Compatibilidade de Extensões de Matróides

Denise Sakai

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: Ciência da Computação
Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Mandel

-SÃO PAULO, Junho de 1987-

À minha família

Agradecimentos

A gente quer ser original, mas acaba tendo que agradecer às mesmas pessoas pelas mesmas coisas de sempre:

À minha família, já agradeci.

Gostaria de fazer um agradecimento especial a cada amigo, mas acho que o espaço não vai dar... Mesmo assim, obrigada a todos pelo apoio.

E para terminar, nem preciso dizer que esse trabalho não teria sido realizado sem a ajuda do meu orientador. Arnaldo, obrigada por tudo!

Abstract

It is generally difficult to characterise which families of extensions of a matroid are compatible. Even when we restrict the problem to single-element extensions, no complete satisfactory answer is known. The object of this work is to study the problem of compatibility of single-element extensions of a matroid in two particular cases which are well understood.

In the first case, a natural sufficient condition, due to Cordovil [Co2], for a finite family of single-element extensions to be compatible is given. By making use of the one-to-one correspondence between single-element extensions and modular filters of a matroid, first established by Crapo in [Cr], Cordovil introduced the concept of ultra-compatibility of a family of modular filters that implies the compatibility of the single-element extensions associated with them. We give a further simple characterisation for the ultra-compatibility.

In the second case, we examine the problem of compatibility of a pair of single-element extensions of a matroid. Good solutions for this problem are already known. We present several characterisations for compatible pairs of single-element extensions, whose authors developed different theories and techniques to solve this problem:

- Las Vergnas in [LV1] compared the filters associated with the two extensions and worked out conditions in terms of their relative positions.
- Cordovil in [Co2] used a generalisation of the concept of modular filter (gerbe) introduced by Las Vergnas in [LV2].
- Cheung in [Ch] obtained three distinct solutions based, respectively, on the notion of closure of a modular filter, on linear subclasses and on the notion of quotient bundle.

Introdução

A Teoria dos Matróides teve sua origem na tentativa de van der Waerden [vW] de axiomatizar e generalizar os conceitos de dependência linear e algébrica no início da década de 1930. A essa época, Whitney [Wh] percebeu que é possível associar às árvores de um grafo um conceito de dependência semelhante. Como resultado dessas observações, surgiu em 1935 um artigo que lançou os fundamentos da teoria em uma forma que pouco mudou até hoje. Com a descoberta gradual de novas classes de matróides, verificou-se que essa teoria consegue unificar também vários conceitos da Teoria dos Grafos, Reticulados, Transversais e Estruturas de Incidência. É justamente nessa troca de idéias com diferentes ramos da Combinatória que reside um dos principais e um dos mais úteis aspectos da Teoria dos Matróides.

Devido ao seu caráter geométrico, os espaços projetivos e afins são ferramentas de fundamental importância no estudo da Combinatória. Muitos dos problemas relacionados com matróides também tiveram origem dentro desse contexto. Tentaremos através desses espaços, introduzir alguns conceitos básicos da Teoria dos Matróides, bem como apresentar algumas questões ligadas com a Compatibilidade de Extensões de Matróides, principal objeto de investigação deste trabalho.

No que se segue, é dada uma configuração C de pontos num espaço (projetivo ou afim) de dimensão finita, isto é, um conjunto finito E de pontos nesse espaço. Nos exemplos, vamos explicitar apenas as linhas com mais de três pontos e, em certos casos, explicitaremos também alguns planos para uma melhor visualização. Abaixo, apresentamos dois exemplos bem conhecidos de configurações de pontos nos espaços projetivos de dimensão 2 e 3 respectivamente:

não Fano

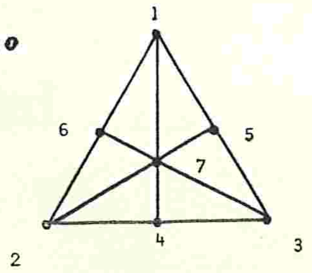


fig.1.a

Desargues

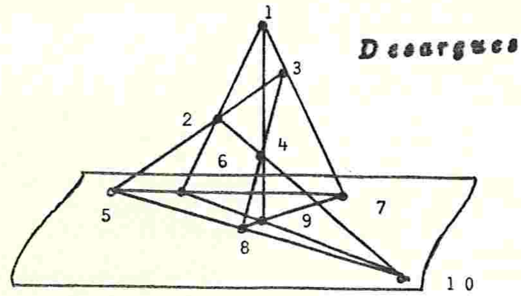


fig.1.b

A intersecção de um subespaço com a configuração C será chamada de *fechado* de C. Observe que com essa definição, E é um fechado e a intersecção de dois fechados também é um fechado. Assim, a família dos fechados da configuração C quando ordenados por inclusão forma um reticulado. Abaixo temos por exemplo, o reticulado dos fechados da configuração da fig.1.a.

não Fano

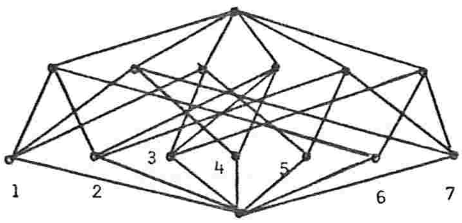


fig.2

Associamos à cada subconjunto X de E o natural $dim(X)+1$, onde $dim(X)$ é a dimensão do subespaço gerado por X. Esse natural será chamado de *posto* de X em C, denotado por $\rho_C(X)$. A função ρ_C tem duas propriedades óbvias:

i. $0 \leq \rho_C(X) \leq |X|$ para todo $X \subseteq E$

ii. Se $X \subseteq Y \subseteq E$ então $\rho_C(X) \leq \rho_C(Y)$

Voltemos a fixar nossa atenção no reticulado dos fechados de C. A função ρ_C quando restrita a esses fechados é na realidade uma função altura para o reticulado. Um resultado bem conhecido sobre espaços projetivos diz que

$$dim(X) + dim(Y) = dim(X \cup Y) + dim(X \cap Y)$$

para quaisquer subespaços X e Y. Não se espera que a igualdade acima permaneça válida quando X e Y são fechados de C, já que nesse caso X e Y são apenas intersecções de subespaços com a configuração. Entretanto, ainda assim, vale uma condição mais fraca, a submodularidade de ρ_C sobre os fechados, isto é,

$$\rho_C(X) + \rho_C(Y) \geq \rho_C(X \cup Y) + \rho_C(X \cap Y)$$

para quaisquer fechados X e Y. Um reticulado com função altura finita e submodular onde todo elemento pode ser expresso como supremo de átomos é chamado *reticulado geométrico.*

Toda essa discussão envolvendo fechados, posto e reticulado geométrico vale para matróides em geral. Aliás, a partir de cada um desses conceitos, podemos obter uma definição axiomática de matróides. Em particular, um matróide M pode ser definido como sendo um conjunto finito E juntamente com uma família de subconjuntos de E, chamados fechados do matróide, com propriedades semelhantes àquelas dos fechados da configuração C. Definições precisas encontram-se entre as Preliminares mas não são necessárias para acompanhar a discussão introdutória.

O raciocínio feito sobre a configuração C continua valendo para qualquer subconjunto de pontos de E. O correspondente a essa idéia para matróides em geral é dado pela noção de submatróide. Um submatróide de um matróide M sobre um conjunto E é um matróide sobre um subconjunto A de E, chamado de *restrição* de M a A e denotado por $M(A)$, cujos fechados são as intersecções entre os fechados de M e o conjunto A. Chegamos finalmente no ponto de definir um dos principais conceitos presentes nesse trabalho. Uma *extensão* N do matróide M é um matróide que tem M como submatróide. Como ilustração, vamos examinar as extensões da configuração de pontos C obtidas simplesmente pelo acréscimo de novos pontos. Note que todas essas extensões podem ser obtidas acrescentando-se um novo ponto por vez e por essa razão vamos nos restringir apenas às extensões pontuais da configuração. Para fixar idéias, suponha que C' seja a configuração de 4 pontos no plano, $\{a, b, c, d\}$, na qual não existem 3 pontos colineares. Apresentamos a seguir, 3 extensões pontuais de C' por um novo ponto p.

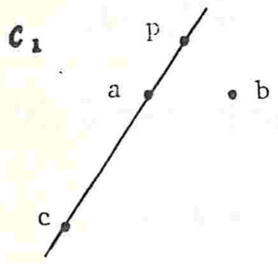


fig.3.a

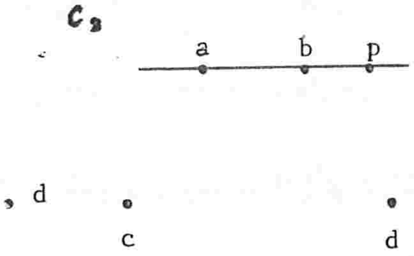


fig.3.b

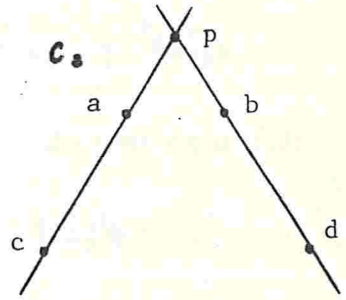


fig.3.c

Observe que diferentes extensões de C' são determinadas por diferentes posições do ponto p em relação aos fechados de C'. Antes de analisarmos a estrutura dos fechados das extensões desse exemplo com mais detalhe, introdusiremos outro conceito importante.

O *fecho* de $X \subseteq E$ da configuração de pontos C, denotado por $\overline{X}^{C}$, é o menor fechado de C que contém X, ou equivalentemente, é a intersecção de todos os fechados de C que têm X como subconjunto. Não é difícil verificar que:

i. Para todo $X \subseteq E$ temos $X \subseteq \overline{X}^{C}$ e a igualdade ocorre se e somente se X é fechado de C

ii. Para todo $X \subseteq E$ temos, $\overline{X}^{C} = \overline{\overline{X}^{C}}^{C}$

iii. Se $X \subseteq Y \subseteq E$ então $\overline{X}^{C} \subseteq \overline{Y}^{C}$

Considere agora a extensão C_1 de C' da fig.3.a. A linha ac é um fechado de C' cujo fecho em C_1 contém o novo ponto p. É fácil ver que o fecho em C_1 de qualquer fechado de C' contendo ac também conterá p, bastando observar que a função fecho preserva inclusões. Por exemplo, $p \in \overline{abcd}^{C_1}$. Esse fato pode ser generalizado da seguinte forma. Dada uma extensão pontual N de C pelo ponto p, o conjunto $\mathcal{F}(N)$ dos fechados X de C tais que $p \in \overline{X}^{N}$ tem a seguinte propriedade:

(F1) Se $X \in \mathcal{F}(N)$ e Y é um fechado de C tal que $X \subseteq Y$ então $Y \in \mathcal{F}(N)$

Em particular, nos exemplos das fig.3.a, 3.b, 3.c temos $\mathcal{F}(C_1) = \{ac, abcd\}$, $\mathcal{F}(C_2) = \{ab, abcd\}$, $\mathcal{F}(C_3) = \{ac, bd, abcd\}$.

O conjunto $\mathcal{F}(N)$ tem também uma outra propriedade importante. Tentemos identificá-la dentro do próximo exemplo. Suponha que queremos uma extensão pontual C_4 de C' tal que $p \in \overline{ab}^{C_4}$ e $p \in \overline{cb}^{C_4}$. A propriedade (F1) garante que $p \in \overline{ab \cup cb}^{C_4}$. Denotemos o posto de C' por ρ' e o posto de C_4 por ρ_4. Pela submodularidade de ρ_4 temos,

$$\rho_4(\overline{ab}^{C_4}) + \rho_4(\overline{cb}^{C_4}) \geq \rho_4(\overline{ab}^{C_4} \cup \overline{cb}^{C_4}) + \rho_4(\overline{ab}^{C_4} \cap \overline{cb}^{C_4}) \quad (I)$$

Por outro lado, os fechados ab e cb de C' formam um par modular em C', isto é,

$$\rho'(ab) + \rho'(cb) = \rho'(ab \cup cb) + \rho'(ab \cap cb) \quad (II)$$

Mas, $\rho_4(\overline{ab}^{C_4}) = \rho'(ab)$, $\rho_4(\overline{cb}^{C_4}) = \rho'(cb)$ e $\rho_4(\overline{ab}^{C_4} \cup \overline{cb}^{C_4}) = \rho'(ab \cup cb)$, portanto (I) e (II) implicam que $p \in \overline{b}^{C_4} = \overline{ab \cap cb}^{C_4}$, ou de maneira equivalente, $\rho_4(\overline{bp}^{C_4}) = 1$. Essa situação não tem representação numa configuração de pontos de um espaço projetivo. Apesar disso, damos na fig.4 uma representação alternativa para uma

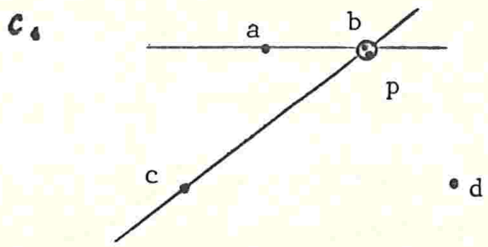


fig.4

possível extensão C_4 onde os pontos b e p são colocados no interior de uma mesma circunferência, representando na realidade um único ponto.

Raciocínio análogo pode ser feito para concluir a segunda propriedade de $\mathcal{F}(N)$:

(F2) Se $X, Y \in \mathcal{F}(N)$ formam um par modular de C então $X \cap Y \in \mathcal{F}(N)$

Um subconjunto do conjunto de fechados de um matróide que satisfaz (F1) e (F2) é chamado de *filtro modular*. Em 1965 uma nova direção nos estudos sobre matróides foi dada por Crapo em seu trabalho sobre extensões pontuais [Cr]. Nele, Crapo mostra que cada filtro modular de um matróide determina uma única extensão pontual. Para entender melhor a relação existente entre os filtros modulares e as extensões pontuais, é conveniente olharmos para os reticulados geométricos associados ao matróide e às suas extensões pontuais. Examinamos na fig.5 os reticulados dos fechados de C' e C_2 da fig.3.b.

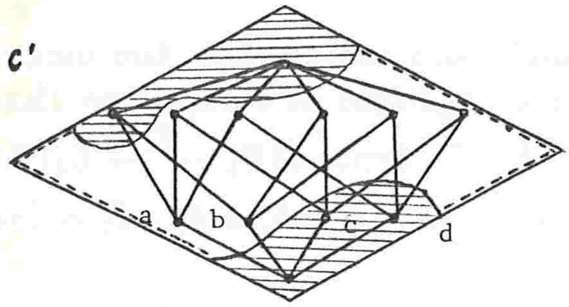


fig.5.a

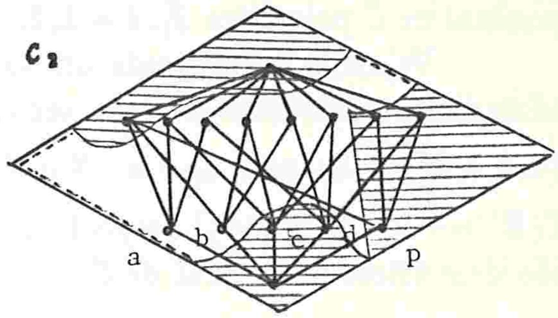


fig.5.b

Na fig.5.a, distingüimos 3 regiões. A região hachurada superior representa o filtro modular $\mathcal{F}(C_2)$ e a região não hachurada contém os fechados de C' cobertos por algum elemento de $\mathcal{F}(C_2)$. Na fig.5.b, a região hachurada contém os fechados de $\mathcal{F}(C_2)$ acrescidos do ponto p com posto inalterado. Os fechados de C' fora do filtro continuam sendo fechados de C_2 e também não têm alteração de posto. Finalmente, quando acrescentamos p a um fechado de C' não coberto por elemento do filtro obtemos um fechado de C_2 com posto uma unidade maior. Na realidade, o que ocorre nesse exemplo também ocorre no caso geral; a partir de um filtro modular $\mathcal{F}$ de um matróide M sobre um conjunto finito E dado por seu reticulado

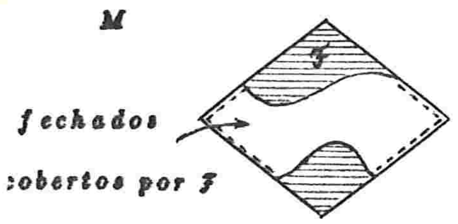


fig.6.a

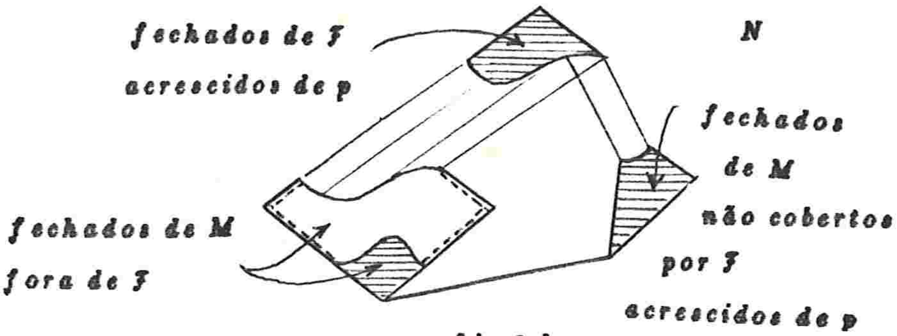


fig.6.b

de fechados, podemos obter o reticulado de fechados de uma extensão pontual N tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(N)$ da forma descrita na fig.6.

Usaremos a notação, $M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}} N(E \cup p)$ para dizer que N é a extensão pontual de M sobre $E \cup p$ determinada pelo filtro modular $\mathcal{F}$ de M.

Vale observar que com essa construção, a extensão pontual obtida a partir de um filtro modular de uma configuração de pontos, apesar de ser um matróide, pode não ser representável como uma configuração de pontos num espaço projetivo. A extensão M_4 da fig.4 é um exemplo dessa situação. Várias classes de matróides apresentam essa "anomalia", isto é, não são fechadas por extensões pontuais.

Analisemos agora o seguinte problema: dados dois filtros modulares $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ da configuração $\mathcal{C}$ perguntamos se é possível colocar um novo ponto p_1 exatamente nos fechados de $\mathcal{F}_1$ e ao mesmo tempo um novo ponto p_2, distinto de p_1, exatamente nos fechados de $\mathcal{F}_2$. Uma outra formulação para esssa pergunta é se existe uma extensão $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ tal que $\mathcal{C}'(E \cup p_i)$ é exatamente a extensão pontual de $\mathcal{C}$ pelo filtro $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$.

Vejamos inicialmente um exemplo onde essa pergunta tem uma resposta afirmativa. Considere $\mathcal{C}$ como sendo a configuração de 4 pontos no plano, $E = \{a, b, c, d\}$, dada pela fig.7.a. Nas fig.7.b e 7.c temos $\mathcal{C}(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} \mathcal{C}_1(E \cup p_1)$ e $\mathcal{C}(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_2} \mathcal{C}_2(E \cup p_2)$ respectivamente, onde $\mathcal{F}_1 = \{ab, abcd\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{ad, abcd\}$ são dois filtros modulares de $\mathcal{C}$.

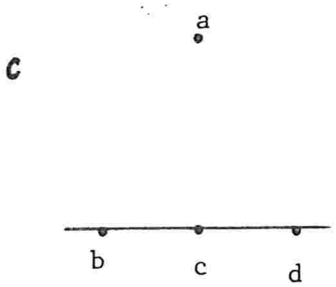


fig.7.a

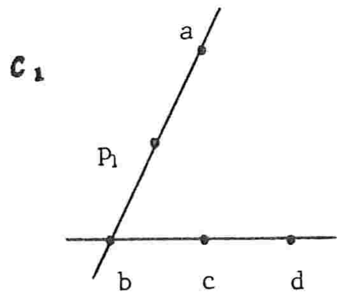


fig.7.b

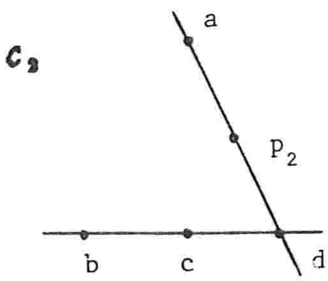


fig.7.c

Duas possíveis extensões pontuais comuns a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são dadas pelas fig.8.a e 8.b.

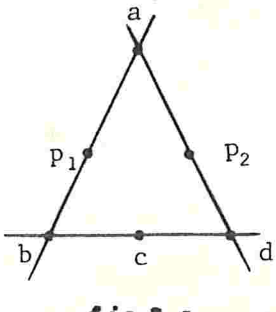


fig.8.a

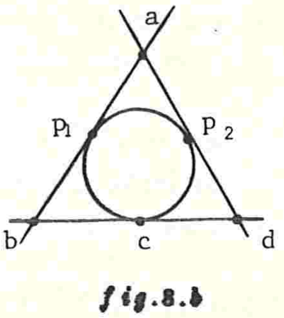


fig.8.b

Considere agora C como sendo a configuração de 6 pontos no plano, $E = \{a,b,c,d,e,f\}$, na qual não existem 3 pontos colineares e $\mathcal{F}_1 = \{ab, cd, E\}$, $\mathcal{F}_2 = \{ab, cd, ef, E\}$ dois filtros modulares. As fig.9.a e 9.b mostram as respectivas extensões pontuais C_1, C_2 por esses dois filtros.

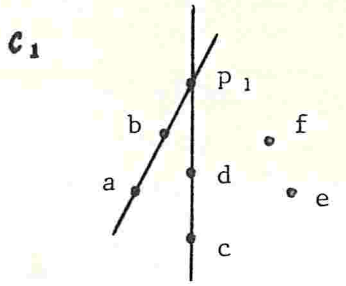


fig.9.a

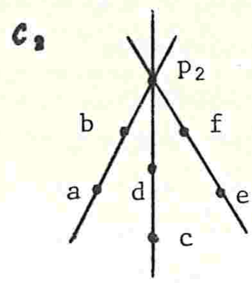


fig.9.b

Se em C_1 tentamos colocar o ponto p_2 nos fechados de $\mathcal{F}_2$, p_1 é forçado a pertencer à linha ef, uma contradição. Por outro lado, em C_2 não é possível colocar p_1 somente nos fechados de $\mathcal{F}_1$. Assim, C_1 e C_2 são extensões incompatíveis de C.

O principal objetivo dessa dissertação é estudar uma versão geral desse último problema: dados um matróide M e as extensões $N_1, N_2, ..., N_n$ de M, será que existe uma extensão comum a todas elas? Em caso afirmativo diremos que $N_1, N_2, ..., N_n$ são *extensões compatíveis* de M. Essa pergunta permanece até hoje sem uma boa resposta, isto é, não existe uma caracterização completa para a compatibilidade de extensões. Mesmo quando restringimos o problema às extensões pontuais de M esse quadro permanece praticamente inalterado. A maioria dos trabalhos sobre compatibilidade de extensões está restrita a essa versão simplificada do problema. Cordovil em [Co2] apresentou uma condição suficiente interessante para que as extensões pontuais $N_1, N_2, ..., N_n$ de um matróide sejam compatíveis, fornecendo uma caracterização de uma extensão especial N comum a $N_1, N_2, ..., N_n$. No caso de pares de extensões pontuais de um matróide, o problema da compatibilidade está completamente resolvido. Vários autores desenvolveram diferentes teorias e técnicas para obter uma solução para esse problema particular:

- Las Vergnas em [LV1] trabalhou com relações de inclusão entre os fechados dos filtros modulares associados ao par de extensões pontuais.

- Cordovil em [Co2] usou uma generalização do conceito de filtro modular introduzido por Las Vergnas em [LV2].

- Cheung em [Ch] obteve 3 soluções distintas baseadas, respectivamente, na noção de fecho de um filtro modular, nas famílias dos hiperplanos de filtros modulares e nas operações de restrição e contração de matróides.

A seguir, pretendemos transmitir de maneira informal as principais idéias mencionadas no último parágrafo, ainda dentro da classe dos matróides sobre configurações de pontos de um espaço projetivo.

Diremos que os filtros modulares de um matróide são compatíveis se e somente se as extensões pontuais do matróide determinadas por esses filtros também o forem. Assim, ao invés de tratarmos do problema da compatibilidade de extensões pontuais, vamos tratar do problema da compatibilidade de filtros modulares, que é equivalente.

Observando com mais cuidado os exemplos das fig.7.a, 7.b e 7.c, notamos que quando estendemos a configuração $\mathcal{C}$ pelo filtro $\mathcal{F}_1$ obtendo a configuração $\mathcal{C}_1$, os fechos dos elementos de $\mathcal{F}_2$ em $\mathcal{C}_1$ formam um filtro modular de $\mathcal{C}_1$. Podemos então estender $\mathcal{C}_1$ por esse filtro obtendo a extensão da fig.8.a, comum a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. O mesmo raciocínio é aplicável trocando $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{C}_1$ por $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{C}_2$, respectivamente. O interessante nesse último caso, é que continuamos a obter a mesma extensão pontual da fig.8.a. Isto não é coincidência... No entanto, no exemplo da fig.9, ao estendermos $\mathcal{C}$ pelo filtro modular $\mathcal{F}_1$ obtendo $\mathcal{C}_1$, os fechos em $\mathcal{C}_1$ dos elementos de $\mathcal{F}_2$ não formam um filtro modular pois $\overline{ab}^{\mathcal{C}_1}$, $\overline{cd}^{\mathcal{C}_1}$ formam um par modular de $\mathcal{C}_1$ e a intersecção $\overline{ab}^{\mathcal{C}_1} \cap \overline{cd}^{\mathcal{C}_1} = p_1$ não é fecho em $\mathcal{C}_1$ de nenhum elemento de $\mathcal{F}_2$.

Mas o que está por trás desses fatos? É razoável perguntar, nesses dois exemplos, se essa "preservação" da estrutura de $\mathcal{F}_2$ na extensão pontual $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$ pelo filtro $\mathcal{F}_1$ tem alguma relação com a compatibilidade dos filtros $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ que, como já observado antes, é verdadeira no exemplo da fig.7 e falsa no exemplo da fig.9. Quando falamos em "preservação" de $\mathcal{F}_2$ em $\mathcal{C}_1$ estamos querendo dizer que os elementos minimais de $\mathcal{F}_2$ em $\mathcal{C}$ quando fechados em $\mathcal{C}_1$ são exatamente os elementos minimais de um filtro modular de $\mathcal{C}_1$. Isto porque, visto a condição (F1), o filtro é determinado pelos seus membros minimais. Se isso ocorrer, diremos que $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ são filtros modulares *ultra-compatíveis*. Perceba que os filtros $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ do exemplo da fig.9 não são ultra-compatíveis porque $ab, cd \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, $\emptyset = ab \cap cd \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ e $\rho_{\mathcal{C}}(ab) + \rho_{\mathcal{C}}(cd) - \rho_{\mathcal{C}}(ab \cup cd) - \rho_{\mathcal{C}}(ab \cap cd) = 1$ o que faz com que o par $\overline{ab}^{\mathcal{C}_1}$, $\overline{cd}^{\mathcal{C}_1}$ torne-se modular em $\mathcal{C}_1$, forçando $p_1 = \overline{ab}^{\mathcal{C}_1} \cap \overline{cd}^{\mathcal{C}_1}$ a pertencer a todo filtro modular que contenha $\overline{ab}^{\mathcal{C}_1}$ e $\overline{cd}^{\mathcal{C}_1}$. Esse fato caracteriza a ultra-compatibilidade de um par $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ de filtros modulares de um matróide M: $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ são ultra-compatíveis se e somente se não existem $X, Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ tais que $X \cap Y \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ e $def_M(X, Y) = 1$, onde $def_M(X,Y) = \rho_M(X)+\rho_M(Y)-\rho_M(X\cup Y)-\rho_M(X\cap Y)$ chamado *defeito* do par de fechados X, Y em M. Informalmente, podemos pensar no defeito como uma medida do quão "longe" um par de fechados está de ser modular. Essa definição de ultra-compatibilidade mostra que a ordem dos filtros $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ que parecia importante na definição inicial, é irrelevante. Aliás, a obtenção da mesma extensão da fig.8.a por dois caminhos distintos discutidos acima é consequência dessa observação.

O Capítulo I desse trabalho é dedicado principalmente ao estudo da ultra-compatibilidade no caso geral, onde todas as idéias apresentadas acima são generalisadas para uma sequência $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ de filtros modulares de um matróide M sobre E.

Dado um conjunto finito P arbitrário disjunto de E, seria muito bom se conseguíssemos uma bijeção entre as extensões N de M sobre $E \cup P$ e alguma estrutura de fechados de M, a exemplo do que ocorre com os filtros modulares e as extensões pontuais de M. Uma primeira extensão da idéia de filtro modular, proposta por Las Vergnas em [LV1], é rasoavelmente simples mas o preço pago é a perda da bijeção. Tomemos por exemplo a configuração $\mathcal{C}$ sobre 4 pontos no espaço, $E = \{a,b,c,d\}$, na qual não existem 3 pontos colineares e cada um dos pontos não pertence ao plano determinado pelos 3 outros. Coloque um novo ponto p_1 na linha ab e um novo ponto p_2 na linha bc obtendo a extensão $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$ da fig.10.b.

$\mathcal{C}$

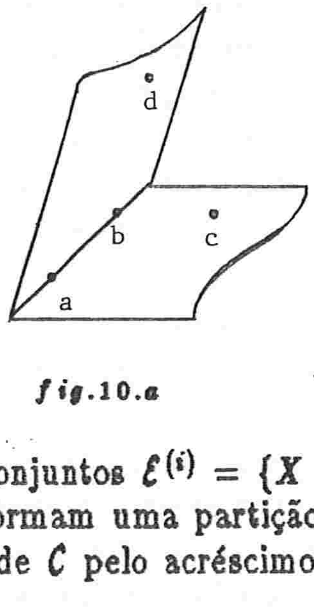


fig.10.a

$\mathcal{C}_1$

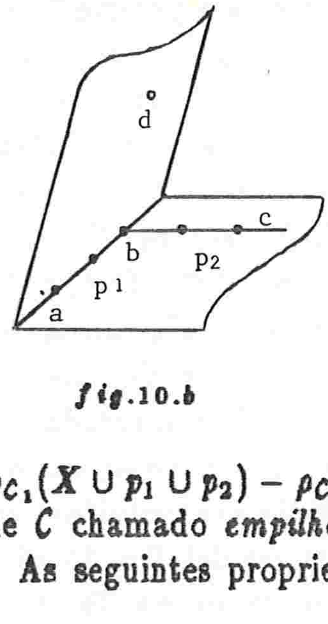


fig.10.b

Os conjuntos $\mathcal{E}^{(i)} = \{X \text{ fechado de } \mathcal{C} : \rho_{\mathcal{C}_1}(X \cup p_1 \cup p_2) - \rho_{\mathcal{C}}(X) = i\}$, $i = 0,1,2$, formam uma partição dos fechados de $\mathcal{C}$ chamado *empilhamento da extensão* $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$ pelo acréscimo da linha p_1p_2. As seguintes propriedades são verificadas:

(E1) Se X, Y são fechados de $\mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{E}^{(i)}$ e X cobre Y (isto é, $Y \subseteq X$ e não existe Z fechado de $\mathcal{C}$ tal que $Y \subset Z \subset X$) então $X \in \mathcal{E}^{(i)} \cup \mathcal{E}^{(i-1)}$

(E2) Se X, Y são fechados de $\mathcal{C}$, X, Y cobrem $X \cap Y$ e $X, Y, \overline{X \cup Y}^{\mathcal{C}} \in \mathcal{E}^{(i)}$ então $X \cap Y \in \mathcal{E}^{(i)}$

Olhando para o reticulado dos fechados de $\mathcal{C}$ temos esquematicamente:

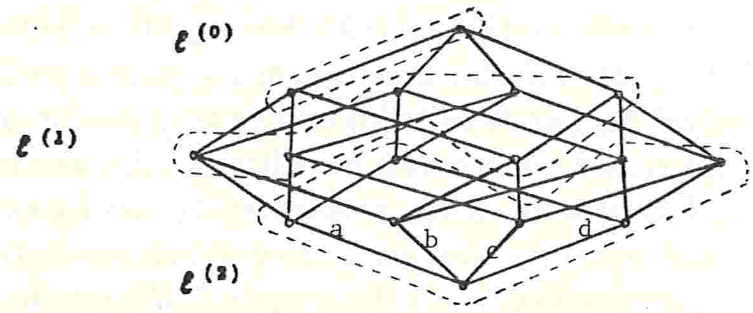


fig.11

Em particular as propriedades (E1) e (E2) mostram que $\mathcal{E}^{(0)}$ é um filtro modular. Infelizmente, existem várias extensões de $\mathcal{C}$ obtidas pelo acréscimo da linha p_1p_2 com esse mesmo empilhamento (veja fig.12.a, 12.b e 12.c).

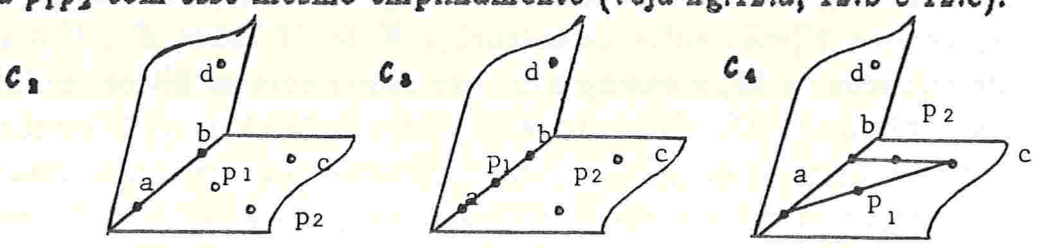


fig.12.a *fig.12.b* *fig.12.c*

Entretanto, conseguimos dentre todas essas extensões, uma extensão especial "o mais livre possível", isto é, uma extensão obtida de $\mathcal{C}$ colocando-se a linha p_1p_2 interferindo o menos possível com os fechados de $\mathcal{C}$, tomando o cuidado de manter o empilhamento. Essa extensão é exatamente $\mathcal{C}_2$ da fig.11.a. Note que essa idéia de "o mais livre possível" é equivalente a: se $\mathcal{C}'$ é uma extensão de $\mathcal{C}$ pelo acréscimo de p_1p_2 com mesmo empilhamento de $\mathcal{C}_2$ então $\rho_{\mathcal{C}_2}(X) \geq \rho_{\mathcal{C}'}(X)$ para todo $X \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$. Chamaremos $\mathcal{C}_2$ de *extensão normal* de $\mathcal{C}$ determinada pelo empilhamento $\mathcal{E}^{(0)}$, $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$ e pela linha p_1p_2.

As extensões normais e os empilhamentos serão ferramentas importantes nas caracterizações de pares de filtros modulares compatíveis, devidas a Las Vergnas e Cordovil apresentadas no Capítulo II.

Como já dissemos, o objetivo dessa introdução é transmitir ao leitor as principais idéias envolvidas neste trabalho, de uma maneira o mais natural possível, sem entrar em detalhes técnicos desnecessários e não pressupondo nenhum conhecimento profundo da Teoria dos Matróides. Acreditamos nesse ponto que esse objetivo já foi atingido. Vamos nos permitir então ser um pouco mais breves nas descrições dos dois últimos capítulos da dissertação.

Nos Capítulos III e IV abordamos indiretamente o problema da compatibilidade de filtros modulares através de duas estruturas que estão em correspondência bijetora com os filtros modulares.

A primeira delas já é bastante conhecida e foi introdusida por Crapo em [Cr]. Assim como um filtro modular é completamente determinado por seus elementos minimais, os *hiperplanos* presentes no filtro, isto é, os fechados do filtro com posto uma unidade menor que o posto do matróide, também dão uma descrição completa do filtro. Essa família de hiperplanos do filtro é chamada *subclasse linear*. Dessa forma, a compatibilidade de filtros modulares indus naturalmente a noção de compatibilidade de subclasses lineares. No Capítulo III, detetamos exatamente a situação que bloqueia a compatibilidade de duas subclasses lineares comparáveis por inclusão.

Passemos a descrever a segunda estrutura. Dado um matróide M sobre um conjunto E, trabalharemos no Capítulo IV com matróides sobre o mesmo E cujas famílias de fechados são subfamílias da família dos fechados de M. Tais matróides são denominados *quocientes* de M. É possível caracterizar uma extensão qualquer de M a partir de *feizes de quocientes* de M que nada mais são que famílias de quocientes de M com determinadas propriedades. Não vamos aqui listar essas propriedades mas podemos adiantar que elas, bem como toda teoria de quocientes, estão relacionadas com uma operação muito importante sobre matróides, a *contração*. A contração de matróides pode ser vista como uma abstração da operação de contração de arestas num grafo. Do ponto de vista de configurações de pontos, uma contração corresponde à projeção da configuração na direção de um de seus fechados. Se a diferença entre o posto do matróide M e o posto de um quociente é 1, o quociente é dito *elementar*. No Capítulo IV estabelecemos uma bijeção entre os quocientes elementares e os filtros modulares de um matróide, tratando em seguida do problema da representabilidade de quocientes elementares que quando olhado em termos dos filtros modulares associados corresponde ao problema da compatibilidade de filtros.

Índice

Preliminares

O propósito dessas Preliminares é familiarizar o leitor com conceitos básicos e alguns resultados da Teoria dos Matróides a serem utilizados no restante do texto. Tentamos, na medida do possível, nos ater à terminologia utilizada por Welsh em [We]. Grande parte das demonstrações dos resultados aqui apresentados podem ser encontradas em [We] e [Ai].

Inevitavelmente, essas Preliminares contêm um número muito grande de definições e resultados que provavelmente não serão absorvidos numa primeira leitura. Aconselhamos o leitor a passar rapidamente por eles e retornar sempre que necessário.

Na Seção 2, após uma breve revisão da notação básica feita na Seção 1, apresentamos várias definições axiomáticas equivalentes de matróides, bem como algumas operações sobre eles. Na Seção 3, introduzimos o conceito de extensões de matróides, objeto principal de investigação deste texto. A Seção 4 é dedicada a um tipo especial de função entre matróides, o morfismo forte, que será muito útil numa construção feita no Capítulo IV.

Assumimos alguma familiaridade com conceitos básicos da Teoria de Conjuntos, Ordens, Álgebra Linear, Reticulados, Teoria dos Grafos e Geometria Projetiva.

1. NOTAÇÃO BÁSICA

Adotaremos as convenções usuais da teoria de conjuntos. Os símbolos $-$ e Δ serão usados, respectivamente para a diferença e diferença simétrica entre conjuntos.

Os conjuntos (resp., elementos) serão denotados por letras maiúsculas (resp., minúsculas) em itálico. Usualmente $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ denota o conjunto com elementos $x_1, x_2, ..., x_n$ mas quando estiver claro no contexto que estamos nos referindo ao conjunto e não aos elementos, abreviaremos o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ por $x_1 x_2 ... x_n$. Por exemplo, $X \cup x$ denota $X \cup \{x\}$.

2. MATRÓIDES

Um matróide pode ser definido de várias maneiras diferentes porém equivalentes. Comecemos com a definição que nos parece mais natural.

Um *matróide* M é um par $(E, \mathcal{I})$ onde E é um conjunto finito e $\mathcal{I}$ é uma família de subconjuntos de E, denominados *independentes*, tal que para todos X, $Y \subseteq E$

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $X \subseteq Y$ e $Y \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I}$

(I3) Se $X, Y \in \mathcal{I}$ e $|X| > |Y|$ então existe $x \in X - Y$ tal que $Y \cup x \in \mathcal{I}$

Ao invés de mencionarmos o par $(E, \mathcal{I})$ vamos apenas referir-nos ao matróide M sobre E, ou ainda, $M(E)$.

Exemplos de Matróides:

1. *Matróides Lineares*
   $E \subseteq V$ espaço vetorial sobre um corpo ou anel de divisão F
   $\mathcal{I} = \{I \subseteq E : I$ é linearmente independente em $V\}$

2. *Matróides Uniformes*
   E conjunto de n elementos
   $\mathcal{I} = \{I \subseteq E : |I| \leq k\} \qquad 0 \leq k \leq n$, k fixo
   $\mathcal{L}_k(E) = (E, \mathcal{I})$
   Obs.: Se $k = n$ então $\mathcal{L}_k(E)$ é chamado *matróide livre* de posto n, denotado apenas por $\mathcal{L}(E)$

3. *Matróides Gráficos*
   $E = EG$ conjunto das arestas de um grafo G
   $\mathcal{I} = \{I \subseteq E : I \text{ não contém circuitos}\}$
   $M(G) = (E, \mathcal{I})$

4. *Matróides Transversais*
   $E = V_1G$ conjunto dos vértices de uma classe de bipartição de um grafo bipartido G
   $\mathcal{I} = \{I \subseteq E : I \text{ é emparelhável}\}$

5. *Matróides Afins*
   $E \subseteq V$ espaço vetorial sobre um corpo F
   $\mathcal{I} = \{I \subseteq E : I \text{ é independente afim}\}$
   Obs.: $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ é *independente afim* se não existem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in F$ não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$$

Por todo o restante do texto, M será um matróide sobre o conjunto finito E.

Por analogia com espaços vetoriais, fazemos as seguintes definições:

(a) $X \subseteq E$ é *base* de M, se X é independente maximal

(b) O *posto* de $X \subseteq E$ em M, denotado por $\rho_M(X)$, é a cardinalidade de uma base de X. O *posto do matróide* M, denotado por ρM, é o natural $\rho_M(E)$.

(c) O *fecho* de $X \subseteq E$ em M, denotado por $\overline{X}^M$, é o conjunto $\{x \in E : \rho_M(X \cup x) = \rho_M(X)\}$

(d) $X \subseteq E$ é *dependente* em M, se X não é independente

(e) $X \subseteq E$ é *circuito* de M, se X é dependente minimal. Os circuitos de cardinalidade 1 (resp., 2) são chamados de *laços* (resp., *elementos paralelos*)

(f) $X \subseteq E$ é *fechado* de M, se $\overline{X}^M = X$. Os fechados de posto 1, 2, 3, $\rho M - 1$, $\rho M - 2$ e $\rho M - 3$ são chamados, respectivamente, de *pontos, linhas, planos, copontos* (ou *hiperplanos*), *colinhas* e *coplanos*.

O conhecimento das bases, ou posto, ou fecho, ou circuitos ou hiperplanos é suficiente para determinar o matróide de modo único:

Axiomas de Bases *Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de E é a família das bases de um matróide sobre E se e somente se*

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B2) Existe n tal que $|B| = n$ para todo $B \in \mathcal{B}$

(B3) Para todos B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ e $x_1 \in B_1 - B_2$ existe $x_2 \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 \cup x_2) - x_1 \in \mathcal{B}$

□

Axiomas de Posto *Uma função ρ do conjunto das partes de E no conjunto dos inteiros é a função posto de um matróide sobre E se e somente se para todos $X \subseteq E$, $y, z \in E$*

(R1) $\rho(\emptyset) = 0$

(R2) $\rho(X) \leq \rho(X \cup y) \leq \rho(X) + 1$

(R3) Se $\rho(X \cup y) = \rho(X \cup z) = \rho(X)$ então $\rho(X \cup y \cup z) = \rho(X)$

□

Os axiomas de posto acima são os efetivamente usados no decorrer do texto. Entretanto, algumas propriedades da função posto ficam mais claras quando olhamos para o seguinte sistema de axiomas equivalentes a (R1), (R2) e (R3):

para todos $X, Y \subseteq E$,

(R1') $0 \leq \rho(X) \leq |X|$

(R2') $X \subseteq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

(R3') $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$

Axiomas de Fecho *Uma função $\overline{}$ do conjunto das partes de E no conjunto das partes de E é a função fecho de um matróide sobre E se e somente se para todos $X, Y \subseteq E$ e $x, y \in E$*

(Fe1) $X \subseteq \overline{X}$

(Fe2) $Y \subseteq X \Rightarrow \overline{Y} \subseteq \overline{X}$

(Fe3) $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$

(Fe4) *Se* $y \notin \overline{X}$ *e* $y \in \overline{X \cup x}$ *então* $x \in \overline{X \cup y}$

$\square$

Axiomas de Circuitos *Uma família* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de* E *é a família dos circuitos de um matróide sobre* E *se e somente se*

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$

(C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ *e* $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$

(C3) *Se* $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ *distintos e* $x \in C_1 \cap C_2$ *então existe* $C_3 \in \mathcal{C}$ *tal que* $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$

$\square$

Axiomas de Hiperplanos *Uma família* $\mathcal{H}$ *de subconjuntos de* E *é a família dos hiperplanos de um matróide sobre* E *se e somente se para todos* $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ *distintos*

(H1) $E \notin \mathcal{H}$

(H2) $H_1 \not\subseteq H_2$

(H3) *Se* $x \in E - (H_1 \cup H_2)$ *então existe* $H \in \mathcal{H}$ *tal que* $(H_1 \cap H_2) \cup x \subseteq H$

$\square$

A família dos independentes, das bases, dos circuitos, dos fechados e dos hiperplanos do matróide M serão denotadas por $\mathcal{I}_M$, $\mathcal{B}_M$, $\mathcal{C}_M$, $\mathcal{F}_M$ e $\mathcal{H}_M$, respectivamente.

Podemos associar ao matróide M o conjunto $\mathcal{L}(M)$ ordenado por inclusão cujos elementos são os fechados de M. Na realidade, $\mathcal{L}(M)$ é um reticulado onde para todos $X, Y \in \mathcal{F}_M$,

$$0 = \overline{\emptyset}^M \qquad 1 = E \qquad X \wedge Y = X \cap Y \qquad X \vee Y = \overline{X \cup Y}^M$$

$\mathcal{L}(M)$ será chamado de *reticulado do matróide* M. Lembremos alguns conceitos sobre reticulados. Um reticulado P é *graduado* se admite uma *função altura*, isto é, uma função h de P nos inteiros que satisfaz, para todos $x, y \in P$,

i. $x < y \Rightarrow h(x) < h(y)$

ii. y cobre x, isto é, $x < y$ e não existe $z \in P$ tal que $x < z < y \Rightarrow h(y) = h(x) + 1$

Um reticulado graduado é dito *semimodular* se para todos $x, y \in P$,

$$h(x) + h(y) \geq h(x \vee y) + h(x \wedge y)$$

Note que $\mathcal{L}(M)$ é semimodular com função altura ρ_M. É natural perguntar se existe o caminho inverso, ou melhor, se a partir de um reticulado é possível obter um matróide. Para responder essa pergunta uma definição se faz necessária. Um reticulado é *geométrico* se ele for semimodular, tiver altura finita e se todo elemento puder ser expresso como $\bigvee$ de átomos (isto é, $\bigvee$ de elementos que cobrem 0).

Teorema (Reticulados Geométricos) *Um reticulado finito é geométrico se e somente se ele for isomorfo ao reticulado de um matróide.*

□

A seguir apresentaremos três operações sobre matróides muito úteis nas provas por indução. Todas elas têm por objetivo obter matróides "menores" que preservam de algum modo a estrutura do matróide original.

Teorema (Truncamento) *Seja $1 \leq k \leq \rho M$. Então*

$$\mathcal{I}_{M_k} = \{X \in \mathcal{I}_M : |X| \leq k\}$$

é a família dos independentes de um matróide sobre E, denotado por M_k, truncamento de M ao nível k. Nesse caso,

$$\mathcal{C}_{M_k} = \{C \in \mathcal{C}_M : |C| \leq k+1\} \cup \{I \in \mathcal{I}_M : |I| = k+1\}$$

$$\mathcal{B}_{M_k} = \{I \in \mathcal{I}_M : |I| = k\}$$

$$\rho_{M_k}(X) = \min(\rho_M(X), k), \qquad X \subseteq E$$

$$\overline{X}^{M_k} = \begin{cases} \overline{X}^M, & \text{se } \rho_M(X) < k \\ E, & \text{caso contrário}, \end{cases} \qquad X \subseteq E$$

$$\mathcal{F}_{M_k} = \{X \in \mathcal{F}_M : \rho_M(X) < k\} \cup \{E\}$$

□

Teorema (Restrição) *Seja $A \subseteq E$. Então*

$$\mathcal{I}_{M\backslash A} = \{X - A : X \in \mathcal{I}_M\} = \{X \in \mathcal{I}_M : X \cap A = \emptyset\}$$

é a família dos independentes de um matróide sobre $E - A$, denotado por $M\backslash A$ ou $M(E - A)$, restrição de M a E-A. Nesse caso,

$$\mathcal{C}_{M\backslash A} = \{C \in \mathcal{C}_M : C \cap A = \emptyset\}$$

$$\mathcal{B}_{M\backslash A} = \{B \text{ base de } E - A \text{ em } M\} = \{B - A : B \in \mathcal{B}_M, |B \cap A| \text{ mínimo}\}$$

$$\rho_{M\backslash A}(X) = \rho_M(X), \qquad X \subseteq E - A$$

$$\overline{X}^{M\backslash A} = \overline{X}^{M} - A, \qquad X \subseteq E - A$$

$\mathcal{L}(M\backslash A)$ é isomorfo ao subreticulado $[0, \overline{E - A}^{M}]$ de $\mathcal{L}(M)$.

$\square$

Teorema (Contração) *Seja $A \subseteq E$. Então*

$$\mathcal{I}_{M/A} = \{X \subseteq E - A : \rho_M(A \cup X) = \rho_M(A) + |X|\}$$

é a família dos independentes de um matróide sobre $E - A$, denotado por M/A, contração de M por A. Nesse caso,

$$\mathcal{C}_{M/A} = \text{minimais de}\{C - A : C \in \mathcal{C}_M, C \nsubseteq A\}$$

$$\mathcal{B}_{M/A} = \{B - A : B \cap A \text{ base de } A \text{ em } M\} = \{B - A : B \in \mathcal{B}_M, |B \cap A| \text{ máximo}\}$$

$$\rho_{M/A}(X) = \rho_M(A \cup X) - \rho_M(A), \qquad X \subseteq E - A$$

$$\overline{X}^{M/A} = \overline{X \cup A}^{M} - A, \qquad X \subseteq E - A$$

$\mathcal{L}(M/A)$ é isomorfo ao subreticulado $[\overline{A}^{M}, 1]$ de $\mathcal{L}(M)$.

$\square$

Podemos associar uma certa ordem parcial sobre a família de todos os matróides sobre um conjunto finito fixo. Denote por $\mathcal{M}(E)$ a família de todos os matróides sobre E. Sejam M_1, $M_2 \in \mathcal{M}(E)$. Dizemos que M_1 é *mais livre* (ou *mais fraco*) que M_2 se qualquer um dos itens equivalentes abaixo for satisfeito:

i. Todo independente de M_2 é independente em M_1

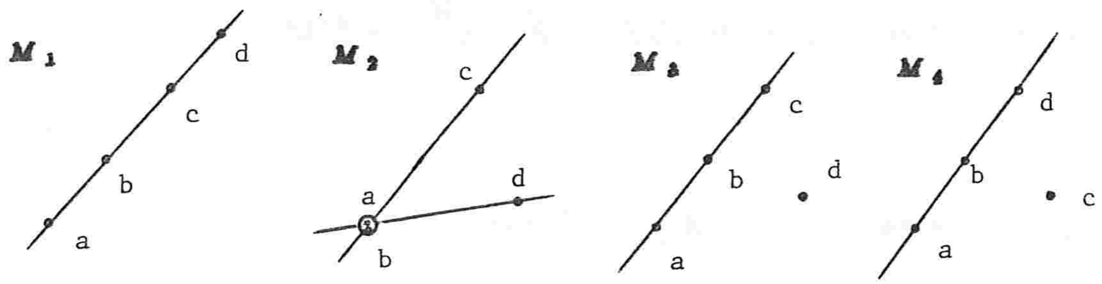
ii. $\rho_{M_1}(X) \geq \rho_{M_2}(X)$ para todo $X \subseteq E$

iii. $\rho_{M_1}(X) \geq \rho_{M_2}(X)$ para todo $X \in \mathcal{F}_{M_1}$

Notação: $M_1 \preceq M_2$.

A relação $\preceq$ é uma relação de ordem parcial sobre $\mathcal{M}(E)$ que chamaremos de *ordem fraca.* O exemplo abaixo mostra que infelismente o conjunto ordenado $(\mathcal{M}(E), \preceq)$ não é um reticulado:

Exemplo 1.1. Considere os seguintes matróides sobre o conjunto $E = \{a, b, c, d\}$



Mostra-se facilmente que M_1, M_2 cobrem M_3 , M_4 e portanto $M_3 \vee M_4$ e $M_1 \wedge M_2$ não existem.

3. EXTENSÕES

Durante o restante do texto, salvo menção explícita em contrário, P é um conjunto finito disjunto de E.

Uma *extensão* do matróide $M(E)$ sobre $E \cup P$ é um matróide $N(E \cup P)$ tal que $N \backslash P = N(E) = M(E)$. Notação: $M(E) \hookrightarrow N(E \cup P)$.

Se $P = \{x\}$, a extensão N é dita *pontual.* Uma maneira óbvia de obter uma extensão pontual de M é definir um matroide N sobre $E \cup x$ cujas bases são da forma $B \cup x$ onde B é base de M. O matróide N assim definido será chamado de *soma de um ponto a* M. Note que nesse caso, $\rho N = \rho M + 1$, e além disso, N é a única extensão de M com essa propriedade. Vamos então considerar apenas extensões pontuais N de M tais que $\rho N = \rho M$. Nesse caso, temos uma caracterização bastante interessante para as extensões pontuais. Dizemos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M$ é um *filtro modular* de M se as seguintes condições estão satisfeitas:

(F1) Se $X \in \mathcal{F}$, $Y \in \mathcal{F}_M$ e $X \subseteq Y$ então $Y \in \mathcal{F}$

(F2) Se $X, Y \in \mathcal{F}$ formam um *par modular* em M, isto é,

$$\rho_M(X) + \rho_M(Y) = \rho_M(X \cup Y) + \rho_M(X \cap Y)$$

então $X \cap Y \in \mathcal{F}$

Não é difícil ver que se N é uma extensão pontual de M sobre $E \cup x$ então $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{F}_M : x \in \overline{X}^N\}$ é um filtro modular de M.

Teorema (Extensão Pontual) *Seja $\mathcal{F}$ um filtro modular de M. Então*

$$\mathcal{F}_N = \{X \cup x : X \in \mathcal{F}\} \cup (\mathcal{F}_M - \mathcal{F}) \cup \{X \cup x : X \in \mathcal{F}_M - \mathcal{F} \text{ e } X \text{ não é coberto por elemento de } \mathcal{F}\}$$

é o conjunto dos fechados de uma extensão pontual N de M sobre $E \cup x$. Além disso, $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{F}_M : x \in \overline{X}^N\}$.

□

Notação: $M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}} N(E \cup x)$ ou N é a extensão pontual de M sobre $E \cup x$ pelo filtro modular $\mathcal{F}$.

Dada uma família $\mathcal{G}$ de fechados de M o *filtro modular de M gerado por $\mathcal{G}$*, denotado por $[\mathcal{G}]_M$ ou apenas $[\mathcal{G}]$ se não houver perigo de ambigüidade, é a intersecção de todos os filtros modulares de M que têm $\mathcal{G}$ como subfamília. Se $\mathcal{G}$ é unitário, isto é, $\mathcal{G} = \{A\}$ para algum A fechado de M, $[\mathcal{G}]$ é dito *filtro principal* gerado por A. É fácil ver nesse caso que $[A] = \{X \in \mathcal{F}_M : A \subseteq X\}$.

Dizemos que uma sequência de filtros modulares de M, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ é *compatível*, ou que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ são *filtros modulares compatíveis* se existe uma extensão N de M sobre $E \cup P$, $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, tal que

$$\begin{tikzcd}
 & M_1(E \cup p_1) \arrow[dr, hook] & \\
M(E) \arrow[ur, hook, "\mathcal{F}_1"] \arrow[r, hook, "\mathcal{F}_2"] \arrow[ddr, hook, "\mathcal{F}_n"'] & M_2(E \cup p_2) \arrow[r, hook] & N(E \cup P) \\
 & \vdots & \\
 & M_n(E \cup p_n) \arrow[uur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Em particular, se $n = 2$, N é chamada *2-extensão* de M.

Definimos agora o *defeito* de um par de fechados X, Y de M como sendo o natural $\rho_M(X) + \rho_M(Y) - \rho_M(X \cup Y) - \rho_M(X \cap Y)$ e denotamos esse número por $def_M(X,Y)$.

4. MORFISMOS FORTES

Sejam M_1, M_2 matróides sobre os conjuntos E_1, E_2 respectivamente, e um novo elemento $0 \notin E_1 \cup E_2$. Para cada $i = 1, 2$ considere M_i' a extensão de M_i sobre $E_i \cup 0$ tal que 0 é laço de M_i'. Um *morfismo forte* é uma função de $E_1 \cup 0$ em $E_2 \cup 0$, denotada por $f : M_1 \to M_2$, cuja imagem contém o conjunto dos fechados de M_2, tal que

(MF1) $f(0) = 0$

(MF2) Para todo fechado X de M_2', $f^{-1}(X)$ é fechado de M_1'

No que se segue, $f : M_1 \to M_2$ já denotará uma função de $E_1 \cup 0 \to E_2 \cup 0$ tal que $f(0) = 0$ e cuja imagem contém o conjunto dos fechados do matróide M_2.

Proposição (Morfismo Forte 1) *Sejam M_1, M_2 matróides sobre os conjuntos E_1, E_2 respectivamente. Dada $f : M_1 \to M_2$, são equivalentes*

i. f é morfismo forte

ii. Para todo $X \subseteq E_1$ temos que $f(\overline{X}^{M_1}) \subseteq \overline{f(X)}^{M_2}$

iii. Para todos $X, Y \subseteq E_1$ tais que $Y \subseteq X$ temos que

$$\rho_{M_2}(f(X)) - \rho_{M_2}(f(Y)) \leq \rho_{M_1}(X) - \rho_{M_1}(Y)$$

$\square$

Para cada fechado X de M_1 definimos a *f-nulidade* de X, denotada por $nl_f(X)$, ou simplesmente *nulidade* de X, denotada por $nl(X)$, caso não haja perigo de ambiguidade, como sendo o inteiro $\rho_{M_1}(X) - \rho_{M_2}(f(X))$. Decorre do item *iii.* da proposição anterior que $nl_f(X) \geq 0$ para todo fechado X de M_1.

Se M_1 e M_2 são matróides sobre o mesmo conjunto tais que $\mathcal{F}_{M_2} \subseteq \mathcal{F}_{M_1}$ então a função identidade $id : M_1 \to M_2$ é claramente um morfismo forte. Nesse caso M_2 é chamado de *quociente* de M_1 cujo *grau* é o inteiro não negativo $\rho M_1 -$

ρM_2, denotado por $gr(M_1 \to M_2)$. Se $gr(M_1 \to M_2) = 1$ então M_2 é chamado *quociente elementar* de M_1.

Proposição (Morfismo Forte 2) *Sejam M_1, M_2 matróides sobre o mesmo conjunto E tais que M_2 é quociente de M_1. Então para todo par de fechados de M_1*

i. $nl(X) \leq gr(M_1 \to M_2)$

ii. $def_{M_1}(X,Y) \geq def_{M_2}(X,Y)$

iii. $nl(X) + nl(Y) = nl(X \cup Y) + nl(X \cap Y) + def_{M_1}(X,Y) - def_{M_2}(X,Y)$

iv. X, Y *é par modular em* $M_1 \Leftrightarrow nl(X) + nl(Y) = nl(X \cup Y) + nl(X \cap Y)$

□

Capítulo I

Ultra-Compatibilidade

Apresentamos aqui uma condição suficiente natural, a ultra-compatibilidade, para que uma sequência finita de filtros modulares de um matróide seja compatível. Além disso, daremos caracterizações simples para a extensão desse matróide determinada por uma sequência de filtros modulares ultra-compatíveis. Como exemplo de tais extensões podemos citar as extensões pontuais e as principais.

O conceito de ultra-compatibilidade é introduzido na sua forma mais natural através da noção de sequência ultra-compatível. Na Seção 1, veremos que o conceito aplica-se à família de filtros e não depende de que particular sequência seus membros são colocados.

A segunda seção é dedicada ao estudo das extensões lisas de um matróide. Cada extensão desse tipo é unicamente determinada por uma sequência de filtros modulares ultra-compatíveis. Uma breve análise da relação existente entre um determinado morfismo forte e a ultra-compatibilidade também será feita no final dessa seção.

1. A ULTRA-COMPATIBILIDADE IMPLICANDO COMPATIBILIDADE

Seja N uma extensão de M e $\mathcal{F}$ um filtro modular de M. Chamaremos de *fecho de $\mathcal{F}$ em N* o seguinte filtro modular de N,

$$[\mathcal{F}]_N = \bigcap\{\mathcal{F}' \text{ filtro modular de } N : \{\overline{X}^N : X \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{F}'\}$$

Proposição 1.1. *Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ filtros modulares de M e $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Considere também o seguinte diagrama de extensões pontuais:*

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_2]_{M_1}} M_2(E \cup p_1 \cup p_2) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_3]_{M_2}} \dots$$
$$\xhookrightarrow{[\mathcal{F}_n]_{M_{n-1}}} M_n(E \cup P)$$

Então são equivalentes:

i. Para cada $i = 2, 3, ..., n$ o conjunto dos elementos minimais por inclusão de $[\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}}$ coincide com o conjunto dos fechos em M_{i-1} dos elementos minimais de $\mathcal{F}_i$

ii. Para cada $i = 2, 3, ..., n$, se $X \in [\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}}$ então $X \cap E \in \mathcal{F}_i$

Prova: Verifiquemos que *i.*$\Rightarrow$*ii.*. Fixemos $i \in \{2, 3, ..., n\}$. Seja $X \in [\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}}$; então existe Y minimal em $[\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}}$ tal que $Y \subseteq X$. Pelo item *i.*, existe $Y_0 \in \mathcal{F}_i$ tal que $\overline{Y_0}^{M_{i-1}} = Y$. Logo $Y_0 \subseteq Y \cap E \subseteq X \cap E$, donde $X \cap E \in \mathcal{F}_i$.

Mostremos agora que *ii.*$\Rightarrow$*i.*. Fixemos $i \in \{2, 3, ..., n\}$. Na realidade, podemos substituir *ii.* pela seguinte condição:

$$\text{para todo } X \in \mathcal{F}_{M_{i-1}}, \quad X \in [\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}} \Leftrightarrow X \cap E \in \mathcal{F}_i$$

já que a outra implicação é trivial. Seja X minimal em $[\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}}$. Por *ii.*, $X \cap E \in \mathcal{F}_i$. Tome Y minimal em $\mathcal{F}_i$ tal que $Y \subseteq X \cap E$. Então $\overline{Y}^{M_{i-1}} \subseteq \overline{X \cap E}^{M_{i-1}} \subseteq X$ e pela minimalidade de X resulta que $\overline{Y}^{M_{i-1}} = \overline{X \cap E}^{M_{i-1}} = X$ e $X \cap E$ é minimal em $\mathcal{F}_i$. De outro lado, seja Y minimal em $\mathcal{F}_i$. Temos que $\overline{Y}^{M_{i-1}} \in [\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}}$. Tome X minimal em $[\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}}$ tal que $X \subseteq \overline{Y}^{M_{i-1}}$. Por *ii.*, $X \cap E \in \mathcal{F}_i$ e como

$X \cap E \subseteq \overline{Y}^{M_{i-1}} \cap E = Y$, pela minimalidade de Y, $X \cap E = Y$. Logo $\overline{Y}^{M_{i-1}} = \overline{X \cap E}^{M_{i-1}} \subseteq X \subseteq \overline{Y}^{M_{i-1}}$ e portanto $X = \overline{Y}^{M_{i-1}}$

□

Dada uma sequência $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ de filtros modulares de M, diremos que ela é uma *sequência ultra-compatível* de M se uma das condições equivalentes da Proposição 1.1. é satisfeita.

Note que se $n = 1$ a sequência é trivialmente ultra-compatível. Combinando essa observação e o próximo resultado, chegamos à conclusão de que toda sequência de filtros principais de um matróide é ultra-compatível.

Proposição 1.2. *Seja $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ uma sequência ultra-compatível de M e $\mathcal{F}$ um filtro principal. Então $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n, \mathcal{F}$ é uma sequência ultra-compatível de M.*

Prova: Considere o seguinte diagrama de extensões pontuais:

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_2]_{M_1}} \cdots$$
$$\xhookrightarrow{[\mathcal{F}_n]_{M_{n-1}}} M_n(E \cup \{p_1, p_2, ..., p_n\}) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}]_{M_n}} N(E \cup P)$$

onde $P = \{p_1, p_2, ..., p_n, p\}$. Como $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ é ultra-compatível, para que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n, \mathcal{F}$ também seja, basta mostrarmos que se $X \in [\mathcal{F}]_{M_n}$ então $X \cap E \in \mathcal{F}$. Seja $X \in [\mathcal{F}]_{M_n}$. Da hipótese, $\mathcal{F}$ é filtro principal, logo existe $A \subseteq E$ tal que $\mathcal{F} = \{Y \in \mathcal{F}_M : A \subseteq Y\}$. Portanto $A \subseteq X$, donde $A \subseteq X \cap E \in \mathcal{F}_M$, o que mostra que $X \cap E \in \mathcal{F}$.

□

A Proposição 1.4. a seguir nos fornece uma caracterização mais natural para a ultra-compatibilidade. Antes de enunciá-la, um pequeno Lema se faz necessário.

Lema 1.3. *Sejam X, Y fechados de M e N a extensão pontual de M sobre $E \cup p$ pelo filtro modular $\mathcal{F}$. Então,*

$$def_N(\overline{X}^N, \overline{Y}^N) = \begin{cases} def_M(X,Y) - 1, & \text{se } X, Y \in \mathcal{F} \text{ e } X \cap Y \notin \mathcal{F} \\ def_M(X,Y), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Prova: Considere inicialmente o caso em que $X, Y \in \mathcal{F}$ e $X \cap Y \notin \mathcal{F}$. Assim, $X \cup Y \in \mathcal{F}$ e

$$\rho_N(\overline{X}^N) = \rho_M(X)$$
$$\rho_N(\overline{Y}^N) = \rho_M(Y)$$
$$\rho_N(\overline{X}^N \cup \overline{Y}^N) = \rho_N(\overline{X \cup Y}^N) = \rho_M(X \cup Y)$$
$$\rho_N(\overline{X}^N \cap \overline{Y}^N) = \rho_N((X \cup p) \cap (Y \cup p)) = \rho_N((X \cap Y) \cup p) = \rho_M(X \cap Y) + 1$$

Logo, $def_N(\overline{X}^N, \overline{Y}^N) = def_M(X,Y) - 1$.

De outro lado, no caso complementar, é possível provar de maneira semelhante que $def_N(\overline{X}^N, \overline{Y}^N) = def_M(X,Y)$.

□

Proposição 1.4. *Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ filtros modulares de M. São equivalentes:*

i. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ é sequência ultra-compatível

ii. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_{n-1}$ é sequência ultra-compatível e para cada $I \subseteq \{1, 2, ..., n-1\}$, se $X,Y \in (\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i) \cap \mathcal{F}_n$ com $def_M(X,Y) = |I|$ então existe $k \in I \cup n$ tal que $X \cap Y \in \mathcal{F}_k$

Prova: Considere o seguinte diagrama de extensões pontuais:

$$M(E) = M_0(E) \xrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1(E \cup p_1) \xrightarrow{[\mathcal{F}_2]_{M_1}} M_2(E \cup p_1 \cup p_2)$$
$$\xrightarrow{[\mathcal{F}_3]_{M_2}} \dots \xrightarrow{[\mathcal{F}_n]_{M_{n-1}}} M_n(E \cup P)$$

onde $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$.

Verifiquemos que $i. \Rightarrow ii.$. Seja $I \subseteq \{1, 2, ..., n-1\}$ tal que existem X, $Y \in (\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i) \cap \mathcal{F}_n$ com $def_M(X,Y) = |I|$. Se existe $k \in I$ tal que $X \cap Y \in \mathcal{F}_k$, não temos nada a provar. Suponha então que para todo $k \in I$, $X \cap Y \notin \mathcal{F}_k$. Como $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_{n-1}$ são filtros modulares ultra-compatíveis, temos que $\overline{X \cap Y}^{M_{k-1}} \notin [\mathcal{F}_k]_{M_{k-1}}$ para $k \in I$. Usando o Lema anterior $|I|$ vezes obtemos $def_M(X,Y) \geq def_{M_{n-1}}(\overline{X}^{M_{n-1}}, \overline{Y}^{M_{n-1}}) + |I|$. Logo $def_{M_{n-1}}(\overline{X}^{M_{n-1}}, \overline{Y}^{M_{n-1}}) = 0$, o que significa que $\overline{X}^{M_{n-1}}, \overline{Y}^{M_{n-1}}$ é um par modular em M_{n-1}. Como $\overline{X}^{M_{n-1}}, \overline{Y}^{M_{n-1}} \in [\mathcal{F}_n]_{M_{n-1}}$, temos que $\overline{X}^{M_{n-1}} \cap \overline{Y}^{M_{n-1}} \in [\mathcal{F}_n]_{M_{n-1}}$, e, usando a hipótese de ultra-compatibilidade temos que $X \cap Y \in \mathcal{F}_n$.

Verifiquemos agora que $ii. \Rightarrow i.$. Suponha por absurdo que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ não é ultra-compatível. Como $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_{n-1}$ é ultra-compatível por $ii.$, essa suposição implica na existência de $X, Y \in \mathcal{F}_n$ com $X \cap Y \notin \mathcal{F}_n$, $def_M(X,Y) = d$ e $\overline{X}^{M_{n-1}}$, $\overline{Y}^{M_{n-1}}$ par modular em M_{n-1}, isto é, $def_{M_{n-1}}(\overline{X}^{M_{n-1}}, \overline{Y}^{M_{n-1}}) = 0$. Usando o Lema 1.3., conclui-se que existe $I \subseteq \{1,2,...,n-1\}$ tal que $|I| = d$, $X, Y \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ e $X \cap Y \notin \mathcal{F}_k$ para $k \in I$ o que contradiz *ii.*. Logo, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ é uma sequência ultra-compatível de M.

□

Note que *ii.* é equivalente a:

ii'. Para cada $I \subseteq \{1,2,...,n-1\}$, se $X, Y \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ e $def_M(X,Y) = |I| - 1$ então existe $k \in I$ tal que $X \cap Y \in \mathcal{F}_k$

que não depende da indexação dos filtros $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$.

Corolário 1.5. *Seja W uma família de filtros modulares de M. São equivalentes:*

i. *Existe uma indexação $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ de W tal que essa sequência é ultra-compatível*

ii. *Para toda indexação $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ de W essa sequência é ultra-compatível*

□

Podemos então dizer que os filtros modulares $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ são ultra-compatíveis se a sequência $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ é ultra-compatível. O corolário anterior nos garante que esse conceito é bem definido. Note bem que o mesmo filtro pode ocorrer repetidas vezes na família. A Proposição anterior permite obter, de uma maneira mais natural, o seguinte resultado de Cordovil [Co2]:

Corolário 1.6. *Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ conjuntos de fechados de M e $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. São equivalentes:*

i. *$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ são filtros modulares ultra-compatíveis de M*

ii. *Considerando a seguinte função ∂ sobre $\mathcal{F}_M$ no conjunto das partes de P definida por*

$$\partial(X) = \{p_i : X \in \mathcal{F}_i\}$$

para todos $X, Y \in \mathcal{F}_M$ temos

(a) *Se $X \subseteq Y$ então $\partial(X) \subseteq \partial(Y)$*

$$(b)\ def_M(X,Y) \geq |(\partial(X) \cap \partial(Y)) - \partial(X \cap Y)|$$

Prova: Mostremos que *i.*$\Rightarrow$*ii.*. O item (a) é trivial já que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ são filtros modulares. Suponhamos que existem $X, Y \in \mathcal{F}_M$ tais que $def_M(X,Y) = d < |(\partial(X) \cap \partial(Y)) - \partial(X \cap Y)|$. Então existe $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ tais que $X, Y \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ e $X \cap Y \notin \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ o que contraria a ultra-compatibilidade de *i.*. Portanto temos (b).

Verifiquemos que *ii.*$\Rightarrow$*i.*. Inicialmente, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ são filtros modulares de M pois *ii.*(a) implica que para todos $X, Y \in \mathcal{F}_M$, se $X \subseteq Y$ e $X \in \mathcal{F}_i$ então $Y \in \mathcal{F}_i$, e *ii.*(b) implica que para todo par modular X,Y de M, se $X, Y \in \mathcal{F}_i$ então $X \cap Y \in \mathcal{F}_i$. Sejam $X, Y \in \mathcal{F}_M$ e $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ tais que $def_M(X,Y) = |I| - 1$ e $X,Y \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Então de *ii.*(b) concluímos que $X \cap Y \in \mathcal{F}_k$ para algum $k \in I$. Logo, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ são filtros modulares ultra-compatíveis de M.

□

Corolário 1.7. *Seja $\mathcal{F}$ um filtro modular de M. Uma sequência $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ de n cópias de $\mathcal{F}$ é ultra-compatível se e somente se $\mathcal{F}$ é principal ou $n \leq$ $\min\{def_M(X,Y) : X,Y \in \mathcal{F}, X \cap Y \notin \mathcal{F}\}$.*

□

O restante da seção é dedicado a determinar a relação existente entre a ultra-compatibilidade e a compatibilidade de filtros modulares. O próximo Teorema, em particular, servirá de inspiração para a definição de extensão lisa, tópico da próxima seção.

Teorema 1.8. *Seja N uma extensão de M sobre $E \cup P$ tal que $|P| = n$. São equivalentes:*

i. *Existe uma indexação $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ tal que para $i = 2, 3, ..., n$ temos para todo $X \subseteq E \cup \{p_1, p_2, ..., p_{i-1}\}$:*

$$p_i \in \overline{X}^N \Leftrightarrow p_i \in \overline{\overline{X}^N \cap E}^N$$

ii. *Para todo $X \subseteq E \cup P$ temos $\overline{X}^N = \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup X$*

Prova: A implicação *ii.*$\Rightarrow$*i.* é trivial. Mostremos que *i.*$\Rightarrow$*ii.* por indução sobre n. A base da indução é dada por $n = 0$. Nesse caso $N = M$ e *ii.* é imediato. Suponha que $n > 0$ e sejam $p = p_n$, $N' = N \backslash p$ e $X \subseteq E \cup P$. Basta então mostrarmos que $\overline{X}^N \subseteq \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup X$ para verificarmos o item *ii.*, já que a inclusão contrária é clara. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $p \notin X$

Por hipótese de indução temos que $\overline{X}^{N'} = \overline{\overline{X}^{N'} \cap E}^{N'} \cup X$. Se $p \notin \overline{X}^N$ então

$$\overline{X}^N = \overline{X}^{N'} = \overline{\overline{X}^{N'} \cap E}^{N'} \cup X \subseteq \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup X$$

Por outro lado, se $p \in \overline{X}^N$ então

$$\overline{X}^N = \overline{X}^{N'} \cup p = \overline{\overline{X}^{N'} \cap E}^{N'} \cup X \cup p \subseteq \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup X$$

Caso 2: $p \in X$

Por hipótese de indução temos que

$$\overline{X-p}^{N'} = \overline{\overline{X-p}^{N'} \cap E}^{N'} \cup (X-p) \subseteq \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup X$$

Se $p \in \overline{X-p}^N$ então

$$\overline{X}^N = \overline{X-p}^N \subseteq \overline{X-p}^{N'} \cup p \subseteq \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup X$$

Suponha então que $p \notin \overline{X-p}^N$. Se $\overline{X}^N - \overline{X-p}^N = p$ então $\overline{X}^N \subseteq \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup X$ pois $p \in X$. Podemos supor então que existe $q \neq p$ tal que $p, q \in \overline{X}^N - \overline{X-p}^N$. Logo $p \in \overline{(X-p) \cup q}^N$ e $\overline{X}^N = \overline{(X-p) \cup q}^N$. Por hipótese, $p \in \overline{\overline{(X-p) \cup q}^N \cap E}^N = \overline{\overline{X}^N \cap E}^N$, donde

$$\overline{X}^N = \overline{(\overline{X}^N \cap E) \cup (X-p)}^N = \overline{(\overline{X}^N \cap E) \cup (X-p)}^{N'} \cup p$$

Portanto usando a hipótese de indução

$$\begin{aligned}\overline{X}^N &= \overline{\overline{(\overline{X}^N \cap E) \cup (X-p)}^{N'} \cap E}^{N'} \cup (\overline{X}^N \cap E) \cup (X-p) \cup p \\ &\subseteq \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup X\end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.9. *Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ filtros modulares ultra-compatíveis de M e considere o respectivo diagrama de extensões pontuais:*

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_2]_{M_1}} \ldots \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_n]_{M_{n-1}}} M_n(E \cup P)$$

onde $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Então para todo fechado X de M temos que

$$\overline{X}^{M_n} = X \cup \{p_i \in P : X \in \mathcal{F}_i\}$$

Prova: Seja X fechado de M. A inclusão $\overline{X}^{M_n} \supseteq X \cup \{p_i \in P : X \in \mathcal{F}_i\}$ é facilmente verificada. Mostremos então que vale a inclusão contrária. Sabemos que $X = \overline{X}^{M} = \overline{X}^{M_n} - \{p_1, p_2, ..., p_n\} = \overline{X}^{M_n} \cap E$. Seja $x \in \overline{X}^{M_n}$. Se $x \in E$ é claro que $x \in X$. Suponha então que $x = p_i$ para algum $i = 1, 2, ..., n$. Então $\overline{X}^{M_{i-1}} \in [\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}}$. Pela ultra-compatibilidade dos filtros, $\overline{X}^{M_{i-1}} \cap E \in \mathcal{F}_i$. Mas

$$\overline{X}^{M_{i-1}} \cap E = (\overline{X}^{M_n} \cap (E \cup \{p_1, p_2, ..., p_{i-1}\})) \cap E = \overline{X}^{M_n} \cap E = X$$

Logo $X \in \mathcal{F}_i$, donde $x \in \{p_i \in P : X \in \mathcal{F}_i\}$.

□

Proposição 1.10. *Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ filtros modulares ultra-compatíveis de M e considere o respectivo diagrama de extensões pontuais*

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_2]_{M_1}} \ldots \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_n]_{M_{n-1}}} M_n(E \cup P)$$

onde $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Considere uma outra indexação $\mathcal{F}_{i_1}, \mathcal{F}_{i_2}, ..., \mathcal{F}_{i_n}$ dos filtros acima e o respectivo diagrama de extensões pontuais

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_{i_1}} N_1(E \cup p_{i_1}) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_{i_2}]_{N_1}} \ldots \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_{i_n}]_{N_{n-1}}} N_n(E \cup P)$$

Então $M_n = N_n$.

Prova: Usando a ultra-compatibilidade de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$, mostremos que M_n satisfaz a condição i. do Teorema 1.7.. Tome a indexação $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ e fixemos $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Considere $X \subseteq E \cup \{p_1, p_2, ..., p_{i-1}\}$. Se $p_i \in \overline{\overline{X}^{M_n} \cap E}^{M_n}$ é claro que $p_i \in \overline{X}^{M_n}$ já que $\overline{\overline{X}^{M_n} \cap E}^{M_n} \subseteq \overline{X}^{M_n}$. Suponha por outro lado que $p_i \in \overline{X}^{M_n}$. Portanto $\overline{X}^{M_{i-1}} \in [\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}}$ e pela ultra-compatibilidade dos filtros, $\overline{X}^{M_{i-1}} \cap E \in \mathcal{F}_i$. Logo

$$p_i \in \overline{\overline{X}^{M_{i-1}} \cap E}^{M_n} \subseteq \overline{\overline{X}^{M_n} \cap E}^{M_n}$$

Com isso acabamos de mostrar o item *i.* do Teorema anterior e portanto vale o item *ii.*, isto é, para todo $X \subseteq E \cup P$ temos $\overline{X}^{M_n} = \overline{\overline{X}^{M_n} \cap E}^{M_n} \cup X$. Analogamente prova-se que para todo $X \subseteq E \cup P$ temos $\overline{X}^{N_n} = \overline{\overline{X}^{N_n} \cap E}^{N_n} \cup X$, já que a ultra-compatibilidade independe da indexação dos filtros. Mas pelo Lema anterior concluímos que para todo $X \subseteq E \cup P$, $\overline{\overline{X}^{N_n} \cap E}^{N_n} = \overline{\overline{X}^{M_n} \cap E}^{M_n}$ e portanto $\overline{X}^{N_n} = \overline{X}^{M_n}$, donde $M_n = N_n$.

□

Como consequência imediata dessa Proposição temos finalmente que:

Corolário 1.11. *Se $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ são filtros modulares ultra-compatíveis de M então $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ são filtros modulares compatíveis de M.*

□

O próximo exemplo mostra que a ultra-compatibilidade não é condição necessária para a compatibilidade.

Exemplo 1.12. Seja $E = \{1, 2, ..., 9\}$ e $M(E) = \mathcal{L}_4(E)$. Considere os seguintes filtros modulares de M:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = [123, 456, 789]$$

$$\mathcal{F}_3 = [123, 456]$$

e o seguinte diagrama de extensões pontuais:

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_3} M_1(E \cup p_3) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_1]_{M_1}} M_2(E \cup p_1 \cup p_3) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_2]_{M_2}} M_3(E \cup p_1 \cup p_2 \cup p_3)$$

M_3

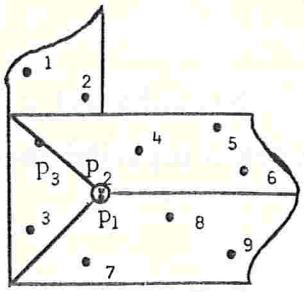


Figura 1

M_3'

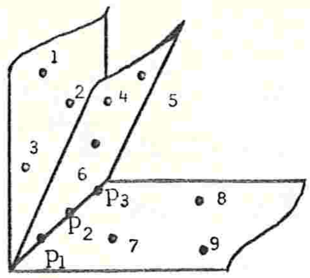


Figura 2

Veja Figura 1.
É fácil ver que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ são compatíveis. Considere agora o seguinte diagrama de extensões pontuais:

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1'(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_2]_{M_1'}} M_2'(E \cup p_1 \cup p_2) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_3]_{M_2'}} M_3'(E \cup p_1 \cup p_2 \cup p_3)$$

Veja Figura 2.
Como $M_3 \neq M_3'$ temos que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ não são ultra-compatíveis.

2. EXTENSÕES LISAS

Seja N uma extensão de M sobre $E \cup P$. Diremos que N é uma *extensão lisa* de M se para todo $X \subseteq E \cup P$ temos $\overline{X}^N = \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup X$.

Proposição 2.1. *Existe uma bijeção entre a família das sequências ultra-compatíveis de filtros modulares de M e a família das extensões lisas de M.*

Prova: Considere a função que leva $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ filtros modulares ultra-compatíveis de M na extensão N de M sobre $E \cup P$, $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, dada pelo diagrama abaixo:

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_2]_{M_1}} \dots \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_n]_{M_{n-1}}} M_n(E \cup P) = N(E \cup P) \quad (*)$$

A função está bem definida pois N independe da indexação dos filtros e N é realmente uma extensão lisa de M. Suponhamos que existam duas sequências, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ e $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, ..., \mathcal{G}_n$, de filtros modulares ultra-compatíveis de M levadas pela função acima à mesma extensão lisa N de M. Mas então para cada $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathcal{F}_i = \{X \in \mathcal{F}_M : p_i \in \overline{X}^N\} = \mathcal{G}_i$$

o que mostra que a função é injetora. Sejam N uma extensão lisa de M sobre $E \cup \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ e os filtros modulares $\mathcal{F}_i = \{X \in \mathcal{F}_M : p_i \in \overline{X}^N\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Provemos que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ são ultra-compatíveis. Construa um diagrama como em (*) e seja $X \in [\mathcal{F}_i]_{M_{i-1}}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixo. Então $p_i \in \overline{X}^N$ e portanto $p_i \in \overline{\overline{X}^N \cap E}^N$, logo, pela definição dos $\mathcal{F}_i$'s, $\overline{X}^N \cap E \in \mathcal{F}_i$. Mas $\overline{X}^N \cap E = \overline{X}^{M_{i-1}} \cap E$. Mostramos assim que a função definida acima é também sobrejetora, estabelecendo-se a bijeção mencionada.

□

Passemos a caracterizar as extensões lisas.

Teorema 2.2. *Seja N uma extensão de M sobre $E \cup P$. Então são equivalentes:*

i. N é uma extensão lisa de M

ii. Para todo $X \subseteq E \cup P$, $\rho_N(X) = \min_{Z \subseteq E}\{\rho_M(Z) + |X - \overline{Z}^N|\}$

iii. Para todo $X \subseteq E \cup P$, $\rho_N(X) = \min_{X \cap E \subseteq Z \subseteq E}\{\rho_M(Z) + |X - \overline{Z}^N|\}$

iv. Para todo $X \subseteq E \cup P$, $N(\overline{X}^N) = N(\overline{\overline{X}^N \cap E}^N) \oplus \mathcal{L}(X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N)$ onde $\mathcal{L}(X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N)$ é o matróide livre sobre $X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N$

Prova: Seguiremos o seguinte roteiro de verificações:

$$i. \Leftrightarrow iv. \Rightarrow ii. \Rightarrow iii. \Rightarrow iv.$$

A implicação $iv. \Rightarrow i.$ é trivial.

Mostremos que $i. \Rightarrow iv.$. Sejam $X \subseteq E \cup P$ e $Y \subseteq X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N$. Basta então provarmos que $\overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup Y$ é fechado em N. Inicialmente temos que

$$\overline{\overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup Y}^N \cap E \subseteq \overline{X}^N \cap E \subseteq \overline{\overline{X}^N \cap E}^N$$

Logo

$$\overline{\overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup Y}^N = \overline{\overline{\overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup Y}^N \cap E}^N \cup (\overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup Y)$$
$$\subseteq \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup Y$$

Portanto $\overline{\overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup Y}^N = \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cup Y$ já que a outra inclusão é trivial.

Passemos a verificar que *iv.* $\Rightarrow$ *ii.*. Sejam $X \subseteq E \cup P$ e $Z \subseteq E$. Temos então que:

$$\rho_N(X) \leq \rho_N(\overline{Z}^N) + \rho_N(X - \overline{Z}^N) \leq \rho_M(Z) + |X - \overline{Z}^N|$$

Por *iv.*, tomando $Z = \overline{X}^N \cap E$ obtemos

$$\rho_N(X) = \rho_N(\overline{X}^N) = \rho_M(\overline{X}^N \cap E) + |X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N|$$

Mostremos agora que *ii.* $\Rightarrow$ *iii.*. Sejam $X \subseteq E \cup P$ e $Z \subseteq E$ tais que $\rho_N(X) = \rho_M(Z) + |X - \overline{Z}^N|$. Considere $Z_1 = Z \cup (X \cap E)$. Nesse caso $\rho_M(Z_1) \leq \rho_M(Z) + |X \cap E - Z|$ e portanto

$$\rho_M(Z_1) + |X - \overline{Z_1}^N| \leq \rho_M(Z) + |X \cap E - \overline{Z}^N| + |X \cap P - \overline{Z}^N|$$
$$= \rho_M(Z) + |X - \overline{Z}^N|$$

Logo pela minimalidade de *ii.*, temos na realidade igualdade.

Finalmente verifiquemos que *iii.* $\Rightarrow$ *iv.*. Seja $X \subseteq E \cup P$ e considere

$$[X] = \{Z \in \mathcal{F}_M : \rho_N(X) = \rho_M(Z) + |X - \overline{Z}^N|\}$$

Com essa definição reescrevemos

$$\overline{X}^N = \{x \in E \cup P : \text{existe } Z \in [X] \text{ com } x \in \overline{Z}^N\}$$

e portanto $\bigcup_{Z \in [X]} Z = \overline{X}^N \cap E$ e $X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N = \overline{X}^N - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N$. Logo

$$\rho_N(X) = \rho_N(\overline{X}^N)$$
$$= \rho_M(\overline{X}^N \cap E) + |\overline{X}^N - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N|$$
$$= \rho_N(\overline{\overline{X}^N \cap E}^N) + |\rho_N(\overline{X}^N) - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N| =$$
$$= \rho_N(\overline{\overline{X}^N \cap E}^N) + |X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N|$$

$\sqcap$

Corolário 2.3. *Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos de E e $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ os filtros principais associados, isto é, $\mathcal{F}_i = \{X \in \mathcal{F}_M : A_i \subseteq X\}$ para $i = 1, 2, ..., n$. Considere a extensão lisa N de M sobre $E \cup P$, $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, determinada por $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$. Então para todo $X \subseteq E \cup P$*

$$\rho_N(X) = \min_{X \cap E \subseteq Y \subseteq X} \{\rho_M((Y \cap E) \cup \{\bigcup A_i : p_i \in Y, 1 \leq i \leq n\}) + |X - Y|\}$$

Prova: Tomemos $X \subseteq E \cup P$.Pelo item *iv.* do Teorema 2.2. temos

$$\rho_N(X) = \rho_M(\overline{X}^N \cap E) + |X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N| \qquad (*)$$

Sejam Y, Z tais que $X \cap E \subseteq Y \subseteq X$ e $Z = (X \cap E) \cup \{\bigcup A_i : p_i \in Y, 1 \leq i \leq n\} = (Y \cap E) \cup \{\bigcup A_i : p_i \in Y, 1 \leq i \leq n\}$. Temos então que $|X - Y| \geq |X - \overline{Z}^N|$ e do item *ii.* do Teorema anterior, $\rho_M(Z) + |X - \overline{Z}^N| \geq \rho_N(X)$. Combinando esses dois resultados obtemos:

$$\rho_M((Y \cap E) \cup \{\bigcup A_i : p_i \in Y, 1 \leq i \leq n\}) + |X - Y| = \rho_M(Z) + |X - Y| \geq \rho_N(X)$$

Tome agora $Y = \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cap X$. Sabemos que $\rho_N(X) \leq \rho_M(Z) + |X - Y|$. Por outro lado, de $(*)$

$$\rho_N(X) = \rho_M(\overline{X}^N \cap E) + |X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N| \geq \rho_M(Z) + |X - Y|$$

pois

(a) $Z \subseteq \overline{X}^N \cap E$:

Seja $x \in Z$. Se $x \in X \cap E$ é claro que $x \in \overline{X}^N \cap E$. Tome agora $A_i \subseteq Z$. Então $p_i \in Y$, donde $p_i \in \overline{\overline{X}^N \cap E}^N$ e portanto $A_i \subseteq \overline{X}^N \cap E$.

(b) $X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N = X - Y$:

A inclusão $\subseteq$ é trivial. Seja $x \in X - Y$. Então $x \in X$ e $x \notin \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cap X$, o que implica que $x \in X$ e $x \notin \overline{\overline{X}^N \cap E}^N$, donde $x \in X - \overline{\overline{X}^N \cap E}^N$. Logo temos a igualdade.

Concluindo, $\rho_N(X) = \rho_M(Z) + |X - Y|$ para $Y = \overline{\overline{X}^N \cap E}^N \cap X$ e $Z = (X \cap E) \cup \{\bigcup A_i : p_i \in Y, 1 \leq i \leq n\}$.

$\square$

Dada uma extensão N de M e uma sequência ultra-compatível de filtros modulares de N, mostraremos uma maneira de recuperar filtros modulares compatíveis de M. Estabelecemos também condições suficientes sob as quais esse método fornece filtros modulares ultra-compatíveis de M.

Proposição 2.4. *Seja N uma extensão de M sobre $E \cup P$. Considere a aplicação $\sigma : \mathcal{F}_M \to \mathcal{F}_N$ tal que $\sigma(X) = \overline{X}^N$ para todo $X \in \mathcal{F}_M$. Temos então que:*

i. σ é morfismo forte de reticulados

ii. Se $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ são filtros modulares ultra-compatíveis de N então $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_1), \sigma^{-1}(\mathcal{F}_2), ..., \sigma^{-1}(\mathcal{F}_n)$ são filtros modulares compatíveis de M onde

$$\sigma^{-1}(\mathcal{F}_i) = \{X \in \mathcal{F}_M : \overline{X}^N \in \mathcal{F}_i\} \quad i = 1, 2, ..., n$$

Prova: O item *i.* é evidente pois $\overline{X \cup Y}^N = \overline{\overline{X}^N \cup \overline{Y}^N}^N$ e $\overline{\overline{X}^M}^N = \overline{X}^N$. Passemos a verificar o item *ii.*. Mostremos inicialmente que para cada $i = 1, 2, ..., n$, $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_i)$ é um filtro modular. Fixemos um valor de i. Sejam $X \in \sigma^{-1}(\mathcal{F}_i)$ e $Y \in \mathcal{F}_M$ tais que $X \subseteq Y$. É claro que $\overline{X}^N \subseteq \overline{Y}^N$, logo $\overline{Y}^N \in \mathcal{F}_i$, donde $Y \in \sigma^{-1}(\mathcal{F}_i)$. Tomemos agora $X, Y \in \sigma^{-1}(\mathcal{F}_i)$ par modular de M. Então

$$\begin{aligned} \rho_N(\overline{X}^N) + \rho_N(\overline{Y}^N) &= \rho_N(X) + \rho_N(Y) = \rho_M(X) + \rho_M(Y) \\ &= \rho_M(X \cup Y) + \rho_M(X \cap Y) \\ &\leq \rho_N(\overline{X}^N \cup \overline{Y}^N) + \rho_N(\overline{X}^N \cap \overline{Y}^N) \end{aligned}$$

donde $\overline{X}^N, \overline{Y}^N$ par modular em N. Logo $\overline{X}^N \cap \overline{Y}^N \in \mathcal{F}_i$. Mas então $\overline{X \cap Y}^N = \overline{X}^N \cap \overline{Y}^N$ e portanto $X \cap Y \in \sigma^{-1}(\mathcal{F}_i)$. Falta ainda verificarmos a compatibilidade dos filtros $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_1), \sigma^{-1}(\mathcal{F}_2), ..., \sigma^{-1}(\mathcal{F}_n)$. Seja N' a extensão lisa de N sobre $E \cup P \cup F$, onde $F \cap (E \cup P) = \emptyset$ e $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$, determinada pelos filtros modulares ultra-compatíveis $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$. Portanto, $\mathcal{F}_i = \{X \in \mathcal{F}_N : f_i \in \overline{X}^{N'}\}$ para $i = 1, 2, ..., n$. Seja $M'(E \cup F) = N'(E \cup F)$ e $M_i = M'(E \cup f_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. É claro que $M'(E) = N(E)$ e para cada $i = 1, 2, ..., n$, se $X \in \mathcal{F}_M$ e $f_i \in \overline{X}^{M_i}$ então $\overline{X}^N \in \mathcal{F}_i$ e portanto $X \in \sigma^{-1}(\mathcal{F}_i)$. Logo $M(E) \xrightarrow{\sigma^{-1}(\mathcal{F}_i)} M_i(E \cup f_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. □

Na Proposição anterior, $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_1), \sigma^{-1}(\mathcal{F}_2), ..., \sigma^{-1}(\mathcal{F}_n)$ não são necessariamente ultra-compatíveis como mostra o exemplo seguinte:

Exemplo 2.5. Sejam $E = \{a,b,c,d,e\}$, $M(E) = \mathcal{L}_4(E)$ e $M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}} N(E \cup f)$ onde $\mathcal{F} = \{abc, cde, E\}$ filtro modular de M. Considere agora $\mathcal{F}_1 = [de, cf]_N$ e $\mathcal{F}_2 = [ab, cf]_N$ filtros modulares de N. Explicitando,

$$\mathcal{F}_1 = \{de, cf, decf, dea, deb, cfab, E \cup f\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{ab, cf, abcf, abe, abd, cfde, E \cup f\}$$

Então $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_1) = [de, abc]_M$ e $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_2) = [ab, dec]_M$ filtros modulares de M, ou

$$\sigma^{-1}(\mathcal{F}_1) = \{de, abc, dec, dea, deb, E\}$$

$$\sigma^{-1}(\mathcal{F}_2) = \{ab, dec, abc, abe, abd, E\}$$

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ são ultra-compatíveis pois $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{cf, abcf, decf, E \cup f\}$ e se $X, Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ então $X \cap Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Mas $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_1), \sigma^{-1}(\mathcal{F}_2)$ não são ultra-compatíveis pois abc, $cde \in \sigma^{-1}(\mathcal{F}_1) \cap \sigma^{-1}(\mathcal{F}_2)$, $def_M(abc, cde) = 1$ e $abc \cap cde = c \notin \sigma^{-1}(\mathcal{F}_1) \cap \sigma^{-1}(\mathcal{F}_2)$.

A Proposição seguinte nos fornece uma condição suficiente para que $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_1), \sigma^{-1}(\mathcal{F}_2), ..., \sigma^{-1}(\mathcal{F}_n)$ sejam filtros modulares ultra-compatíveis, sob as hipóteses da Proposição 2.4..

Proposição 2.6. *Nas mesmas condições da Proposição 2.4.. Se para cada $i = 1, 2, ..., n$, $X \in \mathcal{F}_i$ implica que $X \cap E \in \sigma^{-1}(\mathcal{F}_i)$ então $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_1), \sigma^{-1}(\mathcal{F}_2), ...,$ $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_n)$ são filtros modulares ultra-compatíveis. Nesse caso, o seguinte diagrama de extensões é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} M(E) & \hookrightarrow & N(E \cup P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M'(E \cup F) & \hookrightarrow & N'(E \cup P \cup F) \end{array}$$

onde $N(E \cup P) \hookrightarrow N'(E \cup P \cup F)$ é a extensão lisa determinada por $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ e $M'(E \cup F) = N'(E \cup F)$.

Prova: Basta mostrarmos que $M(E) \hookrightarrow M'(E \cup F)$ é a extensão lisa de M determinada pelos filtros modulares ultra-compatíveis $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_1), \sigma^{-1}(\mathcal{F}_2), ..., \sigma^{-1}(\mathcal{F}_n)$ o que equivale a mostrar que para todo $X \in E \cup F$, $\overline{X}^{M'} \subseteq \overline{\overline{X}^{M'} \cap E}^{M'} \cup X$. Seja $X \subseteq E \cup F$ e $x \in \overline{X}^{M'}$. Se $x \in \overline{X}^{M'} \cap X$ é claro que $x \in \overline{\overline{X}^{M'} \cap E}^{M'} \cup X$.

Suponha que $x \in \overline{X}^{M'} - X$. Então $x \in \overline{X}^{N'} - X$. Como N' é extensão lisa, $\overline{X}^{N'} = \overline{\overline{X}^{N'} \cap (E \cup P)}^{N'} \cup X$, logo $x \in \overline{\overline{X}^{N'} \cap (E \cup P)}^{N'}$. Mas $\overline{X}^{N'} \cap (E \cup P) \in \mathcal{F}_i$ e por hipótese, $\overline{X}^{N'} \cap E \in \sigma^{-1}(\mathcal{F}_i)$. Por outro lado, $\overline{X}^{M'} \cap E = \overline{X}^{N'} \cap E$ e portanto $x \in \overline{\overline{X}^{M'} \cap E}^{M'}$.

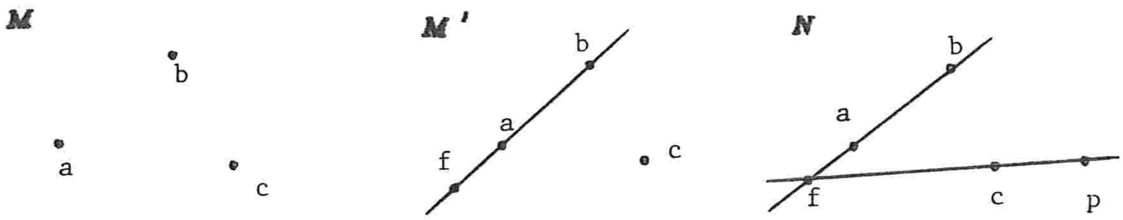
□

Infelismente a condição dada na Proposição anterior não é necessária para que os filtros modulares sejam ultra-compatíveis.

Exemplo 2.7. Sejam $E = \{a, b, c\}$, $M(E) = \mathcal{L}(E)$ e considere o seguinte diagrama de extensões pontuais:

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} M'(E \cup f) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_2} N(E \cup f \cup p)$$

onde $\mathcal{F}_1 = \{ab, abc\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{cf, abcf\}$. Temos que $\sigma^{-1}(\mathcal{F}_2) = \{abc\}$ é trivialmente um filtro modular ultra-compatível de M. Tomando $X = \{cf\} \in \mathcal{F}_2$ temos que $X \cap E = \{c\} \notin \sigma^{-1}(\mathcal{F}_2)$.



Capítulo II

Extensões Normais e Empilhamentos

Este é o capítulo mais extenso do trabalho onde examinamos uma classe particular de extensões de um matróide, as extensões normais, atendo-nos principalmente a suas aplicações na teoria de compatibilidade de extensões.

Na Seção 1 apresentamos várias caracterizações para a normalidade de conjuntos antes de definirmos extensões normais.

A Seção 2 introduz o conceito de empilhamento de fechados de um matróide. A cada extensão de um matróide podemos associar um empilhamento, mas a cada empilhamento corresponde uma única extensão normal.

Nas Seções 3 e 4 apresentamos três caracterizações dos pares de filtros modulares compatíveis, a primeira devida a Las Vergnas[LV1], a segunda devida a Cheung[Ch] e a última devida a Cordovil[Co2]. O principal método aqui abordado consiste em obter um empilhamento de fechados tomando por base um par de filtros modulares e, a partir da extensão normal associada a esse empilhamento, construir uma 2-extensão relativa ao par de filtros mencionado. A caracterização de Las Vergnas permite mostrar também que o conjunto das 2-extensões de um matróide relativas a um par de filtros modulares fixado formam um semi-reticulado com respeito à ordem fraca.

1. NORMALIDADE

Diremos que $A \subseteq E$ está em *posição normal* ou é *normal em* M se para todo $X \subseteq E - A$ e todo natural k:

$$\begin{gathered}\text{se existe } Y_0 \subseteq A \text{ tal que } \rho_M(Y_0) = k \text{ e } A \subseteq \overline{X \cup Y_0}^M \\ \text{então } A \subseteq \overline{X \cup Y}^M \text{ para todo } Y \subseteq A \text{ tal que } \rho_M(Y) = k\end{gathered}$$

Observe que todo ponto de M é normal. Infelismente, ao investigarmos a existência de exemplos mais interessantes, a definição acima se mostra muito pouco prática. Na tentativa de simplificá-la apresentamos a seguir, uma caracterização de normalidade dada pela descrição dos menores do matróide, e uma segunda caracterização que fornece uma expressão para a função posto.

Proposição 1.1. *As seguintes propriedades são equivalentes para* $A \subseteq E$*:*

i. *A é normal em M*

ii. *$M(X \cup A)\backslash X = (M(A))_k$ para todo $X \subseteq E - A$ onde $(M(A))_k$ indica o truncamento de $M(A)$ ao nível k (veja pág.6) e*

$$k = \min\{j : \textit{existe } Z \subseteq A \textit{ tal que } \rho_M(Z) = j \textit{ e } A \subseteq \overline{X \cup Z}^M\}$$

iii. *$\rho_M(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + \rho_M(Y), \rho_M(X \cup A))$ para todo $X \subseteq E - A$ e $Y \subseteq A$*

Prova: Seja $X \subseteq E - A$ e

$$k = \min\{j : \text{existe } Z \subseteq A \text{ com } \rho_M(Z) = j \text{ e } A \subseteq \overline{X \cup Z}^M\}$$

Tome $Y_0 \subseteq A$ tal que $\rho_M(Y_0) = k$ e $A \subseteq \overline{X \cup Y_0}^M$.

Mostremos inicialmente que *i.*$\Rightarrow$*ii.*. Podemos supor sem perda de generalidade que X e Y_0 são independentes em M. Seja Y independente em $(M(A))_k$. Claramente $Y \subseteq A$ é independente em M e $|Y| \leq k$. Estendo Y a uma base Y' de $(M(A))_k$. Como A é normal e $\rho_M(Y') = |Y'| = k$ temos que $A \subseteq \overline{X \cup Y'}^M$. Suponha que $X \cup Y'$ é dependente em M. Então existe um circuito C de M tal que $C \subseteq X \cup Y'$ e $C - X \neq \emptyset \neq C - Y'$. Tome $y \in C - X$. Temos então que

$$A \subseteq \overline{X \cup Y'}^M = \overline{X \cup (Y' - y)}^M$$

e
$$\rho_M(Y' - y) = |Y' - y| = k - 1$$
o que contraria a minimalidade de k. Portanto $X \cup Y'$ é independente em M e como $X \cup Y \subseteq X \cup Y'$ temos que Y é independente em $M(X \cup A)/X$, o que mostra que $(M(A))_k \subseteq M(X \cup A)/X$. Para verificar a igualdade, mostraremos que $\rho(M(A))_k = \rho M(X \cup A)/X$. Seja Y base de $M(X \cup A)/X$. Existe B base de $X \cup A$ tal que $B \cap X$ é base de X e $B \cap A = Y$, logo B é independente em $X \cup Y$, e como $X \cup Y \subseteq X \cup A$, B é na realidade base de $X \cup Y$. Claramente $\overline{X \cup A}^M = \overline{X \cup Y}^M$. Temos então que $A \subseteq \overline{X \cup Y}^M$, e pela minimalidade de k,
$$\rho M(X \cup A)/X = |Y| \geq k$$
Por outro lado, $\overline{Y_0}^{M/X} = \overline{X \cup Y}^M - X = A$ e portanto
$$k = |Y_0| = \rho_{M/X}(Y_0) = \rho_{M/X} A \geq \rho_{M(X \cup A)/X} A = \rho M(X \cup A)/X$$
Logo
$$\rho(M(A))_k = k = \rho M(X \cup A)/X$$

Provemos agora que *ii.*$\Rightarrow$ *iii.*. Para $Y \subseteq A$ temos que
$$\rho_{(M(A))_k}(Y) = \min(\rho_M(Y), k) \text{ e } \rho_{M(X \cup A)/X}(Y) = \rho_M(X \cup Y) - \rho_M(X)$$
Por *ii.* concluímos que
$$\min(\rho_M(Y), k) = \rho_M(X \cup Y) - \rho_M(X) \quad (*)$$
Mas $k = \rho_{M(X \cup A)/X}(A) = \rho_M(X \cup A) - \rho_M(X)$. Substituindo em (*) obtemos
$$\rho_M(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + \rho_M(Y), \rho_M(X \cup A))$$

Finalmente vamos verificar a implicação *iii.*$\Rightarrow$*i.*. Seja $Y \subseteq A$ tal que $\rho_M(Y) = k$. Sabemos que $\rho_M(X \cup A) = \rho_M(X \cup Y_0)$, logo por *iii.*
$$\rho_M(X \cup A) \leq \rho_M(X) + \rho_M(Y_0) = \rho_M(X) + \rho_M(Y)$$
donde se conclui que $\rho_M(X \cup A) = \rho_M(X \cup Y)$. Como $X \cup Y \subseteq X \cup A$ temos que $\overline{X \cup Y}^M = \overline{X \cup A}^M$. Portanto $A \subseteq \overline{X \cup Y}^M$, o que mostra que A é normal em M.

□

Uma extensão N de M sobre $E \cup P$ é dita *normal* se P é normal em N.

2. EMPILHAMENTOS

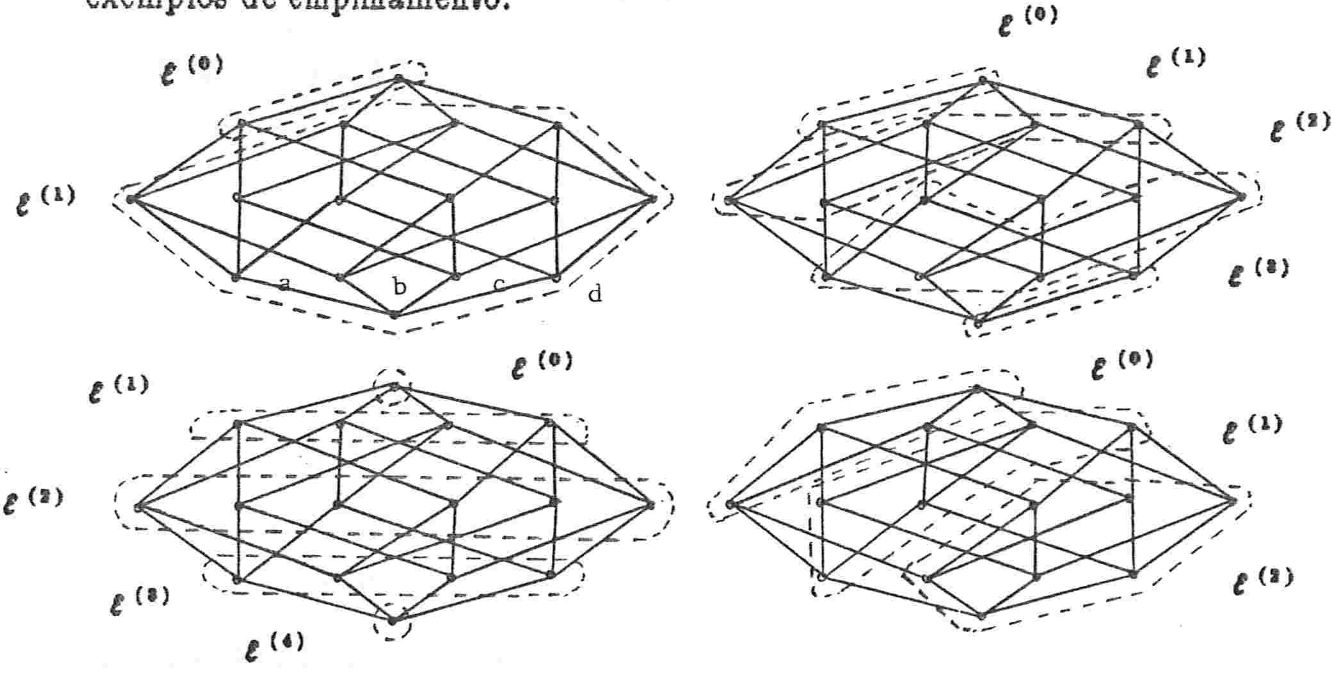
Seja $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}^{(n)}$ uma decomposição do conjunto dos fechados do matróide M. Essa decomposição é um *empilhamento dos fechados de* M se as seguintes propriedades são verificadas:

(E1) Para todo par de fechados X, Y de M tais que X cobre Y, se $Y \in \mathcal{E}^{(i)}$ então $X \in \mathcal{E}^{(i)} \cup \mathcal{E}^{(i-1)}$, $\quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

(E2) Para todo par de fechados X, Y de M tais que X e Y cobrem $X \cap Y$, se $X, Y, \overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$ então $X \cap Y \in \mathcal{E}^{(i)}$, $\quad i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

O *grau do empilhamento* é dado por $\max\{i : \mathcal{E}^{(i)} \neq \emptyset\}$. Os filtros modulares podem ser vistos como casos particulares de empilhamentos já que $\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{F}$, $\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{F}_M - \mathcal{F}$ é um empilhamento para todo filtro modular $\mathcal{F}$ do matróide M. Mais ainda, temos por definição que $\mathcal{E}^{(0)}$ é um filtro modular qualquer que seja o empilhamento.

Exemplo 2.1. Considere o matróide livre sobre o conjunto $\{a, b, c, d\}$ e o reticulado dos fechados correspondente. Abaixo apresentamos, esquematicamente, vários exemplos de empilhamento:



Olhando para o reticulado dos fechados do matróide, observamos que os $\mathcal{E}^{(i)}$'s formam faixas dispostas ordenadamente umas sobre as outras. Essa disposição é devida a (E1) e nos sugeriu o termo empilhamento. Algumas vezes vamos nos referir ao empilhamento dos fechados de M simplesmente por empilhamento de M.

Equivalentemente, podemos dizer que uma decomposição do conjunto dos fechados de M, $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, ..., \mathcal{E}^{(n)}$, é um empilhamento se ela tem a propriedade (E1) e a seguinte variante de (E2):

(E2') Para todo par modular X,Y de M, se $X, Y, \overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$ então $X \cap Y \in \mathcal{E}^{(i)}$, $i \in \{0, 1, ..., n\}$

Trivialmente (E1) e (E2') implicam (E1) e (E2). Na implicação contrária, (E2') segue de (E1) e (E2) através de uma pequena indução no $\rho_M(X \cup Y) - \rho_M(X \cap Y)$, observando que:

Proposição 2.2. *Seja L um reticulado finito e geométrico, $X,Y \in L$ par modular. Nesse caso existe um sub-reticulado saturado Q de L no intervalo $[X \wedge Y, X \vee Y]$ tal que seus elementos são dois a dois modulares.*

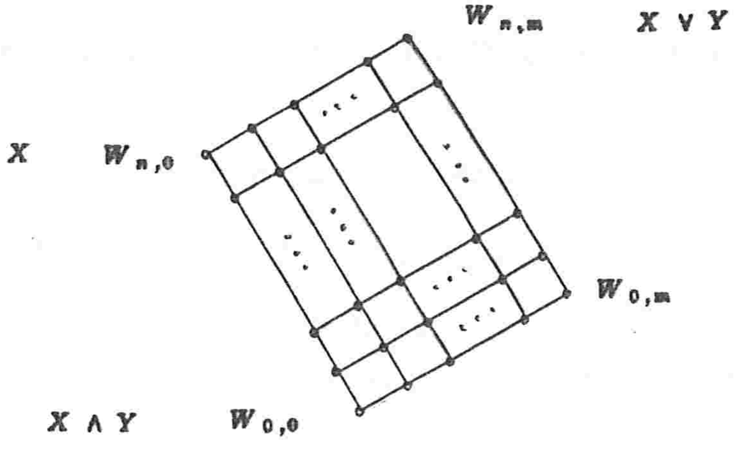
Prova: Seja M o matróide associado a L e

$$\{x_1, ..., x_n\} \text{ base de } M(X)/X \cap Y$$
$$\{y_1, ..., y_m\} \text{ base de } M(Y)/X \cap Y$$

Definimos

$$W_{i,j} = \overline{(X \cap Y) \cup \{x_1, ..., x_i\} \cup \{y_1, ..., y_j\}} \quad i = 0, 1, ..., n \text{ e } j = 0, 1, ..., m$$

Note que $X = W_{n,0}$, $Y = W_{0,m}$, $X \vee Y = \overline{X \cup Y} = W_{n,m}$ e $X \wedge Y = X \cap Y = W_{0,0}$. Esquematicamente:



pois temos para todo $i = 0, 1, ..., n$ e $j = 0, 1, ..., m$ que:

(a) $W_{i,j}$ é coberto por $W_{i+1,j}$ e $W_{i,j}$ é coberto por $W_{i,j+1}$

(b) $\rho(W_{i,j}) = \rho(W_{0,0}) + i + j$

(c) $W_{i,j} \neq W_{k,l}$ se $i \neq j$ ou $l \neq j$

(d) $W_{i,j} \vee W_{k,l} = W_{\max\{i,k\},\max\{j,l\}}$ e $W_{i,j} \wedge W_{k,l} = W_{\min\{i,k\},\min\{j,l\}}$

(e) $W_{i,j}$ e $W_{k,l}$ formam um par modular

□

Dado um empilhamento $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, ..., \mathcal{E}^{(n)}$ nada impede, a princípio, a existência de $\mathcal{E}^{(i)}$'s vazios. A seguir daremos uma condição necessária e suficiente para que $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, ..., \mathcal{E}^{(n)}$ um empilhamento de M de grau n seja uma partição dos fechados de M.

Lema 2.3. $\overline{\emptyset}^M \in \mathcal{E}^{(n)}$.

Prova: Suponha por absurdo que $\overline{\emptyset}^M \in \mathcal{E}^{(k)}$ onde $k < n$. Seja $X \in \mathcal{E}^{(n)}$ e considere a seguinte cadeia de fechados de M,

$$\overline{\emptyset}^M = X_0 \lessdot X_1 \lessdot ... \lessdot X_l = X, \quad l \geq 1$$

onde $X_{i-1} \lessdot X_i$ significa que X_i cobre X_{i-1}, $i = 1, 2, ..., l$. Pela propriedade (E1) de empilhamento temos que $n \leq k$, uma contradição. Logo $k = n$.

□

O próximo Lema restringe a disposição dos $\mathcal{E}^{(i)}$'s vazios.

Lema 2.4. *Se $\mathcal{E}^{(k)} \neq \emptyset$ para algum $k \in \{0, 1, ..., n\}$ então $\mathcal{E}^{(i)} \neq \emptyset$ para todo $i = k, k+1, ..., n$.*

Prova: Seja $X \in \mathcal{E}^{(k)}$ e considere a seguinte cadeia de fechados de M,

$$\overline{\emptyset}^M = X_0 \lessdot X_1 \lessdot ... \lessdot X_l = X$$

Pela propriedade (E1) de empilhamento e pelo Lema anterior, é fácil ver que para cada $i = k, k+1, ..., n$, existe $j_i \in \{0, 1, ..., l\}$ tal que $X_{j_i} \in \mathcal{E}^{(i)}$.

□

Proposição 2.5. *$\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, ..., \mathcal{E}^{(n)}$ é uma partição do conjunto dos fechados de M se e somente se $E \in \mathcal{E}^{(0)}$.*

Prova: Se $E \in \mathcal{E}^{(0)}$ o resultado segue do Lema anterior. Suponha então que $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, ..., \mathcal{E}^{(n)}$ é uma partição do conjunto dos fechados de M e, por absurdo, que $E \in \mathcal{E}^{(k)}$ com $k > 0$. Analogamente ao que foi feito nos dois últimos Lemas, existe l tal que

$$\mathcal{E}^{(0)} \ni X = X_0 \lessdot X_1 \lessdot \ldots \lessdot X_l = E$$

e de (E1) conclui-se que $k = 0$, uma contradição. Logo $E \in \mathcal{E}^{(0)}$.

□

Uma das formas de obtermos empilhamentos de um certo matróide é a partir de suas extensões:

Proposição 2.6. *Seja N uma extensão de M sobre $E \cup P$ e $A \subseteq E \cup P$. Para cada $i = 0, 1, \ldots, \rho_N(A)$ definimos o seguinte conjunto de fechados de M*

$$\mathcal{E}^{(i)} = \{X \in \mathcal{F}_M : \rho_N(X \cup A) - \rho_M(X) = i\}$$

Então $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}^{(\rho_N(A))}$ é um empilhamento de fechados de grau $\rho_N(A)$.

Prova: Verifiquemos que a sequência $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}^{(n)}$, onde $n = \rho_N(A)$, tem as propriedades (E1) e (E2) da definição de empilhamento:

(E1) Sejam X,Y fechados de M tais que X cobre Y e $Y \in \mathcal{E}^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Logo

$$\rho_N(Y \cup A) = \rho_N(X \cup A) \text{ ou } \rho_N(X \cup A) - 1$$

e portanto

$$\begin{aligned}\rho_M(X) = \rho_M(Y) + 1 &= \rho_N(Y \cup A) - i + 1 \\ &= \rho_N(X \cup A) - i + 1 \text{ ou } \rho_N(X \cup A) - i\end{aligned}$$

o que mostra que $X \in \mathcal{E}^{(i)} \cup \mathcal{E}^{(i-1)}$.

(E2) Sejam X,Y fechados de M tais que X,Y cobrem $X \cap Y$ e $X, Y, \overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. É claro que X,Y é par modular de M, por isso

$$\begin{aligned}\rho_N((X \cap Y) \cup A) - \rho_M(X \cap Y) = \rho_N((X \cap Y) \cup A) - \rho_M(X) - \\ \rho_M(Y) + \rho_M(X \cup Y)\end{aligned}$$

e usando o fato de que $X, Y, \overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$ temos

$$\begin{aligned}\rho_N((X \cap Y) \cup A) - \rho_M(X \cap Y) = i + (\rho_N((X \cup Y) \cup A) + \\ \rho_N((X \cap Y) \cup A) - \rho_N(X \cup A) - \rho_N(Y \cup A))\end{aligned}$$

Para provarmos que $X \cap Y \in \mathcal{E}^{(i)}$ basta mostrarmos que vale

$$\rho_N(X \cup A) + \rho_N(Y \cup A) = \rho_N((X \cup Y) \cup A) + \rho_N((X \cap Y) \cup A)$$

Da hipótese, existem $x, y \in E$ tais que

$$X = \overline{(X \cap Y) \cup x}^M, Y = \overline{(X \cap Y) \cup y}^M, \overline{X \cup Y}^M = \overline{(X \cap Y) \cup x \cup y}^M$$

É claro que $x, y \notin X \cap Y$ e $y \notin \overline{(X \cap Y) \cup x}^M$. Reescrevendo a igualdade a ser provada,

$$\begin{aligned} &\rho_N((X \cap Y) \cup x \cup A) + \rho_N((X \cap Y) \cup y \cup A) = \\ &\qquad \rho_N((X \cap Y) \cup x \cup y \cup A) + \rho_N((X \cap Y) \cup A) \quad (*) \end{aligned}$$

Temos três casos para verificar:

Caso 1: $x, y \in \overline{(X \cap Y) \cup A}^N$
A igualdade em $(*)$ é facilmente obtida

Caso 2: $x \in \overline{(X \cap Y) \cup A}^N$ e $y \notin \overline{(X \cap Y) \cup A}^N$ (ou trocando x por y)
$(*)$ decorre do fato de que $y \notin \overline{(X \cap Y) \cup A}^N = \overline{(X \cap Y) \cup x \cup A}^N$

Caso 3: $x, y \notin \overline{(X \cap Y) \cup A}^N$
Suponha por absurdo que $y \in \overline{(X \cap Y) \cup x \cup A}^N$. Logo

$$\begin{aligned} \rho_N((X \cup Y) \cup A) - \rho_M(X \cup Y) &= \rho_N((X \cap Y) \cup x \cup y \cup A) - \\ &\qquad \rho_M(X \cap Y) + 2 \\ &= \rho_N((X \cap Y) \cup x \cup A) - \\ &\qquad \rho_M(X \cap Y) + 2 \\ &= \rho_N(X \cup A) - \rho_M(X) + 1 \end{aligned}$$

O que contradiz o fato de $X, \overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$. Portanto $y \notin \overline{(X \cap Y) \cup x \cup A}^N$ donde resulta a igualdade $(*)$.

Resta ainda verificarmos que $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}^{(n)}$ é uma decomposição do conjunto dos fechados de M. É óbvio que os $\mathcal{E}^{(i)}$'s são dois a dois disjuntos. Seja X fechado de M. Temos então que

$$\begin{aligned} \rho_N(X \cup A) - \rho_M(X) &\leq \rho_N(X) + \rho_N(A) - \rho_N(X \cap A) - \rho_N(X) \\ &= \rho_N(A) - \rho_N(X \cap A) \leq \rho_N(A) \end{aligned}$$

Logo $X \in \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{E}^{(i)}$. Falta apenas mostrarmos que $\mathcal{E}^{(n)} \neq \emptyset$. Mais isso é imediato pois $\rho_N(\overline{\emptyset}^M \cup A) - \rho_M(\overline{\emptyset}^M) = n$.

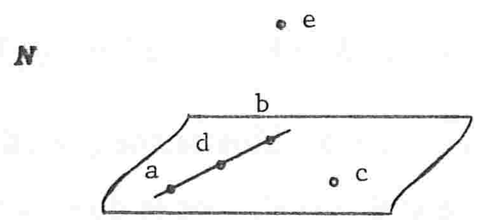
□

Nas hipóteses da Proposição anterior, o empilhamento

$$\mathcal{E}^{(i)} = \{X \in \mathcal{F}_M : \rho_N(X \cup P) - \rho_M(X) = i\}, \quad i = 0, 1, \ldots, \rho N$$

será chamado de *empilhamento da extensão N de M*.

Exemplo 2.7. Seja $M = \mathcal{L}(\{a, b, c\})$ e a seguinte extensão N de M sobre $\{a, b, c, d\}$:



O empilhamento da extensão N de M é dado por:

$$\mathcal{E}^{(0)} = \emptyset \quad \mathcal{E}^{(1)} = \{abc, ab\} \quad \mathcal{E}^{(2)} = \{ac, bc, a, b, c, \emptyset\}$$

que não é partição de $\mathcal{F}_M$.

A Proposição 2.5. nos garante que o empilhamento de uma extensão N de M é uma partição do conjunto dos fechados de M se e somente se $\rho N = \rho M$.

Passemos ao resultado principal desta seção que liga o conceito de empilhamento ao conceito de normalidade, fornecendo uma maneira prática de obter extensões normais.

Proposição 2.8. *Seja R um matróide sobre P de posto igual a n e $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}^{(n)}$ um empilhamento de M de grau n. Então existe uma única extensão normal N de M sobre $E \cup P$ tal que $N(P) = R(P)$ e $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}^{(n)}$ é o empilhamento da extensão N de M. Nesse caso, para todo $X \subseteq E$ e $Y \subseteq P$*

$$\rho_N(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y), \rho_M(X) + i)$$

onde $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$.

Prova: Verifiquemos que a função ρ_N dada pela expressão acima satisfaz os seguintes axiomas de posto:

(R1) $\rho_N(\emptyset) = 0$

(R2) Para todo $X \subseteq E$, $Y \subseteq P$ e $w \in E \cup P$ temos

$$\rho_N(X \cup Y) \leq \rho_N(X \cup Y \cup w) \leq \rho_N(X \cup Y) + 1$$

(R3) Para todo $X \subseteq E$, $Y \subseteq P$ e $w, z \in E \cup P$

$$\text{se } \rho_N(X \cup Y \cup z) = \rho_N(X \cup Y \cup w) = \rho_N(X \cup Y)$$

$$\text{então } \rho_N(X \cup Y \cup z \cup w) = \rho_N(X \cup Y)$$

A verificação de (R1) é trivial. Mostremos que (R2) e (R3) valem:

(R1) Seja $X \subseteq E$, $Y \subseteq P$ e $w \in E \cup P$. Temos dois casos a considerar:
Caso 1: $w \in P$
Usando o fato de que

$$\rho_N(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y), \rho_M(X) + i)$$

onde $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$ e

$$\rho_N(X \cup Y \cup w) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y \cup w), \rho_M(X) + i)$$

e que ρ_R satisfaz (R2), obtemos

$$\rho_N(X \cup Y) \leq \rho_N(X \cup Y \cup w) \leq \rho_N(X \cup Y) + 1$$

Caso 2: $w \in E$
Pela definição de ρ_N e pelas propriedades de empilhamento

$$\rho_N(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y), \rho_M(X) + i)$$

onde $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$ e

$$\rho_N(X \cup Y \cup w) = \min(\rho_M(X \cup w) + \rho_R(Y), \rho_M(X \cup w) + j)$$

onde $j = i$ ou $i+1$. Se $w \in \overline{X}^M$ então $j = i$ e portanto $\rho_N(X \cup Y) = \rho_N(X \cup Y \cup w)$. Suponha que $w \notin \overline{X}^M$. Logo

$$\rho_N(X \cup Y \cup w) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y) + 1, \rho_M(X) + j + 1)$$

Se $j = i$ então

$$\rho_N(X \cup Y) < \rho_N(X \cup Y) + 1 = \rho_N(X \cup Y \cup w)$$

e se $j = i - 1$ então

$$\rho_N(X \cup Y) \leq \rho_N(X \cup Y \cup w) \leq \rho_N(X \cup Y) + 1$$

(R3) Seja $X \subseteq E$, $Y \subseteq P$ e $w, z \in E \cup P$ tais que

$$\rho_N(X \cup Y \cup z) = \rho_N(X \cup Y) = \rho_N(X \cup Y \cup w)$$

Da definição,

$$\rho_N(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y), \rho_M(X) + i)$$

onde $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$. Se $z = w$, $z \in \overline{X}^M \cup \overline{Y}^R$ ou $w \in \overline{X}^M \cup \overline{Y}^R$ então o axioma é trivialmente verificado. Suponha que $z \neq w$ e $\{z, w\} \cap (\overline{X}^M \cup \overline{Y}^R) = \emptyset$. Temos então três casos a considerar:

Caso 1: $z, w \in P$

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup z) &= \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y) + 1, \rho_M(X) + i) \\ &= \rho_N(X \cup Y \cup w)\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y) = \rho_N(X \cup Y \cup z) &= \rho_N(X \cup Y \cup w) \\ &= \rho_M(X) + i\end{aligned}$$

Mas então

$$i \leq \rho_R(Y) + 1 \leq \rho_R(Y \cup z \cup w)$$

e portanto

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup z \cup w) &= \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y \cup z \cup w), \rho_M(X) + i) \\ &= \rho_M(X) + i\end{aligned}$$

Caso 2: $z \in P$ e $w \in E$

Da definição de ρ_N e de empilhamento temos:

$$\rho_N(X \cup Y \cup z) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y) + 1, \rho_M(X) + i)$$

$$\rho_N(X \cup Y \cup w) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y) + 1, \rho_M(X) + j + i)$$

onde $j = i$ ou $i - 1$. Logo $j = i - 1$ e

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup z) = \rho_N(X \cup Y) &= \rho_N(X \cup Y \cup w)\\ &= \rho_M(X) + i\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup z \cup w) &= \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y) + 2, \rho_M(X) + j + 1)\\ &= \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y) + 2, \rho_M(X) + i)\\ &= \rho_M(X) + i\end{aligned}$$

Caso 3: $z, w \in E$

Da definição de ρ_N e de empilhamento temos:

$$\rho_N(X \cup Y \cup z) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y) + 1, \rho_M(X) + j + 1)$$

onde $j = i$ ou $i - 1$, e

$$\rho_N(X \cup Y \cup w) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y) + 1, \rho_M(X) + k + 1)$$

onde $k = i$ ou $i - 1$. Logo $j = k = i - 1$ e

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup z) = \rho_N(X \cup Y) &= \rho_N(X \cup Y \cup w)\\ &= \rho_M(X) + i\end{aligned}$$

Como $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$ e $\overline{X \cup z}^M, \overline{X \cup w}^M \in \mathcal{E}^{(i-1)}$ temos que $\overline{X \cup z \cup w}^M \in \mathcal{E}^{(i-2)}$ e portanto $w \notin \overline{X \cup z}^M$. Assim

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup z \cup w) &= \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y) + 2, \rho_M(X) + i)\\ &= \rho_M(X) + i\end{aligned}$$

Logo ρ_N é a função posto de um matróide N sobre $E \cup P$. É fácil ver que:

(a) $N(E) = M(E)$, $N(P) = R(P)$

(b) $\mathcal{E}^{(i)} = \{X \in \mathcal{F}_M : \rho_N(X \cup P) - \rho_M(X) = i\} \quad i = 0, 1, ..., n$

(c) P é normal em N

Portanto, como N está caracterizado por ρ_N, N é a única extensão normal de M sobre $E \cup P$ com empilhamento $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, ..., \mathcal{E}^{(n)}$ e $N(P) = R(P)$.

□

Além da existência e unicidade da extensão normal acima, ela é também mínima no seguinte sentido:

Proposição 2.9. *Sob as mesmas hipóteses da Proposição anterior. A extensão normal N é mínima (em relação à ordem fraca) dentre as extensões N' de M sobre $E \cup P$ de empilhamento $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, ..., \mathcal{E}^{(n)}$ e tal que $N'(P) = R(P)$.*

Prova: Seja $X \subseteq E$ e $Y \subseteq P$. Pela Proposição anterior

$$\rho_N(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + \rho_R(Y), \rho_M(X) + i)$$

onde $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$. Tome N' uma extensão de M sobre $E \cup P$ com empilhamento $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, ..., \mathcal{E}^{(n)}$ e tal que $N'(P) = R(P)$. Se $\rho_M(X) + \rho_R(Y) \leq \rho_M(X) + i$ então

$$\rho_N(X \cup Y) = \rho_M(X) + \rho_R(Y) = \rho_{N'}(X) + \rho_{N'}(Y) \geq \rho_{N'}(X \cup Y)$$

caso contrário

$$\rho_N(X \cup Y) = \rho_M(X) + i = \rho_{N'}(X \cup P) \geq \rho_{N'}(X \cup Y)$$

Logo $\rho_N(X \cup Y) \geq \rho_{N'}(X \cup Y)$ para todo $X \subseteq E$ e $Y \subseteq P$, portanto $N \preceq N'$.

□

Como aplicação da teoria desenvolvida neste capítulo daremos uma prova do conhecido resultado devido a Higgs distinta daquela proposta em [Hi].

Proposição 2.10. *Sejam M_1 e M_2 matróides sobre E tal que $\mathcal{F}_{M_2} \subseteq \mathcal{F}_{M_1}$, e seja o conjunto $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ tal que $P \cap E = \emptyset$ e $n = \rho M_1 - \rho M_2$. Para cada $i = 0, 1, ..., n$ definimos o seguinte conjunto de fechados de M_1*

$$\mathcal{E}^{(i)} = \{X \in \mathcal{F}_{M_1} : \rho_{M_1}(X) - \rho_{M_2}(X) = n - i\}$$

Então $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}^{(n)}$ é um empilhamento dos fechados de M_1 de grau n e portanto determina uma única extensão normal N de M_1 sobre $E \cup P$ tal que $N(P)$ é o matróide livre de grau n. Tem-se ainda que $N \backslash P = M_1$ e $N/P = M_2$.

Prova: Verifiquemos que a sequência $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}^{(n)}$ tem as propriedades (E1) e (E2) da definição de empilhamento:

(E1) Sejam X, Y fechados de M_1 tais que X cobre Y e $Y \in \mathcal{E}^{(i)}$. Logo, como $\mathcal{F}_{M_2} \subseteq \mathcal{F}_{M_1}$,

$$\begin{aligned}\rho_{M_1}(X) - \rho_{M_2}(X) &= \rho_{M_1}(Y) - \rho_{M_2}(Y) \text{ ou } \rho_{M_1}(Y) - \rho_{M_2}(Y) + 1 \\ &= n - i \text{ ou } n - i + 1\end{aligned}$$

Portanto $X \in \mathcal{E}^{(i)} \cup \mathcal{E}^{(i-1)}$.

(E2) Sejam X, Y fechados de M_1 tal que X e Y cobrem $X \cap Y$ e $X, Y, \overline{X \cup Y}^{M_1} \in \mathcal{E}^{(i)}$. É claro que X,Y é par modular de M_1, então

$$\rho_{M_1}(X \cap Y) - \rho_{M_2}(X \cap Y) = \rho_{M_1}(X) + \rho_{M_1}(Y) - \rho_{M_1}(X \cup Y) - \rho_{M_2}(X \cap Y)$$

e usando o fato de que $X, Y, \overline{X \cup Y}^{M_1} \in \mathcal{E}^{(i)}$ temos

$$\begin{aligned}\rho_{M_1}(X \cap Y) - \rho_{M_2}(X \cap Y) = n - i &+ \rho_{M_2}(X) + \rho_{M_2}(Y) \\ &- \rho_{M_2}(X \cup Y) - \rho_{M_2}(X \cap Y)\end{aligned}$$

Para provarmos que $X \cap Y \in \mathcal{E}^{(i)}$ basta mostrarmos que vale

$$\rho_{M_2}(X) + \rho_{M_2}(Y) = \rho_{M_2}(X \cup Y) + \rho_{M_2}(X \cap Y)$$

Da hipótese, existem $x, y \in E$ tais que $X = \overline{(X \cap Y) \cup x}^{M_1}$, $Y = \overline{(X \cap Y) \cup y}^{M_1}$ e $\overline{X \cup Y}^{M_1} = \overline{(X \cap Y) \cup x \cup y}^{M_1}$. Reescrevendo a igualdade a ser provada,

$$\begin{aligned}&\rho_{M_2}((X \cap Y) \cup x) + \rho_{M_2}((X \cap Y) \cup y) = \\ &\qquad \rho_{M_2}((X \cap Y) \cup x \cup y) + \rho_{M_2}(X \cap Y) \quad (*)\end{aligned}$$

Temos três casos a verificar:

Caso 1: $x, y \in \overline{X \cap Y}^{M_2}$

A igualdade em $(*)$ é facilmente obtida.

Caso 2: $x \in \overline{X \cap Y}^{M_2}$ e $y \notin \overline{X \cap Y}^{M_2}$ (ou trocando x por y)
(*) decorre do fato de que $y \notin \overline{X \cap Y}^{M_2} = \overline{(X \cap Y) \cup x}^{M_2}$.

Caso 3: $x, y \notin \overline{X \cap Y}^{M_2}$
Suponha por absurdo que $y \in \overline{(X \cap Y) \cup x}^{M_2}$. Logo

$$\begin{aligned}\rho_{M_1}(X \cup Y) - \rho_{M_2}(X \cup Y) &= \rho_{M_1}((X \cap Y) \cup x \cup y) - \\ &\quad \rho_{M_2}((X \cap Y) \cup x \cup y) \\ &= \rho_{M_1}(X \cap Y) + 2 - \\ &\quad \rho_{M_2}((X \cap Y) \cup x) \\ &= \rho_{M_1}(X) - \rho_{M_2}(X) + 1\end{aligned}$$

O que contradiz o fato de que $X, \overline{X \cup Y}^{M_1} \in \mathcal{E}^{(i)}$. Portanto $y \notin \overline{(X \cap Y) \cup x}^{M_2}$ donde resulta a igualdade (*).

Concluímos então que $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}^{(n)}$ é um empilhamento de M_1 e portanto, pela Proposição 2.8., determina uma única extensão normal N de M_1 sobre $E \cup P$ tal que $N(P)$ é o matróide livre de grau n. O posto de N é dado por

$$\rho_N(X \cup Y) = \min(\rho_{M_1}(X) + |Y|, \rho_{M_1}(X) + i)$$

onde $X \subseteq E$, $Y \subseteq P$ e $\overline{X}^{M_1} \in \mathcal{E}^{(i)}$. Temos também que

$$\mathcal{E}^{(i)} = \{X \in \mathcal{F}_{M_1} : \rho_N(X \cup P) - \rho_{M_1}(X) = i\} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Logo, se $\overline{X}^{M_1} \in \mathcal{E}^{(i)}$ então $\rho_N(X \cup P) = \rho_{M_1}(X) + i = \rho_{M_2}(X) + n$. Reescrevendo a expressão de ρ_N obtemos,

$$\rho_N(X \cup Y) = \min(\rho_{M_1}(X) + |Y|, \rho_{M_2}(X) + n)$$

onde $X \subseteq E$, $Y \subseteq P$. Falta verificarmos que $N \backslash P = M_1$ e $N/P = M_2$. Trivialmente $N \backslash P = M_1$ já que N é extensão de M_1 sobre $E \cup P$. Para todo $X \subseteq E$ temos

$$\begin{aligned}\rho_{N/P}(X) &= \rho_N(X \cup P) - \rho_N(P) = \rho_N(X \cup P) - n \\ &= (\rho_{M_2}(X) + n) - n = \rho_{M_2}(X)\end{aligned}$$

o que mostra que $N/P = M_2$.

$\square$

Fechamos esta seção com um pequeno resultado que será útil na última seção deste capítulo.

Proposição 2.11. *Seja N uma extensão de M sobre $E \cup P$. Se N é normal então para todo $p \in P$, o filtro modular $\mathcal{F}_p$ que determina a extensão pontual $N(E \cup p)$ de M é dado por*

$$\mathcal{F}_p = \{X \in \mathcal{F}_M : P \subseteq \overline{X}^N\}$$

Prova: Seja $p \in P$. Temos que

$$\mathcal{F}_p = \{X \in \mathcal{F}_M : p \in \overline{X}^N\}$$

Logo $X \in \mathcal{F}_p$ se e somente se $\rho_N(X \cup p) = \rho_N(X) = \rho_M(X)$. Lembrando o item *iii.* da Proposição 1.1., temos

$$\rho_N(X \cup p) = \min(\rho_M(X) + 1, \rho_N(X \cup P))$$

e então, $X \in \mathcal{F}_p$ se e somente se $\rho_N(X) = \rho_N(X \cup P)$, o que mostra que $X \in \mathcal{F}_p$ se e somente se $P \subseteq \overline{X}^N$.

□

Suspeitamos que no resultado acima a recíproca também vale.

3. O SEMI-RETICULADO DAS 2-EXTENSÕES

Apresentaremos aqui o primeiro bloco de uma série de caracterizações dos pares de filtros modulares compatíveis de um matróide. Na primeira caracterização, devida a Las Vergnas, daremos uma prova levemente modificada, usando o conceito de normalidade, evitando assim uma verificação exaustiva de alguns dos possíveis subcasos presentes na prova original apresentada em [LV1].

Teorema 3.1. *Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ filtros modulares de M e $\mathcal{F}_{12}$ um subconjunto de $\mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$. Então são equivalentes:*

i. *Existe N extensão de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ tal que*

$$\mathcal{F}_i = \{X \in \mathcal{F}_M : p_i \in \overline{X}^N\} \quad i = 1,2$$

$$\mathcal{F}_{12} = \{X \in \mathcal{F}_M : p_i \notin \overline{X}^N,\ i = 1,2 \text{ e } p_2 \in \overline{X \cup p_1}^N\}$$

ii. *As seguintes condições são satisfeitas:*

P1. *Para todo $X \in \mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ e $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, se Y cobre X então $X \in \mathcal{F}_{12}$*

P2. *Para todo $X \in \mathcal{F}_{12}$ e $Y \in \mathcal{F}_M$, se $X \subseteq Y$ então $Y \in (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \cup \mathcal{F}_{12}$*

P3. *Para todo $X, Y \in \mathcal{F}_{12}$, se $\overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{F}_{12}$ e X, Y formam um par modular em M então $X \cap Y \in \mathcal{F}_{12}$*

iii. *$\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, $\mathcal{E}^{(1)} = (\mathcal{F}_1 \triangle \mathcal{F}_2) \cup \mathcal{F}_{12}$, $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_{12})$ é um empilhamento dos fechados de M e, para todo $X \in \mathcal{F}_{12}$ e $Y \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, se $X \subseteq Y$ então $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.*

Além disso $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_{12}$ verificando P1., P2. e P3. determinam N de modo único. Temos, para todo $X \subseteq E$, que:

$$\rho_N(X) = \rho_M(X)$$

$$\rho_N(X \cup p_i) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } \overline{X}^M \in \mathcal{F}_i \\ \rho_M(X) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad i = 1,2$$

$$\rho_N(X \cup p_1 \cup p_2) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } \overline{X}^M \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \\ \rho_M(X) + 1, & \text{se } \overline{X}^M \in (\mathcal{F}_1 \triangle \mathcal{F}_2) \cup \mathcal{F}_{12} \\ \rho_M(X) + 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Prova: Mostremos que *i.*$\Rightarrow$*ii.*. Verifiquemos se as condições P1., P2. e P3. estão satisfeitas para $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_{12}$ dados por *i.*:

P1. Seja $X \in \mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ e $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ tais que Y cobre X. Como $X \notin \mathcal{F}_1$ e $Y \in \mathcal{F}_1$ temos que $\overline{X}^N \subset \overline{X \cup p_1}^N \subseteq \overline{Y}^N$. Mas $\rho_N(Y) = \rho_N(X) + 1$, logo, $p_2 \in \overline{Y}^N = \overline{X \cup p_1}^N$ e portanto $X \in \mathcal{F}_{12}$.

P2. Seja $X \in \mathcal{F}_{12}$ e $Y \in \mathcal{F}_M$ tal que $X \subseteq Y$. Então $p_2 \in \overline{X \cup p_1}^N \subseteq \overline{Y \cup p_1}^N$. Se $p_1 \in \overline{Y}^N$ então $p_2 \in \overline{Y}^N$ e portanto $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Por outro lado, se $p_1 \notin \overline{Y}^N$ então $p_2 \notin \overline{Y}^N$, pois caso contrário $p_1 \in \overline{X \cup p_2}^N \subseteq \overline{Y}^N$ uma contradição. Logo $Y \in \mathcal{F}_{12}$.

P3. Seja $X,Y \in \mathcal{F}_{12}$ par modular de M tal que $\overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{F}_{12}$. Afirmo que $X \cap Y \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, pois caso contrário $p_1 \in \overline{X \cap Y}^N$ ou $p_2 \in \overline{X \cap Y}^N$, e então $p_1 \in \overline{X}^N$ ou $p_2 \in \overline{X}^N$, donde $X \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, uma contradição. Do fato de que $\overline{X \cap Y}^N = X \cap Y$ e $\rho_N((X \cap Y) \cup p_1) = \rho_M(X \cap Y) + 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup p_1) + \rho_N(Y \cup p_1) &= \rho_M(X) + 1 + \rho_M(Y) + 1\\ &= \rho_M(X \cup Y) + \rho_M(X \cap Y) + 2\\ &= \rho_M((X \cup Y) \cup p_1) + \rho_M((X \cap Y) \cup p_1)\end{aligned}$$

Não é difícil verificar que para todo par $W,Z \subseteq E$ tal que $\rho_N(Z)+\rho_N(W) = \rho_N(Z \cap W) + \rho_N(Z \cup W)$ tem-se que $\overline{Z \cap W}^N = \overline{Z}^N \cup \overline{W}^N$. Logo

$$\begin{aligned}p_2 \in \overline{X \cup p_1}^N \cap \overline{Y \cup p_1}^N &= \overline{(X \cup p_1) \cap (Y \cup p_1)}^N\\ &= \overline{(X \cap Y) \cup p_1}^N\end{aligned}$$

e portanto $X \cap Y \in \mathcal{F}_{12}$.

Passemos a verificar agora que *ii.*$\Rightarrow$*iii.*. Inicialmente temos que $\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, $\mathcal{E}^{(1)} = (\mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2) \cup \mathcal{F}_{12}$ e $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_{12})$ é um empilhamento dos fechados de M pois:

(E1) Sejam $X,Y \in \mathcal{F}_M$ tais que X cobre Y e $Y \in \mathcal{E}^{(i)}$.
Se $i = 0$ é óbvio que $X \in \mathcal{E}^{(0)}$ já que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ é filtro modular.
Se $i = 2$, por P1. é claro que $X \in \mathcal{E}^{(0)}$.
Se $i = 1$ então $Y \in \mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2$ ou $Y \in \mathcal{F}_{12}$. No primeiro caso, $X \in \mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{E}^{(1)}$ pela propriedade de filtro modular, e no segundo, por P2., temos $X \in (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \cup \mathcal{F}_{12} \subseteq \mathcal{E}^{(0)} \cup \mathcal{E}^{(1)}$.
Concluindo, $X \in \mathcal{E}^{(i)} \cup \mathcal{E}^{(i-1)}$.

(E2) Sejam $X,Y \in \mathcal{F}_M$ tais que X,Y cobrem $X \cap Y$ e $X,Y,\overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$. É claro então que X,Y são cobertos por $\overline{X \cup Y}^M$.
Se $i = 2$ por (E1) tem-se que $X \cap Y \in \mathcal{E}^{(2)}$.
Se $i = 0$, pela modularidade de $X,Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, segue que $X \cap Y \in \mathcal{E}^{(0)}$.
Resta o caso $i = 1$. Usando-se propriedade de filtro modular ou P2., é fácil ver que se $X \in \mathcal{F}_j$ para $j = 1,2$ ou 12 então $\overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{F}_j$. O mesmo ocorre com Y, logo $X,Y,\overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{F}_j$ para $j = 1,2$ ou 12. Se $j = 1$ ou 2, pela propriedade de filtro modular, $X \cap Y \in \mathcal{F}_j$; nesse caso $X \cap Y \notin \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, pois caso contrário, $X,Y \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, uma contradição. Se $j = 12$, por P3. conclui-se também que $X \cap Y \in \mathcal{F}_j$.
Logo, $X \cap Y \in \mathcal{E}^{(i)}$.

É imediato de P2. que $Y \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ para todo $X \in \mathcal{F}_{12}$, $Y \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ tais que $X \subseteq Y$.

Finalmente, mostremos que *iii.*$\Rightarrow$*i.*. Tome a extensão normal N' de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ de empilhamento $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}$ tal que $N'(\{p_1, p_2\})$ é o matróide livre sobre $\{p_1, p_2\}$. Lembrando a Proposição 1.8. temos a seguinte função posto em N':

para todo $X \subseteq E$ e $Y \subseteq \{p_1, p_2\}$,

$$\rho_{N'}(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + |Y|, \rho_M(X) + i)$$

onde $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$. Assim a expressão de ρ_N do enunciado pode ser reescrita como: para todo $X \subseteq E$,

$$\rho_N(X) = \rho_M(X)$$

$$\rho_N(X \cup p_i) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } \overline{X}^M \in \mathcal{F}_i \\ \rho_M(X), & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

$$\rho_N(X \cup p_1 \cup p_2) = \rho_{N'}(X \cup p_1 \cup p_2)$$

Verifiquemos que ρ_N satisfaz os seguintes axiomas de posto:

(R1) $\rho_N(\emptyset) = 0$

(R2) Para todo $Z \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$ e $x \in E \cup p_1 \cup p_2$

$$\rho_N(Z) \leq \rho_N(Z \cup x) \leq \rho_N(Z) + 1$$

(R3) Para todo $Z \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$ e $x, y \in E \cup p_1 \cup p_2$,

$$\text{se } \rho_N(Z \cup x) = \rho_N(Z \cup y) = \rho_N(Z)$$

$$\text{então } \rho_N(Z \cup x \cup y) = \rho_N(Z)$$

Observe inicialmente que para $i = 1, 2$, ρ_N restrito a $E \cup p_i$ é a função posto da extensão pontual de M pelo filtro modular $\mathcal{F}_i$. Logo é suficiente verificar (R2) quando $\{p_1, p_2\} \subseteq Z \cup x$ e (R3) quando $\{p_1, p_2\} \subseteq Z \cup x \cup y$. Podemos supor também que $\{p_1, p_2\} \not\subseteq Z$ pois ρ_N restrito a conjuntos que contêm $\{p_1, p_2\}$ coincide com a função posto $\rho_{N'}$.

(R2) $Z = X \cup p_1$, $X \subseteq E$ e $x = p_2$ é o único caso que necessita verificação. Se $\overline{X}^M \in \mathcal{F}_1$ então $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(0)} \cup \mathcal{E}^{(1)}$, logo

$$\rho_N(Z) = \rho_M(X) \leq \rho_N(Z \cup x) \leq \rho_M(X) + 1 = \rho_N(Z) + 1$$

Por outro lado, se $\overline{X}^M \notin \mathcal{F}_1$ então $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(1)} \cup \mathcal{E}^{(2)}$, logo

$$\rho_N(Z) = \rho_M(X) + 1 \leq \rho_N(Z \cup x) \leq \rho_M(X) + 2 = \rho_N(Z) + 1$$

(R3) Seja $Z \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$ e $x, y \in E \cup p_1 \cup p_2$ tais que $\{p_1, p_2\} \subseteq Z \cup x \cup y$, $\{p_1, p_2\} \not\subseteq Z$ e $\rho_N(Z \cup x) = \rho_N(Z \cup y) = \rho_N(Z)$. Temos então duas possibilidades:

Caso 1: $Z \subseteq E$, $x = p_1$ e $y = p_2$
Então para cada $i = 1, 2$ temos

$$\rho_N(Z \cup p_i) = \rho_N(Z) = \rho_M(Z)$$

Logo $\overline{Z}^M \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e portanto

$$\begin{aligned} \rho_N(Z \cup x \cup y) &= \rho_{N'}(Z \cup p_1 \cup p_2) \\ &= \rho_M(Z) = \rho_N(Z) \end{aligned}$$

Caso 2: $Z = X \cup p_1$, $X \subseteq E$, $x \in E$, $y = p_2$ (ou trocando p_1 com p_2)
Se $x \in \overline{X}^M$ então

$$\rho_N(Z \cup x \cup y) = \rho_N(Z \cup y) = \rho_N(Z)$$

Suponhamos que $x \notin \overline{X}^M$, nesse caso, $\rho_N(Z \cup x) = \rho_N(Z)$ e $\rho_M(X \cup x) = \rho_M(X) + 1$ implicam que $\overline{X}^M \notin \mathcal{F}_1$, donde $\rho_N(Z) = \rho_M(X) + 1$ e $\overline{X \cup x}^M \in \mathcal{F}_1$. Como $\rho_N(Z) = \rho_N(Z \cup p_2)$ então $\overline{X}^M \in (\mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2) \cup \mathcal{F}_{12} = \mathcal{E}^{(1)}$. Combinando com o fato de que $\overline{X}^M \notin \mathcal{F}_1$ tem-se que $\overline{X}^M \in (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1) \cup \mathcal{F}_{12}$. Se $\overline{X}^M \in \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$ é claro que $\overline{X \cup x}^M \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Por outro lado, se $\overline{X}^M \in \mathcal{F}_{12}$ usando a propriedade (E1) de empilhamento temos que $\overline{X \cup x}^M \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, logo por P2., $\overline{X \cup x}^M \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{E}^{(0)}$. Portanto

$$\begin{aligned} \rho_N(Z \cup x \cup y) &= \rho_N(X \cup p_1 \cup p_2 \cup x) \\ &= \rho_M(X \cup x) = \rho_N(Z) \end{aligned}$$

Seja N o único matróide sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ determinado por ρ_N. É fácil ver pela definição de ρ_N que:

$$N(E) = M(E)$$

$$\mathcal{F}_i = \{X \in \mathcal{F}_M : p_i \in \overline{X}^N\} \quad i = 1,2$$

$$\mathcal{F}_{12} = \{X \in \mathcal{F}_M : p_i \notin \overline{X}^N,\ i = 1,2 \text{ e } p_2 \in \overline{X \cup p_1}^N\}$$

□

Até o final da seção, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ são dois filtros modulares de M e $\mathcal{F}_{12} \subseteq \mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$. A propriedade P2. é equivalente à conjunção das seguintes propriedades:

P2.1. Para todo $X \in \mathcal{F}_{12}$ e $Y \in \mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$, se $X \subseteq Y$ então $Y \in \mathcal{F}_{12}$

P2.2. Para todo $X \in \mathcal{F}_{12}$ e $Y \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, se $X \subseteq Y$ então $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$

Note que se $\mathcal{F}_{12} = \mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ então trivialmente P1., P2.1. e P3. se verificam. Também, se duas partes de $\mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ verificam P1., P2.1. e P3. então a intersecção dessas partes também verifica. Denotemos por $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ a intersecção de todas as partes de $\mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ que verificam P1., P2.1. e P3..

O Teorema anterior estabelece uma bijeção entre $\Gamma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ e $\Phi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, onde $\Gamma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ denota o conjunto de todas as partes de $\mathcal{F}_M - (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ que verificam P1., P2. e P3., e $\Phi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ denota o conjunto de todas as 2-extensões N de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$.

Proposição 3.2. *Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ dois filtros modulares de M. Então $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ são compatíveis se e somente se para todo $X \in [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ e para todo $Y \in \mathcal{F}_1 \triangle \mathcal{F}_2$ temos que $X \nsubseteq Y$.*

Prova: Suponha que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são compatíveis e considere uma extensão N de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ tal que

$$\mathcal{F}_i = \{X \in \mathcal{F}_M : p_i \in \overline{X}^N\} \quad i = 1,2$$

Seja

$$\mathcal{F}_{12} = \{X \in \mathcal{F}_M : p_i \notin \overline{X}^N,\ i = 1,2 \text{ e } p_2 \in \overline{X \cup p_1}^N\}$$

Pelo Teorema anterior temos que $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_{12}$ verificam P1., P2. e P3.. Logo $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2] \subseteq \mathcal{F}_{12}$ e, para todo $X \in [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$, $Y \in \mathcal{F}_M$, se $X \subseteq Y$, P2. implica que $Y \subseteq (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \cup \mathcal{F}_{12}$.

Suponha agora que para todo $X \in [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ e para todo $Y \in \mathcal{F}_1 \triangle \mathcal{F}_2$ temos que $X \nsubseteq Y$. Mostremos que $\mathcal{F}_{12} = [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ satisfaz P2.2. pois nesse caso P1., P2. e P3. estão verificadas e portanto, pelo Teorema anterior, $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são compatíveis.

Mas P2.2. é trivialmente satisfeita já que se $X \in [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$, $Y \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ e $X \subseteq Y$, é claro que $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

□

A última Proposição nos diz que se $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ são compatíveis então $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ satisfaz P2.2. e portanto é mínimo em $\Gamma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ (com respeito à inclusão de conjuntos). A partir desse fato conseguimos obter informações adicionais relativas à bijeção existente entre $\Gamma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ e $\Phi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.

Proposição 3.3. *A bijeção entre $\Gamma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ e $\Phi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ dada pelo Teorema 3.1. é um isomorfismo entre os conjuntos ordenados $(\Gamma, \subseteq)$ e $(\Phi, \preceq)$. Em particular $(\Phi, \preceq)$ é um $\wedge$-semi-reticulado onde o elemento de Φ correspondente a $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2] \in \Gamma$ é mínimo em Φ em relação à ordem fraca $\preceq$.*

Prova: Sejam $\mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}'_{12} \in \Gamma$ e $N, N' \in \Phi$ as extensões correspondentes dadas pelo Teorema 3.1.. Para provarmos que a bijeção dada pelo Teorema 3.1. é um isomorfismo entre $(\Gamma, \subseteq)$ e $(\Phi, \preceq)$, basta mostrarmos que

$$\mathcal{F}_{12} \subseteq \mathcal{F}'_{12} \quad \text{se e somente se} \quad N \preceq N'$$

Suponhamos inicialmente que $N \preceq N'$, isto é, $\rho_N(Y) \geq \rho_{N'}(Y)$ para todo $Y \in E \cup p_1 \cup p_2$. Seja $X \in \mathcal{F}_{12}$. Então $p_i \notin \overline{X}^N$ para $i = 1, 2$ e $p_2 \in \overline{X \cup p_1}^N$, logo

$$\rho_{N'}(X \cup p_1 \cup p_2) \leq \rho_N(X \cup p_1 \cup p_2) = \rho_N(X \cup p_1)$$

Mas como $N(E \cup p_1)$ e $N'(E \cup p_1)$ coincidem com a extensão pontual de M sobre $E \cup p_1$ pelo filtro modular $\mathcal{F}_1$ então $\rho_{N'}(X \cup p_1 \cup p_2) \leq \rho_{N'}(X \cup p_1)$. Logo

$$\rho_{N'}(X \cup p_1 \cup p_2) = \rho_{N'}(X \cup p_1)$$

donde $p_2 \in \overline{X \cup p_1}^{N'}$, e portanto $X \in \mathcal{F}'_{12}$.

Suponhamos por outro lado que $\mathcal{F}_{12} \subseteq \mathcal{F}'_{12}$ e mostremos que $N \preceq N'$. É fácil ver pela expressão de ρ_N e $\rho_{N'}$ dadas pelo Teorema 3.1. que para todo $X \subseteq E$:

$$\rho_N(X) = \rho_{N'}(X)$$
$$\rho_N(X \cup p_i) = \rho_{N'}(X \cup p_i) \quad i = 1, 2$$
$$\rho_N(X \cup p_1 \cup p_2) = \begin{cases} \rho_{N'}(X \cup p_1 \cup p_2), & \text{se } \overline{X}^M \in (\mathcal{F}_M - \mathcal{F}'_{12}) \cup \mathcal{F}_{12} \\ \rho_{N'}(X \cup p_1 \cup p_2) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo $\rho_N(Y) \geq \rho_{N'}(Y)$ para todo $Y \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$. As demais afirmações feitas no enunciado desta Proposição decorrem então do fato de que $(\Gamma, \subseteq)$ é um $\wedge$-semi-reticulado, da Proposição 3.2. e de que $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ é mínimo em Γ em relação à inclusão de conjuntos.

$\square$

Podemos finalmente enunciar e provar a caracterização devida a Cheung mencionada no início do capítulo.

Proposição 3.4. *Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ filtros modulares de M tais que*

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} N_1(E \cup p_1) \quad e \quad M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_2} N_2(E \cup p_2)$$

Então são equivalentes:

i. $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ *são compatíveis*

ii. O seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & N_1(E \cup p_1) \arrow[dr, hook, "{[\mathcal{F}_2]_{N_1}}"] & \\
M(E) \arrow[ur, hook, "\mathcal{F}_1"] \arrow[dr, hook, "\mathcal{F}_2"'] & & N(E \cup p_1 \cup p_2) \\
 & N_2(E \cup p_2) \arrow[ur, hook, "{[\mathcal{F}_1]_{N_2}}"'] &
\end{tikzcd}$$

iii. $\mathcal{F}_1 = \{X \in \mathcal{F}_M : \overline{X}^{N_2} \in [\mathcal{F}_1]_{N_2}\}$

iv. $\mathcal{F}_2 = \{X \in \mathcal{F}_M : \overline{X}^{N_1} \in [\mathcal{F}_2]_{N_1}\}$

Prova: Seguiremos o seguinte roteiro de verificações:

$$\begin{tikzcd}
 & i. \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Leftrightarrow] & \\
iii. \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & iv. \\
 & ii. \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

A implicação *ii.*$\Rightarrow$*i.* é imediata. Mostremos então que *i.*$\Rightarrow$*ii.*$\Rightarrow$*iii.*$\Rightarrow$*i.* já que *ii.*$\Rightarrow$*iv.*$\Rightarrow$*i.* seguem por simetria.

É fácil ver que *ii.*$\Rightarrow$*iii.*. Trivialmente $\mathcal{F}_1 \subseteq \{X \in \mathcal{F}_M : \overline{X}^{N_2} \in [\mathcal{F}_1]_{N_2}\}$. A inclusão contrária segue do fato de que se $X \in \mathcal{F}_M$ e $\overline{X}^{N_2} \in [\mathcal{F}_1]_{N_2}$ então $p_1 \in \overline{X}^N$; mas $\overline{X}^{N_1} = \overline{X}^N - p_2$, logo $p_1 \in \overline{X}^{N_1}$, donde $X \in \mathcal{F}_1$.

Para verificarmos que *iii.*$\Rightarrow$*i.*, considere a extensão N de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ dada pelo seguinte diagrama:

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_2} N_2(E \cup p_2) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_1]_{N_2}} N(E \cup p_1 \cup p_2)$$

Basta mostrarmos que $N_1(E \cup p_1) = N(E \cup p_1)$. Seja X fechado de M, então

$$X \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \overline{X}^{N_2} \in [\mathcal{F}_1]_{N_2} \Leftrightarrow p_1 \in \overline{X}^N \Leftrightarrow p_1 \in \overline{X}^{N(E \cup p_1)}$$

Resta a implicação *i.*$\Rightarrow$*ii.* para ser verificada. Suponha que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são compatíveis. Seguindo a notação da Proposição 3.3., seja N' o elemento mínimo de $\Phi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ em relação à ordem fraca $\preceq$. Então existem $\mathcal{F}_1', \mathcal{F}_2'$ filtros modulares de N_2, N_1 respectivamente, tais que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & N_1(E \cup p_1) \arrow[dr, hook, "\mathcal{F}_2'"] & \\
M(E) \arrow[ur, hook, "\mathcal{F}_1"] \arrow[dr, hook, "\mathcal{F}_2"'] & & N'(E \cup p_1 \cup p_2) \\
 & N_2(E \cup p_2) \arrow[ur, hook, "\mathcal{F}_1'"'] &
\end{tikzcd}$$

Pela minimalidade de N', $\rho_{N'}(Z) \geq \rho_N(Z)$ para todo $Z \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$. Se $X \in \mathcal{F}_2$ então $p_2 \in \overline{X}^{N'}$, donde $\overline{X}^{N'} \in \mathcal{F}_2'$. Isso mostra que $[\mathcal{F}_2]_{N_1} \subseteq \mathcal{F}_2'$. Examinando os diagramas de extensões pontuais que dão origem a N e N' é fácil ver então que $\rho_N(Z) \geq \rho_{N'}(Z)$ para todo $Z \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$. Concluímos que $N = N'$ e portanto $[\mathcal{F}_2]_{N_1} = \mathcal{F}_2'$ e $[\mathcal{F}_1]_{N_2} = \mathcal{F}_1'$.

$\square$

Na prova dessa Proposição chegamos à conclusão de que a extensão N do item *ii.* é exatamente o elemento mínimo de $\Gamma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ em relação à ordem fraca. Esse resultado será útil na próxima seção quando formos provar o Teorema 4.3..

4. 2-COMPATIBILIDADE

Seja $\mathcal{F}$ um filtro modular de M e considere o seguinte diagrama de extensões pontuais:

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}]_{M_1}} M_2(E \cup p_1 \cup p_2)$$

Diremos que $\mathcal{F}$ *é um filtro modular 2-compatível* de M se no diagrama acima, $\rho_{M_2}(\{p_1, p_2\}) = 2$. O empilhamento da extensão M_2 de M

$$\mathcal{E}^{(i)} = \{X \in \mathcal{F}_M : \rho_{M_2}(X \cup p_1 \cup p_2) - \rho_M(X) = i\} \quad i = 0, 1, 2$$

será chamado de *empilhamento determinado pelo filtro modular 2-compatível* $\mathcal{F}$. É fácil ver que $\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{F}$ e $\overline{\emptyset}^M \in \mathcal{E}^{(2)}$, logo, lembrando a Proposição 2.5., o empilhamento particiona os fechados de M.

Nos próximos dois resultados relacionamos a 2-compatibilidade à normalidade.

Lema 4.1. *Considere o seguinte diagrama de extensões pontuais*

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_2} M_2(E \cup p_1 \cup p_2)$$

onde $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são filtros modulares de M e M_1 respectivamente. Então para todo $X \subseteq E$ temos:

$$\rho_{M_2}(X) = \rho_M(X)$$

$$\rho_{M_2}(X \cup p_1) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } \overline{X}^M \in \mathcal{F}_1 \\ \rho_M(X) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\rho_{M_2}(X \cup p_2) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } \overline{X}^{M_1} \in \mathcal{F}_2 \\ \rho_M(X) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\rho_{M_2}(X \cup p_1 \cup p_2) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } \overline{X}^M \in \mathcal{F}_1 \text{ e } \overline{X}^{M_1} \in \mathcal{F}_2 \\ \rho_M(X) + 1, & \text{se } (\overline{X}^M \notin \mathcal{F}_1 \text{ e } \overline{X \cup p_1}^{M_1} \in \mathcal{F}_2) \\ & \text{ou } (\overline{X}^M \in \mathcal{F}_1 \text{ e } \overline{X}^{M_1} \notin \mathcal{F}_2) \\ \rho_M(X) + 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Prova: Consideremos as extensões pontuais isoladamente:

(I) Se $X \subseteq E$ então

$$\rho_{M_1}(X) = \rho_M(X)$$

$$\rho_{M_1}(X \cup p_1) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } p_1 \in \overline{X}^{M_1} \\ \rho_M(X) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(II) Se $X \subseteq E \cup p_1$ então

$$\rho_{M_2}(X) = \rho_{M_1}(X)$$

$$\rho_{M_2}(X \cup p_2) = \begin{cases} \rho_{M_1}(X), & \text{se } p_2 \in \overline{X}^{M_2} \\ \rho_{M_1}(X) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Combinando (I), (II) e os seguintes fatos

$$\text{para todo } X \subseteq E, \quad p_1 \in \overline{X}^{M_1} \Leftrightarrow \overline{X}^{M} \in \mathcal{F}_1$$

$$\text{para todo } X \subseteq E \cup p_1, \quad p_2 \in \overline{X}^{M_2} \Leftrightarrow \overline{X}^{M_1} \in \mathcal{F}_2$$

Obtemos a expressão de ρ_{M_2} do enunciado.

□

Proposição 4.2. *Seja $\mathcal{F}$ um filtro modular 2-compatível de M e considere o seguinte diagrama de extensões pontuais:*

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}]_{M_1}} M_2(E \cup p_1 \cup p_2)$$

Então M_2 é a extensão normal de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ de empilhamento

$$\mathcal{E}^{(i)} = \{X \in \mathcal{F}_M : \rho_{M_2}(X \cup p_1 \cup p_2) - \rho_M(X) = i\} \quad i = 0, 1, 2$$

tal que $M_2(\{p_1, p_2\}) = \mathcal{L}(\{p_1, p_2\})$.

Prova: Do Lema anterior e do seguinte resultado facilmente verificável

$$\text{para todo } X \subseteq E, \quad \overline{X}^{M_1} \in [\mathcal{F}]_{M_1} \Leftrightarrow \overline{X}^{M} \in \mathcal{F}$$

caracterizamos ρ_{M_2}:

para todo $X \subseteq E$,

$$\rho_{M_2}(X) = \rho_M(X)$$

$$\rho_{M_2}(X \cup p_i) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } \overline{X}^M \in \mathcal{F} \\ \rho_M(X)+1, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i = 1,2$$

$$\rho_{M_2}(X \cup p_1 \cup p_2) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } \overline{X}^M \in \mathcal{F} \\ \rho_M(X)+1, & \text{se } \overline{X}^M \notin \mathcal{F} \text{ e } \overline{X \cup p_1}^{M_1} \in [\mathcal{F}]_{M_1} \\ \rho_M(X)+2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

de forma equivalente, para todo $X \subseteq E$ e $Y \subseteq \{p_1, p_2\}$

$$\rho_N(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + |Y|, \rho_M(X) + i)$$

onde $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$. Portanto, N é a extensão normal de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ de empilhamento $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}$ tal que $M_2(\{p_1,p_2\}) = \mathcal{L}(\{p_1,p_2\})$ já que $\rho_{M_2}(\{p_1,p_2\}) = 2$.

$\square$

Teorema 4.3. *Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ filtros modulares de M não triviais distintos. Então são equivalentes:*

i. $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são filtros modulares compatíveis de M

ii. (a) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ é um filtro modular 2-compatível de M

(b) Seja $\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$ o empilhamento dos fechados de M determinado pelo filtro modular 2-compatível $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Então para todo $X,Y \in \mathcal{F}_M$ tais que Y cobre X, $Y \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ (resp., $\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$) e $X \in \mathcal{E}^{(1)}$, temos que $X \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ (resp., $\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$)

Prova: Verifiquemos que *ii.*$\Rightarrow$*i.*. Considere a seguinte decomposição dos fechados de M:

$$\mathcal{E}_1^{(0)} = \mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \qquad \mathcal{E}_1^{(1)} = \mathcal{E}^{(1)} \cup (\mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2) \qquad \mathcal{E}_1^{(2)} = \mathcal{E}^{(2)} - (\mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2)$$

Mostremos que $\mathcal{E}_1^{(0)}, \mathcal{E}_1^{(1)}, \mathcal{E}_1^{(2)}$ satisfazem as duas propriedades que caracterizam empilhamentos:

(E1) Sejam $X,Y \in \mathcal{F}_M$ tais que X cobre Y e $X \in \mathcal{E}_1^{(i)}$ para algum $i = 1,2$. Lembrando que $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}$ é empilhamento e usando *ii.*(b) é fácil verificar que $X \in \mathcal{E}_1^{(i)} \cap \mathcal{E}_1^{(i-1)}$.

(E2) Sejam $X,Y \in \mathcal{F}_M$ tais que X,Y cobrem $X \cap Y$ e $X,Y,\overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{E}_1^{(i)}$ para algum $i = 0,1,2$. Se $i = 0$ ou 2 decorre de $(E1)$ e das propriedades de filtro modular que $X \cap Y \in \mathcal{E}_1^{(i)}$. Suponhamos que $i = 1$. Se $\overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$, de *ii.*(b) obtemos $X,Y,\overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ e como X,Y formam um par modular, $X \cap Y \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$. O caso $\overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$ é simétrico. Se $\overline{X \cup Y}^M \notin \mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2$ então $X,Y,\overline{X \cup Y}^M \in \mathcal{E}^{(1)} - (\mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2)$, logo $X \cap Y \in \mathcal{E}^{(1)} - (\mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2)$.
Concluindo, em qualquer caso, $X \cap Y \in \mathcal{E}_1^{(i)}$.

Portanto $\mathcal{E}_1^{(0)}, \mathcal{E}_1^{(1)}, \mathcal{E}_1^{(2)}$ é um empilhamento dos fechados de M com grau 2 pois $\emptyset \neq \mathcal{E}^{(1)} \subseteq \mathcal{E}_1^{(1)}$ e $\overline{\emptyset}^M \in \mathcal{E}^{(2)} - (\mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2) \subseteq \mathcal{E}_2^{(2)}$. Seja M' a extensão normal de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ determinada pelo empilhamento $\mathcal{E}_1^{(0)}, \mathcal{E}_1^{(1)}, \mathcal{E}_1^{(2)}$ tal que $M'(\{p_1,p_2\}) = \mathcal{L}(\{p_1,p_2\})$. Temos então que para todo $X \subseteq E$ e $Y \subseteq \{p_1,p_2\}$

$$\rho_{M'}(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + |Y|, \rho_M(X) + i)$$

onde $\overline{X}^M \in \mathcal{E}_1^{(i)}$. Defino então a seguinte função sobre o conjunto das partes de $E \cup p_1 \cup p_2$:

para todo $X \subseteq E$,

$$\rho_{N'}(X) = \rho_M(X)$$

$$\rho_{N'}(X \cup p_i) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } \overline{X}^M \in \mathcal{F}_i \\ \rho_M(X) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i = 1,2$$

$$\rho_{N'}(X \cup p_1 \cup p_2) = \rho_{M'}(X \cup p_1 \cup p_2)$$

Verifiquemos que $\rho_{N'}$ satisfaz os seguintes axiomas de posto:

(R1) $\rho_{N'}(\emptyset) = 0$

(R2) Para todo $Z \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$ e $x \in E \cup p_1 \cup p_2$ temos que

$$\rho_{N'}(Z) \leq \rho_{N'}(Z \cup x) \leq \rho_{N'}(Z) + 1$$

(R3) Para todo $Z \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$ e $x,y \in E \cup p_1 \cup p_2$,

$$\text{se } \rho_{N'}(Z \cup x) = \rho_{N'}(Z \cup y) = \rho_{N'}(Z)$$

$$\text{então } \rho_{N'}(Z \cup x \cup y) = \rho_{N'}(Z)$$

Note que para $i = 1,2$, $\rho_{N'}$ restrito a $E \cup p_i$ é a função posto da extensão pontual de M pelo filtro modular $\mathcal{F}_i$. Logo é suficiente verificar (R2) quando

$\{p_1, p_2\} \subseteq Z \cup x$ e (R3) quando $\{p_1, p_2\} \subseteq Z \cup x \cup y$. Podemos supor também que $\{p_1, p_2\} \not\subseteq Z$ pois $\rho_{N'}$ restrito a conjuntos que contêm $\{p_1, p_2\}$ coincide com a função posto $\rho_{M'}$.

(R2) $Z = X \cup p_1$, $X \subseteq E$ e $x = p_2$ é o único caso que necessita verificação. Se $\overline{X}^M \in \mathcal{F}_1$ então $\overline{X}^M \in \mathcal{E}_1^{(0)} \cup \mathcal{E}_1^{(1)}$, logo

$$\rho_{N'}(Z) = \rho_M(X) \leq \rho_{N'}(Z \cup x) \leq \rho_M(X) + 1 \leq \rho_{N'}(Z) + 1$$

Por outro lado, se $\overline{X}^M \notin \mathcal{F}_1$ então $\overline{X}^M \in \mathcal{E}_1^{(1)} \cup \mathcal{E}_1^{(2)}$, logo

$$\rho_{N'}(Z) = \rho_M(X) + 1 \leq \rho_{N'}(Z \cup x) \leq \rho_M(X) + 2 = \rho_{N'}(Z) + 1$$

(R3) Seja $Z \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$ e $x, y \in E \cup p_1 \cup p_2$ tais que $\{p_1, p_2\} \subseteq Z \cup x \cup y$, $\{p_1, p_2\} \not\subseteq Z$ e $\rho_{N'}(Z \cup x) = \rho_{N'}(Z \cup y) = \rho_{N'}(Z)$. Temos então duas possibilidades:

Caso 1: $Z \subseteq E, x = p_1$ e $y = p_2$
Então para cada $i = 1, 2$ temos

$$\rho_{N'}(Z \cup p_i) = \rho_{N'}(Z) = \rho_M(Z)$$

Logo $\overline{Z}^M \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e portanto

$$\begin{aligned} \rho_{N'}(Z \cup x \cup y) &= \rho_{M'}(Z \cup x \cup y) \\ &= \rho_M(Z) = \rho_{N'}(Z) \end{aligned}$$

Caso 2: $Z = X \cup p_1$, $X \subseteq E$, $x \in E, y = p_2$ (ou trocando p_1 com p_2)
Se $x \in \overline{X}^M$ então

$$\rho_{N'}(Z \cup x \cup y) = \rho_{N'}(Z \cup y) = \rho_{N'}(Z)$$

Suponhamos que $x \notin \overline{X}^M$, nesse caso, $\rho_{N'}(Z \cup x) = \rho_{N'}(Z)$ e $\rho_M(X \cup x) = \rho_M(X) + 1$ implicam que $\overline{X}^M \notin \mathcal{F}_1$, donde $\rho_{N'}(Z) = \rho_M(X) + 1$ e $\overline{X \cup x}^M \in \mathcal{F}_1$. Como $\rho_{N'}(Z) = \rho_{N'}(Z \cup p_2)$ então $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(1)} \cup (\mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2) = \mathcal{E}_1^{(1)}$. Combinando com o fato de que $\overline{X}^M \notin \mathcal{F}_1$ tem-se que $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(1)} \cup (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1)$. Se $\overline{X}^M \in \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$ é claro que $\overline{X \cup x}^M \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Por outro lado, se $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(1)}$ usando a propriedade (E1) de empilhamento temos que $\overline{X \cup x}^M \in$

$\mathcal{E}^{(0)} \cup \mathcal{E}^{(1)}$; $\overline{X \cup x}^M \notin \mathcal{E}^{(1)}$ pois caso contrário teríamos $\overline{X \cup x}^M \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$, $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(1)}$ e $\overline{X}^M \notin \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ o que contradiz *ii.*(b). Logo $\overline{X \cup x}^M \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Então

$$\begin{aligned} \rho_{N'}(Z \cup x \cup y) &= \rho_{N'}(X \cup p_1 \cup p_2 \cup x) \\ &= \rho_M(X \cup x) = \rho_{N'}(Z) \end{aligned}$$

Seja N' a extensão de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ determinada por $\rho_{N'}$. É claro que

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_i} N'(E \cup p_i) \qquad i = 1, 2$$

portanto $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são filtros modulares compatíveis de M.

Mostremos agora que *i.*$\Rightarrow$*ii.*. Suponha que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são compatíveis; então pela Proposição 3.4. temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & N_1(E \cup p_1) \arrow[dr, hook, "{[\mathcal{F}_2]_{N_1}}"] & \\ M(E) \arrow[ur, hook, "\mathcal{F}_1"] \arrow[dr, hook, "\mathcal{F}_2"'] & & N(E \cup p_1 \cup p_2) \\ & N_2(E \cup p_2) \arrow[ur, hook, "{[\mathcal{F}_1]_{N_2}}"'] & \end{tikzcd}$$

Logo $\rho_N(\{p_1, p_2\}) = 2$ pois se $\rho_N(\{p_1, p_2\}) = 0$ então $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_M = \mathcal{F}_2$, e se $\rho_N(\{p_1, p_2\}) = 1$, como $\rho_N(p_i) = 1$ para $i = 1, 2$, então $[\mathcal{F}_2]_{N_1} = [\overline{p_1}^{N_1}]$ e $[\mathcal{F}_1]_{N_2} = [\overline{p_2}^{N_2}]$ donde $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, um absurdo. Sejam $\mathcal{E}_1^{(0)} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{E}_1^{(1)}, \mathcal{E}_1^{(2)}$ o empilhamento da extensão N de M, e N' a extensão normal de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ determinada por esse empilhamento, onde $N'(\{p_1, p_2\}) = \mathcal{L}(\{p_1, p_2\})$. Lembrando a Proposição 2.11. não é difícil verificar que temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & N_1'(E \cup p_1) \arrow[dr, hook] & \\ M(E) \arrow[ur, hook, "\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2"] \arrow[dr, hook, "\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2"'] & & N'(E \cup p_1 \cup p_2) \\ & N_2'(E \cup p_2) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Logo, se

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2]_{M_1}} M_2(E \cup p_1 \cup p_2)$$

pela minimalidade de M_2 em $\Phi(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ já observada no final da seção anterior, temos que $\rho_{M_2}(\{p_1,p_2\}) \geq \rho_{N'}(\{p_1,p_2\}) = 2$. Portanto $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ é 2-compatível, donde *ii*.(a). Seja então $\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}$ o empilhamento de fechados de M determinado pelo filtro 2-compatível $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. É fácil verificar que $\mathcal{E}^{(1)} \subseteq \mathcal{E}_1^{(1)}$ usando o fato de que $\rho_{M_2}(Z) \geq \rho_{N'}(Z)$ para todo $Z \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$. Verifiquemos que vale *ii*.(b). Sejam $X,Y \in \mathcal{F}_M$ tais que Y cobre X, $X \in \mathcal{E}^{(1)}$ e $Y \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ (a verificação do caso $Y \in \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$ é análoga). Suponha por absurdo que $X \notin \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$. Como $X \subseteq Y$ e $X \in \mathcal{E}^{(1)}$ então $Y \in \mathcal{E}^{(1)} \cup \mathcal{E}^{(0)}$; mas $Y \notin \mathcal{F}_2 \supseteq \mathcal{E}^{(0)}$, logo $Y \in \mathcal{E}^{(1)}$. Portanto $X,Y \in \mathcal{E}_1^{(1)}$, donde $\rho_N(X \cup p_1 \cup p_2) = \rho_M(X) + 1$ e $\rho_N(Y \cup p_1 \cup p_2) = \rho_M(Y) + 1$. Chegamos então à seguinte contradição:

$$p_2 \notin \overline{Y}^{N_1} \text{ e } p_2 \in \overline{X \cup p_1}^{N_1} \subseteq \overline{Y}^{N_1}$$

□

Embora a técnica da demonstração deste resultado em alguns pontos seja praticamente análoga àquela do Teorema 3.1., pareceu-nos importante registrarmos todos os passos para salientarmos as diferenças existentes entre os dois resultados.

Deixamos registrados a seguir vários corolários interessantes do Teorema 4.3.. Muitos deles são na realidade Corolários da prova do Teorema 4.3..

Corolário 4.4. *Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ filtros modulares de M. Então $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são compatíveis se e somente se $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ são pares de filtros modulares compatíveis de M.*

Prova: Podemos supor que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ são não triviais e que $\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ para $i = 1,2$ pois ocorrendo alguma dessas situações a equivalência acima torna-se trivial.

Suponhamos que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ são compatíveis. Nesse caso é fácil ver que a condição *ii*. do Teorema 4.3. está verificada para os pares $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ de filtros modulares de M já que $\mathcal{F}_1 \cap (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_2 \cap (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Logo $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ são compatíveis.

De outro lado, suponhamos que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ são compatíveis. Mostremos que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são compatíveis verificando as condições *ii*.(a) e (b) do

Teorema 4.3.. É claro que vale *ii.*(a), e *ii.*(b) segue do fato de que $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 - (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ e $\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 - (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$.

$\square$

Em [Ch], Cheung apresenta uma prova para o resultado acima, dentro do contexto de subclasses lineares.

Lema 4.5. *Seja $\mathcal{F}$ um filtro modular de M tal que $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_M$. Se $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ são filtros modulares ultra-compatíveis de M tais que $\mathcal{F} = \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, então $\mathcal{F}$ é 2-compatível ou é um filtro principal.*

Prova: Considere o seguinte diagrama de extensões pontuais:

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}]_{M_1}} M_2(E \cup p_1 \cup p_2)$$

Como $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_M$ é claro que $1 \leq \rho_{M_2}(\{p_1, p_2\}) \leq 2$. Se $\mathcal{F}$ é 2-compatível, não há nada a demonstrar. Suponhamos então que $\rho_{M_2}(\{p_1, p_2\}) = 1$. Nesse caso é fácil ver que $[\mathcal{F}]_{M_1} = [\overline{p_1}^{M_1}]$. Usando a ultra-compatibilidade de $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ obtemos $\overline{p_1}^{M_1} \cap E \in \mathcal{F}$. Mostremos que

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{F}_M : \overline{p_1}^{M_1} \cap E \subseteq X\}$$

A inclusão $\supseteq$ é trivial. Verifiquemos a inclusão contrária. Tome $X \in \mathcal{F}$. É claro que $\overline{X}^{M_1} \in [\mathcal{F}]_{M_1}$, logo $\overline{p_1}^{M_1} \subseteq \overline{X}^{M_1}$, donde $\overline{p_1}^{M_1} \cap E \subseteq \overline{X}^{M_1} \cap E = X$. Portanto $\mathcal{F}$ é um filtro modular principal.

$\square$

Considere um filtro modular $\mathcal{F}$ do matróide M sobre o conjunto E tal que $\mathcal{F}, \mathcal{F}$ são ultra-compatíveis. Os seguintes exemplos mostram que no Lema 4.5. a 2-compatibilidade de $\mathcal{F}$ não exclui a possibilidade de $\mathcal{F}$ ser principal (e vice-versa):

(1) $E = \{a, b\}$, $M(E) = \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{F} = \{E\}$ é 2-compatível e principal

(2) $E = \{a, b, c\}$, $M(E) = \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{F} = [a] = \{a, ab, ac, abc\}$ é principal mas não é 2-compatível

(3) $E = \{a, b, c, d, f, g\}$, $M(E) = \mathcal{L}_5(E)$, $\mathcal{F} = [abcd, defg] = \{abcd, defg, abcdefg\}$ é 2-compatível mas não é principal

Corolário 4.6. *Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ filtros modulares de M não triviais. Se $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ são filtros modulares ultra-compatíveis de M onde $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ então $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são filtros modulares compatíveis de M.*

Prova: Pelo Lema anterior distingüimos dois casos:

Caso 1: $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ é filtro modular principal de M
Pela Proposição 1.2. do Capítulo I, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ são pares de filtros modulares ultra-compatíveis e portanto compatíveis. Usando o Corolário anterior concluímos que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são compatíveis.

Caso 2: $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ é um filtro modular 2-compatível de M
Temos então a condição *ii.*(a) do Teorema 4.3. verificada. Mostremos também que vale *ii.*(b). Seja $\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}$ o empilhamento de M determinado pelo filtro modular 2-compatível, $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Afirmo que se $X \in \mathcal{F}_M$, uma condição necessária e suficiente para que $X \in \mathcal{E}^{(1)}$ é que $X \notin \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ e exista $Z \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ tal que Z cobre X. A suficiência segue dos seguintes fatos:

$$\text{se } X \notin \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{E}^{(0)} \text{ então } X \in \mathcal{E}^{(1)} \cup \mathcal{E}^{(2)}$$

$$\text{se } Z \text{ cobre } X \text{ e } Z \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{E}^{(0)} \text{ então } X \in \mathcal{E}^{(0)} \cup \mathcal{E}^{(1)}$$

Verifiquemos a necessidade. Considere o seguinte diagrama de extensões pontuais

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} M_1(E \cup p_1) \xhookrightarrow{[\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2]_{M_1}} M_2(E \cup p_1 \cup p_2)$$

Como $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ são ultra-compatíveis temos pelo item *iii.* do Teorema 2.2. do Capítulo I que

$$\rho_{M_2}(X \cup p_1 \cup p_2) = \min_{X \subseteq Z \subseteq E} \{\rho_M(Z) + |(X \cup p_1 \cup p_2) - \overline{Z}^{M_2}|\}$$

Por outro lado, $X \in \mathcal{E}^{(1)}$, logo $\rho_{M_2}(X \cup p_1 \cup p_2) = \rho_M(X) + 1$. Combinando as duas expressões de $\rho_{M_2}(X \cup p_1 \cup p_2)$ acima concluímos que existe $Z \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ tal que Z cobre X. Portanto, para todos $X, Y \in \mathcal{F}_M$ tais que Y cobre X, $X \in \mathcal{E}^{(1)}$ e $Y \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ temos que $X \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ já que existe $Z \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ com Z cobrindo X e $Y \neq Z$. Se $Y \in \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$ então por simetria $X \in \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$.
Logo $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ são filtros modulares compatíveis de M.

□

Corolário 4.7. *Sejam $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ filtros modulares compatíveis de M não triviais, e N a extensão de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ dada pelo seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} & N_1(E \cup p_1) \arrow[dr, "\mathcal{F}_2|_{N_1}"] & \\ M(E) \arrow[ur, "\mathcal{F}_1"] \arrow[dr, "\mathcal{F}_2"'] & & N(E \cup p_1 \cup p_2) \\ & N_2(E \cup p_2) \arrow[ur, "\mathcal{F}_1|_{N_2}"'] & \end{tikzcd}$$

Seja também $\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}$ o empilhamento de M determinado pelo filtro modular 2-compatível $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Temos então que para todo $X \subseteq E$ e $Y \subseteq \{p_1, p_2\}$

$$\rho_N(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + |Y - \{p_j : \overline{X}^M \in \mathcal{F}_j\}|, \rho_M(X) + i)$$

onde $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$.

Prova: Seja $\mathcal{E}_1^{(0)} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{E}_1^{(1)}, \mathcal{E}_1^{(2)}$ o empilhamento da extensão N de M. Seja também a extensão N' de M sobre $E \cup p_1 \cup p_2$ de empilhamento $\mathcal{E}_2^{(0)} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{E}_2^{(1)} = \mathcal{E}^{(1)} \cup (\mathcal{F}_1 \triangle \mathcal{F}_2), \mathcal{E}_2^{(2)} = \mathcal{E}^{(2)} - (\mathcal{F}_1 \triangle \mathcal{F}_2)$ e função posto $\rho_{N'}$, construída na demonstração da implicação *ii.*$\Rightarrow$*i.* do Teorema 4.3.. Na prova desse mesmo Teorema, ficou claro que

(I) $\mathcal{E}^{(1)} \subseteq \mathcal{E}_1^{(1)}$

(II) $\rho_{N'}(X) \leq \rho_N(X)$ para todo $X \subseteq E \cup p_1 \cup p_2$

De (I) e do fato de que $\mathcal{F}_1 \triangle \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{E}_1^{(1)}$ temos $\mathcal{E}_2^{(1)} \subseteq \mathcal{E}_1^{(1)}$. Portanto, combinando com (II) obtemos $\mathcal{E}_2^{(i)} = \mathcal{E}_1^{(i)}$ para $i = 0, 1, 2$ donde concluímos que $N' = N$. Observe que para todo $X \subseteq E$ e $Y \subseteq \{p_1, p_2\}$ a expressão de ρ_N do enunciado do Teorema é uma forma equivalente para a expressão de $\rho_{N'}$ dada na prova do Teorema 4.3..

□

Corolário 4.8. *Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n, \mathcal{F}$ filtros modulares de M tais que para todo $i = 1, 2, ..., n$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_i$ e $\bigcap_{1 \leq j < n} \mathcal{F}_j \neq \mathcal{F}$. Se para todo $i = 1, 2, ..., n$, $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}$ são filtros modulares compatíveis de M então para todo $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, $\bigcap_{j \in I} \mathcal{F}_j$, $\mathcal{F}$ são filtros modulares compatíveis de M.*

Prova: Suponha que $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}$ são compatíveis para todo $i = 1, 2, ..., n$ e seja $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ arbitrário. Se $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M$ ou $\bigcap_{j \in I} \mathcal{F}_j = \mathcal{F}_M$ é claro que $\bigcap_{j \in I} \mathcal{F}_j$, $\mathcal{F}$

são ultra-compatíveis e em particular compatíveis. Se $\bigcap_{j\in I} \mathcal{F}_j = \mathcal{F}$, trivialmente $\bigcap_{j\in I} \mathcal{F}_j$, $\mathcal{F}$ são compatíveis. Podemos supor então que $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_M \neq \bigcap_{j\in I} \mathcal{F}_j \neq \mathcal{F}$; nesse caso, para concluirmos que $\mathcal{F}, \bigcap_{j\in I} \mathcal{F}_j$ são compatíveis, mostraremos que a condição *ii.* do Teorema 4.3 está satisfeita. É claro que $\mathcal{F} = (\bigcap_{j\in I} \mathcal{F}_j) \cap \mathcal{F}$ é 2-compatível, já que $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n$, portanto *ii.*(a) está verificada. A condição *ii.*(b) segue da compatibilidade de $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}$ para $i = 1, 2, ..., n$ e dos seguintes fatos

$$\text{se } X \in \mathcal{F}_j - \mathcal{F} \text{ para todo } j \in I \text{ então } X \in (\bigcap_{j\in I} \mathcal{F}_j) - \mathcal{F}$$

$$\text{se existe } i \in I \text{ tal que } X \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_i \text{ então } X \in \mathcal{F} - (\bigcap_{j\in I} \mathcal{F}_j)$$

□

No próximo Corolário obtemos uma caracterização das extensões N de M sobre $E \cup P$ tais que $N(P)$ é uma linha sem laços e sem elementos paralelos.

Corolário 4.9. *Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ filtros modulares de M tais que para todos i, j com $1 \leq i < j \leq n$, $\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}_j$ e $\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}_M$. São equivalentes:*

i. Existe uma extensão N de M sobre $E \cup \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ tal que

$$N(\{p_1, p_2, ..., p_n\}) = \mathcal{L}_2(\{p_1, p_2, ..., p_n\})$$

e para todo $i = 1, 2, ..., n$,

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_i} N(E \cup p_i)$$

ii. (a) $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ são dois a dois compatíveis

(b) $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap ... \cap \mathcal{F}_n$ para todos i, j com $1 \leq i < j \leq n$

Prova: É fácil ver que $i. \Rightarrow ii.$; observe que para todos i, j com $1 \leq i < j \leq n$, $\{p_1, p_2, ..., p_n\} \subseteq \overline{\{p_i, p_j\}}^N$ e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j &= \{X \in \mathcal{F}_M : \rho_N(X \cup p_i \cup p_j) = \rho_M(X)\} \\ &= \{X \in \mathcal{F}_M : \rho_N(X \cup \{p_1, p_2, ..., p_n\}) = \rho_M(X)\} \\ &= \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap ... \cap \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

A prova da implicação *ii.*$\Rightarrow$*i.* é semelhante à prova da mesma implicação do Teorema 4.3. ; tomando $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{F}_n$ temos por *ii.*(a) e (b) que $\mathcal{F}$ é 2-compatível. Imitando a demonstração do Teorema 4.3., provamos que

- $\mathcal{E}_1^{(0)} = \mathcal{E}^{(0)}$ $\mathcal{E}_1^{(1)} = \mathcal{E}^{(1)} \cup (\bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathcal{F}_i - \mathcal{F})$ $\mathcal{E}_1^{(2)} = \mathcal{E}^{(2)} - (\bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathcal{F}_i - \mathcal{F})$ é um empilhamento de M, onde $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}$ é o empilhamento determinado pelo filtro modular 2-compatível $\mathcal{F}$.

- A função ρ_N sobre o conjunto das partes de $E \cup \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ definida por:
para todo $X \subseteq E$ e $Y \subseteq \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ tal que $|Y| \geq 2$,

$$\rho_N(X) = \rho_M(X)$$
$$\rho_N(X \cup p_i) = \begin{cases} \rho_M(X), & \text{se } \overline{X}^M \in \mathcal{F}_i \\ \rho_M(X) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\rho_N(X \cup Y) = \rho'(X \cup Y)$$

satisfaz os axiomas de posto, onde ρ' é a função posto da extensão normal N' de M sobre $E \cup \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ determinada pelo empilhamento $\mathcal{E}_1^{(0)}, \mathcal{E}_1^{(1)}, \mathcal{E}_1^{(2)}$ tal que $N'(\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}) = \mathcal{L}_2(\{p_1, p_2, \ldots, p_n\})$.

Portanto o matróide N com a função posto ρ_N verifica *i.*.

$\square$

Imitando a prova do Corolário 4.7. obtemos a seguinte expressão para a função posto do matróide N do item *i.* do Corolário anterior:

para todo $X \subseteq E$ e $Y \subseteq \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$,

$$\rho_N(X \cup Y) = \min(\rho_M(X) + |Y - \{p_j : \overline{X}^M \in \mathcal{F}_j\}|, \rho_M(X) + i)$$

onde $\overline{X}^M \in \mathcal{E}^{(i)}$ e $\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}$ é o empilhamento de M determinado pelo filtro modular 2-compatível $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{F}_n$.

Capítulo III

Compatibilidade de Subclasses Lineares

Usualmente, extensões pontuais de matróides são caracterizadas em termos de filtros modulares de fechados. Neste capítulo apresentaremos uma caracterização equivalente bastante conhecida, em termos de subclasses lineares, introduzida inicialmente por Crapo em 1965. A partir dela, estabeleceremos uma condição necessária e suficiente para que dois filtros modulares comparáveis por inclusão sejam compatíveis. Com isso conseguiremos na realidade uma caracterização para todos os pares de filtros modulares compatíveis, bastando lembrar o Corolário 4.4. do Capítulo II, que reduz o problema da compatibilidade de pares de filtros modulares quaisquer para pares de filtros modulares comparáveis.

Na primeira seção, além de examinarmos a relação existente entre as subclasses lineares e os filtros modulares de um matróide, apresentaremos uma construção sequencial natural de subclasses lineares, ferramenta importante a ser utilizada posteriormente.

A última seção será inteiramente dedicada ao problema da compatibilidade de pares de subclasses lineares comparáveis por inclusão.

1. A RELAÇÃO ENTRE SUBCLASSES LINEARES E FILTROS MODULARES

Dado um filtro modular $\mathcal{F}$ de M, concentremos nossa atenção nos hiperplanos de $\mathcal{F}$. Sejam X, Y e Z hiperplanos distintos tais que $X, Y \in \mathcal{F}$ e X, Y, Z cobrem $X \cap Y \cap Z$. Nesse caso não é difícil verificar que $X \cap Y = X \cap Y \cap Z$. Logo X, Y formam um par modular, donde concluímos que $X \cap Y \in \mathcal{F}$. Mas então $Z \in \mathcal{F}$, já que Z cobre $X \cap Y = X \cap Y \cap Z$. Veremos nesta seção que essa propriedade é suficiente para caracterizar os filtros modulares.

No que se segue $\mathcal{H}$ denota a família dos hiperplanos ou copontos de M. Diremos que $X, Y, Z \in \mathcal{H}$ distintos formam uma *tripla geradora* se X, Y, Z cobrem $X \cap Y \cap Z$, ou o que é equivalente, se $X \cap Y \cap Z$ é uma colinha de M.

Estamos agora em condições de definir subclasses lineares. Uma subfamília $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$ é uma *subclasse linear* de M se para toda tripla geradora X, Y, Z tal que $X, Y \in \mathcal{S}$ temos também que $Z \in \mathcal{S}$.

No início da seção ficou claro que se $\mathcal{F}$ é um filtro modular de M, então $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ é uma subclasse linear. Uma pergunta natural que imediatamente nos ocorre, é se a partir de uma subclasse linear podemos obter um filtro modular de uma maneira assim tão simples. A resposta é dada pelo próximo Lema.

Lema 1.1. *Seja $\mathcal{S}$ uma subclasse linear de M e considere o conjunto $\mathcal{F}$ dos fechados X de M tais que todo hiperplano contendo X está em $\mathcal{S}$. Temos então que $\mathcal{F}$ é um filtro modular de M.*

Prova: Por definição, se $X, Y \in \mathcal{F}_M$, $X \in \mathcal{F}$ e $X \subseteq Y$ então $Y \in \mathcal{F}$. Agora, suponha por absurdo que existem $X, Y \in \mathcal{F}$ par modular tais que $X \cap Y \notin \mathcal{F}$. Pela hipótese, $\rho_M(X \cap Y) < \rho M - 2$. Seja $H \in \mathcal{H} - \mathcal{S}$ tal que $X \cap Y \subseteq H$, e seja $Z \in \mathcal{F}_M$ tal que $X \cap Y \subseteq Z$ e H cobre Z. É fácil ver que $\overline{X \cup Z}^M, \overline{Y \cup Z}^M \in \mathcal{S}$ e $\overline{X \cup Z}^M \cap \overline{Y \cup Z}^M \cap H = Z$. Mas então $H \in \mathcal{S}$, uma contradição. Portanto $\mathcal{F}$ é um filtro modular de M.

$\square$

Toda essa discussão inicial nos permite finalmente estabelecer a bijeção entre subclasses lineares e filtros modulares.

Proposição 1.2. *A função que a cada subclasse linear $\mathcal{S}$ de M associa o filtro modular $\mathcal{F}$ dado pelo Lema 1.1., é uma bijeção entre a família das subclasses lineares e a família dos filtros modulares de M.*

Prova: O filtro modular $\mathcal{F}$ dado pelo Lema 1.1. pode ser descrito da seguinte forma

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{F}_M : \text{se } X \subseteq Y \text{ e } Y \in \mathcal{H} \text{ então } Y \in \mathcal{S}\}$$

É evidente que $\mathcal{S} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$, donde se conclui que a função acima é injetora. Para mostrarmos que ela também é sobrejetora, basta provarmos que dado um filtro modular $\mathcal{F}$ de M, ele coincide com o seguinte filtro modular

$$\mathcal{F}_1 = \{X \in \mathcal{F}_M : \text{se } X \subseteq Y \text{ e } Y \in \mathcal{H} \text{ então } Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}\}$$

isto é, $\mathcal{F}$ é imagem da subclasse linear $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$.

Seja $X \in \mathcal{F}$. Se $X \subseteq Y$ e $Y \in \mathcal{H}$ é claro que $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ pois $\mathcal{F}$ é filtro modular. Logo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$.

Agora suponhamos por absurdo que existe $X \in \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}$. Posso tomar X de maior posto possível com essa propriedade. Temos que $\rho_M(X) < \rho M - 1$ pois caso contrário $X \in (\mathcal{F} \cap \mathcal{H}) \cup E \subseteq \mathcal{F}$, uma contradição. Tome $Y \in \mathcal{F}_1$ tal que Y cobre X. Pela maximalidade do posto de X em relação a elementos de $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}$, devemos ter $Y \in \mathcal{F}$. Um raciocínio simples mostra que existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \cap Y = X$. Note que $H \in \mathcal{F}$ já que $X \in \mathcal{F}_1$ e $X \subseteq H \in \mathcal{H}$. Temos também que

$$\begin{aligned}
\rho_M(H) + \rho_M(Y) &= \rho_M(H) + \rho_M(X) + 1 \\
&= \rho M + \rho_M(X) \\
&= \rho_M(H \cup Y) + \rho_M(H \cap Y)
\end{aligned}$$

Portanto $H, Y \in \mathcal{F}$ formam um par modular em M, donde $X = H \cap Y \in \mathcal{F}$, uma contradição. Logo $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F} = \emptyset$, isto é, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$.

□

Se $\mathcal{S}$ é uma subclasse linear de M e $\mathcal{F}$ é o filtro modular dado pelo Lema 1.1., diremos que $\mathcal{F}$ é o *filtro modular associado* a $\mathcal{S}$, ou que $\mathcal{S}$ é a *subclasse linear associada* a $\mathcal{F}$.

Passemos a descrever uma construção sequencial de subclasses lineares que, embora simples e natural, será útil na próxima seção. A idéia é partir de uma subfamília de $\mathcal{H}$ e, a cada passo, incluir os hiperplanos que formam triplas geradoras com pares de fechados do passo anterior. Formalizando, seja $\mathcal{A} \in \mathcal{H}$. Chamaremos de *sequência geradora* de $\mathcal{A}$ em M a sequência de subfamílias de $\mathcal{H}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \ldots$ onde para cada $i = 1, 2, \ldots$, $Z \in \mathcal{A}_i$ se e somente se $Z \in \mathcal{A}_{i-1}$ ou existem $X, Y \in \mathcal{A}_{i-1}$ distintos tais que X, Y, Z formam uma tripla geradora.

Proposição 1.3. *Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ e $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0}^{\infty}$ sua sequência geradora. Então $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$ é a menor subclasse linear de M contendo $\mathcal{A}$.*

Prova: Que $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$ é uma subclasse linear que contém $\mathcal{A}$ é evidente. Dada $\mathcal{S}$ uma subclasse linear contendo $\mathcal{A}$ uma indução trivial mostra que $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{S}$ para todo $i = 0, 1, \dots$ donde obtemos a minimalidade requerida.

$\square$

Observe que a intersecção de duas subclasses lineares é também uma subclasse linear. Portanto, se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ e $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0}^{\infty}$ é sua sequência geradora então

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i = \bigcap \{\mathcal{S}' \text{ subclasse linear de } M : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}'\}$$

2. PARES DE SUBCLASSES LINEARES COMPATÍVEIS

Diremos que duas subclasses lineares são *compatíveis* se seus filtros modulares associados também o forem.

Seja $\mathcal{S}$ uma subclasse linear de M e N uma extensão de M. A subclasse linear

$$\bigcap \{\mathcal{S}' \text{ subclasse linear de } N : \{\overline{X}^N : X \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{S}'\}$$

de N' será denotada por $[\mathcal{S}]_N$, *fecho* de $\mathcal{S}$ em N, e $\{\overline{X}^N : X \in \mathcal{S}\} = \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots$ sua sequência geradora.

Adaptemos a caracterização de pares de filtros modulares compatíveis dada pela Proposição 3.4. do Capítulo II ao contexto de subclasses lineares.

Proposição 2.1. *Sejam $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ subclasses lineares de M e considere as seguintes extensões pontuais*

$$M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_1} N_1(E \cup p_1) \quad \text{e} \quad M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}_2} N_2(E \cup p_2)$$

onde $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ são os filtros modulares associados a $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ respectivamente. Considere também a subclasse linear $[\mathcal{S}_1]_{N_2}$ de N_2 com sequência geradora $\mathcal{S}_1^0, \mathcal{S}_1^1, \dots$

e a subclasse linear $[S_2]_{N_1}$ de N_1 com sequência geradora $S_2^0, S_2^1, \ldots$. Então são equivalentes:

i. S_1, S_2 *são compatíveis*

ii. $S_1 = \{X \in \mathcal{F}_M : \overline{X}^{N_2} \in [S_1]_{N_2}\} = \{X \in \mathcal{F}_M : \overline{X}^{N_2} \in S_1^i, i = 0, 1, \ldots\}$

iii. $S_2 = \{X \in \mathcal{F}_M : \overline{X}^{N_1} \in [S_2]_{N_1}\} = \{X \in \mathcal{F}_M : \overline{X}^{N_1} \in S_2^i, i = 0, 1, \ldots\}$

□

Ao estudarmos a compatibilidade de duas subclasses lineares, o Corolário 4.4. do Capítulo II nos permite restringir a atenção aos pares de subclasses lineares comparáveis por inclusão, como já observado no início deste capítulo. Vamos assumir daqui até o final da seção que estamos nas hipóteses da Proposição 2.1. e que $S_2 \subseteq S_1$.

Analisemos a subclasse linear $[S_2]_{N_1}$ com sequência geradora $\{\overline{W}^{N_1} : W \in S_2\} = S_2^0, S_2^1, \ldots$. Note que como $S_2 \subseteq S_1$, $S_2^0 = \{W \cup p_1 : W \in S_2\}$. Para fixar idéias, tentemos encontrar propriedades dos $W \in S_2^1 - S_2^0$.

Por definição, existem X, $Y \in S_2$ tais que $X \cup p_1$, $Y \cup p_1$, W formam uma tripla geradora de N_1. Existe então Z tal que $W = Z \cup p_1$ e $X \cap Y \subseteq Z$. É fácil ver que $Z \notin \mathcal{H}$, pois caso contrário Z pertenceria a S_2, o que implicaria em $W \in S_2^0$, uma contradição. Logo Z é uma colinha de M que cobre $X \cap Y$ e $Z \notin \mathcal{F}_1$. Propriedades semelhantes são verificadas também quando $W \in S_2^i - S_2^{i-1}$ para $i = 2, 3, \ldots$. Tentaremos organizar essas últimas idéias na próxima definição e no próximo lema.

Definimos a seguinte sequência

$$\emptyset = B_0(S_1, S_2) \subseteq B_1(S_1, S_2) \subseteq B_2(S_1, S_2) \subseteq \ldots$$

de subfamílias do conjunto Col_1 de colinhas de M não cobertas por elementos de S_1, onde para todo $i = 1, 2, \ldots$, $Z \in B_i(S_1, S_2) - B_{i-1}(S_1, S_2)$ se e somente se $Z \in Col_1$ e existem X, Y distintos pertencentes a $S_2 \cup B_{i-1}(S_1, S_2)$ tais que Z cobre $X \cap Y$. Denotaremos por $B(S_1, S_2)$ a união $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i(S_1, S_2)$.

Lema 2.2. *Para cada* $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\{Z \cup p_1 : Z \in S_2 \cup B_i(S_1, S_2)\} \subseteq S_2^i$$

Prova: Por indução sobre i. Se $i = 0$ então $B_0(S_1, S_2) = \emptyset$ e

$$S_2^0 = \{\overline{Z}^{N_1} : Z \in S_2\} = \{Z \cup p_1 : Z \in S_2\}$$

Suponha que $i > 0$ e seja $Z \in S_2 \cup B_i(S_1, S_2)$. Se $Z \in S_2 \cup B_{i-1}(S_1, S_2)$ então, por hipótese de indução, $Z \cup p_1 \in S_2^{i-1} \subseteq S_2^i$. De outro lado, seja $Z \notin S_2 \cup B_{i-1}(S_1, S_2)$. Então $Z \in B_i(S_1, S_2) - B_{i-1}(S_1, S_2)$. Pela definição dos B_i's temos que $Z \in Col_1$ e existem $X, Y \in S_2 \cup B_{i-1}(S_1, S_2)$ tais que Z cobre $X \cap Y$. Logo $Z \cup p_1$, $X \cup p_1$, $Y \cup p_1$ formam uma tripla geradora em N_1. Novamente usando a hipótese de indução obtemos $X \cup p_1, Y \cup p_1 \in S_2^{i-1}$ donde $Z \cup p_1 \in S_2^i$. Portanto,

$$\{Z \cup p_1 : Z \in S_2 \cup B_i(S_1, S_2)\} \subseteq S_2^i$$

$\square$

Se na Proposição acima valer a igualdade, teremos uma condição necessária e suficiente para que S_1, S_2 sejam compatíveis. Esse fato ficará claro na prova do próximo Teorema onde apresentamos uma caracterização equivalente à essa igualdade que tem a vantagem de detectar exatamente a situação que bloqueia a compatibilidade.

Teorema 2.3 *Sejam S_1, S_2 subclasses lineares de M tais que $S_2 \subseteq S_1$ e seja $\mathcal{F}_1$ o filtro modular associado a S_1. Então são equivalentes:*

i. S_1, S_2 são compatíveis

ii. Não existem $X, Y \in S_2 \cup B(S_1, S_2)$ e $W \in S_1 - S_2$ tais que $X \cap Y$ é coplano de M, $X \cap Y \notin \mathcal{F}_1$ e $X \cap Y \subseteq W$

Prova: No que se segue $M(E) \xrightarrow{\mathcal{F}_1} N_1(E \cup p_1)$ e $\{S_2^i\}_{i=0}^{\infty}$ a sequência geradora da subclasse linear $[S_2]_{N_1}$.

Inicialmente mostremos que *i.*$\Rightarrow$*ii.*. Suponhamos por absurdo que S_1, S_2 são compatíveis e que existem X, $Y \in S_2 \cup B(S_1, S_2)$ e $W \in S_1 - S_2$ tais que $X \cap Y$ é um coplano de M, $X \cap Y \notin \mathcal{F}_1$ e $X \cap Y \subseteq W$. Existe $i \geq 0$ tal que X, $Y \in S_2 \cup B_i(S_1, S_2)$, e então pelo Lema anterior, $X \cup p_1, Y \cup p_1 \in S_2^i$. Como $X \cap Y$ é um coplano de M e $X \cap Y \notin \mathcal{F}_1$ temos que $(X \cap Y) \cup p_1$ é uma colinha de N_1. É claro que $W \cup p_1$ é um coponto de N_1 e $(X \cup p_1) \cap (Y \cup p_1) = (X \cap Y) \cup p_1 \subseteq W \cup p_1$, donde $W \cup p_1 \in S_2^i$. Como S_1, S_2 são compatíveis, temos pela Proposição 2.1. que $W \in S_2$, uma contradição.

Verifiquemos agora que *ii.*$\Rightarrow$*i.*. Mostremos por indução sobre i que

$$S_2^i \subseteq \{Z \cup p_1 : Z \in S_2 \cup B_i(S_1, S_2)\}$$

pois nesse caso, pelo Lema 2.2., temos na realidade igualdade. Então $\{X \in \mathcal{F}_M : \overline{X}^{N_1} \in S_2^i\} \subseteq S_2$, logo $S_2 = \{X \in \mathcal{F}_M : \overline{X}^{N_1} \in S_2^i, i = 0,1,...\}$ e pela Proposição 2.1., S_1, S_2 seriam compatíveis. Se $i = 0$,

$$S_2^0 = \{Z \cup p_1 : Z \in S_2\} = \{Z \cup p_1 : Z \in S_2 \cup B_0(S_1, S_2)\}$$

Suponha então que $i > 0$ e seja $W \in S_2^i$. Se $W \in S_2^{i-1}$ então por hipótese de indução

$$W \in \{Z \cup p_1 : Z \in S_2 \cup B_{i-1}(S_1, S_2)\} \subseteq \{Z \cup p_1 : Z \in S_2 \cup B_i(S_1, S_2)\}$$

Tomemos então $W \in S_2^i - S_2^{i-1}$. Pela definição de S_2^i, existem $X, Y \in S_2^{i-1}$ tais que X, Y, W formam uma tripla geradora em N_1. Examinemos os seguintes fechados de M, $X - p_1$, $Y - p_1$ e $W - p_1$. Como $X, Y \in S_2^{i-1}$, por hipótese de indução temos que

$$X - p_1, Y - p_1 \in S_2 \cup B_{i-1}(S_1, S_2) \qquad (I)$$

Suponhamos por absurdo que $X - p_1$, $Y - p_1 \in S_2$. Nesse caso, como X, Y, W formam uma tripla geradora em N_1, temos que $X - p_1$, $Y - p_1$, $W - p_1$ formam uma tripla geradora em M, donde concluímos que $W - p_1 \in S_2$. Mas então $W = \overline{W - p_1}^{N_1} \in S_2^0$, uma contradição já que $W \in S_2^i - S_2^{i-1}$ com $i > 0$. Podemos então supor sem perda de generalidade que $X - p_1 \in B_{i-1}(S_1, S_2)$. Note que $(X - p_1) \cap (Y - p_1) = (X \cap Y) - p_1$ não é um elemento de $\mathcal{F}_1$ pois caso contrário $X - p_1$ seria coberto por um elemento de S_1 e portanto não poderia pertencer a $B_{i-1}(S_1, S_2)$. Resumindo,

$$\mathcal{F}_1 \not\ni (X - p_1) \cap (Y - p_1) \text{ é um coplano de } M \qquad (II)$$

Observe também que

$$(X - p_1) \cap (Y - p_1) \subseteq W - p_1 \qquad (III)$$

Se $W - p_1$ é coponto de M então $W - p_1 \in S_1 - S_2$ e combinando com (I), (II), (III) contradizemos *ii.*. Chegamos à mesma contradição se $W - p_1$ é coberto por algum elemento de S_1. Portanto $W - p_1$ é uma colinha de M não coberta por elementos de S_1. Combinando com (I) temos que $W - p_1 \in B_i(S_1, S_2)$, donde $W \in \{Z \cup p_1 : Z \in S_2 \cup B_i(S_1, S_2)\}$.

□

Capítulo IV

Representabilidade de Quocientes

Cheung e Crapo em [Ch C], introduziram o conceito de feixe de quocientes que descrevem completamente as extensões de um matróide. Veremos neste capítulo que esse conceito nos fornece uma nova direção no estudo da compatibilidade: a teoria da representabilidade de quocientes.

A primeira seção é dedicada à bijeção entre os quocientes elementares e os filtros modulares.

O objetivo da Seção 2 é estabelecer condições sobre uma família de quocientes para que ela determine uma única extensão de um dado matróide.

A Seção 3 é bastante técnica e serve principalmente como preparação para a seção seguinte. Nela examinamos uma construção de uma sequência de quocientes elementares muito utilizada na teoria das extensões.

A última seção trata do problema da representabilidade de quocientes, mais especificamente de pares de quocientes elementares.

1. A RELAÇÃO ENTRE QUOCIENTES E FILTROS MODULARES

Os quocientes elementares têm grande importância neste capítulo. Isso se deve ao fato de que os filtros modulares não triviais de um matróide M estão em correspondência biunívoca com os quocientes elementares de M, a exemplo do que ocorre com as subclasses lineares. Os três lemas a seguir comprovam essa afirmação. O primeiro deles, de caráter mais geral, estabelece uma função que associa um filtro modular de um matróide fixado a cada quociente do mesmo. Infelizmente essa função não é uma bijeção. No entanto, ao restringí-la aos quocientes elementares do matróide, o segundo e o terceiro lema garantem, respectivamente, a sobrejetividade e a injetividade. Nesse ponto aconselhamos o leitor a rever as definições e resultados da Seção 4 das Preliminares.

Lema 1.1. *Sejam M_1, M_2 matróides sobre E tais que M_2 é quociente de M_1. Então o conjunto definido abaixo*

$$\mathcal{M}(M_1 \to M_2) = \{X \in \mathcal{F}_{M_1} : nl(X) = gr(M_1 \to M_2)\}$$

é um filtro modular de M_1. Além disso $\mathcal{M}(M_1 \to M_2)$ é o maior filtro modular de M_1 contido em $\mathcal{F}_{M_2}$.

Prova: Mostremos inicialmente que $\mathcal{M}(M_1 \to M_2)$ é realmente um filtro modular de M_1. Que $\mathcal{M}(M_1 \to M_2)$ satisfaz a propriedade (F1) de filtros modulares segue do item *iii.* da Proposição (Morfismo Forte 1) das Preliminares. A propriedade (F2) é decorrência de (F1) combinado com o item *iv.* da Proposição (Morfismo Forte 2) também das Preliminares.

Prosseguindo, suponha que $\mathcal{M}(M_1 \to M_2)$ não seja um subconjunto de $\mathcal{F}_{M_2}$. Isso equivale a dizer que existe $X \in \mathcal{M}(M_1 \to M_2)$ tal que $\overline{X}^{M_2} - X \neq \emptyset$. Tome então $x \in \overline{X}^{M_2} - X$. Nesse caso, $\overline{X \cup x}^{M_2} \in \mathcal{M}(M_1 \to M_2)$, o que nos conduz ao seguinte absurdo

$$\begin{aligned} gr(M_1 \to M_2) &= nl(X \cup x) \\ &= \rho_{M_1}(X \cup x) - \rho_{M_2}(X \cup x) \\ &= \rho_{M_1}(X) + 1 - \rho_{M_2}(X) = gr(M_1 \to M_2) + 1 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{M}(M_1 \to M_2) \subseteq M_2$.

Resta ainda provarmos que $\mathcal{M}(M_1 \to M_2)$ é o maior filtro modular de M_1 totalmente contido em $\mathcal{F}_{M_2}$. Suponha que $\mathcal{F}$ seja um filtro modular de M_1 que contém propriamente o filtro $\mathcal{M}(M_1 \to M_2)$. Existe então um hiperplano H de M_1 tal que $H \in \mathcal{F} - \mathcal{M}(M_1 \to M_2)$. Com isso obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}(\rho M_1 - 1) - \rho_{M_2}(H) = \rho_{M_1}(H) - \rho_{M_2}(H) = nl(H) \\ < gr(M_1 \to M_2)\end{aligned}$$

Assim, $\rho_{M_2}(X) = \rho M_2$, o que implicaria que $H \notin \mathcal{F}_{M_2}$, pois caso contrário teríamos $H = E \in \mathcal{F} \cap \mathcal{M}(M_1 \to M_2)$, um absurdo. Logo $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{F}_{M_2}$.

□

Lema 1.2. *Sejam $\mathcal{F}$ um filtro modular de M não trivial e a extensão pontual $M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}} N(E \cup p)$. Então N/p é quociente elementar de M e $\mathcal{F} = \mathcal{M}(M \to N/p)$.*

Prova: Como N é a extensão pontual de M por $\mathcal{F}$ sabemos que

$$\mathcal{F}_N = \{X \cup p : X \in \mathcal{F}\} \cup (\mathcal{F}_M - \mathcal{F}) \cup \{X \cup p : X \in \mathcal{F}_M - \mathcal{F} \\ X \text{ não é coberto por elemento de } \mathcal{F}\}$$

Logo, lembrando as propriedades da operação de contração em matróides, $\rho N/p = \rho M - 1$ já que $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_M$ e o conjunto dos fechados de N/p é dado por

$$\mathcal{F}_{N/p} = \mathcal{F} \cup \{X \in \mathcal{F}_M - \mathcal{F} : X \text{ não é coberto por elemento de } \mathcal{F}\}$$

Assim é fácil ver que N/p é quociente elementar de M.

Mostremos que $\mathcal{F} = \mathcal{M}(M \to N/p)$. Para isso basta verificarmos que $\mathcal{M}(M \to N/p) \subseteq \mathcal{F}$ pois nesse caso a igualdade segue da maximalidade de $\mathcal{M}(M \to N/p)$ em relação aos filtros modulares de M contidos em $\mathcal{F}_{N/p}$. Seja $X \in \mathcal{M}(M \to N/p)$, isto é, $nl(X) = gr(M \to N/p)$. Mas

$$nl(X) = \rho_M(X) - \rho_{N/p}(X) = \rho_M(X) - \rho_N(X \cup p) + 1$$

$$gr(M \to N/p) = \rho M - \rho N/p = \rho M - \rho N + 1 = 1$$

Logo, $\rho_M(X) = \rho_N(X \cup p)$, o que implica que $X \in \mathcal{F}$.

□

Lema 1.3. *Seja Q um quociente elementar de M e considere a extensão pontual $M(E) \xhookrightarrow{\mathcal{F}} N(E \cup p)$ onde $\mathcal{F} = \mathcal{M}(M \to Q)$. Então $Q = N/p$.*

Prova: Observe que $\mathcal{F}$ é não trivial pois Q é quociente elementar de M. Vamos mostrar que $\mathcal{F}_{N/p} = \mathcal{F}_Q$. Lembremos que

$$\mathcal{F}_{N/p} = \mathcal{F} \cup \{X \in \mathcal{F}_M - \mathcal{F} : X \text{ não é coberto por elemento de } \mathcal{F}\}$$

Seja $X \in \mathcal{F}_Q$. Suponha por absurdo que $X \notin \mathcal{F}_{N/p}$, isto é, que $X \notin \mathcal{F}$ e existe $x \in E$ tal que $\overline{X \cup x}^M \in \mathcal{F}$. Com isso temos $nl(X) = 0$, $nl(X \cup x) = 1$ e $\rho_M(X \cup x) = \rho_M(X) + 1$, donde se conclui que $\rho_Q(X \cup x) = \rho_Q(X)$, ou equivalentemente, $x \in \overline{X}^Q = X = \overline{X}^M$, uma contradição. Assim $\mathcal{F}_Q \subseteq \mathcal{F}_{N/p}$.

A inclusão contrária também é verdadeira. De fato, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_Q$, como já foi observado anteriormente, e suponha que $X \in \mathcal{F}_M - \mathcal{F}$ não é coberto por elemento de $\mathcal{F}$. Se $x \in \overline{X}^Q$, como X, $X \cup x \notin \mathcal{F}$, então

$$\rho_M(X \cup x) = \rho_Q(X \cup x) = \rho_Q(X) = \rho_M(X)$$

e portanto $x \in \overline{X}^M = X$, o que mostra que $X \in \mathcal{F}_Q$. Concluímos finalmente que $Q = N/p$.

□

2. FEIXES DE QUOCIENTES

Seja N uma extensão de M sobre $E \cup P$. O *feixe de quocientes* de M determinado por N é definido como sendo a família

$$\{(N/Y)(E) : Y \text{ é fechado de } N(P)\}$$

Denotaremos $(N/Y)(E)$ por Q_Y. Vejamos algumas propriedades dessa família.

Proposição 2.1. *Seja N uma extensão de M sobre $E \cup P$ e denote $N(P)$ por R. Então o feixe de quocientes de M determinado por N tem as seguintes propriedades:*

(Q1) $Q_\emptyset = M$

(Q2) Se X, $Y \in \mathcal{F}_R$ e Y cobre X então Q_Y é quociente de Q_X e $gr(Q_X \to Q_Y) \leq 1$

(Q3) Sejam $X, Y \in \mathcal{F}_R$ tais que $X \subseteq Y$. Definimos

$$\mathcal{M}(X,Y) = \{Z \in \mathcal{F}_{Q_X} : nl_{Q_X \to Q_Y}(Z) = \rho_R(Y) - \rho_R(X)\}$$

Temos então que $\mathcal{M}(X,Y)$ é um filtro modular de Q_X e, além disso, se X, $Y \in \mathcal{F}_R$ são tais que X, Y cobrem $X \cap Y$ então

$$\mathcal{M}(X \cap Y, X) \cap \mathcal{M}(X \cap Y, Y) = \mathcal{M}(X \cap Y, \overline{X \cup Y}^R)$$

Prova: (Q1) é trivial. Tome X, $Y \in \mathcal{F}_R$ tal que Y cobre X. Então X, Y satisfazem (Q2), isto é, Q_Y é quociente elementar de Q_X. De fato, seja $Z \in Q_Y$. Segue das definições de contração e restrição que existe $Z' \in \mathcal{F}_N$ tal que $Y \subseteq Z'$ e $Z = (Z' - Y) \cap E$. Uma vez que $X \subseteq Y \subseteq P$, resulta que $Z = (Z' - X) \cap E$, e portanto $Z \in Q_X$. Além disso é fácil ver que $gr(Q_X \to Q_Y) \leq \rho_R(Y) - \rho_R(X) = 1$.

Verifiquemos (Q3). Tome inicialmente X, $Y \in \mathcal{F}_R$ tais que $X \subseteq Y$ e $\mathcal{M}(X,Y)$ como definido no enunciado. Decorre facilmente de (Q2) que Q_Y é quociente de Q_X. Aplicando o item *iii.* da Proposição (Morfismo Forte 1) das Preliminares temos a seguinte desigualdade para todo $Z \in \mathcal{F}_{Q_X}$

$$nl_{Q_X \to Q_Y}(Z) \leq gr(Q_X \to Q_Y) \leq \rho_R(Y) - \rho_R(X)$$

Logo, se $gr(Q_X \to Q_Y) = \rho_R(Y) - \rho_R(X)$ então $\mathcal{M}(X,Y) = \mathcal{M}(Q_X \to Q_Y)$, caso contrário $\mathcal{M}(X,Y) = \emptyset$, o que prova que $\mathcal{M}(X,Y)$ é realmente um filtro modular de Q_X.

Considere agora X, $Y \in \mathcal{F}_R$ tais que X, Y cobrem $X \cap Y$ e provemos que $\mathcal{M}(X \cap Y, X) \cap \mathcal{M}(X \cap Y, Y) = \mathcal{M}(X \cap Y, \overline{X \cup Y}^R)$ verificando as duas inclusões possíveis. Tome $Z \in \mathcal{M}(X \cap Y, X) \cap \mathcal{M}(X \cap Y, Y)$. Por definição, $\rho_{Q_{X \cap Y}}(Z) = \rho_{Q_X}(Z) + 1 = \rho_{Q_Y}(Z) + 1$. Isso implica que $\rho_N(Z \cup (X \cap Y)) = \rho_N(Z \cup X) = \rho_N(Z \cup Y)$ lembrando que os elementos do feixe são contrações seguidas de restrições do matróide N. Mas então

$$\begin{aligned}
\rho_N(Z \cup \overline{X \cup Y}^R) &\geq \rho_N(Z \cup (X \cap Y)) \\
&= \rho_N(Z \cup X) + \rho_N(Z \cup Y) - \rho_N(Z \cup (X \cap Y)) \\
&\geq \rho_N(Z \cup \overline{X \cup Y}^R)
\end{aligned}$$

e portanto $\rho_N(Z \cup \overline{X \cup Y}^R) = \rho_N(Z \cup (X \cap Y))$. Usamos esse fato para concluir que

$$\begin{aligned}
\rho_{Q_{\overline{X \cup Y}^R}}(Z) &= \rho_N(Z \cup \overline{X \cup Y}^R) - \rho_N(\overline{X \cup Y}^R) \\
&= \rho_N(Z \cup (X \cap Y)) - \rho_N(X \cap Y) - 2 \\
&= \rho_{Q_{X \cap Y}}(Z) - 2
\end{aligned}$$

Logo $Z \in \mathcal{M}(X \cap Y, \overline{X \cup Y}^R)$. De outro lado, fixe agora $Z \in \mathcal{M}(X \cap Y, \overline{X \cup Y}^R)$. Assim $\rho_{Q_{X \cap Y}}(Z) = \rho_{Q_{\overline{X \cup Y}^R}}(Z) + 2$, ou de outra forma, $\rho_N(Z \cup \overline{X \cup Y}^R) = \rho_N(Z \cup (X \cap Y))$. Mas $\rho_N(Z \cup (X \cap Y)) \leq \rho_N(Z \cup X) \leq \rho_N(Z \cup \overline{X \cup Y}^R)$ e então $\rho_N(Z \cup X) = \rho_N(Z \cup (X \cap Y))$, portanto

$$\begin{aligned}
\rho_{Q_X}(Z) &= \rho_N(Z \cup X) - \rho_N(X) \\
&= \rho_N(Z \cup (X \cap Y)) - \rho_N(X \cap Y) - 1 \\
&= \rho_{Q_{X \cap Y}}(Z) - 1
\end{aligned}$$

donde se conclui que $Z \in \mathcal{M}(X \cap Y, X)$. Analogamente mostra-se que $Z \in \mathcal{M}(X \cap Y, Y)$.

□

Vale ressaltar que em (Q2), $gr(Q_X \to Q_Y) = 0$ se e somente se $Q_X = Q_Y$, como mostra o resultado seguinte.

Lema 2.2. *Sejam M_1, M_2 matróides sobre E tais que M_2 é quociente de M_1. Então $\rho M_1 = \rho M_2$ se e somente se $M_1 = M_2$.*

Prova: A necessidade é evidente. Para verificarmos a suficiência fixemos $X \subseteq E$. Como M_2 é quociente de M_1 é claro que $\rho_{M_2}(X) \leq \rho_{M_1}(X)$, e aplicando o item *iii.* da Proposição (Morfismo Forte 1) das Preliminares, temos em particular que $\rho M_2 - \rho_{M_2}(X) \leq \rho M_1 - \rho_{M_1}(X)$. Mas por hipótese, $\rho M_1 = \rho M_2$, logo $\rho_{M_2}(X) \geq \rho_{M_1}(X)$. Portanto, $\rho_{M_1}(X) = \rho_{M_2}(X)$, donde resulta a igualdade $M_1 = M_2$.

□

O item (Q3) vale num contexto mais geral:

Proposição 2.3. *Se M_1, M_2 e M_3 são matróides sobre E tais que M_3 é quociente de M_2 e M_2 é quociente de M_1 então*

$$\mathcal{M}(M_1 \to M_3) = \mathcal{M}(M_1 \to M_2) \cap \mathcal{M}(M_2 \to M_3)$$

Prova: Se $X \in \mathcal{M}(M_1 \to M_2) \cap \mathcal{M}(M_2 \to M_3)$ então $X \in \mathcal{M}(M_1 \to M_3)$. De fato

$$\begin{aligned} nl_{M_1 \to M_3}(X) &= \rho_{M_1}(X) - \rho_{M_3}(X) \\ &= (\rho_{M_1}(X) - \rho_{M_2}(X)) + (\rho_{M_2}(X) - \rho_{M_3}(X)) \\ &= gr(M_1 \to M_2) + gr(M_2 \to M_3) \\ &= gr(M_1 \to M_3) \end{aligned}$$

De outro lado, seja $X \in \mathcal{M}(M_1 \to M_3)$, isto é, $nl_{M_1 \to M_3}(X) = gr(M_1 \to M_3)$. Assim, $nl_{M_1 \to M_2}(X) + nl_{M_2 \to M_3}(X) = gr(M_1 \to M_2) + gr(M_2 \to M_3)$, mas essa igualdade só é possível se $nl_{M_1 \to M_2}(X) = gr(M_1 \to M_2)$ e $nl_{M_2 \to M_3}(X) = gr(M_2 \to M_3)$. Logo $X \in \mathcal{M}(M_1 \to M_2) \cap \mathcal{M}(M_2 \to M_3)$.

□

Teorema 2.4. *Sejam R um matróide sobre P e $\{Q(Y) : Y \in \mathcal{F}_R\}$ uma família de quocientes de M satisfazendo as propriedades (Q1), (Q2) e (Q3) da Proposição 2.1.. Então existe uma única extensão N de M sobre $E \cup P$ tal que $N(P) = R$ e $Q(Y) = Q_Y = (N/Y)(E)$ para todo $Y \in \mathcal{F}_R$.*

Prova: Definimos a função ρ_N sobre o conjunto das partes de $E \cup P$ da seguinte maneira

para todo $X \subseteq E$ e $Y \subseteq P$,

$$\rho_N(X \cup Y) = \rho_{Q(\overline{Y}^R)}(X) + \rho_R(Y)$$

Mostremos que ρ_N satisfaz os axiomas de posto (R2) e (R3) já que o axioma (R1) é consequência imediata da definição de ρ_N. Para não carregar a notação, denotaremos $\rho_{Q(\overline{Y}^R)}$ por ρ_Y para cada $Y \subseteq P$.

(R2) Sejam $X \subseteq E$, $Y \subseteq P$ e $w \in E \cup P$. Dividindo em casos:

Caso 1: $w \in E$

Como ρ_Y satisfaz (R2) então

$$\rho_Y(X) \leq \rho_Y(X \cup w) \leq \rho_Y(X) + 1$$

Desse fato segue que

$$\rho_N(X \cup Y) \leq \rho_N(X \cup Y \cup w) \leq \rho_N(X \cup Y) + 1$$

Caso 2: $w \in P$

Se $w \in \overline{Y}^R$ então $\rho_Y = \rho_{Y \cup w}$ e $\rho_R(Y) = \rho_R(Y \cup w)$. Assim

$$\rho_N(X \cup Y) = \rho_N(X \cup Y \cup w) < \rho_N(X \cup Y) + 1$$

Por outro lado, se $w \notin \overline{Y}^R$ decorre de (Q2) que $Q(\overline{Y \cup w}^R)$ é quociente de $Q(\overline{Y}^R)$ e $gr(Q(\overline{Y}^R) \to Q(\overline{Y \cup w}^R)) \leq 1$, logo $\rho_Y(X) - \rho_{Y \cup w}(X) \leq 1$. Temos então que

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup w) &= \rho_{Y \cup w}(X) + \rho_R(Y \cup w)\\ &= \rho_Y(X) + \rho_R(Y) + (1 \text{ ou } 0)\\ &= \rho_N(X \cup Y) + (1 \text{ ou } 0)\end{aligned}$$

(R3) Sejam $X \subseteq E$, $Y \subseteq P$ e $w, z \in E \cup P$ tais que $\rho_N(X \cup Y \cup w) = \rho_N(X \cup Y \cup z) = \rho_N(X \cup Y)$. Temos então três casos a considerar:

Caso 1: $w, z \in E$

Decorre da hipótese e da definição de ρN que

$$\rho_Y(X \cup w) = \rho_Y(X \cup z) = \rho_Y(X)$$

Novamente observando que ρ_Y é uma função posto concluímos que $\rho_Y(X \cup w \cup z) = \rho_Y(X)$. Logo

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup w \cup z) &= \rho_Y(X \cup w \cup z) + \rho_R(Y)\\ &= \rho_Y(X) + \rho_R(Y)\\ &= \rho_N(X \cup Y)\end{aligned}$$

Caso 2: $w \in E$ e $z \in P$

Da igualdade $\rho_N(X \cup Y \cup w) = \rho_N(X \cup Y)$ segue que w está no fecho de X em $Q(\overline{Y}^R)$ que será denotado por $\overline{X}^Y$. Se $z \in \overline{Y}^N$ então

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup w \cup z) &= \rho_{Y \cup z}(X \cup w) + \rho_R(Y \cup z)\\ &= \rho_Y(X) + \rho_R(Y)\\ &= \rho_N(X \cup Y)\end{aligned}$$

Se $z \notin \overline{Y}^N$ então decorre de (Q2) que $Q(\overline{Y \cup z}^R)$ é quociente de $Q(\overline{Y}^R)$. Do item *ii.* da Proposição (Morfismo Forte 1) das Preliminares, $\overline{X}^Y \subseteq \overline{X}^{Y \cup z}$, logo $w \in \overline{X}^{Y \cup z}$. Assim

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup w \cup z) &= \rho_{Y \cup z}(X \cup w) + \rho_R(Y \cup z)\\ &= \rho_{Y \cup z}(X) + \rho_R(Y \cup z)\\ &= \rho_N(X \cup Y \cup z)\\ &= \rho_N(X \cup Y)\end{aligned}$$

Caso 3: $w, z \in P$

Se $w \in \overline{Y}^R$ ou $w \in \overline{Y \cup z}^R$ então

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup w \cup z) &= \rho_{Y \cup w \cup z}(X) + \rho_R(Y \cup w \cup z)\\ &= \rho_{Y \cup z}(X) + \rho_R(Y \cup z)\\ &= \rho_N(X \cup Y \cup z)\\ &= \rho_N(X \cup Y)\end{aligned}$$

Fato semelhante ocorre se $z \in \overline{Y}^R$ ou $z \in \overline{Y \cup z}^R$. Suponhamos então que $\{w,z\} \cap \overline{Y}^R = \emptyset$ e $w \notin \overline{Y \cup z}^R$. Nesse caso, da igualdade $\rho_N(X \cup Y) = \rho_N(X \cup Y \cup w) = \rho_N(X \cup Y \cup z)$ decorre que $\rho_Y(X) - \rho_{Y \cup w}(X) = 1 = \rho_Y(X) - \rho_{Y \cup z}(X)$, isto é, $X \in \mathcal{M}(\overline{Y}^R, \overline{Y \cup w}^R) \cap \mathcal{M}(\overline{Y}^R, \overline{Y \cup z}^R)$. Por (Q3), $X \in \mathcal{M}(\overline{Y}^R, \overline{Y \cup w \cup z}^R)$, ou melhor, $\rho_Y(X) - \rho_{Y \cup w \cup z}(X) = 2$. Então

$$\begin{aligned}\rho_N(X \cup Y \cup w \cup z) &= \rho_{Y \cup w \cup z}(X) + \rho_R(Y \cup w \cup z)\\ &= \rho_Y(X) + \rho_R(Y)\\ &= \rho_N(X \cup Y)\end{aligned}$$

Nos três casos, $\rho_N(X \cup Y \cup w \cup z) = \rho_N(X \cup Y)$.

Seja N o matróide sobre $E \cup P$ determinado pela função posto ρN. A família $\{Q(Y) : Y \in \mathcal{F}_R\}$ é o feixe de quocientes de M determinado por N. De fato, fixado $Y \in \mathcal{F}_R$ temos para todo $X \subseteq E$ que $\rho_{Q(Y)}(X) = \rho_N(X \cup Y) - \rho_R(Y)$, o que mostra que $Q(Y) = N/Y(E)$. Segue de (Q1) que $N(E) = M$. A unicidade de N como extensão de M sobre $E \cup P$ tal que $N(P) = R$ e $Q(Y) = N/Y(E)$ para todo $Y \in \mathcal{F}_R$ também é clara.

□

Seja R um matróide sobre P. Uma família $\{Q(Y) : Y \in \mathcal{F}_R\}$ de quocientes de M que satisfaz as propriedades (Q1), (Q2) e (Q3) da Proposição 2.1. será chamada de *R-feixe* de M. Ele será *estrito* se para todo $Y \in \mathcal{F}_R$, $gr(M \to Q(Y)) = \rho_R(Y)$. O Teorema 2.4. mostrou que os R-feixes determinam completamente as extensões N de M sobre $E \cup P$ tais que $N(P) = R$. Em particular, quando $\rho M = \rho N$, o R-feixe será estrito como mostra o próximo resultado.

Proposição 2.5. *Sejam R um matróide sobre P e $\mathcal{Q} = \{Q(Y) : Y \in \mathcal{F}_R\}$ um R-feixe de M. São equivalentes:*

i. *$\mathcal{Q}$ é estrito*

ii. *Para todos $X, Y \in \mathcal{F}_R$ tais que $X \subseteq Y$ temos que $gr(Q(X) \to Q(Y)) = \rho_R(Y) - \rho_R(X)$*

iii. *Para todos $X, Y \in \mathcal{F}_R$ tais que $X \subseteq Y$ temos que $\mathcal{M}(X,Y) \neq \emptyset$*

iv. *Se N é a extensão de M sobre $E \cup P$ tal que $N(P) = R$ e $\mathcal{Q}$ é o feixe de quocientes de M determinado por N então $\rho M = \rho N$.*

Prova: A equivalência entre *ii.* e *iii.* já foi observada anteriormente. Provaremos então que *ii.* $\Leftrightarrow$ *i.* $\Leftrightarrow$ *iii.*.

i. $\Rightarrow$ *ii.*: Sejam $X, Y \in \mathcal{F}_R$ tais que $X \subseteq Y$. Então, usando *i.*

$$\begin{aligned} gr(Q(X) \to Q(Y)) &= \rho Q(X) - \rho Q(Y) \\ &= (\rho M - \rho Q(Y)) - (\rho M - \rho Q(X)) \\ &= gr(M \to Q(Y)) - gr(M \to Q(X)) \\ &= \rho_R(Y) - \rho_R(X) \end{aligned}$$

ii. $\Rightarrow$ *i.*: Seja $Y \in \mathcal{F}_R$. Usando *ii.* e (Q1)

$$\begin{aligned} gr(M \to Q(Y)) &= gr(Q(\emptyset) \to Q(Y)) \\ &= \rho_R(Y) - \rho_R(\emptyset) \\ &= \rho_R(Y) \end{aligned}$$

i. $\Rightarrow$ *iv.*: De *i.*, $gr(M \to Q(P)) = \rho_R(P)$, isto é, $\rho M - \rho Q(P) = \rho R$. Seja N a extensão de M sobre $E \cup P$ com $N(P) = R$ e $\mathcal{Q}$ o feixe de quocientes de M determinado por N. Podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma

$$\rho_N(E) - (\rho_N(E \cup P) - \rho_N(P)) = \rho R$$

Mas $\rho_N(P) = \rho R$, logo $\rho_N(E) = \rho_N(E \cup P)$, o que equivale a $\rho M = \rho N$.

iv. $\Rightarrow$ *i.*: Fixemos $Y \in \mathcal{F}_R$. Sabemos que para todo $X \subseteq E$, $\rho_N(Y) = \rho_N(X \cup Y) - \rho_{Q(Y)}(X)$. Em particular,

$$\begin{aligned} \rho_N(Y) = \rho_N(E \cup Y) - \rho Q(Y) &\leq \rho N - \rho Q(Y) \\ &= \rho M - \rho Q(Y) \\ &= gr(M \to Q(Y)) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} gr(M \to Q(Y)) &= gr(Q(\emptyset) \to Q(Y)) \\ &\leq \rho_N(Y) - \rho_N(\emptyset) \\ &= \rho_N(Y) \end{aligned}$$

Portanto, $gr(M \to Q(Y)) = \rho_N(Y)$.

$\square$

3. SEQUÊNCIAS DE REBAIXAMENTOS E LEVANTAMENTOS

A técnica de construção apresentada nessa seção foi inventada por Higgs em [Hi] e tem, a partir de então, se mostrado bastante útil em muitos problemas relacionados com quocientes de matróides.

No que se segue, salvo menção em contrário, M_1 e M_2 são matróides sobre E tais que M_2 é quociente de M_1 e $M_1 \neq M_2$.

Proprosição 3.1. *O conjunto*

$$\{X \in \mathcal{F}_{M_1} : nl(X) \neq gr(M_1 \to M_2) - 1\} \cup \mathcal{F}_{M_2}$$

é o conjunto dos fechados de um certo matróide.

Prova: Considere o filtro modular

$$\mathcal{F} = \mathcal{M}(M_1 \to M_2) = \{X \in \mathcal{F}_{M_1} : nl(X) = gr(M_1 \to M_2)\}$$

e a seguinte extensão pontual $M_1(E) \xleftarrow{\mathcal{F}} N(E \cup p)$. Mostremos que $\mathcal{F}_{N/p} = \mathcal{F}$. Como

$$\mathcal{F}_{N/p} = \mathcal{F}_{M_2} \cup \{X \in \mathcal{F}_{M_1} - \mathcal{F} : X \text{ não é coberto por elemento de } \mathcal{F}\}$$

basta mostrarmos que para todo $X \in \mathcal{F}_{M_1} - \mathcal{F}$, X é coberto por algum elemento de $\mathcal{F}$ se e somente se $X \notin \mathcal{F}_{M_2}$ e $nl(X) = gr(M_1 \to M_2) - 1$.

Suponha inicialmente que $X \in \mathcal{F}_{M_1} - \mathcal{F}$ e existe $x \in E$ tal que $\mathcal{F} \ni \overline{X \cup x}^{M_1}$ cobre X. Se $\rho_{M_2}(X \cup x) = \rho_{M_2}(X) + 1$ então

$$\begin{aligned} gr(M_1 \to M_2) &= nl(X \cup x) \\ &= \rho_{M_1}(X \cup x) - \rho_{M_2}(X \cup x) \\ &= (\rho_{M_1}(X) + 1) - (\rho_{M_2}(X) + 1) \\ &= nl(X) \end{aligned}$$

isto é, $X \in \mathcal{F}$, uma contradição. Logo $\rho_{M_2}(X \cup x) = \rho_{M_2}(X)$ e assim, $nl(X) = gr(M_1 \to M_2) - 1$ e $X \notin \mathcal{F}_{M_2}$.

De outro lado, seja $X \in \mathcal{F}_{M_1} - (\mathcal{F} \cup \mathcal{F}_{M_2})$ tal que $nl(X) = gr(M_1 \to M_2) - 1$. Como $X \notin \mathcal{F}_{M_2}$, existe $x \in \overline{X}^{M_2} - X$ e

$$\begin{aligned} nl(X \cup x) &= \rho_{M_1}(X \cup x) - \rho_{M_2}(X \cup x) \\ &= (\rho_{M_1}(X) + 1) - \rho_{M_2}(X) \\ &= gr(M_1 \to M_2) \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{F} \ni \overline{X \cup x}^{M_1}$ cobre X.

□

Definimos então o *rebaixamento* de M_1 em direção a M_2 como sendo o matróide $\mathcal{D}(M_1 \to M_2)$ sobre E com o conjunto de fechados igual a

$$\{X \in \mathcal{F}_{M_1} : nl(X) \neq gr(M_1 \to M_2) - 1\} \cup \mathcal{F}_{M_2}$$

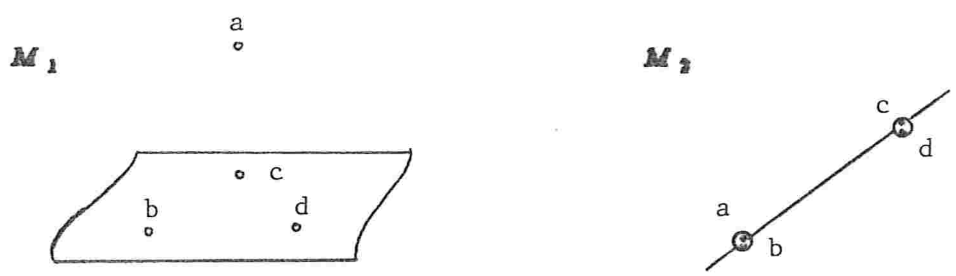
Pela prova da Proposição anterior é fácil ver que $\mathcal{D}(M_1 \to M_2)$ é quociente elementar de M_1 e que M_2 é quociente de $\mathcal{D}(M_1 \to M_2)$.

Cheung em [Ch] define rebaixamento de M_1 em direção a M_2 como sendo o suposto matróide com o conjunto de fechados

$$\{X \in \mathcal{F}_{M_1} : nl(X) \neq gr(M_1 \to M_2) - 1\}$$

Essa definição é incorreta como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.2. Sejam $E = \{a, b, c, d\}$ e M_1, M_2 os matróides sobre E dados por



O conjunto

$$\{X \in \mathcal{F}_{M_1} : nl(X) \neq gr(M_1 \to M_2) - 1\} = \{\emptyset, a, b, c, d, ac, ad, bc, bd, abcd\}$$

não é o conjunto dos fechados de um matróide. De fato, se existisse um matróide com esse conjunto de fechados e função posto ρ, teríamos

$$\rho(a) + \rho(b) = 2$$

$$\rho(a \vee b) + \rho(a \wedge b) = \rho(ab) + \rho(\emptyset) = 3$$

que contraria a submodularidade de ρ.

Definimos a seguir a *sequência de rebaixamentos estritos* de M_1 até M_2 como sendo a seguinte sequência de quocientes de M_1

$$D^0(M_1 \to M_2) = M_1$$
$$D^i(M_1 \to M_2) = \mathcal{D}(D^{i-1}(M_1 \to M_2) \to M_2), \quad 1 \leq i \leq gr(M_1 \to M_2)$$

Observe que para $i = 1, 2, ..., gr(M_1 \to M_2)$, $D^i(M_1 \to M_2)$ é quociente elementar de $D^{i-1}(M_1 \to M_2)$ e se $i \geq gr(M_1 \to M_2)$, $D^i(M_1 \to M_2) = M_2$. Não havendo perigo de ambiguidade, utilizaremos apenas D^i para denotar $D^i(M_1 \to M_2)$, $i = 0, 1, ..., gr(M_1 \to M_2)$.

Uma sequência de rebaixamentos estritos de M_1 até M_2 também pode ser obtida "de trás para frente", isto é, obtida recursivamente a partir de $M_2 = D^{gr(M_1 \to M_2)}$.

Proposição 3.3. *Sejam* $k = gr(M_1 \to M_2)$ *e* $M_1 = D^0, D^1, ..., D^k = M_2$ *a sequência de rebaixamentos estritos de* M_1 *até* M_2. *Temos então que para cada* $i = k, k-1, ..., 1$

$$\mathcal{F}_{D^{i-1}} = \{X \in \mathcal{F}_{M_1} : nl_{M_1 \to D^i}(X) = 0\} \cup \mathcal{F}_{D^i}$$

Prova: É necessário apenas verificar o caso $i = k$ pois os demais casos são análogos já que para cada $j = 1, 2, ..., k$, D^j é quociente de M_1, $gr(M_1 \to D^j) = j$ e $D^0, D^1, ..., D^j$ é a sequência de rebaixamentos estritos de M_1 até D^j. Mostremos então que

$$\mathcal{F}_{D^{k-1}} = \{x \in \mathcal{F}_{M_1} : nl_{M_1 \to M_2}(X) = 0\} \cup \mathcal{F}_{M_2}$$

Por definição,

$$\mathcal{F}_{D^{k-1}} = \{X \in \mathcal{F}_{D^{k-2}} : nl_{D^{k-2} \to M_2}(X) \neq 1\} \cup \mathcal{F}_{M_2}$$

A inclusão $\supseteq$ é clara, pois se $X \in \mathcal{F}_{M_1}$ e $nl_{M_1 \to M_2}(X) = 0$ então $nl_{D^j \to M_2}(X) = 0$ para todo $j = 0, 1, ..., k$.

Passemos a verificar a inclusão contrária. Seja $X \in \mathcal{F}_{D^{k-1}}$. Os casos não triviais ocorrem quando $X \in \mathcal{F}_{D^{k-2}} - \mathcal{F}_{M_2}$ e $nl_{D^{k-2} \to M_2}(X) = 0$ ou 2. Se $nl_{D^{k-2} \to M_2}(X) = 2 = gr(D^{k-2} \to M_2)$ então $X \in \mathcal{M}(D^{k-2} \to M_2) \subseteq \mathcal{F}_{M_2}$. De outro lado, tome $X \in \mathcal{F}_{D^{k-2}} - \mathcal{F}_{M_2}$ tal que $nl_{D^{k-2} \to M_2}(X) = 0$ e mostremos que $nl_{M_1 \to M_2}(X) = 0$. Suponha por absurdo que $nl_{M_1 \to M_2}(X) > 0$. Como $\rho_{M_1}(X) > \rho_{M_2}(X) = \rho_{D^{k-2}}$ é fácil ver que existe $0 < j \leq k-2$ tal que $\rho_{D^{j-1}}(X) = \rho_{D^j}(X) + 1$ ou equivalentemente, $X \in \mathcal{M}(D^{j-1} \to M_2) \subseteq \mathcal{F}_{M_2}$, já que $D^j = N/p$ onde N é a extensão pontual de D^{j-1} pelo filtro modular $\mathcal{M}(D^{j-1} \to M_2)$. Mas isso é um absurdo, portanto $nl_{M_1\to M_2}(X) = 0$. Concluímos então que em todos os casos possíveis, $X \in \mathcal{F}_{M_2}$ ou $nl_{M_1\to M_2}(X) = 0$.

□

O *levantamento* de M_2 em direção a M_1 é o matróide $\mathcal{L}(M_1 \to M_2)$ sobre E com o conjunto de fechados igual a

$$\{X \in \mathcal{F}_{M_1} : nl_{M_1\to M_2}(X) = 0\} \cup \mathcal{F}_{M_2}$$

A *sequência de levantamentos estritos* de M_2 até M_1 é a sequência

$$L^0(M_1 \to M_2) = M_2$$
$$L^i(M_1 \to M_2) = \mathcal{L}(M_1 \to L^{i-1}(M_1 \to M_2)), \quad 1 \le i \le gr(M_1 \to M_2)$$

A Proposição anterior mostra que para todo $j = 0, 1, ..., gr(M_1 \to M_2) = k$, $D^j = L^{k-j}$. Note que se $i \geq gr(M_1 \to M_2)$ então $L^i(M_1 \to M_2) = M_1$.

Abaixo, caracterisamos as sequências de rebaixamentos estritos relacionando alguns dos filtros modulares determinados por esses rebaixamentos.

Proposição 3.4. *Seja $Q_0, Q_1, ..., Q_k$ uma sequência de matróides sobre E onde Q_j é quociente elementar de Q_{j-1} para $j = 1, 2, ..., k$. Então são equivalentes:*

i. $Q_0, Q_1, ..., Q_k$ *é a sequência de rebaixamentos estritos de* Q_0 *até* Q_k

ii. $\mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_j) \subseteq \mathcal{M}(Q_j \to Q_{j+1})$ *para todo* $j = 1, 2, ..., k-1$

iii. $\mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_j) = \mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_{j+1})$ *para todo* $j = 1, 2, ..., k-1$

iv. $\mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_j) = \mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_k)$ *para todo* $j = 1, 2, ..., k$

Prova: A equivalência *ii.* ⇔ *iii.* segue imediatamente do seguinte fato

$$\mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_{j+1}) = \mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_j) \cap \mathcal{M}(Q_j \to Q_{j+1}) \quad j = 1, 2, ..., k-1$$

Também, a partir desse mesmo fato, obtemos

$$\mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_k) = \mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_j) \cap \mathcal{M}(Q_j \to Q_{j+1}) \cap$$
$$\mathcal{M}(Q_{j+1} \to Q_{j+2}) \cap ... \cap \mathcal{M}(Q_{k-1} \to Q_k)$$

donde conclui-se facilmente a equivalência *ii.* ⇔ *iv.*.

Fixemos $1 \leq j \leq k$. Mostremos primeiro que *i.* $\Leftrightarrow$ *iv.*. A inclusão $\mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_j) \supseteq \mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_k)$ é clara. Tome, de outro lado, $X \in \mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_j)$. Lembrando a definição de $\mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_j)$ temos

$$\rho_{Q_j}(X) = \rho_{Q_{j-1}}(X) - 1 \qquad (I)$$

Considere agora a extensão pontual N de Q_{j-1} sobre $E \cup p$ pelo filtro modular $\mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_k)$. Assim, $N/p = D^j(Q_0 \to Q_k) = Q_j$ e portanto

$$\rho_{Q_j}(X) = \rho_N(X \cup p) - \rho_N(p) = \rho_N(X \cup p) - 1 \qquad (II)$$

Combinando (I) e (II), segue que $p \in \overline{X}^N$, isto é, $X \in \mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_k)$. Finalmente passemos a verificar que *iv.* $\Rightarrow$ *i.*. A igualdade $\mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_j) = \mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_k)$ implica que $N(E \cup p) = N'(E \cup p)$ onde N' é a extensão pontual de Q_{j-1} sobre $E \cup p$ pelo filtro modular $\mathcal{M}(Q_{j-1} \to Q_j)$. Mas então,

$$D^j(Q_j \to Q_k) = N/p = N'/p = Q_j(E)$$

$\square$

Finalizamos apresentando dois resultados que serão úteis na próxima seção. Neles tentamos relacionar a sequência de rebaixamentos estritos de M_1 até M_3 com a sequência de rebaixamentos estritos de M_2 até o mesmo M_3, onde M_3 é quociente de M_2 e M_2 por sua vez é quociente elementar de M_1.

Lema 3.5. *Sejam M_1, M_2, M_3 e M_4 matróides sobre E tais que M_2 é quociente de M_3 e M_4, esses dois últimos são quocientes de M_1 e $gr(M_1 \to M_4) = gr(M_3 \to M_2) = 1$. Se $\mathcal{M}(M_1 \to M_3) \cap \mathcal{M}(M_1 \to M_4) = \mathcal{M}(M_1 \to M_2)$ então $\mathcal{D}(M_4 \to M_2)$ é quociente elementar de $\mathcal{D}(M_1 \to M_3)$.*

Prova: Para não carregar a notação usaremos $\mathcal{M}(i \to j)$, $nl_{i \to j}$, $\mathcal{D}(i \to j)$, $gr(i \to j)$ e ρ_i ao invés de $\mathcal{M}(M_i \to M_j)$, $nl_{M_i \to M_j}$, $\mathcal{D}(M_i \to M_j)$, $gr(M_i \to M_j)$ e ρ_{M_i}, respectivamente.

Fixemos $X \in \mathcal{D}(4 \to 2)$. Se $X \in \mathcal{M}(4 \to 2)$ então $X \in M_2 \subseteq \mathcal{D}(1 \to 3)$. Suponhamos então que $X \notin \mathcal{M}(4 \to 2)$. Assim,

$$nl_{4 \to 2}(X) \leq gr(4 \to 2) - 2 \qquad (I)$$

Examinemos dois casos possíveis:

Caso 1: $X \notin \mathcal{M}(1 \to 4)$, isto é, $nl_{1\to 4}(X) = 0$
Temos que

$$\begin{aligned} nl_{1\to 3}(X) \le nl_{1\to 2}(X) &= nl_{1\to 4}(X) + nl_{4\to 2}(X) \\ &\overset{(I)}{\le} gr(4 \to 2) - 2 \end{aligned}$$

Mas $gr(4 \to 2) = gr(1 \to 3)$; denotemos esse número por n. Logo, $nl_{1\to 3}(X) < gr(1 \to 3) - 1$, o que mostra que $X \in \mathcal{D}(1 \to 3)$.

Caso 2: $X \in \mathcal{M}(1 \to 4)$, isto é, $nl_{1\to 4}(X) = 1$
Pela Proposição 2.3., $\mathcal{M}(1 \to 2) = \mathcal{M}(1 \to 4) \cap \mathcal{M}(4 \to 2)$ e como $X \notin \mathcal{M}(4 \to 2)$ temos que $X \notin \mathcal{M}(1 \to 2)$. Por outro lado, por hipótese, $\mathcal{M}(1 \to 2) = \mathcal{M}(1 \to 3) \cap \mathcal{M}(1 \to 4)$, donde $X \notin \mathcal{M}(1 \to 3)$, ou equivalentemente, $nl_{1\to 3}(X) \le n - 1$. Suponha por absurdo que $X \notin \mathcal{M}(1 \to 3)$. Então existe $Y \in \mathcal{M}(1 \to 3)$ tal que Y cobre X. Como $X \in \mathcal{M}(1 \to 4)$ temos também que $Y \in \mathcal{M}(1 \to 4)$, e usando novamente a igualdade $\mathcal{M}(1 \to 2) = \mathcal{M}(1 \to 3) \cap \mathcal{M}(1 \to 4)$ resulta que $Y \in \mathcal{M}(1 \to 2)$, isto é, $nl_{1\to 2}(Y) = n + 1$. Daí obtemos

$$\begin{aligned} nl_{1\to 2}(X) &= \rho_1(X) - \rho_2(X) \\ &\ge \rho_1(Y) - \rho_2(Y) - 1 = n \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} nl_{1\to 2}(X) &= nl_{1\to 4}(X) + nl_{4\to 2}(X) \\ &\overset{(I)}{\le} n - 1 \end{aligned}$$

uma contradição. Portanto, $X \in \mathcal{D}(1 \to 3)$.

Concluímos então que $\mathcal{D}(4 \to 2)$ é quociente de $\mathcal{D}(1 \to 3)$ e em particular,

$$\begin{aligned} gr(\mathcal{D}(1 \to 3) \to \mathcal{D}(4 \to 2)) &= \rho\mathcal{D}(1 \to 3) - \rho\mathcal{D}(4 \to 2) \\ &= (\rho M_1 + 1) - (\rho M_4 + 1) \\ &= gr(1 \to 4) = 1 \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 3.6. *Sejam M_1, M_2 e M_3 matróides sobre E tais que M_3 é quociente de M_2, M_2 é quociente de M_1 e $gr(M_1 \to M_2) = 1$. Então $D^k(M_2 \to M_3)$ é quociente elementar de $D^k(M_1 \to M_3)$ para $k = 0, 1, \ldots, gr(M_2 \to M_3)$.*

Prova: Por indução sobre k. Como $D^0(M_2 \to M_3) = M_2$ e $D^0(M_1 \to M_3) = M_1$, por hipótese $D^0(M_2 \to M_3)$ é quociente elementar de $D^0(M_1 \to M_3)$.

Suponha agora que $k > 0$. Por hipótese de indução, $D^{k-1}(M_2 \to M_3)$ é quociente elementar de $D^{k-1}(M_1 \to M_3)$. Temos então o diagrama a seguir, onde $A \to B$ quer dizer que o matróide B é quociente do matróide A.

$$\begin{tikzcd}
 & & M_3 & & \\
 & \mathcal{L}(M_1 \to M_3) \arrow[ur] & & D^{k-1}(M_1 \to M_3) \arrow[ul] & \\
 & & D^{k-1}(M_2 \to M_3) \arrow[ul] \arrow[ur] & & M_2 \arrow[ul] \\
 & & & M_1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Mostremos que

$$\mathcal{M}(D^{k-1}(M_1 \to M_3) \to \mathcal{L}(M_1 \to M_3)) \cap \mathcal{M}(D^{k-1}(M_1 \to M_3) \to D^{k-1}(M_2 \to M_3)) = \mathcal{M}(D^{k-1}(M_1 \to M_3) \to M_3)$$

pois nesse caso estaremos nas hipóteses do Lema anterior em relação a $D^{k-1}(M_1 \to M_3)$, M_3, $\mathcal{L}(M_1 \to M_3)$, $D^{k-1}(M_2 \to M_3)$ e portanto $\mathcal{D}(D^{k-1}(M_2 \to M_3) \to M_3) = D^k(M_2 \to M_3)$ é quociente elementar de $\mathcal{D}(D^{k-1}(M_1 \to M_3) \to \mathcal{L}(M_1 \to M_3)) = D^k(M_1 \to M_3)$.

A inclusão $\supseteq$ é facilmente verificável recorrendo-se à Proposição 3.4.. A inclusão contrária segue do seguinte fato, também consequência da mesma proposição

$$\mathcal{M}(D^{k-1}(M_1 \to M_3) \to \mathcal{L}(M_1 \to M_3)) \subseteq \mathcal{M}(D^{k-1}(M_1 \to M_3) \to M_3)$$

$\square$

4. REPRESENTAÇÕES DE QUOCIENTES

Nesta seção, não pretendemos nos aprofundar na teoria da representabilidade de quocientes. Gostaríamos apenas de introduzí-la, apresentar sua ligação com a teoria da compatibilidade de extensões e, quem sabe, motivar o leitor a prosseguir num estudo mais aprofundado.

Seja I um subconjunto finito dos naturais. Uma *representação* de uma família $\{Q_i\}_{i\in I}$ de quocientes de M é uma extensão N de M sobre $E \cup P$ juntamente com uma família $\{Y_i\}_{i\in I}$ de fechados de $N(P)$ tal que para todo $i \in I$, $Q_i(N/Y_i)(E)$. Pelo Teorema 2.4. vale a seguinte igualdade

$$\rho_N(X \cup Y_i) = \rho_{Q_i}(X) + \rho_N(Y_i)$$

para todos $i \in I$ e $X \subseteq E$. Vale também que

$$gr(M \to Q_i) \leq \rho_N(Y_i)$$

Se para todo $i \in I$ ocorrer igualdade na expressão acima, a representação é dita *estrita*. Se $\{Q_i\}_{i\in I}$ tem uma representação (resp., representação estrita) então dizemos que $\{Q_i\}_{i\in I}$ *são representáveis* (resp., *estritamente representáveis*).

A Proposição 2.10. do Capítulo II mostra que qualquer quociente de um matróide tem uma representação estrita. Esse resultado foi inicialmente provado por Higgs em [Hi]. A partir da teoria sobre quocientes desenvolvida nesse capítulo, esse resultado pode ser facilmente obtido. De fato, sejam M' um quociente de M e R um matróide sobre P tal que $\rho R = gr(M \to M')$. A família $\{Q(Y)\}_{Y\in \mathcal{F}_R}$ definida por

$$Q(Y) = L^{\rho R - \rho_R(Y)}(M \to M') = D^{\rho_R(Y)}(M \to M')$$

é um R-feixe estrito de M. Logo, a extensão N de M sobre $E \cup P$ tal que $N(P) = R$ e $Q(Y) = (N/Y)(E)$ para todo $Y \in \mathcal{F}_R$ é uma representação estrita de M'.

O natural agora é investigarmos a representabilidade de vários quocientes de M. Enquanto o problema geral de representação permanece em aberto, existem resultados positivos relacionados com representações de quocientes elementares de M. Em particular, é possível caracterizar uma família de quocientes elementares de M estritamente representáveis, ligando os conceitos de representabilidade de quocientes e compatibilidade de filtros modulares como mostra o resultado seguinte:

Proposição 4.1. *Sejam $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ quocientes elementares de M. Temos então que $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ são estritamente representáveis se e somente se $\mathcal{M}(M \to Q_1), \mathcal{M}(M \to Q_2), ..., \mathcal{M}(M \to Q_n)$ são filtros modulares compatíveis.*

Prova: Omitimos, simples manipulação de definições.

□

Assim é possível que exista uma família $\{Q_i\}_{i\in I}$ de quocientes elementares de M representável mas não estritamente representável. Exemplos desse fato podem ser obtidos com pares de quocientes elementares, bastando combinar a Proposição 4.1., o Teorema 4.2. a seguir, e o fato de existirem pares de filtros modulares não compatíveis.

Teorema 4.2. *Sejam Q_1, Q_2 quocientes elementares de M. Então o par Q_1, Q_2 é representável.*

Prova: Escolha Q_{12} um quociente comum de Q_1, Q_2 e denote por n o $gr(M \to Q_{12})$. Seja $R = \mathcal{L}_{2n-1}(A \cup B)$ onde $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ e $A \cap B = \emptyset = (A \cup B) \cap E$. Para cada $Y \in \mathcal{F}_R$ definimos

$$Q(Y) = \begin{cases} D^{\rho_R(Y)-n}(Q_1 \to Q_{12}), & \text{se } A \subseteq Y \text{ e } \rho_R(Y) \geq n \\ D^{\rho_R(Y)-n}(Q_2 \to Q_{12}), & \text{se } B \subseteq Y \text{ e } \rho_R(Y) \geq n \\ M, & \text{se } \rho_R(Y) < n \\ D^{\rho_R(Y)-n+1}(M \to Q_{12}), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Claramente $Q(A) = Q_1$ e $Q(B) = Q_2$. Afirmamos que $\{Q_Y\}_{Y\in\mathcal{F}_R}$ é um R-feixe sobre M. De fato, as propriedades (Q1), (Q2), (Q3) da Proposição 2.1. estão satisfeitas:

(Q1) $Q(\emptyset) = M$ trivialmente pois $n > 0$

(Q2) Sejam $X, Y \in \mathcal{F}_R$ tais que Y cobre X. É óbvio que se $A \subseteq X$ ou $B \subseteq X$ ou $A, B \not\subseteq Y$, $Q(Y)$ é quociente de $Q(X)$ e $gr(Q(X) \to Q(Y)) \leq 1$. O único caso não trivial ocorre quando nem A e nem B são subconjuntos de X, e A ou B está contido em Y. Suponha que $A \subseteq Y$, o caso $B \subseteq Y$ é análogo. Se $\rho_R(X) < n$ então $Y = A$ e portanto $Q(Y) = Q_1$ é quociente elementar de $Q(X) = M$. Se $\rho_R(X) \geq n$ então $Q(X) = D^{\rho_R(X)-n+1}(M \to Q_{12}) = D^{\rho_R(Y)-n}(M \to Q_{12})$ e $Q(Y) = D^{\rho_R(Y)-n}(Q_1 \to Q_{12})$, portanto pela Proposição 3.6., $Q(Y)$ é quociente elementar de $Q(X)$.

(Q3) Sejam $X, Y \in \mathcal{F}_R$ tais que X, Y cobrem $X \cap Y$. Inicialmente observamos que não é possível que $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ simultaneamente. De fato, se isso acontecesse, $X \cup Y = A \cup B$ e portanto X, Y seriam hiperplanos de R, uma contradição já que $\rho(X \cap Y) = |X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 2n - 4$, isto é, $X \cap Y$ não é coplano de R. Da mesma forma concluímos que não podemos ter $B \subseteq X$ e $A \subseteq Y$. Se $A \subseteq X \cap Y$ (resp., $B \subseteq X \cap Y$) então $Q(X \cap Y)$, $Q(X)$, $Q(Y)$ e $Q(\overline{X \cup Y}^R)$ são rebaixamentos de Q_1 (resp.,

Q_2) em direção a Q_{12}. Usando o item *iii.* da Proposição 3.4. obtemos a igualdade

$$\mathcal{M}(X \cap Y, X) \cap \mathcal{M}(X \cap Y, Y) = \mathcal{M}(X \cap Y, \overline{X \cup Y}^R)$$

Só restam dois casos a considerar: A, $B \not\subseteq X$ ou A, $B \not\subseteq Y$. Suponha que A, $B \not\subseteq X$. Nesse caso $Q(X \cap Y)$, $Q(X)$ são rebaixamentos de M em direção a Q_{12} e pelo item *iv.* da Proposição 3.4. temos que $\mathcal{M}(X \cap Y, X) = \mathcal{M}(X \cap Y, A \cup B)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(X \cap Y, X) \cap \mathcal{M}(X \cap Y, Y) &\subseteq \mathcal{M}(X \cap Y, X) \\ &= \mathcal{M}(X \cap Y, A \cup B) \\ &\subseteq \mathcal{M}(X \cap Y, \overline{X \cup Y}^R) \end{aligned}$$

Como a inclusão, $\mathcal{M}(X \cap Y, \overline{X \cup Y}^R) \subseteq \mathcal{M}(X \cap Y, X) \cap \mathcal{M}(X \cap Y, Y)$ é trivial, estabelece-se assim a igualdade.

Finalmente, a extensão N de M sobre $E \cup A \cup B$ determinada pelo R-feixe $\{Q(Y)\}_{Y \in \mathcal{F}_R}$ é uma representação de Q_1, Q_2, já que $N/A(E) = Q(A) = Q_1$ e $N/B(E) = Q(B) = Q_2$.

□

A técnica da demonstração do teorema anterior consistiu basicamente em encontrar um matróide R conveniente e completar o par de quocientes Q_1, Q_2 a um R-feixe de quocientes de M. Essa é uma maneira interessante de encarar o problema da representabilidade e, nessa linha, Cheung em [Ch] estuda os *feixes parciais de quocientes* que são famílias de quocientes de um matróide M indexadas pelos fechados de um outro matróide R sobre P, e que podem ser completados a um R-feixe de M. Cheung fixa-se principalmente nas várias formas possíveis em que um feixe parcial pode ser completado a um R-feixe de M.

Referências Bibliográficas

[Ai] M. Aigner, "Combinatorial Theory", Springer - Verlag, Berlin/ Heidelberg/New York (1979).

[Ch] A.L.C. Cheung, Compatibility of Extensions of a Combinatorial Geometry, Thesis, Univ. of Waterloo, Ontario (1974).

[Co1] R. Cordovil, Extensions Lisses d'une Géométrie Combinatoire, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **284** (1977), 1249–1252.

[Co2] R. Cordovil, Sur la Compatibilité des Extensions Ponctuelles d'un Matroïde, *J. Comb. Theory Ser. B* **34** (1983), 209–223.

[Cr] H. Crapo, Single Element Extensions of Matroids *J. Res. Nat. Bur. Stand. Sect.* B **69** (1965), 57–65.

[Hi] D.A. Higgs, Strong Maps of Geometries, *J. Comb. Theory* **5** (1968), 185–191.

[LV1] M. Las Vergnas, Extensions Normales d'un Matroïde, Polynôme de Tutte d'un Morphisme, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **280** (1975), 1479–1482.

[LV2] M. Las Vergnas, Extensions Ponctuelles Compatibles d'une Géometrie Combinatoire, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **286** (1978), 981–983.

[Ma] J.H. Mason, Matroids as the study of Geometrical Configurations, "Higher Combinatorics", M.Aigner ed. (1977), 133–176.

[vW] B.L. van der Waerden, "Moderne Algebra", Springer, Berlin, 2 ed. (1973).

[We] D.H. Welsh, "Matroid Theory", Academic Press, New York/S. Francisco/London (1976).

[Wh] H. Whitney, On the Abstract Properties of Linear Dependence, *Amer. J. Math.* 57 (1935), 509–533.

Índice Remissivo

N

O

P

Q

R

S

T

Errata

Pág.	Linha	Escrito	Corrigido
xviii	7↓	fig.11.a	fig.12.a
17	7↓	$\{1, 2, ..., n-1\}$	$\{1, 2, ..., n\}$
18	4↓	tais que	e $\|I\| = d+1$ tal que
20	2↑	Teorema 1.7.	Teorema 1.8.
24	2↑	$\|\rho_N(\overline{X}^N)-$	$\|\overline{X}^N -$
24	8↑	$-\overline{Z}^N \|\}$	$-\overline{Z}^N \|, X \cap E \subseteq Z\}$
27	1↑	$x \in \overline{X}^{M'} \cap X$	$x \in X$ ou $x \in \overline{X}^M \cap E$
27	3↑	ultra-compatíveis	
28	1↓	$x \in \overline{X}^{M'} - X$	$x \in (\overline{X}^{M'} - X) \cap F$
28	2↓	$\in \mathcal{F}_i$	$\in \mathcal{F}_i$ para algum $i \in \{1, 2, ..., n\}$
31	2↑	formam	forma
32	13↓	$M(X \cup A)\backslash X$	$M(X \cup A)/X$
33	4,5,6↓	, o que mostra...que $\rho(M(A))_k = \rho M(X \cup A)/X$	
33	11↓	$\overline{X \cup Y}^M - X = A$	$\overline{X \cup Y_0}^M - X \supseteq A$
33	12↓	$\rho_{M/X}(Y_0) = \rho_{M/X} A$	$\rho_{M/X}(Y_0) \geq \rho_{M/X}(A)$
33	14↓	$\rho_M(X \cup A)/X$	$\rho_M(X \cup A)/X$. Tome B base de $M(X \cup A)/X$. É claro que $B \subseteq A$, $\|B\| = k$ e $B \cup X$ é independente em M. Logo B é independente em $M(A)$ e portanto B é base de $(M(A))_k$.
35	1↑	$i \neq j$	$i \neq k$
38	8↑	$+1$	-1
38	9↑	$+2$	-2
38	11↑	$+2$	-2
39	4↓	ρN	$\rho_N(P)$
39	7↓	$\{a, b, c, d\}$	$\{a, b, c, d, e\}$
40	13↑	(R1)	(R2)
41	1↓	$i+1$	$i-1$

42	4↓	$j+i)$	$j+1)$
42	4↑	e portanto $w \notin \overline{X \cup x}^M$.	
42	6↑	$= \rho_M(X) + i$	$= \rho_M(X) + i$. Se $w \in \overline{X \cup z}^M$ então $\rho_N(X \cup Y \cup z \cup w) = \rho_N(X \cup Y)$ trivialmente. Suponha que $w \notin \overline{X \cup z}^M$.
43	6↑	neste capítulo	nesta seção
48	7↓	ρ_M	ρ_N
48	15↑	$\mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2 \subseteq$	$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{E}^{(0)} \cup$
48	16↑	$X \in \mathcal{E}^{(0)}$	$X \notin \mathcal{E}^{(0)}$
49	1↓	$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$
49	5↓	Proposição 1.8.	Proposição 2.8.
49	13↓	$\rho_M(X)$	$\rho_M(X) + 1$
53	1↑	*i.* $\Rightarrow$ *iv.*	*i.* $\Leftarrow$ *iv.*
53	1↑	*iii.* $\Rightarrow$ *ii.*	*iii.* $\Leftarrow$ *ii.*
54	2↑	$\Gamma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$	$\Phi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$
54	7↑	$\overline{X}^{N'} \in \mathcal{F}_2'$	$\overline{X}^{N_1} \in \mathcal{F}_2'$
57	2↑	e usando *iv.*(b)	usando *iv.*(b),
57	3↑	$X \in \mathcal{E}_1^{(i)}$	$Y \in \mathcal{E}_1^{(i)}$
59	6↓	$\leq \rho_{N'}(Z) + 1$	$= \rho_{N'}(Z) + 1$
65	7↓	dos seguintes fatos	do seguinte fato
65	9↓	se existe...$(\bigcap_{j \in I} \mathcal{F}_j)$	
70	6,7,8,9,10,11↑	Por definição...filtro modular de M.	A demonstração pode ser encontrada em [Cr].
71	5↑	$A \in \mathcal{H}$	$A \subseteq \mathcal{H}$
73	4↓	$S_1^i, i =$	S_1^i, para algum $i =$
73	5↓	$S_2^i, i =$	S_2^i, para algum $i =$
73	15↓	então Z	então $Z \in \mathcal{F}_M$
73	16,17↓	$Z \notin \mathcal{H}$...contradição	$Z \in \mathcal{H}$ se e somente se $Z \in S_1 - S_2$. Suponha então que $\rho_M(Z) < \rho M - 1$.
73	18↓	$Z \notin \mathcal{F}_1$	não coberta por elemento de $\mathcal{F}_1$
75	2↓	$S_2^i\} \subseteq S_2$	S_2^i, para algum $i = 0, 1, ...\} \subseteq S_2$
75	2↓	$S_2^i, i =$	S_2^i, para algum $i =$
78	8↑	$\overline{X \cup x}^{M_2}$	$\overline{X \cup x}^{M_1}$
79	5↓	$\rho_{M_2}(X)$	$\rho_{M_2}(H)$

81	2↓	, isto é, Q_Y é ...de Q_X	
81	2↓	$Z \in Q_Y$	$Z \in \mathcal{F}_{Q_Y}$
81	5↓	$Z \in Q_X$	$Z \in \mathcal{F}_{Q_X}$
84	2↓	ρN	ρN
85	1↓	$\overline{Y \cup z}^R$	$\overline{Y \cup w}^R$
85	11↓	ρN	ρN
86	2↓	*iii.*	*iv.*
87	8↓	$\{X$	$\mathcal{F}^* = \{X$
87	12↓	$\mathcal{F}_{N/p} = \mathcal{F}$	$\mathcal{F}_{N/p} = \mathcal{F}^*$
87	14↓	$\mathcal{F}_{M_2}$	$\mathcal{F}$
89	3↑	$\rho_{D^{k-2}}$	$\rho_{D^{k-2}}(X)$
89	13↑	$x \in \mathcal{F}_{M_1}$	$X \in \mathcal{F}_{M_1}$
91	1↓	*i.* $\Leftrightarrow$ *iv.*	*i.* $\Rightarrow$ *iv.*
91	12↓	$D^j(Q_j \to Q_k)$	$D(Q_{j-1} \to Q_k)$
91	2↑	$M(4 \to 2)$	$M(4 \to 2) \cup \mathcal{F}_{M_2}$
91	3↑	$M_2 \subseteq D(1 \to 3)$	$\mathcal{F}_{M_2} \subseteq \mathcal{F}_{M_3} \subseteq \mathcal{F}_{D(1\to3)}$
92	7↓	$D(1 \to 3)$	$\mathcal{F}_{D(1\to3)}$
92	12↓	$M(1 \to 3)$	$\mathcal{F}_{D(1\to3)}$
92	5↑	$\in D(1 \to 3)$	$\in \mathcal{F}_{D(1\to3)}$
93	9↓	$D^{k-1}(M_2 \to M_3)$	$D^{k-1}(M_1 \to M_3)$
93	9↓	$D^{k-1}(M_1 \to M_3)$	$D^{k-1}(M_2 \to M_3)$
94	6↓	Q_i	$Q_i =$
95	4↑	$\|X \cap Y\|$	$\|X \cup Y\|$