma do supremo. Se K for compacto, denotaremos este espaço por $C(K, X)$. Finalmente se $X = \mathbb{K}$, escreveremos $C_0(K)$ e $C(K)$ no lugar de $C_0(K, \mathbb{K})$ e $C(K, \mathbb{K})$, respectivamente.
A seguinte definição desempenhará um papel fundamental neste trabalho.

Definição 1.17. Seja K um espaço localmente compacto Hausdorff e sejam X e Y espaços de Banach. Uma medida vetorial $m\colon \mathcal{B}_K \to L(X, Y)$ é chamada *variacionalmente regular* (ou *regular* quando X ou Y é $\mathbb{K}$) se dados $A \in \mathcal{B}_K$ e $\varepsilon > 0$, existem C compacto e U aberto com $C \subset A \subset U$ tais que $\|m\|(U \setminus C) < \varepsilon$.

De especial interesse será para nós considerar medidas vetoriais com valores em $X^* = L(X, \mathbb{K})$. Lembremos que se $(K, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável e $\mu\colon \mathcal{A} \to X^*$ é uma medida vetorial, a *variação* de μ em $A \in \mathcal{A}$ é definida por

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{j=1}^{n} \|\mu(A_j)\|,$$

onde o supremo é tomado sobre as $\mathcal{A}$-partições finitas de A. Como é mostrado em [24, Proposição 4, pág. 54], as definições de variação e semivariação são idênticas para medidas vetoriais com valores em X^*.
Dados um espaço localmente compacto K e um espaço de Banach X, denotamos por $\mathrm{rcabv}(K, X)$ o conjunto de todas as medidas $\mu\colon \mathcal{B}_K \to X$ regulares, σ-aditivas de variação limitada. Este conjunto é um espaço de Banach com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar e com norma dada por $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(K)$. No caso escalar, uma medida de Borel regular é chamada *medida de Radon*. O conjunto de medidas de Radon é denotado por $M(K)$.
A seguir, enunciamos o clássico teorema de representação de Riesz que estabelece uma correspondência entre o espaço $C_0(K)^*$ e $M(K)$. Para uma prova deste resultado, ver [47, Teorema 18.4.1].

Teorema 1.18. *Seja K um espaço localmente compacto Hausdorff. Se $\psi \in C_0(K)^*$, então existe uma única medida $\mu \in M(K)$ tal que*

$$\psi(f) = \int_K f\, d\mu, \quad \text{para qualquer } f \in C_0(K) \text{ e}$$
$$\|\psi\| = |\mu|(K).$$

Mais ainda, μ é não negativa se e somente se ψ é não negativa, isto é, $\mu \geq 0$ se e somente se $f \geq 0$ implica que $\psi(f) \geq 0$.

Para uma prova do seguinte resultado, veja por exemplo [12, Proposição 1.15].

Proposição 1.19. *Sejam K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach. Se $f \in C_0(K, X)$, então existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}(K, X)$ tal que $f_n \to f$ uniformemente e $\|f_n\| \leq \|f\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Como consequência deste resultado deduzimos que se $\mu \in \operatorname{rcabv}(K, X^*)$, a aplicação $f \mapsto \int_K f\, d\mu$ define um funcional em $C_0(K, X)$. O teorema de Representação de Riesz-Singer estabelece que todo elemento de $C_0(K, X)^*$ aparece desta forma, isto é, existe uma correspondência entre os elementos de $C_0(K, X)^*$ e o espaço $\operatorname{rcabv}(K, X^*)$. Para uma prova detalhada deste resultado, veja [40].

Teorema 1.20. *Sejam K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach. Então existe um isomorfismo isométrico entre $C_0(K, X)^*$ e $\operatorname{rcabv}(K, X^*)$, onde o funcional $U \in C_0(K, X)^*$ e a medida correspondente $\lambda \in \operatorname{rcabv}(K, X^*)$ estão relacionados pela fórmula*

$$Uf = \int_K f\, d\lambda, \quad \text{para cada } f \in C_0(K, X) \text{ e}$$
$$\|U\| = |\lambda|(K),$$

onde a integral aqui é a integral imediata de Dinculeanu.

Seja $(K, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Sejam X e Y espaços de Banach e $m\colon \mathcal{A} \to L(X, Y)$, uma medida vetorial. Se $y^* \in Y^*$, definimos $m_{y^*}\colon \mathcal{A} \to X^*$ por $m_{y^*}(A)(x) = \langle m(A)(x), y^* \rangle$. O seguinte resultado relaciona as variações $|m_{y^*}|(\cdot)$ com a semivariação $\|m\|(\cdot)$. Para uma prova deste resultado, veja [24, Proposição 5].

Lema 1.21. *Sejam $(K, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $m\colon \mathcal{A} \to L(X, Y)$ uma medida vetorial. Então para cada $A \in \mathcal{A}$ temos*

$$\|m\|(A) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |m_{y^*}|(A).$$

Do teorema de representação de Riesz-Singer deduziremos o teorema de representação de Dinculeanu-Dunford para operadores definidos em $C_0(K, X)$. Para uma prova alternativa, ver [6].

Teorema 1.22. *Sejam K um espaço localmente compacto Hausdorff, X e Y espaços de Banach. Suponha que $T\colon C_0(K,X) \to Y$ é um operador. Então existe uma única medida vetorial $m\colon \mathcal{B}_K \to L(X,Y^{**})$ satisfazendo:*

1. *m é aditiva e $\|m\|(K) < \infty$;*
2. *para cada $y^* \in Y^*$, $T^*(y^*) = m_{y^*} \in \mathrm{rcabv}(K,X^*)$, onde $m_{y^*}\colon \mathcal{B}_K \to X^*$ é dada por $m_{y^*}(A)(x) = \langle m(A)(x), y^*\rangle$;*
3. *o operador $y^* \in Y^* \mapsto m_{y^*} \in C_0(K,X)^*$ é contínuo (nas topologias fracas);*
4. *$T(f) = \int_K f\,dm$ para qualquer $f \in C_0(K,X)$;*
5. *$\|T\| = \|m\|(K)$.*

Prova. Para cada $y^* \in Y^*$ temos $T^*(y^*) \in C_0(K,X)^*$. Pelo Teorema 1.20 existe uma única medida $\mu_{y^*} \in \mathrm{rcabv}(K,X^*)$ tal que $T^*(y^*) = \mu_{y^*}$ e $\|T^*(y^*)\| = |\mu_{y^*}|(K)$. Definamos $m\colon \mathcal{B}_K \to L(X,Y^{**})$ por $\langle m(A)(x), y^*\rangle = \mu_{y^*}(A)(x)$ para todo $x \in X$. Da definição de m segue que $m_{y^*} = T^*(y^*)$ para qualquer $y^* \in Y^*$. Portanto, o operador $y^* \in Y^* \mapsto m_{y^*} \in C_0(K,X)^*$ é contínuo na topologia fraca de Y^* e de $C_0(K,X)^*$, respectivamente. Provemos que m é aditiva. Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{B}_K$ disjuntos e fixemos $y^* \in Y^*$ e $x \in X$. Então

$$\begin{aligned}\langle m(A_1 \cup A_2)(x), y^*\rangle &= \mu_{y^*}(A_1 \cup A_2)(x)\\ &= \mu_{y^*}(A_1)(x) + \mu_{y^*}(A_2)(x)\\ &= \langle m(A_1)(x), y^*\rangle + \langle m(A_2)(x), y^*\rangle\\ &= \langle m(A_1)(x) + m(A_2)(x), y^*\rangle.\end{aligned}$$

Segue da arbitrariedade de $y^* \in Y^*$ e $x \in X$ que $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$. Agora, pelo Lema 1.21 temos

$$\|m\|(K) = \sup_{\|y^*\| \le 1} |m_{y^*}|(K) = \sup_{\|y^*\| \le 1} \|T^*(y^*)\| = \|T^*\| = \|T\|.$$

Seja $f \in C_0(K,X)$, então f é integrável respeito a m pois $\|m\|(K) < \infty$. Por outro lado segue de [26, Lema 1] que para cada $y^* \in Y^*$ temos

$$\begin{aligned}y^*(Tf) = T^*(y^*)(f) &= \int_K f\,d\mu_{y^*}\\ &= \int_K f\,dm_{y^*} = y^*\left(\int_K f\,dm\right).\end{aligned}$$

Logo, $Tf = \int_K f\,dm$. A unicidade de m segue do Teorema 1.20. Isto completa a demonstração. $\square$

Observação 1.23. Se $T\colon C_0(K,X) \to Y$ é um operador contínuo, a única medida m satisfazendo as condições do Teorema 1.22 é chamada *medida representante de T*.

Nosso objetivo agora é encontrar condições sob as quais a medida representante de um operador $T\colon C_0(K,X) \to Y$ toma valores em $L(X,Y)$. Este problema foi proposto por Dinculeanu em [24, pág. 416]. O seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [6, Teorema 4.4], dá uma resposta a esta questão.

Teorema 1.24. *Seja $T\colon C_0(K,X) \to Y$ um operador e $m\colon \mathcal{B}_K \to L(X,Y^{**})$ a medida representante de T. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *m toma valores em $L(X,Y)$;*
2. *para cada $x \in X$, o operador $T_x\colon C_0(K) \to Y$ dado por $T_x(f) = T(f \cdot x)$ é fracamente compacto.*

A seguir apresentaremos uma caracterização dos espaços de Banach que não contêm cópia isomorfa de c_0. Para uma prova deste resultado, ver [42, Teorema 13].

Teorema 1.25. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *o espaço de Banach X não contém um subespaço isomorfo a c_0;*
2. *dado um espaço localmente compacto Hausdorff K, todo operador $T\colon C_0(K) \to X$ é fracamente compacto.*

Para dar outra resposta ao problema proposto por Dinculeanu, vamos introduzir a seguinte definição:

Definição 1.26. Seja $(K,\mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam X e Y espaços de Banach. Uma medida vetorial $m\colon \mathcal{A} \to L(X,Y^{**})$ é *fortemente limitada* se dada um sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos mutuamente disjuntos de $\mathcal{A}$ temos $\|m\|(A_n) \to 0$.

Uma prova do próximo teorema pode ser encontrada em [6, Teorema 5.1].

Teorema 1.27. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *o espaço de Banach Y não contém cópia isomorfa de c_0;*
2. *para todo espaço localmente compacto Hausdorff K e todo espaço de Banach X, a medida representante de um operador $T\colon C_0(K,X) \to Y$ é fortemente limitada se e somente se toma valores em $L(X,Y)$.*

A próxima proposição relaciona os conceitos de regularidade variacional e de limitação forte de uma medida vetorial. Para uma prova, veja [6, pág. 156].

Proposição 1.28. *Seja K um espaço localmente compacto Hausdorff e sejam X e Y espaços de Banach. Se $m\colon \mathcal{B}_K \to L(X,Y)$ é uma medida representante fortemente limitada então m é variacionalmente regular.*

A partir do Teorema 1.22 podemos deduzir um teorema de representação para operadores $T\colon C_0(K) \to X$. Este fato segue da identificão $L(\mathbb{K},X^{**}) = X^{**}$. Outra prova deste resultado pode ser encontrada em [42, Teorema 1].

Teorema 1.29. *Sejam K um espaço localmente compacto e Hausdorff e X um espaço de Banach. Seja $T\colon C_0(K) \to X$ um operador. Então existe uma única medida $\mu\colon \mathcal{B}_K \to X^{**}$ satisfazendo*

1. $x^*\mu \in C_0(K)^*$ *para todo* $x^* \in X^*$, *onde* $x^*(\mu(A)) := \langle x^*, \mu(A)\rangle$ *para* $A \in \mathcal{B}_K$;
2. *o operador* $x^* \mapsto x^*\mu$ *de* X^* *em* $C_0(K)^*$ *é contínuo (nas topologias fracas);*
3. $x^*(Tf) = \int_K f\,d(x^*\mu)$ *para toda* $f \in C_0(K)$ *e* $x^* \in X^*$;
4. $\|T\| = |\mu|(K)$.

Como no Comentário 1.23, diremos que μ é a *medida representante* do operador T. O seguinte resultado caracteriza os operadores fracamente compactos definidos em $C_0(K)$ (veja também Teorema 1.25). Para uma prova, consulte [42, Teoremas 2 e 6].

Teorema 1.30. *Sejam K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach. Sejam $T\colon C_0(K) \to X$ um operador e $m\colon \mathcal{B}_K \to X^{**}$ a medida representante de T. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *o operador T é fracamente compacto;*
2. *a medida m toma seus valores em X;*
3. *a medida m é regular.*

Finalizamos esta seção com dois resultados técnicos que usaremos neste trabalho.

O seguinte resultado foi provado por Plebanek em [43, Teorema 3.3] com a hipótese adicional da compacidade. No entanto, é fácil notar que o resultado é válido também para espaços localmente compactos Hausdorff.

Teorema 1.31. *Sejam K e L espaços localmente compactos Hausdorff. Se $T\colon C_0(K) \to C_0(L)$ é um isomorfismo, então para todo $x \in K$ temos*

$$\sup\{|\,T^*\delta_y(\{x\})| \,:\, y \in L\} \geq \frac{1}{\|T\|\|T^{-1}\|}.$$

Para uma prova do próximo resultado, veja [12, Teorema 1.16].

Teorema 1.32. *Sejam K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach. Sejam $\mu \in \mathrm{rcabv}(K, X^*)$ e U um subconjunto aberto de K. Definamos $\mathcal{F}_U = \{f \in C_0(K,X) \,:\, \|f\| \leq 1 \text{ e } f(K \setminus U) = \{0\}\}$. Então*

$$|\mu|(U) = \sup_{f\in\mathcal{F}_U} \left|\int_K f\,d\mu\right|.$$

1.3 Reticulados de Banach e medidas vetoriais

Nesta seção daremos uma breve introdução à teoria de reticulados de Banach. O leitor interessado neste tópico pode consultar [46].

Definição 1.33. Um *reticulado de Banach* é um espaço de Banach real X junto com uma ordem parcial $\leq$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in X$;

(b) para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $x \in X$, se $a \geq 0$ e $x \geq 0$, então $ax \geq 0$;

(c) para quaisquer $x, y \in X$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ e $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ existem;

(d) se $|x| \leq |y|$, então $\|x\| \leq \|y\|$ onde o módulo de $x \in X$, denotado por $|x|$, é definido como $|x| = x \vee (-x)$.

Por conveniência escrevemos $x \geq y$ para indicar que $y \leq x$.

Notação 1.34. Seja X um reticulado de Banach. Denotamos por B_X^+ (S_X^+) o conjunto de elementos $x \in B_X$ ($x \in S_X$, respectivamente) tais que $x \geq 0$.

Observação 1.35. Se X é um reticulado de Banach, então X^* admite estrutura de reticulado de Banach definindo $x^* \geq 0$ se e somente se $x^*(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$.

Para uma prova do próximo resultado, veja [46, pág. 87].

Proposição 1.36. *Seja X um reticulado de Banach. Se $x \geq 0$, então*

$$\|x\| = \sup\{x^*(x) \,:\, x^* \in B_{X^*}^+\}.$$

Definição 1.37. Sejam X e Y reticulados de Banach. Um operador $T\colon X \to Y$ é chamado *positivo* se $Tx \geq 0$ quando $x \geq 0$. Quando T for um isomorfismo, diremos que T é um *isomorfismo positivo*.

Definição 1.38. Sejam X e Y reticulados de Banach. Um *homomorfismo de reticulados* é um operador $T\colon X \to Y$ tal que $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$, para todo $x, y \in X$. Diremos que T é um *isomorfismo de ordem* se T for um homomorfismo de reticulados bijetor. Quando existir um isomorfismo de ordem entre X e Y, diremos que X é *ordem isomorfo* a Y (ou X e Y são *ordem isomorfos*).

Observação 1.39. Observe que se $T\colon X \to Y$ é um homomorfismo de reticulados, então T é positivo. Agora, é conhecido que todo operador positivo é contínuo [46, Teorema 5.3, pág. 84]. Portanto, se T é um homomorfismo de reticulados, então T é contínuo. Mais ainda, se T é um isomorfismo de ordem, então T é um isomorfismo de espaços de Banach pois T e T^{-1} são operadores positivos.

Observação 1.40. Dado um reticulado de Banach X e um espaço localmente compacto Hausdorff K, o espaço $C_0(K,X)$ tem estrutura natural de reticulado de Banach definindo a ordem para $f, g \in C_0(K,X)$, $f \geq g$ se e somente se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in K$.

Definição 1.41. Sejam $(K, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, e X e Y reticulados de Banach. Diremos que uma medida vetorial $m\colon \mathcal{A} \to L(X,Y)$ é *positiva* se $m(A)\colon X \to Y$ é um operador positivo para todo $A \in \mathcal{A}$.

O próximo resultado é uma versão vetorial do teorema de Representação de Riesz-Singer para funcionais positivos definidos em $C_0(K,X)$.

Lema 1.42. *Sejam K um espaço localmente compacto e X um reticulado de Banach. Se $\Psi \in C_0(K,X)^*$ é um funcional positivo, então existe uma única medida positiva $\mu \in \mathrm{rcabv}(K,X^*)$ tal que*

$$\Psi(f) = \int_K f\, d\mu, \quad \textit{para todo } f \in C_0(K,X).$$

Mais ainda, $\|\Psi\| = |\mu|$.

Prova. Seja $x \in X$ fixado e consideremos o funcional $\Psi_x\colon C_0(K) \to \mathbb{R}$ definido por $\Psi_x(f) = \Psi(f \cdot x)$. Claramente Ψ_x define um funcional em $C_0(K)$. Dado $x \geq 0$, a positividade de Ψ implica que Ψ_x é um funcional positivo em $C_0(K)$. Pelo Teorema 1.18 existe uma única medida μ_x tal que

$$\Psi_x(f) = \int_K f\, d\mu_x \quad \text{para qualquer } f \in C_0(K)$$

e $\|\Psi_x\| = \|\mu_x\|$. Mais ainda, se $x \geq 0$, a medida μ_x é positiva. Definamos $\mu\colon \mathcal{B}_K \to X^*$ por $\mu(A)(x) = \mu_x(A)$ se $A \in \mathcal{B}_K$ e $x \in X$. Por [40, Lema 3], μ é uma medida vetorial (com valores em X^*). Observe que se $A \in \mathcal{B}_K$, então $\mu(A)(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Portanto, μ é uma medida positiva. Seguindo o argumento dado em [40] podemos ver que $\mu \in \mathrm{rcabv}(K,X^*)$ e que

$$\Psi(f) = \int_K f\, d\mu, \quad \text{para todo } f \in C_0(K,X), \tag{1.2}$$

e $\|\Psi\| = |\mu|$. Por [40, Lema 8], μ é a única medida que satisfaz a equação (1.2). $\square$

Vamos mostrar um resultado análogo ao teorema anterior para operadores definidos em espaços de funções contínuas $C_0(K,X)$.

Lema 1.43. *Seja K um espaço localmente compacto e sejam X e Y reticulados de Banach. Se $T\colon C_0(K,X) \to Y$ é um operador positivo, então a medida representante de T é positiva.*

Prova. Seja $y^* \in Y^*$ fixado tal que $y^* \geq 0$. Então $T^*(y^*)\colon C_0(K,X) \to \mathbb{R}$ é um funcional positivo pois se $f \in C_0(K,X)$ e $f \geq 0$, temos $Tf \geq 0$ e assim, $T^*(y^*)(f) = y^*(Tf) \geq 0$. Pelo Lema 1.42 existe uma única medida positiva $\mu_{y^*} \in \text{rcabv}(K,X^*)$ tal que

$$T^*(y^*)(f) = \int_K f\, d\mu_{y^*}, \quad \text{para qualquer } f \in C_0(K,X).$$

Agora, pelo Teorema 1.22 existe uma única medida $m\colon \mathcal{B}_K \to L(X,Y^{**})$ de semivariação limitada tal que $T^*(y^*) = m_{y^*} \in \text{rcabv}(K,X^*)$, onde $m_{y^*}(A)(x) := \langle m(A)(x), y^*\rangle$. A unicidade do Teorema 1.20 implica que $m_{y^*} = \mu_{y^*}$. Logo, $\langle m(A)(x), y^*\rangle \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Como $y^* \geq 0$ foi fixado arbitrariamente, concluímos que $\langle m(A)(x), y^*\rangle \geq 0$ para quaisquer $x \geq 0$ e $y^* \geq 0$. Por [38, pág. 11], segue que a medida representante m é positiva. $\square$

Em seguida introduzimos uma classe de reticulados de Banach que será importante em nosso trabalho.

Definição 1.44. Diremos que un reticulado de Banach X é um *L-espaço abstrato* ou simplesmente *AL-espaço*, se $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Observação 1.45. Kakutani mostrou que um reticulado de Banach X é um AL-espaço se e somente se X é ordem isomorfo (isometricamente) a $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$, para algum espaço de medida (Ω,Σ,μ) [35].

Finalizamos esta seção com uma propriedade importante dos AL-espaços. Para uma prova, ver [46, Corolário 3, pág. 128].

Teorema 1.46. *Seja X um reticulado de Banach. Se X é um AL-espaço, então X não contém um subespaço isomorfo a c_0.*

1.4 Os parâmetros $\lambda(X)$ e $\mu(X)$

Apresentamos algumas propriedades dos parâmetros introduzidos por Jarosz em [33] no estudo de isomorfismos entre espaços $C_0(K,X)$.

Definição 1.47. Seja X um espaço de Banach. Definimos

$$\lambda(X) = \inf\{\max\{\|x+\lambda y\| : |\lambda| = 1\} : x,y \in S_X\}, \quad \text{e}$$
$$\mu(X) = \sup\{\min\{\|x+\lambda y\| : |\lambda| = 1\} : x,y \in S_X\}$$

Observação 1.48. Para um espaço de Banach real X, os parâmetros $\lambda(X)$ e $\mu(X)$ coincidem com as constantes de Schäffer e James, respectivamente. Para um estudo detalhado destas constantes, recomendamos [37].

O seguinte lema será fundamental no Capítulo 1 deste trabalho. Uma prova pode ser consultada em [19, Proposição 5.1].

Lema 1.49. *Seja X um espaço de Banach e sejam $x, y \in X$ tais que* $\min\{\|x\|, \|y\|\} \geq \eta$ *onde $\eta > 0$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ com* $\max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} \leq 1$ *e*

$$\|\alpha_1 x + \alpha_2 y\| \geq \eta\lambda(X).$$

Apresentaremos aqui o cálculo explícito destes parâmetros para um espaço em particular. Para tais fins citamos aqui as desigualdades de Clarkson [21, Teorema 2]:

(1) $2(\|x\|^p + \|y\|^p) \leq \|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p)$;

(2) $2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1} \leq \|x+y\|^q + \|x-y\|^q$;

(3) $\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2(\|x\|^q + \|y\|^q)^{p-1}$,

onde $1/p + 1/q = 1$. Estas desigualdades são válidas para $x, y \in \ell_p$ (ou L_p, respectivamente) e $2 \leq p < \infty$. Quando $1 < p \leq 2$ estas desigualdades são válidas em sinais contrários.

Observação 1.50. Considere o espaço complexo $X = l_p$, então $\lambda(X) = 2^{1/p}$ se $2 \leq p < \infty$. Com efeito, se $x, y \in S_X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| = 1$, pela desigualdade (2) temos

$$\begin{aligned} 2^q &\leq \|x+\lambda y\|^q + \|x-\lambda y\|^q \\ &\leq 2\max_{|\lambda|=1}\|x+\lambda y\|^q \\ &\leq 2\left(\max_{|\lambda|=1}\|x+\lambda y\|\right)^q. \end{aligned}$$

Em consequência,

$$2^{1/p} \leq \max\{\|x+\lambda y\| \,:\, |\lambda| = 1\}.$$

Logo $2^{1/p} \leq \lambda(X)$. Notemos que $\lambda(X) \leq 2^{1/p}$ pois se $x = (1, 0, \ldots)$ e $y = (0, 1, 0, \ldots)$ então

$$\max\{\|x+\lambda y\| \,:\, |\lambda| = 1\} = 2^{1/p},$$

e portanto $\lambda(X) = 2^{1/p}$. Un argumento similar mostra que $2^{1/p} \leq \mu(X) \leq 2^{1/q}$, se $1/p + 1/q = 1$. No caso $1 < p \leq 2$, temos $\mu(X) = 2^{1/p}$ e $2^{1/q} \leq \lambda(X) \leq 2^{1/p}$.

Para o espaço real $X = l_p$ com $1 < p < \infty$, temos $\lambda(X) = \min\{2^{1/p}, 2^{1/q}\}$ e $\mu(X) = \max\{2^{1/p}, 2^{1/q}\}$, onde $1/p + 1/q = 1$ [11, Proposição 3.1].

O seguinte resultado dá um relação entre os parâmetros $\lambda(X)$ e $\mu(X)$ no caso real. Para uma prova, veja [37, Teorema 2].

Teorema 1.51. *Se X é um espaço de Banach real com* $\dim X \geq 2$ *então*

$$\mu(X)\lambda(X) = 2.$$

Observação 1.52. De especial interesse será para nós a igualdade

$$\mu(X) = \mu(X^*). \tag{1.3}$$

A Observação 1.50 mostra que o espaço real $X = l_p$, $1 < p < \infty$, satisfaz (1.3). Para mais exemplos de espaços de Banach satisfazendo a igualdade (1.3), ver [44, Teorema 2.1]. No entanto, existem espaços de Banach X tais que $\mu(X^*) \neq \mu(X)$. De fato, em [44, Exemplo 5.3] é mostrado que existe uma família não enumerável de espaços de Banach não satisfazendo a igualdade (1.3).

1.5 Intervalos de ordinais

Nesta seção introduziremos alguns conceitos de topologia geral que serão usados neste trabalho. Em particular, apresentaremos alguns fatos básicos sobre intervalos de ordinais. Todas as definições e provas dos resultados que mencionaremos aqui podem ser consultadas em [38, 47].

Definição 1.53. Seja α um ordinal. O intervalo de ordinal $[0, \alpha]$ é definido como o conjunto de ordinais menores ou iguais do que α, isto é $\{\xi : 0 \leq \xi \leq \alpha\}$. A topologia considerada neste conjunto será topologia da ordem.

Denotaremos por ω o primeiro ordinal infinito.

Definição 1.54. Diremos que um ordinal ξ é um *sucessor* se existir um ordinal β tal que $\xi = \beta + 1$. Caso contrário, diremos que ξ é um *ordinal limite*.

Teorema 1.55. *Todo intervalo de ordinais $[0, \xi]$ é homeomorfo a um intervalo de ordinais da forma $[0, \omega^\alpha m]$, sendo m um ordinal finito.*

Definição 1.56. Seja S um espaço topológico e P um subconjunto de S. O *derivado de P* é o conjunto de pontos de acumulação de P e será denotado por $P^{(1)}$.

Definição 1.57. Seja S um espaço topológico e P um subconjunto de S. Diremos que P é *denso em si mesmo* se $P \subset P^{(1)}$. Diremos também P é *disperso* se não contiver um subconjunto não vazio denso em si mesmo. Por fim, P é *perfeito* se $P = P^{(1)}$.

Definição 1.58. Seja S um espaço topológico. Se α é um ordinal, o *α-derivado de S* é definido por indução transfinita como segue: $S^{(0)} = S$, $S^{(\alpha)} = (S^{(\beta)})^{(1)}$ se $\alpha = \beta + 1$ e $S^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta < \alpha} S^{(\beta)}$, se α for um ordinal limite.

Se α e β são ordinais tais que $\beta \leq \alpha$, denotamos por $-\beta + \alpha$ ao único ordinal γ tal que $\alpha = \beta + \gamma$ (veja [47, pág. 152]).

Teorema 1.59. *Seja α um ordinal e $X = [0, \omega^\alpha m]$. Dado um ordinal $\beta < \alpha$ temos*

$$X^{(\beta)} = \{\omega^\beta \gamma : 0 < \gamma \leq \omega^{-\beta + \alpha} m\}.$$

Portanto, $X^{(\alpha)}$ é o conjunto de m pontos $\omega^\alpha, \ldots, \omega^\alpha \cdot m$ e $X^{(\alpha+1)} = \emptyset$.

Corolário 1.60. *Todo intervalo de ordinais é disperso.*

O seguinte resultado caracteriza os espaços compactos dispersos.

Teorema 1.61. *Um espaço compacto Hausdorff S é disperso se e somente se $S^{(\alpha)} = \emptyset$ para algum ordinal α.*

O teorema anterior motiva a seguinte definição.

Definição 1.62. Seja S um espaço compacto Hausdorff disperso. O menor ordinal α tal que $S^{(\alpha)} = \emptyset$ é chamado *altura de S* e é denotado por $\mathrm{ht}(S)$.

Observação 1.63. Se α é um ordinal e $X = [0, \omega^\alpha m]$, então X é disperso e pelo Teorema 1.59 temos $\mathrm{ht}(X) = \alpha + 1$.

Definição 1.64. Seja S um espaço topológico. O kernel de S, denotado por PS, é definido por $PS = \bigcap_{\alpha \geq 1} S^{(\alpha)}$.

Capítulo 2

Isomorfismos entre espaços $C_0(K, X)$

La ciencia aún no ha probado si la locura
es o no lo más sublime de la inteligencia.
Edgar Allan Poe

O teorema de Banach-Stone sugere o problema de estudar isometrias não necessariamente sobrejetoras entre espaços de funções contínuas $C(K)$. Em [31], Holsztyński estabeleceu que se $C(K)$ é isometricamente isomorfo a um subespaço de $C(L)$ então K é imagem contínua de um subespaço fechado de L. Este resultado já havia sido obtido por Geba e Semadeni, quando a isometria em questão é positiva (ver [29]). Este mesmo problema pode ser considerado na classe dos espaços de funções contínuas com valores vetoriais. Em [34], Jerison deu condições suficientes para que espaço de Banach X tenha a *propriedade de Banach-Stone*, isto é, para quaisquer espaços compactos Hausdorff K e S temos

$$C(K, X) \cong C(S, X) \Longleftrightarrow K \approx S.$$

Por outro lado, Cambern estendeu o teorema de Holsztyński para os espaços de funções $C(K, X)$, quando X é estritamente convexo [7]. É natural perguntar se estes resultados ainda serão válidos quando considerarmos isomorfismos com distorção finita. Nesta linha de pesquisa, Amir e Cambern [1, 8] mostraram independentemente que

$$C_0(K) \overset{<2}{\sim} C_0(S) \Longrightarrow K \approx S.$$

Uma generalização comum aos teoremas de Amir-Cambern e Holsztyński é o seguinte resultado provado por Jarosz [32]:

$$C_0(K) \overset{<2}{\hookrightarrow} C_0(S) \Longrightarrow K \text{ é imagem contínua de um subconjunto de } S.$$

Mais ainda, se K é compacto tal subconjunto é fechado. Os teoremas de Amir-Camber e Jarosz motivam a seguinte questão:

Questão 2.1. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Suponha a existência de um isomorfismo entre $C_0(K,X)$ e um subespaço de $C_0(S,X)$. Podemos concluir que K é imagem contínua de um subespaço de S?

Em geral a resposta a este problema é negativa. No entanto, Jarosz mostrou que há resposta positiva quando o espaço de Banach X satisfaz uma certa condição geométrica, envolvendo o parâmetro

$$\mu(X^*) = \sup\{\min\{\|x+\lambda y\| : |\lambda| = 1\} : x, y \in S_{X^*}\}.$$

A prova do próximo resultado pode ser encontrada em [33, Teorema 5].

Teorema 2.2. *Sejam K e S espaços localmente compactos e X um espaço de Banach. Se $T\colon C_0(K,X) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo com*

$$\|T\|\|T^{-1}\| < \frac{4}{2+\mu(X^*)},$$

então K é imagem contínua de um subconjunto de S. Se K é compacto tal subconjunto é fechado.

Neste capítulo apresentaremos duas respostas à Questão 2.1 (Teoremas 2.16 e 2.19). Nosso resultado dependerá do parâmetro

$$\lambda(X) = \inf\{\max\{\|x+\lambda y\| : |\lambda| = 1\} : x, y \in S_X\},$$

introduzido por Jarosz em [33].

Outra questão sugerida pelo teorema de Amir-Cambern é a seguinte:

Questão 2.3. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Se $C_0(K,X) \sim C_0(S,X)$, o que podemos dizer respeito às propriedades topológicas dos espaços K e S?

A dificuldade deste problema origina no teorema de Miljutin o qual estabelece que se K é um espaço métrico compacto não enumerável, então $C(K) \sim C([0,1])$ [41]. Este resultado implica que muitas propriedades topológicas não são preservadas por isomorfismos de espaços de funções contínuas. Contudo, é possível dar uma resposta a esta questão (veja [13]). Lembremos que um espaço de Banach X tem cotipo finito $q < \infty$, se existir uma constante $\kappa \geq 0$ tal que para qualquer escolha de elementos $x_1, \ldots, x_n$ em X temos

$$(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q)^{1/q} \leq \kappa \cdot (\int_0^1 \|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\|^2\, dt)^{1/2},$$

onde $r_j\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ são as *funções de Rademacher*, dadas por

$$r_j(t) = \operatorname{sign}(\sin(2^j \pi t)).$$

Teorema 2.4. *Sejam K e S espaços compactos Hausdorff e X um espaço de Banach de cotipo finito. Se X é separável ou X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým temos*

$$C(K,X) \sim C(S,X) \Longrightarrow |K||S| < \aleph_0 \text{ ou } |K| = |S|.$$

O caso escalar deste resultado foi obtido por Cengiz [15]. Por outro lado, um resultado de B. Maurey e G. Pisier estabelece que os espaços de Banach de cotipo finito não possuem cópia isomorfa de c_0 (para detalhes, veja [22]). Assim, nosso segundo objetivo neste capítulo será estender o Teorema 2.4 para a classe dos espaços de Banach X que não contem cópia isomorfa de c_0 (Teorema 2.31).

Notemos que o Teorema 2.4 junto com os teoremas de Amir-Cambern mostram que resultados de natureza topológica podem depender da distorção do isomorfismo. Isto pode-se evidenciar no seguinte resultado [14].

Teorema 2.5. *Sejam K e S espaços compactos Hausdorff e X um espaço de Banach de cotipo finito. Para todo ordinal α temos*

$$C(K,X) \overset{<3}{\sim} C(S,X) \Longrightarrow |K^{(\alpha)}||S^{(\alpha)}| < \aleph_0 \text{ ou } |K^{(\alpha)}| = |S^{(\alpha)}|.$$

Mostraremos que a hipótese no Teorema 2.5 sobre o espaço de Banach X pode ser enfraquecida (Teorema 2.34).

O capítulo está organizado como segue: na primeira seção começamos estabelecendo alguns resultados que ajudarão na prova dos teoremas principais. Na segunda seção provaremos os Teoremas 2.16 e 2.19. Na terceira seção provaremos o Teorema 2.31. Na última seção vamos provar o Teorema 2.34. As provas destes teoremas estão fortemente apoiadas no estudo de isomorfismos definidos entre espaços de funções contínuas $C_0(K)$ e com valores em espaços de funções contínuas com valores vetoriais $C_0(S,X)$.

2.1 Resultados preliminares

Começamos com um resultado bem conhecido da teoria isométrica de espaços de Banach $C_0(K,X)$. Para comodidade do leitor, incluímos uma prova dele aqui.

Lema 2.6. *Sejam K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach. Então existe um isomorfismo isométrico de $C_0(K,X)$ em $C_0(K\times B_{X^*})$, quando B_{X^*} é munido da w^*-topologia.*

Prova. Notemos que o espaço $K \times B_{X^*}$ é localmente compacto pois (B_{X^*}, w^*) é compacto pelo teorema de Banach-Alaoglu. Para $f \in C_0(K,X)$, seja $\hat{f}\colon K \times B_{X^*} \to \mathbb{K}$ definida por $\hat{f}(y,\phi) = \phi(f(y))$. Provemos que $\hat{f}$ é contínua. Sejam $(y,\phi) \in K \times B_{X^*}$ e $((y_\gamma, \phi_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ uma rede em $K \times B_{X^*}$ convergindo para (y,ϕ). Observe que $y_\gamma \to y$ e

$\phi_\gamma \xrightarrow{w^*} \phi$. Logo,

$$\begin{aligned}|\hat{f}(y_\gamma,\phi_\gamma) - \hat{f}(y,\phi)| &= |\phi_\gamma(f(y_\gamma)) - \phi(f(y))| \\ &= |\phi_\gamma(f(y_\gamma)) - \phi_\gamma(f(y)) + \phi_\gamma(f(y)) - \phi(f(y))| \\ &\leq |\phi_\gamma(f(y_\gamma)) - \phi_\gamma(f(y))| + |\phi_\gamma(f(y)) - \phi(f(y))| \\ &\leq \|\phi_\gamma\|\|f(y_\gamma) - f(y)\| + |\phi_\gamma(f(y)) - \phi(f(y))|.\end{aligned}$$

A continuidade de f junto com o fato de que $\phi_\gamma(f(y)) \to \phi(f(y))$ implicam que os termos da última desigualdade acima convergem para zero. Assim, $\hat{f}(y_\gamma,\phi_\gamma) \to \hat{f}(y,\phi)$ e concluímos a continuidade de $\hat{f}$. Por outro lado, não é difícil mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto

$$\{(y,\phi) \in K \times B_{X^*} : |\hat{f}(y,\phi)| \geq \varepsilon\}$$

é compacto. Isto mostra que $\hat{f} \in C_0(K \times B_{X^*})$. Seja $\psi\colon C_0(K,X) \to C_0(K \times B_{X^*})$ dada por $\psi(f) = \hat{f}$. Claramente ψ é linear. Segue do teorema de Hahn-Banach que a ψ é uma isometria já que

$$\begin{aligned}\|\psi(f)\| &= \sup\{|\hat{f}(y,\phi)| : (y,\phi) \in K \times B_{X^*}\} \\ &= \sup\{|\,\phi(f(y))| : (y,\phi) \in K \times B_{X^*}\} \\ &= \sup\{\sup\{|\,\phi(f(y))| : \phi \in B_{X^*}\} : y \in K\} \\ &= \sup\{\|f(y)\| : y \in K\} = \|f\|.\end{aligned}$$ □

Definição 2.7. Sejam K e S espaços topológicos. Uma função de K com valores em $\mathcal{P}(S)$ é chamada *multifunção*. Usaremos a notação $\Lambda\colon K \rightrightarrows S$, para indicar que Λ é uma multifunção de K com valores em $\mathcal{P}(S)$.

Definição 2.8. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Suponha que $T\colon C_0(K) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo. Fixemos $r > 0$ e definamos $\Omega_r\colon K \rightrightarrows S$ por

$$\Omega_r(x) = \{y \in S : |\,T^*(\phi \cdot \delta_y)(\{x\})| \geq r \text{ para algum } \phi \in B_{X^*}\}.$$

O seguinte resultado será de muita utilidade neste capítulo.

Lema 2.9. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Suponha que $T\colon C_0(K) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo. Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1/\|T\|\|T^{-1}\|$. Então para todo $x \in K$ temos $\Omega_r(x) \neq \emptyset$.*

Prova. Fixemos $x \in K$ e consideremos o isomorfismo isométrico $\psi\colon C_0(S,X) \to C_0(S \times B_{X^*})$ do Lema 2.6 definido como $\psi(g)(y,\phi) = \phi(g(y))$, para $y \in S$ e $\phi \in B_{X^*}$. Seja $\hat{T}\colon C_0(K) \to C_0(S \times B_{X^*})$ o isomorfismo dado por $\hat{T} = \psi \circ T$. Do fato de ψ ser uma isometria segue que $\|\hat{T}\| = \|T\|$ e $\|\hat{T}^{-1}\| \leq \|T^{-1}\|$. Pelo Teorema 1.31 temos

$$\begin{aligned}\sup\{|\,\hat{T}^*\delta_{(y,\phi)}(\{x\})| : (y,\phi) \in S \times B_{X^*}\} &\geq \frac{1}{\|\hat{T}\|\|\hat{T}^{-1}\|} \\ &\geq \frac{1}{\|T\|\|T^{-1}\|} > r.\end{aligned}$$

Portanto, para alguns $y \in S$ e $\phi \in B_{X^*}$ devemos ter

$$|\hat{T}^*\delta_{(y,\phi)}(\{x\})| \geq r. \tag{2.1}$$

Provaremos que $\hat{T}^*\delta_{(y,\phi)} = T^*(\phi \cdot \delta_y)$. Com efeito, se $f \in C_0(K)$ vale que

$$\begin{aligned}
\hat{T}^*\delta_{(y,\phi)}(f) &= \delta_{(y,\phi)}(\hat{T}f)\\
&= \delta_{(y,\phi)}((\psi \circ T)f)\\
&= \psi(Tf)(y,\phi)\\
&= \phi(Tf(y)) = T^*(\phi \cdot \delta_y)(f).
\end{aligned}$$

As equações anteriores e a unicidade do teorema de representação de Riesz (Teorema 1.18) garantem que as medidas $\hat{T}^*\delta_{(y,\phi)}$ e $T^*(\phi \cdot \delta_y)$ devem coincidir. Logo, da equação (2.1) inferimos que

$$|T^*(\phi \cdot \delta_y)(\{x\})| \geq r,$$

isto é, $y \in \Omega_r(x)$. □

O seguinte resultado é uma generalização vetorial de [30, Lema 2.2.2].

Lema 2.10. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach não contendo cópia de c_0. Suponha que $T\colon C_0(K) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo tal que $\|T^{-1}\| = 1$ e $\|T\| < 3$. Fixemos $0 < \delta < 1$ tal que $\|T\| < 3\delta$. Sejam $h, g \in C_0(K)$ tais que $0 \leq h \leq g \leq 1$. Se α é um ordinal satisfazendo $\|h|_{K^{(\alpha)}}\| > \delta$, então*

$$\bigcap_{h \leq f \leq g} \{y \in S : \|Tf(y)\| \geq \varepsilon\} \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset,$$

onde

$$\varepsilon = \frac{3\delta - \|T\|}{2}.$$

Prova. Usaremos indução transfinita sobre α. Seja

$$A = \bigcap_{h \leq f \leq g} \{y \in S : \|Tf(y)\| \geq \varepsilon\}.$$

Considere o caso $\alpha = 0$. Seja $x \in K$ tal que $h(x) > \delta$. Então

$$\|T(g + 2h)\| \geq \|g + 2h\| \geq g(x) + 2h(x) > 3\delta.$$

Desta última equação temos $\|T(g + 2h)(y_0)\| \geq 3\delta$ para algum $y_0 \in S$. Afirmamos que $y_0 \in A$. Com efeito, se $f \in C_0(K)$ satisfaz $h \leq f \leq g$ então $\|g + 2h - 2f\| \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|T\| &\geq \|T(g + 2h - 2f)\|\\
&\geq \|T(g + 2h - 2f)(y_0)\|\\
&\geq \|T(g + 2h)(y_0)\| - 2\|Tf(y_0)\|\\
&\geq 3\delta - 2\|Tf(y_0)\|.
\end{aligned}$$

Segue que $\|Tf(y_0)\| \geq \varepsilon$, isto é, $y_0 \in A$. Assim, o resultado é válido para $\alpha = 0$. Suponhamos que α é um ordinal limite e que $A \cap S^{(\beta)} \neq \emptyset$ para todo $\beta < \alpha$. Notemos que A é compacto pois é interseção de conjuntos compactos num espaço Hausdorff. Logo, $\{A \cap S^{(\beta)} : \beta < \alpha\}$ é uma coleção de compactos não vazios ordenada por inclusão. Portanto,

$$A \cap S^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} (A \cap S^{(\beta)}) \neq \emptyset,$$

e o resultado vale para α. Suponhamos agora que $\alpha = \beta + 1$ para algum ordinal β. Seja $x \in K^{(\alpha)}$ tal que $h(x) > \delta$. Tomemos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $K^{(\beta)} \setminus \{x\}$ satisfazendo $h(x_n) > \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela compacidade local de K, existe uma sequência de abertos disjuntos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ em K com $x_n \in U_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema de Urysohn para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $h_n \in C_0(K)$ tal que $0 \leq h_n \leq 1$, $h_n(K \setminus U_n) = \{0\}$ e $h_n(x_n) = 1$. Seja

$$A_n = \bigcap_{h_n \cdot h \leq f \leq g} \{y \in S : \|Tf(y)\| \geq \varepsilon\}.$$

Agora, $\|(h_n \cdot h)|_{K^{(\beta)}}\| \geq (h_n \cdot h)(x_n) > \delta$. Pela hipótese de indução temos $A_n \cap S^{(\beta)} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, dado $n \in \mathbb{N}$ vale que $A_n \subset A$ pois $h_n \cdot h \leq h$.

Afirmação 2.11. Para cada subconjunto infinito $T = \{n_1, n_2, \ldots\}$ de $\mathbb{N}$ temos

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{n_j} = \emptyset.$$

Caso contrário, seja $y \in \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{n_j}$. Da definição de A_n temos

$$\inf\{\|T(h_{n_j} \cdot h)(y)\| : j \in \mathbb{N}\} > 0. \tag{2.2}$$

Mostraremos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} T(h_{n_j} \cdot h)(y)$ é fracamente incondicionalmente convergente. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{K}$ limitada. Como $\{U_m : m \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de abertos dois a dois disjuntos, e para todo $m \in \mathbb{N}$ temos $h_m(K \setminus U_m) = \{0\}$ e $\|h_m \cdot h\| \leq 1$, deduzimos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i\, h_{n_i} \cdot h \right\| \leq \max_{1\leq i\leq k} |a_i|,$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$ dado. Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i T(h_{n_i} \cdot h)(y) \right\| &\leq \left\| T\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\, h_{n_i} \cdot h \right)(y) \right\| \\
&\leq \left\| T\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\, h_{n_i} \cdot h \right) \right\| \\
&\leq \|T\| \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i\, h_{n_i} \cdot h \right\| \\
&\leq \|T\| \max_{1 \leq i \leq k} |a_i| \leq \|T\| \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.
\end{aligned}$$

Da arbitrariedade de $k \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i T(h_{n_i} \cdot h)(y) \right\| \leq \|T\| \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|. \tag{2.3}$$

Assim, do Lema 1.6 segue que $\sum_{j=1}^{\infty} T(h_{n_j} \cdot h)(y)$ é fracamente incondicionalmente convergente. Pelo Teorema 1.7 e a equação (2.2), o espaço X deve conter uma cópia de c_0. Isto contradiz nossa hipótese.

Vejamos que $A \cap S^{(\beta)}$ é infinito. Senão, $A \cap S^{(\beta)} = \{y_1, \ldots, y_s\}$. Consideremos para $k = 1, \ldots, s$, o conjunto $\Gamma_k = \{m \in \mathbb{N} : y_k \in A_m\}$. Notemos que $\mathbb{N} \subset \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_s$. De fato, se $n \in \mathbb{N}$ então $A_n \cap S^{(\beta)} \neq \emptyset$. Logo, para algum $y \in S$ temos $y \in A_n \cap S^{(\beta)} \subset A \cap S^{(\beta)}$, ou seja $y = y_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, s\}$ e disto $n \in \Gamma_j$. Por outro lado, a Afirmação 2.11 implica que Γ_k é finito para todo $k = 1, \ldots, s$. Este absurdo mostra que $A \cap S^{(\beta)}$ é infinito e portanto,

$$A \cap S^{(\alpha)} \supset (A \cap S^{(\beta)})^{(1)} \neq \emptyset.$$

Isto completa a prova do Lema. □

2.2 Uma generalização do teorema de Holsztyński

O próximo resultado foi provado por Jarosz em [33, Teorema 1] para espaços métricos localmente compactos. Mostraremos aqui que este resultado é válido para qualquer espaço localmente compacto Hausdorff.

Teorema 2.12. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Se $T\colon C_0(K) \to C_0(S, X)$ é um isomorfismo tal que $\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda(X)$, então K é imagem contínua de um subconjunto de S.*

Prova. Não há perda de generalidade se supusermos que $\|T\| = 1$ e $\|T^{-1}\| < \lambda(X)$, já que se não, o isomorfismo $R = \|T\|^{-1}T$ terá as propriedades requeridas. Seja $r \in \mathbb{R}$

satisfazendo

$$\frac{1}{\lambda(X)} < r < \frac{1}{\|T^{-1}\|}. \tag{2.4}$$

Consideremos a multifunção $\Omega_r\colon K \rightrightarrows S$ introduzida na Definição 2.8. Como consequência imediata do Lema 2.9 temos:

Afirmação 2.13. $\Omega_r(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in K$.

Afirmação 2.14. Se $x_1, x_2 \in K$ e $x_1 \neq x_2$, então $\Omega_r(x_1) \cap \Omega_r(x_2) = \emptyset$.

Suponha que existe $y \in \Omega_r(x_1) \cap \Omega_r(x_2)$. Então para alguns $\phi_1, \phi_2 \in B_{X^*}$ temos

$$|\,T^*(\phi_1 \cdot \delta_y)(\{x_1\})| \geq r \quad \text{e} \quad |\,T^*(\phi_2 \cdot \delta_y)(\{x_2\})| \geq r.$$

Sejam U_1 e U_2 dois abertos disjuntos tais que $x_1 \in U_1$ e $x_2 \in U_2$. Das desigualdades acima obtemos

$$|\,T^*(\phi_1 \cdot \delta_y)|(U_1) \geq r \quad \text{e} \quad |\,T^*(\phi_2 \cdot \delta_y)|(U_2) \geq r.$$

Segue do Teorema 1.32 que existem funções $f_1, f_2 \in C_0(K)$ com $\|f_1\| \leq 1$, $\|f_2\| \leq 1$ e $f_1(K \setminus U_1) = f_2(K \setminus U_2) = \{0\}$ satisfazendo

$$|\,T^*(\phi_1 \cdot \delta_y)(f_1)| \geq r \quad \text{e} \quad |\,T^*(\phi_2 \cdot \delta_y)(f_2)| \geq r.$$

Donde,

$$\|Tf_1(y)\| \geq r \quad \text{e} \quad \|Tf_2(y)\| \geq r. \tag{2.5}$$

Notemos que para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ com $\max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} \leq 1$ vale que $\|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\| \leq 1$. Por outro lado, a equação (2.5) e o Lemma 1.49 implicam que

$$\|\alpha_1 Tf_1(y) + \alpha_2 Tf_2(y)\| \geq r\lambda(X),$$

para alguns $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tais que $\max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} 1 = \|T\| &\geq \|T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\| \\ &\geq \|T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(y)\| \\ &= \|\alpha_1 Tf_1(y) + \alpha_2 Tf_2(y)\| \geq r\lambda(X), \end{aligned}$$

contradizendo a equação (2.4).

Sejam $\Omega = \bigcup_{x\in K} \Omega_r(x)$ e $\varphi\colon \Omega \to K$ definida como $\varphi(y) = x$ se $y \in \Omega_r(x)$. As Afirmações 2.13 e 2.14 mostram que φ é uma função sobrejetora.

Afirmação 2.15. $\varphi\colon \Omega \to K$ é contínua.

Fixemos $y \in \Omega$ e seja $0 < \varepsilon < r$ dado. Seja $(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma rede em Ω convergindo para y e suponhamos que $x_\gamma = \varphi(y_\gamma) \not\to \varphi(y) = x$. Então existe uma vizinhança compacta $V \subset K$ de x tal que se $\gamma \in \Gamma$ temos $x_{\gamma'} \notin V$, para algum $\gamma' \geq \gamma$. Seja U_1 um subconjunto aberto de K tal que $x \in U_1$ e $U_1 \subset V$. Como $\varphi(y) = x$, a definição da φ junto com a Definição 2.8 implicam que

$$|T^*(\phi \cdot \delta_y)(\{x\})| \geq r,$$

para algum $\phi \in B_{X^*}$. Logo, $|T^*(\phi \cdot \delta_y)|(U_1) \geq r$. Pelo Teorema 1.32, existe $f_1 \in C_0(K)$ com $\|f_1\| \leq 1$ e $f_1(K\setminus U_1) = \{0\}$ tal que $|T^*(\phi\cdot\delta_y)(f_1)| \geq r$. Segue que $\|Tf_1(y)\| \geq r > r-\varepsilon$. Pela continuidade de Tf_1, existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que se $\gamma \geq \gamma_1$, então $\|Tf_1(y_\gamma)\| > r-\varepsilon$. Fixemos $\gamma \geq \gamma_1$ tal que $x_\gamma \notin V$ e

$$\|Tf_1(y_\gamma)\| > r - \varepsilon. \tag{2.6}$$

Seja $U_2 \subset K$ um aberto tal que $x_\gamma \in U_2$ e $U_2 \cap V = \emptyset$. Do fato $\varphi(y_\gamma) = x_\gamma$ e da Definição 2.8 deduzimos que

$$|T^*(\phi_\gamma \cdot \delta_{y_\gamma})(\{x_\gamma\})| \geq r,$$

para algum $\phi_\gamma \in B_{X^*}$. Portanto, $|T^*(\phi_\gamma \cdot \delta_{y_\gamma})|(U_2) \geq r$. Usando novamente o Teorema 1.32, existe $f_2 \in C_0(K)$ com $\|f_2\| \leq 1$ e $f_2(K \setminus U_2) = \{0\}$ tal que $|T^*(\phi_\gamma \cdot \delta_{y_\gamma})(f_2)| \geq r$ e disto obtemos

$$\|Tf_2(y_\gamma)\| > r - \varepsilon. \tag{2.7}$$

Como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, temos $\|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\| \leq 1$ sempre que $\max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} \leq 1$. Das equações (2.6), (2.7) e do Lema 1.49 segue que

$$\|\alpha_1 Tf_1(y) + \alpha_2 Tf_2(y)\| > (r-\varepsilon)\lambda(X),$$

para alguns $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ satisfazendo $\max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
1 = \|T\| &\geq \|T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\| \\
&\geq \|T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(y)\| \\
&\geq \|\alpha_1 Tf_1(y) + \alpha_2 Tf_2(y)\| \\
&> (r-\varepsilon)\lambda(X).
\end{aligned}$$

A arbitrariedade de ε implica que $1 \geq r\lambda(X)$, contrário à equação (2.4). Logo, φ é contínua. □

Como corolário do Teorema 2.12 obtemos:

Corolário 2.16. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Se $T\colon C_0(K,X) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo com $\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda(X)$, então K é imagem contínua de um subconjunto de S.*

Prova. Observe que se $e \in S_X$, o subespaço $V = \{f \cdot e : f \in C_0(K)\}$ de $C_0(K,X)$ é isometricamente isomorfo a $C_0(K)$. Se $T\colon C_0(K,X) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo tal que $\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda(X)$, então $\widetilde{T}\colon V \to C_0(S,X)$ dado por $\widetilde{T}f = T(f\cdot e)$ também é um isomorfismo tal que $\|\widetilde{T}\|\|\widetilde{T}^{-1}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\| < \lambda(X)$. Desta maneira, vemos que existe um isomorfismo de $C_0(K)$ em $C_0(S,X)$ com distorção menor do que $\lambda(X)$. Portanto, K é imagem contínua de um subconjunto de S, pelo Teorema 2.12. □

Observação 2.17. Para o espaço $X = l_p$ com $2 \leq p < \infty$ a limitação do Teorema 2.12 é a melhor possível. Com efeito, se $T\colon l_p \oplus_\infty l_p \to l_p$ é dada por

$$T(x,y) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots), \text{ onde } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ e } y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

então $\|T\|\|T^{-1}\| = 2^{1/p}$ e pela Observação 1.50 temos $\|T\|\|T^{-1}\| = \lambda(X)$. A partir de T pode-se construir um isomorfismo entre os espaços $C(K,X)$ e $C(S,X)$, onde $K = \{1,2\}$ e $S = \{1\}$. No entanto, K não é imagem contínua de um subconjunto de S.

A Observação 2.17 motiva a seguinte questão.

Questão 2.18. Para o espaço $X = l_p$ com $1 < p < 2$, a limitação do Teorema 2.12 é a melhor possível?

O próximo resultado é uma generalização vetorial de [16, Teorema 1].

Teorema 2.19. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Se $T\colon C_0(K) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo com*

$$\|T\|\|T^{-1}\| < \frac{3\lambda(X)}{\lambda(X)+2},$$

então para qualquer ordinal α, $K^{(\alpha)}$ é imagem contínua de um subconjunto de $S^{(\alpha)}$. Se K é compacto tal subconjunto é fechado.

Prova. Suponhamos que $\|T^{-1}\| = 1$ e $\|T\| < 3\lambda(X)/\lambda(X)+2$. Notemos que

$$\frac{\|T\|}{\lambda(X)} < \frac{3-\|T\|}{2}.$$

Seja $0 < \delta < 1$ tais que

$$\frac{\|T\|}{\lambda(X)} < r := \frac{3\delta - \|T\|}{2}. \tag{2.8}$$

Note que pela escolha de δ, temos $\|T\| < 3\delta$. Para $x \in K$, sejam

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x &= \{f \in C_0(K) : 0 \leq f \leq 1 \text{ e } f(x) > \delta\} \quad \text{e}\\ \Lambda_x &= \{y \in S : \|Tf(y)\| \geq r \,\text{para toda } f \in \mathcal{F}_x\}.\end{aligned}$$

Afirmação 2.20. Se $x_1, x_2 \in K$ e $x_1 \neq x_2$, então $\Lambda_{x_1} \cap \Lambda_{x_2} = \emptyset$.

Caso contrário, seja $y \in \Lambda_{x_1} \cap \Lambda_{x_2}$ e sejam U_1 e U_2 subconjuntos abertos disjuntos de K contendo x_1 e x_2, respectivamente. Pelo Lema de Urysohn existem $f_1, f_2 \in C_0(K)$ tais que $0 \leq f_i \leq 1$, $\|f_i\| = f_i(x_i) = 1$ e $f_i(K \setminus U_i) = 0$ para $i = 1, 2$. Temos $f_i \in \mathcal{F}_{x_i}$ para $i = 1, 2$ e portanto,

$$\|Tf_1(y)\| \geq r \quad \text{e} \quad \|Tf_2(y)\| \geq r.$$

Pelo Lema 1.49 segue que

$$\|a_1 Tf_1(y) + a_2 Tf_2(y)\| \geq r\lambda(X),$$

para alguns $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ com $\max\{|a_1|, |a_2|\} \leq 1$. Notemos que $\|a_1 f_1 + a_2 f_2\| \leq 1$ e da equação anterior deduzimos que

$$\begin{aligned} r\lambda(X) &\leq \|a_1 Tf_1(y) + a_2 Tf_2(y)\| \\ &\leq \|a_1 Tf_1 + a_2 Tf_2\| \\ &\leq \|T\|, \end{aligned}$$

contradizendo a equação (2.8).

Afirmação 2.21. Para cada ordinal α temos $\Lambda_x \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset$, se $x \in K^{(\alpha)}$.

Fixemos $x \in K^{(\alpha)}$. Note que

$$\Lambda_x = \bigcap_{f \in \mathcal{F}_x} \Lambda_f,$$

onde $\Lambda_f = \{y \in S : \|Tf(y)\| \geq r\}$. Considere a coleção $\mathcal{C} = \{\Lambda_f \cap S^{(\alpha)} : f \in \mathcal{F}_x\}$. Note que Λ_f é compacto para toda $f \in \mathcal{F}_x$. Vejamos que $\mathcal{C}$ tem a propriedade da interseção finita. Sejam $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_x$ e definamos

$$h = \min_{1 \leq j \leq n} f_j \quad \text{e} \quad g = \max_{1 \leq j \leq n} f_j.$$

Então $0 \leq h \leq f_j \leq g \leq 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $\|h|_{K^{(\alpha)}}\| \geq h(x) > \delta$. Portanto, do Lema 2.10 obtemos

$$\bigcap_{j=1}^{n} (\Lambda_{f_j} \cap S^{(\alpha)}) \supset \bigcap_{h \leq f \leq g} \{y \in S : \|Tf(y)\| \geq r\} \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset.$$

Logo,

$$\Lambda_x \cap S^{(\alpha)} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}_x} (\Lambda_f \cap S^{(\alpha)}) \neq \emptyset.$$

Sejam α um ordinal fixo e

$$\Lambda_\alpha := \bigcup_{x \in K^{(\alpha)}} \Lambda_x \cap S^{(\alpha)}.$$

A Afirmação 2.21 implica que se $K^\alpha \neq \emptyset$ então $\Lambda_\alpha \neq \emptyset$. Claramente se α, β são ordinais com $\alpha < \beta$, então $\Lambda_\beta \subset \Lambda_\alpha$. Sejam $\Lambda := \Lambda_0$ e $\psi \colon \Lambda \to K$ definida por $\psi(y) = x$ se $y \in \Lambda_x$. As Afirmações 2.20 e 2.21 implicam que de fato ψ é uma função sobrejetora. Note também que a Afirmação 2.21 implica que $\psi(\Lambda_\alpha) = K^{(\alpha)}$. Logo, $\psi|_{\Lambda_\alpha} \colon \Lambda_\alpha \to K^{(\alpha)}$ é sobrejetora para todo ordinal α.

Afirmação 2.22. Para todo ordinal α, $\psi|_{\Lambda_\alpha} \colon \Lambda_\alpha \to K^{(\alpha)}$ é contínua.

Basta mostrar que ψ é contínua. Sejam $y \in \Lambda$ e $(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma rede em Λ convergindo a y. Suponha que $\psi(y_\gamma) = x_\gamma$ e $\psi(y) = x$. Se tivéssemos $x_\gamma \not\to x$, existiria uma vizinhança compacta de x tal que para cada $\gamma_0 \in \Gamma$ temos $x_\gamma \notin V$, para algum $\gamma \geq \gamma_0$. Sejam $U_1 \subset K$ um aberto contendo x e $f_1 \in C_0(K)$ tal que $0 \leq f_1 \leq 1$, $\|f_1\| = f_1(x) = 1$ e $f_1(K \setminus U_1) = 0$. Observe que $f_1 \in \mathcal{F}_x$ e assim, $\|Tf_1(y)\| \geq r$. Se $l > 0$ é dado, então $\|Tf_1(y)\| > r - l$. A continuidade de Tf_1 e o fato que $y_\gamma \to y$ implicam que para algum $\gamma_1 \in \Gamma$ temos $\|Tf_1(y_\gamma)\| > r - l$, sempre que $\gamma \geq \gamma_1$. Fixemos $\gamma \geq \gamma_1$ tal que $x_\gamma \notin V$ então

$$\|Tf_1(y_\gamma)\| > r - l.$$

Seja $U_2 \subset K$ um aberto com $x_\gamma \in U_2$ e $U_2 \cap V = \emptyset$ e tomemos $f_2 \in C_0(K)$ satisfazendo $0 \leq f_2 \leq 1$, $\|f_2\| = f_2(x_\gamma) = 1$ e $f_2(K \setminus U_2) = 0$. Logo, $f_2 \in \mathcal{F}_{x_\gamma}$ e já que $\psi(y_\gamma) = x_\gamma$ temos

$$\|Tf_2(y_\gamma)\| > r - l.$$

O Lema 1.49 implica que para alguns $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ com $\max\{|a_1|, |a_2|\} \leq 1$ temos

$$\|a_1 Tf_1(y_\gamma) + a_2 Tf_2(y_\gamma)\| > (r - l)\lambda(X).$$

Claramente $\|a_1 f_1 + a_2 f_2\| \leq 1$, e segue que $\|a_1 Tf_1 + a_2 Tf_2\| \leq \|T\|$. Logo,

$$\begin{aligned}(r - l)\lambda(X) &< \|a_1 Tf_1(y_\gamma) + a_2 Tf_2(y_\gamma)\| \\ &\leq \|T\|.\end{aligned}$$

Fazendo $l \to 0$, concluímos que $r\lambda(X) \leq \|T\|$ que é absurdo pela equação (2.8). Isto prova que ψ_{Λ_α} é contínua para todo ordinal α.

Para terminar a prova, vamos mostrar que para qualquer subconjunto compacto H de K vale que $\bigcup_{x\in H} \Lambda_x$ é fechado. Este resultado implicará em particular que Λ_α é fechado para todo α, quando K for compacto. Seja $(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma rede em $\bigcup_{x\in H} \Lambda_x$ convergindo a $y \in S$. Para cada $\gamma \in \Gamma$ existe $x_\gamma \in H$ tal que $y_\gamma \in \Lambda_{x_\gamma}$. Podemos supor que $x_\gamma \to x$ para algum $x \in H$. Vejamos que $y \in \Lambda_x$. Se $f \in \mathcal{F}_x$, então $f(x) > \delta$. Pela convergência de $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ a x, existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que se $\gamma \geq \gamma_0$ temos $f(x_\gamma) > \delta$, ou seja $f \in \mathcal{F}_{x_\gamma}$ se $\gamma \geq \gamma_0$. Como $y_\gamma \in \Lambda_{x_\gamma}$, segue que $\|Tf(y_\gamma)\| \geq r$ para qualquer $\gamma \geq \gamma_0$. Concluímos, da continuidade de Tf, que $\|Tf(y)\| \geq r$ e portanto, $y \in \Lambda_x$. $\square$

O seguinte resultado é consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 2.23. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Se $T\colon C_0(K,X)\to C_0(S,X)$ é um isomorfismo com*

$$\|T\|\|T^{-1}\| < \frac{3\lambda(X)}{\lambda(X)+2},$$

então para qualquer ordinal α, $K^{(\alpha)}$ é imagem contínua de um subconjunto de $S^{(\alpha)}$. Se K é compacto tal subconjunto é fechado.

Observação 2.24. Seja X um espaço de Banach real com $\dim X \geq 2$ e satisfazendo

$$\mu(X^*) = \mu(X) < 2. \tag{2.9}$$

Então

$$\frac{4}{2+\mu(X^*)} < \frac{3\lambda(X)}{\lambda(X)+2}. \tag{2.10}$$

Com efeito, pela Observação 1.48 se X é um espaço de Banach real, os parâmetros $\mu(X)$ e $\lambda(X)$ coincidem com as constantes de James e Schäffer, respectivamente. Pelo Teorema 1.51 temos $\mu(X)\lambda(X) = 2$. Deste fato deduzimos que a desigualdade (2.10) é equivalente a

$$4\mu(X) < 2 + 3\mu(X^*),$$

que segue imediatamente da equação (2.9). Assim o Corolário 2.23 generaliza o resultado de Jarosz (Teorema 2.2) para uma classe de espaços de Banach. Para exemplos de espaços de Banach satisfazendo a equação (2.9), veja a Observação 1.52.

No caso complexo, se $X = l_p$ com $2 \leq p < \infty$ então a desigualdade (2.10) também é satisfeita pela Observação 1.50.

Observação 2.25. Como já mencionamos na Observação 1.52, existe uma família não enumerável de espaços de Banach não satisfazendo a igualdade (2.9). Porém, é fácil ver que esta família verifica também a desigualdade (2.10).

Das observações anteriores surge a seguinte questão.

Questão 2.26. A limitação do Teorema 2.19 é a melhor possível?

2.3 Isomorfismos entre espaços $C_0(K,X)$

Vamos introduzir o conceito de imagem inversa de uma multifunção.

Definição 2.27. Seja $M\colon K \rightrightarrows S$ uma multifunção e $F\subset S$. A imagem inversa de F sob M, denotada por $M^{-1}(F)$, é por definição

$$M^{-1}(F) = \{x\in K \,:\, M(x)\cap F \neq \emptyset\}.$$

Quando $F=\{y\}$ para algum $y\in S$, simplesmente escreveremos $M^{-1}(y)$ no lugar de $M^{-1}(\{y\})$.

A seguinte proposição é o ingrediente mais importante para a prova do teorema principal desta seção.

Proposição 2.28. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach não contendo cópia de c_0. Seja $T\colon C_0(K) \to C_0(S,X)$ um isomorfismo. Para cada $r > 0$ e $y \in S$, o conjunto $\Omega_r^{-1}(y)$ é finito.*

Prova. Suponhamos que para alguns $y \in S$ e $r > 0$, o conjunto $\Omega_r^{-1}(y)$ é infinito. Pela compacidade local de K, existe uma sequência de abertos dois a dois disjuntos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisfazendo $U_n \cap \Omega_r^{-1}(y) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, fixemos $x_n \in K$ tal que

$$x_n \in U_n \cap \Omega_r^{-1}(y).$$

Então existe $\phi_n \in B_{X^*}$ com

$$|\,T^*(\phi_n \cdot \delta_y)|(\{x_n\}) = |\,T^*(\phi_n \cdot \delta_y)(\{x_n\})| \geq r.$$

Note que $x_n \in U_n$ e assim,

$$|\,T^*(\phi_n \cdot \delta_y)|(U_n) \geq r.$$

Pelo Teorema 1.32, existe $f_n \in C_0(K)$ com $\|f_n\| \leq 1$, $f_n(K \setminus U_n) = 0$ e satisfazendo

$$|\,T^*(\phi_n \cdot \delta_y)(f_n)| \geq r.$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|Tf_n(y)\| \geq |\phi_n(Tf_n(y))| = |\,T^*(\phi_n \cdot \delta_y)(f_n)| \geq r. \tag{2.11}$$

Afirmação 2.29. A série $\sum_{n=1}^{\infty} Tf_n(y)$ é fracamente incondicionalmente convergente.

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $\mathbb{K}$. Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_n f_n \right\| \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_i|.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. Usando a equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_n T f_n(y) \right\| &= \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} a_n f_n \right)(y) \right\| \\
&\leq \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} a_n f_n \right) \right\| \\
&\leq \|T\| \left\| \sum_{i=1}^{n} a_n f_n \right\| \\
&\leq \|T\| \max_{1\leq i\leq n} |a_i| \leq \|T\| \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.
\end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ foi fixado arbitrariamente, temos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_n T f_n(y) \right\| \leq \|T\| \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Do Lema 1.6 e a equação acima deduzimos a afirmação.
Finalmente, a equação (2.11) implica que

$$\inf\{\|Tf_n(y)\| \,:\, n \in \mathbb{N}\} > 0 \tag{2.12}$$

A equação (2.12), a Afirmação 2.29 e o Teorema 1.7 implicam que o espaço X contém um subespaço isomorfo a c_0, contrariando nossa hipótese. Esta contradição mostra que $\Omega_r^{-1}(y)$ deve ser finito para todo $y \in S$. □

Teorema 2.30. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff. Seja X um espaço de Banach não contendo cópia c_0. Se K é infinito temos*

$$C_0(K) \hookrightarrow C_0(S, X) \Longrightarrow |K| \leq |S|.$$

Prova. Seja $T\colon C_0(K) \to C_0(S, X)$ um isomorfismo. Provaremos que S deve ser infinito. Suponhamos que S é finito, digamos $|S| = n$. Não é difícil ver que $C_0(S, X) \cong X^n$. Logo, $C_0(K) \hookrightarrow X^n$. Por outro lado, sendo K um espaço localmente compacto infinito, o espaço $C_0(K)$ contém uma cópia de c_0. Portanto, $c_0 \hookrightarrow X^n$. Pelo Teorema 1.8 concluímos que $c_0 \hookrightarrow X$, contradizendo nossa hipótese.
Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1/\|T\|\|T^{-1}\|$. Se $x \in K$ é dado, então pelo Lemma 2.9 segue que existe $y \in S$ satisfazendo $y \in \Omega_r(x)$. Da Definição 2.27 temos $x \in \Omega_r^{-1}(y)$, ou seja

$$K \subset \bigcup_{y\in S} \Omega_r^{-1}(y).$$

A Proposição 2.28 garante que $\Omega_r^{-1}(y)$ é finito para qualquer $y \in S$. Em consequência,

$$|K| \leq \left| \bigcup_{y\in S} \Omega_r^{-1}(y) \right| \leq |S|,$$

já que S é infinito. □

Finalizamos esta seção com uma versão vetorial do teorema de Cengiz. Nosso resultado generaliza o Teorema 2.4.

Teorema 2.31. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach não contendo cópia de c_0. Então*

$$C_0(K, X) \sim C_0(S, X) \Longrightarrow |K||S| < \aleph_0 \text{ ou } |K| = |S|.$$

Prova. Suponhamos que $|K||S| \geq \aleph_0$ e que K é infinito. Pelo Teorema 2.30 temos $|K| \leq |S|$ pois $C_0(K) \hookrightarrow C_0(S,X)$. Notemos que S também é infinito. Como $C_0(S) \hookrightarrow C_0(K,X)$, o Teorema 2.30 implica que $|S| \leq |K|$. Portanto, $|K| = |S|$. □

Observação 2.32. Não é possível remover a hipótese sobre o espaço de Banach X no Teorema 2.31. Denotemos por $\mathbb{N}^*$ o compactificado de Alexandrov de $\mathbb{N}$. Pelo Teorema de Miljutin [41] temos

$$C([0,1], C([0,1])) \sim C([0,1]) \sim C(\mathbb{N}^* \times [0,1]) \sim C(\mathbb{N}^*, C([0,1])),$$

mas $|\,[0,1]| \neq |\mathbb{N}^*|$.

2.4 Isomorfismos com distorção menor que 3

O próximo resultado é uma generalização de [14, Teorema 2.1].

Teorema 2.33. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach não contendo cópia de c_0. Seja $T\colon C_0(K) \to C_0(S,X)$ um isomorfismo com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$, e α um ordinal. Temos*

1. *se $S^{(\alpha)}$ é finito, então $K^{(\alpha)}$ é finito.*
2. *se $S^{(\alpha)}$ é infinito, então $|K^{(\alpha)}| \leq |S^{(\alpha)}|$.*

Prova. Podemos supor que $\|T^{-1}\| = 1$ e $\|T\| < 3$. Seja $0 < \delta < 1$ tal que $\|T\| < 3\delta$, e definamos

$$\varepsilon = \frac{3\delta - \|T\|}{2}.$$

Para $x \in K$ dado, sejam $\mathcal{F}_x$ e Λ_x como na prova do Teorema 2.19, isto é,

$$\mathcal{F}_x = \{f \in C_0(K) \,:\, 0 \leq f \leq 1 \text{ e } f(x) > \delta\}, \quad \text{e}$$
$$\Lambda_x = \{y \in S \,:\, \|Tf(y)\| \geq \varepsilon \,\text{para toda } f \in \mathcal{F}_x\}.$$

Pela Afirmação 2.21 temos $\Lambda_x \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset$, sempre que $x \in K^{(\alpha)}$. Seja $\Lambda\colon K \rightrightarrows S$ a multifunção dada por $\Lambda(x) := \Lambda_x$. Então se $x \in K^{(\alpha)}$, existe $y \in S^{(\alpha)}$ tal que $y \in \Lambda_x$. Assim,

$$K^{(\alpha)} \subset \bigcup_{y \in S^{(\alpha)}} \Lambda^{-1}(y). \tag{2.13}$$

Como na prova da Proposição 2.28, pode ser mostrado que $\Lambda^{-1}(y)$ é finito para todo $y \in S$. Segue que se $S^{(\alpha)}$ é finito, então $K^{(\alpha)}$ também é finito. No caso em que $S^{(\alpha)}$ é infinito, da equação (2.13) deduzimos que

$$|K^{(\alpha)}| \leq \left| \bigcup_{y \in S^{(\alpha)}} \Lambda^{-1}(y) \right| \leq |S^{(\alpha)}|.$$

Isto completa a demonstração. □

Teorema 2.34. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach não contendo cópia de c_0. Então para todo ordinal α temos*

$$C_0(K,X) \overset{<3}{\sim} C_0(S,X) \Longrightarrow |K^{(\alpha)}||S^{(\alpha)}| < \aleph_0 \text{ ou } |K^{(\alpha)}| = |S^{(\alpha)}|.$$

Prova. Suponhamos que $|K^{(\alpha)}||S^{(\alpha)}| \geq \aleph_0$ e que $K^{(\alpha)}$ é infinito. Observemos que $C_0(S) \overset{<3}{\hookrightarrow} C_0(K,X)$ e pelo Teorema 2.33, segue que $|S^{(\alpha)}| \leq |K^{(\alpha)}|$. Por outro lado, $C_0(K) \overset{<3}{\hookrightarrow} C_0(S,X)$ e do Teorema 2.33, inferimos que $S^{(\alpha)}$ é infinito. Logo, $|K^{(\alpha)}| \leq |S^{(\alpha)}|$ e assim, $|K^{(\alpha)}| = |S^{(\alpha)}|$. $\square$

Observação 2.35. A Observação 2.32 mostra que hipótese do espaço de Banach X não conter cópia de c_0 é essencial.

Capítulo 3

Isomorfismos entre reticulados de Banach $C_0(K, X)$

Loco (adjetivo): dícese de quien está afectado
de un alto nivel de independencia intelectual.
Ambrose Bierce

Um resultado que generaliza o teorema de Banach-Stone é o teorema de Kaplansky que estabelece que, dados dois compactos Hausdorff K e S, se existe um isomorfismo de ordem entre $C(K)$ e $C(S)$, então K e S são homeomorfos [36].
O teorema de Kaplansky motiva a seguinte questão.

Questão 3.1. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um reticulado de Banach. A existência de um isomorfismo de ordem de $C_0(K, X)$ sobre $C_0(S, X)$ implica que K e S são homeomorfos?

Esta questão em geral tem resposta negativa como veremos em seguida. Dados dois espaços topológicos K e S, denotamos por $K \oplus S$ a soma topológica de K e S.

Observação 3.2. É conhecido que existem dois espaços métricos compactos não enumeráveis K e S não homeomorfos, tais que as somas topológicas $K \oplus K$ e $S \oplus S$ são homeomorfas [49]. Se $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, temos os seguintes isomorfismos (isometrias) de ordem:

$$C(K, X) \cong C(K \oplus K) \cong C(S \oplus S) \cong C(S, X).$$

Observação 3.3. Considere o reticulado de Banach $X = l_1$. Definamos $T\colon l_1 \oplus_\infty l_1 \to l_1$ por

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots).$$

Então T é um isomorfismo de ordem com $\|T\|\|T^{-1}\| = 2$. Usando o isomorfismo de ordem T, podemos construir um isomorfismo de ordem entre $C(K, X)$ e $C(S, X)$ com distorção 2, onde $K = \{1, 2\}$ e $S = \{1\}$. No entanto, K e S não são homeomorfos.

Contudo, neste capítulo mostraremos que é possível obter uma resposta afirmativa para a Questão 3.1.

Lembremos que Geba e Semadeni provaram que se existe uma isometria T de $C(K)$ em $C(S)$ satisfazendo $Tf \geq 0$ se e somente se $f \geq 0$, então K é imagem contínua de um subconjunto fechado de S [29].

Este resultado sugere a seguinte questão.

Questão 3.4. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um reticulado de Banach. Se existe um isomorfismo positivo de $C_0(K, X)$ em $C_0(S, X)$, então K é imagem contínua de um subconjunto de S?

Como vemos no exemplo da Observação 3.3, a resposta desta questão é negativa em geral. No entanto, daremos uma resposta afirmativa quando o reticulado X é um AL-espaço (veja Definição 1.44).

Inpirados pelo teorema de Kaplansky e os resultados do Capítulo 1 temos a seguinte questão.

Questão 3.5. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um reticulado de Banach. Quais relações topológicas existem entre K e S, sob a existência de um isomorfismo positivo entre $C_0(K, X)$ e $C_0(S, X)$?

Mostraremos que os resultados do Capítulo 1 podem ser melhorados quando considerarmos isomorfismos positivos (ou de ordem). Todos os resultados que obteremos neste capítulo são conseqüência do estudo de isomorfismos positivos de $C_0(K)$ em $C_0(S, X)$, para um reticulado de Banach X.

Organizamos este capítulo como segue: na primeira seção estudamos isomorfismos positivos entre reticulados $C_0(K, X)$ para um reticulado X. Na segunda e terceira seção estudamos isomorfismos positivos entre reticulados $C_0(K, X)$, para um AL-espaço X. Finalmente na última seção provaremos o teorema de Kaplansky para o reticulado $C(K, X)$, quando K e X satisfazem certas condições topológicas e geométricas, respectivamente.

3.1 Isomorfismos positivos entre reticulados $C_0(K, X)$

O seguinte resultado é uma versão do Lema 2.10 para isomorfismos positivos.

Lema 3.6. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um reticulado de Banach não contendo cópia de c_0. Suponhamos que $T\colon C_0(K) \to C_0(S, X)$ é um isomorfismo positivo com $\|T^{-1}\| \leq 1$. Seja $h \in C_0(K)$ tal que $0 \leq h \leq 1$ e fixemos $0 < r < 1$. Se para algum ordinal α temos $\|h|_{K^{(\alpha)}}\| > r$, então*

$$\bigcap_{h \leq f \leq 1} \{y \in S : \|Tf(y)\| \geq r\} \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset.$$

Prova. Provaremos o resultado por indução transfinita sobre α. Seja $\alpha = 0$ e tomemos $x \in K$ tal que $h(x) > r$. Definamos

$$A = \bigcap_{h \le f \le 1} \{y \in S : \|Tf(y)\| \ge r\}.$$

A positividade de T implica que $Tf \ge Th$, quando $f \ge h$. Logo, $Tf(y) \ge Th(y) \ge 0$ para cada $y \in S$. Donde, $\|Tf(y)\| \ge \|Th(y)\|$ para qualquer $y \in S$. Em consequência temos

$$A \supset \{y \in S : \|Th(y)\| \ge r\} \neq \emptyset,$$

pois $\|Th\| \ge \|h\| \ge h(x) > r$. Portanto, $A \neq \emptyset$ e o resultado vale quando $\alpha = 0$. O resto da prova segue como no Lema 2.10. $\square$

Antes de enunciar nosso próximo resultado vamos fixar algumas notações. Sejam K um espaço localmente compacto Hausdorff e $x \in K$. Sejam I_x um conjunto de indices e $\{U_i\}_{i \in I_x}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x. Em I_x definimos $i \le j$, se $U_j \subset U_i$. Observe que I_x munido com esta ordem é um conjunto parcialmente ordenado. Lembremos que $\mathcal{M}(K,X)$ denota o espaço das funções totalmente mensuráveis (veja Capítulo 1).

Lema 3.7. *Sejam K um espaço localmente compacto Hausdorff e X e Y espaços de Banach. Suponha que $m\colon \mathcal{B}_K \to L(X,Y)$ é uma medida variacionalmente regular e de semivariação limitada. Sejam $x \in K$, $e \in S_X$ e $\{U_i\}_{i \in I_x}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x. Seja $(f_i)_{i \in I_x}$ uma rede em $\mathcal{M}(K,X)$ tal que $f_i(K \setminus U_i) = 0$, $\|f_i\| = 1$ e $f_i(x) = e$ para todo $i \in I_x$. Então*

$$\lim_{i \in I_x} \int_K f_i \, dm = m(\{x\})(e).$$

Prova. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como m é variacionalmente regular, existe um subconjunto aberto V de K com $x \in V$ tal que $\|m\|(V \setminus \{x\}) < \varepsilon$. Seja $i_0 \in I_x$ tal que $x \in U_{i_0} \subset V$. Note que para $i \in I_x$ temos

$$\int_K f_i \, dm = \int_{U_i} f_i \, dm = \int_{U_i \setminus \{x\}} f_i \, dm + m(\{x\})(e).$$

Logo, se $i \ge i_0$ temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_K f_i \, dm - m(\{x\})(e) \right\| &= \left\| \int_{U_i \setminus \{x\}} f_i \, dm \right\| \\ &\le \|m\|(U_i \setminus \{x\}) \le \|m\|(V \setminus \{x\}) < \varepsilon. \end{aligned}$$ $\square$

Lema 3.8. *Seja K um espaço localmente compacto Hausdorff e $x \in K$ dado. Então existe um conjunto parcialmente ordenado I_x, um sistema fundamental de vizinhanças abertas $\{U_i\}_{i \in I_x}$ de x e uma rede $\{f_i\}_{i \in I_x}$ em $C_0(K)$ satisfazendo as seguintes propriedades*

1. *$0 \le f_i \le 1$, $f_i(x) = 1$ e $f_i(K \setminus U_i) = 0$ para cada $i \in I_x$;*

2. *$U_j \subset U_i$ e $f_j \le f_i$, sempre que $i \le j$;*

3. *se $i_1, \dots, i_n \in I_x$, então existe $i \in I_x$ tal que $i_k \le i$ para qualquer $k = 1, \dots, n$.*

Prova. Seja $\{V_i\}_{i \in I}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x. Pelo Lema de Urysohn para cada $i \in I$, existe $h_i \in C_0(K)$ tal que $0 \le h_i \le 1$, $\|h_i\| = h_i(x) = 1$ e $h_i(K \setminus V_i) = 0$. Seja I_x a coleção de todos os subconjuntos finitos não vazios de I junto com a ordem $F_1 \le F_2$ se $F_1 \subset F_2$. Para cada $F \in I_x$, defina $U_F = \bigcap_{i \in F} U_i$ e $f_F(t) = \min_{i \in F} h_i(t)$, se $t \in K$. Não é díficil ver que a coleção $\{U_F\}_{F \in I_x}$ e a rede $(f_F)_{F \in I_x}$ satisfazem as condições requeridas. $\square$

Notação 3.9. Seja K um espaço localmente compacto Hausdorff e fixemos $x \in K$. Sejam $\{U_i\}_{i \in I_x}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x e $(f_i)_{i \in I_x}$ uma rede em $C_0(K)$. A notação $\{U_i, f_i\}_{i \in I_x} \leftrightarrow \{x\}$ será usada para indicar que as seguintes condições são satisfeitas:

1. I_x é um conjunto parcialmente ordenado;

2. $0 \le f_i \le 1$, $f_i(x) = 1$ e $f_i(K \setminus U_i) = 0$ para qualquer $i \in I_x$;

3. $U_j \subset U_i$ e $f_j \le f_i$, quando $i \le j$;

4. se $i_1, \dots, i_n \in I_x$, então existe $i \in I_x$ tal que $i_k \le i$ para cada $k = 1, \dots, n$.

O Lema 3.8 garante a existência de tal sistema fundamental de vizinhanças.

Notação 3.10. Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e $T\colon C_0(K) \to C_0(S, X)$ um operador. A cada $y \in S$, associamos o operador $T_y\colon C_0(K) \to X$ dado por $T_y(f) = Tf(y)$, se $f \in C_0(K)$. A medida representante deste operador será denotada também por T_y.

O próximo resultado é uma versão vetorial de [17, Lema, pág. 301].

Teorema 3.11. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um reticulado de Banach não contendo cópia de c_0. Suponhamos que $T\colon C_0(K) \to C_0(S, X)$ é um isomorfismo positivo com $\|T^{-1}\| \le 1$. Fixemos $0 < r < 1$ e $x \in K$. Sejam $\{U_i\}_{i \in I_x}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x e $(f_i)_{i \in I_x}$ uma rede em $C_0(K)$ tal que $\{U_i, f_i\}_{i \in I_x} \leftrightarrow \{x\}$. Então*

$$\Lambda_r(x) = \bigcap_{i \in I_x} K_i, \tag{3.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda_r(x) &= \{y \in S : \|T_y(\{x\})\| \ge r\}, \quad e \\ K_i &= \{y \in S : \|Tf_i(y)\| \ge r\}. \end{aligned}$$

Mais ainda, para cada ordinal α tal que $K^{(\alpha)} \neq \emptyset$ temos $\Lambda_r(x) \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset$, sempre que $x \in K^{(\alpha)}$.

Prova. Como X não contém cópia de c_0, o Teorema 1.30 implica que a medida representante do operador $T_y\colon C_0(K)\to X$ toma seus valores em X e é regular. Pelo Lema 3.7 temos

$$\lim_{i\in I_x} Tf_i(y) = T_y(\{x\}). \tag{3.2}$$

Seja $y\in\bigcap_{i\in I_x} K_i$, então $y\in K_i$, isto é, $\|Tf_i(y)\|\geq r$ para todo $i\in I_x$. Decorre da equação (3.2) que $\|T_y(\{x\})\|\geq r$, ou seja $y\in\Lambda_r(x)$. Reciprocamente suponhamos que $y\in\Lambda_r(x)$, isto é, $\|T_y(\{x\})\|\geq r$. Como T é um operador positivo, T_y também é um operador positivo e sua medida representante é positiva, pelo Lema 1.43. Segue da Proposição 1.36 que existe $x^*\in B^+_{X^*}$ tal que $x^*(T_y(\{x\}))\geq r$. Usando a equação (3.2) temos

$$\begin{aligned} x^*(T_y(\{x\})) &= \lim_{i\in I_x} x^*(Tf_i(y)) \\ &= \lim_{i\in I_x} T^*(x^*\cdot\delta_y)(f_i) \\ &= T^*(x^*\cdot\delta_y)(\{x\}). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.18, a medida $T^*(x^*\cdot\delta_y)$ é positiva. Escrevamos $T^*(x^*\cdot\delta_y)=a\delta_x+\eta$, onde $a=T^*(x^*\cdot\delta_y)(\{x\})\geq r$ e $\eta\in C_0(K)^*$ é uma medida positiva tal que $\eta(\{x\})=0$. Se $i\in I_x$ dado, então

$$T^*(x^*\cdot\delta)(f_i) = af_i(x)+\int_K f_i\,d\eta \geq a\geq r,$$

e temos $T^*(x^*\cdot\delta_y)(f_i)=x^*(Tf_i(y))$. Logo,

$$\|Tf_i(y)\|\geq x^*(Tf_i(y))\geq r.$$

Assim, $y\in\bigcap_{i\in I_x} K_i$.

Agora, seja α um ordinal tal que $K^{(\alpha)}\neq\emptyset$ e tome $x\in K^{(\alpha)}$. Consideremos a coleção $\mathcal{D}=\{K_i\cap S^{(\alpha)}\,:\, i\in I_x\}$. Vejamos que $\mathcal{D}$ tem a propriedade da intersecção finita. Sejam $i_1,\dots,i_n\in I_x$ dados e $h=\min_{1\leq k\leq n} f_{i_k}$. Então $\|h|_{K^{(\alpha)}}\|=h(x)=1>r$. Pelo Lema 3.6 segue que

$$\bigcap_{k=1}^{n} K_i\cap S^{(\alpha)} \supset \bigcap_{h\leq f\leq 1}\{y\in S\,:\,\|Tf(y)\|\geq r\}\cap S^{(\alpha)}\neq\emptyset.$$

A compacidade e a equação (3.1) implicam que

$$\Lambda_r(x)\cap S^{(\alpha)} = \bigcap_{i\in I_x}(K_i\cap S^{(\alpha)}) = \bigcap\mathcal{D}\neq\emptyset. \qquad \square$$

Teorema 3.12. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um reticulado de Banach não contendo cópia de c_0. A existência de um isomorfismo positivo de $C_0(K,X)$ em $C_0(S,X)$ implica que para qualquer ordinal α temos:*

1. *se* $S^{(\alpha)}$ *é finito, então* $K^{(\alpha)}$ *é finito;*

2. *se* $S^{(\alpha)}$ *é infinito, então* $|K^{(\alpha)}| \leq |S^{(\alpha)}|$.

Mais ainda, se K *e* S *são compactos Hausdorff com* S *disperso, então* K *é disperso e* $\mathrm{ht}(K) \leq \mathrm{ht}(S)$.

Prova. Como $C_0(K)$ é isomorfo a um subespaço de $C_0(K,X)$, é suficiente considerar um isomorfismo positivo $T\colon C_0(K) \to C_0(S,X)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\|T^{-1}\| = 1$. Sejam $0 < r < 1$ fixo e $\Lambda_r\colon K \rightrightarrows S$ a multifunção de K em S dada por

$$x \in K \longmapsto \Lambda_r(x) = \{y \in S \,:\, \|T_y(\{x\})\| \geq r\}.$$

Pelo Teorema 3.11 segue que se $x \in K$ e $\{U_i, f_i\}_{i \in I_x} \leftrightarrow \{x\}$, então

$$\Lambda_r(x) = \bigcap_{i \in I_x} K_i, \tag{3.3}$$

onde $K_i = \{y \in S \,:\, \|Tf_i(y)\| \geq r\}$. Também pelo Teorema 3.11 para cada ordinal α tal que $K^{(\alpha)} \neq \emptyset$ temos $\Lambda_r(x) \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset$, quando $x \in K^{(\alpha)}$, isto é,

$$K^{(\alpha)} \subset \bigcup_{y \in S^{(\alpha)}} \Lambda_r^{-1}(y). \tag{3.4}$$

Vamos mostrar que para qualquer $y \in S$, o conjunto $\Lambda_r^{-1}(y)$ é finito. Por absurdo, suponhamos que existe $y \in S$ tal que $\Lambda_r^{-1}(y)$ é infinito. Pela compacidade local de K, existe uma sequência de abertos disjuntos dois a dois $\{U_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ de K tal que

$$U_n \cap \Lambda_r^{-1}(y) \neq \emptyset,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $x_n \in U_n \cap \Lambda_r^{-1}(y)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $\{U_i^n\}_{i \in I_{x_n}}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x_n e $\{f_i^n\}_{i \in I_{x_n}}$ uma rede em $C_0(K)$ tal que $\{U_i^n, f_i^n\}_{i \in I_{x_n}} \leftrightarrow \{x_n\}$. Tome $i_n \in I_{x_n}$ tal que $U_{i_n} \subset U_n$. Já que $x_n \in \Lambda_r^{-1}(y)$ temos $y \in \Lambda_r(x_n)$ e decorre da equação (3.3) que $\|Tf_{i_n}^n(y)\| \geq r$. Assim,

$$\inf\{\|Tf_{i_n}^n(y)\| \,:\, n \in \mathbb{N}\} > 0. \tag{3.5}$$

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $f_{i_n}^n(K \setminus U_{i_n}^n) = 0$ e $\|f_{i_n}^n\| = 1$. Como na prova do Lema 2.10 pode ser mostrado que a sequência $(Tf_{i_n}^n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a condição 2 do Lema 1.6. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} Tf_{i_n}^n(y)$ é uma fracamente incondicionalmente convergente. A equação (3.5) e o Teorema 1.7 implicam que o espaço X contém um subespaço isomorfo a c_0, contrário a nossa hipótese. Logo, $\Lambda_r^{-1}(y)$ é finito para todo $y \in S$.

Se $S^{(\alpha)}$ é finito, a equação (3.4) implica que $K^{(\alpha)}$ é finito. Se $S^{(\alpha)}$ é infinito, então pela equação (3.4) temos

$$|K^{(\alpha)}| \leq \left| \bigcup_{y \in S^{(\alpha)}} \Lambda_r^{-1}(y) \right| \leq |S^{(\alpha)}|.$$

Suponhamos agora que S é disperso e seja α um ordinal tal que $S^{(\alpha)} = \emptyset$. Decorre novamente da equação (3.4) que K é disperso e $\operatorname{ht}(K) \leq \alpha$. Assim, $\operatorname{ht}(K) \leq \operatorname{ht}(S)$. □

3.2 Isomorfismos entre reticulados $C_0(K,X)$ para um AL-espaço X.

Nesta seção estudamos isomorfismos positivos entre reticulados de Banach $C_0(K,X)$, quando X é um AL-espaço.
Nosso próximo resultado é uma generalização vetorial de [17, Teorema, pág 301].

Teorema 3.13. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um AL-espaço. Se $T\colon C_0(K,X) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo positivo, então para qualquer ordinal α temos*

$$|K^{(\alpha)}| \leq \|T\| \|T^{-1}\| |S^{(\alpha)}|.$$

Prova. Basta considerar um isomorfismo positivo $T\colon C_0(K) \to C_0(S,X)$ com $\|T^{-1}\| = 1$. Seja $0 < r < 1$ fixado. Para cada $x \in K$, seja $\{U_i\}_{i \in I_x}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x e $(f_i)_{i \in I_x}$ uma rede em $C_0(K)$ tal que $\{U_i, f_i\}_{i \in I_x} \leftrightarrow \{x\}$. Vamos considerar a multifunção Λ_r definida no Teorema 3.11, isto é,

$$x \in K \longmapsto \Lambda_r(x) = \{y \in S \,:\, \|T_y(\{x\})\| \geq r\}.$$

Pelo Teorema 1.46, o espaço X não contém um subespaço isomorfo a c_0. Assim, pelo Teorema 3.11 temos

$$\Lambda_r(x) = \bigcap_{i \in I_x} K_i,$$

onde $K_i = \{y \in S \,:\, \|Tf_i(y)\| \geq r\}$, e para qualquer ordinal α tal que $K^{(\alpha)} \neq \emptyset$ temos $\Lambda_r(x) \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset$, quando $x \in K^{(\alpha)}$. Logo,

$$K^{(\alpha)} \subset \bigcup_{y \in S^{(\alpha)}} \Lambda_r^{-1}(y). \tag{3.6}$$

Afirmação 3.14. Para qualquer $y \in S$ temos $|\Lambda_r^{-1}(y)| \leq \|T\|/r$.

Com efeito, dado $y \in S$, se $x_1, \ldots, x_n \in \Lambda_r^{-1}(y)$, então $\|T_y(\{x_i\})\| \geq r$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pelo Lema 1.43, a medida T_y é positiva. Sendo X um AL-espaço, segue da definição de semivariação que

$$\begin{aligned}
\|T\| \geq \|T_y\| = \|T_y\|(K) \\
&\geq \|T_y\|(\{x_1, \ldots, x_n\}) \\
&\geq \left\| \sum_{k=1}^{n} T_y(\{x_k\}) \right\| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \|T_y(\{x_k\})\| \geq nr.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $n \leq \|T\|/r$ e assim, $|\Lambda^{-1}(y)| \leq \|T\|/r$. Logo, da Afirmação 3.14 e da equação (3.6) obtemos

$$|K^{(\alpha)}| \leq \left| \bigcup_{y \in S^{(\alpha)}} \Lambda_r^{-1}(y) \right| \leq \frac{\|T\|}{r} |S^{(\alpha)}|.$$

Da arbitrariedade de r deduzimos que $|K^{(\alpha)}| \leq \|T\| |S^{(\alpha)}|$. $\square$

Observação 3.15. A hipótese de X ser um AL-espaço no Teorema 3.13 é essencial. Considere o reticulado l_p com $1 < p < \infty$. Definamos $T\colon l_p \oplus_\infty l_p \to l_p$ por

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots).$$

Então T é um isomorfismo de ordem com $\|T\|\|T^{-1}\| = 2^{1/p}$. Notemos que existe um isomorfismo de ordem (isometria) entre $C(K, l_p)$ e $l_p \oplus_\infty l_p$, e $C(S, l_p)$ e l_p, onde $K = \{1, 2\}$ e $S = \{1\}$. No entanto, não vale que $|K| \leq \|T\|\|T^{-1}\||S|$.

Nosso próximo resultado é uma versão vetorial do teorema de Holsztyński para operadores positivos.

Teorema 3.16. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um AL-espaço. Se $T\colon C_0(K,X) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo positivo com $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$, então para qualquer ordinal α, $K^{(\alpha)}$ é imagem contínua de um subconjunto de $S^{(\alpha)}$. No caso em que K é compacto tal subconjunto é fechado.*

Prova. Provaremos o resultado para isomorfismos positivos de $C_0(K)$ em $C_0(S,X)$. Seja $T\colon C_0(K) \to C_0(S,X)$ um isomorfismo positivo satisfazendo $\|T^{-1}\| = 1$ e $\|T\| < 2$. Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $\|T\|/2 < r < 1$ e considere a multifunção $\Psi\colon K \rightrightarrows S$ definida por

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \{y \in S : \|Tf(y)\| \geq r \text{ para cada } f \in \mathcal{F}_x,\}, \quad \text{onde} \\
\mathcal{F}_x &= \{f \in C_0(K) : 0 \leq f \leq 1 \text{ e } f(x) > \delta.\}
\end{aligned}$$

Afirmação 3.17. Dados $x_1, x_2 \in K$ com $x_1 \neq x_2$, temos $\Psi(x_1) \cap \Psi(x_2) = \emptyset$.

Suponhamos que existe $y \in \Psi(x_1) \cap \Psi(x_2)$. Sejam U_1 e U_2 dois subconjuntos abertos disjuntos de K contendo x_1 e x_2, respectivamente. Pelo Lema de Urysohn existem funções $f_1, f_2 \in C_0(K)$ com $0 \leq f_j \leq 1$, $f_j(K \setminus U_j) = 0$ e $f_j(x_j) = 1$ para $j = 1, 2$. Claramente $f_j \in \mathcal{F}_{x_j}$ para $j = 1, 2$. Portanto, $\|Tf_1(y)\| \geq r$ e $\|Tf_2(y)\| \geq r$. O fato de X ser um AL-espaço junto com a positividade de T implicam que

$$\begin{aligned}\|T(f_1 + f_2)(y)\| &= \|Tf_1(y) + Tf_2(y)\| \\ &= \|Tf_1(y)\| + \|Tf_2(y)\| \geq 2r,\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}\|T\| &\geq \|T(f_1 + f_2)\| \\ &\geq \|T(f_1 + f_2)(y)\| \geq 2r,\end{aligned}$$

já que $\|f_1 + f_2\| = 1$. Isto contradiz a escolha de r.

Afirmação 3.18. Para qualquer ordinal α tal que $K^{(\alpha)} \neq \emptyset$ temos $\Psi(x) \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset$, sempre que $x \in K^{(\alpha)}$.

Seja α um ordinal tal que $K^{(\alpha)} \neq \emptyset$ e tomemos $x \in K^{(\alpha)}$. Para $f \in \mathcal{F}_x$, seja

$$\Psi_f = \{y \in S : \|Tf(y)\| \geq r\}.$$

Provaremos que a coleção $\mathcal{R} = \{\Psi_f \cap S^{(\alpha)} : f \in \mathcal{F}_x\}$ tem a propriedade de intersecção finita. Se $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_x$, seja $h = \min_{1 \leq j \leq n} f_j$. Então $\|h|_{K^{(\alpha)}}\| > r$ e segue do Lema 3.6 que

$$\bigcap_{j=1}^{n} \Psi_{f_j} \cap S^{(\alpha)} \supset \bigcap_{h \leq f \leq 1} \{y \in S : \|Tf(y)\| \geq r\} \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset.$$

Logo, pela compacidade temos

$$\Psi(x) \cap S^{(\alpha)} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}_x} (\Psi_f \cap S^{(\alpha)}) = \bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset.$$

Para cada ordinal α, sejam

$$\Psi_\alpha = \bigcup_{x \in K^{(\alpha)}} \Psi(x) \cap S^{(\alpha)}$$

e $\Psi = \Psi_0$. Definamos $\varphi \colon \Psi \to K$ por $\varphi(y) = x$ se e somente se $y \in \Psi(x)$. Das Afirmações 3.17 e 3.18, segue que φ é uma função sobrejetora. Notemos que se α, β são ordinais com $\alpha < \beta$ vale que $\Psi_\beta \subset \Psi_\alpha$. A Afirmação 3.18 e a definição de φ implicam que $\varphi(\Psi_\alpha) = K^{(\alpha)}$. Portanto,

$$\varphi|_{\Psi_\alpha} \colon \Psi_\alpha \to K^{(\alpha)}$$

é uma função sobrejetora para todo ordinal α.

Afirmação 3.19. A função φ é contínua. Logo, para todo ordinal α, $\varphi|_{\Psi_\alpha} : \Psi_\alpha \to K^{(\alpha)}$ é uma função contínua.

Seja $(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma rede em Ψ convergindo para $y \in \Psi$ e suponhamos que $\varphi(y_\gamma) = x_\gamma \not\to \varphi(y) = x$. Então existe uma vizinhança compacta $V \subset K$ com $x \in V$ tal que para qualquer $\gamma \in \Gamma$, existe $\gamma' \geq \gamma$ satisfazendo $x_{\gamma'} \notin V$. Seja $U_1 \subset V$ um aberto de K com $x \in U_1$. Pelo Lema de Urysohn existe $f_1 \in C_0(K)$ com $0 \leq f_1 \leq 1$, $f_1(K \setminus U_1) = 0$ e $f_1(x) = 1$. Logo, $f_1 \in \mathcal{F}_x$ e $\|Tf_1(y)\| \geq r$ pois $y \in \Psi(x)$. Seja $h > 0$ dado. Então $\|Tf_1(y)\| > r - h$, e a continuidade de Tf_1 implica que existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $\|Tf(y_\gamma)\| > r - h$ para qualquer $\gamma \geq \gamma_0$. Seja $\gamma_1 \geq \gamma_0$ tal que $\gamma_1 \notin V$ e

$$\|Tf_1(y_{\gamma_1})\| > r - h. \tag{3.7}$$

Seja U_2 um subconjunto aberto de K com $x_{\gamma_1} \in U_2$ e $U_2 \cap V = \emptyset$. Novamente pelo Lema de Urysohn existe uma função $f_2 \in C_0(K)$ com $0 \leq f_2 \leq 1$, $f_2(K \setminus U_2) = 0$ e $f_2(x) = 1$. Do fato que $y_{\gamma_1} \in \Psi(x_1)$ deduzimos que

$$\|Tf_2(y_{\gamma_1})\| \geq r > r - h. \tag{3.8}$$

Como X é um AL-espaço e T é um operador positivo, as equações (3.7) e (3.8) implicam que

$$\begin{aligned}\|Tf_1(y_{\gamma_1}) + Tf_2(y_{\gamma_1})\| &= \|Tf_1(y_{\gamma_1})\| + \|Tf_2(y_{\gamma_2})\| \\ &> 2(r - h).\end{aligned}$$

Note que $\|f_1 + f_2\| = 1$ e assim,

$$\|T(f_1 + f_2)(y_{\gamma_1})\| \leq \|T(f_1 + f_2)\| \leq \|T\|.$$

Portanto, $2(r - h) < \|T\|$. A arbitrariedade de $h > 0$ implica que $2r \leq \|T\|$, o qual é impossível. Isto mostra que φ é de fato uma função contínua.

Pra finalizar a prova vamos mostrar que para cada $K_0 \subset K$ compacto vale que $\bigcup_{x\in K_0} \Psi(x)$ é um subconjunto fechado de S. Logo, se K for compacto, então para cada ordinal α, Ψ_α será um subconjunto fechado de S.

Se $K_0 = \emptyset$, o resultado é evidente. Vamos supor que $K_0 \neq \emptyset$. Seja $(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma rede em $\bigcup_{x\in K_0} \Psi(x)$ convergindo a $y \in S$. Para cada $\gamma \in \Gamma$ existe $x_\gamma \in K_0$ tal que $y_\gamma \in \Psi(x_\gamma)$. Pela compacidade de K_0, podemos supor que a rede $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ converge a $x \in K_0$. Afirmamos que $y \in \Psi(x)$. Se $f \in \mathcal{F}_x$ é dada, então $f(x) > \delta$. Pela continuidade de f existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $f(x_\gamma) > \delta$ se $\gamma \geq \gamma_0$. Logo, $f \in \mathcal{F}_{x_\gamma}$ para todo $\gamma \geq \gamma_0$. Por hipótese $y_\gamma \in \Psi(x_\gamma)$ e assim, $\|Tf(y_\gamma)\| \geq r$. A continuidade de Tf implica que $\|Tf(y)\| \geq r$. Segue que $y \in \Psi(x)$. Isto completa a prova. $\square$

Observação 3.20. O exemplo da Observação 3.3 mostra que 2 é a melhor limitação possível no Teorema 3.16.

3.3 O teorema de Amir-Cambern para reticulados $C_0(K,X)$

Nesta seção estabeleceremos uma versão vetorial do teorema de Amir-Cambern para reticulados $C_0(K,X)$, quando X é um AL-espaço. A primeira extensão vetorial deste resultado foi obtida por Cambern em [9] para espaços $C_0(K,X)$, sendo X um espaço de Hilbert de dimensão finita. Mostraremos aqui como adaptar as técnicas de [9] quando considerarmos isomorfismos de ordem entre reticulados de Banach $C_0(K,X)$, sendo X um AL-espaço.

A seguir enunciamos o teorema principal desta seção.

Teorema 3.21. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um AL-espaço. Se $T\colon C_0(K,X)\to C_0(S,X)$ é um isomorfismo de ordem com $\|T\|\|T^{-1}\|<2$, então K e S são homeomorfos.*

Provaremos este resultado através de uma sequência de lemas. Começamos introduzindo a notação que usaremos nesta seção. Primeiro vamos supor que $\|T^{-1}\|=1$ e $\|T\|<2$. Sejam $y\in S$ e $e\in S_X^+$ dados. Considere o operador $T_y\colon C_0(K,X)\to X$ definido por $T_y(f)=Tf(y)$ e denotemos sua medida representante por T_y. Pelo Lema 1.43 a medida T_y é positiva. Pelo Teorema 1.46, o espaço X não contém um subespaço isomorfo a c_0. Assim, os Teoremas 1.24 e 1.27 e a Proposição 1.28 implicam que a medida T_y toma valores em $L(X)$ e é variacionalmente regular.

Sejam r um número real tal que $\|T\|/2<r<1$ e $x\in K$ dado. Sejam $\{U_i\}_{i\in I_x}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x e $(f_i)_{i\in I_x}$ uma rede em $C_0(K)$ tal que $\{U_i,f_i\}_{i\in I_x}\leftrightarrow\{x\}$. Definamos

$$\begin{aligned}\Omega_x&=\{y\in S\,:\,\|T_y(\{x\})(e)\|\geq r\},\quad \text{e}\\ L_i&=\{y\in S\,:\,\|T(f_i\cdot e)(y)\|\geq r\}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Lema 3.22. *Para todo $x\in K$ temos $\Omega_x\neq\emptyset$.*

Prova. Seja $T^e\colon C_0(K)\to C_0(S,X)$ o operador definido por $T^e f=T(f\cdot e)$. Observe que $\|(T^e)^{-1}\|\leq 1$. Consideremos o operador $T_y^e\colon C_0(K)\to X$ dado por $T_y^e(f)=T^e f(y)$ para $f\in C_0(K)$. Denotemos por T_y^e a medida representante de T_y^e. Mostraremos que $T_y^e(\{x\})=T_y(\{x\})(e)$. De fato pelo Lema 3.7 temos

$$\begin{aligned}T_y^e(\{x\})&=\lim_{i\in I_x}T_y^e(f_i)\\&=\lim_{i\in I_x}T(f_i\cdot e)(y)\\&=\lim_{i\in I_x}\int_K f_i\cdot e\,dT_y=T_y(\{x\})(e).\end{aligned}$$

Segue das equações acima e da equação (3.9) que $\Omega_x=\{y\in S\,:\,\|T_y^e(\{x\})\|\geq r\}$. É claro que $L_i=\{y\in S\,:\,\|T^e f_i(y)\|\geq r\}$. Seguindo o esquema da prova do Teorema 3.11 obtemos

$$\Omega_x=\bigcap_{i\in I_x}L_i,\tag{3.10}$$

e $\Omega_x \neq \emptyset$ para todo $x \in K$. □

Observação 3.23. Pelo Lema 3.7 podemos escrever

$$\Omega_x = \{y \in S \,:\, \| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot e)(y) \| \geq r\}.$$

Portanto, pelo Lema 3.22 temos

$$\{y \in S \,:\, \| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot e)(y) \| \geq r\} = \bigcap_{i \in I_x} \{y \in S \,:\, \|T(f_i \cdot e)(y)\| \geq r\}.$$

Antes de continuar com o segundo lema introduziremos uma notação. Para $x \in K$ e $e \in S_X^+$, definamos $T_x^{-1} \colon C_0(K,X) \to X$ por $T_x^{-1} g = T^{-1} g(x)$. Usaremos o mesmo símbolo para o operador T_x^{-1} e a medida representante dele. O Lema 1.43 implica que T_x^{-1} é uma medida positiva. Como X não contém cópia de c_0, a medida T_x^{-1} toma seus valores em $L(X)$ e é variacionalmente regular pelos Teoremas 1.24 e 1.27 e a Proposição 1.28.

Similarmente para $y \in S$ dado, sejam $\{V_j\}_{j \in J_y}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de y e $(g_j)_{j \in J_y}$ uma rede em $C_0(S)$ tal que $\{V_j, g_j\}_{j \in J_y} \leftrightarrow \{y\}$. Definamos também

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \{x \in K \,:\, \|T_x^{-1}(\{y\})(e)\| \geq r/\|T\|\}, \quad \text{e} \\ S_j &= \{x \in K \,:\, \|T^{-1}(g_j \cdot e)(x)\| \geq r/\|T\|\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Lema 3.24. *Para cada $y \in S$ temos $\Delta_y \neq \emptyset$.*

Prova. Seja $U \colon C_0(S,X) \to C_0(K,X)$ o isomorfismo dado por $U = \|T\| T^{-1}$. Note que para cada $j \in J_y$ temos

$$\begin{aligned} S_j &= \{x \in K \,:\, \|U(g_j \cdot e)(x)\| \geq r\}, \quad \text{e} \\ \Delta_y &= \{x \in K \,:\, \|U_x(\{y\})(e)\| \geq r\}, \end{aligned}$$

onde $U_x \colon C_0(S,X) \to X$ é dado por $U_x g = U g(x)$ para $g \in C_0(S,X)$. Seguindo passo a passo a prova do Lema 3.22 concluímos que

$$\Delta_y = \bigcap_{j \in J_y} S_j$$

e $\Delta_y \neq \emptyset$ para cada $y \in S$. □

Observação 3.25. Analogamente como na Observação 3.23 temos

$$\{x \in K \,:\, \| \lim_{j \in J_y} U(g_j \cdot e)(x) \| \geq r\} = \bigcap_{j \in J_y} \{x \in K \,:\, \|U(g_j \cdot e)(x)\| \geq r\}.$$

Lema 3.26. *Para todo $x \in K$, o conjunto Ω_x é finito.*

Prova. Suponhamos que $\{U_i, f_i\}_{i\in I_x} \leftrightarrow \{x\}$ e seja $y \in \Omega_x$ dado. Sejam $g_y \in C_0(S)$ tal que $0 \leq g_y \leq 1$, $g_y(y) = \|g_y\| = 1$ e $G_y = g_y \cdot e$. Observe que $G_y \geq 0$ e segue para qualquer $i \in I_x$ que

$$\begin{aligned}\|T(f_i \cdot e) + G_y\| &\geq \|T(f_i \cdot e)(y) + G_y(y)\| \\ &= \|T(f_i \cdot e)(y)\| + \|G_y(y)\| \\ &\geq r + 1 > r + \|T\|/2.\end{aligned}$$

Assim, para cada $i \in I_x$ temos

$$\|f_i \cdot e + T^{-1}(G_y)\| > r/\|T\| + 1/2 > 1. \tag{3.12}$$

Para $i \in I_x$, seja $W_i = \{x' \in K : f_i(x') \neq 0\}$, então $\{W_i\}_{i\in I_x}$ é uma sistema fundamental de vizinhanças abertas de x já que W_i é aberto e $W_i \subset U_i$. Por outro lado, $\|T^{-1}(G_y)\| \leq 1$ e segue da equação (3.12) que para cada $i \in I_x$, existe $x_i \in W_i$ tal que $\|T^{-1}(G_y)(x_i)\| \geq \delta$, onde $\delta = r/\|T\| - 1/2 > 0$. Notemos que a rede $(x_i)_{i\in I_x}$ converge a x. Pela continuidade de $T^{-1}(G_y)$ temos

$$\|T^{-1}(G_y)(x)\| \geq \delta. \tag{3.13}$$

Esta última equação implica que o conjunto Ω_x é de fato finito. Com efeito, sejam $y_1, \ldots, y_m \in \Omega_x$ dados e $V_1, \ldots, V_m$ abertos dois a dois disjuntos tais que $y_k \in V_k$ para $k = 1, \ldots, m$. Podemos escolher as funções $g_{y_1}, \ldots, g_{y_m} \in C_0(S)$ de modo que $0 \leq g_{y_k} \leq 1$, $g_{y_k}(y_k) = 1$ e $g_{y_k}(S \setminus V_k) = 0$. Se $G_k = g_{y_k} \cdot e$, então do fato de X ser um AL-espaço e da equação (3.13) deduzimos que

$$\begin{aligned}m\delta &\leq \sum_{k=1}^{m} \|T^{-1}(G_k)(x)\| \\ &= \left\|\sum_{k=1}^{m} T^{-1}(G_k)(x)\right\| = \left\|T^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} G_k\right)(x)\right\| \\ &\leq \left\|T^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} G_k\right)\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{m} G_k\right\| \leq 1.\end{aligned}$$

Logo, Ω_x deve ser finito. □

Um argumento similar mostra o seguinte lema.

Lema 3.27. *Para todo $y \in S$, o conjunto Δ_y é finito.*

Observação 3.28. Observe que qualquer $y \in S$ satisfazendo a relação

$$\|T_y(\{x\})(e)\| = \|\lim_{i\in I_x} T(f_i \cdot e)(y)\| \geq r,$$

quando $\{U_i, f_i\} \leftrightarrow \{x\}$, pertence ao conjunto Ω_x. Portanto,

$$\sup_{y' \in S} \| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot e)(y') \|$$

é atingido num ponto de Ω_x. Isto segue do Lema 3.26. Analogamente, da finitude do conjunto Δ_y (Lema 3.27) segue que

$$\sup_{x' \in K} \| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot e)(x') \|$$

é atingido num ponto de Δ_y.

Lema 3.29. *Seja $x \in K$ dado e suponhamos que $\{U_i, f_i\}_{i \in I_x} \leftrightarrow \{x\}$. Seja $y \in S$ satisfazendo*

$$\sup_{y' \in S} \left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot e)(y') \right\| = \left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot e)(y) \right\|.$$

Definamos

$$u = \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot e)(y) / \left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot e)(y) \right\|.$$

Se $\{V_j, g_j\}_{j \in J_y} \leftrightarrow \{y\}$, então para todo $x' \in K$ com $x' \neq x$ temos

$$\left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x') \right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Prova. Suponhamos que para algum $x' \in K$ com $x' \neq x$ temos

$$\left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x') \right\| > \frac{1}{2}.$$

Seja $c = \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x')$ e tome $\psi \in S_{X^*}$ tal que $\langle c, \psi \rangle = \|c\|$. Escrevamos $(T^{-1})^*(\psi \cdot \delta_{x'}) = \phi \cdot \delta_y + \eta$, onde $\phi \in X^*$ e $\eta \in \text{rcabv}(K, X^*)$ satisfaz $\eta(\{x\}) = \mathbf{0}$. Temos

$$\begin{aligned}
\|c\| = \langle c, \psi \rangle &= \lim_{j \in J_y} \langle T^{-1}(g_j \cdot u)(x'), \psi \rangle \\
&= \lim_{j \in J_y} (T^{-1})^*(\psi \cdot \delta_{x'})(g_j \cdot u) \\
&= \lim_{j \in J_y} \int_S g_j \cdot u \, d(T^{-1})^*(\psi \cdot \delta_{x'}) \\
&= \langle u, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Deduzimos que $\|\phi\| \geq \langle u, \phi \rangle = \|c\| > 1/2$ pois $\|u\| = 1$. Assim,

$$|\eta| = \|(T^{-1})^*(\psi \cdot \delta)\| - \|\phi\| \leq 1 - \|c\| < \frac{1}{2}.$$

Seja $v = \lim_{i\in I_x} T(f_i \cdot e)(y)$, então $u\|v\| = v$ e temos

$$\lim_{i\in I_x} \langle T(f_i \cdot e)(y), \phi\rangle = \langle u\|v\|, \phi\rangle = \|v\|\|c\|.$$

Como $1 - \|c\| < \|c\|$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que

$$(\|v\| + \varepsilon)(1 - \|c\|) < (\|v\| - \varepsilon)\|c\|. \tag{3.14}$$

Seja $\Omega_x = \{y, y_1, \ldots, y_q\}$, então a medida η pode ser escrita da seguinte maneira

$$\eta = \sum_{k=1}^{q} \phi_k \cdot \delta_{y_k} + m,$$

onde $\phi_k \in X^*$ e $m \in \mathrm{rcabv}(K, X^*)$, satisfaz $m(\{y\}) = m(\{y_k\}) = \mathbf{0}$ para cada $k = 1, \ldots, q$. Pela escolha de ε, existe $i_1 \in I_x$ tal que se $i \geq i_1$ temos

$$|\langle T(f_i \cdot e)(y), \phi\rangle| > (\|v\| - \varepsilon)\|c\| \tag{3.15}$$

e

$$|\langle T(f_i \cdot e)(y_k), \phi_k\rangle| < (\|v\| + \varepsilon)\|c\|. \tag{3.16}$$

Observe que $|m|(\Omega_x) = 0$. Logo, pela regularidade de m existe um subconjunto compacto K_0 de $S \setminus \Omega_x$ tal que

$$|m|(S \setminus K_0) \leq (\|v\| + \varepsilon - r)|m|/2. \tag{3.17}$$

Por outro lado, a equação (3.10) e o fato que $K_0 \cap \Omega_x = \emptyset$ implicam que

$$\bigcap_{i\in I_x} (K_0 \cap L_i) = \emptyset.$$

Da compacidade de K_0, temos que existem $i'_1, \ldots, i'_p \in I_x$ tais que

$$K_0 \cap L_{i'_1} \cap \cdots \cap L_{i'_p} = \emptyset.$$

Seja $i_2 \in I_x$ tal que $i_2 \geq i'_s$ para todo $s = 1, \ldots, p$. Então $f_{i_2} \leq f_{i'_s}$, quando $s = 1, \ldots, p$. Segue da positividade de T que

$$L_{i_2} \subset L_{i'_1} \cap \cdots \cap L_{i'_p}.$$

Assim, $K_0 \cap L_i = \emptyset$ para qualquer $i \geq i_2$, isto é,

$$\|T(f_i \cdot e)(y')\| \leq r \quad \text{para todo } y' \in K_0. \tag{3.18}$$

Agora, se $i_0 \in I_x$ é tal que $i_0 \geq i_1$, $i_0 \geq i_2$ e $x' \notin U_{i_0}$ vale que $x' \notin U_i$, para qualquer $i \geq i_0$. Logo, se $i \geq i_0$ temos

$$\begin{aligned}
0 = \int_K f_i \cdot e \, d(\psi \cdot \delta_{x'}) &= \int_S T(f_i \cdot e)\, d(T^{-1})^*(\psi \cdot \delta_{x'}) \\
&= \int_S T(f_i \cdot e)\, d(\phi \cdot \delta_y) + \sum_{k=1}^{q} \int_S T(f_i \cdot e)\, d(\phi_K \cdot \delta_{y_k}) \\
&+ \int_{K_0} T(f_i \cdot e)\, dm + \int_{S \setminus K_0} T(f_i \cdot e)\, dm \\
&= \langle T(f_i \cdot e)(y), \phi \rangle + \sum_{k=1}^{q} \langle T(f_i \cdot e)(y_k), \phi_k \rangle \\
&+ \int_{S \setminus K_0} T(f_i \cdot e)\, dm + \int_{K_0} T(f_i \cdot e)\, dm.
\end{aligned}$$

Para $i \geq i_0$ a equação (3.15) mostra que o módulo da primeira expressão da última igualdade é maior do que $(\|v\| - \varepsilon)\|c\|$. Por outro lado, das equações (3.16), (3.17) e (3.18), deduzimos que as expressões restantes são menores ou iguais do que

$$\begin{aligned}
(\|v\| + \varepsilon) \sum_{k=1}^{q} \|\phi_k\| + (\|v\| + \varepsilon - r)|m| + r|m| \\
= (\|v\| + \varepsilon)|\eta| \leq (\|v\| + \varepsilon)(1 - \|c\|),
\end{aligned}$$

o que contradiz a equação (3.14). Isto completa a prova do teorema. □

Lema 3.30. *Sejam $x \in K$ dado e $y \in S$ satisfazendo a hipótese do Lema 3.29. Seja $u \in S_X^+$ definido como no Lema 3.29. Então*

$$\left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x) \right\| \geq \frac{r}{\|T\|}.$$

Prova. Pelo Lema 3.24 existe $x_0 \in K$ tal que

$$\|T_{x_0}^{-1}(\{y\})(u)\| = \left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x_0) \right\| \geq \frac{r}{\|T\|}.$$

O Lema 3.29 implica que $x_0 = x$. □

Lema 3.31. *Seja $y \in S$ dado e suponhamos que $\{V_j, g_j\}_{j \in J_y} \leftrightarrow \{y\}$. Seja $x \in K$ tal que*

$$\sup_{x' \in K} \left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot e)(x') \right\| = \left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot e)(x) \right\|.$$

Definamos

$$b = \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot e)(x) \Big/ \left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot e)(x) \right\|.$$

Se $\{U_i, f_i\}_{i \in I_x} \leftrightarrow \{x\}$*, então para qualquer* $y' \in S$ *com* $y' \neq y$ *temos*

$$\left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b)(y') \right\| \leq \frac{\|T\|}{2}.$$

Prova. Para o isomorfismo $U \colon C_0(S,X) \to C_0(K,X)$ dado por $U = \|T\| T^{-1}$ temos

$$\sup_{x' \in K} \left\| \lim_{j \in J_y} U(g_j \cdot e)(x') \right\| = \left\| \lim_{j \in J_y} U(g_j \cdot e)(x) \right\|,$$

e

$$b = \lim_{j \in J_y} U(g_j \cdot e)(x) \Big/ \left\| \lim_{j \in J_y} U(g_j \cdot e)(x) \right\|.$$

Pelo Lema 3.29 se $\{U_i, f_i\}_{i \in I_x} \leftrightarrow \{x\}$, então dado $y' \in S$ com $y' \neq y$ temos

$$\left\| \lim_{i \in I_x} U^{-1}(f_i \cdot b)(y') \right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Isto completa a prova já que $U^{-1} = T/\|T\|$. $\square$

Dos Lemas 3.22 e 3.31 obtemos:

Lema 3.32. *Sejam* $y \in S$ *dado e* $x \in K$ *satisfazendo a hipótese do Lema 3.31. Seja* $b \in S_X^+$ *definido como no Lema 3.31. Então*

$$\left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b)(y) \right\| \geq r.$$

Lema 3.33. *Sejam* $x \in K$ *dado e* $y \in S$ *satisfazendo a hipótese do Lema 3.29. Seja* $u \in S_X^+$ *como no Lema 3.29 e definamos*

$$b = \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x) \Big/ \left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x) \right\|.$$

Se $\{U_i, f_i\}_{i \in I_x} \leftrightarrow \{x\}$*, então* $\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot e)(y) \| \geq r$ *e para qualquer* $y' \in S$ *com* $y' \neq y$ *temos*

$$\left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b)(y') \right\| \leq \frac{\|T\|}{2}.$$

Prova. Os Lemas 3.29 e 3.30 implicam que $x \in K$ é o único ponto tal que a função

$$x' \in K \longmapsto \left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x') \right\|,$$

atinge seu máximo. A conclusão segue dos Lemas 3.31 e 3.32 substituindo e por u. □

Lema 3.34. *Seja $y \in S$ dado e $x \in K$ satisfazendo a hipótese do Lema 3.31. Seja $b \in S_X^+$ definido como no Lema 3.31. Definamos*

$$u = \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b)(y) / \left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b)(y) \right\|.$$

Se $\{V_j, g_j\}_{j \in J_y} \leftrightarrow \{y\}$, então $\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x) \| \geq r / \|T\|$ e para todo $x' \in K$ com $x' \neq x$ temos

$$\left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x') \right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Prova. Pelos Lemas 3.31 e 3.32, o ponto $y \in S$ é o único ponto onde a função

$$y' \in S \longmapsto \left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b)(y') \right\|,$$

atinge seu máximo. O resultado segue dos Lemas 3.29 e 3.30. □

Observação 3.35. Resumindo dado $x \in K$, pelos Lemas 3.29 e 3.30 existe $y \in S$ tal que se $\{V_j, g_j\}_{j \in J_y} \leftrightarrow \{y\}$, então

$$\left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x) \right\| \geq \frac{r}{\|T\|}, \tag{3.19}$$

e

$$\left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x') \right\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{para qualquer } x' \in K \setminus \{x\}, \tag{3.20}$$

onde $u \in S_X^+$ é definido como no Lema 3.29. Mais ainda, pelo Lema 3.33 segue que se $\{U_i, f_i\}_{i \in I_x} \leftrightarrow \{x\}$, temos

$$\left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b)(y) \right\| \geq r, \tag{3.21}$$

e

$$\left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b)(y') \right\| \leq \frac{\|T\|}{2} \quad \text{para todo } y' \in S \setminus \{y\}, \tag{3.22}$$

onde $b \in S_X^+$ é dado como no Lema 3.33.

Seja T_0 o conjunto de todos os elementos $y \in S$ satisfazendo as equações (3.21) e (3.22) para algum $x \in K$. Definamos $\rho\colon T_0 \to K$ por $\rho(y) = x$ se e somente se x e y estão relacionados por (3.21) e (3.22).

Lema 3.36. *ρ é uma função sobrejetora de T_0 em K.*

Prova. Caso contrário, existiriam $x_1, x_2 \in K$ com $x_1 \neq x_2$ e $b_1, b_2 \in S_X^+$ tais que

$$\left\|\lim_{i\in I_{x_1}} T(f_i^1 \cdot b_1)(y)\right\| \geq r, \quad \text{e}$$
$$\left\|\lim_{i\in I_{x_2}} T(f_i^2 \cdot b_2)(y)\right\| \geq r,$$

onde $\{U_i^1, f_i^1\}_{i\in I_{x_1}} \leftrightarrow \{x_1\}$ e $\{U_i^2, f_i^2\}_{i\in I_{x_2}} \leftrightarrow \{x_2\}$. Pelo Lema 3.7 e as equações acima temos

$$\|T_y(\{x_1\})(b_1)\| = \left\|\lim_{i\in I_{x_1}} T(f_i^1 \cdot b_1)(y)\right\| \geq r, \quad \text{e}$$
$$\|T_y(\{x_2\})(b_2)\| = \left\|\lim_{i\in I_{x_2}} T(f_i^2 \cdot b_2)(y)\right\| \geq r.$$

A positividade da medida T_y e o fato de que X é um AL-espaço implicam que

$$\|T_y(\{x_1\})(b_1) + T_y(\{x_2\})(b_2)\| = \|T_y(\{x_1\})(b_1)\| + \|T_y(\{x_2\})(b_2)\|.$$

Logo, da definição de semivariação segue que

$$\begin{aligned}
2r &\leq \|T_y(\{x_1\})(b_1) + T_y(\{x_2\})(b_2)\| \\
&\leq \|T_y\|(\{x_1, x_2\}) \\
&\leq \|T_y\|(K) = \|T_y\| \leq \|T\|,
\end{aligned}$$

que é absurdo pela escolha de r. Portanto, ρ está bem definida. A sobrejetividade de ρ é consequência da Observação 3.35. $\square$

Observação 3.37. Se $y \in S$ é dado os Lemas 3.31 e 3.32 implicam que existe $x \in K$ tal que quando $\{U_i, f_i\}_{i\in I_x} \leftrightarrow \{x\}$ temos

$$\left\|\lim_{i\in I_x} T(f_i \cdot b)(y)\right\| \geq r, \tag{3.23}$$

e

$$\left\|\lim_{i\in I_x} T(f_i \cdot b)(y')\right\| \leq \frac{\|T\|}{2} \quad \text{para todo } y' \in S \setminus \{y\}, \tag{3.24}$$

onde $b \in S_X^+$ é dado como no Lema 3.31. Além disso, se $u \in S_X^+$ é definido como no Lema 3.34 temos

$$\left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x) \right\| \geq \frac{r}{\|T\|}, \tag{3.25}$$

e

$$\left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u)(x') \right\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{para qualquer } x' \in K \setminus \{x\}, \tag{3.26}$$

sempre que $\{V_j, g_j\}_{j \in J_y} \leftrightarrow \{y\}$.

Seja L_0 o conjunto dos elementos $x \in K$ tais que as equações (3.25) e (3.26) são satisfeitas para algum $y \in S$ e defina $\tau \colon L_0 \to S$ por $\tau(x) = y$ se e somente se y e x estão relacionados por (3.25) e (3.26). De forma análoga à prova do Lema 3.36 pode ser mostrado que τ é uma função sobrejetora.

Lema 3.38. *Se $y \in S$ e $\tau(x) = y$, então $y \in T_0$ e $\rho(y) = x$.*

Prova. Suponhamos que $\tau(x) = y$, mas $y \notin T_0$ ou $y \in T_0$ e $\rho(y) \neq x$. Em ambos casos a sobrejetividade de ρ implica que existe $y' \in T_0$ com $y' \neq y$ tal que $\rho(y') = x$. Isto significa que se $\{U_i, f_i\}_{i \in I_x} \leftrightarrow \{x\}$, para algum $b_1 \in S_X^+$ temos

$$\left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b_1)(y') \right\| \geq r,$$

e

$$\left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b_1)(y'') \right\| \leq \frac{\|T\|}{2} \quad \text{para todo } y'' \in S \setminus \{y'\}.$$

Logo, a função

$$t \in S \longmapsto \left\| \lim_{i \in I_x} T(f_i \cdot b_1)(t) \right\|,$$

atinge seu máximo em y'. Pelo Lema 3.30 existe $u_2 \in S_X^+$ tal que se $\{V'_j, g'_j\}_{j \in J_{y'}} \leftrightarrow \{y'\}$, então

$$\|T_x^{-1}(\{y'\})(u_2)\| = \left\| \lim_{j \in J_{y'}} T^{-1}(g'_j \cdot u_2)(x) \right\| \geq \frac{r}{\|T\|}.$$

Por outro lado, a definição de τ e o fato $\tau(x) = y$ implicam que existe $u_1 \in S_X^+$ satisfazendo

$$\|T_x^{-1}(\{y\})(u_1)\| = \left\| \lim_{j \in J_y} T^{-1}(g_j \cdot u_1)(x) \right\| \geq \frac{r}{\|T\|},$$

quando $\{V_j, g_j\}_{j\in J_y} \leftrightarrow \{y\}$. Como X é um AL-espaço, da positividade da medida T_x^{-1} deduzimos que

$$\begin{aligned}\frac{2r}{\|T\|} &\leq \|T_x^{-1}(\{y\})(u_1)\| + \|T_x^{-1}(\{y'\})(u_2)\| \\ &= \|T_x^{-1}(\{y\})(u_1) + T_x^{-1}(\{y'\})(u_2)\| \\ &\leq \|T_x^{-1}\|(\{x_1, x_2\}) \\ &\leq \|T_x^{-1}\|(K) = \|T_x^{-1}\| \leq \|T^{-1}\| = 1.\end{aligned}$$

Isto contradiz a escolha de r. Portanto, $y \in T_0$ e $\rho(y) = x$. □

Um argumento similar ao anterior prova o seguinte resultado.

Lema 3.39. *Se $x \in K$ e $\rho(y) = x$, então $x \in L_0$ e $\tau(x) = y$.*

Como consequência dos Lemas 3.38 e 3.39, temos $T_0 = S$ e $L_0 = K$. Portanto, ρ e τ são funções de S em K e de K em S, respectivamente. Também segue dos Lemas 3.38 e 3.39 que $\rho = \tau^{-1}$.

Lema 3.40. *$\rho\colon S \to K$ é um homeomorfismo.*

Prova. Seja $(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma rede em S convergindo a $y \in S$. Sejam $\rho(y_\gamma) = x_\gamma$ e $\rho(y) = x$ e suponhamos que a rede $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ não converge a x. Então existe uma vizinhança compacta V de x tal que se $\gamma \in \Gamma$ temos $x_{\gamma'} \notin V$, para algum $\gamma' \geq \gamma$. Seja $V_1 \subset V$ um aberto contendo x. Como $\rho(y) = x$ segue que se $\{U_i, f_i\}_{i\in I_x} \leftrightarrow \{x\}$, temos

$$\left\| \lim_{i\in I_x} T(f_i \cdot b)(y) \right\| \geq r,$$

para algum $b \in S_X^+$. Se $h > 0$, então existe $i_0 \in I_x$ tal que para $i \geq i_0$ vale que

$$\|T(f_i \cdot b)(y)\| > r - h.$$

Seja $i_1 \geq i_0$ tal que $U_{i_1} \subset V_1$, então

$$\|T(f_{i_1} \cdot b)(y)\| > r - h.$$

Pela continuidade de $T(f_{i_1} \cdot b)$, existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que quando $\gamma \geq \gamma_0$ temos

$$\|T(f_{i_1} \cdot b)(y_\gamma)\| > r - h.$$

Seja $\gamma_1 \geq \gamma_0$ tal que $x_{\gamma_1} \notin V$, então

$$\|T(f_{i_1} \cdot b)(y_{\gamma_1})\| > r - h. \tag{3.27}$$

Seja $V_2 \subset K$ aberto tal que $x_{\gamma_1} \in V_2$ e $V_2 \cap V = \emptyset$. O fato que $\rho(y_{\gamma_1}) = x_{\gamma_1}$ implica que se $\{U^1_{i'}, f^1_{i'}\}_{i' \in I_{x_{\gamma_1}}} \leftrightarrow \{x_{\gamma_1}\}$, então

$$\left\| \lim_{i' \in I_{x_{\gamma_1}}} T(f^1_{i'} \cdot b_1)(y_{\gamma_1}) \right\| \geq r,$$

para algum $b_1 \in S^+_X$. Seja $i'_0 \in I_{x_{\gamma_1}}$ tal que se $i' \geq i'_0$ vale que

$$\|T(f^1_{i'} \cdot b_1)(y_{\gamma_1})\| > r - h.$$

Finalmente seja $i'_1 \geq i'_0$ tal que $U^1_{i'_1} \subset V_2$, então

$$\|T(f^1_{i'_1} \cdot b_1)(y_{\gamma_1})\| > r - h. \tag{3.28}$$

Observemos que $0 \leq f_{i_1} \leq 1$, $\|f_{i_1}\| = f_{i_1}(x) = 1$ e $f_{i_1}(K \setminus U_{i_1}) = 0$ e $0 \leq f^1_{i'_1} \leq 1$, $\|f^1_{i'_1}\| = f^1_{i'_1}(x_{\gamma_1}) = 1$ e $f^1_{i'_1}(K \setminus U^1_{i'_1}) = 0$. e portanto, $\|f_{i_1} \cdot b + f^1_{i'_1} \cdot b_1\| = 1$. As equações (3.27) e (3.28) junto com a positividade de T e o fato de X ser um AL-espaço implicam que

$$\begin{aligned}
2(r-h) &< \|T(f_{i_1} \cdot b)(y_{\gamma_1})\| + \|T(f^1_{i'_1} \cdot b_1)(y_{\gamma_1})\| \\
&= \|T(f_{i_1} \cdot b)(y_{\gamma_1}) + T(f^1_{i'_1} \cdot b_1)(y_{\gamma_1})\| \\
&= \|T(f_{i_1} \cdot b + f^1_{i'_1} \cdot b_1)(y_{\gamma_1})\| \\
&\leq \|T(f_{i_1} \cdot b + f^1_{i'_1} \cdot b_1)\| \leq \|T\|.
\end{aligned}$$

Logo, $2(r-h) < \|T\|$. Da arbitrariedade de $h > 0$, inferimos que $2r \leq \|T\|$, contrário à escolha de r. Concluímos que ρ é uma função contínua. De maneira análoga pode ser provado que τ é contínua. Isto completa a prova. $\square$

3.4 Uma versão vetorial do teorema de Kaplansky

O clássico teorema de Kaplansky estabelece que o reticulado de Banach $C(K)$ caracteriza a topologia do espaço K [36]. No entanto, como mostramos na Observação 3.2 este teorema não é válido em geral para o reticulado $C(K,X)$. Nesta seção mostraremos que para uma classe de espaços compactos K e uma classe de reticulados X, o reticulado de Banach $C(K,X)$ caracteriza a topologia de K.

O próximo lema é uma versão do Lema 3.6 para operadores positivos definidos em $C_0(K,X)$. Por esta razão não incluímos a prova dele aqui.

Lema 3.41. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach não contendo cópia de c_0. Seja $T\colon C_0(K,X) \to C_0(S,X)$ um isomorfismo positivo com $\|T^{-1}\| \leq 1$. Seja $h \in C_0(K,X)$ com $h \geq 0$ e $\|h\| \leq 1$. Fixemos $0 < r < 1$. Se α é um ordinal tal que $\|h|_{K^{(\alpha)}}\| > r$, então*

$$\bigcap_{h \leq g,\, \|g\| \leq 1} \{y \in S : \|Tg(y)\| \geq r\} \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset.$$

Lema 3.42. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach não contendo cópia de c_0. Seja $T\colon C_0(K,X) \to C_0(S,X)$ um homomorfismo de reticulados injetor com $\|T^{-1}\| \leq 1$. Fixemos $0 < r < 1$. Se $g \in C_0(K,X)$ e $\|g\| = \|g|_{K^{(\alpha)}}\|$ para algum ordinal α, então*

$$\|Tg|_{S^{(\alpha)}}\| \geq r\|g\|.$$

Prova. Seja $h = |g| = g \vee (-g)$ e suponhamos sem perda de generalidade que $\|g\| = \|g|_{K^{(\alpha)}}\| = 1$. Notemos que $\|g\| = \|h|_{K^{(\alpha)}}\| = 1 > r$. Pelo Lema 3.41 existe $y \in S^{(\alpha)}$ tal que

$$\|Th(y)\| \geq r.$$

Sendo T é um homomorfismo de reticulados, temos

$$Th = T(g \vee (-g)) = Tg \vee (-Tg) = |Tg|.$$

Assim, $Th(y) = |Tg|(y) = |Tg(y)|$ e como $\|\,|Tg(y)|\,\| = \|Tg(y)\|$, deduzimos que $\|Tg|_{S^{(\alpha)}}\| \geq r$. $\square$

Nosso próximo resultado é uma versão vetorial de [30, Lema 3.2]. Lembremos que para um espaço topológico S, PS denota o kernel de S (veja Definição 1.64).

Lema 3.43. *Sejam K e S espaços localmente compactos Hausdorff e X um reticulado de Banach não contendo cópia de c_0. Suponhamos que $T\colon C_0(K,X) \to C_0(S,X)$ é um isomorfismo de ordem. Então existe um homomorfismo de reticulados injetor $\hat{T}\colon C_0(S \setminus PS, X) \to C_0(K \setminus PK, X)$.*

Prova. Seja $\psi\colon C_0(S \setminus PS, X) \to C_0(S,X)$ o operador definido por

$$\psi(f)(y) = \begin{cases} f(y), & \text{se } y \in S \setminus PS \\ 0, & \text{se } y \in PS, \end{cases}$$

para todo $f \in C_0(S \setminus PS, X)$. Não é difícil ver que ψ está bem definida. Mais ainda, ψ é uma isometria tal que $\psi(f \vee g) = \psi(f) \vee \psi(g)$ para cada $f, g \in C_0(S \setminus PS, X)$. Podemos supor que $\|T^{-1}\| = 1$. Fixemos $r \in (0,1)$ e seja $f \in C_0(S \setminus PS, X)$ com $f \neq 0$. Consideremos a função

$$g = \frac{T^{-1}(\psi(f))}{\|T^{-1}(\psi(f))\|}.$$

Provaremos que $\|g|_{PK}\| < 1$. Senão, temos $\|g|_{PK}\| \geq 1$ e portanto, $\|g|_{K^{(\alpha)}}\| = 1$ para qualquer ordinal α. Pelo Lema 3.41 temos

$$\{y \in S : \|Tg(y)\| \geq r\} \cap S^{(\alpha)} \neq \emptyset,$$

para todo ordinal α. Pela compacidade temos $\{y \in S : \|Tg(y)\| \geq r\} \cap PS \neq \emptyset$, ou seja, $\|Tg(y)\| \geq r$, para algum $y \in PS$ mas isto é impossível já que $Tg(y) = 0$ para qualquer $y \in PS$. Logo, $\|g|_{PK}\| < 1$ e como $1 = \|g\| = \max\{\|g|_{PK}\|, \|g|_{K\setminus PK}\|\}$, concluímos que $\|g|_{K\setminus PK}\| = 1$. Portanto, se $R\colon C_0(K,X) \to C_0(K \setminus PK, X)$ denota o operador restrição temos $\|Rg\| = 1$, isto é, $\|R(T^{-1}(\psi(f)))\| = \|T^{-1}(\psi(f))\|$. Seja $\hat{T}\colon C_0(S \setminus PS, X) \to C_0(K \setminus PK, X)$ definida por $\hat{T}(f) = (R \circ T^{-1} \circ \psi)(f)$. É claro que se $f, g \in C_0(S \setminus PS, X)$, então $\hat{T}(f \vee g) = \hat{T}(f) \vee \hat{T}(g)$. Notemos também que para cada $f \in C_0(S \setminus PS, X)$ temos

$$\frac{1}{\|T\|}\|f\| \leq \|\hat{T}(f)\| \leq \|f\|.$$

Assim, $\hat{T}$ é um isomorfismo. □

Finalmente provaremos o resultado principal desta seção.

Teorema 3.44. *Sejam K e S intervalos de ordinais e X um reticulado de Banach não contendo cópia de c_0. Suponhamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, não existe um homomorfismo de reticulados injetor de X^{n+1} em X^n. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$C(K,X)$ é ordem isomorfo a $C(S,X)$;*
2. *os espaços K e S são homeomorfos.*

Prova. Sejam K e S intervalos de ordinais e $T\colon C(K,X) \to C(S,X)$ um isomorfismo de ordem. Se K e S são finitos, digamos $K = \{1,\ldots,n\}$ e $S = \{1,\ldots,m\}$, temos $C(K,X) \cong X^n$ e $C(S,X) \cong X^m$, onde as isometrias são isomorfismos de ordem. A hipótese sobre o espaço X implica que $m = n$ e portanto, K e S são homeomorfos.

Suponhamos que K e S são intervalos de ordinais infinitos e que $\|T^{-1}\| = 1$. Pelo Corolário 1.60, K e S são dispersos. Usando o Teorema 3.12 duas vezes, obtemos $\mathrm{ht}(K) = \mathrm{ht}(S)$. Por outro lado, pelo Teorema 1.55 podemos supor que $K = [0, \omega^\alpha n]$ e $S = [0, \omega^\beta m]$, onde α, β são ordinais e m, n são ordinais finitos. Pela Observação 1.63 temos $\mathrm{ht}(K) = \alpha + 1$ e $\mathrm{ht}(S) = \beta + 1$, e inferimos que $\alpha = \beta$.

Vamos mostrar agora que $m = n$. Fixemos $0 < r < 1$ e suponhamos que $m < n$. Pelo Teorema 1.59 temos $K^{(\alpha)} = \{\omega^\alpha, \ldots, \omega^\alpha n\}$. Seja $K_0 = \{\omega^\alpha, \ldots, \omega^\alpha(m+1)\}$. Tomemos uma sequência $\{U_1, \ldots, U_{m+1}\}$ de subconjuntos abertos de K disjuntos tais que $\omega^\alpha j \in U_j$ para cada $1 \leq j \leq m+1$. Pelo Lema de Urysohn dado $1 \leq j \leq m+1$, existe $h_j \in C(K)$ com $0 \leq h_j \leq 1$, $h_j(K \setminus U_j) = 0$ e $h_j(\omega^\alpha j) = 1$. Definamos $L\colon C(K_0, X) \to C(K,X)$ por

$$L(f)(x) = \sum_{i=1}^{m+1} h_i(x) f(\omega^\alpha i),$$

onde $f \in C(K_0, X)$. Notemos que L é uma isometria tal que $L(f \vee g) = L(f) \vee L(g)$ para todo $f, g \in C(K_0, X)$. Seja $R\colon C(S,X) \to C(S^{(\alpha)}, X)$ o operador restrição. Se $f \in C(K_0, X)$, temos $\|f\| = \|L(f)\| = \|L(f)|_{K^{(\alpha)}}\|$. Do Lema 3.42 segue que

$$\|R \circ T \circ L(f)\| \geq r\|f\|.$$

Assim, $R \circ T \circ L$ é um homomorfismo de reticulados injetor de X^{m+1} em X^m, contrário à nossa hipótese. Analogamente $n < m$ é impossível. Logo, $m = n$ e isto completa a prova do teorema. $\square$

Observação 3.45. É claro que qualquer reticulado de Banach de dimensão finita satisfaz as hipóteses do Teorema 3.44. De fato, existem $2^{\aleph_0}$ reticulados de Banach separáveis mutuamente não isomorfos satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.44. Vamos mostrar aqui a construção destes espaços.

Seja $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $[2, \infty)$ estritamente decrescente. Fixemos $a > 0$ e $p \in \mathbb{R}$ no intervalo $(1, \lim_{n \to \infty} p_n]$. Denotemos por $[x]$ o maior inteiro menor ou igual a x. O teorema principal de [10] (veja também [28]) estabelece que existe uma sequência $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que o reticulado uniformemente convexo

$$X^a = \left(\sum_{n=1}^{\infty} l_{p_n}^{[ak_n]} \right)_p$$

satisfaz as hipóteses do Teorema 3.44. Mais ainda, a família $(X^a)_{a>0}$ tem a propriedade de que se $0 < b < a$, então X^a não é isomorfo a um subespaço de X^b.

Teorema 3.46. *Sejam K e S intervalos de ordinais e X um espaço de Banach não contendo cópia de c_0. Suponhamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, não existe um homomorfismo de reticulados injetor de X^{n+1} em X^n. Seja L um espaço compacto Hausdorff perfeito. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$C(K \oplus L, X)$ é ordem isomorfo a $C(S \oplus L, X)$;*
2. *K e S são homeomorfos.*

Prova. Seja $T\colon C(K \oplus L, X) \to C(S \oplus L, X)$ um isomorfismo de ordem. Notemos que $P(K \oplus L) = L$ e $P(S \oplus L) = L$, já que K e S são dispersos pelo Corolário 1.60. Assim, pelo Lema 3.43, existem homomorfismos de reticulados (injetores) $T_1\colon C(K, X) \to C(S, X)$ e $T_2\colon C(S, X) \to C(K, X)$. Se K e S são intervalos de ordinais finitos, o resultado é imediato. Caso contrário, pelo Teorema 1.55 podemos supor que $K = [0, \omega^\alpha n]$ e $S = [0, \omega^\beta m]$, para alguns ordinais α, β, m e n, onde m, n são ordinais finitos. Segue, aplicando o Teorema 3.12 duas vezes, que $\mathrm{ht}(K) = \mathrm{ht}(S)$ e pela Observação 1.63, temos $\alpha + 1 = \mathrm{ht}(K) = \mathrm{ht}(S) = \beta + 1$. Logo, $\alpha = \beta$. Por fim, procedendo como na prova do Teorema 3.44, concluímos que $m = n$. Isto completa a prova do teorema. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] D. Amir, *On isomorphisms of continuous function spaces,* Israel J. Math. 3 (1965), 205-210.

[2] A. Arens, J. L. Kelly, *Characterization of spaces of continuous functions over a compact Hausdorff space*, Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1947), 499-500.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1933.

[4] E. Behrends, *M-structure and Banach-Stone theorem*, Lectures Notes in Math. 736, Springer-Verlag, 1979.

[5] Y. Benyamini, *Small into-isomorphisms between spaces of continuous functions.* Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 3, 479-485.

[6] J. K. Brooks, P. W Lewis. *Linear operators and vector measures.* Trans. Amer. Math. Soc. 192 (1974), 139-162.

[7] M. Cambern, *A Holsztyński theorem for spaces of continuous vector-valued functions*, Studia Math., 63 (1978), 213-217.

[8] M. Cambern, *On isomorphisms with small bound*, Proc. Amer. Math. Soc. 18, (1967), 1062-1066.

[9] M. Cambern, *Isomorphisms of spaces of continuous vector-valued functions,* Illinois J. Math. 20 (1976), 1-11.

[10] P. G. Casazza, C. A. Kottman, B. L. Lin, *Remarks on Figiel's reflexive Banach spaces not isomorphic to their square.* J. Math. Anal. Appl. 63 (1978), no. 3, 750-752.

[11] E. Cassini, *About some parameters of normed linear spaces,* Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 80 (1986), 11-15.

[12] L. Candido, *Teoria isomorfa dos espaços de Banach* $C_0(K, X)$, Tese de Doutorado, 2012.

[13] L. Candido, E. M. Galego, *A weak vector-valued Banach-Stone theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), 10, 3529-3538.

[14] L. Candido, E. M. Galego, *Embeddings of C(K) spaces into C(S,X) spaces with distortion strictly less than 3,* Fund. Math. 220 (2013), 1, 83-92.

[15] B. Cengiz, *On topological isomorphisms of $C_0(X)$ and the cardinal number of X,* Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 1, 105-108.

[16] B. Cengiz, *Continuous maps induced by isomorphisms of extremely regular function spaces,* J. Pure Appl. Sci. 18 (1985), 3, 377-384.

[17] B. Cengiz, *On order-preserving isomorphism of $C_0(X)$,* Rend. Mat. Appl. 7 (1992), 2, 299-304.

[18] Jin Xi Chen, Zi Li Chen, Ngai-Ching Wong, *A Banach-Stone theorem for Riesz isomorphisms of Banach lattices,* Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 11, 3869-3874.

[19] F. C. Cidral, E. M. Galego, M. A. Rincón-Villamizar, *Optimal extensions of the Banach-Stone theorem.* J. Math. Anal. Appl. 430 (2015), 1, 193-204.

[20] H.B. Cohen, *A bound-two isomorphism between $C(X)$ Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 50 (1975), 215-217.

[21] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.

[22] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[23] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr., *Vector measures.* With a foreword by B. J. Pettis. Mathematical Surveys, 15. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

[24] N. Dinculeanu, *Vector Measures*, Internat. Series of Monographs in Pure and Appl. Math., vol 95, Pergamon Press, New York; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

[25] N. Dinculeanu, *Vector Integration and Stochastic integration in Banach spaces*, Wiley Interscience, 2000.

[26] I. Dobrakov, *On representation of linear operators on $C_0(T, X)$*, Czech. Math. J. 21 (96) (1971), 13-30.

[27] Z. Ercan, S. Önal, *Banach-Stone theorem for Banach lattice valued continuous functions.* Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 9, 2827-2829.

[28] T. Figiel, *An example of infinite dimensional reflexive Banach space non-isomorphic to its Cartesian square.* Studia Math. 42 (1972), 295-306.

[29] K. Geba and Z. Semadeni, *Spaces of continuous functions (V)*, Studia Math. 19 (1960), p. 303-320.

[30] Y. Gordon, *On the distance coefficient between isomorphic function spaces.* Israel J. Math. 8 (1970), 391-397.

[31] W. Holsztyński, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous functions*, Studia Math., 26 (1966), 133-136.

[32] K. Jarosz, *Into isomorphisms of spaces of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 90 (1984), 374-377.

[33] K. Jarosz, *Small isomorphisms of $C(X, E)$ spaces*, Pacific J. Math. 138 (1989), 295-315.

[34] M. Jerison, *The space of bounded maps into a Banach space*, Ann. of Math., (2) 52 (1950), 309-327.

[35] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. (2) 42 (1941), 523-537.

[36] I. Kaplansky, *Lattices of continuous functions.* Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 617-623.

[37] M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces,* Studia Math. 144 (2001), 275-295.

[38] H. E. Lacey, *The isometrical theory of classical Banach spaces*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974.

[39] D. H. Leung, Wee-Kee Tang, *Banach-Stone theorems for maps preserving common zeros,* Positivity 14 (2010), 1, 17-42.

[40] L, Meziani. *On the dual space $C_0^*(S, X)$.* Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 78 (2009), no. 1, 153-160.

[41] A. A. Miljutin, *Isomorphism of the spaces of continuous functions over compact sets of the cardinality of the continuum.* (Russian) Teor. Funkciĭ Funkcional. Anal. i Priložen. Vyp. 2 (1966) 150-156.

[42] T. V. Panchapagesan, *Characterizations of weakly compact operators on $C_0(T)$.* Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 12, 4849-4867.

[43] G. Plebanek, *On isomorphisms of Banach spaces of continuous functions.* Israel J. Math. 209 (2015), 1, 1-13.

[44] K-S. Saito, M. Sato, R. Tanaka, *When does the equality $J(X^*) = J(X)$ hold for a two-dimensional Banach space X?* Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 31 (2015), 8, 1303-1314.

[45] C. Samuel, *Sur la reproductibilite des espaces ℓ_p,* Math. Scand. 45 (1979), 103-117.

[46] H. H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 215. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

[47] Z. Semadeni, *Banach spaces of Continuous Functions*, Vol. 1, Monografie Mat. 55, PWN-Polish Sci. Publ. Warszawa, 1971.

[48] M. H. Stone, *Applications fo the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375-481.

[49] S. Yamamoto, A. Yamashita, *A counterexample related to topological sums.* Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 12, 3715-3719.