Regularidade e resolubilidade de operadores diferenciais lineares em espaços de ultradistribuições

Gabriel Cueva Candido Soares de Araújo

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, setembro de 2016

Regularidade e resolubilidade de operadores diferenciais lineares em espaços de ultradistribuições

(com 2 figuras)

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 29/07/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Oscar Fortunato Vilcachagua Erazo - IME-USP
- Prof. Dr. Gerson Petronilho - UFSCar
- Prof. Dr. Gustavo Hoepfner - UFSCar
- Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi - UFSCar

Agradecimentos

À minha família (no sentido mais abrangente possível) pelo incentivo e compreensão. Especialmente a meus pais e meus sogros, que me ajudaram de todas as formas que eu poderia imaginar, em geral além da obrigação. Eles nunca questionaram este caminho, longo e com objetivos não raro pouco tangíveis, que escolhi.

Ao Paulo, pela amizade e pelo excelente trabalho de orientação, sem o qual todo o processo teria sido muito mais longo, senão inviável: eu jamais teria aprendido e progredido tanto em tão curto espaço de tempo sem sua orientação. Foi também graças a seus esforços que o doutorado-sanduíche pôde ocorrer, e foi um sucesso.

Ao pessoal da Temple University, onde desenvolvi a maior parte desta tese, particularmente ao Gerardo Mendoza e ao Shif Berhanu. Agradeço também ao CNPq por financiar nossa viagem, que de outro modo não teria ocorrido.

Ao "time", amigos que tornaram a experiência do doutorado única e extremamente proveitosa: Antonio Victor da Silva Junior, Bruno Lessa Victor, Nicholas Braun Rodrigues, Alexandre Kawano, Luís Cláudio Yamaoka, Gregorio Chinni, Max Reinhold Jahnke e Luis Fernando Ragognette. Em particular a este último, pela amizade, por ter ido para os EUA comigo, pelas infinitas discussões e tanto trabalho feito em conjunto ao longo desses anos: esta tese é um dos vários frutos desse trabalho, e sem o qual não seria possível.

Aos demais amigos do IME-USP, vinculados ou não ao instituto, que conheci nos últimos dez anos e que são muitos para listar aqui. Mas deixo um agradecimento especial à Adèle Ribeiro, ao Bruno Jacóia, à Priscila Freitas e ao Pedro Pontes, pela proximidade, pela amizade, e por terem nos recebido inúmeras vezes em suas casas. E mais uma vez ao Pedro, por ter ajudado tanto em nossa viagem aos EUA, onde ele e Sofia também nos receberam muitas vezes.

E, principalmente, à Ana. Por tudo.

Resumo

ARAÚJO, G. **Regularidade e resolubilidade de operadores diferenciais lineares em espaços de ultradistribuições.** Tese (Doutorado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Desenvolvemos novos resultados da teoria dos espaços FS e DFS (espaços de Fréchet-Schwartz e seus duais) e os empregamos ao estudo da seguinte questão: *quando certas propriedades de regularidade de um operador diferencial parcial linear (entre fibrados vetoriais Gevrey sobre uma variedade Gevrey) implicam resolubilidade, no sentido de ultradistribuições, do operador transposto?* Estudamos esta questão para uma classe de operadores abstratos que contém os operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes Gevrey usuais, mas também certas classes de operadores pseudo-diferenciais em variedades compactas, além de certos tipos de operadores de ordem infinita. Neste contexto, obtemos uma nova demonstração de um resultado global em variedades compactas (em que hipoelipticidade Gevrey global de um operador implica resolubilidade global de seu transposto), assim como alguns resultados no caso não-compacto relacionados à propriedade de não-confinamento de singularidades. Na sequência apresentamos algumas aplicações concretas, em particular para operadores de Hörmander, operadores de força constante e sistemas localmente integráveis de campos vetoriais.

Analisamos ainda algumas instâncias de uma conjectura levantada em um artigo recente de F. Malaspina e F. Nicola [24], a qual afirma que, para certos complexos diferenciais naturalmente associados a estruturas localmente integráveis, resolubilidade local no sentido de ultradistribuições (perto de um ponto, em um grau fixado) implica resolubilidade local no sentido de distribuições. Estabelecemos a validade desta conjectura quando o fibrado estrutural cotangente é gerado pelo diferencial de uma única integral primeira.
Palavras-chave: regularidade Gevrey, resolubilidade Gevrey, EDPs lineares, estruturas localmente integráveis, operadores de força constante.

Abstract

ARAÚJO, G. **Regularity and solvability of linear differential operators in spaces of ultradistributions.** Tese (Doutorado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

We develop new techniques in the setting of FS and DFS spaces (Fréchet-Schwartz spaces and their strong duals) and apply them to the study of the following question: *when regularity properties of a general linear differential operator (between Gevrey vector bundles over a Gevrey manifold) imply solvability of its transpose in the sense of ultradistributions?* This question is studied for a class of abstract operators that encompasses the usual partial differential operators with Gevrey coefficients, but also some flavors of pseudodifferential operators on compact manifolds and some classes of operators with infinite order. In this setting, we obtain a new proof of a global result on compact manifolds (global Gevrey hypoellipticity of the operator implying global solvability of the transpose), as well as some results in the non-compact case by means of the so-called property of non-confinement of singularities. We then move to some concrete applications, especially for Hörmander operators, operators of constant strength and locally integrable systems of vector fields.

We also analyze some instances of a conjecture stated in a recent paper of F. Malaspina and F. Nicola [24], which asserts that, in differential complexes naturally arising from locally integrable structures, local solvability in the sense of ultradistributions (near a point, in some fixed degree) implies local solvability in the sense of distributions. We establish the validity of the conjecture when the cotangent structure bundle is spanned by the differential of a single first integral.
Keywords: Gevrey regularity, Gevrey solvability, linear PDE, locally integrable structures, operators of constant strength.

Prefácio

Este trabalho trata de questões relacionadas à resolubilidade e à regularidade de operadores diferenciais parciais lineares em espaços de ultradistribuições Gevrey.

Com esta finalidade, recordamos no Capítulo 1 diversas propriedades de duas classes importantes de espaços localmente convexos, que aqui denominamos espaços FS e DFS (espaços de Fréchet-Schwartz e seus duais) que, do ponto de vista topológico, provêm modelos abstratos de certos espaços de ultradistribuições e de funções Gevrey, respectivamente. Também apresentamos critérios, aparentemente novos, para determinar quando uma aplicação linear contínua entre tais espaços possui imagem fechada, um passo crítico na determinação da sobrejetividade da aplicação transposta; para esta tarefa, nossas principais ferramentas são o Teorema do Homomorfismo para espaços de Fréchet e um resultado não publicado de P. D. Cordaro que caracteriza as aplicações com imagem fechada entre espaços DFS. As técnicas e a abordagem aqui desenvolvidas foram fortemente inspiradas em [11], onde trata-se de resolubilidade de operadores diferenciais em espaços de hiperfunções.

No Capítulo 2, introduzimos espaços de seções Gevrey de certos fibrados vetoriais sobre variedades e seus respectivos espaços de seções generalizadas (ultradistribuições), discutimos a resolubilidade de uma classe abstrata de aplicações lineares contínuas entre tais espaços de seções (generalizadas), e sua relação com certas noções de regularidade do operador transposto. Iniciamos tal discussão no contexto global em variedades compactas (relacionando resolubilidade global do operador com hipoelipticidade Gevrey global do operador transposto), sendo que o principal resultado desta parte (Corolário 2.14) generaliza [2, Theorem 2.1] em várias direções: trabalhamos em variedades compactas quaisquer (ao invés de toros); nossos operadores agem em fibrados vetoriais, e eles não precisam ser localizáveis (de modo que os resultados globais aqui obtidos valem, em particular, para certos tipos de operadores pseudo-diferenciais como aqueles definidos, em abertos de espaços euclideanos, em [28, Chapter III]) nem ter ordem finita; nossa hipótese de regularidade é mais fraca e nossa tese de resolubilidade é mais forte; e nossa demonstração é, acreditamos, muito mais simples.

Movemos então nossa atenção a uma tentativa de obter resultados análogos em variedades não-compactas, o que gera uma série de dificuldades técnicas adicionais: precisamos distinguir entre seções com e sem suporte compacto, e agora o espaço das seções globais Gevrey (sem suporte compacto) não mais possui uma topologia amigável como no caso anterior. Este fato nos obrigou a fazer diversas concessões, sendo provavelmente a principal delas estudar resolubilidade de uma classe análoga de operadores – que agora supomos localizáveis – *apenas em espaços de ultradistri-*

buições (abrimos mão de saber a regularidade Gevrey das soluções mesmo quando o lado direito da equação é Gevrey). Aqui, focamos principalmente na questão da resolubilidade semi-global (que, em linhas gerais, reduz-se à resolubilidade global em compactos arbitrariamente grandes, à qual, por sua vez, pudemos dar um tratamento essencialmente idêntico ao dado na seção anterior) mas tratamos também de resolubilidade global (via introdução de condições naturais de P-convexidade) e resolubilidade local (que é equivalente à propriedade de cada ponto possuir uma vizinhança onde há resolubilidade semi-global).

Discutimos ainda uma noção de não-confinamento das singularidades Gevrey, que acabou por tornar-se um dos principais temas desta monografia: em variedades não-compactas é, num certo sentido, um tipo de hipoelipticidade Gevrey em que olha-se apenas para seções de suporte compacto (o que, portanto, é uma condição mais fraca que hipoelipticidade Gevrey propriamente dita). Provamos aqui que todo operador abstrato que apresenta esta propriedade (mais uma condição de injetividade) possui uma transposta semi-globalmente resolúvel. Aqui, nossos resultados generalizam [1, Theorem 2.1] nas mesmas linhas de um comentário acima no caso de variedades compactas.

No Capítulo 3 apresentamos algumas aplicações concretas dos resultados abstratos obtidos nos capítulos anteriores. Trabalhamos no contexto de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes Gevrey, de ordem finita, em geral escalares, sobre variedades não-compactas, e o principal objetivo é exibir exemplos de operadores que possuem a propriedade de não-confinamento das singularidades Gevrey – e logo desfrutam de todas as consequências deste fato demonstradas nos resultados precedentes – , e não obstante *não são* Gevrey hipoelípticos. Tratamos de uma classe de operadores de Hörmander (introduzida em [7] no caso do toro), fazemos breve menção a certos operadores com propagação de singularidades Gevrey e concluímos com uma análise de operadores de coeficientes constantes e de operadores de força constante com coeficientes Gevrey em espaços euclideanos (os mesmos discutidos em [18]).

Encerramos nosso trabalho discutindo, no Capítulo 4, certos complexos diferenciais naturalmente associados a estruturas localmente integráveis, o que justifica nossa insistência em tratar desde o começo operadores agindo entre fibrados vetoriais (e não apenas escalares). Como nossas técnicas não se comportam bem na presença de relações de compatibilidade (como aquelas que ocorrem nos graus intermediários do complexo diferencial), nós as utilizamos apenas no extremos do complexo: a condição $(\mathcal{P}_{n-1})$ num ponto, introduzida em [8], garante o não-confinamento das singularidades numa vizinhança deste ponto para o primeiro grau do complexo, o que nos dá, via transposição, resolubilidade em grau máximo do mesmo (local, no sentido de ultradistribuições). Na última seção deste capítulo abordamos, de maneira mais ou menos independente do resto da monografia, uma conjectura recente que relaciona a noção clássica de resolubilidade local para esses complexos – agora num grau arbitrário – a uma noção análoga de resolubilidade Gevrey (veja [24]): provamos, seguindo de perto um argumento em [12], que ambas as noções são equivalentes quando a estrutura tem coposto 1, isto é, quando ela admite uma única integral primeira.

Sumário

Capítulo 1

Tópicos da teoria de Fréchet-Schwartz

Iniciamos o presente trabalho introduzindo alguns resultados da teoria dos *espaços FS* (acrônimo para *Fréchet-Schwartz*) e seus respectivos duais fortes, os ditos *espaços DFS*: estes formam uma classe de espaços localmente convexos com notáveis propriedades topológicas e que, como ficará evidente, se demonstraram particularmente úteis ao estudo de espaços de funções Gevrey (assim como seus correspondentes espaços de ultradistribuições) em variedades, os quais são nosso principal foco de atenção de fato.

Por questões de completude, e com a finalidade de fixar a notação, começamos recordando as principais definições e resultados da teoria de limites indutivos de espaços localmente convexos. Para uma breve introdução a este assunto referimos o leitor, por exemplo, a [26, Appendix A].

Uma *família injetiva de espaços localmente convexos* consiste em uma família dirigida $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de espaços localmente convexos (ou seja, o conjunto de índices Λ é um conjunto dirigido), e *aplicações de cadeia* $\rho^\lambda_\mu \in L(S_\lambda, S_\mu)$ para $\lambda \prec \mu$, as quais suporemos injetoras por simplicidade. Seu *limite injetivo*

$$S \doteq \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$$

é um espaço localmente convexo definido da seguinte forma: o espaço vetorial subjacente a S é o limite injetivo, na categoria dos espaços vetoriais, da família $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, o qual munimos da mais fina topologia de espaço localmente convexo que torne cada inclusão canônica $S_\lambda \hookrightarrow S$ uma aplicação contínua. O ponto importante aqui é que tal topologia sempre existe, e que limites injetivos na categoria dos espaços localmente convexos desfrutam das propriedades universais esperadas, que os caracterizam a menos de isomorfismos.

Se $\Lambda' \subset \Lambda$ é um conjunto cofinal então

$$\varinjlim_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \cong \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$$

como espaços vetoriais topológicos. Se Λ for isomorfo a $\mathbb{N}$ (como conjuntos dirigidos) diremos que $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma *sequência injetiva* de espaços localmente convexos.

Analogamente, definimos uma *família projetiva de espaços localmente convexos*: é uma família dirigida $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de espaços localmente convexos com aplicações de cadeia $\rho_\lambda^\mu \in L(S_\mu, S_\lambda)$ para $\lambda \prec \mu$, que agora não suporemos injetoras. Seu *limite projetivo*

$$S \doteq \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$$

é o espaço localmente convexo cujo espaço vetorial subjacente é o limite projetivo da $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ na categoria dos espaços vetoriais, e cuja topologia é a menos fina dentre aquelas que são localmente convexas e tornam as aplicações canônicas $S \to S_\lambda$ aplicações contínuas. As mesmas observações feitas no caso anterior também se aplicam aqui.

Definição 1.1.

1. *Sequências projetivas compactas* de espaços localmente convexos são sequências projetivas de espaços localmente convexos cujas aplicações de cadeia são compactas. Seus limites projetivos são chamados de *espaços FS*.

2. *Sequências injetivas compactas* de espaços localmente convexos são sequências injetivas de espaços localmente convexos cujas aplicações de cadeia são compactas. Seus limites injetivos são chamados de *espaços DFS*.

Essencialmente todos os resultados da teoria de espaços FS e DFS que empregaremos constam em [19], de modo que não perderemos mais tempo aqui listando cada um deles: conforme necessitarmos, faremos referência a esse artigo. No entanto, antes de abordarmos os resultados originais deste trabalho, recordaremos ainda versões bastante gerais do Teorema do Gráfico Fechado e do Teorema da Aplicação Aberta, ambas ligadas ao trabalho de M. De Wilde (para mais detalhes, referimos o leitor a [22]).

Teorema 1.2 (Gráfico Fechado). *Uma aplicação linear de um espaço ultrabornológico em um espaço "webbed" cujo gráfico é fechado é necessariamente contínua.*

Referência. Veja [22, p. 57]. □

Teorema 1.3 (Aplicação Aberta). *Uma aplicação linear contínua e bijetora de um espaço "webbed" num espaço ultrabornológico tem inversa contínua.*

Referência. Veja [22, p. 59]. □

A relevância destes resultados para nós é que espaços DFS são simultaneamente "webbed" e ultrabornológicos.

1.1 O Teorema do Homomorfismo e suas consequências

Provavelmente a ferramenta mais importante que empregaremos nesta primeira parte do presente trabalho é o Teorema do Homomorfismo para espaços de Fréchet-Montel: no primeiro resultado desta seção, sintetizamos as consequências desse teorema que são mais relevantes aos nossos propósitos.

Antes de mais nada, contudo, faremos uma pequena digressão sobre espaços reflexivos. Seja X um espaço vetorial topológico. Denotamos por X' seu espaço dual, isto é, o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos $X \to \mathbb{C}$, o qual munimos da topologia dual forte (que é a topologia da convergência uniforme sobre subconjuntos limitados de X). A topologia forte torna X' um espaço vetorial topológico, o que nos permite iterar o procedimento anterior e tomar o dual de X', que denotamos por X'', e muni-lo também da topologia forte: denotando por $J : X \to X''$ a aplicação canônica, definida por

$$\langle J(x), \xi \rangle \doteq \langle \xi, x \rangle, \ \forall x \in X, \ \forall \xi \in X',$$

diz-se que X é um espaço *reflexivo* se J é um isomorfismo topológico. Neste caso, identificamos X com seu bidual X'' via J e a topologia inicial de X com a topologia forte de X''. Neste contexto estabelecemos, deste ponto em diante, a seguinte convenção: se X for um espaço reflexivo, quaisquer considerações topológicas sobre seu dual que não indiquem de maneira explícita a topologia em questão dirão respeito à topologia forte. Por exemplo, se afirmarmos que $V \subset X'$ é um subespaço fechado, fica subentendido que queremos dizer que V é *fortemente fechado*, isto é, fechado na topologia forte.

Uma classe muito especial de espaços reflexivos é a dos *espaços de Montel* (veja [30, Definition 34.2] e [30, Proposition 36.9] e seu corolário), em particular porque o dual forte de um espaço de Montel é também de Montel [30, Proposition 36.10]. Assim, se X for um espaço de Montel, em seu dual X' fica definida, inequivocamente, uma segunda topologia, distinta da topologia forte, a *topologia fraca* (definida como aquela induzida por X'' ou por X, pois, sendo X um espaço reflexivo, ambas coincidem). Como, neste caso, X' é também um espaço de Montel[1], podemos também considerar uma topologia fraca em $X \cong X''$, a princípio distinta da topologia inicial. Observe, contudo, que em vista das considerações acima e de [30, Proposition 35.2] vale a seguinte propriedade: um subconjunto convexo de um espaço de Montel é fechado se e somente se for fracamente fechado.

Também utilizaremos com frequência a seguinte notação: dados X um espaço vetorial topológico e $V \subset X$ um subespaço denotamos

$$V^{\perp} \doteq \{\xi \in X' \ ; \ \langle \xi, x \rangle = 0, \ \forall x \in V\} \tag{1.1}$$

que é um subespaço de X'. Note que se X for reflexivo e $W \subset X'$ for um subespaço temos, sob a identificação canônica $X'' \cong X$, que

$$W^{\perp} = \{x \in X \ ; \ \langle \xi, x \rangle = 0, \ \forall \xi \in W\}.$$

Empregando as convenções estabelecidas acima, o enunciado a seguir é inequívoco.

Teorema 1.4. *Sejam X, Y espaços de Fréchet-Montel (isto é, espaços que são simultaneamente de Fréchet e de Montel) e $A \in L(X, Y)$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

[1] Note bem: para a topologia usual, que segundo nossa convenção é a forte.

1. $\operatorname{ran}(A)$ *é fechada em* Y.

2. $\operatorname{ran}({}^tA)$ *é fechada em* X'.

3. $\operatorname{ran}(A)$ *é sequencialmente fechada em* Y.

4. $\operatorname{ran}({}^tA)$ *é sequencialmente fechada em* X'.

5. $\operatorname{ran}(A) = \ker({}^tA)^\perp$.

6. $\operatorname{ran}({}^tA) = \ker(A)^\perp$.

Demonstração. Primeiramente, é claro que *2.* $\Rightarrow$ *4.* (pois todo conjunto fechado é sequencialmente fechado) e que, sendo Y um espaço de Fréchet (e, portanto, metrizável), tem-se *1.* $\Leftrightarrow$ *3.*

Ademais, sabe-se [30, Proposition 35.4] que se E, F são espaços localmente convexos de Hausdorff e $T \in L(E,F)$ então $\ker(T)^\perp$ é o fecho, com relação à topologia fraca de E' induzida por E, de $\operatorname{ran}({}^tT)$: ou seja, $\operatorname{ran}({}^tT)$ é fracamente fechada em E' se e somente se for igual a $\ker(T)^\perp$. Aplicando esta conclusão a $E \doteq X$, $F \doteq Y$ e $T \doteq A$, temos imediatamente a equivalência *2.* $\Leftrightarrow$ *6.*

Usando ainda os isomorfismos topológicos

$$\begin{aligned} X'' &\cong X \\ Y'' &\cong Y \\ {}^t\big({}^tA\big) &\cong A \end{aligned}$$

dados pela reflexividade dos espaços em questão, podemos aplicar o argumento anterior também a $E \doteq Y'$, $F \doteq X'$ e $T \doteq {}^tA$, e, empregando as notações e convenções estabelecidas nos parágrafos que precedem o enunciado, obtemos a equivalência *1.* $\Leftrightarrow$ *5.*

Por fim, o Teorema do Homomorfismo para espaços de Fréchet [22, p. 18] nos diz, entre outras coisas (tendo sempre em mente nossas observações preliminares a respeito das relações entre as topologias forte e fraca em um espaço de Montel), que *4.* $\Rightarrow$ *1.* e que *1.* $\Leftrightarrow$ *2.*, fechando o diagrama de equivalências entre todas as propriedades listadas. ☐

Recordamos que espaços FS são espaços de Fréchet-Montel [19, Theorem 1'] e que seus duais fortes formam precisamente a classe dos espaços DFS (veja demais resultados em [19]). Daí infere-se imediatamente, a partir do Teorema 1.4, que:

Corolário 1.5. *Sejam F, G ambos espaços FS ou ambos espaços DFS. Dada $T \in L(F,G)$ as seguintes propriedades são equivalentes.*

1. $\operatorname{ran}(T)$ *é fechada em* G.

2. $\operatorname{ran}({}^tT)$ *é fechada em* F'.

3. $\operatorname{ran}(T)$ *é sequencialmente fechada em* G.

4. $\mathrm{ran}({}^tT)$ *é sequencialmente fechada em* F'.

5. $\mathrm{ran}(T) = \ker({}^tT)^\perp$.

6. $\mathrm{ran}({}^tT) = \ker(T)^\perp$.

Demonstração. Omitida. □

Prosseguimos com o intuito de estabelecer um critério para determinar quando certos tipos de aplicações entre espaços DFS possuem imagem fechada. O primeiro resultado que apresentamos nessa direção é o lema a seguir – um resultado não publicado de P. D. Cordaro, apresentado aqui em forma dual – que, juntamente com suas consequências, será crucial nas aplicações que faremos na próxima seção.

Lema 1.6. *Sejam* F, G *espaços DFS e sejam* $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *sequencias injetivas compactas de espaços de Banach tais que*[2]

$$F = \varinjlim F_j, \tag{1.2}$$

$$G = \varinjlim G_k. \tag{1.3}$$

Suponha ainda que $T \in L(F, G)$ *é* injetora. *As seguintes propriedades são equivalentes.*

1. *T possui imagem fechada.*

2. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $j \in \mathbb{N}$ *com a seguinte propriedade: se* $B \subset F$ *é tal que* $T(B)$ *está contido em* G_k *e é limitado lá então* B *está contido em* F_j *e é limitado lá.*

3. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $j \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $u \in F$ *tem-se*

$$Tu \in G_k \Rightarrow u \in F_j. \tag{1.4}$$

Demonstração. (*1.* ⇒ *2.*) Se $\mathrm{ran}(T)$ for fechada em G então de acordo com [19, Theorem 7'] teremos, para a topologia de subespaço,

$$\mathrm{ran}(T) = \varinjlim(\mathrm{ran}(T) \cap G_k).$$

Desse modo, $\mathrm{ran}(T)$ é um espaço DFS e a aplicação $T : F \to \mathrm{ran}(T)$ é contínua e bijetora, e logo um isomorfismo pelo Teorema da Aplicação Aberta de De Wilde: a aplicação inversa $T^{-1} : \mathrm{ran}(T) \to F$ é contínua.

Fixemos $k \in \mathbb{N}$. Uma vez que $\mathrm{ran}(T) \cap G_k$ é fechado em G_k, e portanto um espaço de Banach quando munido da norma herdada por aquele espaço, existe $U \subset \mathrm{ran}(T) \cap G_k$ vizinhança limitada da origem (a saber, a bola unitária), que logo é limitada em $\mathrm{ran}(T)$ já que a inclusão $\mathrm{ran}(T) \cap G_k \hookrightarrow \mathrm{ran}(T)$ é contínua. Este argumento, por sua vez, implica que $T^{-1}(U)$ é limitada em F.

[2]Tais sequências sempre existem [19, Lemma 2].

Note no entanto que [19, Lemma 3] garante que o limite injetivo em (1.2) é *regular*, no seguinte sentido: se $B \subset F$ for um conjunto limitado então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que B está contido e é limitado em F_j. Assim, sabemos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-1}(U) \subset F_j$ e, por linearidade, T^{-1} mapeia $\operatorname{ran}(T) \cap G_k$ em F_j, sendo que essa ação é contínua – o que segue facilmente do Teorema do Gráfico Fechado (o clássico, para espaços de Banach). Em particular, $T^{-1} : \operatorname{ran}(T) \cap G_k \to F_j$ mapeia conjuntos limitados em conjuntos limitados, o que prova *2.*

(*2.* $\Rightarrow$ *1.*) Do Corolário 1.5 é suficiente mostrarmos que $\operatorname{ran}(T)$ é sequencialmente fechada em G. De fato, tomemos uma sequência $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset F$ e $v \in G$ tais que $Tu_\nu \to v$ em G. Posto que sequências convergentes são limitadas e que o limite em (1.3) é regular, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{Tu_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ está contido e é limitado em G_k, de modo que por hipótese há um $j \in \mathbb{N}$ tal que $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset F_j$ e é limitada lá, e portanto em F. Contudo F é de Montel, de modo que $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge em F: seu limite $u \in F$ necessariamente satisfaz $Tu = v$, demonstrando que $v \in \operatorname{ran}(T)$.

(*2.* $\Rightarrow$ *3.*) Isto é claro, uma vez que todo conjunto unitário é limitado.

(*3.* $\Rightarrow$ *2.*) Fixemos $k \in \mathbb{N}$ e tomemos $j \in \mathbb{N}$ tal que (1.4) vale para todo $u \in F$: provaremos que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{F_j} \leq C \|Tu\|_{G_k} \tag{1.5}$$

para todo $u \in F$ tal que $Tu \in G_k$, o que implica *2.* Definimos

$$S \doteq \{u \in F_{j+1} \; ; \; Tu \in G_k\}$$

munido da norma

$$\|u\|_S \doteq \|u\|_{F_{j+1}} + \|Tu\|_{G_k}$$

que torna S um espaço de Banach. A propriedade (1.4) implica que $S \subset F_j$, sendo que a inclusão é uma aplicação contínua (novamente, isto pode ser checado via Teorema do Gráfico Fechado), o que por sua vez assegura a existência de uma constante $C_1 > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \|u\|_{F_j} &\leq C_1 \|u\|_S \\ &= C_1 \left(\|u\|_{F_{j+1}} + \|Tu\|_{G_k} \right) \end{aligned}$$

para todo $u \in S$.

Suponhamos por absurdo que (1.5) não vale: podemos construir uma sequência $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset F$ com $\{Tu_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset G_k$ de tal modo que

$$\|u_\nu\|_{F_j} > \nu \|Tu_\nu\|_{G_k}$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Normalizando, podemos supor sem perda de generalidade que $\|u_\nu\|_{F_j} = 1$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$, e assim $Tu_\nu \to 0$ em G_k. Da compacidade da aplicação de cadeia $F_j \hookrightarrow F_{j+1}$ deduzimos que $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{u_{\nu'}\}_{\nu'\in\mathbb{N}}$ que converge em F_{j+1}, e para cujo limite $u \in F$ tem-se necessariamente $Tu = 0$, donde $u = 0$ pois T é injetora. Por outro lado

$$\begin{aligned} 1 &= \|u_{\nu'}\|_{F_j} \\ &\leq C_1 \left(\|u_{\nu'}\|_{F_{j+1}} + \|Tu_{\nu'}\|_{G_k} \right) \\ &\to 0, \end{aligned}$$

nos conduz a uma contradição. □

Nos dedicaremos agora a refinar o resultado anterior.

Proposição 1.7. *Fixemos as mesmas hipóteses e notações do Lema 1.6, com exceção de que agora não suporemos que $T \in L(F, G)$ seja injetora. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *T possui imagem fechada.*
2. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que para todo $u \in F$ tem-se*

$$Tu \in G_k \Rightarrow \exists v \in F_j \text{ tal que } u - v \in \ker T. \tag{1.6}$$

Demonstração. Como $\ker(T)$ é subespaço fechado de F sabemos, conforme resultados em [19], que

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \varinjlim \ker(T) \cap F_j \\ F/\ker(T) &= \varinjlim F_j/(\ker(T) \cap F_j) \end{aligned}$$

são espaços DFS. A aplicação induzida por T no quociente, isto é,

$$\begin{array}{cccc} \hat{T} & : & F/\ker(T) & \longrightarrow & G \\ & & [u] & \longmapsto & Tu \end{array}$$

é contínua e injetora: pelo Lema 1.6, $\operatorname{ran}(T) = \operatorname{ran}(\hat{T})$ é fechada se e só se para todo $k \in \mathbb{N}$ houver $j \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $[u] \in F/\ker(T)$ tem-se

$$Tu \in G_k \Rightarrow [u] \in F_j/(\ker(T) \cap F_j).$$

Mas isto é precisamente o que (1.6) significa. □

Lema 1.8. *Um espaço DFS não pode ser metrizado, e um espaço FS não pode ser um espaço de Banach, exceto por aqueles de dimensão finita.*

Demonstração. Para a primeira afirmação, recordemos que o dual forte de um espaço DFS é FS, logo metrizável. Por outro lado, um espaço metrizável cujo dual forte é também metrizável deve ser necessariamente normável segundo [21, p. 394]. Contudo, espaços DFS são de Montel, os quais só são normáveis quando têm dimensão finita.

Sobre a segunda afirmação, um espaço FS que é de Banach teria um dual forte que é simultaneamente DFS e de Banach, logo de dimensão finita pela discussão anterior. □

Lema 1.9. *Sejam F um espaço DFS e $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência injetiva compacta de espaços de Banach cujo limite injetivo é F. Um subespaço fechado $S \subset F$ tem dimensão finita se e somente se existir $j \in \mathbb{N}$ tal que $S \subset F_j$.*

Demonstração. Se existir um tal $j \in \mathbb{N}$ então a continuidade da inclusão canônica $F_j \hookrightarrow F$ implica que S é também fechado como subespaço de F_j. Com a topologia herdada de F, S é um espaço DFS; mas S também herda de F_j uma topologia de espaço de Banach, e pelo Teorema da Aplicação Aberta de De Wilde estas topologias coincidem. Pelo lema anterior, $\dim S < \infty$.

A recíproca é ainda mais fácil, pois se S tem dimensão finita basta escolher uma base para S: como a sequência $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eventualmente cresce – a menos, é claro, se F já tiver dimensão finita para começar –, um de seus passos deve conter todos os elementos da tal base, e portanto a totalidade de S. □

Apresentamos a seguir a forma final do Lema 1.6.

Corolário 1.10. *Sejam F, G espaços DFS e $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sequências injetivas compactas de espaços de Banach cujos limites injetivos são F e G, respectivamente. Dada $T \in L(F, G)$ as seguintes propriedades são equivalentes.*

1. $\operatorname{ran}(T)$ *é fechada em G e* $\ker(T)$ *tem dimensão finita.*

2. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que (1.4) vale para todo $u \in F$.*

Demonstração. (*1.* $\Rightarrow$ *2.*) Se $\ker(T)$ tem dimensão finita temos, conforme o Lema 1.9, a existência de um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\ker(T) \subset F_{j_0}$. Mas a Proposição 1.7 garante que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que para todo $u \in F$ tem-se

$$\begin{aligned} Tu \in G_k &\Rightarrow \exists v \in F_j \text{ tal que } u - v \in \ker T \\ &\Rightarrow u \in F_{\max\{j, j_0\}}. \end{aligned}$$

(*2.* $\Rightarrow$ *1.*) É evidente que (1.4) implica (1.6), de modo que $\operatorname{ran}(T)$ é fechada pela Proposição 1.7. Ademais, se $u \in \ker(T)$ então $Tu = 0 \in G_1$, de modo que se aplicarmos a hipótese *2.* com $k = 1$ encontraremos um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u \in F_{j_0}$ para todo $u \in \ker(T)$, ou seja, $\ker(T) \subset F_{j_0}$. A conclusão segue então do Lema 1.9. □

Observação 1.11. Em vista de [19, Lemma 2], os resultados apresentados na Proposição 1.7 e no Corolário 1.10 continuam válidos ainda que suponhamos que os espaços nas sequências injetivas compactas em questão sejam apenas localmente convexos (não necessariamente espaços de Banach). Contudo, ainda não encontramos aplicações relevantes deste fato.

1.2 Um modelo abstrato

Nesta seção, introduzimos espaços DFS

$$E \doteq \varinjlim E_j$$
$$F \doteq \varinjlim F_j$$
$$G \doteq \varinjlim G_j$$

juntamente com respectivas sequências injetivas compactas de espaços de Banach acima. Suporemos a seguinte condição especial sobre estes espaços:

$$F \hookrightarrow E_0 \text{ continuamente.} \tag{1.7}$$

A condição (1.7) implica, entre outras coisas, que a inclusão $F \hookrightarrow E$ é compacta.

Teorema 1.12. *Seja $T \in L(F, G)$. As seguintes propriedades são equivalentes.*

1. *O gráfico de T*

$$\Gamma \doteq \{(u, Tu) \ ; \ u \in F\}$$

é fechado quando o consideramos como um subespaço de $E \times G$.

2. $\operatorname{ran}(T)$ *é fechada em G e* $\ker(T)$ *tem dimensão finita.*

A fim de provar o Teorema 1.12 precisaremos de mais um resultado preliminar.

Lema 1.13. *Nas condições acima, temos*

$$E \times G \cong \varinjlim (E_j \times G_j) \tag{1.8}$$

como espaços vetoriais topológicos de modo natural. Assim, $E \times G$ é um espaço DFS.

Demonstração. É claro que ambos os espaços em (1.8) são isomorfos como espaços vetoriais, e que as aplicações de cadeia $E_j \times G_j \hookrightarrow E_k \times G_k$ (onde $j < k$) são compactas, de modo que o limite injetivo no lado direito de (1.8) é, por definição, um espaço DFS. Resta provar que a topologia produto e a topologia limite injetivo em (1.8) coincidem. Apresentaremos duas demonstrações deste fato, uma mais natural (em algum sentido, uma vez que usa apenas fatos conhecidos de Análise Funcional), e outra mais breve que usa resultados específicos da teoria de espaços DFS.

A demonstração natural. Já que temos inclusões contínuas $E_j \times G_j \hookrightarrow E \times G$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e a topologia limite injetivo é a mais fina com esta propriedade, temos continuidade da aplicação identidade

$$\varinjlim (E_j \times G_j) \hookrightarrow E \times G.$$

Como contudo $E \times G$ é ultrabornológico (pois é produto cartesiano de uma quantidade finita espaços deste tipo) e $\varinjlim(E_j \times G_j)$ é claramente um espaço "webbed" (veja [22, p. 63]), o Teorema da Aplicação Aberta de De Wilde se aplica, garantindo que a aplicação acima é de fato um isomorfismo topológico.

Outra demonstração. Um vez que todo espaço DFS é também um espaço DFS*, [19, Theorem 9] nos dá imediatamente o isomorfismo topológico (1.8). Em particular, a topologia produto e a topologia limite injetivo coincidem. $\square$

Demonstração do Teorema 1.12. Considere a aplicação linear contínua

$$\begin{array}{rccc} \lambda & : & F & \longrightarrow & E \times G \\ & & u & \longmapsto & (u, Tu) \end{array}$$

a qual é injetora e cuja imagem é precisamente Γ. Posto que $E \times G$ é, pelo Lema 1.13, um espaço DFS, o Lema 1.6 nos garante que Γ é fechado em $E \times G$ se e somente se para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda u \in E_k \times G_k \Rightarrow u \in F_j$$

para todo $u \in F$. Ou seja, sempre que

- $u \in F$,
- $u \in E_k$ e
- $Tu \in G_k$

teremos $u \in F_j$. Como $F \hookrightarrow E_0$, o segundo ponto acima é redundante: logo, para todo $k \in \mathbb{N}$ há um $j \in \mathbb{N}$ tal que (1.4) vale para todo $u \in F$. O Corolário 1.10 então encerra a demonstração. $\square$

Capítulo 2

Operadores abstratos em variedades

Neste capítulo desenvolvemos as primeiras aplicações dos resultados de Análise Funcional desenvolvidos no capítulo anterior a uma classe de operadores abstratos que engloba, entre outros, operadores (pseudo-)diferenciais com coeficientes Gevrey em variedades compactas e operadores diferenciais com coeficientes Gevrey em variedades não-compactas.

Discutimos inicialmente o caso, mais simples, da teoria global em variedades compactas: neste ambiente, pudemos obter resultados mais precisos e completos, que também servem de protótipo para o estudo, mais delicado, do caso não-compacto. Em seguida, tornamos nossa atenção ao contexto de variedades não-compactas, no qual torna-se necessário fazer uma distinção entre certos objetos (funções, funções generalizadas, seções de fibrados, etc.) com suporte compacto e sem suporte compacto, o que cria alguns empecilhos técnicos.

O maior desses empecilhos reside no entendimento do espaço das funções Gevrey globalmente definidas em uma variedade não-compacta (e de seu respectivo dual, o espaço das ultradistribuições de suporte compacto): munido de sua topologia natural, este espaço não parece desfrutar de boas propriedades (especificamente pode, a princípio, não ser ultrabornológico). Isto torna certas questões extremamente delicadas: o emprego de teoremas de Aplicação Aberta e de Gráfico Fechado, e mais ainda a obtenção de critérios para determinar quando certas aplicações lineares contínuas possuem imagem fechada. Tais questões tornaram proibitiva uma abordagem geral e abstrata da versão não-compacta da resolubilidade G^σ (Definição 2.8), de modo que nesta parte do trabalho restringimo-nos ao estudo de resolubilidade em espaços de ultradistribuições.

2.1 Espaços de Gevrey em variedades

Seja X uma variedade (Hausdorff, paracompacta) que suporemos real-analítica por simplicidade. Para cada $\sigma > 1$, o funtor que associa a cada aberto $\Omega \subset X$ o espaço $G^\sigma(\Omega)$ das funções G^σ a valores complexos em Ω (que são suaves) é um feixe de álgebras sobre X. Denotaremos, ainda, por $G^\sigma_c(\Omega)$ o espaço das funções em $G^\sigma(\Omega)$ com suporte compacto e, para cada compacto $K \subset X$,

$$G^\sigma_c(K) \doteq \{f \in G^\sigma_c(X) \ ; \ \operatorname{supp} f \subset K\}$$

o qual pode ser interpretado como um subespaço de $G_c^\sigma(\Omega)$ se $\Omega \subset X$ for qualquer aberto que contém K. Neste sentido, temos claramente

$$G_c^\sigma(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega} G_c^\sigma(K).$$

Vamos agora introduzir topologias nestes espaços. A fim de simplificar certas construções, munimos X de uma métrica riemanniana real-analítica (cuja existência decorre de um famoso resultado devido a H. Grauert [16]), cujo operador de Laplace-Beltrami associado denotaremos por Δ, o qual é um operador elíptico de segunda ordem com coeficientes reais-analíticos em X.

Esta mesma métrica riemanniana também induz canonicamente uma densidade positiva em X (conforme [23, Lemma 14.33]) que denotaremos por $|\mathrm{d}V|$. Pelo Teorema de Representação de Riesz [15, §7.2], o funcional linear positivo

$$f \in C_c(X) \mapsto \int_X f \ |\mathrm{d}V|$$

estende-se, de maneira única, a uma medida de Radon em X que, por abuso de notação, também denotaremos indistintamente por $|\mathrm{d}V|$: os espaços de funções mensuráveis L^2 que mencionaremos a seguir dizem respeito a esta medida. Note ainda, pelo mesmo Teorema de Riesz e pela definição de densidade positiva, que a medida de qualquer aberto não-vazio é necessariamente não-nula.

A partir de resultados em [20] e [5], sabe-se que uma função $f \in C^\infty(\Omega)$ pertence a $G^\sigma(\Omega)$ se e somente se para cada compacto $K \subset \Omega$ existirem constantes $C > 0$ e $h > 0$ tais que

$$\|\Delta^k f\|_{L^2(K)} \leq C h^k (k!)^{2\sigma}, \ \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Definimos, então, para cada compacto $K \subset X$ e cada $h > 0$ o espaço

$$G_c^{\sigma,h}(K) \doteq \{f \in G_c^\sigma(K) \ ; \ \|f\|_{K,\sigma,h} < \infty\}$$

onde

$$\|f\|_{K,\sigma,h} \doteq \sup_k h^{-k} (k!)^{-2\sigma} \|\Delta^k f\|_{L^2(K)}.$$

Prova-se que $\|\cdot\|_{K,\sigma,h}$ é uma norma sobre $G_c^{\sigma,h}(K)$, a qual o torna um espaço de Banach. Ademais:

Lema 2.1. *Sejam $K \subset X$ um compacto e $h > 0$. Temos:*

1. *A inclusão $G_c^{\sigma,h}(K) \hookrightarrow C^\infty(X)$ é uma aplicação contínua.*

2. *Se $h < h_+$ então a inclusão $G_c^{\sigma,h}(K) \hookrightarrow G_c^{\sigma,h_+}(K)$ é uma aplicação contínua e compacta.*

Demonstração. A fim de provar a primeira afirmação, considere

$$C_c^\infty(K) \doteq \{f \in C^\infty(X) \ ; \ \operatorname{supp} f \subset K\}$$

que é claramente um subespaço fechado de $C^\infty(X)$ e, portanto, um espaço de Fréchet quando munido da topologia de subespaço. Note que, com esta topologia, temos uma inclusão contínua $C_c^\infty(K) \hookrightarrow L^2(K)$, uma vez que K é compacto. Note também que

$$\|f\|_{L^2(K)} \leq \|f\|_{K,\sigma,h}, \ \forall f \in G_c^{\sigma,h}(K)$$

ou seja, a inclusão $G_c^{\sigma,h}(K) \hookrightarrow L^2(K)$ também é contínua.

Tome uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G_c^{\sigma,h}(K)$ tal que existem $f \in G_c^{\sigma,h}(K)$ e $g \in C_c^\infty(K)$ tais que

- $f_n \to f$ em $G_c^{\sigma,h}(K)$ e
- $f_n \to g$ em $C_c^\infty(K)$.

Em vista das considerações anteriores, ambas as convergências acima também ocorrem em $L^2(K)$, provando assim que $\|f - g\|_{L^2(K)} = 0$. Isto, por sua vez, garante que $f = g$: de fato, como $f, g \in C_c(K)$ é claro que $f(x) = g(x)$ se $x \in K$ não for um ponto interior de K. Por outro lado, se supusermos que $|f - g| > \epsilon > 0$ em algum aberto $U \subset K$ teremos

$$\epsilon^2 \int_U |\mathrm{d}V| < \int_U |f - g|^2 |\mathrm{d}V| \leq \|f - g\|_{L^2(K)}^2 = 0$$

o que nos conduz a uma contradição pois, conforme ora mencionado, abertos não-vazios possuem medida estritamente positiva em relação a $|\mathrm{d}V|$.

O argumento acima mostra que a aplicação de inclusão $G_c^{\sigma,h}(K) \hookrightarrow C_c^\infty(K)$ tem gráfico fechado: pelo Teorema do Gráfico Fechado de De Wilde, esta aplicação é contínua. Em particular, também o é a inclusão $G_c^{\sigma,h}(K) \hookrightarrow C^\infty(X)$.

Sobre a segunda afirmação, a questão da continuidade é imediata, de modo que focamos nossa atenção à questão da compacidade. Tome $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G_c^{\sigma,h}(K)$ uma sequência limitada, isto é, tal que exista $C > 0$ satisfazendo

$$\|\Delta^k f_n\|_{L^2(K)} \leq C h^k (k!)^{2\sigma}, \ \forall k \in \mathbb{Z}_+, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Já provamos que a inclusão $G_c^{\sigma,h}(K) \hookrightarrow C^\infty(X)$ é contínua, de modo que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é também uma sequência limitada em $C^\infty(X)$. Como este último é um espaço de Montel, tal que sequência admite uma subsequência $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge em $C^\infty(X)$: denotemos por f seu limite. É evidente que $f \in C_c^\infty(K)$, e como para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se $\|\Delta^k f_{n_j}\|_{L^2(K)} \to \|\Delta^k f\|_{L^2(K)}$, quando $j \to \infty$, concluímos que

$$\|\Delta^k f\|_{L^2(K)} \leq C h^k (k!)^{2\sigma}, \ \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

de modo que, em particular, $f \in G_c^{\sigma,h}(K)$.

Provaremos que, mais que isso, $f_{n_j} \to f$ em $G_c^{\sigma,h+}(K)$ quando $j \to \infty$. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário e tome $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(h/h_+)^{k_0} < \epsilon/2C$. Defina ainda

$$C_0 \doteq \max\left\{(h_+)^{-k}(k!)^{-2\sigma}\ ;\ 0 \leq k \leq k_0\right\}.$$

Como $f_{n_j} \to f$ em $C^\infty(X)$ temos que $\|\Delta^k f_{n_j} - \Delta^k f\|_{L^2(K)} \to 0$ para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Podemos então escolher $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq j_0 \Rightarrow \|\Delta^k f_{n_j} - \Delta^k f\|_{L^2(K)} < \frac{\epsilon}{C_0},\ \forall k \in \{0, \dots, k_0\}.$$

Assim, para $j \geq j_0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ temos que:

- se $0 \leq k \leq k_0$ então

$$(h_+)^{-k}(k!)^{-2\sigma}\|\Delta^k f_{n_j} - \Delta^k f\|_{L^2(K)} \leq C_0\|\Delta^k f_{n_j} - \Delta^k f\|_{L^2(K)} < \epsilon;$$

  e

- se $k > k_0$ então

$$\begin{aligned}(h_+)^{-k}(k!)^{-2\sigma}\|\Delta^k f_{n_j} - \Delta^k f\|_{L^2(K)} &= h^{-k}(k!)^{-2\sigma}\|\Delta^k f_{n_j} - \Delta^k f\|_{L^2(K)}\left(\frac{h}{h_+}\right)^k \\ &\leq h^{-k}(k!)^{-2\sigma}\left(\|\Delta^k f_{n_j}\|_{L^2(K)} + \|\Delta^k f\|_{L^2(K)}\right)\left(\frac{h}{h_+}\right)^k \\ &< 2C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Maximizando o lado esquerdo com relação a $k \in \mathbb{Z}_+$, concluímos que

$$j \geq j_0 \Rightarrow \|f_{n_j} - f\|_{K,\sigma,h_+} < \epsilon$$

como queríamos. $\square$

Uma vez que a reunião da família $\{G_c^{\sigma,h}(K)\}_{h>0}$ é precisamente $G_c^\sigma(K)$, podemos munir este último espaço da topologia limite injetivo, isto é,

$$G_c^\sigma(K) \doteq \varinjlim_{h>0} G_c^{\sigma,h}(K)$$

o que garante, após passagem a uma subsequência injetiva (não importando qual), que tal topologia torna $G_c^\sigma(K)$ um espaço DFS. São ainda satisfeitas as seguintes propriedades, de fácil verificação, que serão particularmente importantes para nós no que se segue.

1. Se $\sigma_+ > \sigma > 1$ então

$$G_c^\sigma(K) \hookrightarrow G_c^{\sigma_+,1}(K) \tag{2.1}$$

continuamente, para cada $K \subset X$ compacto.

2. Se $K \subset K_+ \subset X$ são compactos então

$$G_c^{\sigma,h}(K) \hookrightarrow G_c^{\sigma,h}(K_+) \tag{2.2}$$

continuamente, para cada $h > 0$.

Se $\Omega \subset X$ for um subconjunto aberto, munimos também $G_c^\sigma(\Omega)$ da topologia limite injetivo

$$G_c^\sigma(\Omega) \doteq \varinjlim_{K \subset \Omega} G_c^\sigma(K)$$

o qual também é um espaço DFS pois, de acordo com [19], esta classe de espaços localmente convexos é fechada por limites injetivos.

Observação 2.2. De fato, é fácil verificar que $\{G_c^{\sigma,h}(K)\}_{K\subset\Omega, h>0}$ é uma família injetiva compacta de espaços de Banach cujo limite injetivo é precisamente $G_c^\sigma(\Omega)$. Contudo, a família $\{G_c^\sigma(K)\}_{K\subset\Omega}$ *não é* compacta. Isto ficará mais claro no decorrer do presente capítulo (veja o Lema 2.4).

Por fim, se $Y \subset X$ for um subconjunto aberto ou compacto definimos

$$\mathcal{D}'_\sigma(Y) \doteq G_c^\sigma(Y)'$$

o qual é um espaço FS, independentemente da natureza de Y.

Para certas aplicações que temos em mente, particularmente no Capítulo 4, será necessário reproduzirmos as construções acima para seções de fibrados vetoriais mais gerais. Para tanto, considere Λ um fibrado vetorial real-analítico sobre X. Denotamos por $G^\sigma(\Omega;\Lambda)$ o espaço das seções G^σ de Λ sobre o aberto $\Omega \subset X$: temos que $\Omega \mapsto G^\sigma(\Omega;\Lambda)$ determina um feixe de espaços vetoriais sobre X, que também é um feixe de módulos sobre o feixe das funções G^σ sobre X. Por $G_c^\sigma(\Omega;\Lambda)$ denotamos o espaço das seções em $G^\sigma(\Omega;\Lambda)$ com suporte compacto, e se $K \subset X$ é compacto definimos

$$G_c^\sigma(K;\Lambda) \doteq \{f \in G_c^\sigma(X;\Lambda) \ ; \ \operatorname{supp} f \subset K\}.$$

Mais uma vez, $G_c^\sigma(\Omega;\Lambda)$ é exatamente a reunião dos espaços $G_c^\sigma(K;\Lambda)$ com $K \subset \Omega$ compacto.

Desta vez, a fim de introduzir as topologias que precisaremos nestes espaços, por uma questão de simplicidade de exposição trabalharemos exclusivamente com fibrados complexos triviais, ou seja, suporemos que $\Lambda = X \times \mathbb{C}^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Tal simplificação não altera a qualidade de nossos resultados finais, e não impõe nenhuma restrição às questões puramente locais. Neste caso, podemos interpretar, via trivializações, as seções de Λ como n-uplas de seções do fibrado de linha trivial $X \times \mathbb{C}$, isto é, n-uplas de funções. Sob tais identificações temos, por exemplo, se $\Omega \subset X$ for aberto ou se $K \subset X$ for compacto,

$$G_c^\sigma(\Omega;\Lambda) \cong G_c^\sigma(\Omega)^n$$
$$G_c^\sigma(K;\Lambda) \cong G_c^\sigma(K)^n$$

as quais induzem naturalmente topologias de espaços DFS nos respectivos lados esquerdos segundo o Lema 1.13, o qual garante, ainda, que

$$G_c^\sigma(K;\Lambda) = \varinjlim_{h>0} G_c^{\sigma,h}(K;\Lambda) \tag{2.3}$$

onde $\{G_c^{\sigma,h}(K;\Lambda)\}_{h>0}$ é a família injetiva compacta de espaços de Banach definida por

$$G_c^{\sigma,h}(K;\Lambda) \doteq G_c^{\sigma,h}(K)^n,\ \ h > 0,$$

e que

$$G_c^\sigma(\Omega;\Lambda) = \varinjlim_{K\subset\Omega} G_c^\sigma(K;\Lambda).$$

Dentro deste contexto, uma observação análoga à Observação 2.2 vale, assim como as versões correspondentes das propriedades (2.1) e (2.2).

Como antes, se $Y \subset X$ for um subconjunto aberto ou compacto, definimos

$$\mathcal{D}'_\sigma(Y;\Lambda) \doteq G_c^\sigma(Y;\Lambda')'$$

onde Λ' denota o fibrado dual[1] de Λ; este é um espaço FS, independentemente do que Y possa ser.

Observação 2.3. Deste ponto em diante, adotaremos uma notação mais abstrata e geral naquilo que se refere ao fibrado vetorial Λ, uma vez que sua estrutura de fibrado trivial não será mais necessária: ao menos, não a utilizaremos diretamente, e faremos apenas menção às propriedades que estabelecemos acima em seus espaços de seções (generalizadas) Gevrey.

A medida $|\mathrm{d}V|$ em X, introduzida acima, induz ainda uma inclusão contínua

$$\begin{array}{ccc} C(X;\Lambda) & \hookrightarrow & \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda) \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$

dada por

$$\langle T_f, \phi\rangle \doteq \int_X \langle\!\langle f(x), \phi(x)\rangle\!\rangle_x\ |\mathrm{d}V(x)|$$

[1] Isto é, aquele fibrado cuja fibra em $x \in X$ é precisamente o espaço dual Λ'_x de Λ_x.

para todo $\phi \in G^\sigma_c(X;\Lambda')$, onde

$$\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle_x : \Lambda_x \times \Lambda'_x \to \mathbb{C}$$

denota o pareamento de dualidade entre vetores em Λ_x e covetores em Λ'_x para cada $x \in X$. Identificações análogas valem para subconjuntos abertos e compactos de X, e há ainda suas versões com suporte compacto.

Lema 2.4. *Sejam $\Omega \subset X$ um aberto e $H, K \subset X$ compactos tais que $H \subset K \subset \Omega$. Se Λ for um fibrado vetorial sobre X então as inclusões*

$$G^\sigma_c(H;\Lambda) \hookrightarrow G^\sigma_c(K;\Lambda) \hookrightarrow G^\sigma_c(\Omega;\Lambda)$$

são aplicações contínuas e suas imagens são fechadas.

Demonstração. É imediato verificar que ambas as inclusões acima são contínuas e que suas imagens são sequencialmente fechadas, e portanto fechadas graças ao Corolário 1.5. □

2.2 Uma classe de operadores abstratos

Sejam Λ_1, Λ_2 dois fibrados vetoriais sobre X como na Seção 2.1, e suponhamos que

$$P : \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2) \tag{2.4}$$

é uma aplicação linear e contínua, que mapeia $G^\sigma_c(X;\Lambda_1)$ em $G^\sigma_c(X;\Lambda_2)$, sendo esta aplicação contínua pelo Teorema do Gráfico Fechado de De Wilde. Suporemos também que P é *local*, no seguinte sentido: para cada $Y \subset \Omega$ aberto ou compacto temos novas ações contínuas

$$P : \begin{cases} \mathcal{D}'_\sigma(Y;\Lambda_1) & \to & \mathcal{D}'_\sigma(Y;\Lambda_2) \\ G^\sigma_c(Y;\Lambda_1) & \to & G^\sigma_c(Y;\Lambda_2) \end{cases}$$

que se relacionam de maneira natural com as aplicações de restrição e de inclusão. Por transposição temos

$${}^tP : \begin{cases} G^\sigma_c(Y;\Lambda'_2) & \to & G^\sigma_c(Y;\Lambda'_1) \\ \mathcal{D}'_\sigma(Y;\Lambda'_2) & \to & \mathcal{D}'_\sigma(Y;\Lambda'_1) \end{cases}$$

ou seja, ${}^tP$ é um novo operador que satisfaz as mesmas propriedades que impusemos para P, exceto que agora age entre os fibrados Λ'_2 e Λ'_1. Em particular, ${}^tP$ também é local. Tal classe de operadores generaliza, por exemplo, operadores diferenciais com coeficientes Gevrey de ordem σ, além de certos operadores de ordem infinita (às vezes denominados *ultradiferenciais* na literatura) que não discutiremos aqui.

Observação 2.5. Na próxima seção, em que trataremos exclusivamente do caso em que X é uma variedade compacta, não suporemos que P é local.

Nosso objetivo é investigar propriedades dos operadores P e ${}^tP$ relacionadas a sua resolubilidade e regularidade. Começamos provando dois lemas fundamentais.

Lema 2.6. *Sejam $K \subset X$ um subconjunto compacto e $U, V \subset X$ abertos tais que $V \subset K \subset U$. Se $P : \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$ é sobrejetor então para cada $f \in \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2)$ existe $u \in \mathcal{D}'_\sigma(V;\Lambda_1)$ tal que $Pu = f|_V$.*

Demonstração. Recordemos que $G^\sigma_c(U;\Lambda'_2)$ pode ser expresso como limite injetivo dos espaços $G^\sigma_c(H;\Lambda'_2)$, com $H \subset U$ compacto, e portanto temos a inclusão contínua (que é a aplicação de cadeia correspondente)

$$\alpha : G^\sigma_c(K;\Lambda'_2) \hookrightarrow G^\sigma_c(U;\Lambda'_2)$$

cuja transposta denota-se por ${}^t\alpha : \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$. Invocando ainda a propriedade universal dos limites injetivos verifica-se que a inclusão

$$\beta : G^\sigma_c(V;\Lambda'_1) \hookrightarrow G^\sigma_c(K;\Lambda'_1)$$

é contínua: isto é claro uma vez que para cada compacto $H \subset V$ temos uma inclusão contínua $G^\sigma_c(H;\Lambda'_1) \hookrightarrow G^\sigma_c(K;\Lambda'_1)$ pelo Lema 2.4, e vale

$$G^\sigma_c(V;\Lambda'_1) = \varinjlim_{H\subset V} G^\sigma_c(H;\Lambda'_1).$$

Mais uma vez, denotamos por ${}^t\beta : \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(V;\Lambda_1)$ a transposta de β.

Tomando agora $f \in \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2)$ temos ${}^t\alpha f \in \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$. Da hipótese de sobrejetividade da aplicação $P : \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$ encontramos $v \in \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1)$ tal que $Pv = {}^t\alpha f$: afirmamos que $u \doteq {}^t\beta v \in \mathcal{D}'_\sigma(V;\Lambda_1)$ resolve

$$Pu = f|_V = {}^t\theta f$$

onde

$$\theta : G^\sigma_c(V;\Lambda'_2) \hookrightarrow G^\sigma_c(U;\Lambda'_2)$$

é a aplicação de inclusão correspondente. A fim de provar a igualdade acima, basta avaliarmos ambos os lados em uma seção teste $\phi \in G^\sigma_c(V;\Lambda'_2)$ arbitrária. Das definições temos, por um lado, que

$$\begin{aligned}\langle Pu, \phi\rangle &= \langle u, {}^tP\phi\rangle \\ &= \langle {}^t\beta v, {}^tP\phi\rangle \\ &= \langle v, \beta\, {}^tP\phi\rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado, introduzindo a inclusão (também contínua pelo Lema 2.4)

$$\delta : G_c^\sigma(V;\Lambda_2') \hookrightarrow G_c^\sigma(K;\Lambda_2')$$

temos que $\theta = \alpha\delta$, donde constatamos que

$$\begin{aligned} \langle {}^t\theta f, \phi\rangle &= \langle f, \theta\phi\rangle \\ &= \langle f, \alpha\delta\phi\rangle \\ &= \langle {}^t\alpha f, \delta\phi\rangle \\ &= \langle Pv, \delta\phi\rangle \\ &= \langle v, {}^tP\delta\phi\rangle. \end{aligned}$$

Contudo, a localidade de P garante que ${}^tP \circ \delta = \beta \circ {}^tP$; isto encerra a prova. $\square$

Lema 2.7. *Sejam $K \subset X$ um subconjunto compacto e $U, V \subset X$ abertos tais que $K \subset V \subset U$. Se para cada $f \in \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2)$ existir $u \in \mathcal{D}'_\sigma(V;\Lambda_1)$ tal que $Pu = f|_V$ então $P : \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$ é aplicação sobrejetora.*

Demonstração. Do Lema 2.4 segue que a aplicação de inclusão

$$\alpha : G_c^\sigma(K;\Lambda_2') \hookrightarrow G_c^\sigma(U;\Lambda_2')$$

tem imagem fechada, de modo que sua transposta ${}^t\alpha : \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$ é sobrejetora. Seja ainda

$$\beta : G_c^\sigma(K;\Lambda_1') \hookrightarrow G_c^\sigma(V;\Lambda_1')$$

a aplicação de inclusão, cuja transposta denotamos por ${}^t\beta : \mathcal{D}'_\sigma(V;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1)$.

Assim, dada $g \in \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$ existe $f \in \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2)$ tal que ${}^t\alpha f = g$. As hipóteses então garantem a existência de $u \in \mathcal{D}'_\sigma(V;\Lambda_1)$ resolvendo $Pu = f|_V = {}^t\theta f$, onde

$$\theta : G_c^\sigma(V;\Lambda_2') \hookrightarrow G_c^\sigma(U;\Lambda_2')$$

denota a aplicação de inclusão. Afirmo que $v \doteq {}^t\beta u \in \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1)$ satisfaz

$$Pv = g.$$

Para prová-lo, tomemos $\phi \in G_c^\sigma(K; \Lambda_2')$: vale

$$\begin{aligned}\langle Pv, \phi \rangle &= \langle v, {}^t P \phi \rangle \\ &= \langle {}^t \beta u, {}^t P \phi \rangle \\ &= \langle u, \beta\, {}^t P \phi \rangle\end{aligned}$$

mas, por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned}\langle g, \phi \rangle &= \langle {}^t \alpha f, \phi \rangle \\ &= \langle f, \alpha \phi \rangle.\end{aligned}$$

Novamente introduzimos a aplicação de inclusão

$$\delta : G_c^\sigma(K; \Lambda_2') \hookrightarrow G_c^\sigma(V; \Lambda_2')$$

que claramente satisfaz $\alpha = \theta\delta$, e logo

$$\begin{aligned}\langle f, \alpha\phi \rangle &= \langle f, \theta\delta\phi \rangle \\ &= \langle {}^t\theta f, \delta\phi \rangle \\ &= \langle Pu, \delta\phi \rangle \\ &= \langle u, {}^t P \delta\phi \rangle.\end{aligned}$$

Graças à localidade de P temos ${}^t P \circ \delta = \beta \circ {}^t P$, o que prova nossa afirmação. □

2.3 Resultados globais em variedades compactas

Nesta seção, suporemos que X é uma variedade compacta: embora não haja necessidade de distinguir objetos de suporte compacto, mantemos a notação estabelecida na seção anterior denotando $G^\sigma(X; \Lambda)$ por $G_c^\sigma(X; \Lambda)$. Como ora mencionado, não suporemos aqui que P seja um operador local (poderia ser, por exemplo, um tipo de operador pseudo-diferencial como aqueles introduzidos, no contexto de abertos de espaços euclideanos, em [28, Chapter III]).

Definição 2.8. Dizemos que P é:

1. *globalmente resolúvel em* G^σ se para todo $f \in G_c^\sigma(X; \Lambda_2)$ satisfazendo as condições de compatibilidade

$$\langle u, f \rangle = 0 \text{ para todo } u \in \mathcal{D}_\sigma'(X; \Lambda_2') \text{ tal que } {}^t P u = 0 \tag{2.5}$$

   existir $g \in G_c^\sigma(X; \Lambda_1)$ tal que $Pg = f$;

2. *globalmente resolúvel em* $\mathcal{D}_\sigma'$ se para todo $f \in \mathcal{D}_\sigma'(X; \Lambda_2)$ satisfazendo as condições de com-

patibilidade

$$\langle f, u\rangle = 0 \text{ para todo } u \in G^\sigma_c(X;\Lambda_2') \text{ tal que } {}^tPu = 0 \tag{2.6}$$

existir $g \in \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_1)$ tal que $Pg = f$.

É fácil ver que para um certo $f \in G^\sigma_c(X;\Lambda_2)$ (respectivamente $f \in \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2)$) pertencer à imagem da aplicação $P : G^\sigma_c(X;\Lambda_1) \to G^\sigma_c(X;\Lambda_2)$ (resp. $P : \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2)$), é *necessário* que sejam satisfeitas as condições de compatibilidade (2.5) (resp. (2.6)): resolubilidade global de P em G^σ (resp. em $\mathcal{D}'_\sigma$) diz que essas condições são também suficientes para este propósito.

A fim de tornar a discussão um pouco mais clara, façamos uma pequena distinção entre as aplicações em questão definindo

$$T \doteq P : G^\sigma_c(X;\Lambda_1) \to G^\sigma_c(X;\Lambda_2)$$
$$T^\sharp \doteq P : \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2)$$

as quais são aplicações lineares contínuas entre espaços DFS e entre espaços FS, respectivamente. Conforme a notação (1.1) temos

$$f \in G^\sigma_c(X;\Lambda_2) \text{ satisfaz (2.5)} \Leftrightarrow f \in \ker({}^tT)^\perp$$
$$f \in \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2) \text{ satisfaz (2.6)} \Leftrightarrow f \in \ker({}^tT^\sharp)^\perp$$

e portanto

$$P \text{ é globalmente resolúvel em } G^\sigma \Leftrightarrow \operatorname{ran}(T) = \ker({}^tT)^\perp,$$
$$P \text{ é globalmente resolúvel em } \mathcal{D}'_\sigma \Leftrightarrow \operatorname{ran}(T^\sharp) = \ker({}^tT^\sharp)^\perp.$$

Estas observações, juntamente com o Corolário 1.5 e a Proposição 1.7, implicam:

Corolário 2.9. *As seguintes propriedades são equivalentes.*

1. $P : G^\sigma_c(X;\Lambda_1) \to G^\sigma_c(X;\Lambda_2)$ *possui imagem fechada.*

2. $P : G^\sigma_c(X;\Lambda_1) \to G^\sigma_c(X;\Lambda_2)$ *possui imagem sequencialmente fechada.*

3. ${}^tP : \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2') \to \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_1')$ *possui imagem fechada.*

4. P *é globalmente resolúvel em* G^σ.

5. ${}^tP$ *é globalmente resolúvel em* $\mathcal{D}'_\sigma$.

6. *Para cada* $h > 0$ *existe* $h_+ > 0$ *tal que*

$$\forall u \in G^\sigma_c(X;\Lambda_1),\ Pu \in G^{\sigma,h}_c(X;\Lambda_2) \Rightarrow \exists v \in G^{\sigma,h_+}_c(X;\Lambda_1) \text{ com } Pv = Pu.$$

Demonstração. Omitida. □

A seguir, elaboramos nossa primeira aplicação do modelo abstrato de Análise Funcional que desenvolvemos na Seção 1.2: o objetivo é relacionar certas propriedades de regularidade Gevrey de um operador com propriedades de resolubilidade de seu transposto. Mantemos a notação introduzida na seção anterior. Começamos com um pequeno resultado a respeito do núcleo de P.

Proposição 2.10. *Suponha que existam um espaço de Fréchet E e inclusões contínuas*

$$G_c^\sigma(X;\Lambda_1) \hookrightarrow E \hookrightarrow \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_1)$$

tais que

$$\{u \in E \ ; \ Pu = 0\} \subset G_c^\sigma(X;\Lambda_1). \tag{2.7}$$

Então o núcleo da aplicação $P : G_c^\sigma(X;\Lambda_1) \to G_c^\sigma(X;\Lambda_2)$ tem dimensão finita.

Demonstração. Denotamos por $\ker(P)$ o núcleo da aplicação $P : G_c^\sigma(X;\Lambda_1) \to G_c^\sigma(X;\Lambda_2)$, o qual é um subespaço fechado de $G_c^\sigma(X;\Lambda_1)$ e, portanto, um espaço DFS. Ademais, o subespaço definido em (2.7) é claramente sequencialmente fechado em E, o qual é um espaço de Fréchet. Contudo, a propriedade (2.7) garante que a inclusão contínua

$$\ker(P) \hookrightarrow \{u \in E \ ; \ Pu = 0\}$$

é sobrejetora, logo um isomorfismo pelo Teorema da Aplicação Aberta de De Wilde (posto que todo espaço de Fréchet é ultrabornológico). A conclusão segue do Lema 1.8. □

Definição 2.11. Seja $\sigma_+ > \sigma$. Dizemos que P é (σ_+, σ)-*hipoelíptico* se

$$\forall u \in G_c^{\sigma+}(X;\Lambda_1), \ Pu \in G_c^\sigma(X;\Lambda_2) \Rightarrow u \in G_c^\sigma(X;\Lambda_1).$$

Seja

$$\Gamma \doteq \{(u, Pu) \ ; \ u \in G_c^\sigma(X;\Lambda_1)\}$$

o gráfico da aplicação $P : G_c^\sigma(X;\Lambda_1) \to G_c^\sigma(X;\Lambda_2)$.

Lema 2.12. *Seja $\sigma_+ > \sigma$. Se P é (σ_+, σ)-hipoelíptico então Γ é fechado quando considerado como subespaço de $G_c^{\sigma+}(X;\Lambda_1) \times G_c^\sigma(X;\Lambda_2)$.*

Demonstração. De acordo com o Corolário 1.5 basta provarmos que Γ é sequencialmente fechado em $G_c^{\sigma+}(X;\Lambda_1) \times G_c^\sigma(X;\Lambda_2)$, e para tanto tomemos $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $G_c^\sigma(X;\Lambda_1)$ e um par $(u, v) \in G_c^{\sigma+}(X;\Lambda_1) \times G_c^\sigma(X;\Lambda_2)$ tais que $(u_\nu, Pu_\nu) \to (u, v)$ em $G_c^{\sigma+}(X;\Lambda_1) \times G_c^\sigma(X;\Lambda_2)$: devemos mostrar que $u \in G_c^\sigma(X;\Lambda_1)$ e que $Pu = v$. Temos

- $u_\nu \to u$ em $G_c^{\sigma+}(X;\Lambda_1)$ e
- $Pu_\nu \to v$ em $G_c^{\sigma}(X;\Lambda_2)$.

Graças à continuidade da inclusão $G_c^{\sigma+}(X;\Lambda_1) \hookrightarrow \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_1)$ temos, do primeiro ponto acima, que

$$u_\nu \to u \text{ em } \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_1)$$

e da continuidade de P segue que

$$Pu_\nu \to Pu \text{ em } \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2).$$

Mas também temos uma inclusão contínua $G_c^{\sigma}(X;\Lambda_2) \hookrightarrow \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2)$, e então o segundo ponto acima nos dá

$$Pu_\nu \to v \text{ em } \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2).$$

Como $\mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2)$ é um espaço FS e, portanto, de Hausdorff, temos $Pu = v$, o qual pertence a $G_c^{\sigma}(X;\Lambda_2)$. Mas $u \in G_c^{\sigma+}(X;\Lambda_1)$ e P é (σ_+,σ)-hipoelíptico por hipótese, donde $u \in G_c^{\sigma}(X;\Lambda_1)$. □

Teorema 2.13. *O gráfico Γ é fechado em $G_c^{\sigma+}(X;\Lambda_1) \times G_c^{\sigma}(X;\Lambda_2)$ se e somente se a aplicação $P : G_c^{\sigma}(X;\Lambda_1) \to G_c^{\sigma}(X;\Lambda_2)$ possui imagem fechada e núcleo finitamente gerado.*

Demonstração. Tome, no Teorema 1.12,

$$\begin{aligned} F &\doteq G_c^{\sigma}(X;\Lambda_1) \\ G &\doteq G_c^{\sigma}(X;\Lambda_2) \\ E &\doteq G_c^{\sigma+}(X;\Lambda_1) \\ T &\doteq P \end{aligned}$$

e note que nossa hipótese (2.1) garante, após passagem a uma subsequência injetiva da família $\{G_c^{\sigma+,h}(X;\Lambda_1)\}_{h>0}$, a propriedade (1.7). □

Podemos sintetizar as conclusões da presente seção no seguinte enunciado.

Corolário 2.14. *Se P é (σ_+,σ)-hipoelíptico para algum $\sigma_+ > \sigma$ então*

1. *$P : G_c^{\sigma}(X;\Lambda_1) \to G_c^{\sigma}(X;\Lambda_2)$ possui núcleo finitamente gerado,*
2. *P é globalmente resolúvel em G^σ e*
3. *${}^tP$ é globalmente resolúvel em $\mathcal{D}'_\sigma$.*

Demonstração. Omitida. □

2.4 Resolubilidade semi-global

Desta seção em diante abandonamos a hipótese de compacidade sobre X. Para a classe de operadores abstratos que introduzimos acima há várias noções possíveis de resolubilidade. Iniciamos seu estudo pela noção de *resolubilidade semi-global* que, graças à Proposição 2.16, reduz-se à questão de determinar quando a aplicação linear induzida pelo operador em cada subconjunto compacto (via localização) é sobrejetora. Graças a este fato, este sabor de resolubilidade é o que melhor tolera as ferramentas de Análise Funcional que desenvolvemos no primeiro capítulo, além de – ao menos do ponto de vista da nossa abordagem – ser a generalização natural da resolubilidade global em variedades compactas que estudamos na seção anterior. Tomando como ponto de partida a resolubilidade semi-global, discutiremos também *resolubilidade global* (em variedades não-compactas, e para tal introduziremos a noção correspondente de P-convexidade) e *resolubilidade local* (olhando para resolubilidade semi-global do operador em vizinhanças compactas pequenas de pontos) nas seções subsequentes.

Mantemos a notação da seção anterior, isto é, P é um operador como em (2.4).

Definição 2.15. Dizemos que P é *semi-globalmente resolúvel em* X se para cada $f \in \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2)$ e cada aberto $W \subset\subset X$ houver $u \in \mathcal{D}'_\sigma(W;\Lambda_1)$ tal que

$$Pu = f|_W.$$

Proposição 2.16. *O operador P é semi-globalmente resolúvel em X se e somente se para cada compacto $K \subset X$ a aplicação $P : \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$ for sobrejetora.*

Demonstração. Suponha inicialmente resolubilidade semi-global de P em X e tome $K \subset X$ um compacto. Escolha ainda $W \subset\subset X$ vizinhança aberta de K: da propriedade de que para cada $f \in \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2)$ há $u \in \mathcal{D}'_\sigma(W;\Lambda_1)$ satisfazendo $Pu = f|_W$ temos, por meio do Lema 2.7, a sobrejetividade da aplicação $P : \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$.

Suponhamos agora que $P : \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$ é aplicação sobrejetora para todo compacto $K \subset X$, e fixemos arbitrariamente um aberto $W \subset\subset X$. Sempre pode-se encontrar um compacto $K \subset X$ que contém W, e o Lema 2.6 garante que para todo $f \in \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2)$ haverá $u \in \mathcal{D}'_\sigma(W;\Lambda_1)$ tal que $Pu = f|_W$. Posto que W é arbitrário, P é semi-globalmente resolúvel em X. □

Note, em particular, que se P é semi-globalmente resolúvel em X então P é semi-globalmente resolúvel em cada subconjunto aberto de X.

Corolário 2.17. *P é semi-globalmente resolúvel em X se e somente se para todo compacto $K \subset X$ valerem as seguintes propriedades:*

1. *a aplicação ${}^tP : G^\sigma_c(K;\Lambda'_2) \to G^\sigma_c(K;\Lambda'_1)$ é injetora; e*

2. *para cada $h > 0$ existe $h_+ > 0$ tal que*

$$\forall u \in G^\sigma_c(K;\Lambda'_2),\ {}^tPu \in G^{\sigma,h}_c(K;\Lambda'_1) \Rightarrow u \in G^{\sigma,h_+}_c(K;\Lambda'_2).$$

Demonstração. De acordo com a Proposição 2.16, a resolubilidade semi-global de P em X vale se e só se para cada compacto $K \subset X$ a aplicação $P : \mathcal{D}'_\sigma(K; \Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(K; \Lambda_2)$ for sobrejetora, o que por sua vez é equivalente à aplicação ${}^tP : G^\sigma_c(K; \Lambda'_2) \to G^\sigma_c(K; \Lambda'_1)$ ser injetora e ter imagem fechada (pelo Corolário 1.5 em conjunto com o Teorema de Hahn-Banach). A conclusão segue do Lema 1.6, em vista da identidade (2.3). □

Corolário 2.18. *Se P é semi-globalmente resolúvel em X então ${}^tP : G^\sigma_c(X; \Lambda'_2) \to G^\sigma_c(X; \Lambda'_1)$ é injetora. Em particular, $P : \mathcal{D}'_\sigma(X; \Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(X; \Lambda_2)$ tem imagem densa.*

Demonstração. Suponha que $u \in G^\sigma_c(X; \Lambda'_2)$ é tal que ${}^tPu = 0$: afirmamos que $u = 0$. Para prová-lo, basta tomar $K \subset X$ algum compacto que contenha $\operatorname{supp} u$, isto é, tal que $u \in G^\sigma_c(K; \Lambda'_2)$. Dado que ${}^tP : G^\sigma_c(K; \Lambda'_2) \to G^\sigma_c(K; \Lambda'_1)$ é injetora pelo Corolário 2.17, a conclusão segue do fato de ${}^tP$ ser localizável. □

2.4.1 Não-confinamento de singularidades

O objetivo desta seção é estabelecer uma generalização (parcial) do Corolário 2.14, no presente contexto de operadores agindo em variedades não-compactas. Para tanto, introduzimos aqui uma noção Gevrey de *não-confinamento de singularidades* que, num sentido vago, é um tipo de "hipoelipticidade com suporte compacto": em vista do paralelo traçado, na seção anterior, entre a teoria de resolubilidade global em variedades compactas e a de resolubilidade semi-global em variedades não-compactas, a coisa certa a se fazer aqui parece ser olhar para a regularidade apenas de objetos com suporte compacto.

O significado preciso do programa que estabelecemos acima ficará claro a seguir. Para isto, fixemos $K \subset X$ um compacto. Procedendo analogamente à demonstração do Corolário 2.14, prova-se o seguinte resultado.

Proposição 2.19. *Suponha que exista $\sigma_+ > \sigma$ tal que*

$$\forall u \in G^{\sigma_+}_c(K; \Lambda_1),\ Pu \in G^\sigma_c(K; \Lambda_2) \Rightarrow u \in G^\sigma_c(K; \Lambda_1).$$

Então $P : G^\sigma_c(K; \Lambda_1) \to G^\sigma_c(K; \Lambda_2)$ possui imagem fechada e núcleo finitamente gerado.

Demonstração. Omitida. □

Definição 2.20. Dizemos que P possui a propriedade de *não-confinamento das singularidades G^σ em X* se

$$\forall u \in C^\infty_c(X; \Lambda_1),\ Pu \in G^\sigma_c(X; \Lambda_2) \Rightarrow u \in G^\sigma_c(X; \Lambda_1).$$

Teorema 2.21. *Suponha que*

1. *a aplicação ${}^tP : G^\sigma_c(X; \Lambda'_2) \to G^\sigma_c(X; \Lambda'_1)$ seja injetora e que*
2. *${}^tP$ possua a propriedade de não-confinamento das singularidades G^σ em X.*

Então P será semi-globalmente resolúvel em X.

Demonstração. Dado que as singularidades G^σ de ${}^tP$ não estão confinadas em X conclui-se, entre outras coisas, que para cada compacto $K \subset X$ tem-se

$$ {}^tPu \in G_c^\sigma(K;\Lambda_1') \Rightarrow u \in G_c^\sigma(K;\Lambda_2') $$

para todo $u \in C_c^\infty(K;\Lambda_2')$: da Proposição 2.19, temos que ${}^tP : G_c^\sigma(K;\Lambda_2') \to G_c^\sigma(K;\Lambda_1')$ é uma aplicação com imagem fechada. Mas por hipótese esta aplicação é também injetora, e logo sua transposta $P : \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$ é sobrejetora. Posto que K é arbitrário, a resolubilidade semi-global de P segue da Proposição 2.16. □

2.5 Resolubilidade global

Como é usual, a passagem da resolubilidade semi-global para a resolubilidade global requer a adoção de uma noção conveniente de P-convexidade: é deste assunto que trataremos nesta seção. Por questões de completude, começamos com a definição básica.

Definição 2.22. Dizemos que P é *globalmente resolúvel em X* se a aplicação

$$ P : \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2) $$

for sobrejetora.

A seguir, caracterizamos resolubilidade global em termos dos limites injetivos correspondentes. Note o paralelo com a caracterização de resolubilidade global em variedades compactas apresentada no Corolário 2.9 e com a caracterização de resolubilidade semi-global apresentada no Corolário 2.17.

Proposição 2.23. *P é globalmente resolúvel em X se e somente se*

1. *a aplicação ${}^tP : G_c^\sigma(X;\Lambda_2') \to G_c^\sigma(X;\Lambda_1')$ for injetora e*

2. *para cada compacto $K \subset X$ e cada $h > 0$ houver $K_+ \subset X$ outro compacto e $h_+ > 0$ tais que*

$$ {}^tPu \in G_c^{\sigma,h}(K;\Lambda_1') \Rightarrow u \in G_c^{\sigma,h_+}(K_+;\Lambda_2') $$

   para todo $u \in G_c^\sigma(X;\Lambda_2')$.

Demonstração. Segue imediatamente do Lema 1.6, tendo em mente a Observação 2.2. □

O "problema" do resultado acima é que, em vista do duplo limite injetivo na Observação 2.2, o compacto K_+ acima pode depender de h, e não somente de K. A fim de eliminar essa dependência, introduzimos a seguinte noção de P-convexidade em relação a suportes, cuja aplicação ficará evidente imediatamente na sequência: uma versão, no contexto de ultradistribuições, de um famoso resultado de resolubilidade global para distribuições [30, Theorem 38.2].

Definição 2.24. Dizemos que X é P*-convexo em relação a suportes* se para cada compacto $K \subset X$ houver outro compacto $\hat{K} \subset X$ tal que

$$\operatorname{supp} {}^tPu \subset K \Rightarrow \operatorname{supp} u \subset \hat{K}$$

para todo $u \in G^\sigma_c(X; \Lambda'_2)$.

Teorema 2.25. *Suponha que*

1. *P é semi-globalmente resolúvel em X e que*

2. *X é P-convexo em relação a suportes.*

Então P é globalmente resolúvel em X.

Demonstração. Dado que P é semi-globalmente resolúvel em X, o Corolário 2.18 garante a injetividade da aplicação ${}^tP : G^\sigma_c(X; \Lambda'_2) \to G^\sigma_c(X; \Lambda'_1)$. Uma vez que, por hipótese, também X é P-convexo em relação a suportes, para cada compacto $K \subset X$ podemos encontrar outro compacto $\hat{K} = \hat{K}(K) \subset X$ tal que

$$\left.\begin{array}{r} u \in G^\sigma_c(X; \Lambda'_2) \\ {}^tPu \in G^\sigma_c(K; \Lambda'_1) \end{array}\right\} \Rightarrow u \in G^\sigma_c(\hat{K}; \Lambda'_2).$$

Tomemos então $K_+ \subset X$ um compacto que contenha ambos K e $\hat{K}$. Invocando mais uma vez a resolubilidade semi-global de P em X, dado $h > 0$ encontramos, graças ao Corolário 2.17, um certo $h_+ = h_+(K_+, h) > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{r} v \in G^\sigma_c(K_+; \Lambda'_2) \\ {}^tPv \in G^{\sigma,h}_c(K_+; \Lambda'_1) \end{array}\right\} \Rightarrow v \in G^{\sigma,h_+}_c(K_+; \Lambda'_2).$$

Juntando tudo, temos

$$\begin{aligned} \left.\begin{array}{r} u \in G^\sigma_c(X; \Lambda'_2) \\ {}^tPu \in G^{\sigma,h}_c(K; \Lambda'_1) \end{array}\right\} &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u \in G^\sigma_c(\hat{K}; \Lambda'_2) \\ {}^tPu \in G^{\sigma,h}_c(K; \Lambda'_1) \end{array}\right\} \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u \in G^\sigma_c(K_+; \Lambda'_2) \\ {}^tPu \in G^{\sigma,h}_c(K_+; \Lambda'_1) \end{array}\right\} \\ &\Rightarrow u \in G^{\sigma,h_+}_c(K_+; \Lambda'_2) \end{aligned}$$

o que implica resolubilidade global em X imediatamente, graças à Proposição 2.23. □

O seguinte resultado ilustra, como é usual noutros contextos, como uma certa propriedade de continuação única das soluções da equação homogênea – aqui adaptada para o caso Gevrey – garante convexidade em relação a suportes.

Proposição 2.26. *Suponha que X seja conexa e que P desfrute da seguinte* propriedade de continuação única das soluções em X*: se*

1. *$\Omega \subset X$ for um aberto,*
2. *$v \in G^\sigma(\Omega; \Lambda_1)$ for tal que $Pv = 0$ em Ω e*
3. *$v = 0$ em algum aberto conexo não-vazio $\omega \subset \Omega$*

então $v = 0$ naquela componente conexa de Ω que contém ω.

Sejam ainda $K \subset X$ um compacto e denotemos por $\hat{K} \subset X$ a reunião de K com todas as componentes conexas de $X \setminus K$ que sejam relativamente compactas em X. Neste caso, temos que

$$\operatorname{supp} Pu \subset K \Rightarrow \operatorname{supp} u \subset \hat{K}$$

para todo $u \in G^\sigma_c(X; \Lambda_1)$. Em particular, que X é ${}^tP$-convexo em relação a suportes.

Demonstração. Sejam $K, \hat{K}$ como no enunciado, e tomemos $u \in G^\sigma_c(X; \Lambda_1)$ com a propriedade de que $\operatorname{supp} Pu \subset K$: provaremos que $\operatorname{supp} u \subset \hat{K}$. Noutras palavras, provaremos que $\operatorname{supp} u$ não intercepta qualquer componente conexa de $X \setminus K$ que não seja relativamente compacta em X.

Tomemos Ω uma componente conexa de $X \setminus K$ que *não seja* relativamente compacta em X. Entres outras coisas, Ω é subconjunto aberto de $X \setminus K$, e portanto aberto em X. Afirmamos que $\operatorname{supp} u \cap \Omega = \emptyset$. Com efeito, note inicialmente que $\operatorname{supp} u \cap \Omega$ não pode ser a totalidade de Ω, pois de outro modo Ω seria relativamente compacto em X (uma vez que $\operatorname{supp} u$ é compacto). Isto significa que $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ não pode ser vazio, e sendo este um subconjunto aberto de X podemos selecionar um aberto conexo não-vazio $\omega \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} u$.

Defina $v \doteq u|_\Omega \in G^\sigma(\Omega; \Lambda_1)$. Como $\Omega \subset X \setminus K$ e $\operatorname{supp} Pu \subset K$ temos que $Pv = 0$ em Ω. Ademais, como $\omega \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} u$ temos que $v = 0$ em ω: segue das hipóteses sobre P que $u = v = 0$ em toda a componente conexa de Ω que contém ω. Mas Ω é conexo por construção – a saber, é uma componente conexa de $X \setminus K$ – e logo $u = 0$ em Ω.

A última conclusão segue do fato de $\hat{K}$ ser compacto, conforme [27, Proposition 3.10.2]. □

Encerramos esta seção com um conjunto de condições suficientes para X ser ${}^tP$-convexo em relação a suportes, no caso especial em que o fibrado de partida Λ_1 é o fibrado de linha trivial: este é o caso dos exemplos que estudaremos no próximo capítulo.

Corolário 2.27. *Suponhamos que X seja conexa, que $\Lambda_1 = X \times \mathbb{C}$ e que P seja* analítico-hipoelíptico *no seguinte sentido: para cada aberto $\Omega \subset X$ tem-se*

$$\left.\begin{array}{c} u \in G^\sigma(\Omega) \\ Pu \in C^\omega(\Omega; \Lambda_2) \end{array}\right\} \Rightarrow u \in C^\omega(\Omega).$$

Então X é ${}^tP$-convexo em relação a suportes.

Demonstração. Graças à Proposição 2.26, pois é claro que sob as hipóteses acima P possui a propriedade de continuação única das soluções em X. $\square$

2.6 Resolubilidade local

Fixemos um ponto $0 \in X$, o qual denominamos *a origem*.

Proposição 2.28. *As seguintes propriedades são equivalentes.*

1. *Para cada $U \subset X$ vizinhança aberta da origem e cada $f \in \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2)$ existem $V \subset U$ outra vizinhança aberta da origem e $u \in \mathcal{D}'_\sigma(V;\Lambda_1)$ tais que $Pu = f|_V$.*

2. *Para cada $U \subset X$ vizinhança aberta da origem há uma outra tal vizinhança $V \subset U$ desfrutando da seguinte propriedade: para todo $f \in \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2)$ existe $u \in \mathcal{D}'_\sigma(V;\Lambda_1)$ tal que $Pu = f|_V$.*

Demonstração. Provaremos a implicação *1.* $\Rightarrow$ *2.*, posto que a recíproca é trivial. Sejam $U \subset X$ uma vizinhança aberta fixada da origem e $\{V_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas da origem tais que $V_\nu \subset\subset U$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ definimos

$$E_\nu \doteq \left\{(f,u) \in \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2) \times \mathcal{D}'_\sigma(V_\nu;\Lambda_1)\ ;\ Pu = f|_{V_\nu}\right\}.$$

Afirmamos que E_ν é fechado em $\mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2) \times \mathcal{D}'_\sigma(V_\nu;\Lambda_1)$; e este último espaço, como todo produto cartesiano de espaços de Fréchet – conforme ora observado, ambos os fatores são espaços FS –, é ele próprio um espaço de Fréchet. A fim de averiguar a afirmação, tomemos uma sequência $\{(f_k,u_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \in E_\nu$ satisfazendo

$$(f_k,u_k) \to (f,u) \text{ em } \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2) \times \mathcal{D}'_\sigma(V_\nu;\Lambda_1)$$

para algum par $(f,u) \in \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2) \times \mathcal{D}'_\sigma(V_\nu;\Lambda_1)$. Temos assim que

$$\begin{aligned} f_k &\to f \text{ em } \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2), \\ u_k &\to u \text{ em } \mathcal{D}'_\sigma(V_\nu;\Lambda_1). \end{aligned}$$

A primeira convergência acima implica que

$$f_k|_{V_\nu} \to f|_{V_\nu} \text{ em } \mathcal{D}'_\sigma(V_\nu;\Lambda_2)$$

enquanto a segunda, conjuntamente com a continuidade de P, implica

$$Pu_k \to Pu \text{ em } \mathcal{D}'_\sigma(V_\nu;\Lambda_2).$$

No entanto tem-se $Pu_k = f_k|_{V_\nu}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que $Pu = f|_{V_\nu}$, isto é, $(f,u) \in E_\nu$. Isto encerra a prova da afirmação.

Para encerrar a demonstração da proposição tomemos, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, a projeção na primeira coordenada

$$\begin{array}{rcccc} \pi_\nu & : & E_\nu & \longrightarrow & \mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2) \\ & & (f,u) & \longmapsto & f \end{array}$$

a qual é obviamente uma aplicação linear e contínua, e nossa hipótese garante que

$$\mathcal{D}'_\sigma(U;\Lambda_2) = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \pi_\nu(E_\nu).$$

A conclusão segue agora da maneira tradicional, via Teorema de Baire mais uma versão conveniente do Teorema da Aplicação Aberta para espaços de Fréchet. □

Definição 2.29. Diremos que P é *localmente resolúvel* na origem se valer alguma das condições equivalentes descritas no enunciado da Proposição 2.28.

Corolário 2.30. *Resolubilidade local na origem é equivalente a resolubilidade semi-global em alguma vizinhança aberta da origem.*

Demonstração. De fato, se P for localmente resolúvel em 0 haverá uma vizinhança aberta de 0, a qual denominaremos V, tal que para todo $f \in \mathcal{D}'_\sigma(X;\Lambda_2)$ existirá um $u \in \mathcal{D}'_\sigma(V;\Lambda_1)$ satisfazendo $Pu = f|_V$. Pelo Lema 2.7, a aplicação $P : \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_1) \to \mathcal{D}'_\sigma(K;\Lambda_2)$ será sobrejetora para cada compacto $K \subset V$, o que por sua vez implica resolubilidade semi-global de P em V de acordo com a Proposição 2.16. A recíproca dispensa comentários. □

Proposição 2.31. *Se o núcleo da aplicação $P : G^\sigma_c(X;\Lambda_1) \to G^\sigma_c(X;\Lambda_2)$ for finitamente gerado então existe $U \subset X$ vizinhança aberta da origem onde $P : G^\sigma_c(U;\Lambda_1) \to G^\sigma_c(U;\Lambda_2)$ é injetora.*

Demonstração. Suponhamos que a aplicação $P : G^\sigma_c(U;\Lambda_1) \to G^\sigma_c(U;\Lambda_2)$ não seja injetora, não importando o quão pequena $U \subset X$ seja. Rigorosamente, isto quer dizer que podemos encontrar uma sequência estritamente decrescente de vizinhanças abertas da origem – a qual denotaremos por $\{U_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ – e uma sequência $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset G^\sigma_c(X;\Lambda_1)$ com as seguintes propriedades:

- $u_\nu \neq 0$,
- $\operatorname{supp} u_\nu \subset U_\nu$ e
- $Pu_\nu = 0$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, podemos também supor que

$$\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} U_\nu = \{0\}.$$

Note que, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, a seção u_ν é contínua e não se anula identicamente, de modo que seu suporte $\operatorname{supp} u_\nu$ não pode consistir na origem apenas, o que nos permite encontrar $\nu' > \nu$

tal que supp u_ν não esteja integralmente contido em $U_{\nu'}$. Argumentando indutivamente, passando a uma subsequência e renomeando os índices se necessário, podemos supor que supp u_ν não está integralmente contido em $U_{\nu'}$ para todo $\nu' > \nu$. Daí segue que

$$u_\nu \notin \operatorname{span}\{u_{\nu'} \ ; \ \nu' > \nu\}.$$

Como este argumento aplica-se a todo $\nu \in \mathbb{N}$ e nenhum u_ν anula-se identicamente, temos que $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é um conjunto linearmente independente, o qual por construção está contido no núcleo de $P : G_c^\sigma(X; \Lambda_1) \to G_c^\sigma(X; \Lambda_2)$. □

Corolário 2.32. *Se P possui a propriedade de não-confinamento das singularidades G^σ em X então ${}^tP$ é localmente resolúvel em todo ponto.*

Demonstração. Selecionamos $\Omega \subset\subset X$ uma vizinhança aberta da origem e $K \subset X$ um compacto que contém Ω. Como as singularidades G^σ de P não estão confinadas em X, a Proposição 2.19 assegura que o núcleo da aplicação $P : G_c^\sigma(K; \Lambda_1) \to G_c^\sigma(K; \Lambda_2)$ seja finitamente gerado; como $\Omega \subset K$, o mesmo se pode dizer da aplicação $P : G_c^\sigma(\Omega; \Lambda_1) \to G_c^\sigma(\Omega; \Lambda_2)$: da proposição anterior segue a existência de uma vizinhança aberta da origem $U \subset \Omega$ onde $P : G_c^\sigma(U; \Lambda_1) \to G_c^\sigma(U; \Lambda_2)$ é injetora.

Mas claramente o não-confinamento das singularidades é herdado por subconjuntos abertos, logo as singularidades G^σ de P também não ficam confinadas em U: o Teorema 2.21 implica, então, resolubilidade semi-global de ${}^tP$ em U. Como "a origem" é arbitrária, o resultado segue. □

Capítulo 3

Operadores diferenciais e sistemas

Neste capítulo, traçamos algumas aplicações concretas da teoria abstrata que desenvolvemos no Capítulo 2: o principal objetivo aqui será estabelecer a propriedade de não-confinamento das singularidades Gevrey para várias classes de operadores diferenciais parciais lineares. Dentre as várias vantagens que esses operadores oferecem – em contraste com as versões abstratas dos capítulos anteriores – uma das mais importantes é o fato de tolerarem Análise Microlocal, da qual faremos uso diversas vezes ao longo do presente capítulo.

Na primeira seção, fazemos várias observações a respeito de *operadores tipo gradiente* (e suas transpostas, os *operadores tipo divergente*) associados a sistemas de operadores escalares. Este tipo de operador, além de generalizar os operadores escalares propriamente ditos (dos quais trataremos exclusivamente nas seções subsequentes, e os resultados demonstrados na primeira seção a eles se aplicam), são o modelo local de um operador genérico agindo em um fibrado de linha complexo – por exemplo, certos operadores associados a famílias de campos vetoriais complexos, que estudamos no próximo capítulo.

Em seguida, exploramos três exemplos de famílias de operadores escalares com a propriedade de não-confinamento de singularidades: uma classe de operadores de Hörmander; certos operadores que apresentam propagação de singularidades Gevrey; e operadores de força constante em espaços euclideanos.

3.1 Sistemas tipo gradiente/divergente

Sejam X uma variedade real-analítica, $\sigma > 1$ e $P_1, \dots, P_n$ operadores diferenciais parciais lineares de ordem $r \in \mathbb{Z}_+$ com coeficientes em G^σ. Fica aqui implícito que cada P_j é um operador *escalar*, ou seja, age nas seções do fibrado de linha trivial $X \times \mathbb{C}$. Isto quer dizer que se $\Omega \subset X$ for domínio de um sistema de coordenadas real-analítico podemos escrever, em Ω,

$$P_j = \sum_{|\alpha| \leq r} a^j_\alpha D^\alpha$$

onde $a^j_\alpha \in G^\sigma(\Omega)$ para $|\alpha| \leq r$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Dada uma função suave u definimos

$$Pu \doteq (P_1 u, \dots, P_n u)$$

o que define P como um operador diferencial linear – o *operador gradiente* associado ao sistema $\{P_1, \dots, P_n\}$ –, com coeficientes em G^σ, o qual leva seções de $\Lambda_1 \doteq X \times \mathbb{C}$ em seções de $\Lambda_2 \doteq X \times \mathbb{C}^n$. Note que operadores gradiente são uma generalização de operadores escalares (dos quais discutiremos várias classes nas próximas seções, às quais aplicam-se os resultados que demonstraremos aqui) e, ademais, provêm um modelo local de qualquer operador diferencial linear cujo fibrado de partida é um fibrado de linha (bastando olhar para a expressão de um tal operador em trivializações locais).

Uma conta simples revela que ${}^tP$ é também um operador diferencial linear com coeficientes em G^σ, este levando seções de $\Lambda_2' \cong X \times \mathbb{C}^n$ em seções de $\Lambda_1' \cong X \times \mathbb{C}$. Não é difícil, neste caso, obter a expressão de ${}^tP$ segundo estes isomorfismos: se $f = (f_1, \dots, f_n)$ é uma n-upla de funções suaves então

$$ {}^tPf = \sum_{j=1}^{n} {}^tP_j f_j, $$

o qual denominamos o *operador divergente* associado ao sistema $\{{}^tP_1, \dots, {}^tP_n\}$.

Como de costume, define-se o conjunto característico de P como sendo a intersecção dos conjuntos característicos de todos os P_j, isto é,

$$ \mathrm{Char}(P) \doteq \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Char}(P_j) $$

e dizemos que P é *elíptico* se $\mathrm{Char}(P) = \emptyset$. Neste contexto, o seguinte resultado é imediato.

Proposição 3.1. *Se P for elíptico então todo $u \in \mathcal{E}'(X)$ que satisfizer $Pu \in G^\sigma_c(X; \mathbb{C}^n)$ pertence de fato a $G^\sigma_c(X)$. Em particular, as singularidades G^σ de P não estão confinadas em X.*

Demonstração. Denotamos por WF_σ o conjunto frente-de-onda G^σ: sabe-se que dado $u \in \mathcal{E}'(X)$ tem-se

$$ \mathrm{WF}_\sigma(u) \subset \mathrm{WF}_\sigma(P_j u) \cup \mathrm{Char}(P_j) $$

para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Se supusermos que $Pu \in G^\sigma(X; \mathbb{C}^n)$ teremos, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$ P_j u \in G^\sigma(X) $$

que lê-se microlocalmente como

$$ \mathrm{WF}_\sigma(P_j u) = \emptyset $$

e implica, portanto, que $\mathrm{WF}_\sigma(u) \subset \mathrm{Char}(P_j)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, ou seja

$$ \mathrm{WF}_\sigma(u) \subset \mathrm{Char}(P). $$

Uma vez que este último conjunto é vazio por hipótese temos $\mathrm{WF}_\sigma(u) = \emptyset$, isto é, $u \in G^\sigma(X)$. Como supúnhamos que u tinha suporte compacto, isto encerra a demonstração. □

Proposição 3.2. *Suponhamos adicionalmente que*

- *X seja conexa e não-compacta, e que*
- *os coeficientes a_α^j sejam reais-analíticos em sistemas de coordenadas reais-analíticos.*

Neste caso, se P for elíptico então ${}^tP$ será globalmente resolúvel em X.

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.25 basta provarmos que ${}^tP$ é semi-globalmente resolúvel em X e que X é ${}^tP$-convexo em relação a suportes; contudo, segundo o Teorema 2.21 e o Corolário 2.27, para tanto é suficiente verificarmos que

1. a aplicação $P : G_c^\sigma(X) \to G_c^\sigma(X; \mathbb{C}^n)$ é injetora, que
2. as singularidades G^σ de P não são confinadas em X e que
3. P é analítico-hipoelíptico.

A segunda propriedade acima é o conteúdo da proposição anterior, e a verificação da terceira segue a mesma linha de demonstração daquela, porém microlocalizando na categoria real-analítica. Mas a primeira propriedade segue da terceira, já que X é conexa e não-compacta. □

É claro que se P for *globalmente G^σ-hipoelíptico* em X, o que pode ser entendido como, por exemplo,

$$\left.\begin{array}{c} u \in C^\infty(X) \\ Pu \in G^\sigma(X;\mathbb{C}^n) \end{array}\right\} \Rightarrow u \in G^\sigma(X)$$

então obviamente P possui a propriedade de não-confinamento das singularidades G^σ em X, sendo que a recíproca não vale em geral. Contudo, quando a projeção de $\mathrm{Char}(P)$ em X é compacta, podemos provar que essas duas propriedades são equivalentes.

Proposição 3.3. *Denotemos por $\pi : T^*X \to X$ a projeção canônica do fibrado cotangente na base, e suponha que o conjunto*

$$\Sigma \doteq \pi(\mathrm{Char}(P))$$

seja compacto. Se as singularidades G^σ não forem confinadas em X então P será globalmente G^σ-hipoelíptico em X.

Demonstração. Seja $u \in C^\infty(X)$ tal que $Pu \in G^\sigma(X;\mathbb{C}^n)$. Já sabemos, por Análise Microlocal, que u é G^σ longe de Σ. Contudo, como este conjunto é compacto existe $\phi \in G_c^\sigma(X)$ tal que $\phi = 1$ numa vizinhança de Σ. Assim, $\phi u \in C_c^\infty(X)$, e perto de Σ temos que $P(\phi u) = Pu$ é G^σ por hipótese; ademais, como u é G^σ longe de Σ temos que ϕu – e portanto também $P(\phi u)$ – é G^σ longe de Σ.

Concluímos que $P(\phi u) \in G_c^\sigma(X; \mathbb{C}^n)$, e uma vez que P possui a propriedade de não-confinamento das singularidades G^σ em X, temos $\phi u \in G_c^\sigma(X)$. Mas como $u = \phi u$ perto de Σ, concluímos que u é também G^σ lá, de modo que $u \in G^\sigma(X)$. $\square$

3.2 Operadores de Hörmander

Por simplicidade, tomemos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Recordemos que o espaço dos campos vetoriais reais suaves sobre Ω – o qual denotaremos por $C^\infty(\Omega; T\Omega)$ – é uma álgebra de Lie quando munido do colchete de Lie (comutador). Dado um subconjunto arbitrário $\Gamma \subset C^\infty(\Omega; T\Omega)$ denota-se por $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ a menor subálgebra de Lie de $C^\infty(\Omega; T\Omega)$ que contém Γ.

Definição 3.4. Diremos que $\Gamma \subset C^\infty(\Omega; T\Omega)$ satisfaz a *condição de Hörmander* em Ω se para cada $x \in \Omega$ o conjunto

$$\mathrm{Lie}_x(\Gamma) \doteq \{X(x) \ ; \ X \in \mathrm{Lie}(\Gamma)\}$$

for igual a $T_x\Omega$.

Seja $P = P(x, D)$ um operador diferencial linear em Ω. Dizemos que P é um *operador de Hörmander* se existirem $X_0, X_1, \dots, X_\nu \in C^\infty(\Omega; T\Omega)$ e $a \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ tais que

$$P \doteq \sum_{j=1}^{\nu} X_j^2 + X_0 + a.$$

É sabido [17] que se $\{X_j \ ; \ 0 \le j \le \nu\}$ satisfizer a condição de Hörmander em Ω então para cada compacto $K \subset \Omega$ existirão constantes $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\|u\|_\delta \le C(\|Pu\|_0 + \|u\|_0), \ \forall u \in C_c^\infty(K). \tag{3.1}$$

Aqui, $\|\cdot\|_s$ denota a norma do espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ para $s \in \mathbb{R}$. Temos ainda o seguinte resultado a respeito de regularidade Gevrey para tais operadores [13, Théorème 1.5, Théorème 1.6].

Teorema 3.5. *Suponha que $\{X_j \ ; \ 0 \le j \le \nu\}$ satisfaz a condição de Hörmander em Ω. Então para cada compacto $K \subset \Omega$ existe um racional $\rho_K > 0$ – dependendo apenas do número de comutadores de $X_0, X_1, \dots, X_\nu$ necessários para se gerar $T\Omega$ em K – com a seguinte propriedade: se $\sigma > 2/\rho_K$ e os coeficientes de P pertencerem[1] a $G^\sigma(\Omega)$ então vale que*

$$\left.\begin{array}{c} u \in \mathcal{D}'(\Omega) \\ Pu \in G^\sigma(K) \end{array}\right\} \Rightarrow u \in G^\sigma(K).$$

[1]Isto é: $X_0, X_1, \dots, X_\nu \in G^\sigma(\Omega; T\Omega)$ e $a \in G^\sigma(\Omega)$.

Se supusermos, ademais, que $\{X_j \ ; \ 1 \leq j \leq \nu\}$ satisfaz a condição de Hörmander em Ω então a conclusão acima vale para todo $\sigma > 1/\rho_K$.

Demonstração. Omitida. □

Suponha então que $\{X_j \ ; \ 0 \leq j \leq \nu\}$ (respectivamente $\{X_j \ ; \ 1 \leq j \leq \nu\}$) satisfaz a condição de Hörmander em Ω e, por simplicidade, que os coeficientes de P são reais-analíticos em Ω. Se $U \subset\subset \Omega$ for um aberto temos, para todo $\sigma > 2/\rho_K$ (resp. $\sigma > 1/\rho_K$), que vale

$$\left.\begin{array}{r} u \in C_c^\infty(U) \\ Pu \in G_c^\sigma(U) \end{array}\right\} \Rightarrow u \in G_c^\sigma(U)$$

e, logo, as singularidades G^σ de P não estão confinadas em U.

Não se pode esperar, contudo, que operadores de Hörmander em geral (mesmo aqueles cujos coeficientes são reais-analíticos) desfrutem da propriedade de não-confinamento das singularidades G^σ para todo $\sigma > 1$, conforme ilustra o exemplo abaixo.

Exemplo 1. Em $\mathbb{R}^2$, com coordenadas (x, y), considere o operador

$$\begin{aligned} P &\doteq \partial_x^2 + (x\partial_y)^2 + (y\partial_y)^2 \\ &= \partial_x^2 + (x^2 + y^2)\partial_y^2 + y\partial_y \end{aligned}$$

o qual claramente satisfaz a condição de Hörmander, já que

$$[\partial_x, x\partial_y] = \partial_y$$

de modo que basta 1 comutador para gerarmos $T\mathbb{R}^2$ a partir da família $\{\partial_x, x\partial_y, y\partial_y\}$. Contudo, segue de resultados em [25] que existe $u \in G^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

- $Pu = 0$ em $\mathbb{R}^2$ e
- $u \notin G^\sigma(\mathbb{R}^2)$ para todo $\sigma \in (1, 2)$.

Em particular, P não é G^σ-hipoelíptico para todo $\sigma \in (1, 2)$. Por outro lado, é claro que P é elíptico fora da origem e, portanto, a projeção de seu conjunto característico na base contém a origem apenas, que logo é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$.

Segue assim da Proposição 3.3 que *para cada $\sigma \in (1, 2)$ o operador de Métivier não apresenta a propriedade de não-confinamento da singularidades G^σ em qualquer vizinhança aberta da origem.*

Discutiremos agora uma classe de operadores de Hörmander, introduzida em [7], que possuem a propriedade de não-confinamento de singularidades G^σ para todo $\sigma > 1$. Tomemos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, e denotemos por $(x, t) = (x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)$ as coordenadas usuais em $\Omega \doteq U \times V$. Suponha que tenhamos $\sigma_0 \geq 1$ e:

- $Y_1, \dots, Y_r \in G^{\sigma_0}(V; T\mathbb{R}^n)$ tais que

$$T_t\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\{Y_j|_t \ ; \ 1 \leq j \leq r\}, \ \forall t \in V;$$

- $b_{jk} \in G^{\sigma_0}(V; \mathbb{R})$ para $j \in \{1, \dots, r\}$ e $k \in \{1, \dots, m\}$ tais que se definirmos

$$X_j \doteq Y_j + \sum_{k=1}^{m} b_{jk}(t) \frac{\partial}{\partial x_k}, \ 1 \leq j \leq r,$$

então $\{X_1, \dots, X_r\}$ satisfaz a condição de Hörmander em Ω.

Neste caso, dizemos que o operador

$$P \doteq \sum_{j=1}^{r} X_j^2$$

pertence à *classe* $\mathfrak{O}(U, V)$.

Proposição 3.6. *Operadores na classe $\mathfrak{O}(U, V)$ possuem a propriedade de não-confinamento das singularidades G^σ em Ω, para todo $\sigma \geq \sigma_0$ com $\sigma > 1$.*

Demonstração. Seja P como acima, o qual é, portanto, um operador de Hörmander: dado $K \subset \Omega$ compacto existem constantes $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que vale (3.1). Ademais, é bem conhecido o fato de que para cada $\epsilon > 0$ pode-se encontrar $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\|u\|_0 \leq \epsilon \|u\|_\delta + C_\epsilon \|u\|_{-1}, \ \forall u \in C_c^\infty(K).$$

A partir daí, um argumento tradicional permite concluir que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_0 \leq C_1(\|Pu\|_0 + \|u\|_{-1}), \ \forall u \in C_c^\infty(K).$$

Fixemos $\sigma > 1$ como no enunciado e suponhamos que $u \in C_c^\infty(K)$ é tal que $Pu \in G_c^\sigma(K)$: verificaremos que $u \in G_c^\sigma(K)$. Como P é elíptico em t – graças à hipótese sobre os campos $Y_1, \dots, Y_r$ – basta provarmos que u é G^σ em x, ou seja, que existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\|\partial_x^\alpha u\|_0 \leq B^{|\alpha|+1} \alpha!^\sigma \tag{3.2}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$. Para tanto note que, como $Pu \in G_c^\sigma(K)$, existe $A > 0$ tal que

$$\|\partial_x^\beta (Pu)\|_0 \leq A^{|\beta|+1} \beta!^\sigma, \ \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Escolhemos então $M > 1$ tal que

$$\|u\|_0 \leq MA$$

e, simultaneamente,

$$C_1\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{MA}\right)\leq 1.$$

Afirmamos que $B \doteq MA$ satisfaz os requisitos acima.

Procederemos a verificação de (3.2) por indução sobre $d \doteq |\alpha|$. O caso base $d = 0$ já está verificado em razão da escolha de M. Suponhamos agora (3.2) já verificada para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ com $|\alpha| = d$ e tomemos α agora com $|\alpha| = d + 1$. Logo, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\alpha_j \geq 1$, de modo que $|\alpha - e_j| = d$: usando que $[P, \partial_x^\alpha] = 0$ e a hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^\alpha u\|_0 &\leq C_1\left(\|\partial_x^\alpha (Pu)\|_0 + \|\partial_x^\alpha u\|_{-1}\right)\\
&\leq C_1\left(A^{|\alpha|+1}\alpha!^\sigma + \|\partial_x^{\alpha-e_j} u\|_0\right)\\
&\leq C_1\left(A^{|\alpha|+1}\alpha!^\sigma + B^{|\alpha|}(\alpha-e_j)!^\sigma\right)\\
&\leq C_1 B^{|\alpha|+1}\alpha!^\sigma\left(\frac{A^{|\alpha|+1}}{B^{|\alpha|+1}}+\frac{1}{B}\right)\\
&= C_1 B^{|\alpha|+1}\alpha!^\sigma\left(\frac{1}{M^{|\alpha|+1}}+\frac{1}{MA}\right)\\
&\leq C_1 B^{|\alpha|+1}\alpha!^\sigma\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{MA}\right)\\
&\leq B^{|\alpha|+1}\alpha!^\sigma.
\end{aligned}$$

□

3.3 Um operador com propagação de singularidades

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança aberta da origem, $m \geq 2$ um número inteiro e $Q(x, D)$ um operador diferencial parcial linear em Ω, com coeficientes reais-analíticos e de ordem $m - 1$. Segundo [28, Theorem 4.0.1] temos:

Teorema 3.7. *Seja $1 < \sigma < m/(m-1)$. O operador*

$$P(x, D) \doteq D_1^m + Q(x, D) \tag{3.3}$$

satisfaz as seguintes propriedades.

1. *Existe $u \in \mathcal{D}'_\sigma(\Omega) \setminus G^\sigma(\Omega)$ tal que $P(x, D)u \in G^\sigma(\Omega)$.*

2. *Se $u \in \mathcal{D}'_\sigma(\Omega)$ é tal que $P(x, D)u \in G^\sigma(\Omega)$ e se $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ pertence ao suporte singular G^σ de u então o conjunto*

$$\Omega \cap \{(t, x_2^0, \ldots, x_n^0)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$$

está integralmente contido no suporte singular G^σ de u.

Demonstração. Omitida. □

Corolário 3.8. *Se $1 < \sigma < m/(m-1)$ então o operador (3.3) possui a propriedade de não-confinamento das singularidades G^σ em Ω.*

Demonstração. O teorema garante que se $u \in \mathcal{D}'_\sigma(\Omega)$ é tal que $P(x,D)u \in G^\sigma(\Omega)$ então o suporte singular G^σ de u não pode ser um subconjunto relativamente compacto de Ω – exceto se for vazio. Logo, se supusermos que u tem suporte compacto em Ω, teremos automaticamente $u \in G^\sigma(\Omega)$. □

3.4 Operadores de força constante

Começaremos esta seção com um resultado de não-confinamento de singularidades Gevrey para operadores de coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.9. *Operadores de coeficientes constantes possuem a propriedade de não-confinamento das singularidades G^σ em $\mathbb{R}^n$ para todo $\sigma > 1$.*

Demonstração. Seja $P(D)$ um operador de coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$ e $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma solução fundamental de $P(D)$. Se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é tal que $P(D)u \in G_c^\sigma(\mathbb{R}^n)$ então, por um lado, $E * P(D)u \in G^\sigma(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado

$$\begin{aligned} E * P(D)u &= P(D)E * u \\ &= \delta * u \\ &= u \end{aligned}$$

onde δ denota o delta de Dirac em $\mathbb{R}^n$. Concluímos que $u \in G^\sigma(\mathbb{R}^n)$. □

Recordemos agora a definição de operador de força constante. Dado um polinômio P em n variáveis $\xi_1, \dots, \xi_n$ definimos

$$\tilde{P}(\xi) \doteq \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} |\partial_\xi^\alpha P(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se Q é um outro polinômio do mesmo tipo, dizemo-lo *mais fraco* que P se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\tilde{Q}(\xi) < C\tilde{P}(\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

o que denotamos por $Q \prec P$. Se $Q \prec P \prec Q$ dizemos que P e Q são *igualmente fortes*.

Definição 3.10. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $P(x,D)$ um operador diferencial linear em Ω. Dizemos que $P(x,D)$ tem *força constante* em Ω se, para quaisquer $x, y \in \Omega$, os polinômios $P(x,\cdot)$ e $P(y,\cdot)$ são igualmente fortes.

O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.11. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\sigma_0 > 1$. Se $P(x, D)$ for um operador diferencial linear com coeficientes em $G^{\sigma_0}(\Omega)$ e com força constante em Ω então todo ponto de Ω possui uma vizinhança aberta na qual as singularidades G^σ de $P(x, D)$ não são confinadas, para todo $\sigma > \sigma_0$.*

Enfatizamos que é consequência do Teorema 3.11 em conjunto com o Corolário 2.32 que, se $P(x, D)$ é um operador de força constante como no enunciado acima, então ${}^tP(x, D)$ é localmente resolúvel, no sentido da Definição 2.29, em todo ponto de Ω.

Para prová-lo, precisaremos de alguns resultados e notações de [4], onde é desenvolvida uma teoria de ultradistribuições que engloba a teoria de Gevrey e constrói-se, dentro deste contexto, uma generalização da teoria dos espaços $B_{p,k}$ de L. Hörmander (que também usaremos, e para a qual referimos o leitor à exposição feita em [18]).

Fixemos $\sigma > \sigma_0 > 1$. Definimos $\Omega : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\Omega(t) \doteq t^{\frac{1}{\sigma}}$$

a qual é uma função côncava, crescente, contínua e satisfaz $\Omega(0) = 0$. Ademais[2]

$$\begin{aligned} J(\Omega) &\doteq \int_1^\infty \frac{\Omega(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_1^\infty t^{\frac{1}{\sigma}-2}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Isto significa que se definirmos $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\omega(\xi) \doteq \Omega(|\xi|) = |\xi|^{\frac{1}{\sigma}}$$

teremos $\omega \in \mathscr{M}$, isto é:

- para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$0 = \omega(0) \le \omega(\xi + \eta) \le \omega(\xi) + \omega(\eta);$$

- tem-se

$$\int \frac{\omega(\xi)}{(1 + |\xi|)^{n+1}}\, \mathrm{d}\xi < \infty;$$

e

[2] Em [4], funções Ω com tais propriedades são denominadas *convergence type*.

- existem $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$ tais que

  $$\omega(\xi) \geq a + b \log(1 + |\xi|)$$

  para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Neste caso, define-se o espaço $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ das funções-teste $\phi \in L^1_c(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\int e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\phi}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi < \infty$$

para todo $\lambda > 0$. Conforme [4], este espaço possui naturalmente uma topologia localmente convexa que o torna um limite injetivo de espaços de Fréchet e, portanto, simultaneamente "webbed" e ultrabornológico. Ademais, verifica-se facilmente que convergência (de nets) em $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ implica convergência pontual.

Aproveitamos a oportunidade para demonstrar o seguinte resultado, que situa melhor esta discussão e a contextualiza dentro do ambiente Gevrey que estamos acostumados.

Lema 3.12. *Se $1 < \sigma_0 < \sigma$ então*

$$G^{\sigma_0}_c(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow G^{\sigma}_c(\mathbb{R}^n)$$

sendo que as aplicações de inclusão são contínuas e têm imagens densas. Em particular

$$\mathcal{D}'_\sigma(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'_\omega(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'_{\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$$

continuamente.

Demonstração. Para provar a primeira inclusão, basta recordar a parte fácil do Teorema de Paley-Wiener para funções G^{σ_0} com suporte compacto [28, Theorem 1.6.1]: se $\phi \in G^{\sigma_0}_c(\mathbb{R}^n)$ então existem constantes $C > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$|\hat{\phi}(\xi)| \leq C e^{-\epsilon|\xi|^{\frac{1}{\sigma_0}}}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, se $\lambda > 0$ temos que

$$\int e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\phi}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \leq C \int e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{-\epsilon|\xi|^{\frac{1}{\sigma_0}}} \, \mathrm{d}\xi < \infty$$

sendo que a integral à direita é finita pois $1/\sigma_0 > 1/\sigma$.

Para a segunda inclusão, sejam $\phi \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$. Note que ϕ é necessariamente suave e podemos escrever, para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \, \hat{\phi}(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

e, para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\begin{aligned} D^\alpha \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi}\ \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi}\ \xi^\alpha e^{-\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}\ e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \hat{\phi}(\xi)\ \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

de modo que, em particular,

$$|D^\alpha \phi(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\sup_\xi |\xi|^{|\alpha|} e^{-\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \right) \int e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\phi}(\xi)|\ \mathrm{d}\xi$$

sendo a última integral acima finita pois $\phi \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$. Através de uma aplicação elementar de Cálculo prova-se, contudo, que

$$\begin{aligned} \sup_\xi |\xi|^{|\alpha|} e^{-\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} &= \left(\frac{\sigma|\alpha|}{\lambda}\right)^{\sigma|\alpha|} e^{-\sigma|\alpha|} \\ &\leq \left(\frac{\sigma|\alpha|}{\lambda}\right)^{\sigma|\alpha|} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |D^\alpha \phi(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\phi}(\xi)|\ \mathrm{d}\xi \right) \left(\frac{\sigma|\alpha|}{\lambda}\right)^{\sigma|\alpha|} \\ &= C C_1^{|\alpha|} |\alpha|^{\sigma|\alpha|} \end{aligned}$$

o que, segundo [28, Proposition 1.4.2], garante que ϕ é G^σ.

Provaremos agora que a inclusão $G_c^{\sigma_0}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ é contínua; a prova da continuidade da segunda inclusão é idêntica. Como ambos os espaços são "webbed" e ultrabornológicos, podemos invocar sem medo o Teorema do Gráfico Fechado de De Wilde e concluir que aquela aplicação é contínua se e somente se seu gráfico for fechado em $G_c^{\sigma_0}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$, fato este que verificamos a seguir. Tome $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ um net em $G_c^{\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned} u_\alpha &\to u \text{ em } G_c^{\sigma_0}(\mathbb{R}^n), \\ u_\alpha &\to v \text{ em } \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Como ambas as convergências implicam convergência pontual temos que $v = u$, prova de que o tal gráfico é, de fato, fechado.

Quanto à densidade das inclusões, esta segue do seguinte argumento. Se $1 < \sigma_1 < \sigma_2$ e definirmos

$$\omega_j(\xi) \doteq |\xi|^{\frac{1}{\sigma_j}},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ j \in \{1, 2\},$$

então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\omega_2(\xi) \leq C\omega_1(\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

e logo, de acordo com [4, Theorem 1.3.18], teremos que $\mathcal{D}_{\omega_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}_{\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ contínua e densamente. Daí a tese segue facilmente. $\square$

A partir do espaço $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ define-se [4, Definition 1.5.1] o espaço $\mathcal{E}_\omega(\mathbb{R}^n)$ das funções $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ com a seguinte propriedade: para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ existe uma função em $\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ que coincide com ϕ em K. Este espaço também possui naturalmente uma estrutura de espaço vetorial topológico, cujo dual $\mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com o espaço dos elementos de $\mathcal{D}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ cujo suporte é compacto [4, Theorem 1.6.7].

Conforme [4], denotamos por $\mathscr{K}_\omega$ o conjunto das funções $k : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ tais que existe $\lambda > 0$ satisfazendo

$$k(\xi + \eta) \leq e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} k(\eta) \tag{3.4}$$

para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Graças às propriedades de ω, temos que se $k_1, k_2 \in \mathscr{K}_\omega$ então

$$k_1 + k_2, \ k_1 k_2, \ \sup\{k_1, k_2\}, \ \inf\{k_1, k_2\}$$

são também elementos de $\mathscr{K}_\omega$; ademais, se $k \in \mathscr{K}_\omega$ então

$$k^s \in \mathscr{K}_\omega$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Note ainda que, para cada $\lambda > 0$, a própria função

$$\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \in (0, \infty)$$

pertence a $\mathscr{K}_\omega$.

Recordemos agora a definição dos espaços $\mathcal{B}_{p,k}$ de [4], que estendem a definição original em [18]. Em [4, Definition 1.8.10] é introduzido um subespaço de $\mathcal{D}'_\omega(\mathbb{R}^n)$, denotado por $\mathcal{F}_\omega$ – cuja definição não transcreveremos aqui – que contém $\mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ e, ademais, tem a propriedade de tolerar transformada de Fourier, a qual associa elementos de $\mathcal{F}_\omega$ a elementos de $\mathcal{D}'_\omega(\mathbb{R}^n)$. Assim, dados $k \in \mathscr{K}_\omega$ e $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por $\mathcal{B}_{p,k}$ o espaço daqueles $u \in \mathcal{F}_\omega$ tais que $\hat{u} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $k\hat{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Munimos $\mathcal{B}_{p,k}$ da norma

$$\|u\|_{p,k} \doteq \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int |k(\xi)\hat{u}(\xi)|^p \, \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{p}}$$

se $1 \leq p < \infty$ e, no caso $p = \infty$,

$$\|u\|_{\infty,k} \doteq \text{ess sup}|k\hat{u}|.$$

Em ambos os casos, $\mathcal{B}_{p,k}$ torna-se assim um espaço de Banach.

Já estamos em posição de enunciar um resultado – ora anunciado, com um pouco mais de generalidade (mas sem prova), em [14, Theorem 2.5] – que é a chave da demonstração do Teorema 3.11. Ele é a generalização natural, dentro deste contexto, de [18, Theorem 13.3.3] e cuja demonstração, como ficará evidente, é idêntica em essência. Eis seu enunciado: sua demonstração encontra-se no apêndice.

Teorema 3.13. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\sigma_0 > 1$. Considere $P(x, D)$ um operador diferencial linear com coeficientes em $G^{\sigma_0}(\Omega)$ e com força constante em Ω, e fixemos $x_0 \in \Omega$, para o qual definimos*

$$P_0(D) \doteq P(x_0, D).$$

Se $X \subset \Omega$ for uma vizinhança aberta suficientemente pequena de x_0 então existe uma aplicação linear $E : \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ com as seguintes propriedades.

1. *$P(x, D)Ef = f$ em X se $f \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$.*

2. *$EP(x, D)u = u$ em X se $u \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ tem suporte contido em X.*

3. *Para todo $k \in \mathscr{K}_\omega$ existe uma constante $C_k > 0$ tal que*

$$\|Ef\|_{p,\tilde{P}_0 k} \leq C_k \|f\|_{p,k}, \ \forall f \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}_{p,k}. \tag{3.5}$$

Demonstração. No apêndice. □

Demonstração do Teorema 3.11. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $X \subset \Omega$ uma vizinhança aberta suficientemente pequena de x_0 como no Teorema 3.13; sejam, ainda, $P_0(D)$ e $E : \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ como naquele teorema.

Seja $u \in C_c^\infty(X)$ e suponha que $f \doteq P(x, D)u \in G_c^\sigma(X)$, para algum $\sigma > \sigma_0$ fixado: provaremos que $u \in G_c^\sigma(X)$. Da versão Gevrey do Teorema de Paley-Wiener, existe $\lambda > 0$ tal que, se definirmos $k : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ por

$$k(\xi) \doteq e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}$$

(que, conforme ora mencionado, é um elemento de $\mathscr{K}_\omega$), teremos $k\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja $f \in \mathcal{B}_{\infty,k}$.

Da desigualdade (3.5) temos $Ef \in \mathcal{B}_{\infty,\tilde{P}_0 k}$ e, em particular, para $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned} e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}|(\widehat{P_0(D)Ef})(\xi)| &= e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}|P_0(\xi)||\widehat{Ef}(\xi)| \\ &\leq e^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}\tilde{P}_0(\xi)|\widehat{Ef}(\xi)| \\ &\leq \|Ef\|_{\infty,\tilde{P}_0 k} \end{aligned}$$

donde concluímos que $P_0(D)Ef \in G_c^\sigma(\mathbb{R}^n)$, mais uma vez graças ao Teorema de Paley-Wiener. Ademais, já sabemos que operadores de coeficientes constantes têm a propriedade de não-confinamento das singularidades G^σ em $\mathbb{R}^n$, de modo que $Ef \in G_c^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Mas $\operatorname{supp} u \subset X$ e, logo,

$$u = EP(x,D)u = Ef$$

em X, o que prova que $u \in G_c^\sigma(X)$. □

Capítulo 4

Estruturas localmente integráveis

Concluímos este trabalho com a análise de certos complexos diferenciais de primeira ordem, naturalmente associados às ditas *estruturas involutivas* ou *formalmente integráveis* (vide [29] e [3]). Estamos particularmente interessados na questão de resolubilidade local (isto é, quando tais complexos são exatos no sentido de germes) para a classe das *estruturas localmente integráveis.*

4.1 Estruturas localmente integráveis Gevrey

Seja $\sigma_0 \geq 1$. Neste capítulo, denotaremos por X uma variedade real-analítica e por $\mathrm{T}' \subset \mathbb{C}T^*X$ um subfibrado vetorial G^{σ_0}, que suporemos *localmente integrável*: cada ponto de X possui uma vizinhança onde T' admite um referencial formado por diferenciais exatas de funções suaves. Seguindo a notação corrente nesta teoria, denotamos

$$m \doteq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{T}',$$
$$n \doteq \dim X - m.$$

A partir de T', construímos uma família de fibrados vetoriais sobre X, seguindo a receita apresentada em [29]. Dados $p \in \{0, \dots, m\}$ e $q \in \{0, \dots, n\}$ definimos[1]

$$\mathrm{T}'^{p,q} \doteq \left(\wedge^p \mathrm{T}'\right) \wedge \left(\wedge^q \mathbb{C}T^*X\right)$$

o qual consideramos como um subfibrado vetorial de $\wedge^{p+q}\mathbb{C}T^*X$. Claramente temos que $\mathrm{T}'^{p+1,q-1}$ é subfibrado de $\mathrm{T}'^{p,q}$, donde podemos definir o fibrado quociente

$$\Lambda^{p,q} \doteq \mathrm{T}'^{p,q} \,/\, \mathrm{T}'^{p+1,q-1}$$

o qual é um fibrado vetorial G^{σ_0} sobre X. A propriedade de T' ser localmente integrável é suficiente – embora, de fato, saibamos que basta supor involutividade – para garantir que d, a derivada exterior de X, leva seções (generalizadas) de $\mathrm{T}'^{p,q}$ em seções (generalizadas) de $\mathrm{T}'^{p,q+1}$ e, portanto, induz

[1] A fim de simplificar a notação, estabelecemos duas convenções.

1. Se E é um fibrado vetorial complexo sobre X então $\wedge^0 E \doteq X \times \mathbb{C}$.
2. $\mathrm{T}'^{p,-1} \doteq X \times \{0\}$.

um operador diferencial de primeira ordem $\Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p,q+1}$, o qual denotamos por d'. É evidente que temos então para cada $p \in \{0, \ldots, m\}$ fixado um complexo diferencial, isto é, $\mathrm{d}' \circ \mathrm{d}' = 0$ em cada nível, uma vez que relação análoga vale para a derivada exterior.

Fixado um ponto de X – que denominaremos *a origem* – a hipótese de integrabilidade local permite-nos encontrar uma vizinhança aberta $\Omega \subset X$ da origem que é domínio de um sistema de coordenadas $(x, t) = (x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n)$, de classe G^{σ_0} e centrado na origem, com as seguintes propriedades:

1. existem funções $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \in G^{\sigma_0}(\Omega; \mathbb{R})$ tais que, para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\begin{aligned} \Phi_k(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}(0,0) &= 0, \ j \in \{1, \ldots, n\}, \end{aligned}$$

   e, se definirmos

$$Z_k(x,t) \doteq x_k + i\Phi_k(x,t), \ k \in \{1, \ldots, m\},$$

   teremos que $\mathrm{d}Z_1, \ldots, \mathrm{d}Z_m$ formam um referencial para T' em Ω; e

2. $\mathrm{d}Z_1, \ldots, \mathrm{d}Z_m, \mathrm{d}t_1, \ldots, \mathrm{d}t_n$ formam um referencial para $\mathbb{C}T^*X$ em Ω.

Fixemos $\sigma \geq \sigma_0$ tal que $\sigma > 1$. A segunda propriedade acima permite construir isomorfismos

$$\mathcal{D}'_\sigma(U; \Lambda^{p,q}) \cong \left\{ \sideset{}{'}\sum_{|I|=p} \sideset{}{'}\sum_{|J|=q} u_{IJ} \ \mathrm{d}Z_I \wedge \mathrm{d}t_J \ ; \ u_{IJ} \in \mathcal{D}'_\sigma(U) \right\} \tag{4.1}$$

onde $U \subset \Omega$ é um aberto e estabelecemos a convenção de que as somas marcadas $(')$ acima se dão apenas sobre multi-índices ordenados. Se denotarmos por $\mathrm{M}_1, \ldots \mathrm{M}_m, \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n \in G^{\sigma_0}(\Omega; \mathbb{C}TX)$ o referencial dual de $\mathrm{d}Z_1, \ldots, \mathrm{d}Z_m, \mathrm{d}t_1, \ldots, \mathrm{d}t_n$ podemos também representar, segundo esses isomorfismos, o operador $\mathrm{d}' : \mathcal{D}'_\sigma(U; \Lambda^{p,q}) \to \mathcal{D}'_\sigma(U; \Lambda^{p,q+1})$ da seguinte forma: se $u \in \mathcal{D}'_\sigma(U; \Lambda^{p,q})$ é representado (unicamente) por

$$u = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p} \sideset{}{'}\sum_{|J|=q} u_{IJ} \ \mathrm{d}Z_I \wedge \mathrm{d}t_J$$

então $\mathrm{d}'u \in \mathcal{D}'_\sigma(U; \Lambda^{p,q+1})$ é representado por

$$\mathrm{d}'u = \sum_{j=1}^{n} \sideset{}{'}\sum_{|I|=p} \sideset{}{'}\sum_{|J|=q} \mathrm{L}_j u_{IJ} \ \mathrm{d}t_j \wedge \mathrm{d}Z_I \wedge \mathrm{d}t_J \tag{4.2}$$

(note que esta não é a representação única dada pelos isomorfismos acima, uma vez que agora os multi-índices precisam ser ordenados). Quando for necessário ser mais específico, denotaremos este operador por $\mathrm{d}'_{(p,q)}$. Ademais, se $\mathcal{F}(U)$ é um subespaço de $\mathcal{D}'_\sigma(U)$ denotaremos, quando fizer sentido,

$$\mathcal{F}(U;\Lambda^{p,q}) \doteq \left\{ \sum_{|I|=p}' \sum_{|J|=q}' u_{IJ}\ \mathrm{d}Z_I \wedge \mathrm{d}t_J \ ;\ u_{IJ} \in \mathcal{F}(U) \right\}. \tag{4.3}$$

Uma observação fundamental aqui, assim como em praticamente todas as manipulações algébricas que faremos no decorrer deste capítulo, é que os campos $\mathrm{M}_1, \dots \mathrm{M}_m, \mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n$ comutam dois a dois entre si.

No presente capítulo, estaremos majoritariamente interessados em estudar a seguinte noção de resolubilidade local, do operador d' em um grau $q \in \{1, \dots, n\}$ fixado, no contexto Gevrey, além de suas relações com outras propriedades.

Propriedade 4.1. *Para cada $U \subset \Omega$ vizinhança aberta da origem e cada $f \in G^{\sigma}(U;\Lambda^{0,q})$ tal que $\mathrm{d}'f = 0$ existem $V \subset U$ outra vizinhança aberta da origem e $u \in \mathcal{D}'_{\sigma}(V;\Lambda^{0,q-1})$ tais que $\mathrm{d}'u = f|_V$.*

Em particular, gostaríamos de relacioná-la com a noção clássica de resolubilidade local para tais operadores, a saber:

Propriedade 4.2. *Para cada $U \subset \Omega$ vizinhança aberta da origem e cada $f \in C^{\infty}(U;\Lambda^{0,q})$ tal que $\mathrm{d}'f = 0$ existem $V \subset U$ outra vizinhança aberta da origem e $u \in \mathcal{D}'(V;\Lambda^{0,q-1})$ tais que $\mathrm{d}'u = f|_V$.*

É óbvio que a segunda propriedade acima implica a primeira: uma conjectura enunciada em [24] sugere que ambas as noções são, de fato, equivalentes, e lá mostra-se que tal conjectura é verdadeira para certas classes de estruturas localmente integráveis cuja forma de Levi é não-degenerada. Esta questão é abordada na última seção do presente capítulo no caso em que T' é um fibrado de linha real-analítico, caso este para o qual fornecemos uma resposta positiva à conjectura.

4.2 Não-confinamento de singularidades

Nesta seção trataremos de questões relacionadas ao operador $\mathrm{d}'_{(p,0)}$ para $p \in \{0, m\}$, o qual denotaremos aqui simplesmente por d': mantemos as definições e notações da seção anterior. A principal observação aqui, para $p \in \{0, n\}$, é que se $U \subset \Omega$ é um aberto qualquer então

- $\mathcal{D}'_{\sigma}(U;\Lambda^{p,0}) \cong \mathcal{D}'_{\sigma}(U)$ pelo isomorfismo (4.1) e
- se $\mathcal{F}(U)$ é um subespaço de $\mathcal{D}'_{\sigma}(U)$ então, segundo (4.3) e (4.1),

$$\mathcal{F}(U;\Lambda^{p,0}) \cong \mathcal{F}(U)$$

e, ademais, inferimos da representação (4.2) que vale

$$\mathrm{d}'u \in \mathcal{F}(U;\Lambda^{p,1}) \Longleftrightarrow \mathrm{L}_j u \in \mathcal{F}(U) \text{ para todo } j \in \{1, \dots, n\}$$

para todo $u \in \mathcal{D}'_{\sigma}(U)$.

Especificamente, veremos um resultado que relaciona a condição $(\mathcal{P}_{n-1})$ – conforme [8], e cuja definição recordamos a seguir – ao não-confinamento das singularidades Gevrey de d'.

Definição 4.3. Dados E um espaço topológico, $f : E \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $K \subset E$ um compacto, dizemos que f *atinge mínimo local em* K se existem $a \in \mathbb{R}$ e $V \subset E$ vizinhança aberta de K tais que $f = a$ em K e $f > a$ em $V \setminus K$.

Definição 4.4. Dizemos que T' satisfaz a *condição* $(\mathcal{P}_{n-1})$ *na origem* se existir $V \subset \Omega$ vizinhança aberta da origem com a seguinte propriedade: para cada aberto $W \subset V$ e cada $w \in C^\infty(W)$ solução de T' – isto é, $\mathrm{d}'w = 0$ em W – temos que $\Re w$ não atinge mínimo local em qualquer compacto não-vazio de W.

Proposição 4.5. *Suponha que $m = 1$, que $n \geq 2$ e que T' satisfaz a condição $(\mathcal{P}_{n-1})$ na origem. Então existe $U \subset \Omega$ vizinhança aberta da origem com a seguinte propriedade, para todo $\sigma \geq \sigma_0$ tal que $\sigma > 1$: se $u \in C_c^\infty(U)$ é tal que $\mathrm{L}_j u \in G_c^\sigma(U)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ então $u \in G_c^\sigma(U)$. Noutras palavras, d' possui a propriedade de não-confinamento das singularidades G^σ em U.*

Demonstração. Seja $Z = Z_1 \in G^{\sigma_0}(\Omega)$ como na Seção 4.1. De acordo com [9, Proposition 0.3] (veja também sua demonstração), existem $U \subset \Omega$ vizinhança aberta da origem e $C > 0$ tais que

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C \|\mathrm{d}\chi \wedge \mathrm{d}Z\|_{L^\infty}, \ \forall v \in C_c^\infty(U),$$

onde $\chi \doteq (1 - \mathrm{M}^2)^k v$: aqui, $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \in G^{\sigma_0}(\Omega; \mathbb{C}TX)$ é como na Seção 4.1 e k é o menor inteiro estritamente maior que $n/2$. Note que

$$\mathrm{d}\chi \wedge \mathrm{d}Z = \sum_{j=1}^{n} (1 - \mathrm{M}^2)^k \ \mathrm{L}_j v \ \mathrm{d}t_j \wedge \mathrm{d}Z$$

e, logo, temos que

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C \sum_{j=1}^{n} \|(1 - \mathrm{M}^2)^k \ \mathrm{L}_j v\|_{L^\infty}, \ \forall v \in C_c^\infty(U). \tag{4.4}$$

Ademais, [6, Proposition 2.2] garante que um certo $f \in C_c^\infty(U)$ pertencerá a $G_c^\sigma(U)$ se e somente se existir $h > 0$ tal que

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \sup_{r \in \mathbb{Z}_+} h^{-|\alpha| - r} \alpha!^{-\sigma} r!^{-\sigma} \sup |\mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^r f| < \infty.$$

Seja $u \in C_c^\infty(U)$ tal que $\mathrm{L}_j u \in G_c^\sigma(U)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Então também teremos $(1 - \mathrm{M}^2)^k \mathrm{L}_j u \in G_c^\sigma(U)$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, de modo que a observação anterior garante a existência de $h > 0$ tal que

$$C_j \doteq \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \sup_{r \in \mathbb{Z}_+} h^{-|\alpha| - r} \alpha!^{-\sigma} r!^{-\sigma} \sup \left| \mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^r \left((1 - \mathrm{M}^2)^k \ \mathrm{L}_j u \right) \right| \tag{4.5}$$

é finito para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $r \in \mathbb{Z}_+$ aplicamos (4.4) para $v \doteq \mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^r u$ e obtemos

$$\begin{aligned} \sup |\mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^r u| &\leq C \sum_{j=1}^n \sup \left|(1 - \mathrm{M}^2)^k \, \mathrm{L}_j (\mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^r u)\right| \\ &= C \sum_{j=1}^n \sup \left|\mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^r \left((1 - \mathrm{M}^2)^k \, \mathrm{L}_j u\right)\right| \end{aligned}$$

sendo a última igualdade acima devida à comutatividade dos campos. Dividindo ambos os lados por $h^{|\alpha|+r} \alpha!^\sigma r!^\sigma$ e maximizando sobre os multi-índices no lado direito temos

$$h^{-|\alpha|-r} \alpha!^{-\sigma} r!^{-\sigma} \sup |\mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^r u| \leq C \sum_{j=1}^n C_j$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $r \in \mathbb{Z}_+$, onde $C_j > 0$ é definido como em (4.5): temos $u \in G_c^\sigma(U)$. $\square$

4.3 Uma desigualdade *a priori*

Desta seção em diante suporemos que $\sigma_0 = 1$, isto é, que T' é um fibrado real-analítico. Continuaremos a denotar por $\Omega \subset X$ uma vizinhança aberta da origem, conforme posto na Seção 4.1, a qual identificamos com uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ por meio do sistema de coordenadas real-analítico (x, t) lá descrito.

Fixemos $\sigma > 1$ e recordemos alguma notação da teoria Gevrey usual em espaços euclideanos (conforme exposto em [28], por exemplo).

- Se $K \subset \Omega$ é compacto definimos

  $$G^{\sigma,h}(K) \doteq \{f \in C^\infty(K) \; ; \; \|f\|_{K,\sigma,h} < \infty\}$$

  para cada $h > 0$, onde

  $$\|f\|_{K,\sigma,h} \doteq \sup_\alpha h^{-|\alpha|} (\alpha!)^{-\sigma} \sup_K |\partial^\alpha f|.$$

- Dado $U \subset \Omega$ aberto definimos, ainda

  $$G^{\sigma,h}(U) \doteq \bigcap_{K \subset U} G^{\sigma,h}(K)$$

  para cada $h > 0$ fixado.

Observe que os espaço descritos acima não são invariantes sob mudanças de coordenadas, mesmo aquelas que são reais-analíticas.

Fixamos $q \in \{1, \ldots, n\}$. Em [24, Proposition 3.1] – cujo enunciado recordamos abaixo – prova-se que na presença da Propriedade 4.1 vale a seguinte desigualdade.

Proposição 4.6. *Suponha que a Propriedade 4.1 seja satisfeita. Neste caso, dados $U \subset \Omega$ uma vizinhança aberta suficientemente pequena da origem, $h_1 > 0$ e $0 < \epsilon < h_2$, existem*

- *$K \subset U$ compacto,*
- *$V \subset\subset U$ outra vizinhança aberta da origem e*
- *$C > 0$*

tais que

$$\left| \int f \wedge v \right| \leq C \, \|f\|_{K,\sigma,h_1} \, \|\mathrm{d}'v\|_{\overline{V},\sigma,h_2}$$

para cada $f \in G^{\sigma,h_1}(U;\Lambda^{0,q})$ satisfazendo $\mathrm{d}'f = 0$ e cada $v \in G_c^{\sigma,h_2-\epsilon}(V;\Lambda^{m,n-q})$.

Demonstração. Omitida. □

Antes de extrairmos nossas primeiras conclusões do resultado acima, recordamos ainda [24, Proposition 2.1], que reescrevemos num formato sutilmente mais conveniente para nossos propósitos, e cuja dedução é imediata a partir de seu enunciado original.

Lema 4.7. *Seja $\psi \in C^\omega(\Omega)$. Dados*

- *$K \subset \Omega$ compacto,*
- *$h > 0$ e*
- *$1 < \sigma' < \sigma''$*

existe $C > 0$ tal que, para todo $\rho > 0$,

$$\|\exp(\rho\psi)\|_{K,\sigma'',h} \leq C \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right)$$

ou, noutras palavras,

$$\sup_K |\partial^\alpha \exp(\rho\psi)| \leq C \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) h^{|\alpha|} (\alpha!)^{\sigma''}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, onde

$$a \doteq \sup_K \Re\psi.$$

Demonstração. Omitida. □

O próximo passo é estimar a norma Gevrey do produto de uma função exponencial (como aquelas introduzidas no enunciado anterior) por uma função arbitrária. O propósito destas estimativas ficará claro nos resultados subsequentes.

Corolário 4.8. *Sejam*

- $\psi \in C^\omega(\Omega)$,
- $K \subset \Omega$ *compacto,*
- $h > 0$ *e*
- $1 < \sigma' < \sigma$.

Então existe $M > 0$ *tal que*

$$\|\exp(\rho\psi) f\|_{K,\sigma,h} \leq M \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|f\|_{K,\sigma,h} \tag{4.6}$$

para todo $f \in G^{\sigma,h}(\Omega)$ *e todo* $\rho > 0$, *onde* $a \doteq \sup_K \Re\psi$.

Demonstração. Tome $\sigma'' \in (\sigma', \sigma)$ e $C > 0$ como no Lema 4.7: temos, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$,

$$\begin{aligned}
\sup_K |\partial^\alpha (\exp(\rho\psi) f)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_K |\partial^\beta \exp(\rho\psi)| \sup_K |\partial^{\alpha-\beta} f| \\
&\leq C \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} h^{|\beta|} (\beta!)^{\sigma''} \sup_K |\partial^{\alpha-\beta} f| \\
&\leq C \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|f\|_{K,\sigma,h} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} h^{|\beta|} (\beta!)^{\sigma''} h^{|\alpha-\beta|} (\alpha-\beta)!^\sigma \\
&= C \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|f\|_{K,\sigma,h} h^{|\alpha|} (\alpha!)^\sigma \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^{1-\sigma} (\beta!)^{\sigma''-\sigma} \\
&\leq C \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|f\|_{K,\sigma,h} h^{|\alpha|} (\alpha!)^\sigma \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^N} (\beta!)^{\sigma''-\sigma} \\
&\leq M \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|f\|_{K,\sigma,h} h^{|\alpha|} (\alpha!)^\sigma.
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade resultante por $h^{|\alpha|}(\alpha!)^\sigma$ e tomando o supremo em relação a $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ obtemos (4.6). □

Finalmente estamos prontos para estabelecer algumas consequências particularmente úteis da Proposição 4.6.

Corolário 4.9. *Suponha válida a Propriedade 4.1. Dados* $U \subset \Omega$ *vizinhança aberta suficientemente pequena da origem,* $h_1 > 0$ *e* $0 < \epsilon < h_2$, *existe* $V \subset\subset U$ *outra vizinhança aberta da origem com a seguinte propriedade: se* $f \in G^{\sigma,h_1}(U; \Lambda^{0,q})$ *com* $\mathrm{d}' f = 0$ *e* $v \in G_c^{\sigma,h_2-\epsilon}(V; \Lambda^{m,n-q})$ *forem tais que existem*

- $W \subset U$ *vizinhança aberta de* $\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} v$ *e*

- $w \in C^\omega(W)$ *solução de* T' *satisfazendo*

$$\Re w \leq 0 \ \textit{em} \operatorname{supp} f,$$
$$\Re w > 0 \ \textit{em} \operatorname{supp} \mathrm{d}' v$$

então

$$\int f \wedge v = 0.$$

Demonstração. Sejam $K \subset U$, $V \subset\subset U$ e $C > 0$ como na Proposição 4.6. Note inicialmente que se $K \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$ então

$$\|f\|_{K,\sigma,h_1} = 0$$

e neste caso a Proposição 4.6 implica automaticamente que

$$\int f \wedge v = 0.$$

Assim, supomos daqui em diante que $K \cap \operatorname{supp} f \neq \emptyset$.

Definimos, para $\rho > 0$,

$$f_\rho \doteq \exp(\rho w) f \in G^{\sigma,h_1}(U; \Lambda^{0,q})$$
$$v_\rho \doteq \exp(-\rho w) v \in G_c^{\sigma,h_2-\epsilon}(V; \Lambda^{m,n-q}).$$

Estes estão bem definidos posto que o domínio de w contém os suportes de ambos f e v. Observe ainda que $f_\rho \wedge v_\rho = f \wedge v$, de modo que

$$\int f_\rho \wedge v_\rho = \int f \wedge v$$

para todo $\rho > 0$. Ademais

$$\mathrm{d}' f_\rho = \mathrm{d}'\{\exp(\rho w) f\} = \exp(\rho w) \mathrm{d}' f = 0$$

pois w é solução de T': da Proposição 4.6 temos que

$$\left| \int f_\rho \wedge v_\rho \right| \leq C \ \|f_\rho\|_{K,\sigma,h_1} \ \|\mathrm{d}' v_\rho\|_{\overline{V},\sigma,h_2}$$

para todo $\rho > 0$.

Fixemos $\sigma' \in (1, \sigma)$. Definindo $\psi \doteq w \in C^\omega(W)$ e

$$a \doteq \sup_{K \cap \operatorname{supp} f} \Re w \leq 0$$

e aplicando o Corolário 4.8 temos, raciocinando coeficiente a coeficiente:

$$\begin{aligned} \|f_\rho\|_{K,\sigma,h_1} &= \|\exp(\rho w) f\|_{K,\sigma,h_1} \\ &= \|\exp(\rho w) f\|_{K \cap \operatorname{supp} f,\sigma,h_1} \\ &\leq M \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|f\|_{K \cap \operatorname{supp} f,\sigma,h_1} \\ &\leq M \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|f\|_{K,\sigma,h_1} \end{aligned}$$

onde $M > 0$ é uma constante que não depende de $\rho > 0$.

Redefinimos $\psi \doteq -w \in C^\omega(W)$ e

$$b \doteq \sup_{\operatorname{supp} \mathrm{d}' v} (-\Re w) < 0$$

(tendo em mente que $\operatorname{supp} \mathrm{d}' v \subset \operatorname{supp} v \subset W$) temos, aplicando novamente o Corolário 4.8 e procedendo da mesma forma:

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}' v_\rho\|_{\overline{V},\sigma,h_2} &= \|\mathrm{d}' \exp(-\rho w) v\|_{\overline{V},\sigma,h_2} \\ &= \|\exp(-\rho w) \mathrm{d}' v\|_{\overline{V},\sigma,h_2} \\ &= \|\exp(-\rho w) \mathrm{d}' v\|_{\operatorname{supp} \mathrm{d}' v,\sigma,h_2} \\ &\leq M' \exp\left(b\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|\mathrm{d}' v\|_{\operatorname{supp} \mathrm{d}' v,\sigma,h_2} \\ &\leq M' \exp\left(b\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|\mathrm{d}' v\|_{\overline{V},\sigma,h_2} \end{aligned}$$

onde, mais uma vez, $M' > 0$ não depende de $\rho > 0$.

Por fim, note que para cada $\rho > 0$ tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int f \wedge v \right| = \left| \int f_\rho \wedge v_\rho \right| & \\ &\leq C \ \|f_\rho\|_{K,\sigma,h_1} \ \|\mathrm{d}' v_\rho\|_{\overline{V},\sigma,h_2} \\ &\leq CM \exp\left(a\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|f\|_{K,\sigma,h_1} M' \exp\left(b\rho + \rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|\mathrm{d}' v\|_{\overline{V},\sigma,h_2} \\ &= CMM' \exp\left((a+b)\rho + 2\rho^{\frac{1}{\sigma'}}\right) \|f\|_{K,\sigma,h_1} \|\mathrm{d}' v\|_{\overline{V},\sigma,h_2} \\ &\to 0 \text{ quando } \rho \to \infty \end{aligned}$$

pois $a + b < 0$. $\square$

Corolário 4.10. *Suponhamos a validade da Propriedade 4.1 e fixemos $\sigma' \in (1, \sigma)$. Dada $U \subset \Omega$ vizinhança aberta suficientemente pequena da origem existe $V \subset\subset U$ outra vizinhança aberta da origem desfrutando da seguinte propriedade: se $f \in G^{\sigma'}(U; \Lambda^{0,q})$ com $\mathrm{d}' f = 0$ e $v \in G_c^{\sigma'}(V; \Lambda^{m,n-q})$ são tais que existem*

- *$W \subset U$ vizinhança aberta de $\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} v$ e*
- *$w \in C^\omega(W)$ solução de T' satisfazendo*

$$\Re w \leq 0 \text{ em } \operatorname{supp} f,$$
$$\Re w > 0 \text{ em } \operatorname{supp} \mathrm{d}' v$$

então

$$\int f \wedge v = 0.$$

Demonstração. Basta recordar que se $\sigma' < \sigma$ então

$$G^{\sigma'}(U) \subset G^{\sigma, h_1}(U)$$
$$G^{\sigma'}(V) \subset G^{\sigma, h_2 - \epsilon}(V)$$

independentemente da natureza das constantes: a conclusão segue do Corolário 4.9. □

Encerramos esta seção com uma pequena aplicação dos resultados acima à resolubilidade em grau máximo. Para isto, considere a seguinte variação da condição $(\mathcal{P}_{n-1})$ introduzida em [24].

Definição 4.11. Dizemos que T' satisfaz a *condição $(\mathcal{P}_{n-1}^\omega)$ na origem* se existir $V \subset \Omega$ vizinhança aberta da origem com a seguinte propriedade: para cada aberto $W \subset V$ e cada $w \in C^\omega(W)$ solução de T' temos que $\Re w$ não atinge mínimo local em qualquer compacto não-vazio de W.

É claro que a condição $(\mathcal{P}_{n-1})$ implica a condição $(\mathcal{P}_{n-1}^\omega)$, contudo não pudemos determinar a validade da recíproca. O resultado a seguir já foi anunciado, sem prova, em [24].

Proposição 4.12. *Suponha que a Propriedade 4.1 é válida para $q = n$. Então T' satisfaz a condição $(\mathcal{P}_{n-1}^\omega)$ na origem.*

Demonstração. Sejam $\sigma' \in (1, \sigma)$ e $U \subset \Omega$ uma vizinhança aberta da origem, suficientemente pequena no sentido do Corolário 4.10, e seja $V \subset\subset U$ conforme aquele enunciado.

Suponhamos por absurdo que a condição $(\mathcal{P}_{n-1}^\omega)$ *não vale* na origem: podemos encontrar um aberto $W \subset V$, uma solução $w \in C^\omega(W)$ de T' e um compacto não-vazio $K \subset W$ tal que $\Re w$ atinge mínimo local em K. Sem perda de generalidade, pode-se supor que $\Re w = 0$ em K e $\Re w > 0$ em $W \setminus K$.

Seja $\zeta \in G_c^{\sigma'}(W)$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$ em W e $\zeta = 1$ numa vizinhança de K. Definimos $v \in G_c^{\sigma'}(V; \Lambda^{m,0})$ por

$$v \doteq \zeta \, \mathrm{d}Z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}Z_m$$

donde temos

$$\operatorname{supp} v = \operatorname{supp} \zeta \subset W.$$

Note ainda a existência de um $\epsilon > 0$ tal que

$$\Re w \geq \epsilon \text{ em } W \setminus \zeta^{-1}\{0,1\} \tag{4.7}$$

o que nos permite selecionar $\psi \in G_c^{\sigma'}(W)$ satisfazendo

$$\Re w < \frac{\epsilon}{2} \text{ em } \operatorname{supp} \psi. \tag{4.8}$$

Definimos então $f \in G^{\sigma'}(U; \Lambda^{0,n})$ por

$$f \doteq \psi \, \mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_n$$

donde, mais uma vez,

$$\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} \psi \subset W.$$

Uma vez que estamos tratando o caso de grau máximo (ou seja, $q = n$) não há sentido em verificar que f é d'-fechado. Com um pouco de criatividade, podemos ainda especificar ζ e ψ de modo a garantir que

$$\int f \wedge v = \int \psi \, \zeta \, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}Z \neq 0. \tag{4.9}$$

Contudo, (4.7) e (4.8) agora implicam que

$$\begin{aligned} \Re w &\geq \epsilon \text{ em } \operatorname{supp} \mathrm{d}'v \\ \Re w &< \frac{\epsilon}{2} \text{ em } \operatorname{supp} f \end{aligned}$$

e definindo $\tilde{w} \doteq w - \frac{3\epsilon}{4}$ – que, a propósito, é outra solução real-analítica de T' em W – temos

$$\begin{aligned} \Re \tilde{w} &\geq \frac{\epsilon}{4} > 0 \text{ em } \operatorname{supp} \mathrm{d}'v \\ \Re \tilde{w} &< -\frac{\epsilon}{4} \leq 0 \text{ em } \operatorname{supp} f \end{aligned}$$

o que contradiz o Corolário 4.10 em vista de (4.9). $\square$

4.4 Estruturas de coposto 1

Nesta seção, além da hipótese de analiticidade ($\sigma_0 = 1$), suporemos adicionalmente que $m = 1$, ou seja, que T' é um fibrado de linha complexo. Para cada $q \in \{1, \dots, n\}$ fixado provaremos, neste contexto, que:

Teorema 4.13. *A Propriedade 4.1 implica a Propriedade 4.2.*

Nossa estratégia será provar que a Propriedade 4.1 implica a condição $(\star)_{q-1}$ de F. Treves, que agora sabemos implicar a Propriedade 4.2, conforme [10]. A fim de fazê-lo, rastreamos os argumentos em [12], onde prova-se que a Propriedade 4.2 implica a condição $(\star)_{q-1}$ quando T' tem dimensão 1. No nosso caso, entretanto, adaptamos toda a argumentação para extrair as hipóteses necessárias do ambiente Gevrey.

Observação 4.14. Como estaremos acompanhando de perto os argumentos em [12], alertamos o leitor para uma pequena inconsistência na notação a respeito do índice q: em [12], este varia de 0 a $n-1$, enquanto no presente trabalho varia de 1 a n, e uma translação de $+1$ relaciona ambas as notações. Enfatizamos que nossa escolha de índices é fiel às exposições mais recentes da teoria, mas tal disparidade torna difícil fazer referência direta aos resultados em [12], usando a notação moderna, de modo consistente sem reenunciar cada proposição. Pedimos por gentileza ao leitor que seja paciente e cuidadoso ao comparar ambos os trabalhos, e a nos ajudar a rastrear os índices corretamente – embora nem sempre sejamos totalmente rigorosos ao nos referirmos a eles.

Seguiremos assumindo, por simplicidade, que $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é vizinhança aberta da origem, cujas coordenadas denotamos por $(x, t) = (x, t_1, \dots, t_n)$, que $\Phi \in C^\omega(\Omega; \mathbb{R})$ satisfaz

$$\Phi(0,0) = 0$$
$$\Phi_x(0,0) = 0$$

e que $Z \in C^\omega(\Omega)$ definido por

$$Z(x,t) \doteq x + i\Phi(x,t),\ (x,t) \in \Omega,$$

é uma integral primeira de T'.

Referimos o leitor a [12] para a definição da condição $(\star)_{q-1}$, e recordamos algumas notações daquele artigo. Primeiramente, fixamos $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ tal que a *fibra*

$$\mathcal{S} \doteq Z^{-1}(z_0) = \{(x,t) \in \Omega \ ;\ x = x_0,\ \Phi(x_0,t) = y_0\}$$

seja uma subvariedade mergulhada de codimensão 2 em Ω, isto é $\dim \mathcal{S} = n - 1$. Ademais, dado um aberto arbitrário $U \subset \Omega$, denotamos por

$$U_0 \doteq \{t \in \mathbb{R}^n \ ;\ (x_0, t) \in U\}$$

a projeção na variável t do conjunto $U \cap (\{x_0\} \times \mathbb{R}^n)$, o qual é, portanto, um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Neste caso definimos, ainda,

$$U_0^+ \doteq \{t \in U_0 \ ; \ \Phi(x_0, t) > y_0\},$$
$$U_0^- \doteq \{t \in U_0 \ ; \ \Phi(x_0, t) < y_0\}.$$

Estaremos interessados na seguinte propriedade, relativa a um par (U, V) de vizinhanças abertas das origem tais que $V \subset U$ (recordemos que $q \in \{1, \dots, n\}$ está fixado):

Propriedade 4.15. *Para todo $g \in C^\infty(U_0; \wedge^{q-1}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$ e todo $u \in C_c^\infty(V_0; \wedge^{n-q}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$ satisfazendo uma das duas condições abaixo*

- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^-$ *e* $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^+ \cap V_0$, *ou*
- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^+$ *e* $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^- \cap V_0$

temos que

$$\int g \wedge \mathrm{d}u = 0.$$

A razão para nosso interesse na propriedade enunciada acima é o seguinte resultado, extraído de [12]. A fim de simplificar a notação, diremos que um aberto limitado de Ω é *cilíndrico* se for produto de um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ por uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$. O *centro* de um tal aberto cilíndrico é um ponto particular naquele conjunto definido da maneira óbvia.

Proposição 4.16. *Suponha que para todo $U \subset \Omega$ aberto cilíndrico centrado na origem suficientemente pequeno existe $V \subset U$ uma vizinhança aberta da origem (não necessariamente cilíndrica) tal que o par (U, V) satisfaz a Propriedade 4.15 para toda fibra regular $\mathcal{S} = Z^{-1}(z_0)$. Então vale a condição $(\star)_{q-1}$ na origem.*

Demonstração. A condição $(\star)_{q-1}$ na origem é equivalente à aciclicidade de Z na origem em dimensão $q-1$, que é o mesmo, de acordo com os resultados [12, Proposition 5.2, Proposition 5.3] combinados, que a seguinte propriedade: para cada $U' \subset \Omega$ vizinhança aberta da origem deve existir $V' \subset U'$ outra vizinhança aberta da origem tal que o $(q-1)$-ésimo número de intersecção de $\mathcal{S}$ relativo ao par (U', V') anula-se identicamente, para toda $\mathcal{S}$ fibra regular de Z. É isto que iremos provar.

Assim, tomemos $U' \subset \Omega$ vizinhança aberta da origem e $\mathcal{S}$ uma fibra regular arbitrária de Z. Seja $U \subset U'$ um aberto cilíndrico centrado na origem – suficientemente pequeno como nas hipóteses, independentemente de $\mathcal{S}$ – para o qual aplicamos a hipótese de existência de uma vizinhança aberta da origem $V \subset U$ (também independente de $\mathcal{S}$) tal que a Propriedade 4.15 valha para o par (U, V).

Seja agora $V' \subset V$ um aberto cilíndrico centrado na origem (como sempre, escolhido independentemente de $\mathcal{S}$): posto que a Propriedade 4.15 claramente persiste se encolhermos V, ela continua válida para o par (U, V'). Como ambos U e V' são abertos cilíndricos centrados na origem, podemos aplicar [12, Proposition 3.2]: a validade da Propriedade 4.15 garante que não valem $(24)_q^+$ nem $(24)_q^-$ (para as definições destas condições, veja p. 49 do referido artigo, sempre observando as discrepâncias na indexação), o que por sua vez implica que o $(q-1)$-ésimo número de intersecção de $\mathcal{S}$ relativo ao par (U, V') anula-se identicamente. Enfatizamos que todas estas afirmações são independentes da fibra regular $\mathcal{S}$ em questão.

É fácil ver, contudo, que aumentar U tampouco afeta o anulamento do número de intersecção, de modo que o $(q-1)$-ésimo número de intersecção de $\mathcal{S}$ relativo ao par (U', V') também anula-se identicamente. □

O modo que encontramos de conectar estes resultados com nosso ambiente Gevrey é por meio da seguinte adaptação da Propriedade 4.15: novamente, sejam (U, V) um par de vizinhanças abertas da origem tais que $V \subset U$, e $\sigma > 1$ e $q \in \{1, \dots, n\}$ fixados.

Propriedade 4.17. *Para todo $g \in G^\sigma(U_0; \wedge^{q-1}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$ e todo $u \in G^\sigma_c(V_0; \wedge^{n-q}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$ satisfazendo uma das duas condições abaixo*

- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^-$ *e* $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^+ \cap V_0$, *ou*
- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^+$ *e* $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^- \cap V_0$

temos que

$$\int g \wedge \mathrm{d}u = 0.$$

O seguinte resultado é válido para todo $q \in \{1, \dots, n\}$ e para toda fibra regular de Z.

Lema 4.18. *Sejam $V \subset U \subset \Omega$ vizinhanças abertas da origem. Se o par (U, V) satisfizer a Propriedade 4.17, para algum $\sigma > 1$, então também satisfaz a Propriedade 4.15.*

Demonstração. Tome $g \in C^\infty(U_0; \wedge^{q-1}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$ e $u \in C^\infty_c(V_0; \wedge^{n-q}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$ satisfazendo uma das duas condições abaixo:

- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^-$ e $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^+ \cap V_0$, ou
- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^+$ e $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^- \cap V_0$.

Temos de verificar que

$$\int g \wedge \mathrm{d}u = 0.$$

Empregamos então um argumento de densidade: existem sequências

$$\{g_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset G^\sigma(U_0; \wedge^{q-1}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$$
$$\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset G^\sigma_c(V_0; \wedge^{n-q}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$$

satisfazendo

- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g_\nu \subset U_0^-$ e $\operatorname{supp} \mathrm{d}u_\nu \subset U_0^+ \cap V_0$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$, ou
- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g_\nu \subset U_0^+$ e $\operatorname{supp} \mathrm{d}u_\nu \subset U_0^- \cap V_0$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$

(qual das duas propriedades as sequências satisfarão depende exclusivamente de qual propriedade correspondente as formas g e u satisfazem) e tais que

$$g_\nu \to g \text{ em } C^\infty(U_0; \wedge^{q-1}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n),$$
$$u_\nu \to u \text{ em } C_c^\infty(V_0; \wedge^{n-q}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n).$$

Da segunda convergência acima, deduzimos que

$$\mathrm{d}u_\nu \to \mathrm{d}u \text{ em } C_c^\infty(V_0; \wedge^{n-q+1}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$$

e logo

$$\int g_\nu \wedge \mathrm{d}u_\nu \to \int g \wedge \mathrm{d}u.$$

No entanto, a Propriedade 4.17 garante que

$$\int g_\nu \wedge \mathrm{d}u_\nu = 0, \ \forall \nu \in \mathbb{N},$$

o que nos conduz à conclusão. □

Em particular, segue da Proposição 4.16 que:

Corolário 4.19. *Seja $\sigma > 1$. Suponha que para cada aberto cilíndrico suficientemente pequeno e centrado na origem $U \subset \Omega$ existe $V \subset U$ uma vizinhança aberta da origem (não necessariamente cilíndrica) tal que o par (U, V) satisfaz a Propriedade 4.17 para toda fibra regular $\mathcal{S} = Z^{-1}(z_0)$. Então vale a condição $(\star)_{q-1}$ na origem.*

Demonstração. Omitida. □

O próximo resultado é crítico em nossa argumentação, e segue quase que automaticamente da prova de [12, Theorem 2.1]: é uma construção puramente geométrica que preserva as classes de Gevrey, pois envolve apenas pullbacks por aplicações reais-analíticas, existência de funções de corte com certas propriedades, etc., as quais produzem transformações sob as quais os espaços de Gevrey são invariantes.

Proposição 4.20. *Sejam $U \subset\subset \Omega$ um aberto cilíndrico centrado na origem, $V \subset U$ uma vizinhança aberta da origem, $\sigma > 1$ e $q \in \{1, \dots, n\}$. Suponha que $g \in G^\sigma(U_0; \wedge^{q-1}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$ e $u \in G_c^\sigma(V_0; \wedge^{n-q}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$ satisfazem uma das duas condições abaixo:*

- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^-$ *e* $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^+ \cap V_0$, *ou*
- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^+$ *e* $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^- \cap V_0$.

Então podemos encontrar

- $f \in G^\sigma(U; \Lambda^{0,q})$ *satisfazendo* $\mathrm{d}' f = 0$ *e*
- $v \in G_c^\sigma(V; \Lambda^{1,n-q})$

tais que

$$\int f \wedge v = 0 \iff \int g \wedge \mathrm{d}u = 0. \tag{4.10}$$

Ademais, existe $H \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *tal que se definirmos* $w \doteq H \circ Z \in C^\omega(\Omega)$ *então teremos*

$$\Re w \leq 0 \ \textit{em} \operatorname{supp} f,$$
$$\Re w > 0 \ \textit{em} \operatorname{supp} \mathrm{d}' v.$$

Apesar dos comentários preliminares, faremos a demonstração passo a passo a fim de nos certificar que ela de fato funciona. Antes disso, contudo, mostraremos como usar a Proposição 4.20 para demonstrar o Teorema 4.13.

Demonstração do Teorema 4.13. De acordo com os comentários que sucedem o enunciado do Teorema 4.13, devemos averiguar a validade da condição $(\star)_{q-1}$. Pelo Corolário 4.19, basta verificar que dado $U \subset \Omega$ aberto cilíndrico centrado na origem suficientemente pequeno existe $V \subset U$ vizinhança aberta da origem tal que o par (U, V) satisfaz a Propriedade 4.17 para toda fibra regular $\mathcal{S}$. O truque aqui é verificar a Propriedade 4.17 não para σ, mas para um σ' um pouquinho menor.

Fixemos assim $\sigma' \in (1, \sigma)$ e selecionemos $U \subset \Omega$ um aberto cilíndrico centrado na origem, pequeno como no enunciado do Corolário 4.10, e consideremos $V \subset\subset U$ como naquele resultado: afirmamos que tal V satisfaz as propriedades descritas em nossa tese, isto é, o par (U, V) satisfaz a Propriedade 4.17 para σ', para toda fibra regular $\mathcal{S}$.

Sejam $g \in G^{\sigma'}(U_0; \wedge^{q-1}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$ e $u \in G_c^{\sigma'}(V_0; \wedge^{n-q}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^n)$ satisfazendo ou

- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^-$ e $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^+ \cap V_0$, ou
- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^+$ e $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^- \cap V_0$.

Devemos provar que

$$\int g \wedge \mathrm{d}u = 0.$$

Mas a Proposição 4.20 garante a existência de

- $f \in G^{\sigma'}(U; \Lambda^{0,q})$ satisfazendo $\mathrm{d}' f = 0$,

- $v \in G_c^{\sigma'}(V; \Lambda^{1,n-q})$ e
- $H \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

tais que

$$\int f \wedge v = 0 \iff \int g \wedge \mathrm{d}u = 0$$

e

$$\Re w \leq 0 \text{ em } \operatorname{supp} f$$
$$\Re w > 0 \text{ em } \operatorname{supp} \mathrm{d}' v$$

onde $w \doteq H \circ Z \in C^\omega(\Omega)$ é claramente solução de T'. Como V fora tomado conforme o Corolário 4.10, então é necessariamente verdade que

$$\int f \wedge v = 0$$

(recorde que estamos lidando com o caso $m = 1$), o que encerra a demonstração. $\square$

Finalmente, procedemos com uma prova da Proposição 4.20.

Demonstração da Proposição 4.20. Suporemos que g e u são tais que

- $\operatorname{supp} \mathrm{d}g \subset U_0^-$ e $\operatorname{supp} \mathrm{d}u \subset U_0^+ \cap V_0$.

O outro caso – com a escolha oposta de sinais – é tratado de maneira análoga.

Primeiramente, a compacidade de $\overline{U}$ garante a existência de uma constante $A > 0$ – que não depende de x_0 – tal que

$$|\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t)| \leq A|x - x_0|, \ \forall (x,t) \in U.$$

Tome $\phi \in G^\sigma(\mathbb{C})$ e defina

$$\phi^\sharp \doteq Z^*\phi = \phi \circ Z$$

o qual pertence a $G^\sigma(U)$ posto que Z é real-analítica. Denotando por

$$\begin{array}{rccc} \pi & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (x,t) & \longmapsto & t \end{array}$$

a projeção na variável t temos $U_0 = \pi(U)$ pois U é cilíndrico, de modo que

$$\pi^* g \in G^\sigma(U; \wedge^{q-1}\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^{n+1}).$$

Esta observação permite-nos definir

$$F \doteq \phi^\sharp \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \pi^* g$$

que é um elemento de $G^\sigma(U; \wedge^q \mathbb{C}T^*\mathbb{R}^{n+1})$ e, recordando que em Ω temos a identificação

$$\wedge^q \mathbb{C}T^*\mathbb{R}^{n+1} \cong \Lambda^{0,q} \oplus \mathrm{T}'^{1,q-1},$$

podemos definir $f \in G^\sigma(U; \Lambda^{0,q})$ como a componente de F determinada unicamente pela decomposição em soma direta acima.

Afirmamos que se o suporte de ϕ for escolhido convenientemente teremos $\mathrm{d}' f = 0$, ou seja

$$\mathrm{d}F \text{ é seção de } \mathrm{T}'^{1,q}.$$

De fato, sem qualquer hipótese adicional temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F &= \mathrm{d}\left(\phi^\sharp \wedge \mathrm{d}\bar{Z}\right) \wedge \pi^* g - \phi^\sharp \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \mathrm{d}\left(\pi^* g\right) \\
&= \mathrm{d}\phi^\sharp \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \pi^* g - \phi^\sharp \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \pi^*(\mathrm{d}g).
\end{aligned}$$

Contudo

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi^\sharp &= \mathrm{d}(Z^*\phi) \\
&= Z^*(\mathrm{d}\phi) \\
&= Z^*\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \wedge \mathrm{d}\bar{z}\right) \\
&= \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \circ Z\right) \wedge \mathrm{d}Z + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \circ Z\right) \wedge \mathrm{d}\bar{Z}
\end{aligned}$$

de modo que

$$\mathrm{d}\phi^\sharp \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \pi^* g = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \circ Z\right) \wedge \mathrm{d}Z \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \pi^* g$$

é claramente seção de $\mathrm{T}'^{1,q}$ em U: se pudermos provar que $\phi^\sharp \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \pi^*(\mathrm{d}g)$ é também seção de $\mathrm{T}'^{1,q}$ então nossa afirmação estará verificada. É agora que a escolha de ϕ – ou, mais especificamente, de seu suporte – entra em jogo: podemos tomá-lo de modo que a segunda parcela de $\mathrm{d}F$ acima seja nula, o que é consequência do seguinte lema.

Lema 4.21. *Dados $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ definimos a faixa*

$$E(a, b) \doteq \{x + iy \in \mathbb{C}\ ;\ |x - x_0| \leq a,\ y \geq b\}.$$

Se

$$y_0 + Aa \leq b$$

então $Z^{-1}(E(a,b)) \cap \pi^{-1}(U_0^-) = \emptyset$.

Demonstração do Lema 4.21. Posto que

$$U_0^- = \{t \in U_0 \ ; \ \Phi(x_0,t) < y_0\}$$

temos

$$\pi^{-1}(U_0^-) = \{(x,t) \in U \ ; \ \Phi(x_0,t) < y_0\}$$

e também

$$Z^{-1}(E(a,b)) = \{(x,t) \in U \ ; \ |x - x_0| \leq a, \ \Phi(x,t) \geq b\}.$$

Afirmamos que sob as hipóteses admitidas a intersecção dos dois conjuntos acima é vazia: suponhamos por absurdo que há um certo $(x,t) \in U$ nesta intersecção, ou seja

- $\Phi(x_0,t) < y_0$,
- $|x - x_0| \leq a$ e
- $\Phi(x,t) \geq b$.

Recordemos, porém, que

$$|\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t)| \leq A|x - x_0| \leq Aa$$

e, em particular, tem-se

$$\Phi(x,t) \leq \Phi(x_0,t) + Aa < y_0 + Aa.$$

Juntamente com

$$\Phi(x,t) \geq b$$

isto implica que

$$b < y_0 + Aa$$

contradizendo nossa hipótese; o lema está demonstrado. $\square$

Assim, se supusermos que $\operatorname{supp}\phi \subset E(a,b)$ para a e b escolhidos conforme o enunciado do Lema 4.21 acima, teremos

$$\operatorname{supp}\phi^\sharp = \operatorname{supp} Z^*\phi = Z^{-1}(\operatorname{supp}\phi) \subset Z^{-1}(E(a,b))$$

e também

$$\operatorname{supp}\pi^*(\mathrm{d}g) = \pi^{-1}(\operatorname{supp}\mathrm{d}g) \subset \pi^{-1}(U_0^-)$$

posto que $\operatorname{supp}\mathrm{d}g \subset U_0^-$ por hipótese. Isto, por sua vez, implica que $\operatorname{supp}\phi^\sharp$ e $\operatorname{supp}\pi^*(\mathrm{d}g)$ são conjuntos disjuntos, o que assegura que $\phi^\sharp \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \pi^*(\mathrm{d}g)$ anula-se identicamente em U, provando assim a asserção: em vista de tais escolhas, $\mathrm{d}'f = 0$.

Introduzimos um novo parâmetro $r > 0$ – a ser especificado oportunamente – e consideramos $\chi \in G_c^\sigma(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \chi \leq 1$ e

$$\begin{aligned}
\chi(x) &= 1 \text{ se } |x - x_0| < r/2,\\
\chi(x) &= 0 \text{ se } |x - x_0| > r.
\end{aligned}$$

Definamos ainda $\tilde{\chi} \in G^\sigma(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ por

$$\tilde{\chi}(x,t) \doteq \chi(x), \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

e

$$v \doteq \tilde{\chi} \wedge \mathrm{d}Z \wedge \pi^* u$$

que é claramente uma seção de $\Lambda^{1,n-q}$ com coeficientes G^σ. É claro, ademais, desta definição e do fato de $\operatorname{supp} u$ ser subconjunto compacto de V_0 que

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp} v &\subset \operatorname{supp}\tilde{\chi} \cap \operatorname{supp}\pi^* u\\
&= \operatorname{supp}\tilde{\chi} \cap \pi^{-1}(\operatorname{supp} u)\\
&\subset \{(x,t) \in V \;;\; |x - x_0| \leq r, \;\; t \in \operatorname{supp} u\}
\end{aligned}$$

sendo o último conjunto acima compacto em V se escolhermos $r > 0$ suficientemente pequeno, o que implica, neste caso, que v tem suporte compacto em V.

Segue das definições dos objetos em questão que

$$\begin{aligned}
f \wedge v &= F \wedge v\\
&= \phi^\sharp \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \pi^* g \wedge \tilde{\chi} \wedge \mathrm{d}Z \wedge \pi^* u\\
&= \pm\left(\tilde{\chi}\,\phi^\sharp\right) \wedge \mathrm{d}Z \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \pi^*(g \wedge u).
\end{aligned}$$

Enfatizamos que a primeira identidade acima segue do fato de $f - F$ ser seção de $\mathrm{T}'^{1,q-1}$ (e, portanto, o produto exterior desta parcela com v é nulo) e que a corretude do sinal na última igualdade acima é irrelevante para nossos propósitos: estamos interessados apenas em decidir a questão do anulamento das integrais destas formas. Recordando ainda que

$$Z^{-1}(E(a,b)) = \{(x,t) \in U \; ; \; |x - x_0| \leq a, \; \Phi(x,t) \geq b\}$$

contém $\operatorname{supp} \phi^\sharp$ e que

$$\tilde{\chi}(x,t) = 1 \text{ se } |x - x_0| < \frac{r}{2}$$

notamos que se impusermos, ademais, $a < r/2$ conseguiremos $\tilde{\chi} = 1$ em $\operatorname{supp} \phi^\sharp$ e, logo,

$$f \wedge v = \pm \; \phi^\sharp \wedge \mathrm{d}Z \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \wedge \pi^*(g \wedge u).$$

Faremos agora uma pequena digressão, cujo objetivo ficará claro em breve. Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} \phi^\sharp \wedge \mathrm{d}Z \wedge \mathrm{d}\bar{Z} &= (Z^*\phi) \wedge \mathrm{d}Z \wedge \mathrm{d}\bar{Z} \\ &= Z^* \left(\phi \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\right) \\ &= 2i \; Z^* \left(\phi \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Por razões técnicas, suporemos daqui em diante que ϕ é não-negativa (em particular, possui valores reais). Seja $\psi_0 \in G^\sigma(\mathbb{C};\mathbb{R})$ definida por

$$\psi_0(x+iy) \doteq \int_{-\infty}^{y} \phi(x+is) \; \mathrm{d}s$$

para cada $x + iy \in \mathbb{C}$, a qual satisfaz

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y} = \phi.$$

Recordando ainda que

$$\operatorname{supp} \phi \subset \{x + iy \in \mathbb{C} \; ; \; |x - x_0| \leq a, \; y \geq b\} \tag{4.11}$$

vê-se prontamente que para $x + iy \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned} |x - x_0| > a &\Rightarrow \phi(x + is) = 0, \; \forall s \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \psi_0(x + iy) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y < b &\Rightarrow \phi(x+is) = 0,\ \forall s \leq y, \\ &\Rightarrow \psi_0(x+iy) = 0 \end{aligned}$$

que por sua vez implicam

$$\operatorname{supp}\psi_0 \subset \{x+iy \in \mathbb{C}\ ;\ |x-x_0| \leq a,\ y \geq b\},$$

noutras palavras, $\operatorname{supp}\psi_0 \subset E(a,b)$. Definindo ainda $\psi \in G^\sigma(\mathbb{C};\wedge^1 T^*\mathbb{C})$ por $\psi \doteq \psi_0 \wedge \mathrm{d}x$ concluímos que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\psi &= \mathrm{d}\psi_0 \wedge \mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial\psi_0}{\partial y} \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \\ &= \phi \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} f \wedge v &= \pm\ 2i\ Z^*\,(\phi \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x) \wedge \pi^*(g \wedge u) \\ &= \pm\ 2i\ Z^*\,(\mathrm{d}\psi) \wedge \pi^*(g \wedge u) \\ &= \pm\ 2i\ \mathrm{d}(Z^*\psi) \wedge \pi^*(g \wedge u). \end{aligned}$$

Afirmamos que, dadas as escolhas acima, $Z^*\psi \wedge \pi^*(g \wedge u)$ possui suporte compacto e contido em U. De fato, como $\operatorname{supp}\psi = \operatorname{supp}\psi_0 \subset E(a,b)$ temos

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} Z^*\psi &= Z^{-1}(\operatorname{supp}\psi) \\ &\subset Z^{-1}(E(a,b)) \\ &\subset \{(x,t) \in U\ ;\ |x-x_0| \leq a\} \end{aligned}$$

e portanto

$$(\operatorname{supp} Z^*\psi) \cap (\operatorname{supp}\pi^* u) \subset \{(x,t) \in U\ ;\ |x-x_0| \leq a,\ t \in \operatorname{supp} u\}$$

sendo que o último conjunto mencionado acima é compacto e está contido em U, não havendo necessidade de reduzir a novamente para isto. Mas a relação acima garante que esse conjunto claramente contém o suporte de $Z^*\psi \wedge \pi^*(g \wedge u)$, o que prova nossa afirmação.

Segue assim do Teorema de Stokes que

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathrm{d}\left(Z^*\psi \wedge \pi^*(g \wedge u)\right) \\ &= \int \mathrm{d}(Z^*\psi) \wedge \pi^*(g \wedge u) \pm \int Z^*\psi \wedge \mathrm{d}\pi^*(g \wedge u) \end{aligned}$$

(conforme justificado anteriormente, não nos preocuparemos com a natureza do sinal) e logo

$$\int f \wedge v = \pm\, 2i \int Z^*\psi \wedge \mathrm{d}\pi^*(g \wedge u).$$

Vamos trabalhar um pouco mais a última igualdade. Claramente

$$Z^*\psi \wedge \mathrm{d}\pi^*(g \wedge u) = Z^*\psi \wedge \pi^*(\mathrm{d}g \wedge u) \pm Z^*\psi \wedge \pi^*(g \wedge \mathrm{d}u)$$

sendo a primeira parcela na soma acima nula pois

$$\operatorname{supp}(Z^*\psi) \cap \operatorname{supp}\pi^*(\mathrm{d}g) = \emptyset.$$

Isto segue novamente do Lema 4.21, em conjunto com a hipótese de que $\operatorname{supp}\mathrm{d}g \subset U_0^-$ e do fato de que $\operatorname{supp}\psi \subset E(a,b)$, e implica que

$$\int f \wedge v = \pm\, 2i \int Z^*\psi \wedge \pi^*(g \wedge \mathrm{d}u).$$

Vamos agora impor mais restrições a ϕ. Recordemos que $\operatorname{supp}\mathrm{d}u \subset U_0^+ \cap V_0$, o que significa que $\Phi(x_0,t) > y_0$ para todo $t \in \operatorname{supp}\mathrm{d}u$: por compacidade, existe $\rho > 0$ tal que

$$\Phi(x_0,t) > y_0 + \rho,\ \forall t \in \operatorname{supp}\mathrm{d}u.$$

Mais uma vez reduzimos $r > 0$, de modo que tenhamos $2Ar < \rho$. Isto implica que

$$y_0 + Ar < -Ar + y_0 + \rho$$

o que nos permite selecionar $b, b', b'' \in \mathbb{R}$ de modo a obter

$$y_0 + Ar \le b < b' < b'' < -Ar + y_0 + \rho.$$

Justificamos agora nossas escolhas: suponha que

$$\operatorname{supp}\phi \subset \{x + iy\ ;\ |x - x_0| \le a,\ b \le y \le b'\}.$$

Segue da definição de ψ_0, após um cálculo muito simples, que

$$y > b' \Rightarrow \psi_0(x+iy) = \psi_0(x+ib'),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, para $|x-x_0| \le a$ e $t \in \operatorname{supp} \mathrm{d}u$ temos

$$\begin{aligned}
\Phi(x,t) &= (\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t)) + \Phi(x_0,t) \\
&\ge -A|x-x_0| + \Phi(x_0,t) \\
&\ge -Aa + y_0 + \rho \\
&> -Ar + y_0 + \rho \\
&> b'
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\psi_0(Z(x,t)) = \psi_0(x + i\Phi(x,t)) = \psi_0(x+ib')$$

sempre que $|x-x_0| \le a$ e $t \in \operatorname{supp} \mathrm{d}u$.

Recordemos agora que U é um aberto cilíndrico centrado na origem: isto significa precisamente que existe um intervalo aberto centrado na origem $I \subset \mathbb{R}$ tal que $U = I \times U_0$. Se definirmos a função $C : I \to \mathbb{R}$ por

$$C(x) \doteq \psi_0(x+ib') = \int_{-\infty}^{b'} \phi(x+is)\mathrm{d}s$$

então em $\{(x,t) \in U\ ;\ |x-x_0| \le a,\ t \in \operatorname{supp} \mathrm{d}u\}$ teremos

$$\begin{aligned}
Z^*\psi &= Z^*(\psi_0 \wedge \mathrm{d}x) \\
&= (\psi_0 \circ Z) \wedge \mathrm{d}(x \circ Z) \\
&= C(x) \wedge \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(num abuso de notação bastante informal). Logo, recordando ainda que

$$\operatorname{supp} Z^*\psi \subset \{(x,t) \in U\ ;\ |x-x_0| \le a\}$$

teremos

$$\operatorname{supp}(Z^*\psi \wedge \pi^*(g \wedge \mathrm{d}u)) \subset \{(x,t) \in U\ ;\ |x-x_0| \le a,\ t \in \operatorname{supp} \mathrm{d}u\}$$

e assim

$$\begin{aligned}\int f\wedge v &= \pm\, 2i\int Z^*\psi\wedge\pi^*(g\wedge \mathrm{d}u)\\ &= \pm\, 2i\int C(x)\wedge \mathrm{d}x\wedge\pi^*(g\wedge\mathrm{d}u)\\ &= \pm\, 2i\left(\int C(x)\ \mathrm{d}x\right)\int g\wedge\mathrm{d}u\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\int C(x)\ \mathrm{d}x &= \int\int_{-\infty}^{b'}\phi(x+is)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{C}}\phi\\ &\neq 0\end{aligned}$$

se supusermos ϕ não-nulo. A relação (4.10) está demonstrada.

Dirigimos agora nossa atenção à segunda afirmação no enunciado: provaremos que, reduzindo se necessário $a>0$ e a diferença $b'-b>0$ (mantendo, contudo, b fixo), existe $H\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned}&\Re H\leq 0 \text{ em } Z(\operatorname{supp} f),\\ &\Re H> 0 \text{ em } Z(\operatorname{supp} \mathrm{d}'v).\end{aligned}$$

Recordemos que $\operatorname{supp} f\subset\operatorname{supp} F$ onde $F=\phi^\sharp\wedge \mathrm{d}\bar{Z}\wedge\pi^*g$, de modo que

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} F&\subset\operatorname{supp}\phi^\sharp\cap\operatorname{supp}\pi^*g\\ &= Z^{-1}(\operatorname{supp}\phi)\cap\pi^{-1}(\operatorname{supp} g)\end{aligned}$$

e logo

$$\begin{aligned}Z(\operatorname{supp} F)&\subset\operatorname{supp}\phi\cap Z(\pi^{-1}(\operatorname{supp} g))\\ &\subset\operatorname{supp}\phi\\ &\subset\{x+iy\in\mathbb{C}\ ;\ |x-x_0|\leq a,\ b\leq y\leq b'\}.\end{aligned}$$

Assim, se denotarmos

$$\mathcal{R}\doteq\{x+iy\in\mathbb{C}\ ;\ |x-x_0|\leq a,\ b\leq y\leq b'\}$$

então o que provamos é que $Z(\operatorname{supp} f)\subset\mathcal{R}$.

Por outro lado, se definirmos os números

$$\begin{aligned} M &\doteq \max\left\{\Phi(x,t)\ ;\ |x-x_0|\le r,\ t\in \operatorname{supp} \mathrm{d}u\right\}\\ M_+ &\doteq \max\left\{\Phi(x,t)\ ;\ \frac{r}{2}\le |x-x_0|\le r,\ t\in \operatorname{supp} u\right\}\\ M_- &\doteq \min\left\{\Phi(x,t)\ ;\ \frac{r}{2}\le |x-x_0|\le r,\ t\in \operatorname{supp} u\right\}\end{aligned}$$

e os seguintes subconjuntos do plano complexo

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\doteq \left\{x+iy\in\mathbb{C}\ ;\ |x-x_0|\le r,\ b''\le y\le M\right\}\\ \mathcal{B} &\doteq \left\{x+iy\in\mathbb{C}\ ;\ \frac{r}{2}\le |x-x_0|\le r,\ M_-\le y\le M_+\right\}.\end{aligned}$$

Afirmamos que $Z(\operatorname{supp} \mathrm{d}'v)\subset \mathcal{A}\cup\mathcal{B}$. Para verificar esta afirmação, note inicialmente que sendo v uma seção de $\Lambda^{1,n-q}$ temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}'v &= \mathrm{d}v\\ &= \mathrm{d}\left(\tilde\chi\wedge \mathrm{d}Z\wedge \pi^*u\right),\\ &= \mathrm{d}\tilde\chi\wedge \mathrm{d}Z\wedge\pi^*u-\tilde\chi\wedge \mathrm{d}Z\wedge\pi^*(\mathrm{d}u)\end{aligned}$$

o que, por sua vez, implica que

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \mathrm{d}'v &\subset \operatorname{supp}\left(\mathrm{d}\tilde\chi\wedge \mathrm{d}Z\wedge\pi^*u\right)\cup \operatorname{supp}\left(\tilde\chi\wedge \mathrm{d}Z\wedge \pi^*(\mathrm{d}u)\right)\\ &\subset \left(\operatorname{supp} \mathrm{d}\tilde\chi\cap \operatorname{supp}\pi^*u\right)\cup\left(\operatorname{supp}\tilde\chi\cap\operatorname{supp}\pi^*(\mathrm{d}u)\right).\end{aligned}$$

Mas tínhamos

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}\tilde\chi &\subset \{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\ ;\ |x-x_0|\le r\}\\ \operatorname{supp} \mathrm{d}\tilde\chi &\subset \left\{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\ ;\ \frac{r}{2}\le|x-x_0|\le r\right\}\\ \operatorname{supp}\pi^*u &\subset \{(x,t)\in U\ ;\ t\in\operatorname{supp} u\}\\ \operatorname{supp}\pi^*(\mathrm{d}u) &\subset \{(x,t)\in U\ ;\ t\in \operatorname{supp} \mathrm{d}u\}\end{aligned}$$

e, juntando toda essa informação, temos que $\operatorname{supp} \mathrm{d}'v$ está contido em

$$\left\{(x,t)\in U\ ;\ \frac{r}{2}\le|x-x_0|\le r,\ t\in\operatorname{supp} u\right\}\cup\{(x,t)\in U\ ;\ |x-x_0|\le r,\ t\in\operatorname{supp} \mathrm{d}u\}.$$

A imagem por Z do primeiro conjunto na reunião acima está claramente contida em $\mathcal{B}$. Ademais,

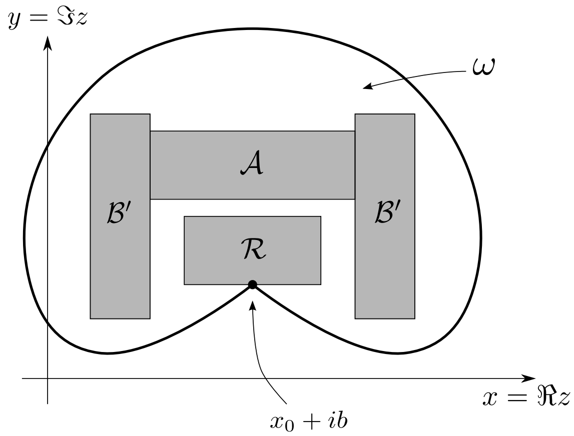

Figura 4.1: Os conjuntos compactos $\mathcal{H} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}'$ e $\mathcal{R}$, disjuntos, e o aberto ω que contém ambos.

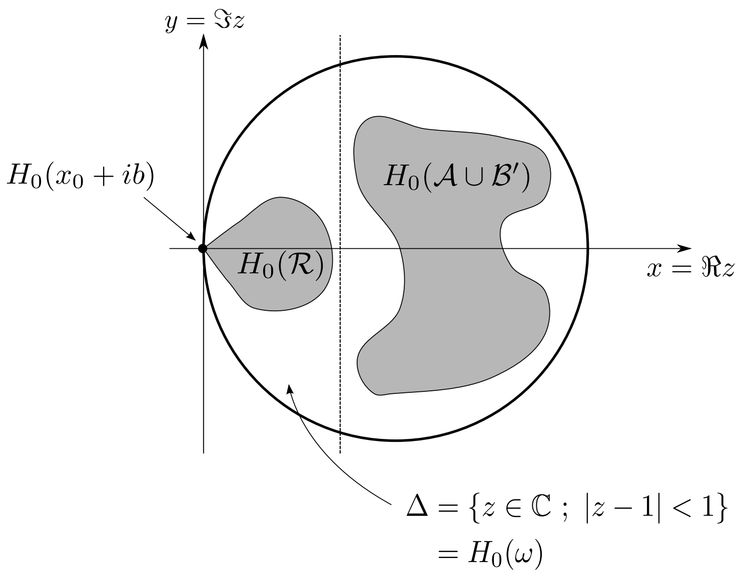

Figura 4.2: O esquema apresentado na Figura 4.1, agora deformado pelo homeomorfismo H_0.

se recordarmos que para $|x - x_0| \leq r$ e $t \in \operatorname{supp} \mathrm{d}u$ temos novamente que

$$\begin{aligned} \Phi(x,t) &= (\Phi(x,t) - \Phi(x_0,t)) + \Phi(x_0,t) \\ &\geq -A|x - x_0| + \Phi(x_0,t) \\ &> -Ar + y_0 + \rho \\ &> b'' \end{aligned}$$

então vemos que a imagem por Z do segundo conjunto na reunião acima está contida em $\mathcal{A}$ (o que, a propósito, também prova que $\mathcal{A}$ não é vazio); concluímos que $Z(\operatorname{supp} \mathrm{d}'v) \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$.

A fim de guiar o leitor de modo mais preciso no próximo argumento, nos referiremos às Figuras 4.1 e 4.2. Para uma melhor visualização, definimos os conjuntos

$$\mathcal{B}' \doteq \left\{x + iy \in \mathbb{C} \; ; \; \frac{r}{2} \leq |x - x_0| \leq r, \; \min\{M_-, b\} \leq y \leq \max\{M_+, M\}\right\}$$

(o qual obviamente contém $\mathcal{B}$) e o conjunto compacto (em forma de "H" na Figura 4.1)

$$\mathcal{H} \doteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}'$$

que, por um lado, contém $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e, por outro, não intercepta $\mathcal{R}$.

É claro que existe um aberto limitado $\omega \subset \mathbb{C}$, conexo e simplesmente conexo, com as seguintes propriedades:

1. ele contém $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e $\mathcal{R}$, exceto pelo ponto $x_0 + ib \in \partial\mathcal{R}$;
2. sua fronteira é uma curva de Jordan que contém o ponto $x_0 + ib$ (a curva que assemelha-se a uma cardioide na Figura 4.1); e
3. $\mathbb{C} \setminus \overline{\omega}$ é conexo.

Se denotarmos por

$$\Delta \doteq \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z - 1| < 1\}$$

o disco unitário aberto centrado em 1, um resultado de C. Carathéodory garante a existência de um homeomorfismo $H_0 : \overline{\omega} \to \overline{\Delta}$ que é um biholomorfismo entre os respectivos interiores; obviamente podemos assumir, sem perda de generalidade, que $H_0(x_0 + ib) = 0$ (vide Figura 4.2). Em particular, $\Re H_0(z) > 0$ para todo $z \in \overline{\omega}$ exceto por $z = x_0 + ib$. Como $\mathcal{H} \subset \omega$ é compacto, existe $c > 0$ tal que

$$\Re H_0 > 2c \text{ em } \mathcal{H}.$$

Assim, se escolhermos a e b' convenientemente pequenos na definição

$$\mathcal{R} = \{x + iy \in \mathbb{C} \; ; \; |x - x_0| \leq a, \; b \leq y \leq b'\}$$

(conforme a Figura 4.1) teremos

$$\Re H_0 < \frac{c}{4} \text{ em } \mathcal{R}.$$

Finalmente o Teorema de Mergelyan permite aproximar H_0 por uma função inteira H_1 tal que

$$\begin{aligned} \Re H_1 &> \frac{3c}{2} \text{ em } \mathcal{H} \\ \Re H_1 &< \frac{c}{2} \text{ em } \mathcal{R} \end{aligned}$$

de modo que definir $H \doteq H_1 - c$ encerra a demonstração. $\square$

Apêndice A

Demonstração do Teorema 3.13

O objetivo deste apêndice é apresentar uma demonstração do Teorema 3.13 (ora anunciado, sem demonstração, em [14]), que é parte fundamental da demonstração do Teorema 3.11. Como pretendemos mimetizar a demonstração de [18, Theorem 13.3.3] (do qual, em um certo sentido, o Teorema 3.13 é uma adaptação no contexto de certas classes de funções ultradiferenciáveis), precisaremos inicialmente demonstrar versões análogas de vários lemas auxiliares lá empregados, as quais não encontramos na literatura (mais particularmente, aqueles resultados que não foram contemplados por [4]). Embora as demonstrações de tais versões sejam praticamente idênticas às dos resultados originais correspondentes, optamos por apresentá-las de forma o mais completa possível, sem contudo deixar de recorrer livremente aos resultados já demonstrados em [4].

Para o primeiro resultado deste apêndice – uma adaptação de [18, Theorem 10.1.5] – recordamos que para cada $k \in \mathscr{K}_\omega$ definimos

$$M_k(\xi) \doteq \sup_\eta \frac{k(\xi+\eta)}{k(\eta)}$$

em acordo com [4] e [18]. Introduzimos ainda a seguinte notação: dado $\lambda > 0$, definimos $\mathscr{K}_\omega^\lambda$ como o conjunto das funções $k \in \mathscr{K}_\omega$ tais que vale (3.4), de modo que

$$\mathscr{K}_\omega = \bigcup_{\lambda>0} \mathscr{K}_\omega^\lambda.$$

Lema A.1. *Para todo $\lambda > 0$, todo $k \in \mathscr{K}_\omega^\lambda$ e todo $\delta > 0$ existem $k_\delta \in \mathscr{K}_\omega^\lambda$ e $C_\delta > 0$ tais que, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, tem-se*

1. $1 \leq k_\delta(\xi)/k(\xi) \leq C_\delta$ *e*
2. $1 \leq M_{k_\delta}(\xi) \leq e^{\delta|\xi|}$.

Demonstração do Lema A.1. Dado $\delta > 0$ definimos

$$k_\delta(\xi) \doteq \sup_\eta e^{-\delta|\eta|} k(\xi-\eta), \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Antes de mais nada, provaremos que $k_\delta \in \mathscr{K}_\omega^\lambda$. De fato, para $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned} k_\delta(\xi+\xi') &= \sup_\eta e^{-\delta|\eta|} k(\xi+\xi'-\eta) \\ &\leq \sup_\eta e^{-\delta|\eta|} e^{\lambda|\xi'|^{\frac{1}{\sigma}}} k(\xi-\eta) \\ &= e^{\lambda|\xi'|^{\frac{1}{\sigma}}} k_\delta(\xi). \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} k(\xi) &\leq k_\delta(\xi) \\ &= \sup_\eta e^{-\delta|\eta|} k(\xi-\eta) \\ &\leq \sup_\eta e^{-\delta|\eta|} e^{\lambda|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} k(\xi) \\ &= k(\xi) \sup_\eta e^{\lambda|\eta|^{\frac{1}{\sigma}} - \delta|\eta|} \end{aligned}$$

de modo que basta definirmos

$$C_\delta \doteq \sup_\eta e^{\lambda|\eta|^{\frac{1}{\sigma}} - \delta|\eta|}$$

o qual é finito pois $1/\sigma < 1$: temos $1 \leq k_\delta(\xi)/k(\xi) \leq C_\delta$.

Fazendo uma mudança de variáveis podemos escrever, para $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$k_\delta(\xi) = \sup_\eta e^{-\delta|\xi-\eta|} k(\eta)$$

de modo que

$$\begin{aligned} k_\delta(\xi+\xi') &= \sup_\eta e^{-\delta|\xi+\xi'-\eta|} k(\eta) \\ &\leq e^{\delta|\xi'|} \sup_\eta e^{-\delta|\xi-\eta|} k(\eta) \\ &= e^{\delta|\xi'|} k_\delta(\xi) \end{aligned}$$

donde é claro que $M_{k_\delta}(\xi') \leq e^{\delta|\xi'|}$. $\square$

Apresentamos a seguir uma versão de [18, Lemma 13.3.1].

Lema A.2. *Seja $k \in \mathscr{K}_\omega$ e, para cada $\delta > 0$, seja $k_\delta \in \mathscr{K}_\omega$ conforme o Lema A.1. Então para cada $\phi \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ existe $\delta_0 > 0$ tal que*

$$\|\phi u\|_{p,k_\delta} \leq 2\|\phi\|_{1,1}\|u\|_{p,k_\delta}$$

para todo $0 < \delta < \delta_0$ e todo $u \in \mathcal{B}_{p,k_\delta} = \mathcal{B}_{p,k}$.

Demonstração do Lema A.2. De [4, Theorem 2.2.7] temos, para cada $\delta > 0$,

$$\|\phi u\|_{p,k_\delta} \leq \|\phi\|_{1,M_{k_\delta}} \|u\|_{p,k_\delta}$$

de modo que basta mostrarmos que existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|\phi\|_{1,M_{k_\delta}} \leq 2\|\phi\|_{1,1}$$

para todo $0 < \delta < \delta_0$. Mas da definição segue que

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{1,M_{k_\delta}} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int M_{k_\delta}(\xi)\ |\hat{\phi}(\xi)|\ \mathrm{d}\xi \\
&\to \frac{1}{(2\pi)^n} \int |\hat{\phi}(\xi)|\ \mathrm{d}\xi \\
&= \|\phi\|_{1,1}
\end{aligned}$$

uma vez que

$$M_{k_\delta} \to 1 \text{ uniformemente sobre compactos quando } \delta \to 0^+.$$

Esta última propriedade é consequência imediata do Lema A.1, o qual também implica que $\mathcal{B}_{p,k_\delta}$ e $\mathcal{B}_{p,k}$ são iguais como espaços vetoriais topológicos, posto que as normas que os definem são equivalentes. $\square$

Demonstração do Teorema 3.13. Graças a [18, Lemma 13.1.2] existem operadores de coeficientes constantes $P_1(D), \dots, P_r(D)$ e funções $c_0, c_1, \dots, c_r \in C^\infty(\Omega)$ unicamente determinados tais que:

- $P_j \prec P_0$ para cada $j \in \{1, \dots, r\}$;
- $c_j(x_0) = 0$ para cada $j \in \{0, \dots, r\}$;
- temos, em Ω,

$$P(x, D) = P_0(D) + \sum_{j=1}^{r} c_j(x) P_j(D).$$

Como estamos supondo que os coeficientes de $P(x, D)$ pertencem a $G^{\sigma_0}(\Omega)$ pode-se mostrar, ainda, que $c_0, c_1, \dots, c_r \in G^{\sigma_0}(\Omega)$.

Para cada $\epsilon > 0$ definamos

$$X_\epsilon \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x - x_0| < \epsilon\}$$

e tomemos $\epsilon_0 > 0$ tal que $X_{\epsilon_0} \subset \Omega$. Sejam $\chi \in G_c^{\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi = 1$ numa vizinhança aberta da bola fechada $\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x| \leq 2\epsilon_0\}$ e

$$E_0 \in B^{\text{loc}}_{\infty,\tilde{P}_0}(\mathbb{R}^n)$$

uma solução fundamental de $P_0(D)$, e defina

$$F_0 \doteq \chi E_0 \in B_{\infty,\tilde{P}_0}.$$

Se $g \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ tiver $\operatorname{supp} g \subset X_{\epsilon_0}$ então teremos $F_0 * g = E_0 * g$ em X_{ϵ_0} e, portanto,

$$P_0(D)(F_0 * g) = F_0 * P_0(D)g = g$$

em X_{ϵ_0}. Seja agora $\psi \in G^{\sigma_0}_c(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned} \psi &= 1 \text{ em } \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x| \leq 1\} \\ \psi &= 0 \text{ em } \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x| > 2\} \end{aligned}$$

e defina $\psi_\epsilon(x) \doteq \psi((x - x_0)/\epsilon)$. Afirmamos que existe $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0/2$ tal que para cada $0 < \epsilon < \epsilon_1$ e cada $f \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ a equação

$$g + \sum_{j=0}^{r} \psi_\epsilon c_j P_j(D)(F_0 * g) = \psi_\epsilon f \tag{A.1}$$

possui uma única solução $g \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$. Procederemos como [18], admitindo provisoriamente esta afirmação – que provaremos em seguida – e construindo o operador E prometido a partir daí: definimos

$$Ef \doteq F_0 * g$$

o que claramente nos fornece uma transformação linear $E : \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$. Mostraremos que se escolhermos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal operador terá as propriedades descritas no enunciado.

Procedamos à verificação das propriedades de E. Primeiramente, note que como $\operatorname{supp} \psi_\epsilon \subset X_{\epsilon_0}$

temos que $\operatorname{supp} g \subset X_{\epsilon_0}$, donde conclui-se que em X_ϵ vale

$$\begin{aligned}
P(x,D)Ef &= P(x,D)(F_0 * g) \\
&= P_0(D)(F_0 * g) + \sum_{j=0}^{r} c_j P_j(D)(F_0 * g) \\
&= g + \sum_{j=0}^{r} \psi_\epsilon c_j P_j(D)(F_0 * g) \\
&= \psi_\epsilon f \\
&= f
\end{aligned}$$

provando assim a primeira propriedade enunciada.

Em segundo lugar, tomemos $u \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp} u \subset X_\epsilon$ e $f \doteq P(x,D)u$: inserindo $g \doteq P_0(D)u$ na equação (A.1) temos

$$\begin{aligned}
g + \sum_{j=0}^{r} \psi_\epsilon c_j P_j(D)(F_0 * g) &= P_0(D)u + \sum_{j=0}^{r} \psi_\epsilon c_j P_j(D)(F_0 * P_0(D)u) \\
&= P_0(D)u + \sum_{j=0}^{r} \psi_\epsilon c_j P_j(D)u \\
&= P(x,D)u \\
&= f \\
&= \psi_\epsilon f
\end{aligned}$$

ou seja, g resolve a equação; pela alegada unicidade da solução temos

$$Ef = F_0 * g = F_0 * P_0(D)u = u.$$

Isto prova a segunda propriedade de E.

A última propriedade a respeito de E – a estimativa entre normas – será consequência do método que empregaremos para provar nossa afirmação a respeito da existência e unicidade de soluções da equação (A.1), de modo que procederemos neste sentido. Definiremos, para cada $\epsilon > 0$, a aplicação linear $A_\epsilon : \mathcal{D}'_\omega(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ dada pela expressão

$$A_\epsilon g \doteq \sum_{j=0}^{r} \psi_\epsilon c_j P_j(D)(F_0 * g)$$

que está bem definida para $g \in \mathcal{D}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ pois F_0 tem suporte compacto. Fixamos $k \in \mathscr{K}_\omega$ e, para $\delta > 0$, tomamos $k_\delta \in \mathscr{K}_\omega$ como no Lema A.2 – recordemos, neste caso, que $\mathcal{B}_{p,k_\delta} = \mathcal{B}_{p,k}$ e que $\|\cdot\|_{p,k_\delta}$ e $\|\cdot\|_{p,k}$ são normas equivalentes –, segundo o qual existe $\delta_0 > 0$ tal que se $0 < \delta < \delta_0$

podemos inferir que

$$\begin{aligned}\|A_\epsilon g\|_{p,k_\delta} &\leq \sum_{j=0}^{r} \|\psi_\epsilon c_j P_j(D)(F_0 * g)\|_{p,k_\delta} \\ &\leq 2\sum_{j=0}^{r} \|\psi_\epsilon c_j\|_{1,1} \|P_j(D)(F_0 * g)\|_{p,k_\delta}\end{aligned}$$

desde que $P_j(D)(F_0 * g) \in \mathcal{B}_{p,k}$ (note que $\psi_\epsilon c_j \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^n)$ para cada $j \in \{0, \ldots, r\}$ pelo Lema 3.12).

Note agora que como $P_j \prec P_0$ e $F_0 \in B_{\infty,\tilde{P}_0}$ temos que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}|P_j(\xi)||\hat{F}_0(\xi)| &\leq |\tilde{P}_j(\xi)||\hat{F}_0(\xi)| \\ &\leq C_1|\tilde{P}_0(\xi)||\hat{F}_0(\xi)| \\ &\leq C_1C_2\end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, de modo que, definindo $C \doteq C_1C_2 > 0$,

$$\begin{aligned}\|P_j(D)(F_0 * g)\|_{p,k_\delta} &= \|k_\delta \ P_j \ \hat{F}_0 \ \hat{g}\|_{L^p} \\ &\leq C\|k_\delta \ \hat{g}\|_{L^p} \\ &= C\|g\|_{p,k_\delta}\end{aligned}$$

para todo $g \in \mathcal{B}_{p,k}$: assim, neste caso, temos

$$\|A_\epsilon g\|_{p,k_\delta} \leq 2C \sum_{j=0}^{r} \|\psi_\epsilon c_j\|_{1,1} \|g\|_{p,k_\delta}.$$

Em particular, já temos que $A_\epsilon : \mathcal{B}_{p,k} \to \mathcal{B}_{p,k}$ continuamente.

Por [18, Lemma 13.3.2] podemos escolher $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0/2$ tal que

$$\sum_{j=0}^{r} \|\psi_\epsilon c_j\|_{1,1} \leq \frac{1}{4C}$$

para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$. Enfatizamos que esta escolha é independente de k: neste contexto, temos

$$\|A_\epsilon g\|_{p,k_\delta} \leq \frac{1}{2}\|g\|_{p,k_\delta} \tag{A.2}$$

para todo $g \in \mathcal{B}_{p,k}$. Concluímos que $I + A_\epsilon : \mathcal{B}_{p,k} \to \mathcal{B}_{p,k}$ é inversível, o que em particular nos diz que a equação (A.1) possui uma única solução $g \in \mathcal{B}_{p,k}$ quando $f \in \mathcal{B}_{p,k}$, solução esta que fatalmente terá suporte compacto devido a razões já mencionadas (que ψ_ϵ tem suporte compacto). Para encerrar este argumento, basta a seguinte observação.

Lema A.3. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$ então existe $k \in \mathscr{K}_\omega$ tal que $u \in \mathcal{B}_{p,k}$.*

Demonstração do Lema A.3. Seja $u \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n)$. Segue de [4, Theorem 1.8.14] que existem constantes $\lambda \in \mathbb{R}$ e $C > 0$ tais que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq Ce^{\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Obviamente podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lambda > 0$.

Tome $k(\xi) \doteq e^{-2\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}$, o que claramente define um elemento de $\mathscr{K}_\omega$: temos que

$$k(\xi)|\hat{u}(\xi)| \leq Ce^{-\lambda|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

o que implica que $k\hat{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ – ou seja, $u \in \mathcal{B}_{p,k}$ – qualquer que seja $1 \leq p \leq \infty$. $\square$

Para obter agora a estimativa temos de (A.2) o seguinte: se $f \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}_{p,k}$ e tomarmos $g \in \mathcal{E}'_\omega(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}_{p,k}$ a única solução da equação (A.1) então temos

$$\|g\|_{p,k_\delta} \leq 2\|\psi_\epsilon f\|_{p,k_\delta}$$

donde, claramente,

$$\begin{aligned} \|Ef\|_{p,\tilde{P}_0 k_\delta} &= \|F_0 * g\|_{p,\tilde{P}_0 k_\delta} \\ &\leq \|F_0\|_{\infty,\tilde{P}_0}\|g\|_{p,k_\delta} \\ &\leq 2\|F_0\|_{\infty,\tilde{P}_0}\|\psi_\epsilon f\|_{p,k_\delta} \\ &\leq 4\|F_0\|_{\infty,\tilde{P}_0}\|\psi_\epsilon\|_{1,1}\|f\|_{p,k_\delta} \end{aligned}$$

onde aplicamos mais uma vez o Lema A.2. Por outro lado, recordemos que o Lema A.1 garante que as normas $\|\cdot\|_{p,k_\delta}$ e $\|\cdot\|_{p,k}$ são equivalentes: explicitamente, uma conta simples garante que

$$\|u\|_{p,k} \leq \|u\|_{p,k_\delta} \leq C_\delta\|u\|_{p,k},\ \forall u \in \mathcal{B}_{p,k}.$$

Da mesma forma obtém-se, por exemplo,

$$\|u\|_{p,\tilde{P}_0 k} \leq \|u\|_{p,\tilde{P}_0 k_\delta} \leq C_\delta\|u\|_{p,\tilde{P}_0 k},\ \forall u \in \mathcal{B}_{p,k}$$

de modo que, em particular,

$$\begin{aligned} \|Ef\|_{p,\tilde{P}_0 k} &\leq \|Ef\|_{p,\tilde{P}_0 k_\delta} \\ &\leq 4\|F_0\|_{\infty,\tilde{P}_0}\|\psi_\epsilon\|_{1,1}\|f\|_{p,k_\delta} \\ &\leq 4C_\delta\|F_0\|_{\infty,\tilde{P}_0}\|\psi_\epsilon\|_{1,1}\|f\|_{p,k}. \end{aligned}$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. A. Albanese, A. Corli, and L. Rodino. Hypoellipticity and local solvability in Gevrey classes. *Math. Nachr.*, 242:5–16, 2002. viii

[2] A. A. Albanese and L. Zanghirati. Global hypoellipticity and global solvability in Gevrey classes on the n-dimensional torus. *J. Differential Equations*, 199(2):256–268, 2004. vii

[3] S. Berhanu, P. D. Cordaro, and J. Hounie. *An introduction to involutive structures*, volume 6 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. 47

[4] G. Björck. Linear partial differential operators and generalized distributions. *Ark. Mat.*, 6:351–407 (1966), 1966. 41, 42, 44, 75, 77, 81

[5] P. Bolley, J. Camus, and C. Mattera. Analyticité microlocale et itérés d'opérateurs. In *Séminaire Goulaouic-Schwartz (1978/1979)*, pages Exp. No. 13, 9. École Polytech., Palaiseau, 1979. 12

[6] P. A. S. Caetano and P. D. Cordaro. Gevrey solvability and Gevrey regularity in differential complexes associated to locally integrable structures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(1):185–201, 2011. 50

[7] P. D. Cordaro and A. Himonas. Global analytic regularity for sums of squares of vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(12):4993–5001, 1998. viii, 37

[8] P. D. Cordaro and J. Hounie. On local solvability of underdetermined systems of vector fields. *Amer. J. Math.*, 112(2):243–270, 1990. viii, 50

[9] P. D. Cordaro and J. Hounie. Local solvability for top degree forms in a class of systems of vector fields. *Amer. J. Math.*, 121(3):487–495, 1999. 50

[10] P. D. Cordaro and J. Hounie. Local solvability for a class of differential complexes. *Acta Math.*, 187(2):191–212, 2001. 58

[11] P. D. Cordaro and J.-M. Trépreau. On the solvability of linear partial differential equations in spaces of hyperfunctions. *Ark. Mat.*, 36(1):41–71, 1998. vii

[12] P. D. Cordaro and F. Treves. Homology and cohomology in hypo-analytic structures of the hypersurface type. *J. Geom. Anal.*, 1(1):39–70, 1991. viii, 58, 59, 60, 61

[13] M. Derridj and C. Zuily. Sur la régularité Gevrey des opérateurs de Hörmander. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 52:309–336, 1973. 36

[14] C. Fernández, A. Galbis, and D. Jornet. ω-hypoelliptic differential operators of constant strength. *J. Math. Anal. Appl.*, 297(2):561–576, 2004. Special issue dedicated to John Horváth. 45, 75

[15] G. B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. 12

[16] H. Grauert. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 68:460–472, 1958. 12

[17] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119:147–171, 1967. 36

[18] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. II*, volume 257 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Differential operators with constant coefficients. viii, 41, 44, 45, 75, 76, 77, 78, 80

[19] H. Komatsu. Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 19:366–383, 1967. 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 15

[20] T. Kotake and M. S. Narasimhan. Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator. *Bull. Soc. Math. France*, 90:449–471, 1962. 12

[21] G. Köthe. *Topological vector spaces. I.* Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. 8

[22] G. Köthe. *Topological vector spaces. II*, volume 237 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science]*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979. 2, 4, 10

[23] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003. 12

[24] F. Malaspina and F. Nicola. Gevrey local solvability in locally integrable structures. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 193(5):1491–1502, 2014. iii, v, viii, 49, 51, 52, 56

[25] G. Métivier. Non-hypoellipticité analytique pour $D_x^2 + (x^2 + y^2)D_y^2$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(7):401–404, 1981. 37

[26] M. Morimoto. *An introduction to Sato's hyperfunctions*, volume 129 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. Translated and revised from the 1976 Japanese original by the author. 1

[27] R. Narasimhan. *Analysis on real and complex manifolds*, volume 35 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Reprint of the 1973 edition. 28

[28] L. Rodino. *Linear partial differential operators in Gevrey spaces*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1993. vii, 20, 39, 42, 43, 51

[29] F. Treves. *Hypo-analytic structures*, volume 40 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Local theory. 47

[30] F. Treves. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006. Unabridged republication of the 1967 original. 3, 4, 26

Índice Remissivo