

**λ -atingibilidade em
tempo mínimo**

Sergio Muniz Oliva Filho

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Luciano Barbanti**

–SÃO PAULO, Julho de 1989–

AGRADECIMENTOS

Agradecer nominalmente a todos os que colaboraram, direta ou indiretamente, na elaboração deste trabalho tomaria, talvez, mais espaço que o próprio. A todos os que se encaixam aqui os meus mais sinceros agradecimentos.

Apesar disso seria por demais injusto não citar aqui três pessoas (“que sabem, ou deveriam saber porque”); assim a *Waldyr Muniz Oliva*, *Manuel Valentim de Pera Garcia* e a *Luciano Barbanti* o meu muito obrigado.

O autor

PREFÁCIO

Há diversos problemas em teoria de controle para Equações Diferenciais Ordinárias que envolvem atingibilidade de um ponto a partir de outro, onde ambos estão associados por uma relação funcional.

É o caso, por exemplo, da questão de periodicidade: queremos, através de um sistema de controle, a partir de x_0 atingir o próprio x_0 . Ou então a partir de x_0 atingir a origem. No primeiro caso os dois pontos estão associados pela função identidade; no segundo pela função nula. Ambos os casos foram estudados na literatura (ver, por exemplo, Conti [4] e [5], para o primeiro caso, e Lee & Markus [1], para o segundo caso).

Se essa relação funcional que envolve os dois pontos - o de saída e o objetivo - for linear, então, devido à decomposição de Jordan, o problema original é remetido a atingir, a partir de x_0 , o ponto λx_0 ($\lambda \in \mathbf{R}$). Para $\lambda = 1$ estamos no caso de periodicidade e para $\lambda = 0$ no caso de atingibilidade a partir da origem.

O que nos interessa mais especificamente neste trabalho é o problema de, *fixados* $\lambda \in \mathbf{R}$ e $t > 0$ e *dado o sistema de equações diferenciais lineares homogêneas*

$$\dot{x} = Ax + u,$$

com u sujeito a restrições, caracterizar os pontos x para os quais existe um controle admissível u que transfere x a λx , em tempo t . Fixado λ , extensão natural do problema é verificar a atingibilidade de λx , a partir de x , em tempo mínimo.

Este trabalho foi inspirado na leitura dos artigos de Conti ([4] e [5]), onde o autor aborda o problema no caso de periodicidade.

-o-o-o-

O presente trabalho está dividido em dois capítulos. No capítulo 1 enunciaremos os conceitos e teoremas principais em controlabilidade linear para Equações Diferenciais Ordinárias. Nas demonstrações destes teoremas, remetemos o leitor às referências, pois estes resultados são bem conhecidos e, também, já tratados sob os mais diversos pontos de vista. No capítulo dare-

mos também exemplos, para ilustrar os teoremas e conceitos que estarão sob foco.

No capítulo 2, centro do nosso trabalho, abordaremos o problema de nosso interesse específico, explicitado acima. Nesta parte relacionaremos nossos resultados com os de Conti ([4] e [5]), e daremos também uma técnica para nos “aproximarmos” de uma solução periódica no sistema, tanto quanto quisermos (ver o conceito de “periodicidade aproximada” na Proposição 2.5).

ÍNDICE

Pág.

Capítulo 1 - Introdução e motivação:

§1. Conceitos básicos	1
§2. O problema de controle	3
§3. O conjunto de atingibilidade	7
§4. Controle de processos lineares em tempo mínimo	10
§5. Síntese ótima	11

Capítulo 2 - λ -atingibilidade em tempo mínimo:

§1. Introdução	13
§2. O problema de existência dos pontos λ -atingíveis	13
§3. Comparação com as soluções periódicas	19
§4. Periodicidade aproximada	22
§5. Contra-exemplos (necessidade da hipótese $(H_{t\lambda})$)	25
§6. O problema do tempo mínimo para λ fixo	29

Bibliografia	34
--------------	----

INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

1. Conceitos básicos

Na teoria de controle temos que lidar com alguns conceitos importantes. Dentre eles podemos citar: *estado, sistema, controle, dinâmica, conjunto restrição, objetivo e custo*. Preliminarmente ilustraremos tais conceitos com o exemplo seguinte.

Exemplo (Economia Nacional)

Estamos interessados em estudar, matematicamente, a economia de um país tipicamente capitalista.

Neste caso teremos como:

- *sistema*: o país, formado em parte pela população (como consumidores e produtores), empresas, produtos, dinheiro, crédito, etc.
- *estado do sistema*: pode ser interpretado como uma extensa coleção de dados: salários, benefícios, inflação, perdas, vendas, investimentos, desemprego, etc.
- *controles*: são os parâmetros que influenciam o estado do sistema, por exemplo: as taxas, a política de taxaço, incentivos fiscais, empréstimos, etc.
- *dinâmica*: o conhecimento de como variam os estados do sistema à medida que mudamos os controles. Em exemplos práticos, tal dinâmica pode ser muito complicada, ou até mesmo desconhecida. Este é o caso deste exemplo, onde a dinâmica ainda é objeto de inúmeras pesquisas.

Assim, o problema que a teoria de controle se propõe a resolver corresponde a determinar-se como atuar sobre os estados do sistema, através da escolha dos parâmetros de controle.

Neste sentido fica clara a necessidade dos conceitos seguintes:

- *conjunto restrição*: representa limitações do mundo real, no qual, evidentemente, nossos controles não podem assumir valores arbitrários (estando sujeitos portanto a restrições). Neste exemplo, existem inúmeras restrições, tais como, o fato que a taxa não pode ser muito grande e a existência de taxas que não podem ser negativas.

- *objetivo*: representa a meta desejada para os estados do sistema, isto é, gostaríamos que, após a aplicação dos controles, o estado do sistema atingisse um estado particular. Existem muitos estados objetivos na economia, tais como : desemprego zero, inflação zero e um nível de vida máximo. Podemos ainda ter este conjunto objetivo variando no tempo para refletir estratégias políticas e sociais de um país.

- *custo*: quando mudamos os controles para que nosso estado atinja o objetivo, estamos tendo algum gasto que será representado por um índice de desempenho denominado custo. É desejável, obviamente, em alguns casos, escolher a mudança dos controles de tal forma que o custo seja mínimo. Podemos citar, como exemplos de custos, as perdas decorrentes da mudança dos controles, o preço político por tal mudança, o tempo que se gasta para se atingir tal objetivo, e assim por diante.

Escolhemos aqui um exemplo em economia assim como poderíamos ter escolhido exemplos em qualquer outra área (tal como química, física, engenharia, medicina, etc.), isto porque os conceitos de sistema, estado e controle são gerais, ou seja, podemos ter sempre uma interpretação que os caracterize.

Daremos agora uma formulação matemática para estes conceitos, exibindo também os resultados mais conhecidos na teoria de controle para Equações Diferenciais Ordinárias Lineares.

2. O problema de controle

Neste trabalho consideraremos como a dinâmica de um sistema a classe de equações diferenciais,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t), \quad (L)$$

onde:

1. $A(t)$ é uma matriz $n \times n$, $B(t)$ é uma matriz $n \times m$ e $v(t)$ é um n -vetor coluna; cada um deles é real e mensurável em $-\infty < t < \infty$.

2. As normas $\|A(t)\|$, $\|B(t)\|$ e $\|v(t)\|$ são integráveis em cada subintervalo compacto de \mathbf{R} .

3. u é um *controle admissível*, isto é, pertence ao conjunto

$$C_\Gamma = \{u \in L^1_{Loc}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m) : u(t) \in \Gamma \text{ q.s.}\},$$

em que $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^m$ é um dado do problema e denomina-se o *conjunto restrição*. (o conjunto C_Γ é dito conjunto de controles admissíveis)

Estas hipóteses garantem a unicidade da solução de (L), dada pela fórmula da variação dos parâmetros

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)[B(s)u(s) + v(s)]ds,$$

onde $\Phi(t)$ é a matriz fundamental, solução do sistema homogêneo

$$\dot{x} = A(t)x \text{ tal que } \Phi(t_0) = Id.$$

Fixado o estado inicial (t_0, x_0) , chamamos de *resposta* a $u \in C_\Gamma$ à solução $x(\cdot, t_0, x_0, u)$ de (L). A resposta a u num instante $t \in \mathbf{R}$ fixo, $x(t, t_0, x_0, u)$, será denominada *estado do sistema num tempo t*.

Consideraremos também, um conjunto dado, $\mathcal{O}(t) \subseteq \mathbf{R}^n$, para cada $t \geq 0$, dito *conjunto objetivo num tempo t*.

Um *problema de controle* consiste em determinar t_0, x_0 e $u \in C_\Gamma$ tais que a resposta associada satisfaça $x(t_1, t_0, x_0, u) \in \mathcal{O}(t_1)$ para algum $t_1 > 0$. Dizemos então que o controle u *leva* x_0 ao objetivo.

Denotaremos por $SC_\Gamma(t_0, x_0, A, B, v)$ ao sistema de controle linear em \mathbf{R}^n

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t), \quad (L)$$

com conjunto restrição Γ , estado inicial (t_0, x_0) e controles admissíveis u em C_Γ . Por simplicidade, doravante, denotaremos tal sistema por SC_Γ ou somente SC .

Fixado um estado inicial (t_0, x_0) chamaremos de *conjunto eficaz* o conjunto dos controles admissíveis que levam (t_0, x_0) ao objetivo, em tempo finito.

Dado $t_0 \in \mathbf{R}$, definimos como *espaço controlável* o conjunto:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{t_1 > 0} \mathcal{C}(t_1)$$

onde

$$\mathcal{C}(t_1) = \{x_0 \in \mathbf{R}^n / \exists u \in C_\Gamma; x(t_1, t_0, x_0, u) \in \mathcal{O}(t_1)\},$$

ou seja, \mathcal{C} é o conjunto dos estados iniciais para os quais existe um controle eficaz.

Nestas notações, para $t_0 \in \mathbf{R}$ fixo, um *problema de controlabilidade* é a descrição do espaço controlável \mathcal{C} , ou mais precisamente, para um dado t_1 , do conjunto $\mathcal{C}(t_1)$.

Podemos ainda associar ao nosso problema de controle um custo funcional:

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt \quad (CF)$$

onde $x(t) = x(t, t_0, x_0, u)$ e f^0 é uma função contínua a valores reais dada.

Deste modo, associado à questão acima temos o problema de levar x_0 a um objetivo usando um controle admissível u tal que $C(u)$ seja mínimo. Este problema é denominado *Problema de Controle Ótimo*.

Um exemplo clássico onde os conceitos acima (e suas aplicações em sistemas físicos) ficam bem claros é o seguinte

Exemplo 1.1 (O carro foguete)

Dado um carro equipado com dois propulsores (foguetes) instalados nas extremidades, com massa unitária, e que se move sem atrito sobre uma reta, o problema é mover o carro de uma posição inicial qualquer para um destino pré-determinado. A alteração do movimento será feita através dos propulsores (podemos disparar qualquer um dos propulsores e ainda controlar sua potência através de um mecanismo tipo acelerador variável).

O movimento do carro pode ser descrito por $p(t)$, sua posição no tempo t , com p_0 e v_0 sendo a posição e velocidade no instante inicial $t = 0$. Nosso destino será chegar à origem com o carro em *repouso* (velocidade zero). O vetor *estado* deste sistema é portanto $x(t) = (p(t), \dot{p}(t))$; o *estado inicial* é (p_0, v_0) e o conjunto objetivo é

$$\mathcal{O}(t) = \{(0, 0)\}. \quad (\forall t > 0)$$

Logo, neste caso, o problema de controle é determinar como disparar os propulsores para atingir o objetivo num tempo t . Para isto precisamos definir a natureza dos controles a serem utilizados; um *controle* u será uma função a valores reais que representa a força sobre o carro, decorrente do disparo de um dos propulsores no tempo t . Convencionaremos que o disparo do propulsor da direita (respectivamente esquerda), no tempo t , gera uma força negativa (respectivamente positiva) no carro.

Definidos os estados e os controles, a *dinâmica* deste sistema será dada pela Lei de Newton, que pode ser escrita como $\ddot{p}(t) = u(t)$. O sistema de equações diferenciais (L), na forma vetorial, é

$$x(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + u(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (C)$$

Fisicamente, como já dissemos, temos, em geral, restrições sobre a força com a qual podemos atuar sobre o carro. Definimos assim, como *conjunto restrição*, o conjunto:

$$\Gamma = \{x \in \mathbf{R} : |x| \leq 1\}.$$

Deste modo, o conjunto dos *controles admissíveis* será:

$$C_{\Gamma} = \{u \in L^1_{Loc} : u(t) \in \Gamma \text{ q.s.}\}.$$

Por exemplo, a função:

$$u(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t \leq 1; \\ -\frac{1}{2}, & 1 < t \leq 3; \end{cases}$$

representa um controle admissível no sistema, que nos diz para disparar o propulsor esquerdo em plena força durante uma unidade de tempo e daí disparar o propulsor direito a meia força durante 3 unidades de tempo.

Com isto vemos que cada controle u gera uma *resposta* $x(t) = x(t, x_0, u)$ e, dado o estado inicial $x_0 = (p_0, v_0)$, um *controle eficaz* é aquele cuja resposta atinge o objetivo em algum tempo finito, $t_1 > 0$. Pode não haver tal controle ou podem existir muitos deles. Devido à possibilidade de existirem vários controles eficazes e da necessidade prática, somos levados a escolher, seguindo um critério pré-determinado, qual controle usar. Este critério é o do custo funcional (CF). Por exemplo o critério poderia ser consumo de combustível para se alcançar o objetivo, energia gasta ou tempo gasto, dados respectivamente por:

$$C(u) = \int_0^t |u(s)| ds,$$

$$C(u) = \int_0^t |u(s)|^2 ds, \quad |u(s)| \leq K,$$

$$C(u) = \int_0^t ds.$$

Esta escolha define nosso problema de controle como um *Problema de Controle Ótimo*.

Como visto acima, variando f^0 em (CF) temos diferentes exigências nos critérios de escolha de controles ótimos. No presente trabalho estaremos

interessados somente em minimizar o tempo, ou seja, usaremos em (CF), $f^0 \equiv 1$.

Denotaremos por controle ótimo associado ao funcional C ao controle eficaz u^* tal que

$$C(u^*) \leq C(u), \text{ para todo controle eficaz } u.$$

3. O conjunto de atingibilidade

Como dito anteriormente, um sistema de controle pode não possuir controles eficazes. Neste sentido, ampliando um pouco a ótica de análise do problema de controle, vamos introduzir o conceito de atingibilidade, ou seja, vamos descrever o conjunto dos pontos que podem ser atingidos num tempo t , usando-se todos os controles admissíveis do sistema.

Definiremos o *conjunto de atingibilidade* no tempo t , $K_\Gamma(t, t_0, x_0)$, e o *cone de atingibilidade*, $RC_\Gamma(t_0, x_0)$, associados a SC_Γ , como:

$$K_\Gamma(t, t_0, x_0) = \{x(t, t_0, x_0, u) / u \in C_\Gamma\}$$

e

$$\begin{aligned} RC_\Gamma(t_0, x_0) &= \{(t, x(t, t_0, x_0, u)) / t \geq t_0 \text{ e } u \in C_\Gamma\} = \\ &= \bigcup_{t \geq t_0} (\{t\} \times K_\Gamma(t, t_0, x_0)) \end{aligned}$$

A princípio pode parecer que os pontos que são atingidos a partir de um estado inicial dependem fundamentalmente das “dimensões” de Γ . Surpreendentemente, não é o caso: Pode-se ver, já no exemplo 1.1, que

$$\Gamma = \{x \in \mathbf{R} : |x| \leq 1\} \text{ ou } \Gamma_1 = \{-1, +1\}$$

geram o mesmo conjunto de atingibilidade a partir de x_0 . O teorema seguinte, mostra a formulação geral deste fato:

Teorema 1.1 (Princípio do Bang-Bang)

Considere o sistema SC_Γ . Para todo $t > 0$, o conjunto de atingibilidade $K_\Gamma(t, t_0, x_0)$ é convexo e, denotando por $co\Gamma$ a envoltória convexa de Γ , temos que

$$K_\Gamma(t, t_0, x_0) = K_{co\Gamma}(t, t_0, x_0)$$

Se além disto, supusermos que Γ é compacto então o conjunto de atingibilidade $K_\Gamma(t, t_0, x_0)$ é compacto e varia continuamente em relação a t , para $t \geq t_0$ (em relação à métrica Hausdorff).

Para uma demonstração deste Teorema veja o Teorema 1A, pág. 165 em [1].

O Teorema 1.1 fornece uma visão sobre a estrutura topológica dos conjuntos de atingibilidade variando no tempo:

Corolário 1.1

Se P é um ponto interior do conjunto $K_\Gamma(t_1, t_0, x_0)$ então existem uma vizinhança V de P e um $\delta > 0$ tais que cada conjunto $K_\Gamma(t_2, t_0, x_0)$, com $|t_2 - t_1| < \delta$, contém V em seu interior.

Vamos agora introduzir um dos teoremas mais importantes da Teoria de Controle, denominado Princípio do Máximo de Pontryaguin. Para enunciá-lo daremos algumas definições preliminares:

Definição 1.1

Seja $K_\Gamma(t_1, t_0, x_0)$ o conjunto de atingibilidade no tempo t_1 para o sistema SC_Γ . Diz-se que um ponto $P \in \partial K_\Gamma(t_1, t_0, x_0)$ está na *nova fronteira* de $K_\Gamma(t_1, t_0, x_0)$ se P não está em nenhum dos conjuntos $K_\Gamma(t, t_0, x_0)$, para $t_0 \leq t < t_1$, ou seja

$$P \in \left[\partial K_\Gamma(t_1, t_0, x_0) \setminus \bigcup_{t_0 \leq t < t_1} K_\Gamma(t, t_0, x_0) \right]$$

Definição 1.2

Seja $u \in C_\Gamma$ um controle admissível para o sistema SC_Γ . Se para a resposta x associada a u tivermos $x(t_1) \in \partial K_\Gamma(t_1, t_0, x_0)$ dizemos que o controle u (e a resposta associada x) são *extremais* no intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$.

Definição 1.3

Seja $u \in C_\Gamma$ um controle admissível para o sistema SC_Γ . Dizemos que o controle u é *maximal* para o intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ se existe uma solução não trivial η do sistema linear adjunto

$$\dot{\eta} = -\eta A(t) \tag{LAdj}$$

associado ao sistema linear homogêneo

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{LH}$$

tal que

$$\eta(t)B(t)u(t) = \max_{\gamma \in \Gamma} \eta(t)B(t)\gamma \tag{MAX}$$

para $t_0 \leq t \leq t_1$ q.s.

Observação

A solução η de (LAdj) é o n-vetor linha da forma $\eta = \eta_0 \Phi^{-1}$, onde η_0 é um n-vetor linha constante e Φ é a matriz fundamental associada a (LH) tal que $\Phi(t_0) = Id$. Se $\eta_0 \neq 0$ então η não se anula em nenhum ponto t e se $A(t) \equiv A$, constante, então $\eta(t) = \eta_0 e^{-(t-t_0)A}$.

Dados estes conceitos podemos enunciar o Princípio do Máximo de Pontryaguin. Este teorema dará uma caracterização analítica dos controles extremais a partir da solução do sistema adjunto. Esta caracterização tem propriedades importantes na teoria de controle ótimo (como por exemplo no problema de tempo mínimo).

Teorema 1.2 (Princípio do Máximo de Pontryaguin para sistemas lineares)

Considere o sistema SC_Γ , com conjunto compacto de restrições Γ . Um controle $u \in C_\Gamma$ é extremal no intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ se e somente se u é maximal neste intervalo.

Para uma demonstração deste Teorema veja [1], pág. 73, Teorema 2.

A versão geométrica deste teorema é dada pelo seguinte

Corolário 1.2

Sejam $u \in C_\Gamma$ um controle extremal no intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ associado ao sistema SC , x e η as correspondentes respostas. Se vale (MAX) então, para $t_0 \leq \tau \leq t_1$, u é um controle extremal em cada subintervalo $t_0 \leq t \leq \tau$, com $x(\tau) \in \partial K_\Gamma(\tau, t_0, x_0)$. Temos ainda que $\eta(\tau)$ é normal exterior ao hiperplano suporte Π_τ de $K_\Gamma(\tau, t_0, x_0)$ em $x(\tau)$.

4. Controle de processos lineares em tempo mínimo

No caso que em (CF) temos $f^0 \equiv 1$, pode-se caracterizar a existência de um controle ótimo u^* e além disso, utilizando o Princípio do Máximo de Pontryaguin (Teorema 1.2), dar uma condição necessária que este u^* deve satisfazer. É o exposto, nos

Teorema 1.3 (Existência)

Considere o sistema SC_Γ , com conjunto de restrições $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^m$, compacto, e um conjunto objetivo compacto $\mathcal{O}(t)$ que varia continuamente em $t_0 \leq t \leq t_1$. Se existir um controle eficaz em algum tempo $\tau_1 < t_1$ então existe um controle ótimo (isto é, com resposta em tempo mínimo), $u^* \in C_\Gamma$, definido em $t_0 \leq t \leq t^*$, com $t^* \leq t_1$, transferindo x_0 a $\mathcal{O}(t^*)$.

Para uma demonstração deste Teorema veja [1], pág. 127, Teorema 17.

Teorema 1.4 (Condição necessária para controle em tempo mínimo)

Considere o sistema SC_Γ , com conjunto de restrições $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^m$, compacto, e um conjunto objetivo $\mathcal{O}(t)$ que varia continuamente em $t_0 \leq t \leq t_1$. Seja $u^* \in C_\Gamma$ um controle com resposta x^* em tempo mínimo. Então u^* é maximal (portanto pelo Teorema 2 é extremal), isto é,

$$m(t) \equiv \max_{\gamma \in \Gamma} \eta(t)B(t)\gamma = \eta(t)B(t)u^*(t) \quad (MAX1)$$

ou também,

$$M(t) \equiv \max_{\gamma \in \Gamma} \eta(t)[A(t)x^*(t)+B(t)\gamma+v(t)] = \eta(t)[A(t)x^*(t)+B(t)u^*(t)+v(t)] \quad (MAX2)$$

para $t_0 \leq t \leq t^*$, q.s.

Se além disto supusermos ainda que $\mathcal{O}(t) \equiv \mathcal{O}$, constante, então $x^*(t^*)$ pertence à nova fronteira de $K_\Gamma(t^*, t_0, x_0)$ e neste caso, dadas $A(t), B(t)$ e $v(t)$ contínuas, a normal $\eta(t^*)$ pode ser escolhida com

$$M(t^*) \geq 0.$$

Se ainda mais, supusermos que \mathcal{O} é convexo, então podemos escolher $\eta(t^*)$ satisfazendo a seguinte condição de transversalidade : $\eta(t^*)$ é normal ao hiperplano suporte separando $K_\Gamma(t^*, t_0, x_0)$ e \mathcal{O} .

Para uma demonstração deste Teorema veja [1], pág. 129, Teorema 18.

Corolário 1.4 (Caso autônomo)

Se, no Teorema 4, (L) for autônomo e $u \in C_\Gamma$ for um controle extremal satisfazendo (MAX2) em $t_0 \leq t \leq t_1$ q.s., com as correspondentes respostas x e η então M é constante em $t_0 \leq t \leq t_1$.

Para uma demonstração veja [1], pág. 131.

5. Síntese ótima

No caso em que o sistema (L) é autônomo, suporemos sempre $t_0 = 0$, pois a resposta associada independe do tempo inicial t_0 .

Suponhamos agora dado um estado inicial x_0 , que é levado efetivamente ao objetivo. Associado ao problema de controle ótimo, temos o problema geométrico denominado *síntese*, que consiste em se descrever pelo menos um controle ótimo que leve x_0 ao objetivo; mais geralmente, a síntese descreve um método para se construir um controle eficaz para cada estado inicial que pode ser levado ao objetivo.

Se assumirmos que \mathcal{O} é constante e convexo, o Teorema 1.4 nos dá uma técnica para resolver tal problema de síntese no caso autônomo.

Um método geométrico muito útil para esta síntese é descrever a curva denominada “switching locus”. A “switching locus” W em $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ consiste de todos os pontos $x(t)$ para os quais, neste instante, $u(t)$ é descontínua, onde $u(t)$ é dada pelo Teorema 1.4.

Vamos ilustrar a construção da “switching locus” considerando ainda o exemplo do carro foguete. Denotamos, como visto no exemplo 1.1, por x o ponto do plano de fase (p, \dot{p}) .

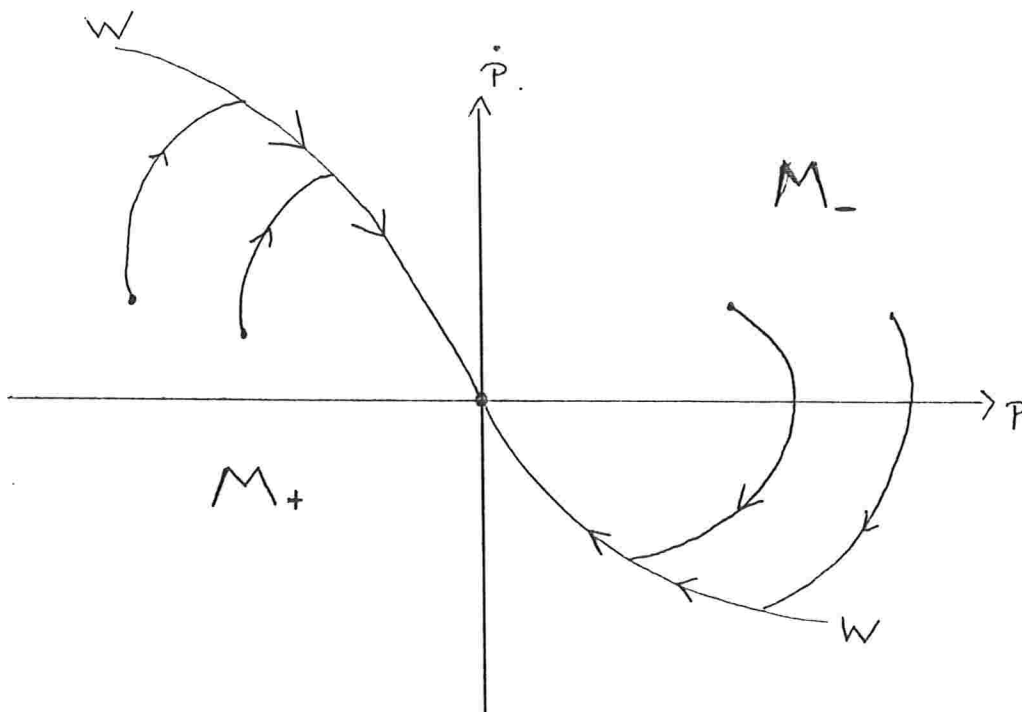
Neste exemplo os controles u são tais que $|u(t)| \leq 1$. Assim, W separa $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O} = \mathbb{R}^{2*}$ em dois conjuntos abertos: M_+ , no qual “domina” o valor $u = +1$ (pois $\eta > 0$), e M_- , no qual “domina” $u = -1$ (pois $\eta < 0$). Portanto dada a função:

$$u^*(x) = \begin{cases} +1, & \text{se } x \in M_+; \\ -1, & \text{se } x \in M_-. \end{cases}$$

temos que a resposta ótima associada será dada pelas soluções de

$$\dot{x} = Ax + Bu^*(x) + v.$$

Podemos representar esta síntese graficamente assim,



λ -ATINGIBILIDADE EM TEMPO MÍNIMO

1 - Introdução

Entramos agora no centro deste trabalho.

Dados um conjunto restrição $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^n$, os controles admissíveis $u \in C_\Gamma$ e o processo linear autônomo

$$\dot{x} = Ax + u, \quad (LA)$$

queremos estudar a existência de pontos λ -atingíveis em um tempo T , isto é, a existência de pontos $x_0 \in \mathbf{R}^n$ que atingem λx_0 num tempo T , fixados $\lambda \in \mathbf{R}$ e $T > 0$, ou seja, quando existe um controle admissível no sistema cuja resposta leva x_0 a λx_0 depois de um tempo T .

Além disso, neste capítulo queremos estudar também o problema de tempo mínimo associado, isto é, o problema de se encontrar o menor T em que x_0 é transferível a λx_0 , fixado λ à priori. Queremos portanto encontrar

$$T = \min \{t > 0 : x(t, x_0, u) = \lambda x_0, \text{ para algum } u \in C_\Gamma\}.$$

Observemos que esta teoria pode ser facilmente adaptada se ao invés de λx_0 quisermos atingir Mx_0 , onde M é um operador linear em \mathbf{R}^n , dado.

2 - O problema de existência dos pontos λ -atingíveis

Com o propósito de estudar o problema da existência dos pontos x_0 mencionados no parágrafo anterior, introduzimos algumas definições.

Definição 2.1 (λ -atingibilidade)

O conjunto dos pontos λ -atingíveis em tempo t , segundo (LA) com $u \in C_\Gamma$, é o conjunto:

$$\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) = \{x_0 \in \mathbf{R}^n : x(t, x_0, u) = \lambda x_0 \text{ para algum } u \in C_\Gamma\}.$$

Este conjunto tem uma caracterização em função do conjunto de atingibilidade a partir da origem, que explicitamos à seguir.

Dado o conjunto dos pontos atingíveis a partir da origem:

$$W(t, A, \Gamma) = \left\{ \int_0^t e^{(t-s)A} u(s) ds : u \in C_\Gamma \right\}$$

e a aplicação linear

$$J_{t,A,\lambda} = \lambda I - e^{tA},$$

temos que

$$\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) = \{x \in \mathbf{R}^n : J_{t,A,\lambda} x \in W(t, A, \Gamma)\}.$$

Hipótese

Doravante, suporemos que, dados $t > 0$ e $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\{1, \lambda\} \cap \sigma(e^{tA}) = \emptyset, \quad (H_{t\lambda})$$

onde $\sigma(T)$ é o espectro do operador T .

A necessidade desta hipótese ficará clara no decorrer do trabalho.

Da comparação de $W(t, A, \Gamma)$ e $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$ obtemos os seguintes resultados imediatos:

Proposição 2.1

São válidas as seguintes asserções:

- 1) $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$ é convexo;
- 2) Se Γ é subespaço de \mathbf{R}^n então $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$ é um subespaço invariante por A , assim como $W(t, A, \Gamma)$;
- 3) Se Γ é compacto então $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$ é fechado (não podemos garantir que seja compacto);
- 4) Se Γ é compacto então a função

$$t \longrightarrow \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$$

é contínua em $\{t > 0 : \det J_{t,A,\lambda} \neq 0\}$ (em relação a métrica Hausdorff);

Dem:

- 1) Como $J_{t,A,\lambda}$ é linear em x e como $W(t, A, \Gamma)$ é convexo (Teorema 1.1), segue imediatamente que $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$ é convexo;
- 2) Esta propriedade é imediata a partir da definição;
- 3) Como $J_{t,A,\lambda}$ é linear em x e, pelo Teorema 1.1, $W(t, A, \Gamma)$ é compacto, temos imediatamente o resultado;
- 4) No domínio tomado, $J_{t,A,\lambda}$ é inversível, contínua e com inversa contínua e ainda mais temos que a função

$$t \longrightarrow W(t, A, \Gamma)$$

é contínua em t (em relação a métrica Hausdorff) (Teorema 1.1). Segue então que, como

$$\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) = J_{t,A,\lambda}^{-1} W(t, A, \Gamma),$$

$\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$ é contínua no domínio tomado (em relação a métrica Hausdorff). ■

Observemos que, nos pontos $t > 0$ para os quais $\det J_{t,A,\lambda} = 0$, podemos perder a continuidade dada pela Proposição 2.1 ítem 4), como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo

- 1) Consideremos $A=I$, $\lambda = 2$, $t > 0$ e

$$\Gamma = \{(\gamma, 0) : \gamma \in \mathbf{R}\},$$

então temos que, se $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $\gamma \in C_\Gamma$ e $x \in \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} \gamma(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds \right].$$

Logo, teremos

$$t \neq \ln 2 \implies \mathcal{A}(t, 2, A, \Gamma) = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_2 = 0\}.$$

Agora, temos também que:

$$t = \ln 2 \implies \mathcal{A}(\ln 2, 2, A, \Gamma) = \mathbf{R}^2.$$

2) Trocando-se em 1) Γ por:

$$\Gamma_1 = \{(\gamma, 0) : \gamma > 0\}$$

temos que:

$$t = \ln 2 \implies \mathcal{A}(\ln 2, 2, A, \Gamma_1) = \emptyset.$$

Mesmo diante da Proposição 2.1 não podemos garantir que existe algum $x_0 \in \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$. Para investigar este problema, temos que considerar o conjunto dos pontos λ -constantes, que é, como veremos, fundamental para tal fim.

Definição 2.2 (pontos λ -constantes)

O conjunto dos pontos λ -constantes é:

$$\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \Gamma) = \{x \in \mathbf{R}^n : J_{t,A,\lambda}Ax \in (e^{tA} - I)\Gamma\}.$$

Vê-se que $\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \Gamma)$ é subconjunto de $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$, ao se considerar a λ -atingibilidade através de controles constantes, pois:

$$\begin{aligned} A \int_0^t e^{(t-s)A} ds \cdot \beta &= \int_0^t (-e^{(t-s)A})' ds \cdot \beta = \\ &= (e^{tA} - I)\beta. \end{aligned}$$

O conjunto dos pontos λ -constante terá uma papel fundamental na prova da existência de pontos em $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$, como mostra o seguinte

Teorema 2.1

Sob $(H_{t\lambda})$

$$\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset \iff \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset \quad (1)$$

Dem: Da hipótese $(H_{t\lambda})$ segue que $(e^{tA} - I)$, $(\lambda I - e^{tA})$ e A são inversíveis.

(\implies) Se $x_0 \in \mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma)$ temos então:

$$(\lambda I - e^{tA})Ax_0 = (e^{tA} - I)\beta \text{ com } \beta \in \text{co}\Gamma.$$

Portanto

$$J_{t,A,\lambda}x_0 = (\lambda I - e^{tA})x_0 = A^{-1}(e^{tA} - I)\beta = \int_0^t e^{(t-s)A} ds \cdot \beta.$$

Como $W(t, A, \Gamma)$ é convexo, segue que

$$\left(\int_0^t e^{(t-s)A} ds \right) \text{co}\Gamma \subseteq W(t, A, \Gamma).$$

Logo, para todo $x_0 \in \mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma)$, temos

$$J_{t,A,\lambda}x_0 \in W(t, A, \Gamma) .$$

Assim,

$$\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) \subseteq \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma).$$

(\impliedby) Suponha que $\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) = \emptyset$. Temos então que

$$\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) = (\lambda I - e^{tA})^{-1} A^{-1} (e^{tA} - I) \text{co}\Gamma.$$

Deste modo $\text{co}\Gamma = \emptyset$, e assim $\Gamma = \emptyset$, mostrando que $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) = \emptyset$. ■

Em geral, se retirarmos parte da hipótese $(H_{t\lambda})$, a seguinte proposição se verifica

Proposição 2.2

Dados $t > 0$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, as seguintes asserções são válidas:

1) Se $1 \notin \sigma(e^{tA})$ vale

$$\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset \implies \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset.$$

2) Se $\lambda \notin \sigma(e^{tA})$ e $\Gamma \neq \emptyset$ então

$$\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset.$$

Dem:

1) A demonstração segue imediatamente da demonstração de (1) acima.

2) Seja $\beta \in \text{co}\Gamma \neq \emptyset$ (pois $\Gamma \neq \emptyset$). Se tomarmos

$$x = (\lambda I - e^{tA})^{-1} \int_0^t e^{(t-s)A} ds \cdot \beta$$

temos que

$$\begin{aligned} (\lambda I - e^{tA})Ax &= (\lambda I - e^{tA})(\lambda I - e^{tA})^{-1} e^{tA} \int_0^t A e^{-sA} ds \cdot \beta = \\ &= e^{tA} \int_0^t (-e^{-sA})' ds \cdot \beta = e^{tA} (-e^{-tA} + I)\beta = \\ &= (e^{tA} - I)\beta, \end{aligned}$$

portanto $x \in \mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma)$ e

$$J_{t,A,\lambda}x = (\lambda I - e^{tA})x = \int_0^t e^{(t-s)A} ds \cdot \beta \in W(t, A, \Gamma),$$

devido a convexidade de $W(t, A, \Gamma)$. Assim temos também $x \in \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$. ■

Podemos ainda caracterizar a existência de pontos λ -atingíveis ($\lambda \in \mathbf{R}$) em função da existência de soluções periódicas do sistema ($\lambda = 1$).

3 - Comparação com as soluções periódicas

O conjunto dos pontos 1-atingíveis em tempo t é discutido mais detalhadamente em Conti ([4] e [5]). Tal conjunto é denominado ali de *conjunto de pontos de retorno em tempo t* , que como é bem sabido, em (LA), são os pontos pelos quais passa uma solução t -periódica.

Um dos resultados centrais de [4] e [5] é:

$$R_0(A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset \iff \mathcal{A}(t, 1, A, \Gamma) \neq \emptyset, \quad (\forall t > 0)$$

onde $R_0(A, \Gamma) = \{x \in \mathbf{R}^n : -Ax \in \Gamma\}$.

Temos uma relação entre o conjunto R_0 e o conjunto dos pontos λ -constantes, dada pelo seguinte

Teorema 2.2

Sob $(H_{t\lambda})$

$$R_0(A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset \iff \mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset. \quad (2)$$

Dem:

(\implies) Como existe $x \in \mathbf{R}^n$ tal que $-Ax \in \text{co}\Gamma$, considerando

$$y = (\lambda I - e^{tA})^{-1}(I - e^{tA})x$$

vale que $y \in \mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma)$. De fato,

$$\begin{aligned} (\lambda I - e^{tA})Ay &= (\lambda I - e^{tA})(\lambda I - e^{tA})^{-1}(e^{tA} - I)(-Ax) = \\ &= (e^{tA} - I)(-Ax) \in (e^{tA} - I)\text{co}\Gamma. \end{aligned}$$

(\impliedby) Como existe $y \in \mathbf{R}^n$ tal que $(\lambda I - e^{tA})Ax \in (e^{tA} - I)\text{co}\Gamma$, então

$$x = (e^{tA} - I)^{-1}(e^{tA} - \lambda I)x \in R_0(A, \text{co}\Gamma). \quad \blacksquare$$

Em presença do Teorema 2.1, um corolário imediato do Teorema 2.2 é:

Teorema 2.3
Sob $(H_{t\lambda})$

$$R_0(A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset \iff \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset.$$

Se retirarmos parte da hipótese do teorema 2.2 temos, ainda, a seguinte proposição

Proposição 2.3

Dados $t > 0$ e $\lambda \in \mathbf{R}$ são válidas as seguintes asserções:

1) Se $1 \notin \sigma(e^{tA})$ então

$$R_0(A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset \iff \mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset.$$

2) Se $\lambda \notin \sigma(e^{tA})$ então

$$R_0(A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset \implies \mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset.$$

As demonstrações são idênticas às do Teorema 2.2.

O teorema seguinte relaciona o conjunto dos pontos de retorno com o conjunto dos pontos λ -atingíveis em tempo t .

Teorema 2.4
Sob $(H_{t\lambda})$

$$\mathcal{A}(t, 1, A, \Gamma) \neq \emptyset \iff \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset. \quad (3)$$

Dem.:

(\Leftarrow) Seja $x \in \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$, portanto existe $c_t \in C_\Gamma$ tal que

$$\lambda x = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}c_t(s)ds.$$

Logo, considerando

$$y = (I - e^{tA})^{-1}(\lambda I - e^{tA})x,$$

temos que

$$\begin{aligned} e^{tA}y + \int_0^t e^{(t-s)A}c_t(s)ds &= e^{tA}y + (\lambda I - e^{tA})x = \\ &= e^{tA}y + (I - e^{tA})y = y, \end{aligned}$$

mostrando que $y \in \mathcal{A}(t, 1, A, \Gamma)$.

(\implies) Seja $y \in \mathcal{A}(t, 1, A, \Gamma)$, então temos que existe $c_t \in C_\Gamma$ tal que

$$y = e^{tA}y + \int_0^t e^{(t-s)A}c_t(s)ds.$$

Considerando então

$$x = (\lambda I - e^{tA})^{-1}(I - e^{tA})y,$$

temos que

$$\begin{aligned} e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}c_t(s)ds &= e^{tA}x + (I - e^{tA})y = \\ &= e^{tA}x + (\lambda I - e^{tA})x = \lambda x. \end{aligned}$$

Portanto $x \in \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$. ■

Observe que o resultado de Conti ([4] e [5]) e o Teorema anterior dão uma nova demonstração do Teorema 2.1.

Novamente, se retirarmos parte da hipótese do teorema anterior, o seguinte resultado se verifica

Proposição 2.4

Dados $t > 0$ e $\lambda \in \mathbf{R}$ são válidas as seguintes asserções

1) Se $1 \notin \sigma(e^{tA})$ então

$$\mathcal{A}(t, 1, A, \Gamma) \neq \emptyset \iff \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset.$$

2) Se $\lambda \notin \sigma(e^{tA})$ então

$$\mathcal{A}(t, 1, A, \Gamma) \neq \emptyset \implies \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset.$$

As demonstrações são idênticas às do Teorema 2.4

4 - Periodicidade aproximada

Os resultados dos parágrafos anteriores mostram que sob $(H_{t\lambda})$, existindo um ponto λ -atingível (para algum $\lambda \in \mathbf{R}$), sempre existem soluções t -periódicas no sistema. Mas não podemos garantir tal existência se $(H_{t\lambda})$ não se verificar. Mesmo assim há a possibilidade de uma “aproximação” arbitrária a uma solução periódica. Denominaremos tal propriedade de *periodicidade aproximada*.

Mais especificamente, explicitamos a propriedade da periodicidade aproximada no Corolário da seguinte,

Proposição 2.5

Fixados $t > 0$ e $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^n$, suponhamos que exista $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset$. Então para todo $\mu \in \mathbf{R}$ tal que $\mu \notin \sigma(e^{tA})$ podemos afirmar que

1. $\mathcal{A}(t, \mu, A, \Gamma) \neq \emptyset$.
2. Podemos escolher $y \in \mathcal{A}(t, \mu, A, \Gamma)$ de forma que varie continuamente em função de μ .

Dem.:

1. Seja $x \in \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$. Pela definição de $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$ temos que, para algum $\gamma \in C_\Gamma$, vale

$$(\lambda I - e^{tA})x = \int_0^t e^{(t-s)A} \gamma(s) ds.$$

Deste modo, se

$$y = (\mu I - e^{tA})^{-1}(\lambda I - e^{tA})x,$$

temos imediatamente que $y \in \mathcal{A}(t, \mu, A, \Gamma)$

2. Decorre imediatamente da construção de y acima. ■

Corolário 2.1 (Periodicidade aproximada)

Fixados $t > 0$ e $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^n$, suponhamos que exista $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset$. Então, dado $\delta > 0$, existe $x_0 \in \mathbf{R}^n$ e um controle admissível u tais que

$$|x(t, x_0, u(\cdot)) - x_0| \leq \delta.$$

Ou seja, para o sistema (LA), sempre existe uma solução “tão próxima de ser periódica”, quanto quisermos.

Dem.: Se $1 \notin \sigma(e^{tA})$ temos o caso de existência de solução periódica sempre. Caso contrário, suponhamos

$$0 < \mu \leq \delta \text{ tal que } \mu \notin \sigma(e^{tA})$$

(observe que sempre existe tal μ pois $\sigma(e^{tA})$ é discreto).

Aplicando a proposição anterior, temos que

$$\mathcal{A}(t, \mu, A, \Gamma) \neq \emptyset. \quad \blacksquare$$

Em geral, ainda falta garantir que existe um λ tal que $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset$. As proposições seguintes dão mais condições suficientes para existência de tal λ , mesmo quando $1 \in \sigma(e^{tA})$.

Proposição 2.6

Sejam $\lambda \in \sigma(e^{tA})$ diferente de 1, x_0 o auto-vetor associado e $\mu \in \mathbf{R}$ tais que

$$-\left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda - 1}\right) Ax_0 \in \Gamma.$$

Então

$$x_0 \in \mathcal{A}(t, \mu, A, \Gamma).$$

Dem.: Considerando as funções

$$c \equiv -\left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda - 1}\right) Ax_0 \text{ e } x(s) = \left(\frac{\mu - 1}{\lambda - 1}\right) e^{-sA} x_0 + \left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda - 1}\right) x_0,$$

temos que $x(0) = x_0$, $x(t) = \mu x_0$ e

$$\dot{x}(s) = A \left(\frac{\mu - 1}{\lambda - 1}\right) e^{-sA} x_0 = Ax(s) + c(s).$$

Logo $x_0 \in \mathcal{A}(t, \mu, A, \Gamma)$. ■

Proposição 2.7

Seja λ autovalor de e^{tA} associado ao autovetor x_0 e suponhamos ainda que $0 \in \Gamma$. Então

$$x_0 \in \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma).$$

Dem.: Basta considerar $x(s) = e^{sA} x_0$. ■

Como vimos, os pontos, pelos quais passam uma solução periódica aproximada, variam continuamente à medida que variamos δ (ou μ), no Corolário 2.1. Damos então uma estimativa de suas localizações relativas, segundo as duas proposições seguintes, de demonstração imediata.

Proposição 2.8

Fixados λ, x_0 e $t > 0$, consideremos o conjunto dos pontos que atingem λx_0 num tempo t :

$$U(t, \lambda, x_0, A, \Gamma) = \left\{ e^{-tA} \lambda x_0 - \int_0^t e^{-sA} c(s) ds, \text{ para todo } c \in C_\Gamma \right\}$$

Se $x, y \in U(t, \lambda, x_0, A, \Gamma)$ então

$$\|x - y\| \leq \frac{(e^{t\|A\|} - 1)}{\|A\|} \text{diam}\Gamma.$$

Proposição 2.9

Fixados $x_0, t > 0$ e o conjunto de restrições Γ , consideremos o conjunto $K(t, x_0)$. Para $x, y \in K(t, x_0)$ temos que

$$\|x - y\| \leq \frac{(e^{2t\|A\|} - e^{t\|A\|})}{\|A\|} \text{diam}\Gamma.$$

5 - Contra-exemplos (necessidade da hipótese $(H_{t\lambda})$)

Para perceber a necessidade do uso da hipótese $(H_{t\lambda})$ neste trabalho, daremos alguns contra-exemplos aos resultados dos parágrafos anteriores, quando $(H_{t\lambda})$ não se verifica.

Contra-Exemplo 1 (Caso $\lambda = 1 \in \sigma(e^{tA})$)

Seja $\lambda = 1$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma = \{(\gamma, \gamma, \gamma) : \gamma > 0\}.$$

1) $\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset$

De fato, dados $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ e $\gamma = (\gamma, \gamma, \gamma) \in \text{co}\Gamma = \Gamma$, temos que:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(I - e^{tA})Ax = \begin{pmatrix} (1 - e^t)x_1 \\ (1 - e^t)x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(e^{tA} - I)\gamma = \begin{pmatrix} (e^t - 1)\gamma \\ (e^t - 1)\gamma \\ 0 \end{pmatrix},$$

logo todo x da forma $(-z, -z, y)$ com $z > 0$, está em $\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma)$.

2) $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) = \emptyset$

De fato, dados $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ e $\gamma(s) = (\gamma(s), \gamma(s), \gamma(s)) \in C_\Gamma$ temos que

$$e^{tA}(x + \int_0^t e^{-sA}\gamma(s)ds) = \begin{pmatrix} e^t x_1 \\ e^t x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t e^{t-s}\gamma(s)ds \\ \int_0^t e^{t-s}\gamma(s)ds \\ \int_0^t \gamma(s)ds \end{pmatrix} = (*).$$

Logo, para termos

$$(*) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

é necessário que $\int_0^t \gamma(s)ds = 0$ o que é um absurdo, já que temos γ sempre positivo, pois $\gamma \in C_\Gamma$. Portanto a implicação (\implies) de (1) é falsa se retirarmos a hipótese dada na Proposição 2.2.

Contra-exemplo 2 ($1 \in \sigma(e^{tA})$ e $\lambda \notin \sigma(e^{tA})$)

Consideremos agora o caso em que 1 é autovalor de e^{tA} e λ não é. Dados

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \Gamma = \{(0, \gamma) : \gamma > 0\},$$

então,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) $R_0(A, \text{co}\Gamma) = \emptyset$

Supondo que existe $x \in \mathbf{R}^2$ tal que $-Ax \in \text{co}\Gamma = \Gamma$, teremos que

$$-Ax = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

o que é absurdo pelo Γ escolhido.

2) $\mathcal{A}_0(t, \lambda, A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset$

Seja $x \in \mathbf{R}^2$, $\lambda \neq 1$ e $\gamma \in \text{co}\Gamma = \Gamma$ (aqui utilizaremos abusivamente a notação $\gamma = (0, \gamma)$ com $\gamma > 0$). Assim,

$$Ax = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\lambda I - e^{tA})Ax = \begin{pmatrix} (\lambda - 1)x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(e^{tA} - I)\gamma = \begin{pmatrix} t\gamma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto queremos ter

$$\begin{pmatrix} (\lambda - 1)x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\gamma \\ 0 \end{pmatrix},$$

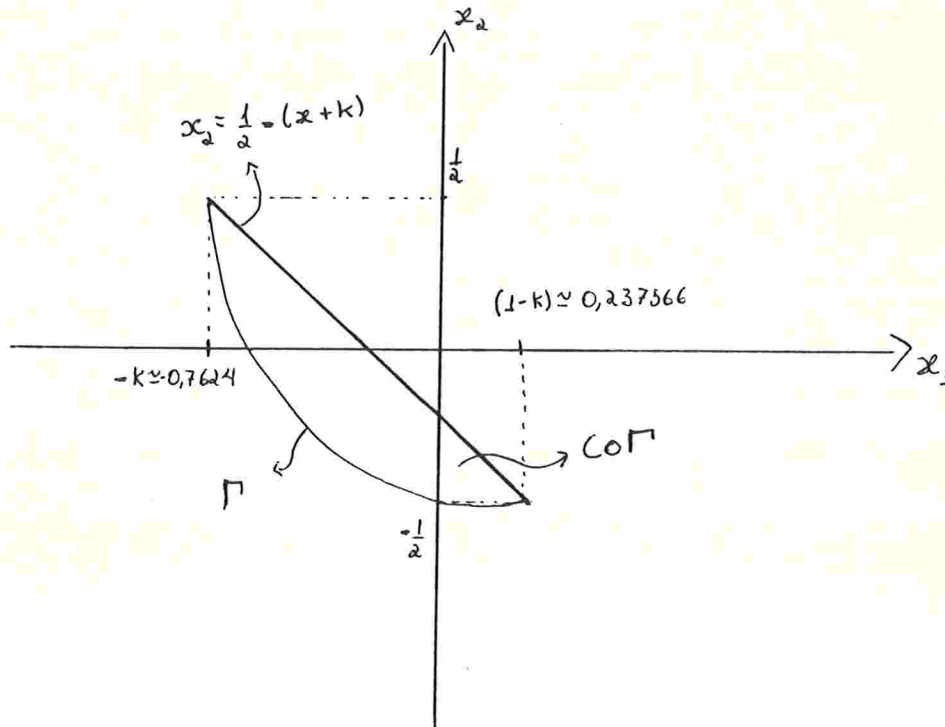
que tem solução.

- 3) Os itens 1) e 2) dão um contra-exemplo para a Proposição 2.3 ítem 2).
- 4) A partir da Proposição 2.3 ítem 1) temos que $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset$ e de Conti temos que $\mathcal{A}(t, 1, A, \Gamma) = \emptyset$, com isto temos um contra-exemplo para a Proposição 2.4 ítem 1).

Contra-exemplo 3 ($\lambda \in \sigma(e^{tA})$ e $1 \notin \sigma(e^{tA})$)

Consideremos agora o caso em que λ é autovalor de e^{tA} . Sejam $A=I$, $\lambda = e^t$ e

$$\Gamma = \left\{ \left(\cos t - k, \sin t - \frac{1}{2} \right) : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } k = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)} \simeq 0.762434 \right\}$$



obs: $(0, 0) \notin \text{co}\Gamma$.

1) $\mathcal{A}_0\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}, A, \text{co}\Gamma\right) = \emptyset$

Sejam $x \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \text{co}\Gamma$. Temos então que

$$(\lambda I - e^{\frac{\pi}{2}}A)x = (e^{\frac{\pi}{2}}I - e^{\frac{\pi}{2}}A)x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(e^{\frac{\pi}{2}}A - I)\gamma = \begin{pmatrix} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)\gamma_1 \\ (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)\gamma_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para todo $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \text{co}\Gamma$ (pois $(0, 0) \notin \text{co}\Gamma$).

2) $R_0(A, \text{co}\Gamma) \neq \emptyset$ pois

$$-Ax = -x \in \text{co}\Gamma,$$

para todo x tal que $-x \in \text{co}\Gamma$.

3) Os itens 1) e 2) dão um contra-exemplo para a Proposição 2.3 item 1).

4) $\mathcal{A}(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}, A, \Gamma) \neq \emptyset$

De fato, consideremos $x \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ e

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t - k \\ \sin t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo $c \in C_\Gamma$. Temos portanto que a solução de (LA) será

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA} \left(x + \int_0^t e^{-sA} c(s) ds \right) = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t e^{-s} (\cos s - k) ds \\ \int_0^t e^{-s} (\sin s - \frac{1}{2}) ds \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} e^t x_1 \\ e^t x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sin t - \cos t}{2} + k + (-k + \frac{1}{2})e^t \\ \frac{-\cos t - \sin t}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (*). \end{aligned}$$

Calculando-se (*) para $t = \frac{\pi}{2}$ temos que

$$(*)|_{t=\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{2}} x_1 \\ e^{\frac{\pi}{2}} x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + k + (-k + \frac{1}{2})e^{\frac{\pi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{2}} x_1 \\ e^{\frac{\pi}{2}} x_2 \end{pmatrix}.$$

Portanto $(x_1, x_2) \in \mathcal{A}(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}, A, \Gamma)$.

5) Os itens 1) e 2) são ainda contra-exemplo para Proposição 2.2.

6 - O problema do tempo mínimo para λ fixo

Neste parágrafo vamos estudar o problema de λ -atingibilidade em tempo mínimo que citamos na introdução deste capítulo. Para isto suporemos

que exista pelo menos um ponto λ -atingível em algum tempo t , ou seja, consideraremos

$$\mathcal{A}(\lambda, A, \Gamma) = \bigcup_{t>0} \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \neq \emptyset.$$

Na linguagem do capítulo 1, fixemos inicialmente o conjunto objetivo no nosso contexto:

Definição 2.3 (Conjunto objetivo)

Considerando dados λ e $x \in \mathcal{A}(\lambda, A, \Gamma)$ utilizaremos como *conjunto objetivo* o conjunto :

$$\mathcal{O}(t) = \{\lambda x\} \text{ para todo } t > 0$$

O *tempo mínimo* associado ao nosso problema de λ -atingibilidade é, assim, a função:

$$\tau(x) = \inf \{t \geq 0 : J_{t,A,\lambda} x \in W(t, A, \Gamma)\},$$

onde $x \in \mathcal{A}(\lambda, A, \Gamma)$.

Temos imediatamente a

Proposição 2.10

São válidas as seguintes asserções:

- 1) Se Γ é compacto e $x_0 \in \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$ então existe um controle ótimo $u^* \in C_\Gamma$ que leva x_0 em λx_0 em tempo mínimo. Além disto, este controle é extremal ao conjunto de atingibilidade e satisfaz um princípio do máximo. (Vide Teorema 1.3)
- 2) $\dim W(t, A, \Gamma)$ é constante, onde, dado um subconjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ dizemos que $\dim A = \dim(spA)$, e spA denota o conjunto das combinações lineares de elementos de A . (Vide [6])

Observação:

Considerando a função tempo mínimo temos pela Proposição anterior que, Γ sendo compacto, $\tau(x)$ é mínimo. Além disso, se $\lambda \neq 1$ temos

$$\tau(x) = 0 \iff x = 0$$

e assim:

$$J_{\tau(x),A,\lambda}x \in W(\tau(x), A, \Gamma).$$

No caso $\lambda = 1$ com Γ compacto e $\tau(x) > 0$ temos por [4] e [5] que $x \in \mathcal{A}(\tau(x), 1, A, \Gamma)$ e $J_{\tau(x),A,1}x \in W(\tau(x), A, \Gamma)$.

Nosso intuito agora é dar uma propriedade, do tipo da estabelecida por Hautus em [6], que o controle ótimo tem em relação ao conjunto de λ -atingibilidade. Esta propriedade é dada pela seguinte

Proposição 2.11

Se Γ é compacto e o par (A, Γ) satisfaz a condição:

$$y \in \mathbb{C}^n, A^*y = \lambda y, y^*\gamma = cte (\forall \gamma \in \Gamma) \implies y = 0 \quad (H4)$$

então,

$$det J_{\tau(x),A,\lambda} \neq 0 \implies x \in \partial \mathcal{A}(\tau(x), \lambda, A, \Gamma) \quad (4)$$

Dem: A hipótese (H4) é conhecida por ser equivalente a

$$dim W(t, A, \Gamma) = n, \quad \forall t > 0.$$

(Ver Hautus [6]).

Portanto,

$$dim \mathcal{A}(\tau(x), \lambda, A, \Gamma) = dim J_{\tau(x),A,\lambda}^{-1} W(\tau(x), A, \Gamma) = n,$$

e assim, pela continuidade de $\mathcal{A}(\cdot, \lambda, A, \Gamma)$, temos, para t numa vizinhança de $\tau(x)$, que

$$dim \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) = n.$$

Mas como $det J_{t,A,\lambda} \neq 0$ (e portanto $\tau(x) > 0$), vale

$$x \in \mathcal{A}(\tau(x), \lambda, A, \Gamma),$$

Agora, se

$$x \in int \mathcal{A}(\tau(x), \lambda, A, \Gamma)$$

existe uma vizinhança N_ρ de x com $\rho > 0$ contida em $\mathcal{A}(\tau(x), \lambda, A, \Gamma)$. Se

$$x \notin \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma) \text{ para algum } t \text{ numa vizinhança de } \tau(x),$$

o conjunto $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$ sendo convexo e fechado para t suficientemente perto de $\tau(x)$, está estritamente separado de $\{x\}$. Então existem pontos em N_ρ , portanto em $\mathcal{A}(\tau(x), \lambda, A, \Gamma)$, cuja distância a $\mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$ é maior ou igual a ρ .

Isto não pode acontecer para todo t , em particular para $t < \tau(x)$, devido à continuidade do conjunto dos pontos λ -atingíveis em $t = \tau(x)$. Portanto, existe $t < \tau(x)$ para o qual $x \in \mathcal{A}(t, \lambda, A, \Gamma)$, o que contradiz a definição do próprio $\tau(x)$. Concluindo:

$$x \in \partial\mathcal{A}(\tau(x), \lambda, A, \Gamma). \quad \blacksquare$$

Além desta propriedade extremal, podemos ainda enunciar uma maximal:

Teorema 2.5 (Princípio do Máximo para pontos λ -atingíveis)

Sob as hipóteses da Proposição 2.11 temos que todo controle ótimo em tempo mínimo também é um controle maximal, no sentido de ser uma solução u^ de*

$$y_x^* e^{(t-s)A} u^*(s) = \max \left\{ y_x^* e^{(t-s)A} \gamma : \gamma \in \text{co}\Gamma \right\}, \quad s \in]0, \tau(x)]. \quad (MAX)$$

Dem.: Tendo em vista que pelas hipóteses da Proposição 2.11

$$J_{\tau(x), A, \lambda} x \in W(\tau(x), A, \Gamma)$$

se verifica, e que além disto, para todo $t > 0$ podemos ainda afirmar que:

$$W(\tau(x), A, \Gamma) = W(\tau(x), A, \overline{\text{co}\Gamma})$$

e

$$W(t, A, \overline{\text{co}\Gamma}) \subset \overline{W(t, A, \Gamma)},$$

vale, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, que

$$\begin{aligned} y^* J_{\tau(x), A, \lambda} x &\leq \sup \left\{ y^* v : v \in W(\tau(x), A, \overline{\text{co}\Gamma}) \right\} = \\ &= \sup \left\{ y^* \int_0^{\tau(x)} e^{(t-s)A} c(s) ds : c \in C_{\overline{\text{co}\Gamma}} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, existe $y_x \neq 0$ tal que

$$y_x^* J_{\tau(x), A, \lambda} x = \sup \left\{ y_x^* \int_0^{\tau(x)} e^{(t-s)A} c(s) ds : c \in C_{co\Gamma} \right\}. \quad (5)$$

Por outro lado, como $co\Gamma$ é compacto, temos pelo Princípio do Máximo de Pontryaguin que

$$\begin{aligned} \sup \left\{ y^* \int_0^t e^{(t-s)A} c(s) ds : c \in C_{co\Gamma} \right\} &= \\ &= \int_0^t \max \left\{ y^* e^{(t-s)A} \gamma : \gamma \in co\Gamma \right\} ds. \end{aligned}$$

Portanto, diante de (5), temos

$$y_x^* J_{\tau(x), A, \lambda} x = \int_0^{\tau(x)} \max \left\{ y_x^* e^{(t-s)A} \gamma : \gamma \in co\Gamma \right\} ds.$$

Seja u^* um controle ótimo em tempo mínimo, isto é,

$$J_{\tau(x), A, \lambda} x = \int_0^{\tau(x)} e^{(t-s)A} u^*(s) ds.$$

Neste caso,

$$\int_0^{\tau(x)} \left[\max \left\{ y_x^* e^{(t-s)A} \gamma : \gamma \in co\Gamma \right\} - y_x^* e^{(t-s)A} u^*(s) \right] ds = 0,$$

mostrando assim a igualdade (MAX), acima. ■

BIBLIOGRAFIA

- [1] Lee, E.B. e Markus, L., *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley, 1967.
- [2] Pontryaguin, L.S. et alii, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.
- [3] Macki, J. e Strauss, A., *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] Conti, R., *Return Sets of a Linear Control Process*, Journal of Optimization: Theory and Applications, vol.41, n° 1, Settembre, 1983, pg 37 - 53.
- [5] Conti, R., *Problemi di controllabilità periodica*, Seminario Matematico e Fisico de Milano, Vol. LII, 1982.
- [6] Hautus, M.L.J., *Controllability and observability conditions of linear autonomous systems*, Indagationes Math., 31 (1969), 443-448.
- [7] Hermes, H. e LaSalle, J.P., *Functional analysis and time-optimal control*, Academic Press, 1969.
- [8] Athans, M. e Falb, P.L., *Optimal Control: An Introduction to the theory and its Applications*, Mc Graw-Hill, New York, 1966.