EQUAÇÕES DE LIÉNARD E CONTROLE: MINIMIZAÇÃO DOS CUSTOS FUNCIONAIS TEMPO, ENERGIA, CONSUMO DE COMBUSTÍVEL E TRABALHO.

Cristiane Maria Cornélia Gottschalk

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: TEORIA DO CONTROLE
ORIENTADOR: PROF. DR. LUCIANO BARBANTI

Sao Paulo, junho, 1985

a meus pais

PREFÁCIO

Neste trabalho estudamos controle para as equações de Liénard

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$$

minimizando alguns custos funcionais de maior relevância para os fenômenos dos quais essas equações são modelo.

Para isso, no decorrer de todo o trabalho utilizamos o Princípio do Máximo de Pontryagin que se revelou um forte instrumental para indicar estratégias de controle.

Estudamos também a estrutura dos conjuntos "controláveis" e estratégias de condução dos pontos pertencentes a estes conjuntos para a origem, minimizando os custos funcionais combustível, energia, tempo e trabalho.

A menos do custo funcional tempo (ver [3] e [4]), esta é a primeira abordagem quanto à estratégia de minimização dos outros custos funcionais mencionados acima, para as equações de Liénard.

...

. . .

Foi com grande surpresa que pudemos constatar neste estudo, um paralelo bastante significativo entre os resultados obtidos através da teoria do controle e os princípios milenares do oriente, que se encontram na filosofia taoísta.

Como veremos, a otimização de alguns problemas descritos por equações diferenciais se dá com o uso de controles extremais como por exemplo, ao minimizarmos o custo funcional tempo (aplica-se uma força mínima para em seguida após um intervalo finito de tempo, aplicar-se uma força máxima ao sistema). Assim, é curioso observar que numa luta marcial que segue os princípios taoístas nunca se deve colocar resistência a um golpe do adversário mas sim deixá-lo cair no vazio para então em seguida "voltar" a força do adversário contra ele próprio. Esta "estratégia" é a mais eficiente e rápida para se retornar a um estado de "repouso". Em outras palavras, no princípio taoísta do "wu-wei" (ação através da não-ação) encontramos uma semelhança estrutural com o Princípio do Máximo de Pontryagin no sentido de ser essencial a utilização de forças extremais para a otimização de alguns processos, sejam eles físicos ou psíquicos...

Continuando com o paralelo "ocidente"-"oriente", ao estudarmos o problema de minimização do custo funcional consumo de combustível (que podemos evidentemente associar com o dispêndio de energia de um sistema), concluímos através do Princípio do Máximo de Pontryagin que os controles são extremais intercalados com períodos de "relaxamento", ou "deadzones". No taoísmo, consegue-se uma fluidez e conservação máxima de energia ao passarmos alternadamente de movimentos extremais yang e yin ocorrendo durante a transição um estado de "vazio", de soltura ou relaxamento.

Poderíamos continuar com mais alguns exemplos mas não é o propósito de nosso trabalho. Limitamo-nos a apontar a universalidade do Princípio do Máximo de Pontryagin e também como resultados aparentemente só matemáticos, encontram eco na sabedoria milenar de outras culturas embora os caminhos percorridos e os objetivos a serem alcançados sejam totalmente diferentes. O homem hoje se volta cada vez mais para a tecnologia distanciando-se de suas raízes e usa muitas vezes o conhecimento adquirido como poder para destruir com o máximo de eficiência. No entanto, nas culturas mais antigas, a essência deste conhecimento era utilizada para que o homem crescesse interiormente. Neste processo adquiria muito poder mas com plena consciência de que não havia sentido ou necessidade de exercê-lo. É óbvio que esta não era uma atitude generalizada mas as pessoas que assim procediam eram chamadas de "homens verdadeiros".

. . .

Quero agradecer de coração o amigo e orientador Prof. Dr. Luciano Barbanti, pelo incentivo e apoio recebidos ao longo de todo o trabalho, a força do Paulo, da Lena e todos os amigos.

- São Paulo, julho de 1985 -

ÍNDICE

1 - INTRODUÇÃO

Lord Rayleigh em 1883, quando investigava a teoria do som, apresentou uma equação que, redescoberta numa outra forma por B. Van der Pol em 1923, tem sido um exemplo clássico dos fenômenos oscilatórios não lineares. As equações de Van der Pol,

$$\ddot{x} + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0,$$

foram obtidas em seus estudos sobre o tríodo. Esta equação, quando foi pela primeira vez discutida por Van der Pol em 1926, provàvelmente atraiu mais atenção devido à curiosa natureza de seu espaço de fase do que pela explicação que dava do comportamento do tríodo. A equação no seu plano de fase nos dá um excelente exemplo de um ciclo limite que é aproximado tanto por dentro como por fora pelas suas trajetórias de fase.

W.S. Krogdahl em seu trabalho "Pulsações Estelares como um fenômeno de um ciclo-limite", empregou uma generalização da equação de Van der Pol para explicar a forma das curvas de velocidade observadas na pulsação de várias estrêlas.

Outra generalização das equações de Van der Pol, foi feita por H. e E. Cártan, numa questão radiotécnica ao considerarem o problema geral da existência de soluções periódicas na equa ção

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + [r - \psi(i)]\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0,$$

onde L, r, C denotam respectivamente a indutância, a resistência e a capacidade de um circuito (circuitos RLC), i a intensidade da corrente, t o tempo, e $\psi(i)$ é uma função de i que tem as dimensões de uma resistência submetida às hipóteses de que ψ é uma função par em i, decrescente, $\psi(0) > r$, $\lim_{i\to\infty} \psi(i) = 0$

Estas equações na sua forma geral

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$$

são conhecidas como equações de Liénard, e foram introduzidas por A. Liénard em "Etudes des oscillations entretenues" (1923)

Na teoria do controle temos um sistema e queremos influenciar o sistema através da manipulação dos controles.

O estudo do controle para equações de Liénard é o estudo do sistema perturbado.

$$(LI)_u \qquad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = u(t)$$

onde a função u(t) pertence ao espaço "natural" dos controles, o $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ e são satisfeitas as seguintes hipóteses:

H1) f é par e $f(0) < 0$,

H2) Se $F(x) = \int_0^x f(s)ds$, então $F(x) \to \infty$, com x ,

H(3) F tem um único zero O_F, positivo e é monótona crescente para $x > O_F$.

Usando o controle $u \equiv 0$, as hipóteses acima implicam na existência de um único ciclo não trivial, Γ_0, associado a $(LI)_0$ (que é o sistema $(LI)_u$ com $u \equiv 0$).

Além disso, Γ_0 é orbitalmente estável (i.e., todas as órbitas de $(LI)_0$ tendem a Γ_0, quando $t \to \infty$).

No plano de fase de $(LI)_0$, o $\mathbb{R}^2$, as órbitas do sistema obedecem a equação

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -f(x)y - x$$

O único ponto singular do sistema é o ponto $(0,0)$ que é instável. Pelo teorema de Poincaré - Bendixon temos então que $(0,0)$ está no interior da região delimitada por Γ_0.

Para cada controle $u(t)$ em $(LI)_u$ define-se o custo funcional associado a $u(t)$ como:

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^o(t, x(t), y(t), u(t))\, dt$$

onde $f^o(t, x, y, u)$ é uma função contínua dada.

O custo funcional é um critério quantitativo para a eficiência de cada controle $u(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ em $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$.

O problema que vamos abordar é o da transferência de pontos do ciclo Γ_0 se único, ao ponto singular (0,0), minimizando os custos funcionais tempo, combustível, trabalho e energia, no plano de fase, o $\mathbb{R}^2$. Intuitivamente, tal problema corresponde a passar do regime estacionário Γ_0, ao repouso (0,0), minimizando o custo funcional.

Se tivermos $f^o(t, x(t), y(t), u(t)) \equiv 1$ segue que o custo funcional é a função tempo e portanto o problema reduz-se a transferir pontos do ciclo à origem em tempo mínimo. No caso de se minimizar o combustível, $f^o(t, x(t), y(t), u(t)) = |u(t)|$, $f^o(t, x(t), y(t), u(t)) = u(t) \, . \, y(t)$ para se minimizar o trabalho e $f^o(t, x(t), y(t), u(t)) = [u(t)]^2$ para a energia.

Este é um bom problema de controle pois sendo Γ_0 estável e (0,0) instável, a transferência de pontos de Γ_0 a (0,0) só é possível através do emprego de um termo forçante segundo o problema $(LI)_u$ acima.

No caso da transferência de (0,0) ao ciclo Γ_o em tempo finito, para sairmos de (0,0) é necessário igualmente a presença de um termo forçante em $(LI)_u$, embora este processo seja bem mais simples que o anterior uma vez que para $u \equiv 0$ temos que a origem na equação de Liénard é um foco. Com qualquer controle $u(t)$ diferente de zero, é possível sair de $(0,0)$ e chegar a Γ_0 pois qualquer controle $u(t)$ não nulo perturba o regime estacionário $(0,0)$. Como Γ_0 é estável, um ponto interior à região delimitada por Γ_0, e diferente de $(0,0)$, pode ser transferido com controle $u = 0$ à uma vizinhança conveniente de Γ_0, para daí de novo com o controle $u(t)$, atingir Γ_0, em tempo finito.

2 - COLOCAÇÃO DO PROBLEMA E O PRINCÍPIO DO MÁXIMO DE PONTRYAGIN

Consideremos a equação de Liénard perturbada:

$$(LI)_u \qquad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = u(t)$$

ou o sistema equivalente:

$$(LI)_u \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - x + u \end{cases}$$

com $\qquad -K \leq u \leq K$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$

Para a condição inicial (x_0, y_0) no tempo $t = 0$, seja Δ a classe de todos os controles mensuráveis nos vários intervalos finitos $0 \leq t \leq t_1$ com $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ tal que a solução $(x(t), y(t))$ está definida em $0 \leq t \leq t_1$ com $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ e que atinge a origem $(0,0)$ numa primeira vez no tempo $t = t_1$. A solução $(x(t), y(t))$ é uma solução absolutamente contínua de $(LI)_u$ com $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$.

<u>Definição</u>: Um controle $u^* \in \Delta$ é controle ótimo se

$$C(u^*) \leq C(u) \text{ para todo } u \in \Delta$$

A trajetória correspondente $(x(t), y(t))$ é chamada uma trajetória ótima.

O Princípio do Máximo de Pontryaguin, p.19, de [1], nos dá uma condição necessária para a optimalidade de um controle.

Para melhor formular esta condição torna-se conveniente reformular nosso problema, introduzindo o sistema aumentado em relação a $(LI)_u$. Seja ω uma coordenada no sistema satisfazendo

$$\frac{d\omega}{dt} = f^o(x, y, u),$$

onde f^o é a função que define o custo funcional $C(u)$.

O sistema aumentado em relação a $(LI)_u$ é:

$$(LI)_u^a \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = f^o(x, y, u) \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -f(x)y - x + u \end{cases}$$

Introduzindo o vetor $\mathbf{x} = (\omega, x, y)$ variável no $\mathbb{R}^3$, podemos reescrever o sistema como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(x, y, u) \qquad (2.1)$$

onde $\mathbb{F}(x, y, u) = (f^o(x, y, u), y, -f(x)y - x + u)$

Observemos que $\mathbb{F}(x, y, u)$ não depende da coordenada w.

Seja agora $u \in \Delta$ que transfere (x_0, y_0) de Γ_0, o único ciclo não trivial associado a $(LI)_0$, à origem, e seja $(x, y) = (x(t), y(t))$ a solução correspondente do sistema $(LI)_u$ com condição inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_o, y_0)$. Indicando o ponto $(0, x_0, y_0)$ por $\mathbf{x}_o$, segue que a solução de (2.1) com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ correspondente ao controle u, está definida em todo o intervalo $t_o \leq t \leq t_1$, e tem a forma:

$$\omega = \int_{t_0}^{t} f^o(x(s), y(s), u(s))\, ds$$

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

Em particular, quando $t = t_1$

$$\omega = \int_{t_0}^{t_1} f^o(x(t), y(t), u(t))\, dt = C(u)$$

$$(x(t_1), y(t_1)) = (0,0)$$

isto é, a solução $\mathbf{x}(t)$ da equação (2.1) com condição inicial

$x(t_0) = x_o$ passa pelo ponto $x = (C(u), 0, 0)$ em $t = t_1$.

Em outras palavras, seja o eixo w perpendicular ao plano de fase como na figura abaixo, (Fig. 2.1), podemos dizer que $x(t)$ intercepta o eixo w num ponto de coordenada $(C(u), 0, 0)$ no tempo $t = t_1$.

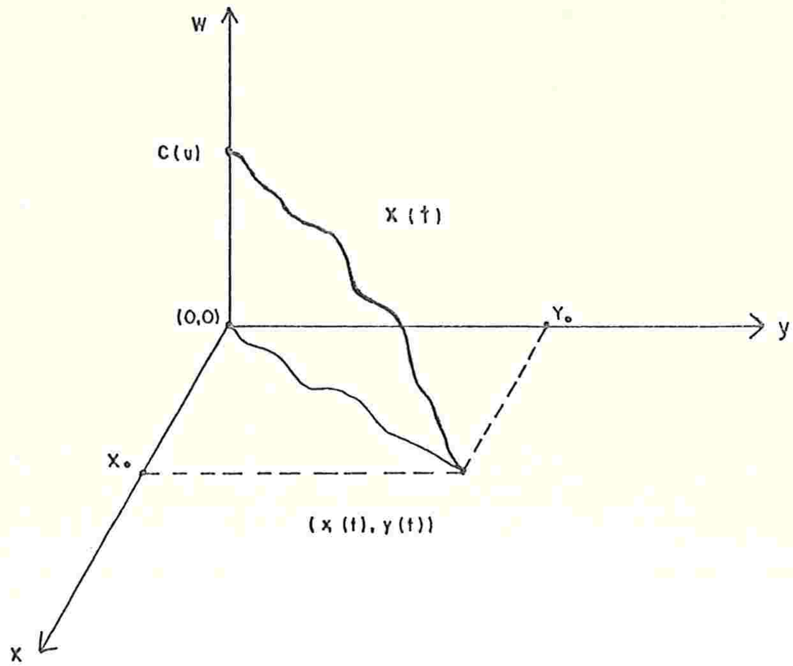


Figura 2.1

Recíprocamente, suponha que u é um controle admissí - vel tal que a correspondente solução $x(t)$ da equação (2.1) com condição inicial

$x(t_0) = x_0 = (0, x_0, y_0)$, em algum tempo t_1 intercep- ta o eixo w com coordenada $w = C(u)$.

Então, o controle u transfere o ponto (x_0, y_0) no espaço de fase para o origem e o funcional (1.1) assume o valor $C(u)$.

Assim podemos formular o problema ótimo acima na seguinte forma equivalente:

Dado o ponto $x_0 = (0, x_0, y_0)$, entre todos os controles admissíveis $u = u(t)$, tendo a propriedade de que a correspondente solução $x(t)$ de (2.1) com condição inicial, $x(t_0) = x_0$ intercepta o eixo w, achar um cujo ponto de intersecção com o eixo w tenha a menor coordenada w_0.

Passemos agora à formulação do teorema que soluciona o problema acima. Para isso, vamos considerar, além do sistema fundamental de equações $(LI)_u^a$, outro sistema de equações com as variáveis auxiliares η_o, η_1 e η_2 satisfazendo:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^{2} \frac{\partial f^\alpha(x, y, u)}{\partial v_i} \cdot \eta_\alpha \quad , i = 0,1,2 \qquad (2.2)$$

com $v_0 = w_1$, $v_1 = x$, $v_2 = y$

$$f^1(x, y, u) = y$$

e $$f^2(x, y, u) = -f(x)y - x + u$$

Este sistema é linear e homogêneo. Portanto, para qualquer condição inicial, admite uma única solução

$$\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2)$$

com η_i $(i = 0, 1, 2)$ definida em todo o intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ no qual $u(t)$ e $x(t)$ estão definidos.

Do mesmo modo que a solução $x(t)$ do sistema (2.1), a solução do sistema (2.2) consiste de funções absolutamente contínuas $\eta_i(t)$ que têm derivadas contínuas em relação a t, exceto em um número finito de pontos.

Combinemos agora os sistemas $(LI)_u^a$ e (2.2). Para isso, consideremos a seguinte função H nas variáveis x, y, η_o, η_1, η_2, u:

$$H(\eta, x, y, u) = \langle\eta, F(x, y, u)\rangle = \sum_{\alpha=0}^{2} \eta_i f^{\alpha}(x, y, u)$$

onde $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2)$

Agora os sistemas $(LI)_u^a$ e (2.2) podem ser reescritos com a ajuda desta função H na forma de um sistema Hamiltoniano:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i} \quad , i = 0, 1, 2 \tag{2.4}$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial v_i} \quad , i = 0, 1, 2 \tag{2.5}$$

com $v_o = w$, $v_1 = x$ e $v_2 = y$.

Tomando um controle admissível arbitrário u, $t_o \leq t \leq t_1$, e a condição inicial $x(t_0) = x_0$ podemos achar a trajetória correspondente $x(t) = (w(t), x(t), y(t))$ solução de (2.4), e a solução do sistema (2.5) $\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t))$ correspondente às funções $u(t)$ e $x(t)$.

Para valores fixados de η, x e y, a função H torna-se uma função de u.

Definamos

$$M(\eta, x, y) = \sup_{u \in \Delta} H(\eta, x, y, u)$$

Se a função contínua H atingir seu limite superior em Δ, então $M(\eta, x, y)$ é o máximo dos valores de H, para η, x e y fixados.

Daí o teorema 1 abaixo (que nos dá uma condição necessária para a optimalidade), ser chamado de o Princípio do Máximo (v. Pontryagin [1]).

Teorema 1 - Seja $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ um controle admissível tal que a trajetória correspondente $x(t)$ que no tempo t_0 está em x_0, intercepta o eixo w em algum tempo t_1.

Para que $u(t)$ e $x(t)$ sejam ótimos é necessário que exista uma função vetorial contínua não nula $\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t))$ correspondente a $u(t)$ e $x(t)$, tal que:

1º) para todo t, $t_0 \leq t \leq t_1$, a função $H(\eta(t), x(t), y(t), u)$ na variável $u \in \Delta$ atinge seu valor máximo no ponto $u = u(t)$:

$$H(\eta(t),\ x(t),\ y(t),\ u(t)) = M(\eta(t),\ x(t),\ y(t)); \tag{2.6}$$

2º) no tempo final t_1 as relações

$$\eta_0(t_1) \leq 0,\ M(\eta(t_1),\ x(t_1),\ y(t_1)) = 0 \tag{2.7}$$

são satisfeitas.

Além disso, temos que se $\eta(t)$, $x(t)$ e $u(t)$ satisfazem os sistemas (2.4) e (2.5), e a primeira condição acima, as funções $\eta_o(t)$ e $M(\eta(t)\ ,\ x(t),\ y(t))$ são constantes no tempo.

Desta forma, (2.7) é verificado para todo tempo t, $t_o \leq t \leq t_1$, e não apenas em t_1.

Observação: Dizemos que um controle é maximal se satisfaz o Princípio do Máximo de Pontryaguin (Teorema 1) e portanto segue que todo controle ótimo é necessariamente um controle maximal.

Finalmente, queremos construir uma função $\psi(x,y)$ do sistema diferencial

$$\dot{w} = f^o(x,\ y,\ u)$$

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -f(x)y - x + \psi(x,y)$$

de tal forma que suas soluções transfiram $(x(t), y(t))$ a $(0, 0)$ com $C(u)$ mínimo.

A função $\psi = \psi(x, y)$ é chamada "função síntese dos controles" que otimizam o sistema $(LI)_u^a$.

3 - CONTROLES DO TIPO "RELAY" E O PRINCÍPIO DO BANG-BANG. ESTRUTURA DOS CONJUNTOS DE CONTROLABILIDADE NULA.

Consideremos o problema de controle para o sistema:

$$(LI)_u^a \begin{cases} \dot{w} = f^o(x, y, u) & f \in C^1 \\ \dot{x} = y & -K \leq u \leq K \\ \dot{y} = -f(x)y - x + u \end{cases}$$

com controle $u \in \Delta$ mensuráveis levando um ponto inicial $(0, x_0, y_0)$ para $(w, 0, 0)$, minimizando o custo funcional:

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^o(t, x(t), y(t), u(t))\, dt$$

A solução de $(LI)_u^a$ correspondente a um controle maximal é dita uma solução maximal.

<u>Definição:</u> Um controle $u(t) \in \Delta$, $0 \leq t \leq t_1$ é dito um controle "relay" se existe uma partição finita do intervalo,

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = t_1$$

tal que, em cada intervalo aberto $\tau_{i-1} < t < \tau_i$, $i = 1, \ldots, k$, $u(t)$ é constante e igual a $+K$ ou $-K$, $K \in \mathbb{R}$, constante.

3.1 - Os conjuntos de controlabilidade nula V_K

Seja $(LI)_K$ o sistema obtido de $(LI)_u$ trocando-se $u(t)$ por $u(t) = K$, do tipo "relay".

Se $P \in \mathbb{R}^2$, denotamos a única órbita de $(LI)_K$, com $u = K$, que passa por P, por $\gamma_K(P)$, sendo $\gamma_K^-(P)$ a semiórbita negativa e $\gamma_K^+(P)$ a semiórbita positiva.

O único ponto singular do processo $(LI)_u$ com $u = K$ é o ponto $(K, 0)$ e para $u = -K$, o ponto $(-K, 0)$.

Notamos igualmente, por $(LI)_0$, o sistema $(LI)_u$, para $u = 0$.

<u>Definição</u>: O conjunto de controlabilidade nula V_K, associado a $(LI)_K$, é o conjunto dos pontos do $\mathbb{R}^2$ que podem ser transferidos a zero com tempo finito mediante órbitas de $(LI)_K$ e $(LI)_{-K}$.

Visto que as órbitas de

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = K$$

e

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + x = -K$$

são simétricas em relação a zero, para $K \in \mathbb{R}^+$, podemos então, apenas considerar o sistema:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = K \quad , \; K \geq 0$$

com $f \in C^1(\mathbb{R})$, satisfazendo as hipóteses H_1, H_2 e H_3 do ítem 1 e a hipótese adicional (H.A.):

(H.A.) $\exists\; M, N \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\left\{ \dot{y} : y = \frac{0_f - x}{f(x)} \;, \; x \geq N \right\} \subseteq [-M, 0]$$

Para todo $K > 0$, V_K é subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^2$ (Lee e Markus [2], p. 429).

Vejamos algumas outras propriedades dos conjuntos V_K.

<u>Teorema 3.1.1</u> - Seja $(LI)_K$. Então $V_K = \mathbb{R}^2$, ou V_K é limitado. Se $V_K \neq \mathbb{R}^2$, então V_K é simétrico em relação a zero e a sua fronteira é constituída de duas órbitas simétricas, sendo que uma delas provém do sistema $(LI)_K$.

Na demonstração deste teorema (ver Barbanti [3], pág. 12) fica claro uma estratégia de condução de um ponto do $\mathbb{R}^2$ à origem em tempo finito através do controle relay $|u(t)| = K$. Na construção de V_K, obtém-se um ponto S^* no eixo $y = 0$, $S^* \prec (K,0)$, que tem a seguinte propriedade:

Se Z é um ponto sobre o eixo $y = 0$, então $Z \prec S^*$ implica que $\gamma_K^-(Z)$ não toca o eixo $y = 0$, senão em Z,

$Z \succ S^*$ implica que $\gamma_K^-(Z)$ toca o eixo $y = 0$ num outro ponto além de Z.

Denotando o ponto $(0, 0)$ do plano por $\mathbf{0}$, construamos a seguinte seqüência de pontos sobre o eixo $y = 0$, (ver fig. 3.1.1)

$O_0 = 0$ e se $S^* < O_{n-1}$, $(n \geq 1)$,

O_n será o ponto onde $\gamma_K^-(-O_{n-1})$ corta pela primeira vez o eixo $y = 0$, após $-O_{n-1}$

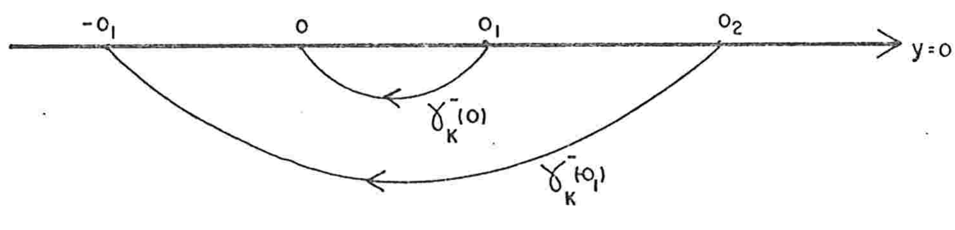


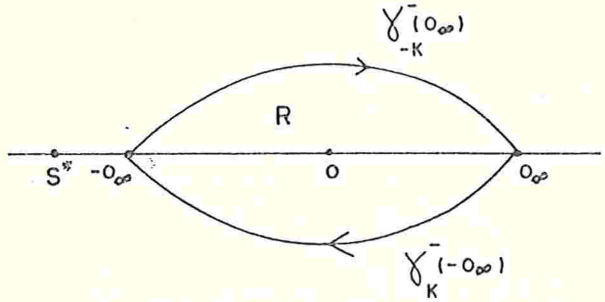
Figura 3.1.1

Temos então o seguinte:

1º) $-O_n \succ S^*$, para todo $n \in Z^+$

ou 2º) existe n_o, com $-O_n \prec S^* \prec -O_{n_o-1}$

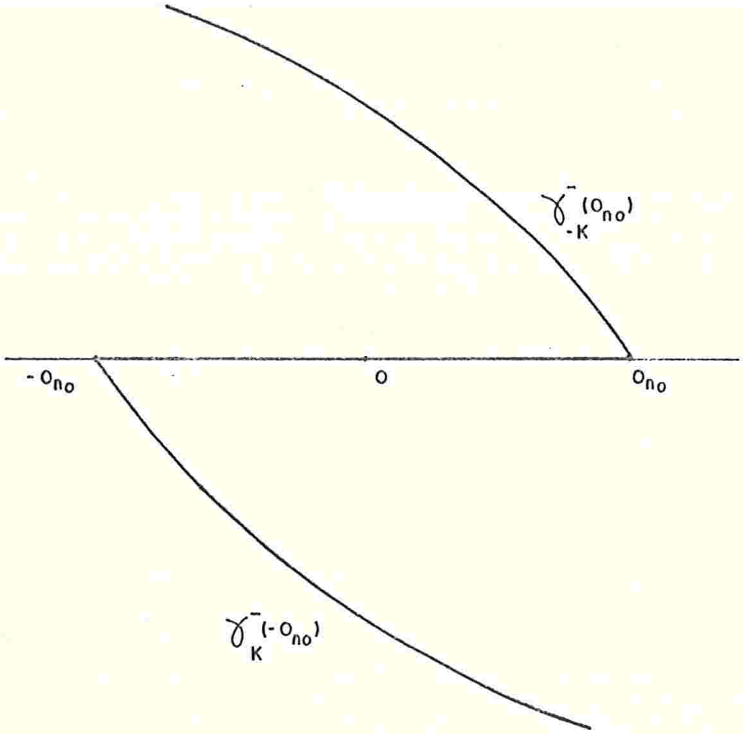
No primeiro caso, (ver Fig. 3.1.1) chamando de O_∞ o ponto $\lim_{n\to\infty} O_n$ temos que $-O_\infty > S^*$ e pelo teorema da dependência contínua de soluções, $\gamma^-_{-K}(O\ )$ passa por $-O_\infty$. Em particular $O_\infty > (K,0)$



Primeiro caso-Fig. 3.1.2

Chamando de R a região delimitada por esses dois arcos de órbita temos que V_K = R e a estratégia de condução de qualquer ponto P ∈ R para a origem em tempo finito é conduzi-lo através de $\gamma^+_K(P)$ (ou γ^+_{-K} (P)) até um ponto que está sobre γ^-_K (O_n) (ou então está sobre $\gamma^-_K(-O_n)$), para algum n > 0. Daí com mais n aplicações do controle K ou -K, alternadamente, atinge-se (0,0).

No segundo caso temos, $V_K = \mathbb{R}^2$ (ver Fig. 3.1.3). Observemos que as três curvas $\gamma^-_{-K}(O_{n_0})$, $\overline{-O_{n_0}\ O_{n_0}}$, $\gamma^-_K(-O_{n_0})$ dividem o plano em duas regiões e portanto a estratégia de condução de qualquer ponto P do $\mathbb{R}^2$ para a origem resume-se no seguinte:



Segundo caso-Fig. 3.1.3

Se P está à direita deste arco, aplicamos o controle $-K$, até $\gamma^{+}_{-K}(P)$ tocar $\gamma^{-}_{K}(-0_{n_0})$. Daí segue-se até 0 como no primeiro caso. Reciprocamente, aplica-se o controle K a P, se P está à esquerda do arco e procede-se anàlogamente.

Uma propriedade bastante importante do conjunto V_K é que todos os seus pontos podem ser levados para a origem em tempo mínimo ($f^o = 1$) com controle "relay" (ver Barbanti [3] pág. 31) e a existência desse controle é assegurada pelo teorema 4, pág. 259 de Lee e Markus [2].

Surge então a questão se estes pontos podem ser levados para a origem minimizando algum outro custo funcional, como por exemplo, o combustível ($f^o = |u|$). Veremos mais adiante que se existir um controle u maximal que leva um ponto (x_o, y_0) de V_K para a origem minimizando o combustível, então u é do tipo "relay" exceto para alguns intervalos de tempo nos quais u se anula. Notemos por U_K^o o conjunto desses controles.

Portanto, veremos no próximo ítem uma estratégia que leva pontos do $\mathbb{R}^2$ para a origem com controles do tipo acima e provaremos que este conjunto de pontos Z_K é igual a V_K. Mas antes é necessário enunciar o Princípio do "bang-bang".

Seja V_K^u o conjunto de controlabilidade nula do sistema

$$(LI)_u \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = u(t) \quad \text{com } |u(t)| \leq K \quad \text{q.s.}$$

$f \in C^1(\mathbb{R})$, satisfazendo as hipóteses H_1, H_2, H_3 e H.A.;

ou seja, V_K^u é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que podem ser transferidos a zero em tempo finito mediante órbitas do sistema $(LI)_u$ acima, com $u \in \Delta$.

Então (ver Barbanti, [3] pág. 15),

$$V_K^u = V_K$$

Deste resultado segue o princípio do "bang-bang", ou seja, qualquer ponto de V_K^u pode ser levado à origem em tempo finito através de um controle do tipo "relay".

3.2 - Os Conjuntos de controlabilidade nula Z_K

Seja $(LI)_K^o$ o sistema controlado

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -f(x)y - x + u$$

com $u \in U_K^o$.

Para todo t fixado, estritamente positivo, definimos $Z(t, K)$ como sendo o conjunto dos pontos P de $\mathbb{R}^2$, para os quais existe uma solução:

$x(t, P, K)$ de $(LI)_K^o$ satisfazendo

$$(x(0, P, K), \dot{x}(0, P, K)) = P$$

e $$(x(\bar{t}, P, K), \dot{x}(\bar{t}, P, K)) = (0, 0)$$

para algum $\bar{t} \in [0,t]$.

Definição: O conjunto de controlabilidade nula Z_K, associado a $(LI)_K^o$, é o conjunto dos pontos do $\mathbb{R}^2$ que podem ser transferidos a zero em tempo finito mediante uma órbita de $(LI)_K^o$. Ou seja,

$$Z_K = \bigcup_{t>0} Z(t, K)$$

<u>Prop. 3.2.1</u>: $Z_K = V_K$. Portanto Z_K é aberto e conexo no $\mathbb{R}^2$.

<u>Dem.</u>: Inicialmente faremos a demonstração para $V_K \neq \mathbb{R}^2$. Como visto no ítem anterior, a construção de V_K envolve os arcos de órbita de $(LI)_K$ e $(LI)_{-K}$ segundo o esquema abaixo (Fig. 3.2.1):

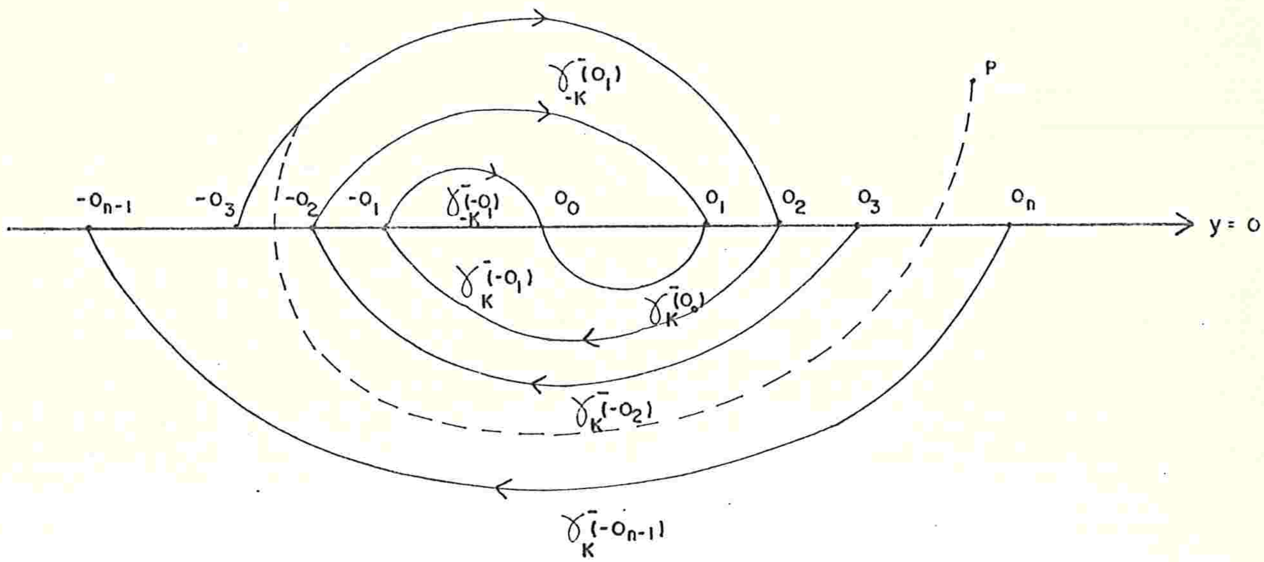


Fig. 3.2.1.

Suponhamos que $P \in V_K \cap \{(x,y) = y > 0\}$

(i.e., P está numa posição tal que na sua condução até a origem o primeiro controle aplicado, é -K). Conduzimos então P através de órbita do sistema $(LI)_{-K}$ até atingirmos o eixo y = 0 entre O_r e O_{r+1} para algum r (ver Fig. 3.2.2).

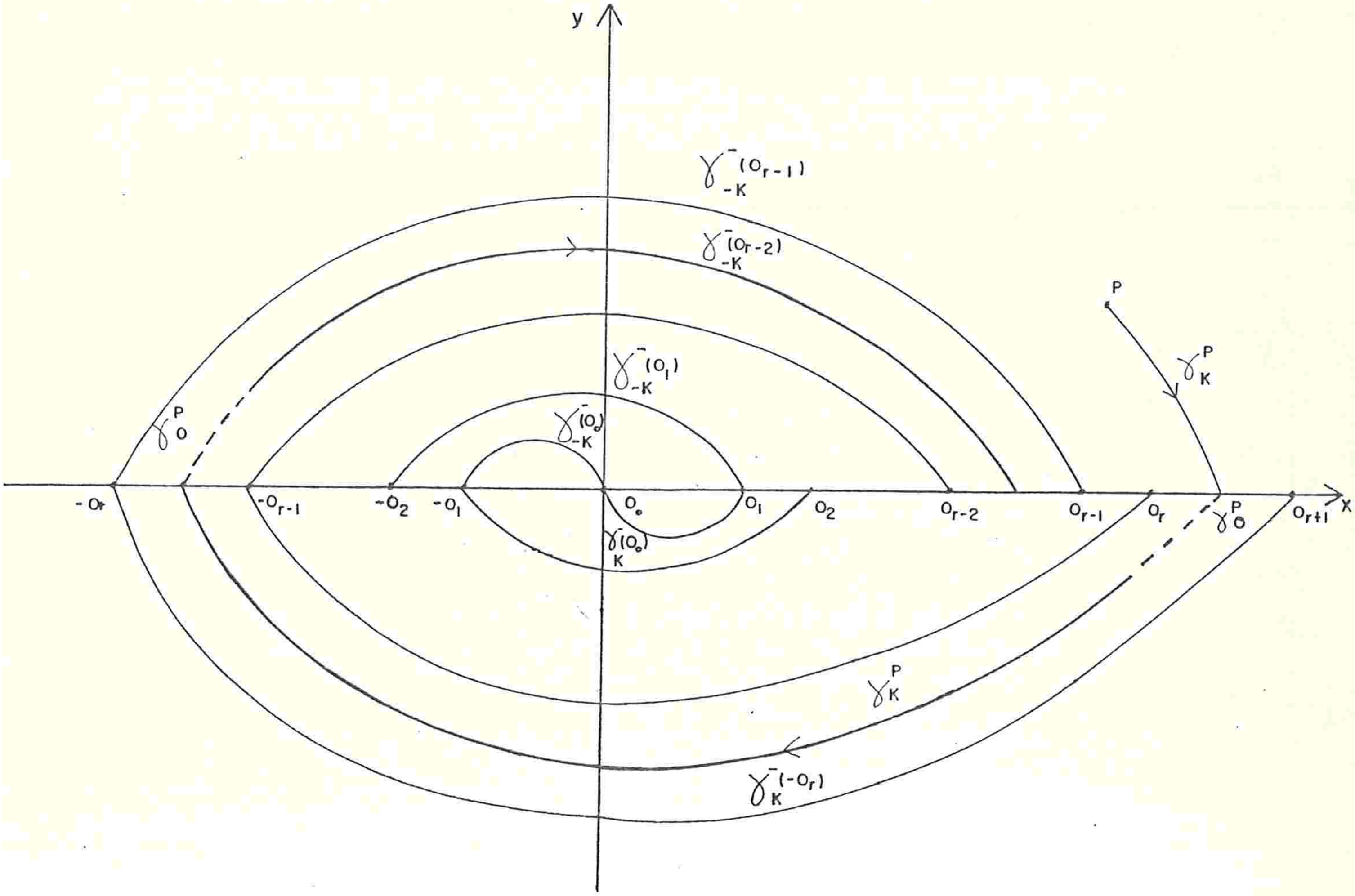


Figura 3.2.2

À partir daí continuamos a condução através de $(LI)_0$ durante um intervalo de tempo finito de tal modo que a órbita ainda permaneça na faixa delimitada pela curva no semi-plano $y \leq 0$,

$\overparen{-\overline{O_r - O_{r-1}}\ \gamma_K^r\ \overline{O_r\ O_{r+1}}}\ \gamma_K^{r+1}$. Em seguida damos seqüência à condução através de $(LI)_K$ até atingirmos o eixo $y = 0$ no semi-plano $x < 0$, quando passamos a $(LI)_0$ novamente, durante um intervalo de tempo de tal modo que a órbita continue na faixa delimitada pela curva do semi-plano $y \geq 0$,

$-\overline{O_r - O_{r-1}}\ \gamma_{-K}^{r-1}\ \overline{O_{r-2}\ O_{r-1}}\ \gamma_{-K}^{r} - O_r$, posto que reiteramos o processo.

Vemos assim que o penúltimo passo da seqüência de construção é uma órbita de $(LI)_0$ que deve interceptar $\gamma_{-K}^{-}(O_o)$ pois o zero é um foco instável para $(LI)_0$. A partir deste ponto vemos que a órbita assim construída com início em P, atinge zero, usando-se como último controle o -K.

Óbviamente podemos repetir o processo trocando -K nas seqüências de construção acima, se P está numa posição do plano em que o primeiro controle a ser aplicado na construção de V_K fosse o controle K (i.e. $P \in V_K \cap \{(x,y) = y < 0\}$

Quando P está no eixo y = 0, o processo começa com a aplicação do controle nulo.

Suponhamos agora $V_K = \mathbb{R}^2$. Neste caso, à diferença do anterior, existe um "último" arco de órbita infinito que se usa na estratégia de condução de um ponto a zero, segundo o esquema abaixo (ver Fig. 3.2.3).

A demonstração é análoga, usando se necessário no lugar de O_{r+1} o ponto (virtual) infinito à direita do eixo y = 0.

Portanto $V_K \subset Z_K$.

Mas $Z_K \subset V_K^u$ (por definição de Z_K e V_K^u) e como $V_K^u = V_K$ temos $V_K = Z_K$ #

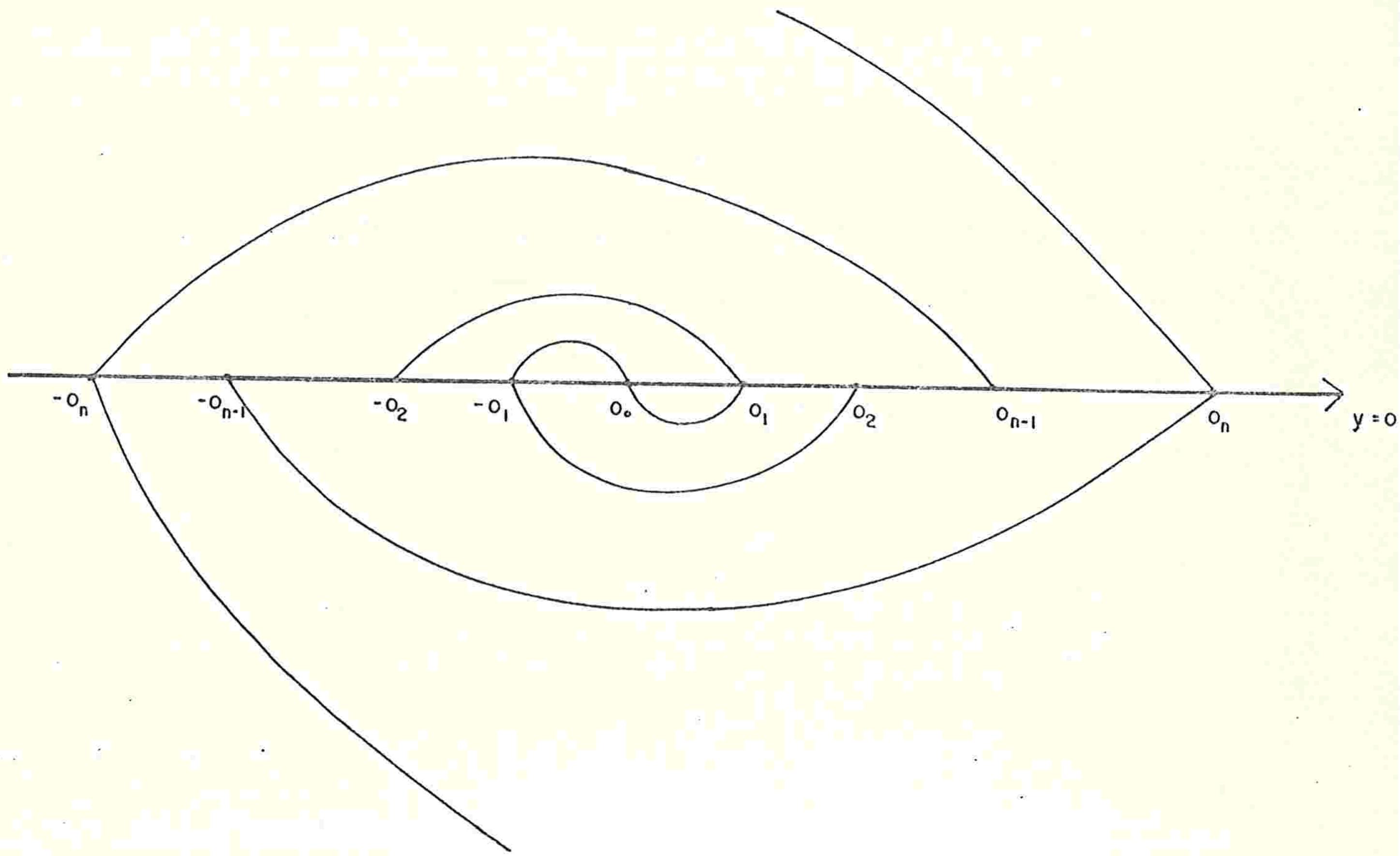


Fig. 3.2.3

Nosso problema é levar pontos do ciclo limite Γ_0 (ver capítulo 1) para a origem, minimizando alguns custos funcionais. Surge então a questão para quais valores de K os pontos do ciclo pertencem a Z_K. Vejamos alguns teoremas que nos dão a estrutura dos Z_K.

<u>Teorema 3.2.1</u>: Seja $(LI)_K^o$. Se $Z_K \neq \mathbb{R}^2$, então Z_K é interno a Γ_0

Dem.: Denotemos por R_{Γ_0} a região aberta circunscrita por Γ_0. Suponhamos que $Z_K \not\subseteq R_{\Gamma_0}$. Dado um ponto qualquer de R_{Γ_0}, o controle nulo transfere este ponto em tempo finito até Z_K, pois Γ_0 é estável. Conclui-se que $R_{\Gamma_0} \subseteq Z_K$.

Se $P \in \mathbb{R}^2 \setminus R_{\Gamma_0}$, novamente aplicando o controle nulo, P pode ser transferido em tempo finito à um ponto Q tão próximo de Γ_0 quanto se queira. Indicando por y_K' o coeficiente angular de uma órbita de $(LI)_K^o$, num ponto (x,y) do plano de fase, dados K_1 e K_2, vale

$$y_{K_1}' - y_{K_2}' = \frac{K_1 - K_2}{y}$$

Portanto, em cada ponto (x, y) de Γ_0, vale:

$$y_K' - y_0' = \frac{K}{y}$$

Assim, tomando $Q \in \mathbb{R}^2$, numa vizinhança suficientemente pequena de Γ_0 vemos que $\gamma_K^+(Q)$ penetra em R_{Γ_0}. Como $R_{\Gamma_0} \subseteq Z_K$, então $Z_K = \mathbb{R}^2$

#

O próximo teorema nos dá o raio de um circulo interior a Z_K. A demonstração se encontra na pág. 13 de [4]

Teorema 3.2.3 : Dado $K > 0$ e definindo

$$r_k = \min_{x:f(x) \leq 0} \sqrt{x^2 + \frac{K^2}{|f(x)|^2}} \text{ , temos que}$$

o círculo centrado na origem e raio r_K está contido em Z_K.

Veremos agora o raio de um círculo exterior a Z_K, e que contém Z_K mesmo.

Sejam O_F o único zero positivo de

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{e } R_K^* \text{ o número}$$

$$R_K^* = \max_{x \in [-O_F, O_F]} \sqrt{x^2 + \frac{(x\ F(x))^2}{K^2}} .$$

Dada a transformação de Liénard no $\mathbb{R}^2$

$$(x,y) \xrightarrow{(L)} (x,z)$$

com $z = y + F(x)$, seja C^*, o círculo no plano (x,z) com centro em $(0,0)$ e raio R_K^*. Seja C, o círculo no plano (x,y) com centro $(0,0)$ e raio R_K, de tal modo que C^* é o maior círculo com centro na origem que está contido em $(L).C$. Vale então, Teorema 3.2.4: Se $Z_K \neq \mathbb{R}^2$ então Z_K está contido no círculo de centro na origem e raio R_K.

Dem.: Como (L) deixa o eixo $y = 0$ inalterado teremos Z_K e $(L).Z_K$ ambos iguais a $\mathbb{R}^2$ ou não. Além disso $(L).Z_K$ será limitado se e só se existe um arco de órbita, ζ, em $\{(x,z) : z < 0\}$ que é sua fronteira neste semiplano e toca o eixo $z = 0$ em dois pontos simétricos em relação à origem. (Note-se que $\zeta = (L).\gamma$, onde γ é a fronteira de Z_K no semiplano $\{(x,y) : y < 0\}$)

Como, fazendo $\rho^2 = x^2 + z^2$, vale

$$\rho\dot{\rho} = x(z - F(x)) + z(K - x)$$

temos que $\dot{\rho} > 0$ se e só se $\dfrac{F(x)x}{K} < z$

Assim, para ζ tocar o eixo $z = 0$ em dois pontos simétricos em relação à origem do plano (x,z) temos que ζ fica exterior (em relação a origem) à região delimitada pelo semi-circulo

$$x^2 + z^2 = \left(\frac{F(x)x}{K}\right)^2 \qquad \text{com } z \leq 0$$

#

Os dois teoremas que seguem mostram que, dada a aplicação que a cada K associa Z_K, fixada a f em $(LI)_K$, tal aplicação tem apenas um ponto de descontinuidade. A demonstração destes teoremas se encontra na pág. 8 de [4] , teoremas 4 e 5.

Teorema 3.2.5: Fixada f em $(LI)_K^o$, com K variável.

$$K_1 > K_2 \to Z_{K_2} \underset{\neq}{\subset} Z_{K_1}$$

Teorema 3.2.6: Seja f em $(LI)_K^o$, fixada, com K variável. Então e - xiste um número $K_f > 0$, para qual vale:

se $\quad K > K_f$ então $Z_K = \mathbb{R}^2$

$\quad K \leq K_f$ então $Z_K \neq \mathbb{R}^2$

Destes dois teoremas e do teorema 3.2.1, vemos que transfere-se o ciclo à origem só se $K > K_f$.

Damos limitações de K_f à seguir:

Teorema 3.2.7: Seja $(LI)_K^o$ e $(0, x_{\Gamma_0})$, o ponto com $x_{\Gamma_0} > 0$, onde Γ_0 corta o eixo $y = 0$. Se $K \geq x_{\Gamma_0}$, então $Z_K = \mathbb{R}^2$.

Dem.: Pela proposição 3.2.1 vimos que $Z_K = V_K$. E na construção de V_K (ver pag. 17), quando $V_K \neq \mathbb{R}^2$, existe um ponto 0_∞ tal que as órbitas $\gamma_K^-(-0_\infty)$ e $\gamma_{-K}^-(0_\infty)$ constituem a fronteira de V_K.

Chamando de 0_{∞_1} a primeira coordenada de 0_∞, observemos que

$$0_{\infty_1} \geq K \geq x_{\Gamma_0}$$

Portanto $V_K = Z_K$ não é interno a Γ_0. Absurdo pelo teorema 3.2.1.

<u>Teorema 3.2.8</u>: Sejam x_o um ponto onde se obtém o mínimo para r_K do teorema 3.2.3, e r_o o raio do maior círculo com centro na origem que pode ser inscrito em Γ_0. Então

$$K_f \geq - f(x_o) \sqrt{r_0^2 - x_0^2}$$

A demonstração deste teorema se encontra na p. 15 de [4] .

Dados os números r_K e R_K dos teoremas 3.2.3 e 3.2.4 , temos evidentemente que r_K cresce e R_K decresce com o crescimento de K. Assim vale:

<u>Teorema 3.2.9</u>: Seja K_0 o número para o qual se verifica $R_{K_0} = r_{K_0}$. Então $K_f \geq K_0$

<u>Dem.</u>: ver [3] , p. 27, teorema 9

<u>Teorema 3.2.10</u>: Seja K_0 tal que

$$f(K_0 + r) + f(K_0 - r) > 0 \qquad \forall \ r \geq 0$$

então $K_f < K_0$.

<u>Dem.:</u> ver [4] , p. 11 corolário 1 do teorema 6.

Finalmente, usando o Teorema de Liapunov, temos que, existem $K_0 > 0$ e uma curva fechada quadrática $Q(x,y)$ do tipo

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta = 0$$

com V_K contido no interior de $Q(x,y)$ (ver [3] , pág. 18^+).

Logo, pelo teorema 3.2.5, para $\forall K \in [0,K_0]$ temos $V_K \neq \mathbb{R}^2$. Portanto $K_f \geq K_0 > 0$.

4 - "SWITCHING LOCUS" NOS CASOS DO CONSUMO DE COMBUSTÍVEL, ENERGIA, TEMPO E TRABALHO

A teoria do controle ótimo tem sido aplicada a uma enorme variedade de problemas importantes. Tem sido usada para resolver problemas ligados ao controle de atitude de veículos espaciais, controle de fluxo de tráfego, problema de transferência de órbita para veículos espaciais interplanetários e problemas relacionados com sistemas de comunicação. Como vemos, é de grande interesse a minimização de certos custos funcionais no estudo dos problemas acima, como por exemplo, minimizar o consumo de combustível durante o percurso de um satélite (ver [5]) ou minimizar o tempo de deslocamento de um ponto em regime estacionário para o repouso (ver [3]). Este último caso foi o único mais estudado, até agora no problema de controle para as equações de Liénard. Nada mais se tem na literatura a respeito de minimização de outros custos funcionais como por exemplo o consumo de combustível, trabalho e energia para essas equações.

Pretendemos fazer neste parágrafo o seguinte:

1º) Dar a estrutura da switching-locus nos casos da minimização dos custos consumo de combustível, energia e tempo.

2º) Finalizar o estudo do sub-conjunto do $\mathbb{R}^2$ que pode ser garantidamente levado à origem com combustível mínimo.

3º) Investigar as possíveis formas da "switching locus" no caso do custo funcional trabalho.

4.1 - Consumo de Combustível

Consideremos o custo funcional combustível

$$C(u) = \int_0^t |u(s)|\, ds \qquad \text{(ver [6] pág. 431)}$$

Neste caso temos o sistema aumentado

$$(LI)_u^c \begin{cases} \dot{w} = |u| & |u| \leq K \\ \dot{x} = y & \\ \dot{y} = -f(x)y - x + u & K \text{ constante} \end{cases}$$

Damos a seguir o corolário do teorema 1 que caracteriza o controle que minimiza o custo funcional "combustível".

Corolário 4.1.1.: Seja $u = u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, $u \in \Delta$, um controle maximal para o sistema $(LI)^c$. Então u é igual ao controle $K.\operatorname{sgn}[\eta_2]$ exceto em alguns intervalos em que se anula.

Dem.: Por (2.3) temos que,

$$H = -|u| + \eta_1 y - \eta_2 f(x) y - \eta_2 x + \eta_2 u$$

Pelo teorema 1, para que a primeira condição seja satisfeita, observamos que $\eta_2 u - |u|$ é máximo para

$$u = \begin{cases} K.\ \operatorname{sgn}[\eta_2] & , \quad |\eta_2| \geq 1 \\ \\ 0 & \quad |\eta_2| < 1 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

onde η_0, η_1 e η_2 satisfazem:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_0 = 0 \\ \\ \dot{\eta}_1 = \eta_2 + \eta_2\, y\, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x) \\ \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \eta_2 f(x) \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Portanto, como η_i, $i = 0,1,2$, é absolutamente contínua, u é um controle do tipo relay exceto em alguns intervalos em que se anula (ver fig. 4.1.1). #

Seja C_K o domínio de controlabilidade nula de $(LI)^c_u$. Do corolário 4.1.1. acima, concluímos que $C_K = Z_K$ (ver capítulo 3.2).

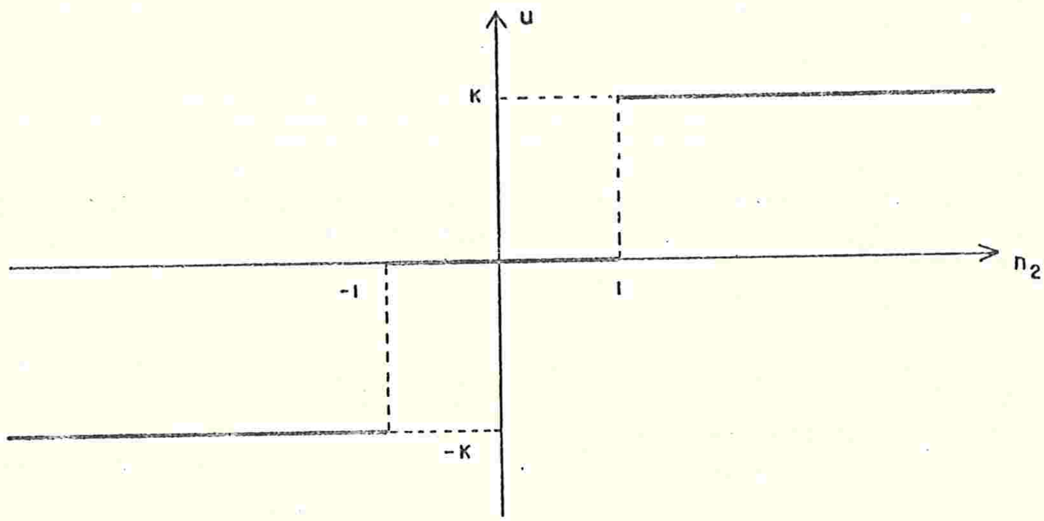


Figura 4.1.1-

Definição: Sejam

S^+ : família de soluções de $(LI)^c_u$ para $u = +K$

S^- : família de soluções de $(LI)^c_u$ para $u = -K$

S^o : família de soluções de $(LI)^c_u$ para $u = 0$

Considere o conjunto de todos os controles maximais em Δ do tipo relay, para o sistema $(LI)^c_u$, levando pontos do domínio de controlabilidade C_K para a origem. A "switching-locus" W é o conjunto de todos os pontos em C_K nos quais as correspondentes soluções $\mathbf{x}(t)$ não tem derivadas, ou seja, W consiste nos pontos para os quais as soluções maximais mudam de uma família de soluções S^+ para S^o, de S^o para S^-, de S^- para S^o ou de S^o para S^+.

O próximo teorema relaciona os tempos de mudança de uma solução maximal com a geometria do plano de fase. Este resultado, que estabelece que os zeros de $\eta_2 \pm 1$ e os zeros de $x(t)$ ou $y(t)$ são entrelaçados, é básico para estabelecer as propriedades da "switching locus" necessária para a construção do controle de síntese.

<u>Teorema 4.1.1</u>: Seja $u \in \Delta$, $u = u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, um controle maximal para o sistema $(LI)_u^c$ como definido acima. Seja a solução correspondente $x(t) = (w(t), x(t), y(t))$ com solução adjunta (solução do sistema Hamiltoniano) $\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t))$, $0 \leq t \leq t_1$. Os zeros de $\eta_2 \pm 1$ se entrelaçam com pelo menos um zero de x ou de y, ou seja, se t_1 e t_2 são dois zeros consecutivos de $\eta_2 \pm 1$ segue que existe τ, $t_1 < \tau < t_2$, tal que $x(\tau) = 0$ ou $y(\tau) = 0$. Além do mais, os zeros de $\eta_2 \pm 1$ nunca coincidem com os zeros de y exceto na origem.

<u>Dem.:</u> Temos que

$$C(u) = \int_0^t |u(s)|\, ds$$

e por (2.3)

$$H = -|u| + \eta_1 y - \eta_2 f(x) y - \eta_2 x + \eta_2 u$$

e como já vimos u satisfaz (4.1.1).

Seja t^* um zero de $\eta_2 + 1$ com $y = 0$.

$H(t^*) = 0 \rightarrow x = 0$ (verificação imediata).

i) Seja t^* um zero de $\eta_2 - 1$, logo

$u = K$ e portanto $H(t^*) = 0$. Assim

$$\eta_1 - f(x) = \frac{x(t^*)}{y(t^*)}$$

Mas de (4.1.2), $\dot{\eta}_2(t^*) = -\eta_1 + f(x)$, portanto

$$\dot{\eta}_2(t^*) = -\left[\frac{x(t^*)}{y(t^*)}\right] \qquad (4.1.3)$$

ii) Seja t^* um zero de $\eta_2 + 1$, logo

$u = -K$. Análogamente ao ítem anterior temos,

$$\dot{\eta}_2(t^*) = \frac{x(t^*)}{y(t^*)} \qquad (4.1.4)$$

Consideremos agora t_1 e t_2 dois zeros consecutivos de $\eta_2 - 1$ e seja $P(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$ um ponto pertencente ao quarto quadrante com $\eta_2(t_1) = 1$ como na figura abaixo.

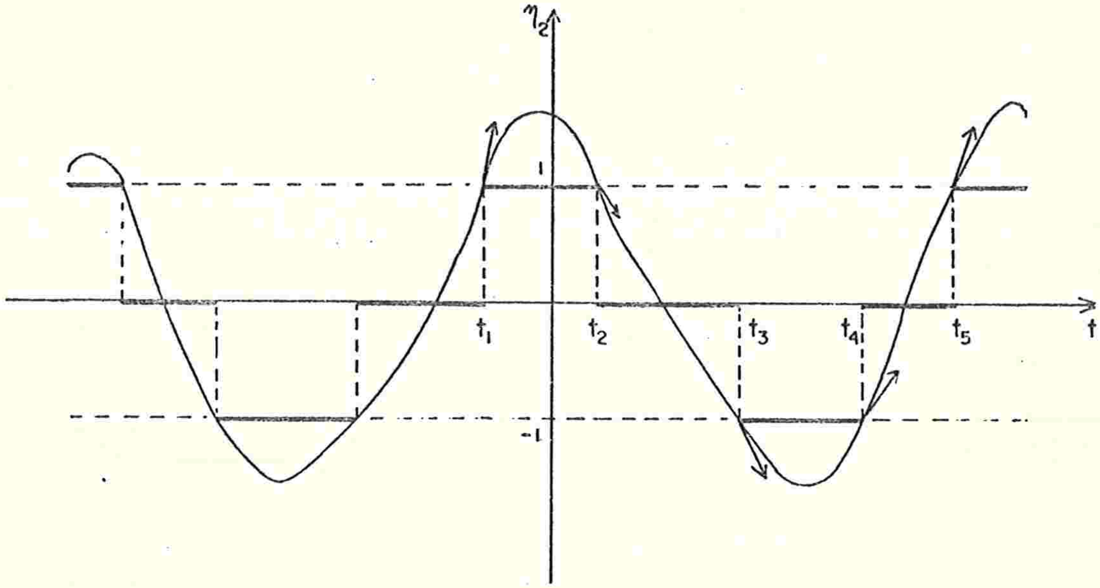


Figura 4.1.1a

Observemos que $\dot{\eta}_2(t_1) \cdot \dot{\eta}_2(t_2) < 0$

Por (4.1.3)

$$\left[\frac{x(t_1)}{y(t_1)}\right] \cdot \left[\frac{x(t_2)}{y(t_2)}\right] < 0 .$$

Logo $\dfrac{x(t_2)}{y(t_2)} < 0$, e assim

$P(t_2) = (x(t_2), y(t_2)) \in$ 1º ou 3º quadrante

Suponhamos que $P(t_2) \in$ 3º quadrante

Seja $t_3 = \inf \{t\colon t > t_2$ e t é zero de $\eta_2 + 1\}$

Observemos que (ver fig. 4.1.1)

$\dot{\eta}_2(t_2) \cdot \dot{\eta}_1(t_3) > 0$

De (4.1.3) e (4.1.4)

$$\left|\frac{x(t_2)}{y(t_2)}\right| \cdot \left|\frac{x(t_3)}{y(t_3)}\right| < 0 \quad \text{logo,}$$

$$\frac{x(t_3)}{y(t_3)} < 0 \quad \text{ou seja:}$$

$$P(t_3) = (x(t_3),\ y(t_3)) \in 2^{\circ} \text{ ou } 4^{\circ} \text{ quadrante}$$

Seja $P(t_3)$ um ponto no 2º quadrante onde t_3 é um zero de $\eta_2 + 1$ e seja t_4 um zero consecutivo de $\eta_2 + 1$. Como

$$\dot{\eta}_2(t_3) \cdot \dot{\eta}_2(t_4) < 0 ,$$

de (4.1.4) temos,

$$\left|\frac{x(t_3)}{y(t_3)}\right| \cdot \left|\frac{x(t_4)}{y(t_4)}\right| > 0 \quad \text{. Assim,}$$

$$\frac{x(t_4)}{y(t_4)} > 0 \quad \text{e}$$

$$P(t_4) = (x(t_4),\ y(t_4)) \in 1^{\circ} \text{ ou } 3^{\circ} \text{ quadrante.}$$

Seja $P(t_4)$ um ponto no 1º quadrante e t_5 um zero de $\eta_2 - 1$

Segue que

$$\dot{\eta}_2(t_4) \cdot \dot{\eta}_2(t_5) > 0 .$$

De (4.1.3) e (4.1.4)

$$\left[\frac{x(t_4)}{y(t_4)}\right] \cdot \left[\frac{x(t_5)}{y(t_5)}\right] < 0 \text{ . Logo,}$$

$$\frac{x(t_5)}{y(t_5)} < 0 \text{ . Assim,}$$

$$P(t_5) = (x(t_5),\ y(t_5)) \in 2^{\circ} \text{ ou } 4^{\circ} \text{ quadrante}$$

Portanto, como vemos, os zeros de $\eta_2 + 1$ se entrelaçam com os zeros de x ou de y .

Observemos que para o custo funcional combustível, as "switching-locus" são simétricas.

De fato, pelo Princípio do Máximo de Pontryaguin, tínhamos

$$M = |u| + \eta_1 y - \eta_2 f(x) y - \eta_2 x + \eta_2 u = 0$$

onde $$u = \begin{cases} \operatorname{sgn}[\eta_2], & |\eta_2| \geq 1 \\ 0 & |\eta_2| < 1 \end{cases}$$

Portanto, os pontos das "switching-locus" devem satisfazer

$$\eta_1 y - \eta_2 f(x) y - \eta_2 x = 0 \qquad (|\eta_2| = 1)$$

i) Seja $\eta_2 = 1$. Assim,

$$\eta_1 y - f(x) y - x = 0$$

Mas f é par, logo os pontos (-x, -y) também satisfazem a equação acima (verificação imediata).

ii) Seja $\eta_2 = -1$. Logo,

$$\eta_1 y + f(x) y + x = 0$$

Segue que os pontos (-x, -y) satisfazem a equação acima (verificação imediata).

Conclui-se que:

Corolário 4.1.2: A "switching-locus" é constituída de quatro curvas cada uma num quadrante dividindo o plano simétricamente.

Dem.: Imediata do teorema e da observação acima.

Corolário 4.1.3: Seja $u(t) \subset \Delta$, $0 \leq t \leq t_1$, um controle maximal para o sistema $(LI)_u^c$. Seja a solução correspondente $(x(t), y(t))$ com solução adjunta $\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t))$, $0 \leq t \leq t_1$. Num tempo ζ,

$0 \leq \zeta \leq t_1$, temos $|\eta_2(\zeta)| = 1$.

i) Se $(x(\zeta), y(\zeta)) \in$ 1º ou 4º quadrante então $\dot{\eta}_2(\zeta) > 0$

ii) Se $(x(\zeta), y(\zeta)) \in$ 2º ou 3º quadrante então $\dot{\eta}_2(\zeta) < 0$

Esse corolário estabelece que mudanças nos controles maximais tipo - relay são de $-K$ a 0 no 1º quadrante e de 0 a $+K$ no 4º quadrante continuando no tempo numa curva de solução maximal e de $+K$ a 0 no 3º quadrante e de 0 a $-K$ no 2º quadrante.

Dem.: Pelo Princípio do Máximo de Pontryaguin

$$- |u| + \eta_1 y - \eta_2 f(x) y - \eta_2 x + \eta_2 u = 0 \tag{4.1.5}$$

onde $u = \begin{cases} K \operatorname{sgn} [\eta_2] & , |\eta_2| \geq 1 \\ 0 & , |\eta_2| < 1 \end{cases}$

Seja ζ tal que $|\eta_2(\zeta)| = 1$

Por (4.1.5) segue que

$$\eta_1 y - \eta_2 f(x) y - \eta_2 x = 0 \tag{4.1.6}$$

Então, se:

i) $(x,y) \in$ 1º quadrante

Temos que $\eta_2 = -1$.

De (4.1.6)

$$\eta_1 y + f(x)y + x = 0 \text{ . Assim,}$$

$$\eta_1 + f(x) < 0$$

De (4.1.2), vem

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \eta_2 f(x) \text{ . Assim,}$$

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_1 - f(x) \text{ e } \dot{\eta}_2(\zeta) > 0$$

ii) $(x,y) \in 4^{\circ}$ quadrante

Temos $\eta_2 = 1$

De (4.1.6):

$$\eta_1 y - f(x)y - x = 0 \text{ , ou}$$

$$\eta_1 - f(x) < 0$$

Mas $\dot{\eta}_2 = -\eta_1 + f(x)$; $\dot{\eta}_2(\zeta) > 0$

iii) $(x,y) \in 3^{\circ}$ quadrante

Temos $\eta_2 = +1$

De (4.1.6):

$$\eta_1 y + f(x)y + x = 0 \text{ . Assim,}$$

$$\eta_1 + f(x) > 0$$

$$\text{Mas } \dot{\eta}_2 = - \eta_1 - f(x) \text{ ; } \dot{\eta}_2(\zeta) < 0$$

#

Vamos agora descrever a "switching-locus" para obtermos uma estratégia que torne o combustível mínimo.

Seja W_{11}^+ uma solução (ou parte de uma solução) de S^+ pela origem e permanecendo no quarto quadrante num intervalo de tempo t_1^+ tal que $u = K$ e seja W_{11}^- a solução de S^- pela origem e permanecendo no segundo quadrante ao longo do mesmo intervalo de tempo (é imediato que W_{11}^- é simétrica a W_{11}^+) (ver fig. 4.1.2)

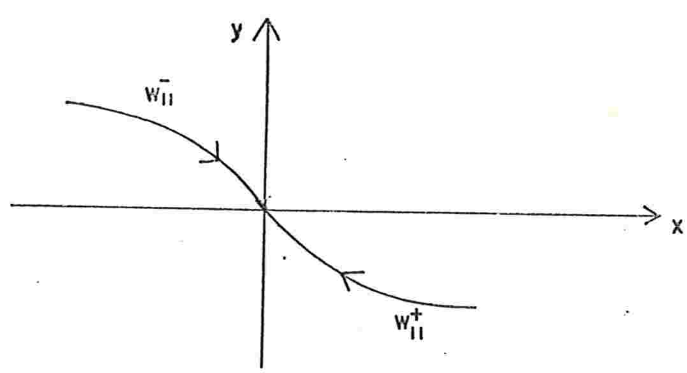


Figura 4.1.2

Agora vamos refletir W_{11}^+ e W_{11}^- ao longo de soluções de S^o obtendo W_{21}^- e W_{21}^+ respectivamente (ver fig. 4.1.3)

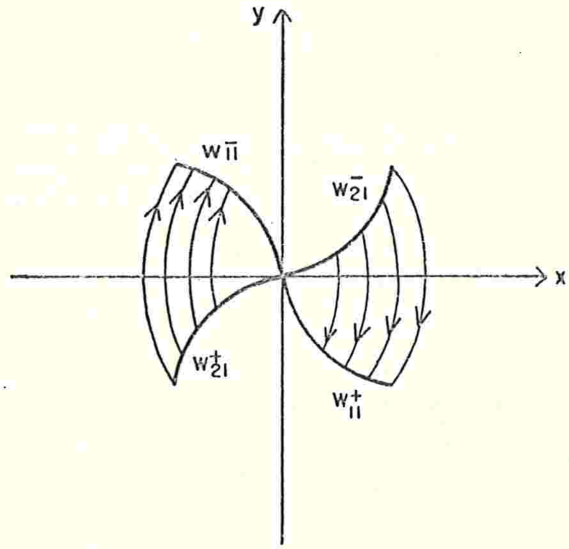


Figura 4.1.3

Isto é, de cada ponto de W_{11}^+ (de W_{11}^-) seguimos para trás no tempo ao longo das correspondentes soluções de S^o num tempo t_1^o , com $u = 0$. Chamamos os "pontos finais" dessas soluções de S^0 como a reflexão W_{21}^- de W_{11}^+ (W_{21}^+ de W_{11}^-).

Agora refletimos W_{21}^- ao longo de soluções de S^-. O procedimento é análogo num tempo t_1^- tal que $u = -K$. Chamamos a reflexão de W_{21}^- ao longo de S^- de W_{12}^- (ver fig. 4.1.4)

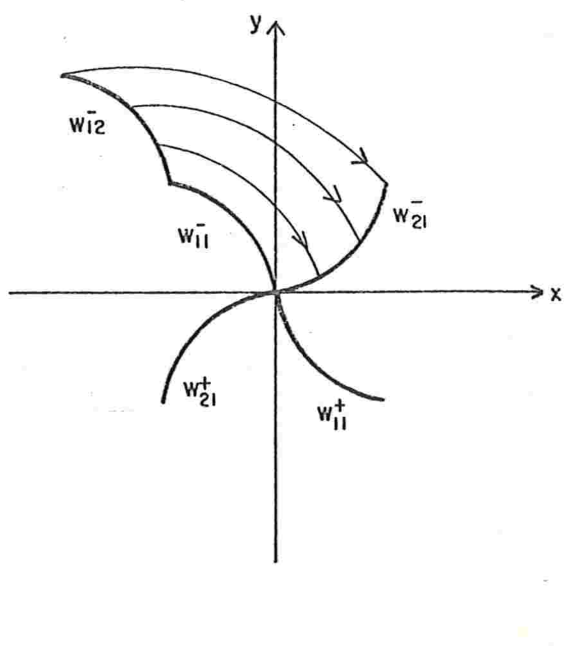


Figura 4.1.4 -

Análogamente reflitamos W_{21}^{+} ao longo da solução de S^{+} e chamemos essa reflexão de W_{12}^{+} (ver fig. 4.1.5).

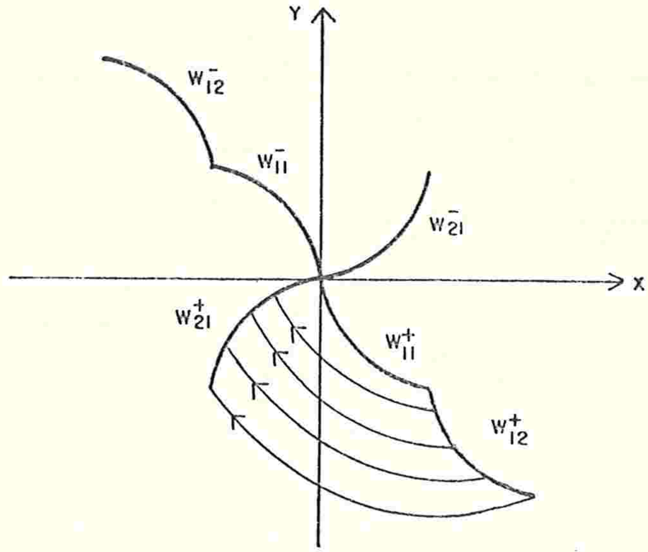


Fig. 4.1.5 -

Agora refletimos W_{12}^{+} ao longo de soluções de S^{0} e obtemos W_{22}^{-} (ver fig. 4.1.6)

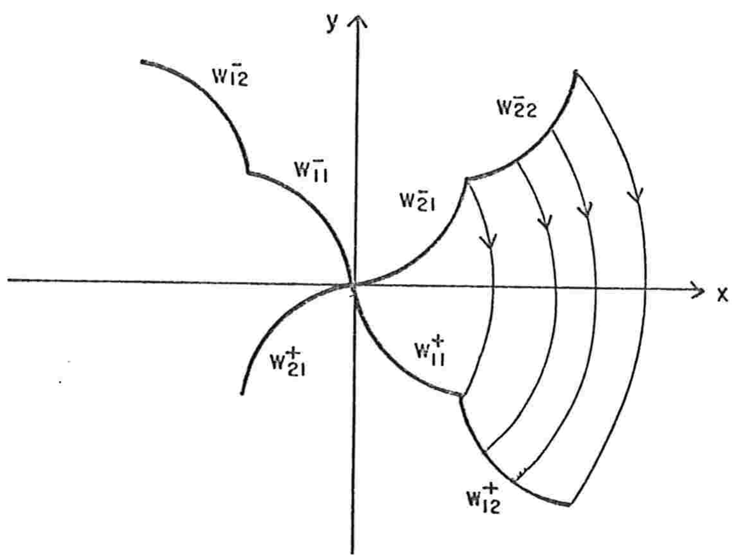


Fig. 4.1.6 -

Análogamente refletimos W_{12}^{-} ao longo de soluções de S^{0}

e obtemos W^+_{22} (ver fig. 4.1.7)

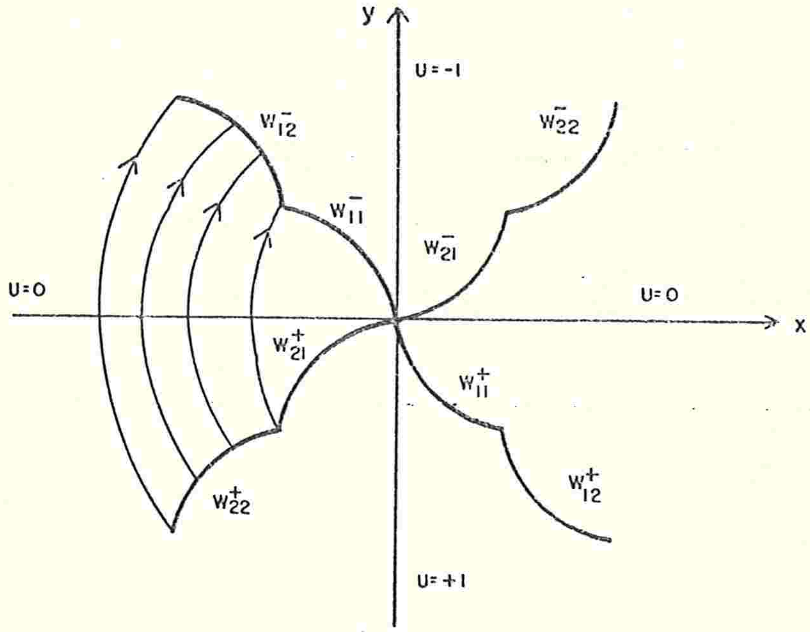


Figura 4.1.7 -

A construção das curvas, continua com procedimento análogo começando por refletir W^-_{22} ao longo de soluções de S^- obtendo-se W^-_{13}.

Generalizando, $W^-_{1,j+1}$ é a solução de $W^-_{2,j}$ ao longo de soluções de S^- ($j \geq 1$); $W^+_{2,j}$ é a reflexão de $W^-_{1,j}$ ($j \geq 1$) ao longo de soluções de S^o; $W^+_{1,j+1}$ é a reflexão de $W^+_{2,j}$ ($j \geq 1$) ao longo de soluções de S^+ e $W^-_{2,j}$ é a reflexão de $W^+_{2,j}$ ($j \geq 1$) ao longo de soluções de S^o.

A "switching-locus" W é precisamente a reunião dos conjuntos $W^+_{1,j} \cup W^-_{2,j} \cup W^-_{1,j} \cup W^+_{2,j}$ para j = 1,2.3... como descrito acima.

Todo controle maximal do tipo "relay" que leva um ponto de C_K para a origem deve ter uma solução que chega na origem, através de W^+_{11} ou W^-_{11}, e a solução deve seguir alternadamente a curva das soluções de S^-, S^o, S^+ ao longo dos tempos t^-_i, t^o_i, t^+_i,

$i = 1,2,3,\ldots.$ (ver figs. 4.1.8 e 4.1.9).

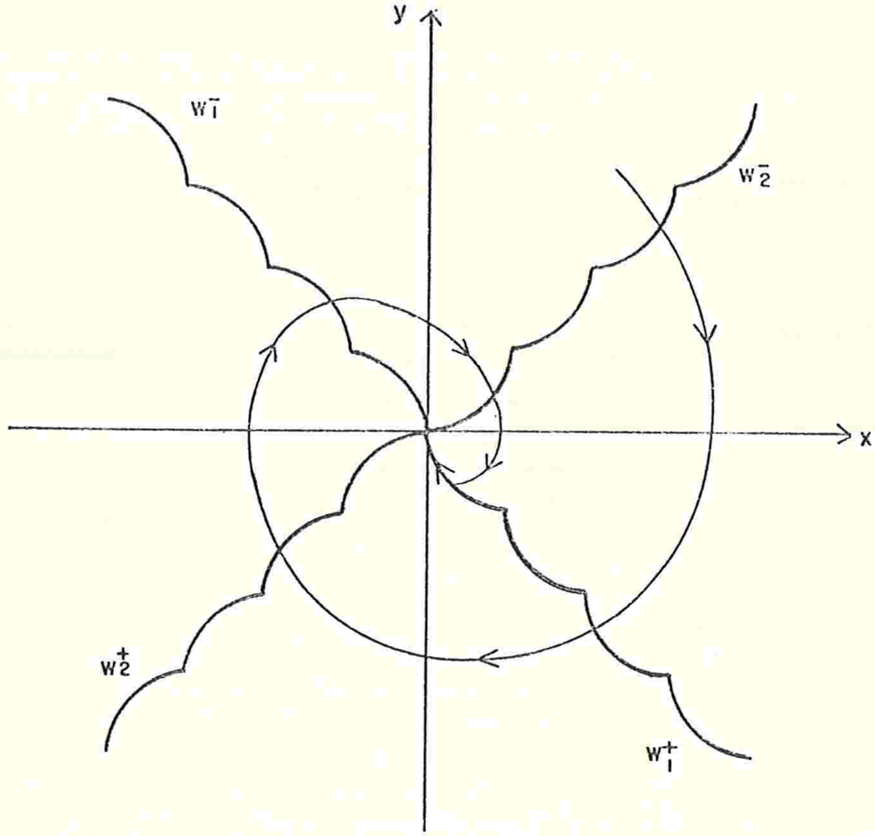


Figura 4.1.8 -

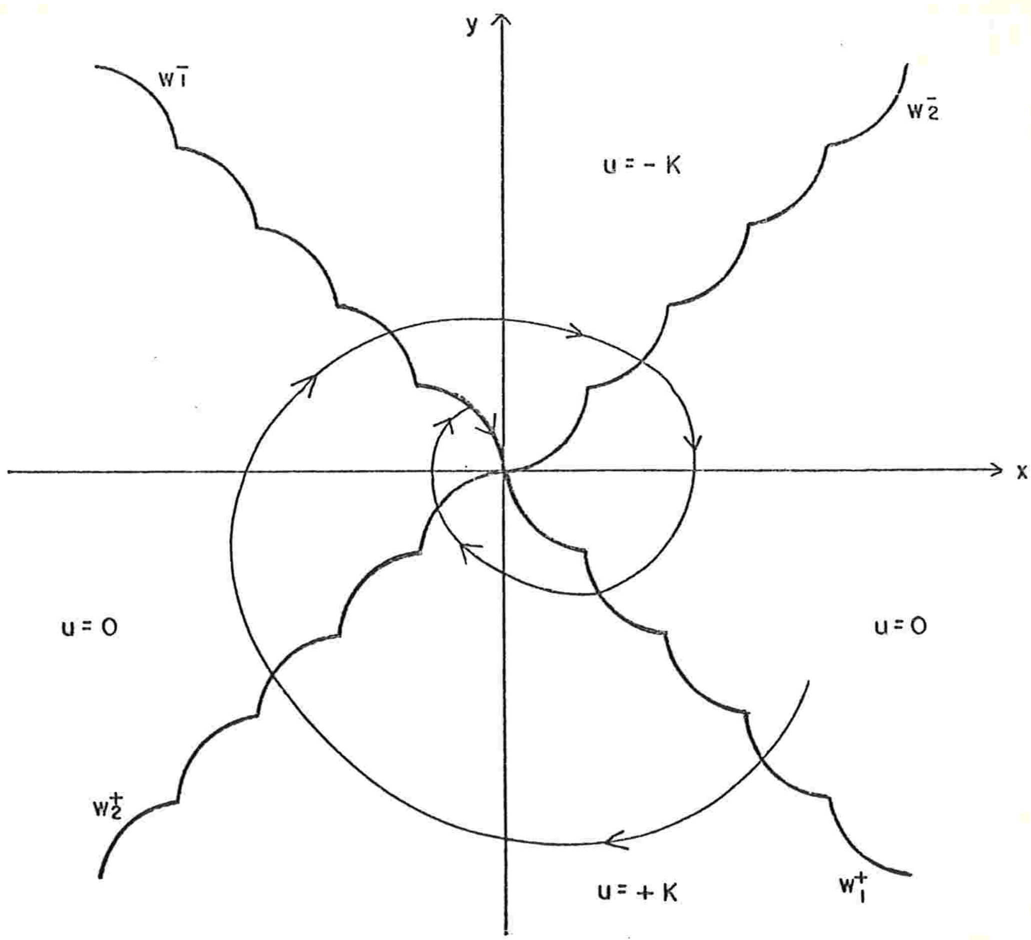


Figura 4.1.9

Observemos que pela construção acima de W segue que a solução intercepta W_2^+ (W_2^-) em dois "gomos" a menos quando provem de W_1^+ (W_1^-) e intercepta W_1^+ (W_1^-) no mesmo número de gomo quando provém de W_2^- (W_2^+).

W é assim, homeomorfa a duas curvas C^1 por partes transversais que separam o plano em quatro partes.

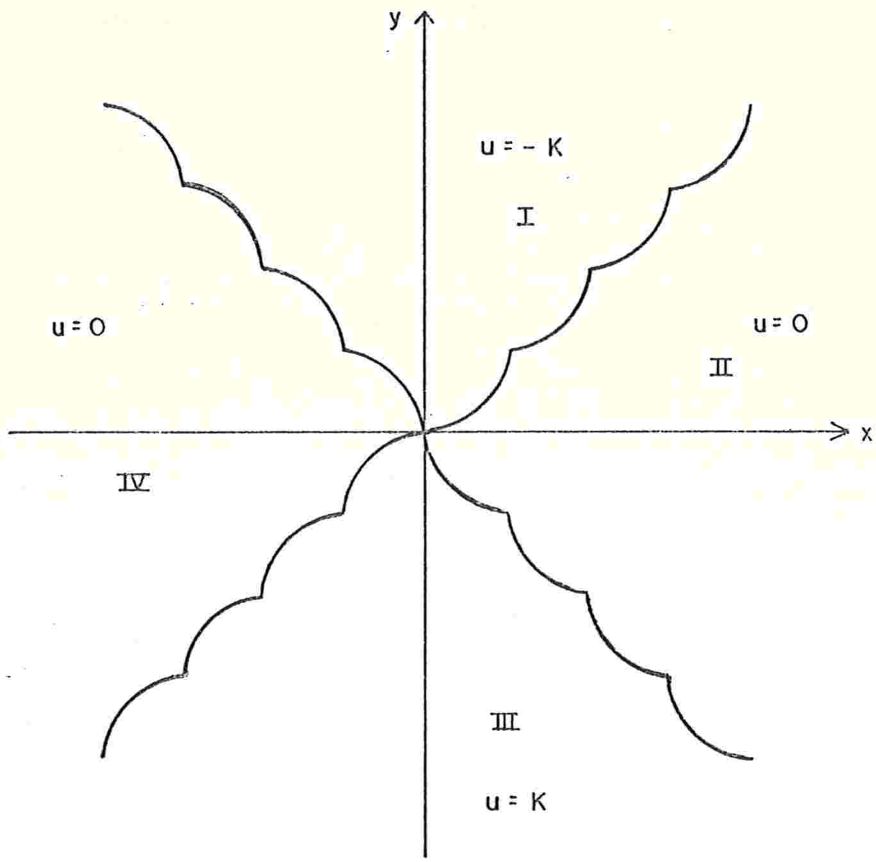


Figura 4.1.10 -

Finalmente a função síntese será:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} -K & \text{para } (x,y) \in \text{I} \\ 0 & \text{para } (x,y) \in \text{II ou IV} \\ K & \text{para } (x,y) \in \text{III} \end{cases}$$

Finalmente, observemos que:

1. A família dos controles admissíveis (que levam $P \in C_K$ até a origem) para o sistema $(LI)_u^c$ não é vazia.

2. As soluções do sistema $(LI)_u^c$ são uniformemente limitadas em relação a u (ver [3] , p. 30).

3. O conjunto de velocidade estendida

$$\hat{V}(x,y,t) = \{(|u|, \; y, \; -f(x)y - x + u): u \in \Omega\ (x,y,t)\}$$

é convexo no $\mathbb{R}^3$ para (x,y,t) fixado (verificação imediata), onde

$$\Omega(x,y,t) = \{u \in \Delta: u = 0 \text{ ou } u = K \text{ com um número finito de saltos em intervalos de tempo finitos}\}$$

Das observações acima, temos que vale o teorema de existência de controle ótimo (ver Lee e Markus [2] Th. 4, p. 259) para os pontos de C_K que são levados à origem através de controles $u \in \Omega$, ou seja, este teorema garante a condução dos pontos pertencentes à região hachuriada entre as curvas W_{11}^+ e W_{21}^- da fig. 4.1.11 abaixo, para a origem, com consumo de combustível mínimo.

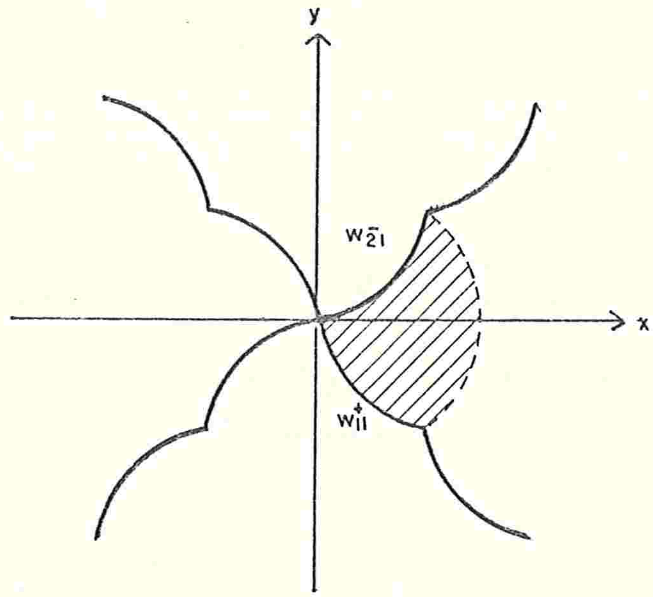


Figura 4.1.11

Mas as órbitas de $(LI)_u^c$ são simétricas para u ótimo e $f^o = |u|$, logo podemos estender a região da fig. 4.1.11 para a região simétrica entre as curvas W_{21}^+ e W_{11}^- (ver fig. 4.1.12)

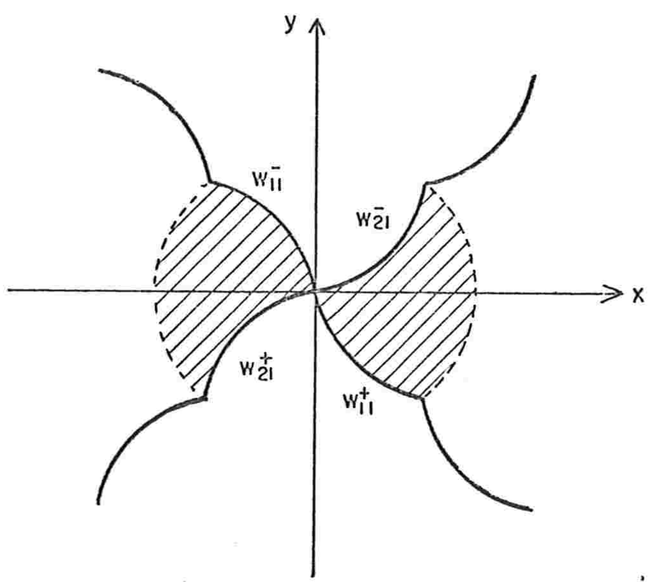


Figura 4.1.12

Observemos agora que os pontos da região hachuriada entre as curvas W_{22}^{-} e W_{21}^{+} da fig. 4.1.13 são levados até W_{21}^{+} com controles 0 e K e portanto são conduzidos com consumo de combustível mínimo pelo teorema de existência de controle ótimo.

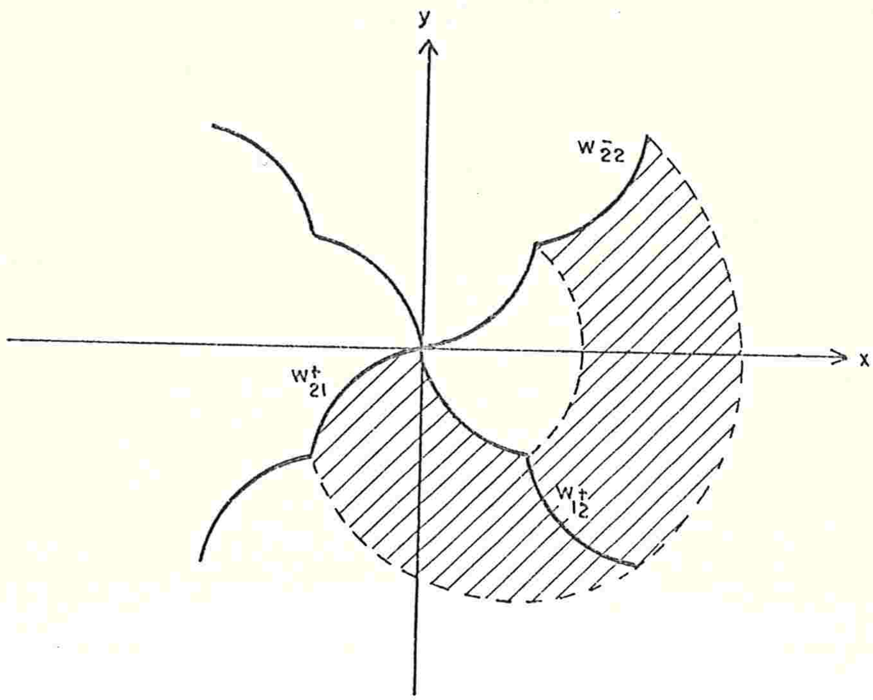


Figura 4.1.13

Mais uma vez, observemos que as trajetórias de $(LI)_u^c$ são simétricas para u ótimo e portanto os pontos da região hachuriada entre as curvas W_{21}^{-} e W_{22}^{+} da figura 4.1.14 também estão sendo conduzidos até W_{21}^{-} com consumo de combustível mínimo.

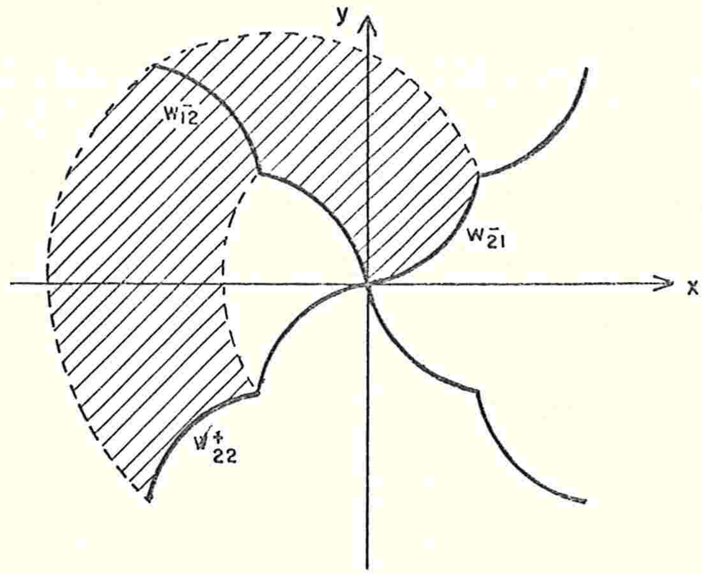


Figura 4.1.14

Pela unicidade das trajetórias maximais, temos que o processo de condução dos pontos de C_K à origem é aditivo e portanto, procedendo anàlogamente, demonstramos que todos os pontos de C_K podem ser conduzidos para a origem com consumo de combustível mínimo.

4.2 Energia

Consideremos o custo funcional energia (ver [2], p p. 171):

$$C(u) = \int_0^{t_0} [u(t)]^2 \, dt \ , \ |u(t)| \leq K$$

e o sistema abaixo,

$$(LI)_u^E \begin{cases} \dot{w} = u^2 \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - x + u \end{cases}$$

<u>Corolário 4.2.1</u>: Seja $u(t) \in \Delta$, $0 \leq t \leq t_1$, um controle maximal para o sistema $(LI)_u^E$. Então

$$u(t) = \begin{cases} +K, & \eta_2(t) \geq K \\ \eta_2(t), & |\eta_2(t)| < K \\ -K, & \eta_2(t) \leq -K \end{cases}$$

Dem.: Pelo P.M.P. (teorema 1),

$$H(\eta, \mathbf{x}, u) = \eta_0 u^2 + \eta_1 y - \eta_2 f(x)y - \eta_2 x + \eta_2 u$$

Seja h tal que

$$h(u) = \eta_0 u^2 + \eta_2 u$$

Tomando $\eta_0 = -1/2$, observemos que $h(u)$ é máximo para $u = \eta_2$.

Portanto, como $|u(t)| \leq K$, segue que

$$u(t) = \begin{cases} K & \eta_2(t) \geq K \\ \eta_2(t) & |\eta_2(t)| < K \\ -K & \eta_2(t) \leq -K \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Como vemos, o controle maximal u acima é contínuo (ver fig. 4.2.1)

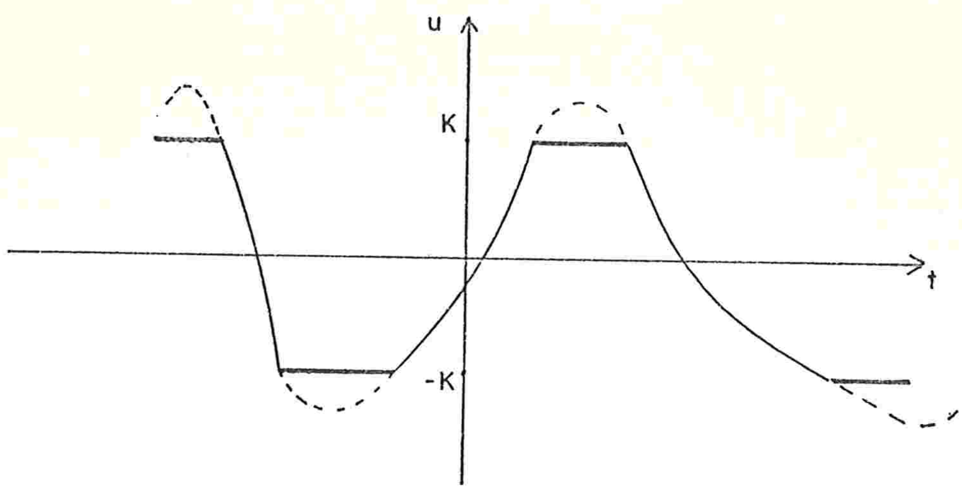


Figura 4.2.1

<u>Corolário 4.2.2</u>: Seja $u \in \Delta$ um controle maximal para o sistema $(LI)_u^E$, $x(t)$ a correspondente solução maximal e $\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t))$ a solução adjunta. Então, os zeros de $\eta_2 \pm K$ se entrelaçam com os zeros de x ou de y.

Dem.: Temos que $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2)$ satisfaz

$$\dot{\eta}_1 = -\eta_1 + \eta_2 f(x) \tag{4.2.1}$$

e pelo P.M.P. (teorema 1)

$$M = \eta_1 y - \eta_2 f(x) y - \eta_2 x = 0 \tag{4.2.2}$$

Seja t^* um zero de $\eta_2 \pm K$

De (4.2.1) e (4.2.2) segue que

$$\dot{\eta}_2(t^*) = \pm \frac{Kx}{y} \tag{4.2.3}$$

Consideremos agora t_1 e t_2 dois zeros consecutivos de $\eta_2 \pm K$. Temos,

$$\dot{\eta}_2(t_1) \cdot \dot{\eta}_2(t_2) < 0 \tag{4.2.4}$$

De (4.2.3)

$$\left[\frac{x(t_1)}{y(t_1)}\right] \cdot \left[\frac{x(t_2)}{y(t_2)}\right] < 0$$

#

Corolário 4.2.3: Seja $u(t) \in \Delta$, $0 \leq t \leq t_1$, um controle maximal para o sistema $(LI)_u^E$, $x(t)$ a correspondente solução maximal e

$\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t))$ a solução adjunta deste sistema. Então,

i) Se ζ_1 e ζ_2 são dois zeros consecutivos de $\eta_2 - K$ onde $(x(\zeta_1), y(\zeta_1))$ pertence ao 4º quadrante, então temos $\dot{\eta}_2(\zeta_1) > 0$ e $\dot{\eta}_2(\zeta_2) < 0$

ii) Se ζ_3 e ζ_4 são dois zeros consecutivos de $\eta_2 + K$ onde $(x(\zeta_3))$ pertence ao 2º quadrante, temos $\dot{\eta}_2(\zeta_3) < 0$ e $\dot{\eta}_2(\zeta_4) > 0$

Dem.: i) Seja ζ_1 um zero de $\eta_2 - K$ tal que $(x(\zeta_1), y(\zeta_1))$ pertence ao 4º quadrante.

De (4.2.3) e (4.2.4) temos

$$\dot{\eta}_2(\zeta_1) > 0 \quad e \quad \dot{\eta}_2(\zeta_2) < 0 \quad .$$

ii) demonstração análoga a i)

#

Destes dois últimos corolários, conclui-se que é possível dividir o plano simétricamente, em quatro regiões as quais determinam o comportamento do controle ótimo u como indicado na figura 4.2.2 abaixo.

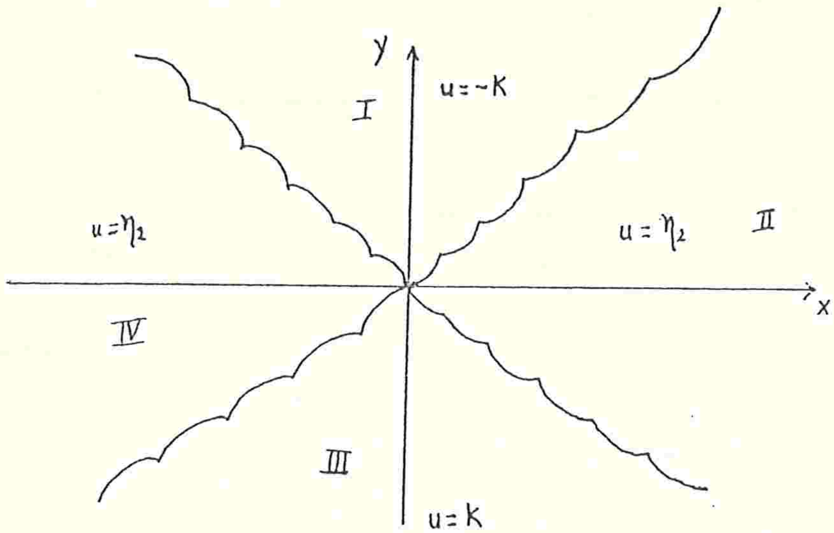


Figura 4.2.2

De modo análogo ao problema combustível mínimo, o conjunto E_K, dos pontos que podem ser levados a zero com controles do tipo (4.2.1), é o próprio conjunto V_K (à semelhança da prova de que $Z_K = V_K$, usamos neste caso um controle contínuo ao invés do controle zero).

4.3 Tempo

Consideremos o custo funcional

$$C(u) = \int_0^{t_1} dt$$

e o sistema

$$(LI)_u^T \begin{cases} \dot{w} = 1 \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - x + u \end{cases}$$

Como vemos, minimizar o funcional acima é equivalente a conduzir pontos de V_K para a origem em tempo mínimo, onde V_K é o conjunto de controlabilidade nula definido no capítulo 3.

Este funcional foi o mais estudado até agora na literatura da teoria de controle, portanto apenas citaremos alguns resultados de maior relevância para a construção da switching-locus do sistema acima.

Usando o Princípio do Máximo de Pontryagin (teorema 1) obtemos que os controles maximais são do tipo "relay" (ver [2], p. 426):

<u>Corolário 4.3.1</u>: Seja $u = u(t) \in \Delta$, $0 \leq t \leq t_1$, um controle maximal de $(LI)_u^T$ e $\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t_1))$ a solução adjunta. Então u é quase sempre igual ao controle "relay" $K.\mathrm{sgn}\,\eta_2(t)$. Além do mais, η_2 tem apenas um número finito de zeros e cada um destes zeros é simples.

Portanto, vemos que o controle que transfere um ponto de V_K para a origem em tempo mínimo corresponde, no plano de fase, o $\mathbb{R}^2$, a uma troca de órbita de $(LI)_K^T$ para $(LI)_{-K}^T$, finitas ve zes num tempo finito, para conduzir um ponto $P \in \mathbb{R}^2$, a $(0,0)$.

Os tempos "alternantes" de uma solução maximal são relacionados com a geometria do plano de fase através de um teorema que estabelece que os zeros de $y(t)$ e $\eta_2(t)$ são entrelaçados. Este teorema, que vem a seguir, é básico para estabelecer as propriedades da "switching-locus" de $(LI)_u^T$ (ver[2] Th. 1, p. 427):

<u>Teorema 4.3.1.:</u> Seja $u = u(t) \in \Delta$, $0 \leq t \leq t_1$, um controle maximal para o sistema $(LI)_u^T$. Seja a solução correspondente

$x(t) = (w(t), x(t), y(t))$ e a solução adjunta

$\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t))$ em $0 \leq t \leq t_1$

Sejam ζ_1, ζ_2 tais que $0 \leq \zeta_1 < \zeta_2 \leq t_1$

Então,

1. Se $\eta_2(\zeta_1) = \eta_2(\zeta_2) = 0$ e se $y(\zeta_1) = 0$ então $y(\zeta_2) = 0$,

2. Se $\eta_2(\zeta_1) = \eta_2(\zeta_2) = 0$ e se $y(\zeta_1) \neq 0$, então $y(\zeta_2) \neq 0$, mas existe um zero de $y(t)$ no intervalo aberto $\zeta_1 < t < \zeta_2$.

3. Se $y(\zeta_1) = y(\zeta_2) = 0$, $y(t) \neq 0$ em $\zeta_1 < t < \zeta_2$ e se $\eta_2(\zeta_1) = 0$, então $\eta_2(\zeta_2) = 0$.

4. Se $y(\zeta_1) = y(\zeta_2) = 0$, $y(t) \neq 0$ em $\zeta_1 < t < \zeta_2$ e se $\eta_2(\zeta_1) \neq 0$

então $\eta_2 \neq 0$ mas existe um zero de $\eta_2(t)$ no intervalo aberto $\zeta_1 < t < \zeta_2$.

Assim, uma vez que os zeros de $y(t)$ são isolados, eles ou coincidem com os zeros de $\eta_2(t)$ ou nenhum zero de $y(t)$ é zero de $\eta_2(t)$, mas estes dois conjuntos de zeros são entrelaçados.

O próximo corolário estabelece que as mudanças nos controles maximais são de $+K$ a $-K$ para $y > 0$ e de $-K$ para $+K$ para $y \leq 0$ (ver [2] Corolário, p.429).

<u>Corolário 4.3.2</u>: Seja $u = u(t) \in \Delta$, $0 \leq t \leq t_1$, um controle maximal para o sistema $(LI)_u^T$. Seja a solução correspondente $x(t) = (w(t), x(t), y(t))$ com solução adjunta $\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t))$, $0 \leq t \leq t_1$. Num tempo $t = \zeta$, $0 \leq \zeta \leq t_1$ temos $\eta_2(\zeta) = 0$.

i) Se $y(\zeta) > 0$ então $\dot{\eta}_2(\zeta) < 0$

ii) Se $y(\zeta) < 0$ então $\dot{\eta}_2(\zeta) > 0$

Podemos então, construir uma curva W, no $\mathbb{R}^2$, homeomorfa à reta, simétrica com relação a zero, que divide V_K numa região superior S e numa inferior I (ver fig. 4.3.1), com a propriedade de que se $P(t) = (x(t), y(t)) \in W$ temos $\eta_2(t) = 0$ (ver [3],

p. 42). Portanto, do teorema 4.3.1 e da proposição 4.3.2 acima temos que se uma órbita de $(LI)_K^T$ a toca num ponto $P(t)$ então $y(t)>0$ e devemos seguir com a trajetória de $(LI)_{-K}^T$ passando por este ponto, e da mesma forma quando uma órbita de $(LI)_{-K}^T$ tocar W num ponto $P(t)$, então $y(t) < 0$ e seguimos a trajetória de $(LI)_K^T$ que passa por este ponto.

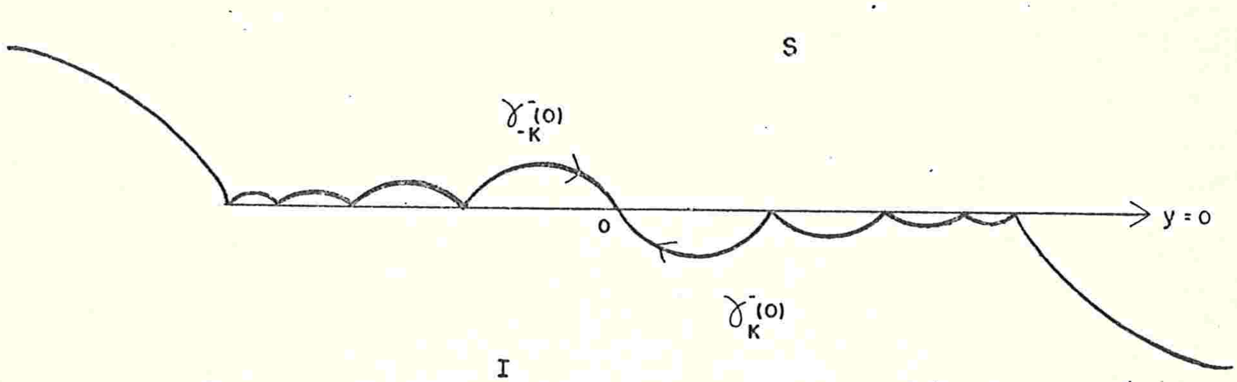


Figura 4.3.1

Finalmente o processo de condução de um ponto P de V_K para a origem em tempo mínimo se reduz ao seguinte: se $P \in S$, então seguimos com $\gamma_{-K}^{+}(P)$, até atingir W, e seguimos mudando de órbita como exposto acima até atingirmos a origem. Se por outro lado, $P \in I$, iniciamos o processo com $\gamma_K^{+}(P)$ (ver figs. 4.3.2 e 4.3.3).

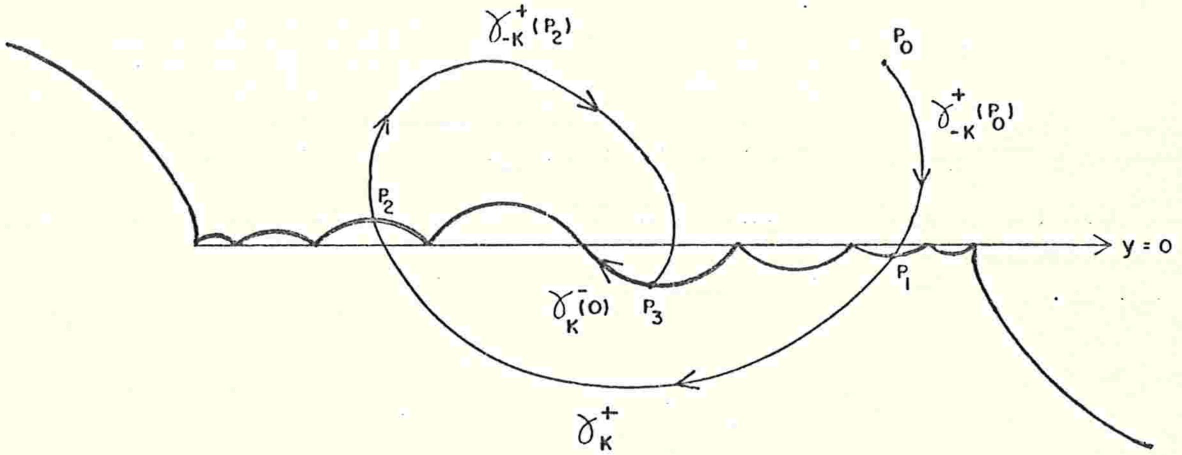


Figura 4.3.2

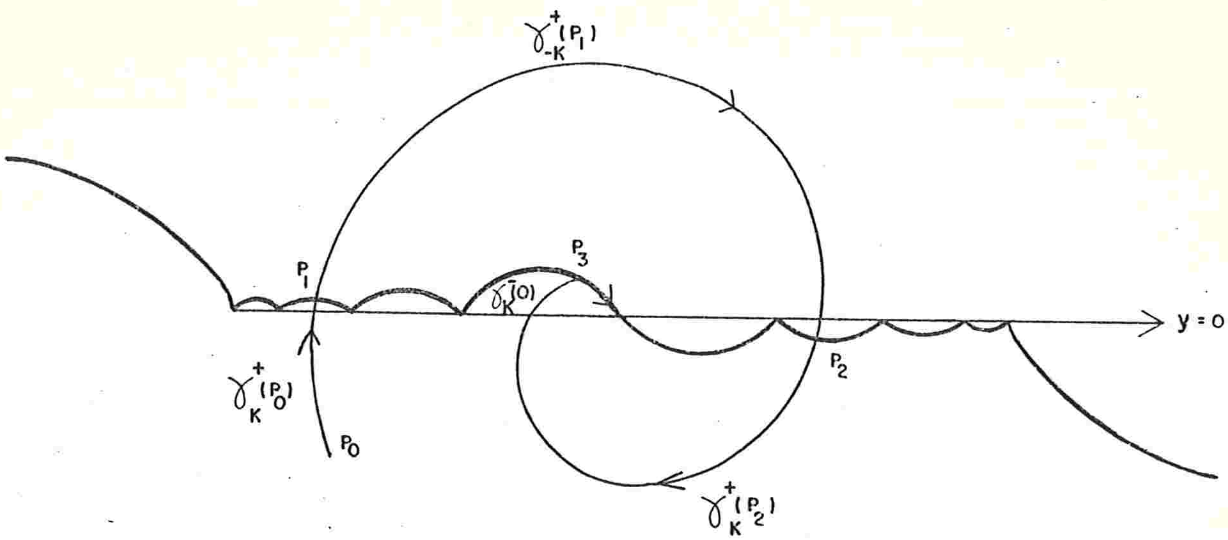


Figura 4.3.3

4.4 - Trabalho

Seja o custo funcional trabalho

$$C(u) = \int_0^{x_1} u \, dx = \int_0^{t_1} uy \, dt,$$

e o sistema

$$(LI)_u^W \quad \begin{cases} \dot{w} = uy & |u| \leq K \\ \dot{x} = y & \\ \dot{y} = -f(x)y - x + u & f \in C^1 \, (\mathbb{R}) \end{cases}$$

Corolário 4.4.1: Seja $u = u(t) \in \Delta$ um controle maximal de $(LI)_u^W$, $0 \leq t \leq t_1$. Então $u(t) = K.\mathrm{sgn}\,[\eta_2(t) - y(t)]$, $0 \leq t \leq t_1$, onde $\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t))$ é a solução adjunta.

Dem:: Pelo P.M.P (teorema 1), temos

$$H = \eta_1 y - \eta_2 f(x) y - \eta_2 x + (\eta_2 - y) u$$

Logo, u é maximal para

$$u = K.\mathrm{sgn}\,[\eta_2 - y]$$

#

Do corolário acima segue que para u maximal temos

$$M = \eta_1 y - \eta_2 f(x)y - \eta_2 x + K|\eta_2 - y| = 0 \qquad (4.4.1)$$

Observemos, então, o que ocorre quando uma solução maximal intercepta o eixo y:

Se y = 0, de (4.4.1) temos

$-\eta_2 x + K\ |\eta_2| = 0$. Assim,

$$\text{se } y = 0,\ \eta_2 = 0 \quad \text{ou } x = \pm K \ ; \qquad (4.4.2)$$

ou seja, a solução maximal troca de sinal ao interceptar o eixo $y = 0$ a menos nos pontos tais que $x = \pm K$.

Vejamos agora como se comporta o controle maximal u nos pontos (x,y) do plano de fase pertencentes à "switching-locus" $\eta_2 - y = 0$ com $y \neq 0$.

Seja t* um zero de $\eta_2 - y$ com $y \neq 0$. Então,

$$\dot{\eta}_2(t^*) - \dot{y}(t^*) = f(x(t^*)) \, . \, y(t^*) \qquad (4.4.3)$$

(verificação imediata)

Portanto, neste caso os zeros de y se entrelaçam com os zeros de $\eta_2 - y$ devido ao fato de não se ter dois zeros consecutivos de $\eta_2 - y$ com $y < 0$ (ou com $y > 0$), na faixa onde f(x) é invariante, por (4.4.3).

A partir dos resultados acima, faremos um estudo local em torno de zero sobre a "switching-locus" da condução de um ponto à origem minimizando o custo trabalho. Levando em conta a simetria das órbitas, observamos que:

1º) As soluções maximais chegam à origem apenas através dos controles u = K ou u = -K. Portanto, segue que um trecho de $\gamma_K^-(0)$ e de $\gamma_{-K}^-(0)$ é parte da "switching-locus" W (ver. fig. 4.4.1).

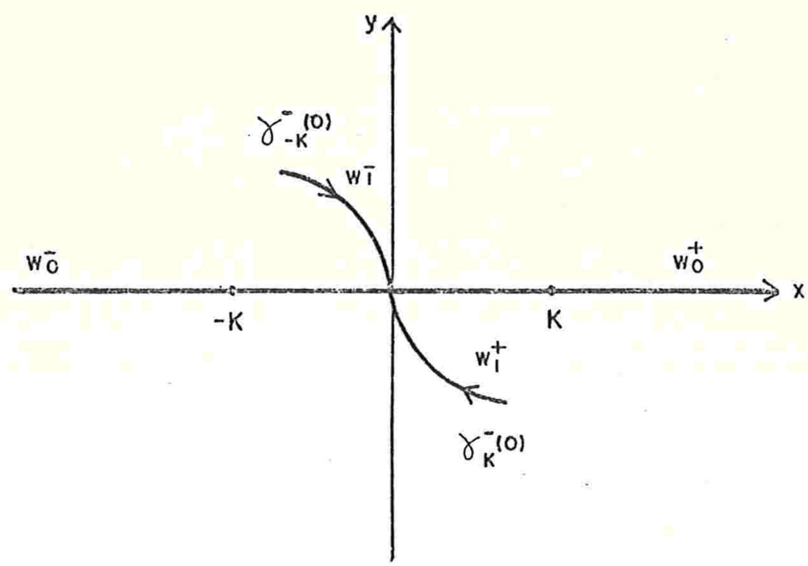


Figura 4.4.1 -

2º) não existe um trecho de W entre o eixo y = 0 e $\gamma_K^-(0)$ ($\gamma_{-K}^-(0)$), por (4.4.3) e pelo fato de f ser contínua e $f(0) < 0$.

3º) O ponto (K,0) é órbita singular de $(LI)_K^W$ e de (4.4.2) ($x \neq \pm K$ segue que $\eta_2 = 0$) vem que $\gamma_K^-(0)$ não passa por este ponto.

4º) As órbitas atingem o trecho da "switching-locus" W que coincide com a órbita γ^{-}_{-K} (K,0) com controle u = K, devido ao andamento do plano de fase (ver fig. 4.4.3) e devido ao fato de que o controle determinístico obedece à lei "dado um ponto existe uma estratégia única de condução até o objetivo".

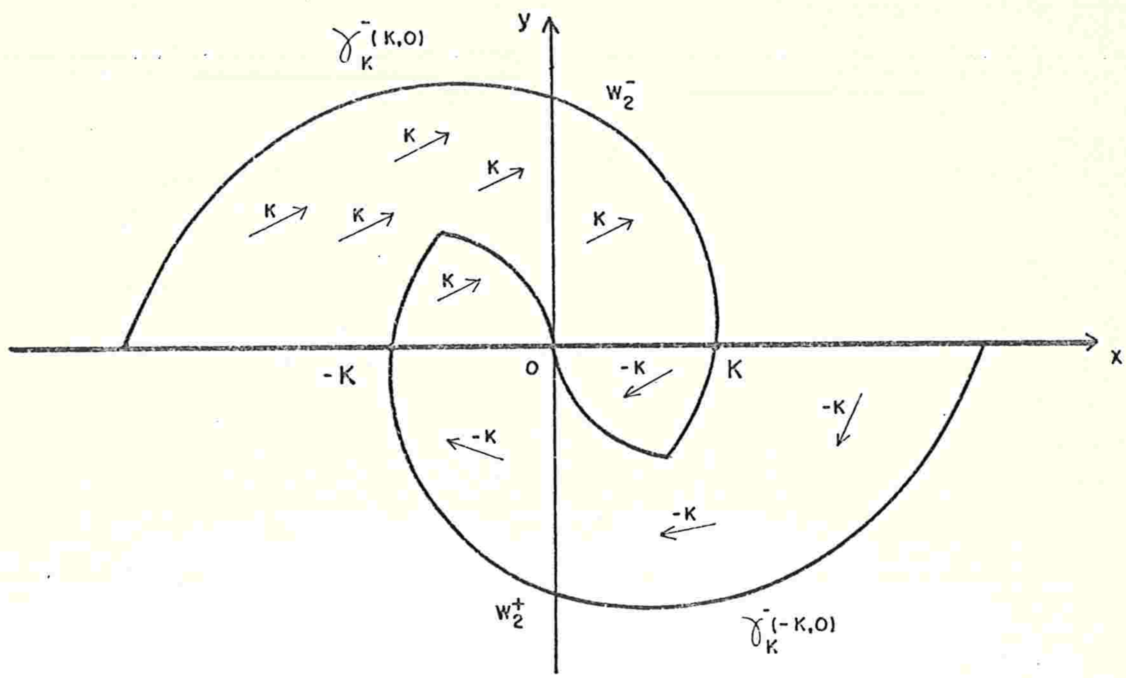


Figura 4.4.2 -

5º) Para que o andamento do campo de vetores mantenha coerência com as observações acima é necessário que exista um trecho W_3^+ da "switching-locus" W que liga o ponto (K,0) com γ_K^- (-K,0) no eixo y = 0 como na figura 4.4.4 a seguir.

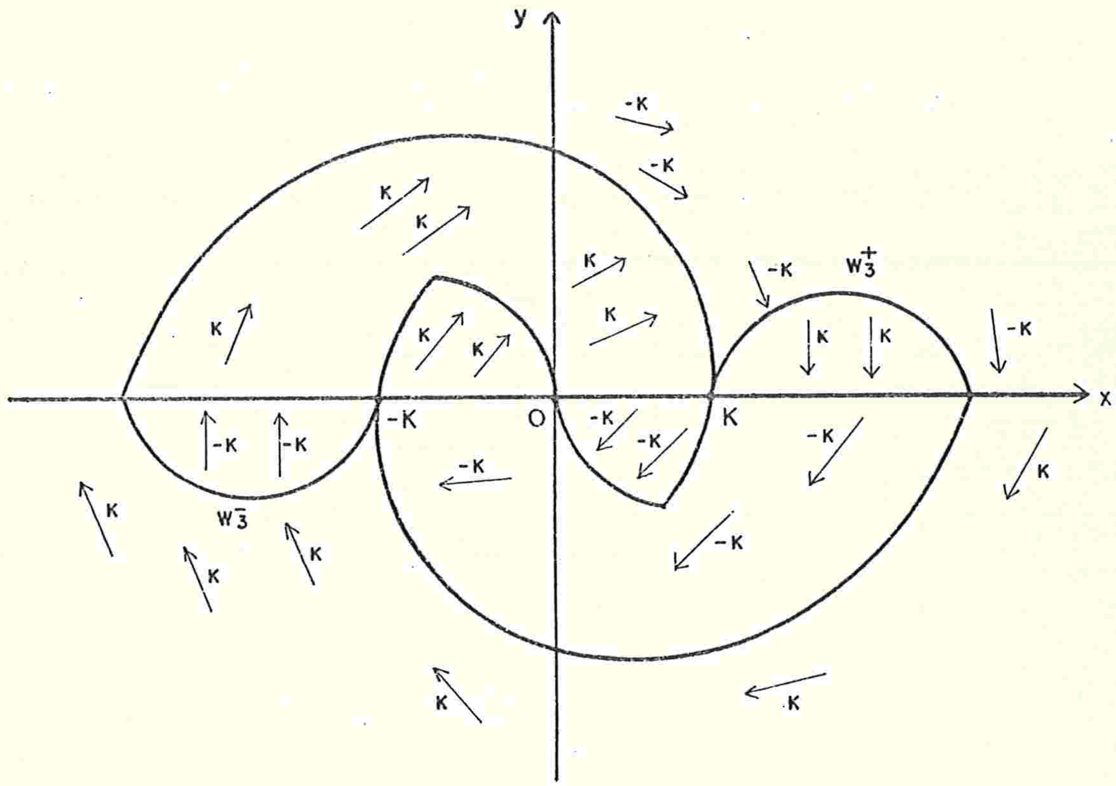
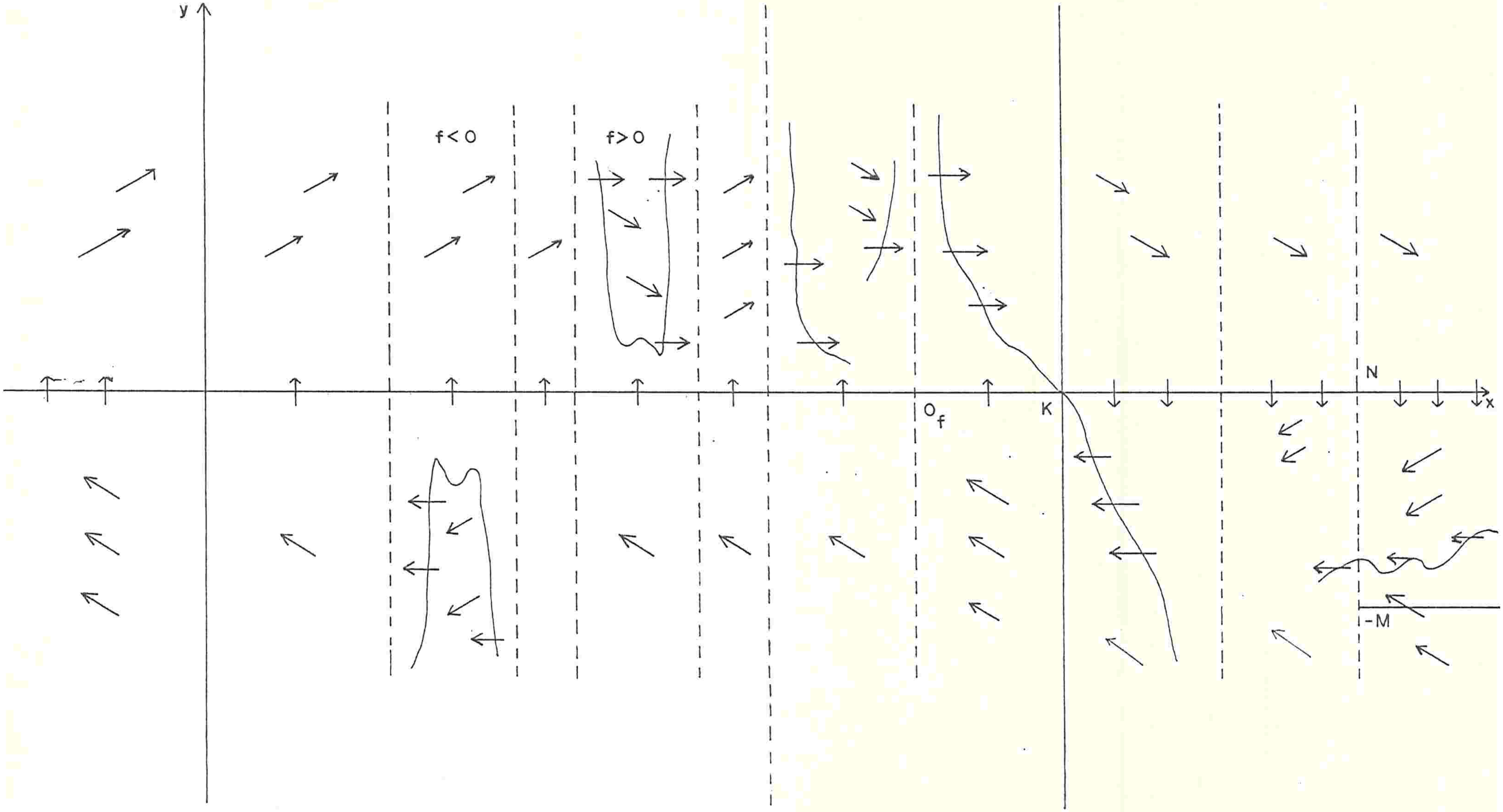


Figura 4.4.4

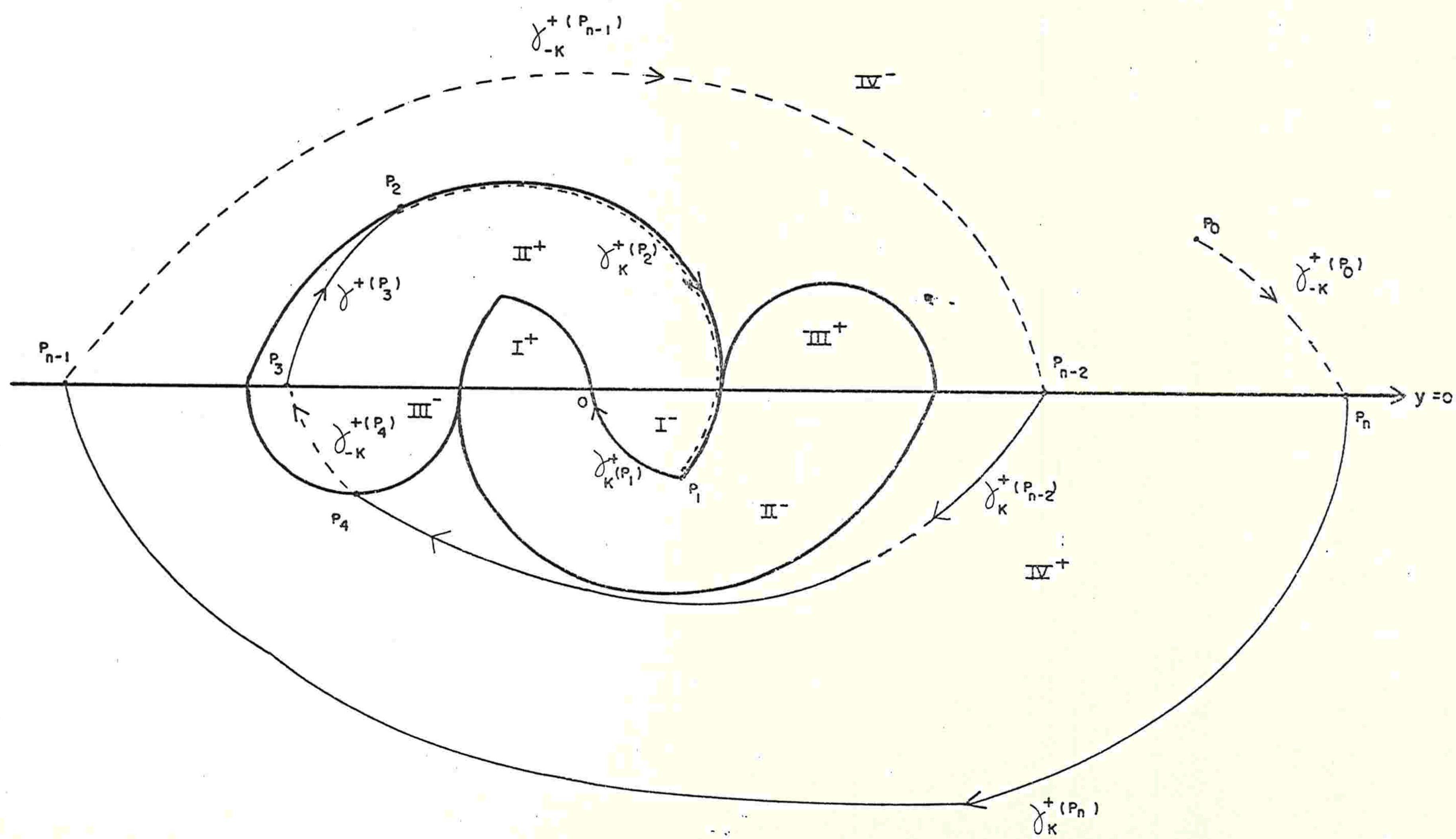
Das observações acima concluímos que a "switching-locus" W divide o plano em oito regiões como na fig. 4.4.5. Esboçamos na própria figura a estratégia de condução de um ponto P_0 até a origem que vai se reduzir ao seguinte:

Se P_0 é um ponto do plano de fase tal que $P_0 \in IV^-$, aplicamos o controle $u = -K$ até $\gamma_K^+ (P_0)$ interceptar o eixo $y = 0$ num ponto P_n. Seguimos então alternadamente com o controle $u = K$ e $u = -K$ cada vez que a órbita cruza o eixo $y = 0$ até que num ponto P_4 a órbita intercepta W_3^- (W_3^+). Daí seguimos como na fig. 4.4.5 até a origem.



Esboço do andamento do campo de vetores para $(LI)_K^W$

Fig. 4.4.3



$\gamma^{+(P_{n-1})}_{-K}$
IV^-
P_2
II^+
$\gamma^{+(P_2)}_K$
$\gamma^{+(P_3)}$
P_0
$\gamma^{+(P_0)}_{-K}$
III^+
I^+
P_{n-1}
P_3
P_{n-2}
$y=0$
P_n
O
III^-
$\gamma^{+(P_4)}_{-K}$
I^-
$\gamma^{+(P_1)}_K$
P_1
II^-
$\gamma^{+(P_{n-2})}_K$
P_4
IV^+
$\gamma^{+(P_n)}_K$

Figura 4.4.5.

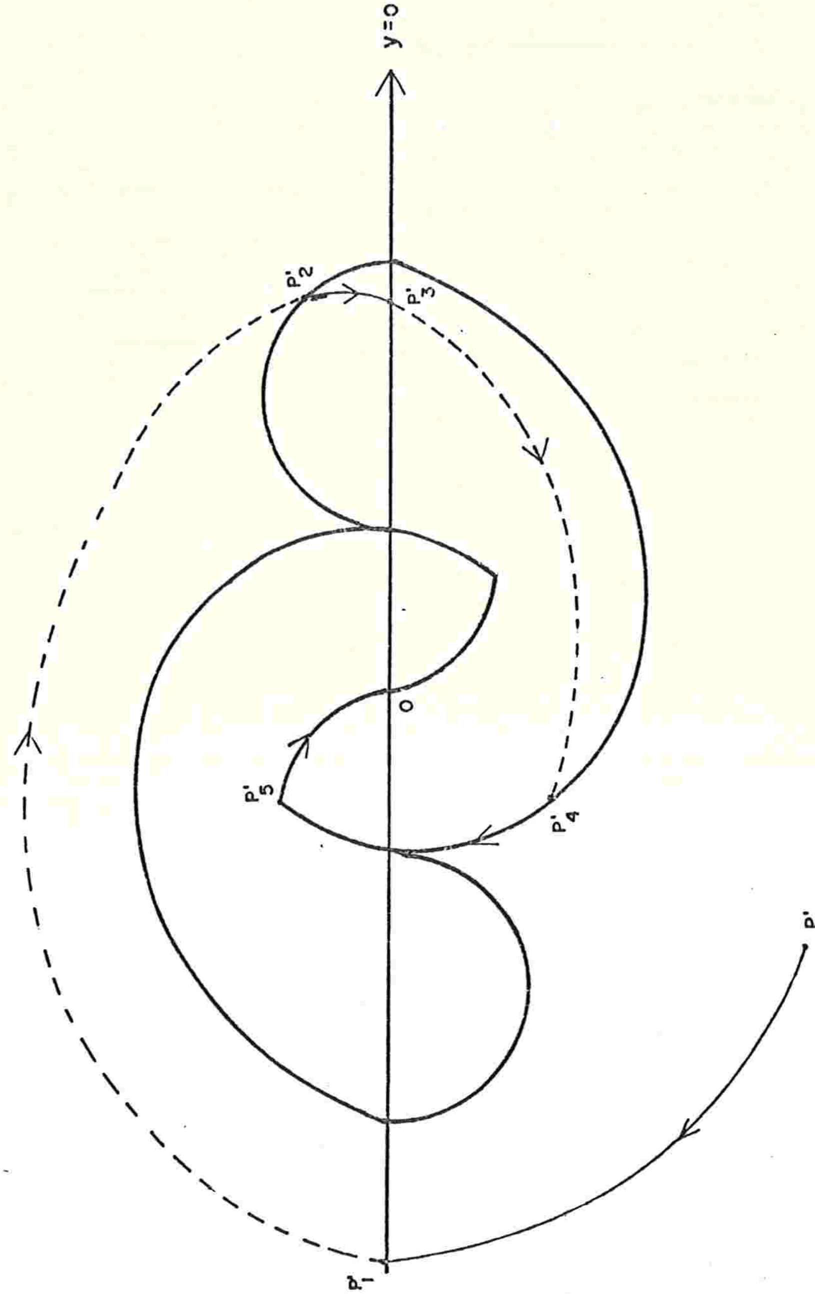


Figura 4.4.6

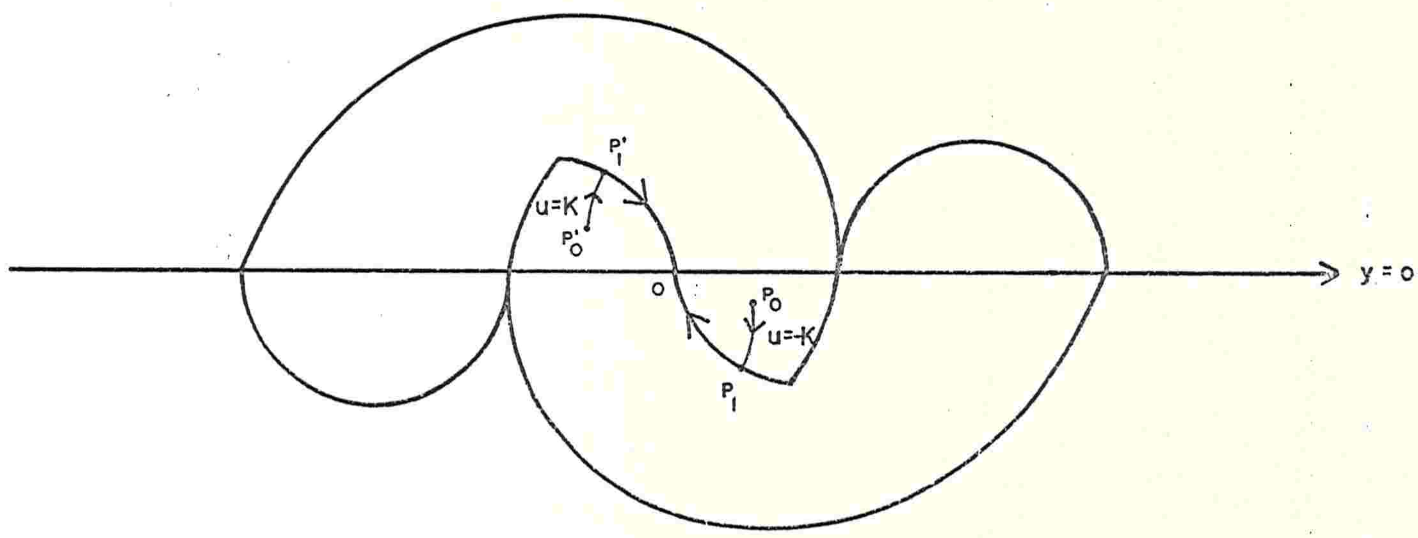


Figura 4.4.7

A condução é análoga para P_0' pertencente à região IV^+ (ver fig. 4.4.6).

Nos casos em que P_0 e P_0' estão nas regiões I^- e I^+ respectivamente, procede-se como na fig. 4.4.7.

Finalmente, temos que vale o teorema de existência de controle ótimo (ver Lee e Markus [2] th. 4, p. 259) para o sistema $(LI)_u^W$, ou seja: todos os pontos de $W_K = V_K^u$, podem ser levados à origem com minimização do custo funcional trabalho, através de trajetórias correspondentes ao controle maximal $u = K \operatorname{sgn} [\eta_2 - y]$, uma vez que o conjunto de velocidade estendida

$$\hat{V}(x,y,t) = \{(uy, \; y, \; -f(x)y - x + u)/u \in \Omega(x,y,t)\}$$

é convexo no $\mathbb{R}^3$ para (x,y,t) fixado (verificação imediata) onde

$$\Omega(x,y,t) = \{u \in \Delta : u(t) = K \operatorname{sgn} [\eta_2(t) - y(t)]\}.$$

BIBLIOGRAFIA

Nota sobre o uso da bibliografia

As obras abaixo efetivamente citadas no trabalho foram as de nº [1] a [6] .

No entanto, outras tiveram que ser consultadas também mais detida e profundamente na elaboração da dissertação:

[7] para o capítulo 4.2.

[8] para o capítulo 4.

[9] , [10] , [11] para o capítulo 4.1.

[12] , [13] para o capítulo 2

e [14] para a teoria geral de Equações diferenciais não-lineares

[1] - Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanski, R.V. Gamkrelidze, e E.F. Mischenko, "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.

[2] - E.B. Lee e L. Markus, "Foundations of Optimal Control Theory", John Wiley, 1967 .

[3] - Barbanti, L., "Equações de Liénard e Controle em Tempo Mínimo" tese de doutoramento pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo , 1980.

[4] - Barbanti, L., "Liénard Equations and Control" Lecture Notes in Mathematics 799, 1980.

[5] - J.S. Meditch., "On minimal-fuel satellite attitude controls", IEEE Trans. on Applications and Industry, vol. 83, pp. 120-128; março, 1964.

[6] - Athans, M., e P.L. Falb, "Optimal Control: An Introduction to the Theory and its Applications" Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[7] - Tufts e Shnidman, "Optimal Waveforms subject to Constraints" IEEE, pp. 1002-1007; setembro, 1964.

[8] - Nelson, W.L., "On the Use of Optimization Theory for Practical Control System Design", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-9, 469-477 (1964)

[9] - Foy, W.H., "Fuel Minimization in Flight Vehiche Attitude Control", IEEE Trans. on Applications and Industry, vol. 83, pp. 120-128, março, 1964

[10] - Athans, M., "Fuel Optimal Control of a Double Integral Plant with Response Time Constraints, "IEEE Transactions, Applications and Industry, 83, 240-246 (1964)

[11] - Meditch, J.S., "On the Problem of Optimal Thrust Programming For a Lunar Soft Landing", IEEE Transactions on Automatic Control", pp 477-484; outubro, 1964.

[12] - Macki, J, e Strauss A., "Introduction to Optimal Control Theory" Springer-Verlag, New York, 1982.

[13] - Bryson, A. E.J. e Ho, Yu-Chi, "Applied Optimal Control" , Ginn and Company, 1969

[14] - Sansone, G. e Conti, R., "Non-Linear Differential Equations",The Mcmillian Company, New York, 1964.